Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

119

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00

Τα Μαθηματικά της ... μπάλας!

Η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων

Οι ρητοί αριθμοί και οι πράξεις με ρητούς

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 119
Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2021
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Φερεντίνος Σπύρος

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί / ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Καλή Ανάσταση, με υγεία και πολλές ευχές για έξοδο από τις δύσκολες ατραπούς .....

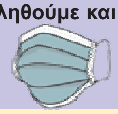
Το τεύχος αυτό περιέχει κυρίως θέματα **Μαθηματικών του σχολείου**.

Δεν λείπουν βέβαια και **ενδιαφέροντα θέματα** από νέους φίλους και αναγνώστες του περιοδικού.

Με **ιδιαίτερη χαρά** δεχτήκαμε κείμενα από **μαθητές** που αναφέρονται σε **πρωτότυπα θέματα Μαθηματικής μεθοδολογίας αλλά και Μαθηματική ποίηση.**

Θα θέλαμε, για ακόμη μία φορά, να σας επισημάνουμε ότι το περιοδικό **περιμένει κείμενα αναγνωστών** τα οποία με **χαρά θα επιμεληθούμε και δημοσιεύσουμε.**

Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.



Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Τα Μαθηματικά της … μπάλας!

των Αχιλλέα Μίτιλη και Γιάννη Σιούλα

Άραγε ένα τόσο αγαπητό σπορ, όπως είναι το ποδόσφαιρο, που αρέσει ιδιαίτερα στα παιδιά και περισσότερο στα αγόρια, τι σχέση μπορεί να έχει με τα Μαθηματικά;

Η απάντηση είναι εύκολη! Τα Μαθηματικά έχουν μεγάλη σχέση με την μπάλα! Θα έχετε ακούσει εκφράσεις όπως «σέντρα διαβήτη», «πάσα με το μοιρογνωμόνιο» κ.ά., όπου το ποδόσφαιρο δανείζεται κάτι από την επιστημονική αξία και τεκμηρίωση των Μαθηματικών, για να δώσει έμφαση σε μια προσπάθεια ενός αθλητή ή ακόμα για να αναβαθμιστεί το ίδιο σαν άθλημα! Αυτό είναι ένα πολύ συνηθισμένο φαινόμενο και το συναντούμε σε πολλούς και διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας! Όμως εμείς θα μιλήσουμε για την ίδια την μπάλα ποδοσφαίρου! Τη στρογγυλή θεά, όπως την αποκαλούν!

Βρισκόμαστε σε μία σχολική τάξη και το μάθημα των Μαθηματικών ήταν σχετικό με τα πολύγωνα. Ο καθηγητής των Μαθηματικών μπήκε στην τάξη κρατώντας μια μπάλα ποδοσφαίρου, από αυτές τις παραδοσιακές με τα ασπρόμαυρα πολύγωνα:

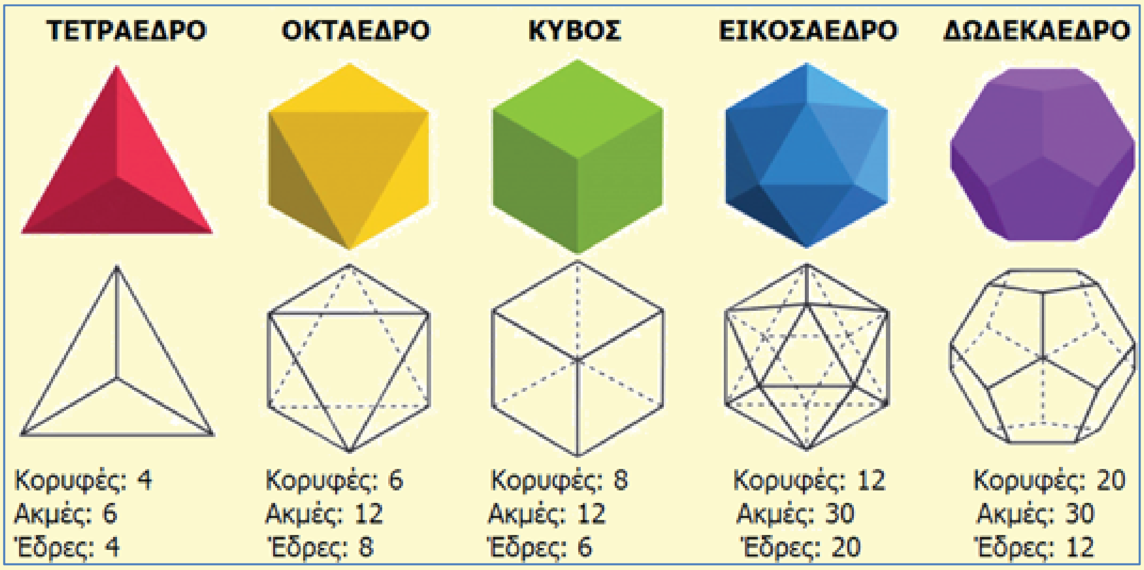
«Ξέρετε ότι για να φτιαχτεί αυτή η μπάλα χρειάστηκαν πολλά Μαθηματικά και ο… Θεαίτητος;», ρώτησε ο καθηγητής.

Οι μαθητές κοίταζαν με δυσπιστία, τα δε αγόρια, όπως άλλωστε αναμενόταν, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο Θεαίτητος ο Αθηναίος ήταν Έλληνας μαθηματικός του 4ου αιώνα π.Χ., από τους λίγους Έλληνες μαθηματικούς που ήταν γηγενής Αθηναίος, καθώς οι περισσότεροι απ’ αυτούς προέρχονταν από διάφορες ελληνικές πόλεις. Ήταν μαθητής και συνεργάτης του Πλάτωνα και μάλιστα οι μελέτες του για την ασυμμετρία, τη φύση της γνώσης, αλλά και πολλά άλλα θέματα, αναφέρονται στον πλατωνικό διάλογο «Θεαίτητος», που πήρε προς τιμήν του το όνομά του!

Σ’ αυτόν λοιπόν αποδίδεται η πλήρης περιγραφή των κανονικών πολύεδρων.

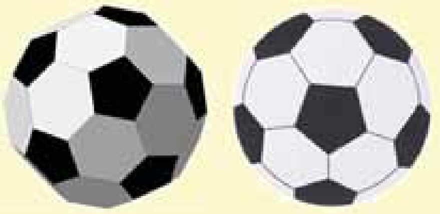
Στη Γεωμετρία, πολύεδρο ονομάζεται ένα στερεό που ο όγκος του περιορίζεται από επίπεδες έδρες. Έτσι, οι κύβοι και οι πυραμίδες ανήκουν στην οικογένεια των πολύεδρων, αντίθετα με τις σφαίρες και τους κυλίνδρους, που περιορίζονται από καμπύλες επιφάνειες και δεν ανήκουν σ’ αυτά. Ο Θεαίτητος ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τα απολύτως συμμετρικά πολύεδρα, δηλαδή αυτά που όλες τους οι έδρες και όλες τους οι γωνίες είναι ίσες. Η ανακάλυψή του είναι μάλλον απογοητευτική! Βρήκε μόνο πέντε (!) και μάλιστα απέδειξε ότι δεν υπάρχουν άλλα. Πέντε στερεά και αυτό είναι όλο!



Αργότερα αυτά τα πέντε πολύεδρα θα ονομαστούν Πλατωνικά Στερεά, γιατί ο Πλάτων με μια θεωρία του θα τα αντιστοιχούσε με τα στοιχεία του κόσμου:

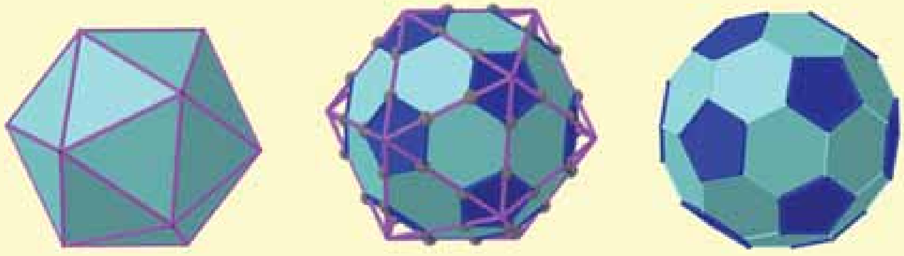
Η φωτιά αντιστοιχεί στο τετράεδρο, η γη στο εξάεδρο, ο αέρας στο οκτάεδρο και το νερό στο εικοσάεδρο. Όσο για το δωδεκάεδρο με τις πεντάγωνες έδρες του, ο Πλάτων υποστήριζε ότι αποτελούσε τη μορφή του σύμπαντος!

Αν παρατηρήσουμε μια μπάλα ποδοσφαίρου, αυτή διαθέτει γεωμετρικά μοτίβα (αποτελείται από γεωμετρικά σχήματα): Είκοσι (20) εξάγωνα και δώδεκα (12) πεντάγωνα. Στις παραδοσιακές μπάλες ποδοσφαίρου τα εξάγωνα είναι άσπρα και τα πεντάγωνα μαύρα.



Οι γεωμέτρες αποκαλούν την μπάλα ποδοσφαίρου «κόλουρο εικοσάεδρο»!

Ας αρχίσουμε από ένα εικοσάεδρο από πλαστελίνη κι ας κόψουμε όλες τις κορυφές του.



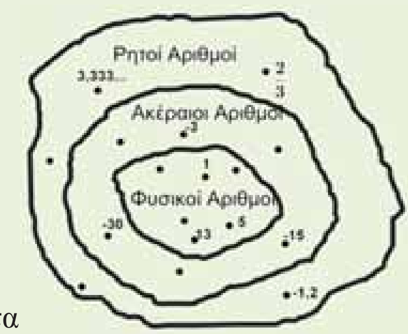
Τα είκοσι τρίγωνα των οποίων κόπηκαν οι κορυφές, θα γίνουν εξάγωνα, ενώ οι δώδεκα (12) κόγχες που αφαιρέθηκαν θα δημιουργήσουν τα δώδεκα πεντάγωνα. Κι έτσι κατασκευάστηκε μια (παραδοσιακή) μπάλα ποδοσφαίρου! Βέβαια δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η μπάλα ποδοσφαίρου είναι φτιαγμένη από δέρμα και πλαστικό και τα υλικά αυτά επιτρέπουν μικρές παραμορφώσεις στην επιφάνειά τους. Έτσι η μπάλα παίρνει το συνηθισμένο στρογγυλό σχήμα που ξέρουμε. Αν ήταν κατασκευασμένη από γυαλί ή μάρμαρο, θα είχε κανονικά το σχήμα του «κόλουρου εικοσάεδρου»…

Το ερώτημα είναι αν ο Μέσι και ο Κριστιάνο Ρονάλντο τα ξέρουν όλα αυτά…

***Πηγές:** Launay, M. (2019). Η μεγάλη περιπέτεια των μαθηματικών. Αθήνα: Πατάκη*

Οι ρητοί αριθμοί και οι πράξεις με ρητούς

Στέλιος Μαραγκάκης Ανδρέας Τριανταφύλλου



Ποιοι είναι οι ρητοί αριθμοί;
Πολύ απλουστευμένα θα μπορούσαμε να πούμε ότι:
Το σύνολο των Φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ και των αρνητικών που προκύπτουν βάζοντας μπροστά από κάθε φυσικό αριθμό το πρόσημο ($-$) ονομάζεται σύνολο των Ακεραίων αριθμών και συμβολίζεται:

$$\mathbb{Z}=\{\ ...,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,...\ \}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\ \}.$$

Το σύνολο που περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς, όλα τα κλάσματα, τους δεκαδικούς με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων και τους δεκαδικούς περιοδικούς (κάποιο τμήμα του δεκαδικού μέρους επαναλαμβάνεται συνεχώς) ονομάζεται **σύνολο των ρητών αριθμών** και συμβολίζεται: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{\mu}{\nu}\ \mu,\nu\in\mathbb{Z},\nu\neq 0\right\}$

- **Ρητοί** λοιπόν αριθμοί, είναι όσοι αριθμοί μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος π.χ.

$$1=\frac{1}{1}=\frac{-5}{-5}=\frac{1.000}{1.000}=...,\ -5=\frac{-5}{1},\ 2,75=\frac{275}{100},\ 0,33333\ldots=\frac{1}{3},\ \text{κ.λπ.}$$

Το **μηδέν** «0» δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν **το ίδιο πρόσημο**. Για παράδειγμα οι αριθμοί $+1,15,\ +\frac{7}{3},10$ είναι ομόσημοι, καθώς και οι αριθμοί $-3,25,\ -160,\ -\frac{5}{3}$.

Ετερόσημοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο,** δηλαδή ο **ένας είναι θετικός** και **ο άλλος αρνητικός**.

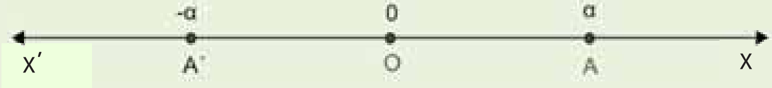
Για παράδειγμα οι αριθμοί $+\frac{7}{3}$ και $-3,25$ είναι ετερόσημοι.

Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α είναι η απόσταση του από το 0 και συμβολίζεται $|\alpha|$. Η απόσταση είναι πάντα θετική άρα και **η απόλυτη τιμή είναι πάντα θετικός αριθμός**, π.χ. $|-5|=+5,\ |+5|=+5,\ |-3,2|=+3,2$.

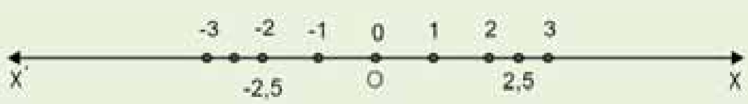
Δυο ρητοί αριθμοί λέγονται **αντίθετοι** αν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο π.χ. ο 5 με τον -5, επίσης το άθροισμα δυο αντίθετων αριθμών είναι πάντα 0, π.χ. $-3+3=0$

Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία του άξονα.

Έστω ο ημιάξονας Ox και ο αντικείμενός του Ox΄, οπότε λέμε ότι έχουμε τον άξονα xx΄.



Αν ο θετικός αριθμός α αντιστοιχίζεται στο σημείο A, ο αριθμός –α αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό σημείο A΄ του A ως προς το σημείο O. Οπότε έχουμε τον άξονα των ρητών αριθμών, ο οποίος περιλαμβάνει τους αρνητικούς αριθμούς, το μηδέν και τους θετικούς αριθμούς.

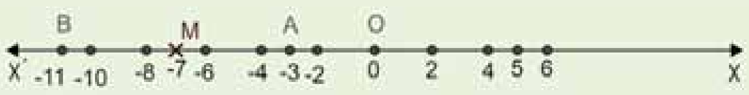


Αν ένα σημείο Α του άξονα x΄x αντιστοιχίζεται σε ένα αριθμό α, τότε ο αριθμός α λέγεται **τετμημένη** του σημείου Α.

Παράδειγμα

Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν β = – 11 και α = – 3.

Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι ΑΒ = ΟΒ – ΟΑ = 11 – 3 = 8. Έχουμε 8/2 = 4.



Είναι ΟΜ = ΟΑ + ΑΜ = 3 + 4 = 7. Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα η τετμημένη του έχει πρόσημο « – ». Άρα το σημείο Μ έχει τετμημένη –7.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεση ρητών

Στη **πρόσθεση ομόσημων** αριθμών **διατηρούμε το πρόσημο των προσθετέων** και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους π.χ. $(-5)+(-3)=-(5+3)=-8$, $(+5)+(+10)=+(5+10)=+15=15$, $(-5)+(-3)+(-15)+(-8)+=-(5+3+15+8)=-31$

Στη **πρόσθεση ετερόσημων** αριθμών **βάζουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου σε απόλυτη τιμή αριθμού** και αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους π.χ. $(-5)+(+3)=-(5-3)=-2$.

Σε ένα άθροισμα μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις και το σύμβολο της πρόσθεσης και να γράψουμε τους προσθετέους με το πρόσημο τους, π.χ.

$$(-3)+(+7)+(-2)+(-6)=-3+7-2-6=-11+7=-4.$$

Παραδείγματα

$$\left(+\frac{6}{10}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{6}{10}\right)+\left(+\frac{8}{10}\right)=+\left(\frac{6}{10}+\frac{8}{10}\right)=+\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

$$\left(-\frac{6}{10}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{6}{10}\right)+\left(+\frac{8}{10}\right)=+\left(\frac{8}{10}-\frac{6}{10}\right)=+\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{1}{5}$$

Αφαίρεση ρητών

- Για να αφαιρέσουμε από ένα ρητό αριθμό α ένα άλλο ρητό αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β π.χ. $(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-(5-3)=-2$

Παραδείγματα

$(-5)-(-4)=$........ $(+8)-(+11)=$....... $\left(-\frac{6}{10}\right)-\left(+\frac{4}{5}\right)=$...... $\left(-2\frac{6}{10}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)=$........

Μετατρέπουμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις και έχουμε:

$$(-5)-(-4)=(-5)+(+4)=-(5-4)=-1$$

$$(+18)-(+11)=(+18)+(-11)=+(18-11)=+7=7$$

$$\left(-\frac{6}{10}\right)-\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{7}{5}$$

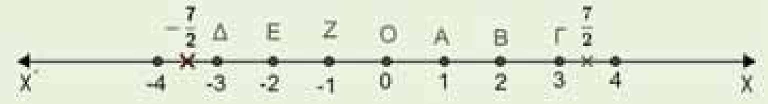
$$\left(-2\frac{6}{10}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{26}{10}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{13}{5}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=-\left(\frac{13}{5}-\frac{4}{5}\right)=-\frac{9}{5}$$

Σύγκριση ρητών

- **Μεγαλύτερος** από δύο ρητούς είναι εκείνος που βρίσκεται **δεξιότερα** από τον άλλο στον άξονα.
- Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από το 0 και από κάθε αρνητικό ρητό.
- Μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
- Μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα: Ας βρούμε τους ακέραιους x, όταν $|x| \le \frac{7}{2}$

Οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι τετμημένες των σημείων του άξονα x΄x που η απόστασή τους από το σημείο Ο είναι μικρότερη από $\frac{7}{2}$.



Από το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι τα σημεία αυτά είναι τα Δ, Ε, Ζ, Ο, Α, Β και Γ. Οπότε οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι: $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

Πολλαπλασιασμός ρητών

Ο «πολλαπλασιασμός» των προσήμων δίνει:

$$\left.\begin{matrix}(+)\cdot(+)=+\\(-)\cdot(-)=+\end{matrix}\right\}\text{ομόσημα} \qquad \left.\begin{matrix}(-)\cdot(+)=-\\(+)\cdot(-)=-\end{matrix}\right\}\text{ετερόσημα}$$

Για να **πολλαπλασιάσουμε δυο ρητούς αριθμούς** πρώτα «πολλαπλασιάζουμε» τα πρόσημα τους και μετά τις απόλυτες τιμές τους,
π.χ. $(+6)\cdot(-3)=(+)\cdot(-)(6\cdot 3)=-18$

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων, που κανένας τους δεν είναι 0, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- **το πρόσημο « + »**, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο.**
- **το πρόσημο « – »**, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό.**

Σημαντική παρατήρηση: Αν **ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες είναι 0,** τότε και **το γινόμενο είναι 0.**

Παραδείγματα: **α.** Να υπολογίσετε το γινόμενο $(+6)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(-6)$

Αφού οι αρνητικοί παραγόντες είναι τρεις, δηλαδή περιττός αριθμός, το γινόμενο έχει πρόσημο «–».

Οπότε $(+6)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-1)\cdot(-6)=-(6\cdot 3\cdot 5\cdot 1\cdot 6)=-540$.

β. Να υπολογίσετε το γινόμενο $A=(+606)\cdot(-3)\cdot(0)\cdot(-111)\cdot(-6)$

Παρατηρούμε ότι ένας παράγοντας του γινομένου είναι 0, άρα και Α = 0

Για να **διαιρέσουμε δυο ρητούς αριθμούς,** πρώτα διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

το πρόσημο « + », αν είναι **ομόσημοι**.
το πρόσημο « – », αν είναι **ετερόσημοι**.

Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha:\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta x=\alpha$ όταν $\beta\neq 0$

- Είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$

Παραδείγματα:

Να υπολογίσετε τα πηλίκα: α. $49:(-7)$ β. $\frac{8}{3}:\left(-\frac{1}{6}\right)$

Λύση

α. $49:(-7)=-\left(\frac{49}{7}\right)=-7$ **β.** $\frac{8}{3}:\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{6}{1}\right)=-\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{1}\right)=-16$

Να εκτελέσετε τις πράξεις: $-3-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-5}{3}\right)-\frac{4}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{-2}\right)$

Λύση

$$-3-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-5}{3}\right)-\frac{4}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{-2}\right)=-3-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{3}\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=$$

$$=-3-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{5}{2}\right)=-3-\frac{5}{6}-\frac{40}{6}=-\frac{18}{6}-\frac{5}{6}-\frac{40}{6}=-\frac{63}{6}=-10,5\,.$$

Ας σταθούμε τώρα σε μερικά σημεία της θεωρίας που θέλουν ιδιαίτερη προσοχή.

α. Τι σημαίνει $\frac{+8}{-10}$;

Είναι αυτό που γράφουμε διαφορετικά $(+8):(-10)$, δηλαδή τον αριθμό +8 δια του αριθμού -10, δηλαδή το αποτέλεσμα της διαίρεσης αυτής είναι ο ρητός αριθμός $-\frac{8}{10}$ Τον αριθμό αυτό εκτελώντας τη διαίρεση μπορούμε να τον γράψουμε και ως δεκαδικό $-0,8$.

β. Τι σημαίνει $-\left(-\frac{6}{10}\right)$;

Είναι ο αντίθετος του ρητού αριθμού $-\frac{6}{10}$, δηλαδή ο $+\frac{6}{10}$. Έτσι $-\left(-\frac{6}{10}\right)=+\frac{6}{10}=\frac{6}{10}=0,6$

Συμπληρώστε τώρα τις ισότητες: $-(-10)=......,-(-1,39)=......,-(+6)=......$

Πως σκεφτόμαστε και εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών.

Αλγεβρικά Αθροίσματα, Απαλοιφή Παρενθέσεων

Όταν μια παρένθεση έχει **μπροστά της το πρόσημο « + » ή δεν έχει πρόσημο** μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το « + », αν έχει, και να γράψουμε τους όρους που περιέχει **με τα πρόσημά τους**. π.χ. $(15-10)+(-8+3)=15-10-8+3=\ldots$

Όταν μια παρένθεση έχει **μπροστά της το πρόσημο « − »** μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το « − », και να γράψουμε τους όρους που περιέχει **με αλλαγμένα τα πρόσημά τους**. π.χ. $-(9-7)-(-3+6)=-9+7+3-6=\ldots$

Σε μια παράσταση η οποία περιέχει παρενθέσεις και αγκύλες η απαλοιφή συνήθως γίνεται από το εσωτερικό της παράστασης προς το εξωτερικό, μετατρέποντας σταδιακά τις αγκύλες σε παρενθέσεις.

Παραδείγματα:

- Αν $\alpha-\beta=-3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=5+(-2+\alpha)-(5+\beta-\gamma)+\gamma$
- Για να την υπολογίσουμε εφαρμόζουμε τους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων και έχουμε:
$A=5+(-2+\alpha)-(5+\beta-\gamma)-\gamma=5-2+\alpha-5-\beta+\gamma-\gamma=-2+\alpha-\beta=-2+(-3)=-5$
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=-5+\left[-2-(3-5)+(-4+6)\right]$ με δύο τρόπους: **α.** κάνοντας πράξεις μέσα στις παρενθέσεις
β. απαλείφοντας τις παρενθέσεις

Λύση

Έχουμε

α. $A=-5+\left[-2-(3-5)+(-4+6)\right]=-5+\left[-2-(-2)+(+2)\right]=$

$=-5+(-2+2+2)=-5+(+2)=-5+2=-3$

β. $A=-5+\left[-2-(3-5)+(-4+6)\right]=-5+(-2-3+5-4+6)=-5-2-3+5-4+6=-3$

- Βρείτε ποιος αριθμός x ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα: $x+(-5)=+\frac{1}{2}$

Λύση: Ας δούμε πως λύνεται η εξίσωση $x+(-5)=+\frac{1}{2}$

Για να λύσουμε την εξίσωση πρέπει να καταλήξουμε σε μία ισότητα $x=\ldots$

Για να γίνει αυτό πρέπει να βρούμε τρόπο να «φύγει» το (-5) από το πρώτο μέλος της ισότητας. Ξέρουμε ότι όταν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό προκύπτει ισοδύναμη ισότητα.

Επίσης ξέρουμε ότι το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι 0. Έτσι προσθέτουμε τον αντίθετο του (-5) τον $(+5)$ και στα δύο μέλη και έχουμε: $x+(-5)=+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$x+(-5)+(+5)=+\frac{1}{2}+(+5)\Leftrightarrow x+0=+\frac{1}{2}+(+5)\Leftrightarrow x=+\frac{1}{2}+5\Leftrightarrow x=+\frac{1}{2}+\frac{10}{2}\Leftrightarrow x=\frac{11}{2}\Leftrightarrow x=5{,}5.$$

- Να υπολογίσετε τους αριθμούς x, y και z αν x=α–β–γ, y=β+γ–α και z=–β–γ+α, όπου $\alpha=-\frac{3}{4}$, $\beta=+\frac{1}{2}$ και $\gamma=-\frac{5}{6}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $-x+y-z$

Λύση

$$x=\alpha-\beta-\gamma=\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=-\frac{9}{12}-\frac{6}{12}+\frac{10}{12}=-\frac{5}{12}$$

$$y=\beta+\gamma-\alpha=\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{6}{12}-\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{5}{12}$$

$$z=-\beta-\gamma+\alpha=-\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=-\frac{6}{12}+\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=-\frac{5}{12}$$

και $-x+y-z=-\left(-\frac{15}{12}\right)+\left(\frac{15}{12}\right)-\left(-\frac{15}{12}\right)=+\frac{15}{12}+\frac{15}{12}+\frac{15}{12}=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε με δύο τρόπους τις αριθμητικές παραστάσεις:

α. $-10+(5-8)-(4-20)=$

β. $25+(18-7)-(16-22)-(14+30)=$

2. Ελέγξτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες ισχύουν:

α. $(-5)-(+2)+(-2)=-9$

β. $(-7)-(-3)=(-9)+(-2)$

γ. $(+6)-(+9)=(-2)+(-1)$

3. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(-5)+(-7)-(+4)-(-9)+(-14)-(-15)=$

β. $(-3)-(11-9)-(-12+11)-(5+2)=$

γ. $-(-5+3)-\{-5+(-4+8)-[-3-(-8+2)]\}-(8-5)=$

4. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α. $42-[36-17-(9-28)]=$

β. $-4-(-5+3)-[6-(-2+7)+(-1-2+7)]-(15-19)=$

γ. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-(+2)+\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}\right)=$

δ. $\frac{(-1)}{-4}-\left(\frac{-2}{3}-7+9\right)+(-4+8)-\left(\frac{9}{18}-5\right)=$

5. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(-3)\cdot(+4)\cdot(-2)\cdot(-4)=$

β. $(-2)\cdot(+2)+3\cdot(12-9)-5\cdot(8-10)=$

γ. $[3(5-6)]\cdot[5+(4-5)]\cdot(6-4)=$

δ. $(-3)\cdot\left(10+3-\frac{2}{3}\right)-4\cdot\left(4-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(7-\frac{4}{8}\right)\cdot(-1)=$

6. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

α. $\left(-\frac{4}{8}\right)\left[(-4)+\left(-\frac{2}{3}\right)-(-3)\right]=$

β. $\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(+\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{16}{4}\right)=$

7. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α. $(10+8-14):(-2)=$

β. $[60\cdot(-4)\cdot(-7)]:(-3)=$

γ. $\left[2:\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{9}\right)\right]:\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+\left(\frac{-3}{4}\right)\right]=$

Από τις συναρτήσεις στις εξισώσεις

Δ. Παλαιογιαννίδης, Α. Φαλαγκάρας

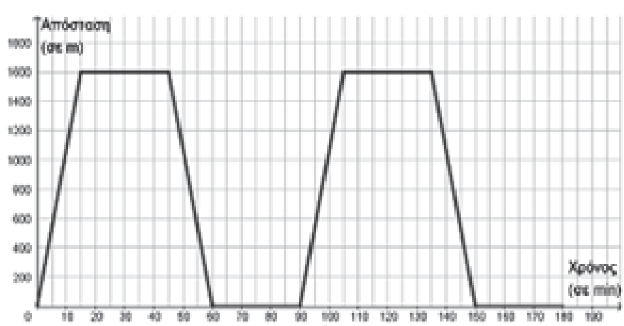
Η απορία που εκφράζει με την ερώτησή του το παιδί της εικόνας που … «πήρε τα άστρα», ταλαιπωρεί πολλά παιδιά όταν αρχίζουν να ασχολούνται με την έννοια της συνάρτησης αφού, πρώτα, έχουν ασχοληθεί με τις εξισώσεις. Μήπως λοιπόν πρέπει να αναρωτηθούμε αν υπάρχει τρόπος να μην φτάσει ένα παιδί σε αυτό το ερώτημα; Σε αυτό το άρθρο θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε μια άλλη προσέγγιση της ύλης της Άλγεβρας της Β΄ Γυμνασίου, την λεγόμενη «συναρτησιακή προσέγγιση της Άλγεβρας».

Προαπαιτούμενα: Θα πρέπει να έχει προηγηθεί η ενασχόληση με την έννοια της μεταβλητής και την αναγωγή ομοίων όρων καθώς και η εξοικείωση με το καρτεσιανό επίπεδο τις συντεταγμένες των σημείων του.

1) Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

Στην εικόνα 1 εμφανίζεται η απόσταση (σε m) από το λιμάνι του Περάματος ενός ferryboat που κάνει την διαδρομή Πέραμα-Σαλαμίνα κάθε χρονική στιγμή t (σε min) από τις 09:00 μέχρι τις 12:00.

Βλέποντας αυτό το διάγραμμα μπορούμε να περιγράψουμε, χωρίς πολλές λεπτομέρειες ως προς τον χρόνο και την απόσταση από το Πέραμα, την κίνηση του ferryboat; Μπορούμε να πούμε πόσος χρόνος χρειάζεται για να κάνει την διαδρομή Πέραμα-Σαλαμίνα και πόσος για να κάνει την αντίστροφη διαδρομή;



Εικόνα 1

Αν κάποιος απαντήσει ότι χρειάζεται 15 min για να πάει και 15 min για να γυρίσει θα έχει κάνει λάθος; Κάποιος άλλος ισχυρίζεται ότι τα πλοίο μένει ακίνητο σε κάθε λιμάνι για 30 min. Συμφωνείς μαζί του;

Βλέποντας αυτό το διάγραμμα μπορούμε να περιγράψουμε, χωρίς πολλές λεπτομέρειες ως προς τον χρόνο και την απόσταση από το Πέραμα, την κίνηση του ferryboat; Μπορούμε να πούμε πόσος χρόνος χρειάζεται για να κάνει την διαδρομή Πέραμα-Σαλαμίνα και πόσος για να κάνει την αντίστροφη διαδρομή; Αν κάποιος απαντήσει ότι χρειάζεται 15 min για να πάει και 15 min για να γυρίσει θα έχει κάνει λάθος; Κάποιος άλλος ισχυρίζεται ότι τα πλοίο μένει ακίνητο σε κάθε λιμάνι για 30 min. Συμφωνείς μαζί του; Μπορούμε να βρούμε την απόστασή του πλοίου από το Πέραμα στις 09:55; Στις 10:10 ή στις 11:00; Βεβαίως, μπορούμε· στις 09:55 απέχει από το Πέραμα 400m, στις 10:10 βρίσκεται στο λιμάνι του Περάματος και στις 11:00 βρίσκεται στην Σαλαμίνα (πώς τα βρήκαμε αυτά; Αν δυσκολεύεσαι να τα βρεις, δες το παράδειγμα 2 που ακολουθεί). Μπορούμε να βρούμε πότε απέχει από το Πέραμα 1000m; Εδώ το πρόβλημα είναι λίγο πιο πολύπλοκο γιατί δεν έχουμε μια μόνο απάντηση· το πλοίο απέχει από το Πέραμα 1000m στις 09:10, στις 09:50, στις 10:40 και στις 11:20.

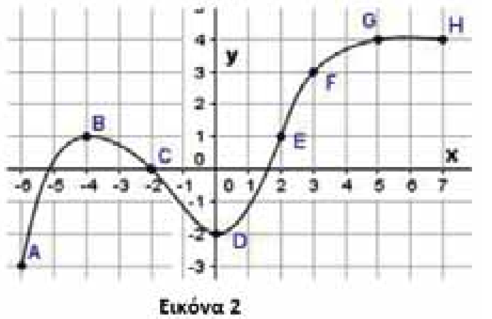
Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα χρειαζόμαστε άλλα στοιχεία εκτός από το διάγραμμα; Η απάντηση είναι όχι. Το διάγραμμα είναι αρκετό για να βρούμε τις πληροφορίες. Μπορούμε, ακόμα, με την βοήθεια του διαγράμματος να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα. Με κόκκινο χρώμα σημειώνουμε τις τιμές που βρήκαμε απαντώντας στα πιο πάνω ερωτήματα.

Χρόνος t (σε min)	**0**	**15**	**45**	**55**	**60**	**70**	**120**	**10**	**50**	**100**	**140**
Απόσταση s (σε m)	**0**	**1600**	**1600**	**400**	**0**	**0**	**1600**	1000			

2) Στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 2) αναπαρίσταται γραφικά η σχέση μεταξύ των τιμών δύο ποσοτήτων x και y.

Συγκεκριμένα, αναπαρίσταται η τιμή της μεταβλητής y για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής x, όταν $-6 \leq x \leq 7$. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου της καμπύλης μας δίνουν την σχέση μιας τιμής της ποσότητας x με την αντίστοιχη τιμή της y.
Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που μπορούμε να αντλήσουμε από την εικόνα, θα συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

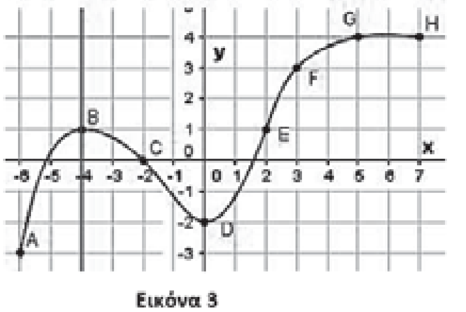
x	-4		-2		2			7
y		-3		0		3	4	



Εικόνα 2

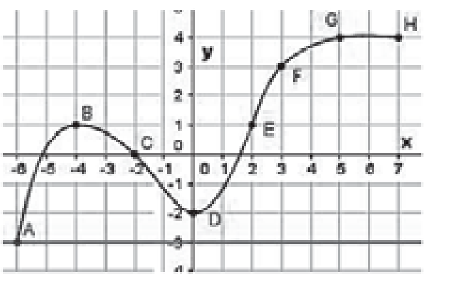
Στην πρώτη γραμμή του πίνακα έχουμε τιμές της μεταβλητής ποσότητας x και στην δεύτερη γραμμή τιμές της μεταβλητής y. Στην πρώτη στήλη δεδομένων μας δίνεται μία τιμή της μεταβλητής ποσότητας x (η τιμή $x = -4$) και πρέπει να βρούμε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής ποσότητας y.

Από την γραφική παράσταση, χαράσσοντας την κόκκινη γραμμή που είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το -4 του άξονα $x'x$ (εικόνα 3), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σημείο της καμπύλης που έχει τετμημένη -4 είναι το B. Η τεταγμένη του B είναι 1. Άρα η τιμή της ποσότητας y που αντιστοιχεί στην τιμή $x = -4$ είναι η $y = 1$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τις υπόλοιπες τιμές της y που λείπουν στον πίνακα (να τις βρεις πριν δεις τον συμπληρωμένο πίνακα).



Εικόνα 3

Στην δεύτερη στήλη δεδομένων του πίνακα μας δίνεται μια τιμή της μεταβλητής y και λείπει η τιμή της μεταβλητής x. Αυτή την φορά χαράσσουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το -3 του άξονα $y'y$ (η κόκκινη γραμμή της εικόνας 4). Με την βοήθεια της ευθείας αυτής παρατηρούμε ότι το σημείο της καμπύλης που έχει τεταγμένη $y = -3$ είναι το A. Η τετμημένη του σημείου A είναι -6. Δηλαδή η τιμή της μεταβλητής y για $x = -6$ είναι $y = -3$.



Εικόνα 4

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες τιμές της μεταβλητής x και να συμπληρώσουμε όλα τα κελιά του πίνακα που είναι κενά (πριν να δεις τον συμπληρωμένο πίνακα, να προσπαθήσεις να υπολογίσεις μόνος/η σου τις τιμές). Η τελική μορφή του πίνακα είναι:

x	-4	-6	-2	0	2	3	5	7
y	1	-3	0	-2	1	3	4	4

3) Ο Βασίλης ξοδεύει στο κυλικείο του σχολείου 1,5€ κάθε ημέρα. Του ζητήθηκε στο μάθημα της Οικονομίας να κατασκευάσει έναν πίνακα ο οποίος θα εμφανίζει την σχέση που συνδέει τις τιμές των ποσοτήτων «συνολική δαπάνη» και «αριθμός ημερών στο σχολείο». Κατασκεύασε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες	1	2	3	4	8	10	15
Δαπάνη (σε €)	1,5	3	4,5	6	12		

Δεν συμπλήρωσε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα γιατί τον σχεδίασε πριν το τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας. Ας επιχειρήσουμε να τον συμπληρώσουμε (να τον συμπληρώσεις και εσύ πριν διαβάσεις παρακάτω): Κάθε ημέρα ξοδεύει 1,5€. Επομένως σε 10 ημέρες θα έχει ξοδέψει $10 \cdot 1{,}5 = 15$ € και σε 15 ημέρες θα ξοδέψει $15 \cdot 1{,}5 = 22{,}5$€. Ο συμπληρωμένος πίνακας θα έχει την μορφή:

Ημέρες	1	2	3	4	8	10	15
Δαπάνη (σε €)	1,5	3	4,5	6	12	15	22,5

Ο Βασίλης, όμως, δεν είναι απόλυτα ικανοποιημένος από το αποτέλεσμα. Θέλει να βρει έναν τρόπο για να περιγράφει με ακρίβεια την σχέση των δύο ποσοτήτων *αριθμός ημερών στο σχολείο*, που ονόμασε x, και *συνολική δαπάνη*, που ονόμασε y, για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x ή της μεταβλητής y. Σκέφτηκε ότι, αφού κάθε ημέρα ξοδεύει 1,5€, σε x ημέρες θα έχει ξοδέψει $1{,}5 \cdot x$€. Παρατήρησε ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής x υπάρχει μια μόνο τιμή της y, η οποία υπολογίζεται με την βοήθεια της ισότητας $y = 1{,}5x$. Δηλαδή η ισότητα αυτή εκφράζει την σχέση που συνδέει τις τιμές των x και y.

Μία ***σχέση*** που συνδέει τις τιμές δύο μεταβλητών ποσοτήτων x και y με τέτοιο τρόπο, ώστε **κάθε τιμή της μεταβλητής x** να αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y**, λέμε ότι είναι μία ***συνάρτηση***. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x.

Αν η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x, τότε ένας πίνακας όπου εμφανίζονται ζεύγη που αποτελούνται από τιμές της μίας μεταβλητής και τις αντίστοιχες τιμές της άλλης μεταβλητής λέγεται ***πίνακας τιμών*** *της συνάρτησης.*

Αν η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x, τότε το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y), όπου x και y είναι αντίστοιχες τιμές των δύο μεταβλητών, λέγεται ***γραφική παράσταση*** *της συνάρτησης.*

4) Ο Μιχάλης είναι μαθητής του Δημοτικού.

Στο πάρτυ γενεθλίων του Μιχάλη ο πατέρας του, που είναι μαθηματικός, έπαιξε με τα παιδιά ένα παιχνίδι για να τα διασκεδάσει. Ζήτησε από κάθε παιδί να σκεφτεί έναν αριθμό. Μετά τους ζήτησε να τετραπλασιάσουν τον αριθμό που σκέφτηκαν, να προσθέσουν στο γινόμενο το 2, να διαιρέσουν το άθροισμα που βρήκαν με το 2 και να του πουν το αποτέλεσμα.

Προς μεγάλη έκπληξη των παιδιών (ο Ανδρέας ρώτησε τον Μιχάλη αν ο πατέρας του είναι μάγος), ο πατέρας του Μιχάλη εύρισκε πάντα τον αριθμό που είχαν σκεφτεί. Ο Γιάννης είναι ο μεγάλος αδελφός του Μιχάλη και είναι μαθητής της Β΄ Γυμνασίου. Αποφάσισε να ανακαλύψει το κόλπο που έκανε ο πατέρας του. Επειδή με αριθμητικά παραδείγματα δεν μπόρεσε να το βρει, αποφάσισε να χρησιμοποιήσει μεταβλητές. Ονόμασε x τον αριθμό που σκέφτηκε και y το αποτέλεσμα των πράξεων. Βρήκε ότι η παράσταση που περιγράφει τις πράξεις είναι η $\frac{4x+2}{2}$.

Με έκπληξη κατάλαβε ότι είχε να κάνει με μια συνάρτηση, την $y=\frac{4x+2}{2}$, και ότι μπορούσε να την απλοποιήσει: $y=\frac{4x+2}{2}=\frac{4x}{2}+\frac{2}{2}=2x+1$. Είχε ανακαλύψει το κόλπο! Ο αριθμός που έλεγε κάθε παιδί ήταν ο διπλάσιος αυτού που είχε σκεφτεί αυξημένος κατά 1. Επομένως, αρκούσε να αφαιρέσει από τον αριθμό που του έλεγε το παιδί το 1 και να διαιρέσει την διαφορά με το 2. Να σκεφτείς και εσύ ένα τέτοιο παιχνίδι και να το παίξεις με φίλους\ες σου παροτρύνοντάς τους να βρουν το κόλπο.

Μια συνάρτηση μπορεί να δοθεί με διαφορετικούς τρόπους, όπως:
- Με έναν αλγεβρικό τύπο (π.χ. $y=2x+1$, όπως στο παράδειγμα 4)
- Με μία γραφική παράσταση (όπως στο παράδειγμα 2)
- Με έναν πίνακα τιμών (όπως στο παράδειγμα 3)
- Με μία λεκτική διατύπωση (όπως στο παράδειγμα 4)

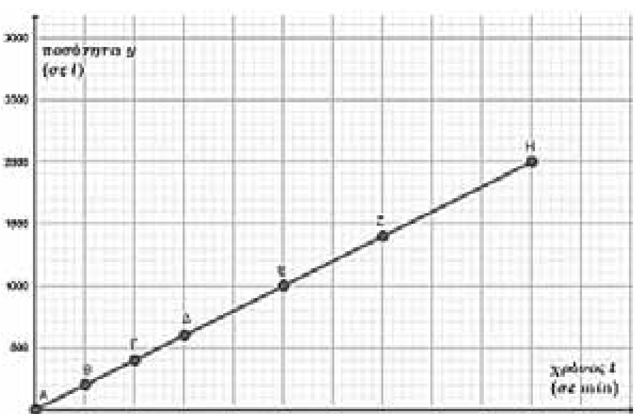
5) Ο κύριος Π αγόρασε μια καινούργια δεξαμενή πετρελαίου χωρητικότητας 2000 λίτρων. Σήμερα θα παραλάβει το πετρέλαιο που παράγγειλε.

Ένας πίνακας τιμών για τη συνάρτηση που εκφράζει την ποσότητα του πετρελαίου y (σε λίτρα) που περιέχεται στην δεξαμενή σε σχέση με τον χρόνο t που διαρκεί η παράδοση είναι ο εξής:

Χρόνος t	0	1	2	3	5	7	10
Ποσότητα y	0	200	400	600	1000	1400	2000

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στην εικόνα 5.

Χρησιμοποιούμε μόνο τους θετικούς ημιάξονες γιατί οι τιμές των μεγεθών δεν μπορούν να είναι αρνητικές. Η γραφική παράσταση δεν είναι μια ολόκληρη ευθεία ή μια ημιευθεία, αλλά είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, γιατί οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή t είναι από 0 μέχρι 10 (γιατί μέχρι το 10;) Επίσης, η γραφική παράσταση έχει μορφή ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως εκφράζει την σχέση των τιμών δύο ανάλογων ποσών



Εικόνα 5

(πώς αλλιώς μπορούμε να καταλάβουμε ότι τα ποσά είναι ανάλογα; Αν δεν το θυμάσαι διάβασε προσεκτικά την επόμενη πρόταση).

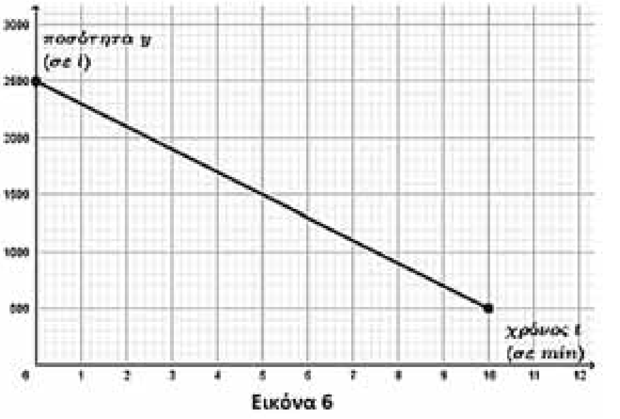
Έχει δηλαδή την μορφή y=αx, όπου α είναι ο συντελεστής αναλογίας που εκφράζεται από το *σταθερό πηλίκο* $\frac{y}{x}$, το οποίο εδώ είναι ίσο με 200. Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι y=200x

6) Ο Γιάννης, ο γιός του κυρίου Π, είναι ενθουσιασμένος που βρήκε έναν τρόπο να χρησιμοποιεί έξω από το σχολείο όσα μαθαίνει στο μάθημα των Μαθηματικών για τις συναρτήσεις, όπως στο πάρτι του μικρού του αδελφού. Όσο γέμιζε η δεξαμενή σκέφτηκε να βρει μια συνάρτηση με την οποία να μπορεί να υπολογίσει την ποσότητα y (σε λίτρα) του πετρελαίου που υπάρχει στο βυτιοφόρο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min). Έμαθε από τον υπάλληλο ότι πριν την παράδοση είχε στο βυτιοφόρο 2500 λίτρα πετρελαίου και ότι η αντλία του οχήματος μπορούσε να μεταφέρει 200 λίτρα το λεπτό. Σκέφτηκε ότι αυτό σημαίνει ότι σε t min φεύγουν από το βυτιοφόρο $200t$ λίτρα πετρελαίου. Επομένως η ποσότητα που υπάρχει στο βυτίο μετά από t λεπτά είναι $y = 2500 - 200t$ λίτρα. Έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα τιμών που βλέπεις.

Χρόνος t	0	10
Ποσότητα y	2500	500

Όταν τον ρώτησε ο πατέρας του γιατί πήρε μόνο δύο τιμές, απάντησε: «Η συνάρτηση έχει την μορφή y=αx+β. Άρα η γραφική της παράσταση είναι ευθεία. Για να φτιάξω μια ευθεία χρειάζομαι δύο σημεία της. Εδώ η γραφική παράσταση θα είναι ευθύγραμμο τμήμα γιατί το t μπορεί να πάρει τιμές μόνο από το 0 μέχρι το 10. Βρήκα, λοιπόν, τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που είναι η γραφική παράσταση».

Μετά έφτιαξε με μεγάλη προσοχή την γραφική παράσταση (εικόνα 6) και την χάρισε στον υπάλληλο για να μπορεί να υπολογίζει, όπως του είπε, πόσο πετρέλαιο έχει στο βυτίο μετρώντας τον χρόνο που λειτουργεί η αντλία. Του εξήγησε ότι πρέπει να φτιάξει μια ευθεία παράλληλη με αυτήν που βλέπει η οποία θα περνάει από το σημείο του κατακόρυφου άξονα που αντιστοιχεί στην ποσότητα που υπάρχει στο βυτίο πριν αρχίσει να δουλεύει η αντλία.



Εικόνα 6

(γιατί παράλληλη και γιατί από αυτό το σημείο;) και πώς θα βρίσκει την ποσότητα πετρελαίου που υπάρχει στο βυτίο (σκέψου και εσύ τον τρόπο).

7) Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12000€ για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40€, κάθε μαγιό 20€ και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50€.

Τα ποσά «πλήθος φορμών γυμναστικής» και «κόστος αγοράς» είναι ανάλογα (γιατί;). Δηλαδή η σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές τους έχει την μορφή y=αx, όπου α ο συντελεστής αναλογίας. Για τις φόρμες γυμναστικής ισχύει α=40 (γιατί;). Επομένως η συνάρτηση είναι η y=40x.

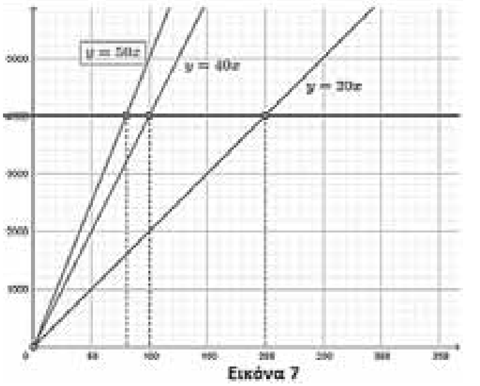
Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης είναι ο παρακάτω:

Αριθμός προϊόντων x	0	20
Κόστος y	0	800

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι οι συναρτήσεις που εκφράζουν την σχέση του κόστους αγοράς των μαγιό και το κόστος αγοράς των παπουτσιών με την βοήθεια του πλήθους των μονάδων προϊόντος που αγοράζονται είναι $y = 20x$ και $y = 50x$ αντίστοιχα (να εξηγήσεις γιατί έχουν αυτή την μορφή και να κατασκευάσεις τους πίνακες τιμών των δύο συναρτήσεων και τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων).

Αν ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό για κάθε είδος, μπορούν οι γραφικές παραστάσεις να μας βοηθήσουν να βρούμε πόσα κομμάτια από κάθε είδος αγόρασε;

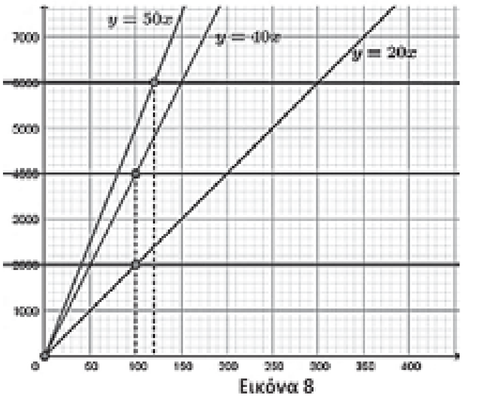
Αφού θα διαθέσει το ίδιο ποσό για κάθε είδος, το ποσό για κάθε είδος θα είναι 4000€. Σχεδιάζουμε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το 4000 του άξονα $y'y$ και βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τις τρεις γραφικές παραστάσεις (εικόνα 7). Οι τετμημένες των σημείων είναι οι *άγνωστες* τιμές της μεταβλητής τις οποίες προσπαθούμε κάθε φορά να προσδιορίσουμε (γιατί;). Καταλήξαμε λοιπόν ότι ο καταστηματάρχης θα προμηθευτεί 100 φόρμες, 200 μαγιό και 80 ζευγάρια αθλητικά παπούτσια.



Εικόνα 7

Ο καταστηματάρχης είδε ότι έτσι προμηθεύεται πολύ περισσότερα μαγιό από όσα χρειάζεται και λιγότερα ζευγάρια παπούτσια από φόρμες. Αποφάσισε να δαπανήσει διαφορετικό ποσό για κάθε είδος. Συγκεκριμένα αποφάσισε τα ποσά που θα δαπανήσει για μαγιό, φόρμες και παπούτσια να είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να δαπανήσει το $\frac{1}{6}$ του συνολικού ποσού για μαγιό, τα $\frac{2}{6}$ για φόρμες και τα $\frac{3}{6}$ του ποσού για παπούτσια (πώς προέκυψαν αυτά τα κλάσματα;) Δηλαδή θα δαπανήσει για μαγιό 2000€, για φόρμες 4000€ και για παπούτσια 6000€. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων (εικόνα 8) βρίσκουμε ότι θα προμηθευτεί 100 μαγιό, 100 φόρμες και 120 ζευγάρια παπούτσια.



Εικόνα 8

8) Σε ένα τμήμα της Β΄ τάξης κάποιου Γυμνασίου δόθηκε ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης με αλγεβρικό τύπο $y = 2x + 6$ και ζητήθηκε η συμπλήρωσή του.

x	-4		3	
y		0		16

Η πρώτη και η τρίτη στήλη συμπληρώνονται με απλές πράξεις.
Για x=-4 με αντικατάσταση παίρνουμε $y = 2\cdot(-4)+6 = -8+6 = 2$ και για x=3, $y = 2\cdot 3+6 = 6+6 = 12$.

Για $y = 0$, όμως, πρέπει να βρούμε την τιμή της μεταβλητής x για την οποία επαληθεύεται η ισότητα 2x+6=0. Δηλαδή πρέπει να λύσουμε την εξίσωση 2x+6=0 με άγνωστο το x. Για την επίλυση της εξίσωσης μπορούμε να σκεφτούμε με τον εξής τρόπο:

Εκτελώ πράξεις	*Σκέφτομαι*
2x+6=0	*Ποιο πρέπει να είναι το $2x$, ώστε αν του προσθέσω το 6 να προκύψει 0;*
	Πρέπει το $2x$ να είναι ίσο με -6
2x=-6	*Πόσο πρέπει να είναι το x, ώστε αν το πολλαπλασιάσω με 2 να προκύψει -6;*
	Πρέπει να είναι ίσο με -6:2 = -3
x=-3	

Ανάλογα σκέφτομαι και για $y = 16$ και βρίσκωx=5 (δοκίμασε να το βρεις και εσύ).

Επομένως, ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

x	-4	-3	3	-5
y	-2	0	12	16

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε το πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις δύο τιμές του x ως τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = 2x + 6$ με τις ευθείες $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) και $y = 16$ (η ευθεία που είναι παράλληλη στον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο 16 του $y'y$) αντίστοιχα.

Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε την εξίσωση $\alpha x + \beta = \gamma$ ως ένα «στιγμιότυπο» της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$. Την «στιγμή» που η συνάρτηση τέμνεται με την $y = \gamma$. Έτσι, η λύση της εξίσωσης, δηλαδή η τιμή του *αγνώστου* x που επαληθεύει την εξίσωση, είναι η τετμημένη του σημείου τομής της $y = \alpha x + \beta$ με την $y = \gamma$, δηλαδή η τιμή της *μεταβλητής* x για την οποία επαληθεύεται η ισότητα $\alpha x + \beta = \gamma$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και τις εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma x + \delta$.

9) Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $y_A = 5x + 2$ και $y_B = 3x + 6$. Εύκολα, με αντικατάσταση της μεταβλητής x με τις τιμές που δίνονται, συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών των δύο συναρτήσεων (με μαύρο χρώμα οι τιμές που δίνονται και με κόκκινο οι τιμές που υπολογίσαμε).

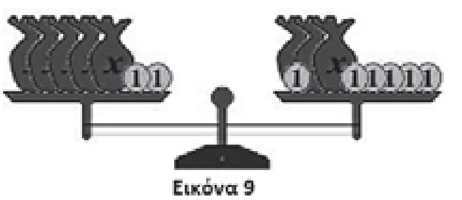
x	-2	0	1	2	3
y_A	-8	2	7	12	17
y_B	0	6	9	12	15

Στο ερώτημα «για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα: $-2x - 8 = 5x + 6$;» ο πίνακας τιμών, όπως τον συμπληρώσαμε, μας βοηθάει να απαντήσουμε ότι μια τιμή του x για την οποία ισχύει η ισότητα είναι η x = 3.

Αλλά ο πίνακας τιμών δεν μας εξασφαλίζει ότι η λύση που βρήκαμε είναι η μοναδική σωστή απάντηση στο ερώτημα. Ακόμα παραπάνω, τι γίνεται αν δεν «πετύχουμε» την κατάλληλη τιμή στον πίνακα; Θα μπορούσαμε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και να δούμε αν έχουν, και πόσα, κοινά σημεία.

Όμως το κοινό σημείο (γιατί είναι μόνο ένα;) είναι το $A(2,12)$ που, συνήθως, θα βρίσκεται εκτός της εικόνας του συστήματος συντεταγμένων που σχεδιάζουμε (δοκίμασε να κάνεις τις γραφικές παραστάσεις και να βρεις το κοινό σημείο). Υπάρχει άλλος τρόπος να επιλύσουμε την εξίσωση (δηλαδή να βρούμε την λύση της ή, διαφορετικά, την τιμή της μεταβλητής x που επαληθεύει την εξίσωση);

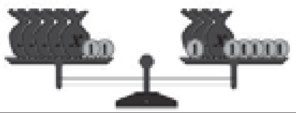
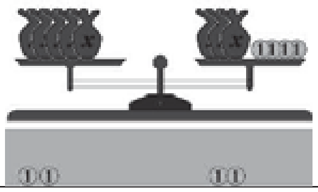
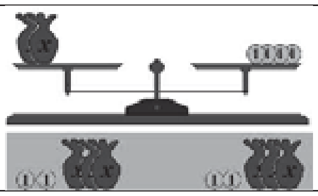
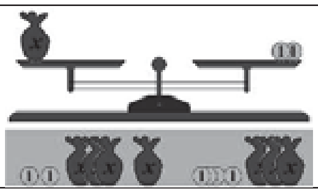
10) Η Ιωάννα έχει μερικά τσουβαλάκια που έχουν όλα το ίδιο βάρος και σταθμά (ζύγια) του ενός κιλού, όπως βλέπεις στην εικόνα 9.


Εικόνα 9

Θέλει να μάθει πόσο ζυγίζει κάθε τσουβαλάκι. Για αυτό τοποθέτησε τα τσουβαλάκια και τα σταθμά σε έναν ζυγό ισορροπίας (ζυγαριά) ψάχνοντας να βρει μια θέση ισορροπίας όπως αυτή που μπορείς να δεις στην εικόνα 10. Ποιες ενέργειες πρέπει να κάνει η Ιωάννα για να βρει πόσο ζυγίζει κάθε τσουβαλάκι;


Εικόνα 10

Ας το δούμε:

Ζυγαριά	*Ενέργεια της Ιωάννας*	*Αλγεβρικός συμβολισμός*
		5x+2=3x+6
	Αφαιρεί δύο σταθμά του ενός κιλού από κάθε δίσκο.	5x+2-2=3x+6-2
		5x=3x+4
	Αφαιρεί τρία τσουβαλάκια από κάθε δίσκο.	5x-3x=3x-3x+4
		2x=4
	Κρατάει τα μισά από όσα έχουν απομείνει σε κάθε δίσκο.	$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$
		x=2

Έτσι η Ιωάννα βρήκε ότι κάθε τσουβαλάκι ζυγίζει 2 κιλά.

Με αυτή την προσέγγιση μπορούμε πια να πλησιάσουμε τις εξισώσεις χωρίς τα προβλήματα που δημιουργούνται από την θεώρηση του x ως μεταβλητής στις συναρτήσεις και ως αγνώστου στις εξισώσεις.

Με το άρθρο αυτό προσπαθήσαμε να σκιαγραφήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση, που δεν προβλέπεται στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα, για μια ενότητα της διδακτέας ύλης που απαιτεί, κατά τις οδηγίες διαχείρισης της ύλης, ένα σύνολο 19 διδακτικών ωρών. Για να περιορίσουμε κατά το δυνατόν την έκταση του άρθρου δεν συμπεριλάβαμε την ενότητα της συνάρτησης $y = {}^{\alpha}/_{x}$ και επιλέξαμε μόνο κάποιες χαρακτηριστικές δραστηριότητες από κάθε ενότητα με τρόπο, ώστε, κατά την γνώμη μας, να γίνεται φανερή η αντίληψη για το πώς θα προχωρήσουμε στην δόμηση των εννοιών.

Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;

1. Για τις συναρτήσεις $y=3x-2$ και $y=-2x+1$ να συμπληρώσεις τους παρακάτω πίνακες τιμών και να κάνεις τις γραφικές τους παραστάσεις.

$y=3x-2$				
x	-2	-1	0	1
y				

$y=-2x+1$					
x	−3	−2	0	1	2
y					

2. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες τιμών:

Πίνακας 1							
x	1	2	3	4		10	15
y	3	6	12		18		45

Πίνακας 2						
x	0	1	2	3		10
y	1	2	5	10	26	

Πίνακας 3						
x	1	2	3	4		10
y	4	6	8		0,5	

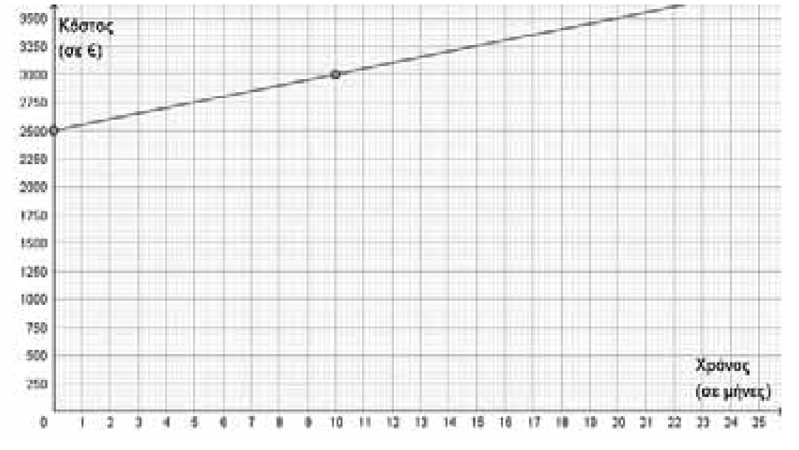
(α) Μπορείς να μαντέψεις ποια είναι η συνάρτηση που εκφράζει κάθε πίνακας;
(β) Να προσπαθήσεις να συμπληρώσεις τα κενά σε καθέναν από τους πίνακες.
(γ) Να κατασκευάσεις τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.

3. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ να είναι κατά 2cm μεγαλύτερες από την βάση ΒΓ. Αν συμβολίσουμε με x την βάση του τριγώνου και με y κάθε μία από τις ίσες πλευρές του, τότε:
(α) Να εκφράσεις την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.
(β) Να υπολογίσεις το μήκος των άλλων πλευρών του τριγώνου αν γνωρίζεις ότι το μήκος της βάσης είναι 5cm.
(γ) Να υπολογίσεις το μήκος της βάσης του τριγώνου, αν γνωρίζεις ότι ΑΒ=19cm.
(δ) Να κάνεις την γραφική παράσταση της συνάρτησης που εκφράζει το μήκος των ίσων πλευρών με την βοήθεια της βάσης x.

4. Η αμοιβή ενός πωλητή αποτελείται από δύο μέρη. Έχει μηνιαίο μισθό 200€ και το 10% των πωλήσεων που πραγματοποιεί.
(α) Να εκφράσεις το ποσό y (σε €) των μηνιαίων εσόδων του πωλητή ως συνάρτηση του ποσού x (σε €) των πωλήσεων που κάνει.
(β) Να κάνεις τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.
(γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρεις ποιο πρέπει να είναι το ποσό των πωλήσεων που πρέπει να κάνει σε ένα μήνα, ώστε οι απολαβές του να είναι 1100€.
(δ) Αν η αμοιβή του τον περασμένο μήνα ήταν 862,3€, πόσες πωλήσεις έκανε;

5. Ένας νέος επιχειρηματίας ξεκινάει την πρώτη του επιχείρηση.

Πήρε προσφορές από δύο εταιρείες για την κατασκευή και την υποστήριξη της ιστοσελίδας και του ηλεκτρονικού καταστήματος της επιχείρησής του. Η εταιρεία Α του παρουσίασε το παρακάτω διάγραμμα με το συνολικό κόστος κατασκευής, φιλοξενίας και συντήρησης του site και του e-shop.



Η εταιρεία Β του έκανε την εξής προσφορά: Κόστος κατασκευής 1800€. Κόστος φιλοξενίας και συντήρησης 85€ τον μήνα.

(α) Πόσους μήνες μετά την κατασκευή του site και του e-shop το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει θα είναι το ίδιο και για τις δύο εταιρείες;
(β) Αν σκοπεύει να μην αλλάξει εταιρεία υποστήριξης για δύο τουλάχιστον χρόνια, ποια εταιρεία έχει κάνει την καλύτερη οικονομική προσφορά;

6. Ο Γιάννης και η Δανάη σκέφτηκαν τον ίδιο αριθμό και εφάρμοσαν τις διαδικασίες:

- Η διαδικασία του Γιάννη:
  " 5πλασίασε τον αριθμό και πρόσθεσε 2".
- Η διαδικασία της Δανάης:
  " πρόσθεσε στον αριθμό το 7, πολλαπλασίασε το άθροισμα με το 3 και αφαίρεσε από το γινόμενο 5".

Αν τα δύο παιδιά βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα, ποιος είναι ο αρχικός αριθμός που σκέφτηκαν;

Δυο προβλήματα αναζητούν λύση στην Αλεξάνδρεια

Βαρβάρα Γεωργιάδου–Καμπουρίδη

1. Επίσκεψη σε έκθεση νεανικής ζωγραφικής

Μια ομάδα 20 ατόμων επισκέπτεται την έκθεση έργων νεανικής ζωγραφικής του σχολείου τους σε μια πόλη της Ινδίας. Πληρώνουν όλοι για την είσοδο 20 ρουπίες. Κάθε άντρας πληρώνει 3 ρουπίες, κάθε γυναίκα 2 ρουπίες και κάθε παιδί 0,50 της ρουπίας. Αν όλοι μαζί πλήρωσαν 20 ρουπίες πόσοι άνδρες, πόσες γυναίκες και πόσα παιδιά είχε η ομάδα;

Σκεφτόμαστε: Αν x είναι οι άνδρες, y οι γυναίκες και z τα παιδιά. Τότε, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος ισχύουν οι εξής δύο σχέσεις: $x+y+z=20$ (x,y,z θετικοί ακέραιοι) (1)
$3x + 2y + 0,5z = 20$ και πολλαπλασιάζοντας επί 2 τα δύο μέλη $6x + 4y + z = 40$ (2)

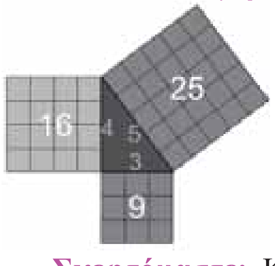
Από την (1) $z = 20 – x – y$ Αντικαθιστώντας το z στην (2) $6x + 4y + 20 – x – y = 40$

$5x + 3y = 20$ ή $x = \dfrac{20-3y}{5}$, όπου για να προκύψει ακέραιος θετικός αριθμός θα πρέπει η διαφορά $20–3y$ να είναι αριθμός πολλαπλάσιο του 5,

Επομένως, ο y είναι 5, ο $x = \dfrac{20-3\cdot 5}{5} = 1$ και ο $z = 20 –1– 5 = 14$

Άρα την έκθεση επισκέφθηκαν 1 άνδρας, 5 γυναίκες και 14 παιδιά.

2. 'Αναποδογυρίζοντας' το Πυθαγόρειο θεώρημα



Για ποιες τιμές των x, y, z > 0 ισχύει η σχέση $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{z^2}$;

Σκεφτόμαστε: Κοιτάζοντας τη σχέση μάς έρχεται στο νου το γνωστό μας Πυθαγόρειο θεώρημα αλλά σε μια κατά κάποιον τρόπο 'ανεστραμμένη' μορφή. Ας δούμε πώς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

Θέτουμε $\alpha^2 = \dfrac{1}{x^2}$, $\beta^2 = \dfrac{1}{y^2}$ και $\gamma^2 = \dfrac{1}{z^2}$ με α, β, γ > 0 (1)

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με α, β κάθετες πλευρές και γ την υποτείνουσα, ισχύει η σχέση: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$. Ας πάρουμε την πρώτη Πυθαγόρεια τριάδα αριθμών που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση: Για α = 3, β = 4 και γ = 5 έχουμε για την (1) $3^2 = \dfrac{1}{x^2}$, $4^2 = \dfrac{1}{y^2}$ και $5^2 = \dfrac{1}{z^2}$. Άρα $x^2 = \dfrac{1}{3^2}$ κι επειδή x > 0, θα είναι $x = \dfrac{1}{3}$, όμοια $y = \dfrac{1}{4}$ και $z = \dfrac{1}{5}$.

Υπάρχουν άλλες Πυθαγόρειες τριάδες που μπορούν να μας δώσουν κι άλλες τιμές για τα x, y, z ;

Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (4ος αιώνας π.Χ.) μία μέθοδος εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων είναι η εξής:

- Αν λ, μ είναι φυσικοί αριθμοί και λ>μ τότε οι $x= \lambda^2-\mu^2$, $y=2\lambda\mu$ και $z= \lambda^2+\mu^2$ αποτελούν μια Πυθαγόρεια τριάδα.
- Επίσης, αν x, y, z είναι Πυθαγόρεια τριάδα και κ είναι φυσικός αριθμός, τότε οι $\kappa\cdot x$, $\kappa\cdot y$, $\kappa\cdot z$ αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα. (2)

Αργότερα, τον 3ο μ.Χ αιώνα, ο Διόφαντος απέδειξε ότι από τις παραπάνω προτάσεις του Ευκλείδη προκύπτουν όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε πολλές τριάδες x, y, z που να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$ όπως για παράδειγμα $x = 2\cdot3$, $y = 2\cdot4$, $z= 2\cdot5$,

$x = 3\cdot3$, $y = 3\cdot4$, $z = 3\cdot5$

$x = 4\cdot3$, $y = 4\cdot4$, $z = 4\cdot5$. κ.ο.κ

Συνδέοντας το σήμερα με το χθες: μια ματιά στην ιστορία

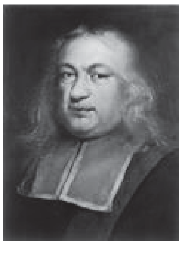
Τι συνδέει τα δυο προβλήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε παραπάνω; Ανήκουν στον κλάδο της Θεωρίας Αριθμών που ονομάζουμε Διοφαντική Ανάλυση προς τιμήν του Διόφαντου (250 περίπου μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου), που ασχολήθηκε συστηματικά με τέτοιου είδους προβλήματα στο έργο του "Αριθμητικά".

Το πρώτο πρόβλημα είναι μια μορφή γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης με 3 αγνώστους.

> Με τον όρο γραμμική διοφαντική εξίσωση εννοούμε οποιαδήποτε πολυωνυμική εξίσωση με έναν ή περισσότερους αγνώστους και ακέραιους συντελεστές για την οποία ζητούμε μόνο ακέραιες λύσεις.
>
> *Θεώρημα*: Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ έχει λύση, αν και μόνο αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δ των α,β διαιρεί το γ.
>
> Αν η εξίσωση αυτή έχει μια λύση (x_0,y_0), τότε έχει άπειρες λύσεις (x,y), που δίνονται από τους τύπους $x = x_0 + \frac{\beta}{\delta}t,\ y = y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t,\ \text{όπου } t \in \mathbb{Z}$ (φωτόδεντρο)

Για παράδειγμα, στο πρώτο πρόβλημα, αν η ομάδα αποτελείτο μόνο από άνδρες και γυναίκες, η εξίσωση θα ήταν $3x + 2y = 20$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού ΜΚΔ (3, 2) που είναι ο 1 διαιρεί τον 20.

Το δεύτερο πρόβλημα συγκαταλέγεται ανάμεσα στα κλασικά προβλήματα της Διοφαντικής Ανάλυσης και στηρίζεται στην αναζήτηση Πυθαγόρειων τριάδων (δηλαδή ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$).



Ο P. Fermat (1601–1665) ισχυρίστηκε ότι η Διοφαντική εξίσωση: $x^\nu + y^\nu = z^\nu$ είναι αδύνατη, όταν ο ν είναι φυσικός μεγαλύτερος του 2, σημειώνοντας μάλιστα πάνω στο βιβλίο του Διόφαντου που μελετούσε: "*έχω μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει*". Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Να υπολογίσετε το άθροισμα $Π=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}+\frac{129}{128}+\frac{257}{256}+\frac{513}{512}-10$.

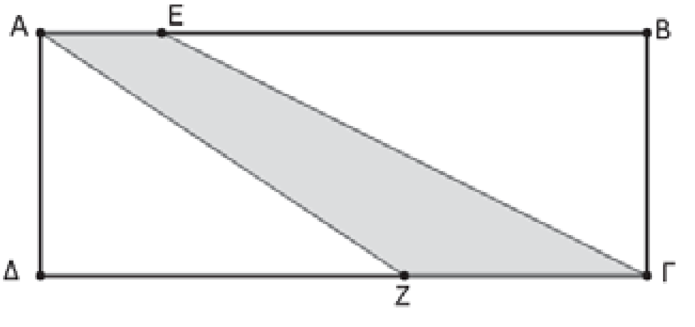
Να γράψετε έναν γενικευμένο τύπο που θα υπολογίζει κάθε παράσταση αυτής της μορφής.
Σημείωση: Να θεωρήσετε ότι αφαιρούμε έναν αριθμό (τον 10) που είναι κατά 1 μεγαλύτερος από το πλήθος των κλασμάτων που προσθέτουμε.

2) Το σύμβολο ν! σημαίνει $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots ν$, όπου ν ένα θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι τέλειο τετράγωνο;

Α) 98!•99! **Β)** 98!•100! **Γ)** 99!·100! **Δ)** 99!•101! **Ε)** 100!•101!

3) Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ χωρίζουμε την ΑΒ σε ν ίσα μέρη και το τμήμα ΑΕ είναι ένα από τα ίσα αυτά μέρη. Το τμήμα ΓΖ είναι διπλάσιο από το ΑΕ. Ποια είναι η σχέση του εμβαδού του σχήματος ΑΕΓΖ προς το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;



4) Ο παππούς του Βασίλη και ο Βασίλης έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Σε κάποια γενέθλια ο παππούς διαπίστωσε ότι η ηλικία του εκείνη τη χρονιά είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ηλικίας του Βασίλη αλλά ότι θα είναι και πολλαπλάσιο για τα 5 επόμενα χρόνια.
Πόσο χρονών ήταν ο παππούς τη χρονιά που διαπίστωσε το παραπάνω;

5) Τρεις φίλοι παίζουν ένα περίεργο παιχνίδι. Σε κάθε παρτίδα χάνει ένας μόνο και αυτός διπλασιάζει τα χρήματα που έχουν οι άλλοι δύο. Μετά από 3 παρτίδες έχουν συμβεί τα εξής:

α) Καθένας έχει κερδίσει σε έναν ακριβώς γύρο
β) Σε κάθε έναν έχουν απομείνει ακριβώς 24€

Πόσα χρήματα είχε ο καθένας στην αρχή του παιχνιδιού;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 118

1) Το ποσόν Α με την πρώτη αύξηση έγινε 1,25Α. Το ποσόν αυτό στη δεύτερη αύξηση έγινε1,25×1,25Α= 1,56Α περίπου. Στη συνέχεια αυτό το 1,56Α μειώνεται κατά 25% και γίνεται 0,75×1,56Α=1,17Α το οποίο τελικά μειώνεται κατά 25% και γίνεται 0,75×1,17Α =0,88Α περίπου. Παρατηρούμε ότι το τελικό ποσό είναι μειωμένο κατά 0,12Α άρα η τελική ποσοστιαία μεταβολή είναι, κατά προσέγγιση, 12%.

2) Αν το βιβλίο με τη μικρότερη αξία κοστίζει α ευρώ τότε το μεσαίο, δηλαδή το 16^o , θα κοστίζει α+30 ευρώ ενώ το τελευταίο, δηλαδή το 31^o , θα κοστίζει α+62 ευρώ.

Αν δοκιμάσουμε το επόμενο από το μεσαίο βιβλίο, που έχει τιμή α+32, θα ισχύει η σχέση: α+62=α+30+α+32 που είναι αδύνατον.

Αν δοκιμάσουμε το προηγούμενο βιβλίο, που έχει τιμή α+28, θα ισχύει η σχέση α+62=α+30+α+28 από όπου προκύπτει α=4 ευρώ. Άρα το διπλανό βιβλίο είναι το προηγούμενο.

3) Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε το κατά πόσο στρίβει ο λεπτοδείκτης και πόσο ο ωροδείκτης σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η γωνία αυτή:

ΧΡΟΝΟΣ		1h	30min	20min	10min	5min
ΓΩΝΙΑ	Λεπτοδείκτης	360^0	180^0	120^0	60^0	30^0
	Ωροδείκτης	30^0	15^0	10^0	5^0	$2{,}5^0$

Παρατηρούμε ότι στις 6:10΄ ο λεπτοδείκτης έχει στρίψει κατά γωνία 60^0 από τον αριθμό 12 ενώ ο ωροδείκτης έχει στρίψει κατά 5^0 από τον αριθμό 6. Αυτό σημαίνει ότι η γωνία τους είναι ίση με 125^0. Η γωνία των $122{,}5^0$, με βάση τα δεδομένα θα πρέπει να αναζητηθεί λίγο πριν τις 7:00μ.μ.

Πράγματι στις 6:55΄ η γωνία είναι ίση με $122{,}5^0$ (γιατί;) άρα ο χρόνος που έλειπε από την αίθουσα το άτομο ήταν 45min.

4) Ας ονομάσουμε u_A την ταχύτητα του Α, u_B την ταχύτητα του Β, $u_Γ$ την ταχύτητα του Γ αθλητή και s την απόσταση που έτρεξαν.

Την στιγμή που τερματίζει ο Α ο Β βρίσκεται 20m πίσω του άρα στον ίδιο χρόνο ο Β έχει διανύσει απόσταση s-20 μέτρα ενώ ο Α έχει διανύσει s μέτρα. Αν σκεφτούμε όμοια και για τους άλλους θα έχουμε συνολικά: $\frac{s}{u_A}=\frac{s-20}{u_B}$, $\frac{s}{u_A}=\frac{s-28}{u_Γ}$ και $\frac{s}{u_B}=\frac{s-10}{u_Γ}$.

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι σχέσεις: $\frac{s-20}{u_B}=\frac{s-28}{u_Γ}$ και $\frac{u_B}{u_Γ}=\frac{s}{s-10}$ από τις οποίες

τελικά έχουμε $\frac{s-20}{s-28}=\frac{s}{s-10}$ από όπου προκύπτει ότι s=100m.

5) Έστω ν ο αριθμός των θηκών που χρησιμοποιήθηκαν. Σε αυτές μπήκαν 1.518 επομένως ο αριθμός ν είναι διαιρέτης του 1.518 μικρότερος του 300 αλλά μεγαλύτερος του 200.

Εδώ είναι χρήσιμο να βρούμε τους διαιρέτες του 1.518 και ο ασφαλέστερος τρόπος είναι να αναλύσουμε τον αριθμό αυτό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Η ανάλυση του 1.518 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων δίνει 1.518=2×3×11×23. Από εδώ προκύπτει ότι όλοι οι σύνθετοι διαιρέτες του 1.518 προκύπτουν από γινόμενα συνδυασμών των αριθμών 2, 3, 11 και 23.

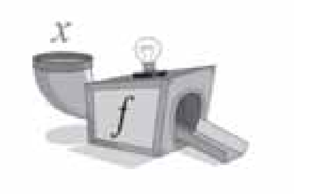
Ο μόνος συνδυασμός που δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 200 και μικρότερο του 300 είναι ο αριθμός 11×23=253.

Τελικά χρησιμοποιήθηκαν 253 θήκες και η κάθε μία χωρούσε 1.518:253=6 αυγά.

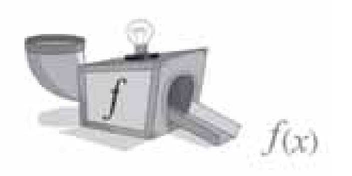
Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Καλλιόπη Κωστοπούλου

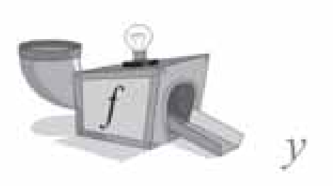
Οι συναρτήσεις που συναντάμε στα μαθηματικά, είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Οι συναρτήσεις αυτές παίρνουν τις τιμές εισόδου τους από μία πραγματική μεταβλητή, που την ονομάζουμε «ανεξάρτητη μεταβλητή»



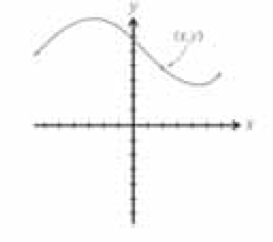
και για κάθε έγκυρη τιμή εισαγωγής, παράγεται ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα που είναι πραγματικός αριθμός.



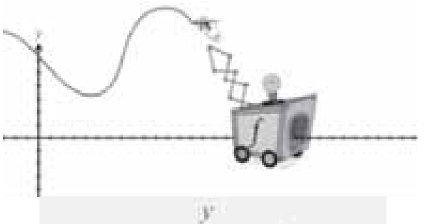
Όταν το “**x**” χρησιμοποιείται ως εισερχόμενη μεταβλητή, η τιμή εξόδου συνήθως εκχωρείται στη μεταβλητή “y”, η οποία ονομάζεται «εξαρτημένη μεταβλητή».



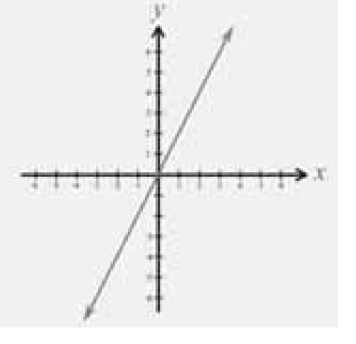
Οι τιμές αυτές των **x** και **y**, μπορούν οπτικά να αναπαρασταθούν σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Η οπτική αυτή αναπαράσταση σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης.

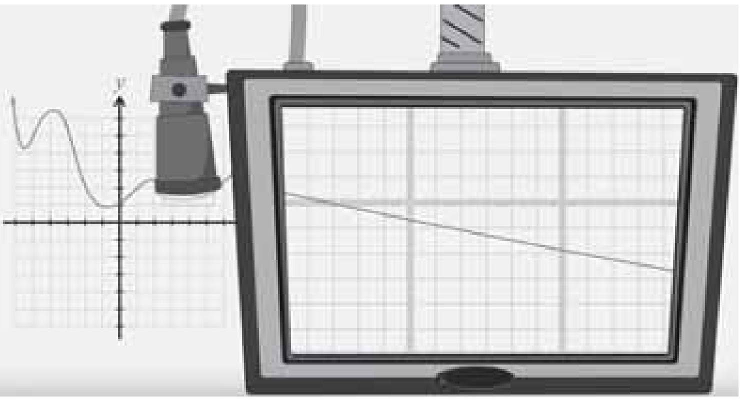


Οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής μπορούν αλγεβρικά να παρασταθούν με μία εξίσωση. Για παράδειγμα, η εξίσωση που περιγράφει την παρακάτω γραφική παράσταση είναι η $y=2x$.



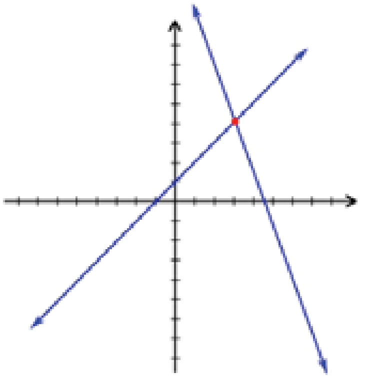
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **γραμμική** αφού η αναπαράσταση της στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι μια ευθεία γραμμή.

Οι γραφικές παραστάσεις των γραμμικών εξισώσεων είναι πολύ απλές, μα συνάμα εξαιρετικά σημαντικές στα μαθηματικά. Αυτό ισχύει αφενός γιατί πολλά φυσικά φαινόμενα απεικονίζονται μέσω τέτοιων παραστάσεων, αφετέρου γιατί και οι πιο περίπλοκες συναρτήσεις συχνά φαίνονται ως ευθείες όταν προβάλλονται σε αρκετά μικρή κλίμακα.



Αν εξετάσουμε όλο και μικρότερες περιοχές της καμπύλης που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το γράφημα φαίνεται όλο και περισσότερο σαν μια ευθεία γραμμή. Το γεγονός ότι πολλές συναρτήσεις εμφανίζονται γραμμικές σε μικρή κλίμακα είναι η λογική βάση πολλών κλάδων των μαθηματικών, όπως ο διαφορικός λογισμός. Είναι η ίδια αρχή που μας επιτρέπει να μεταχειριζόμαστε τη γη ως επίπεδη, παρόλο που στην πραγματικότητα η επιφάνεια της είναι κυρτή.

Ένα χρήσιμο εργαλείο για να αναλύσουμε φυσικές και μαθηματικές σχέσεις είναι η σχεδίαση δύο γραμμικών εξισώσεων στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, το σημείο τομής δύο γραμμικών εξισώσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικό αφού αντιπροσωπεύει την κοινή λύση και των δύο εξισώσεων.

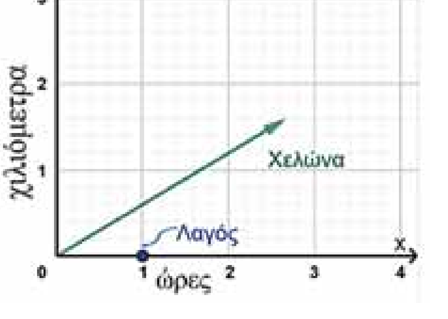


Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα του αγώνα δρόμου μεταξύ του λαγού και της χελώνας.

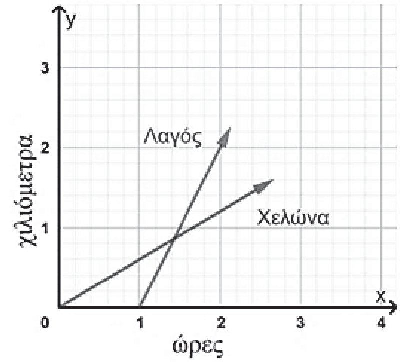
Καθώς ο αγώνας ξεκινά, ο λαγός διαβάζει με ενθουσιασμό το κεφάλαιο « Γραφική επίλυση συστημάτων» από το βιβλίο των μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου και αποφασίζει να δώσει προβάδισμα στη χελώνα για να προλάβει να τελειώσει το διάβασμα. Η χελώνα ξεκινά να τρέχει με γρήγορο και σταθερό ρυθμό και συγκεκριμένα με ταχύτητα 0,6 χιλιόμετρα την ώρα.

Μπορούμε να απεικονίσουμε την απόσταση της χελώνας από την αφετηρία ως μια συνάρτηση χρόνου, όπου ο κατακόρυφος άξονας στο καρτεσιανό σύστημα παριστάνει την απόσταση και ο οριζόντιος άξονας τον χρόνο που έχει παρέλθει, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Βλέπουμε ότι στην αρχή, όπου ο χρόνος που έχει παρέλθει είναι μηδέν, η απόσταση της χελώνας από την αφετηρία είναι μηδέν. Στην συνέχεια, και αφού η χελώνα τρέχει με σταθερή ταχύτητα, η απόσταση της από την αφετηρία αυξάνει γραμμικά ως συνάρτηση του χρόνου. Μία ώρα αργότερα, η χελώνα θα έχει διανύσει 0,6 χιλιόμετρα και ο λαγός έχει τελειώσει το διάβασμα. Παρόλο που η χελώνα έχει ένα προβάδισμα εξακοσίων μέτρων, ο γεμάτος αυτοπεποίθηση λαγός αποφασίζει να ξεκινήσει τον αγώνα με αργό ρυθμό, σκεπτόμενος ότι τρέχοντας με 2 χιλιόμετρα την ώρα σύντομα θα περάσει την χελώνα.



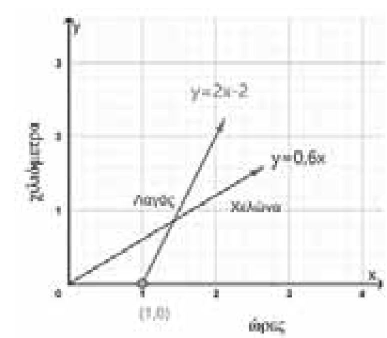
Έτσι, μία ώρα αργότερα από την έναρξη του αγώνα, ο λαγός είναι ακόμα μηδέν χιλιόμετρα από την αφετηρία. Αλλά από το σημείο αυτό και μετά ο λαγός τρέχει με σταθερή ταχύτητα 2 χιλιομέτρων την ώρα. Αφού ο λαγός τρέχει πιο γρήγορα από την χελώνα σε κάποιο σημείο θα συναντηθούν. Το σημείο που οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται αντιπροσωπεύει τη στιγμή που ο λαγός και η χελώνα βρίσκονται στο ίδιο μέρος την ίδια χρονική στιγμή.



Αν δημιουργήσουμε εξισώσεις για αυτές τις δύο γραφικές παραστάσεις υπάρχουν μαθηματικές τεχνικές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής αυτών των δύο γραφικών παραστάσεων και έτσι να βρούμε **ακριβώς** τη χρονική στιγμή και την απόσταση από την αφετηρία που ο λαγός και η χελώνα συναντώνται. Για να δημιουργήσουμε μια εξίσωση για την απόσταση της χελώνας y από την αφετηρία συναρτήσει του χρόνου x που η χελώνα τρέχει, χρησιμοποιούμε τις γνώσεις μας από τη φυσική, όπου η ταχύτητα ταυτίζεται με την κλίση α της ευθείας $y=αx$. Επομένως η εξίσωση αυτή είναι η $y=0,6x$.

Για την αντίστοιχη εξίσωση του λαγού, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της ευθείας με μορφή $y=αx+β$. Η κλίση της ευθείας αυτής είναι 2 αφού ο λαγός τρέχει με 2 km/h και επομένως η εξίσωση παίρνει την μορφή $y=2x+β$. Για να βρούμε το β χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η ευθεία διέρχεται από το σημείο (1,0).

Αντικαθιστούμε στην $y=2x+β$ όπου x το 1 και y το 0 και έχουμε: $0=2\cdot1+β$, δηλαδή $β=-2$, άρα η εξίσωση είναι η $y=2x-2$.



Υπάρχουν πολλοί μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα τέτοιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων και επομένως να υπολογίσουμε με ακρίβεια το σημείο τομής των δύο ευθειών. Ας δούμε αρχικά την **μέθοδο της αντικατάστασης** για το σύστημα που προέκυψε από το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$\begin{cases} y = 0,6\,x \\ y = 2\,x - 2 \end{cases}$$

Κάθε μία από αυτές τις εξισώσεις είναι μία σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y. Από την στιγμή που γνωρίζουμε από την πρώτη εξίσωση ότι το y πρέπει να είναι 0,6 φορές το x, μπορούμε να **αντικαταστήσουμε** το y της δεύτερης εξίσωσης με το 0,6x. Έτσι θα προκύψει η εξίσωση: $0,6x=2x-2$ της οποίας μοναδικός άγνωστος είναι ο x. Στη συνέχεια λύνουμε την πρωτοβάθμια αυτή εξίσωση ως εξής: $0,6x=2x-2$ ή $6x = 20x - 20$ οπότε $x = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$. Ας κάνουμε αντικατάσταση του x στην πρώτη εξίσωση που είναι πιο απλή: $y = 0,6x = \frac{6}{10}x = \frac{6}{10}\cdot\frac{10}{7} = \frac{6}{7}$. Επομένως οι τιμές που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις είναι οι $x = \frac{10}{7}$ και $y = \frac{6}{7}$. Αυτές είναι οι τιμές της τετμημένης και της τεταγμένης αντίστοιχα του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων: $\left(\frac{10}{7},\frac{6}{7}\right) = \left(1\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$. Άρα ο λαγός συναντά την χελώνα μία ώρα και τρία έβδομα αυτής από την έναρξη του αγώνα και σε απόσταση έξι έβδομων του χιλιομέτρου από την αφετηρία.

Ας δούμε τώρα πως το ίδιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων λύνεται με την μέθοδο των **αντίθετων συντελεστών**.

Αρχικά μετατρέπουμε τις αρχικές εξισώσεις στην "τυπική" μορφή των γραμμικών εξισώσεων: Αx+Βy=Γ.

$$\begin{cases} y = 0{,}6\,x \\ y = 2\,x - 2 \end{cases} = \begin{cases} y = \dfrac{6}{10}\,x \\ y = 2\,x - 2 \end{cases} = \begin{cases} y = \dfrac{3}{5}\,x \\ y = 2\,x - 2 \end{cases} = \begin{cases} 5y = 3x \\ y = 2\,x - 2 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 0 \,\big|\cdot(-2) \\ 2x - y = 2 \,\big|\cdot 3 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} -6x + 10y = 0 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε: $-6x+10y+6x-3y=0+6$ ή $7y=6$ ή $y=\dfrac{6}{7}$.

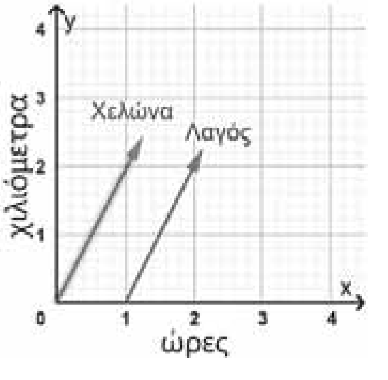
Αντικαθιστούμε στη συνέχεια την τιμή αυτή σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και έχουμε:

$$2x - y = 2 \;\text{ ή }\; 2x - \frac{6}{7} = 2 \text{ ή } 14x-6=14 \text{ ή } 14x=20 \text{ ή } x=\frac{10}{7}$$

Παρατήρηση: Είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν (**επαλήθευση του συστήματος**).

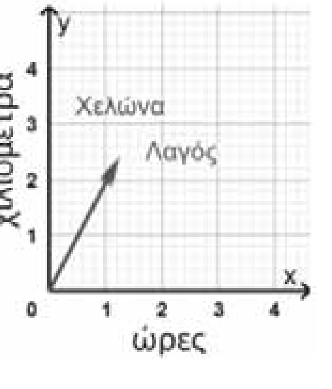
Οι αγώνες μεταξύ του λαγού και της χελώνας, που τρέχουν με σταθερή ταχύτητα, δεν έχουν πάντα ως αποτέλεσμα την συνάντηση τους σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η χελώνα αποφασίζει να φορέσει πατίνια τα οποία της δίνουν τη δυνατότητα να τρέχει με την ίδια ταχύτητα που τρέχει ο λαγός και όχι με 0,6 χιλιόμετρα την ώρα. Από τη στιγμή που οι δύο δρομείς τρέχουν με την ίδια ταχύτητα, οι εξισώσεις των αποστάσεων των δρομέων από την αφετηρία ως συνάρτηση χρόνου έχουν την ίδια κλίση, άρα οι γραφικές παραστάσεις είναι παράλληλες.

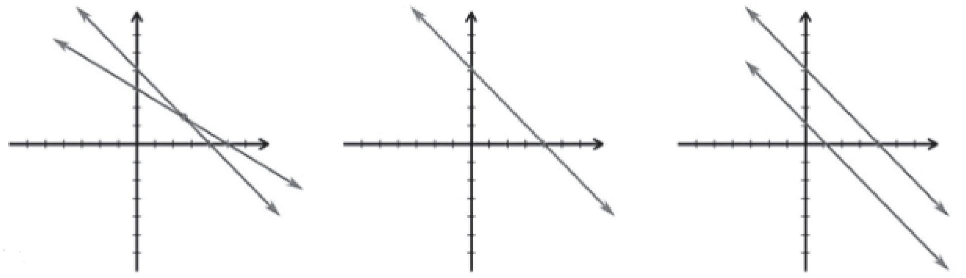


Αφού τα δύο γραφήματα δεν τέμνονται, ο λαγός και η χελώνα δεν θα συναντηθούν ποτέ. Το σύστημα αυτών των γραμμικών εξισώσεων επομένως θα είναι **αδύνατο**.

Όμως υπάρχει ακόμα μία πιθανότητα και είναι αυτή κατά την οποία και ο λαγός και η χελώνα ξεκινούν τον αγώνα την ίδια χρονική στιγμή και με την ίδια ταχύτητα. Τα γραφήματά τους συμπίπτουν επομένως και αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι και η χελώνα και ο λαγός έχουν τις ίδιες τιμές απόστασης σε κάθε σημείο του αγώνα. Αφού τα δύο γραφήματα ταυτίζονται το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.



Μπορούμε να συναντήσουμε επομένως τρεις περιπτώσεις όταν λύνουμε συστήματα γραμμικών εξισώσεων:

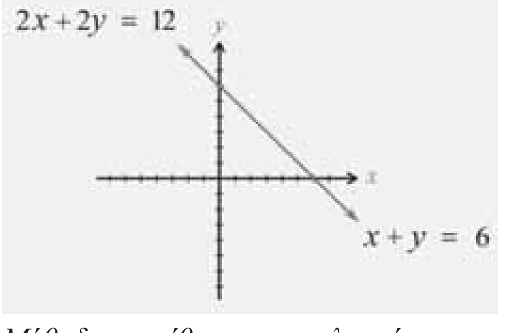


1η περίπτωση: Τα δύο γραφήματα τέμνονται και άρα το σημείο τομής τους είναι το μοναδικό που επαληθεύει και τις δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος.

2η περίπτωση: Τα δύο γραφήματα ταυτίζονται και άρα το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις.

3η περίπτωση: Τα δύο γραφήματα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και άρα το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο.

Είδαμε μέχρι στιγμής πως μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που αποτελείται από δύο διακριτές τεμνόμενες ευθείες. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντικατάστασης ή την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών καταλήγουμε σε μία μοναδική λύση του συστήματος. Ας χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους αυτές για να λύσουμε γραμμικά συστήματα εξισώσεων που αποτελούνται από ευθείες που ταυτίζονται (συμπίπτουν) ή από ευθείες που είναι παράλληλες.



1) *Μέθοδος αντικατάστασης*:

$$\begin{cases} 2x+2y=12 \\ x+y=6 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} 2x+2y=12 \\ y=6-x \end{cases} \quad ή$$

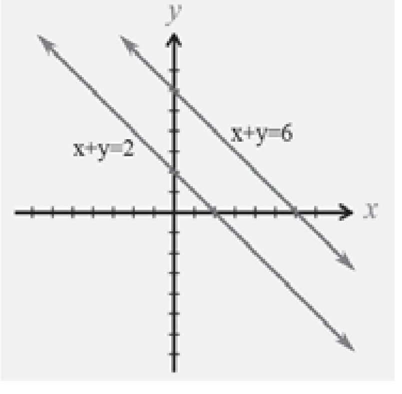
$$\begin{cases} 2x+2(6-x)=12 \\ y=6-x \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} 12=12 \\ y=6-x \end{cases}$$

Προκύπτει επομένως μια πρόταση που πάντα είναι αληθής και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+2y=12 \\ x+y=6 \end{array} \right| \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad ή \quad \begin{cases} x+y=6 \\ x+y=6 \end{cases}$$

Προκύπτουν επομένως δύο ίδιες γραμμικές εξισώσεις που αν τις αφαιρούσαμε κατά μέλη θα έδιναν την πρόταση 0=0 που πάντα είναι αληθής.



2) *Μέθοδος αντικατάστασης*:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=6 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x=2-y \\ x+y=6 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x=2-y \\ 2-y+y=6 \end{cases}$$

$$ή \quad \begin{cases} x=2-y \\ 2=6 \end{cases}$$

Προκύπτει επομένως μια πρόταση που δεν είναι ποτέ αληθής και άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

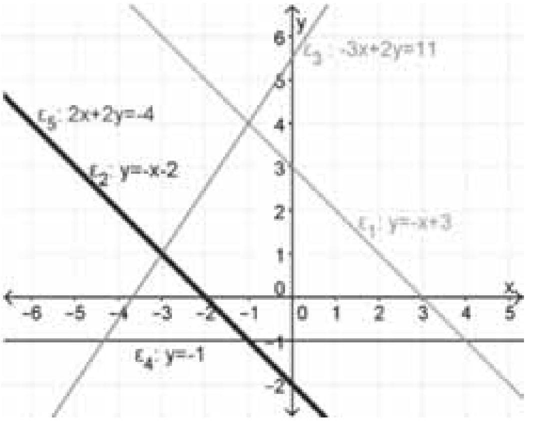
Μέθοδος αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}\Bigg| \cdot(-1) \quad ή \quad \begin{cases} -x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές γραμμικές εξισώσεις προκύπτει η πρόταση 0=4 που δεν είναι ποτέ αληθής και άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Με την βοήθεια του παραπάνω σχήματος να λύσετε τα συστήματα:



α) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = -1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -3x + 2y = 11 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

2) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 7x + 3y = 24 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 10y - 4x = -18 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - 2y = 5 \end{cases}$

*(**Απάντηση:** (x, y)=(3, 1), Αόριστο, Αδύνατο)*

3) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + y = 16 \\ x + \dfrac{y}{4} = 14 \end{cases}$

*(**Απάντηση:** (x,y)=(12,8))*

4) Στο σύστημα $\begin{cases} 4x \; ... \; y = -6 \\ ... \; x + 3y = 13 \end{cases}$ σβήστηκαν κατά λάθος οι συντελεστές. Να τους βρείτε αν γνωρίζετε ότι η λύση του συστήματος είναι : (x, y)=(-4, -2).

5) Να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} = 4 - \dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 3 \end{cases}$ παίρνει την μορφή $\begin{cases} 8x + 3y = 46 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$ και στη συνέχεια να το λύσετε.

*(**Απάντηση:** (x, y)=(5,2))*

6) Να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} (x+2)^2-(\sqrt{2y}+x)(x-\sqrt{2y})=x \\ \dfrac{x+4y}{4}=2y-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ παίρνει την μορφή

$\begin{cases} 3x+2y=-4 \\ x-4y=-6 \end{cases}$ και στη συνέχεια να το λύσετε.

7) Δίνονται τα μονώνυμα $A=3x^2y^3$, $B=\dfrac{1}{3}xy^2$ και το πολυώνυμο $P(x)=(x-\lambda)^3-x(x^2+\nu)-\kappa$.

α) Να βρείτε το γινόμενο A B , το βαθμό του γινομένου ως προς x, το βαθμό του γινομένου ως προς x και y και την αριθμητική τιμή του για $x=(-1)^{2021}$ και $y=1^{2021}$.

β) Αν κ είναι ο βαθμός του γινομένου $A\cdot B$ ως προς x, ν είναι ο βαθμός του γινομένου $A\cdot B$ ως προς x και y και λ η αριθμητική τιμή του $A\cdot B$ που προέκυψε από το ερώτημα (α) να δείξετε ότι $P(x)=3x^2-5x-2$ και να το παραγοντοποιήσετε.

γ) Αν x_1 ,x_2 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου P(x) με x_1, x_2 να δείξετε ότι το σύστημα

$\begin{cases} x+x_1(x-y)=5-x_2y \\ 1-\dfrac{x_2x-3y}{5}=x+6-y \end{cases}$ παίρνει την μορφή $\begin{cases} 2x+7y=15 \\ -5x+16y=-4 \end{cases}$ και να το λύσετε.

8) Η καθηγήτρια των Μαθηματικών θέλει να γράψει ένα διαγώνισμα συνολικής βαθμολογίας 100 μονάδων, με ερωτήσεις σωστού/λάθους 5 μονάδων και ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής 10 μονάδων. Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής θέλει να είναι διπλάσιες από τις ερωτήσεις σωστού/λάθους.

(α) Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων σύμφωνα με το πιο πάνω σενάριο.
(β) Πόσες ερωτήσεις κάθε είδους πρέπει να βάλει στο διαγώνισμα; ***Απάντηση:*** *(x,y)=(4,8)*

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (2012) *Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου*, ΙΤΥΕ – Διόφαντος
- Αρδαβάνη Κ. (2018). *Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ – ΚΑΡΕΤΑ, Σενάριο για την Άλγεβρα*, ΙΤΥΕ-ΙΕΠ.
- Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. (2007)
- *Μαθηματικά Γ Γυμνασίου*, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
- Ιωάννου, Σ. κ.α. (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών. Ειδικό μέρος Ειδικότητα ΠΕ03*.
- Κιούφτη, Ρ. (2017). *Η έννοια και η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους*, Πρακτικά του 3ου Διεθνούς συνεδρίου για την Προώθηση της Εκπαιδευτικής Καινοτομίας
- Παπαϊωάννου, Σ., & Βοζίκης, Χ. (2015). *Επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων*.
- Σκαρπέντζος, Γ. (2014). *Διδασκαλία συστήματος γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο των πολλαπλών αναπαραστάσεων* (Doctoral dissertation).
- Kaplan, W. (1962). *Operational methods for linear systems* (Vol. 4). Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων

Αρδαβάνη Πόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν την προσπάθεια ενός μαθητή να φτιάξει μία μικρότερη εικόνα του αγγείου που φαίνεται στην εικόνα 1.

Εικόνα 1: Βαρελόσχημη Λήκυθος

Εικόνα 2:
50% πλάτος

Εικόνα 3:
50% ύψος

Εικόνα 4:
50% πλάτος και 50% ύψος

Εικόνα 5:
30% πλάτος
και 70% ύψος

Για κάθε μία από αυτές τις εικόνες δίνεται ο τρόπος κατασκευής. Για παράδειγμα η εικόνα 2 δημιουργήθηκε με πλάτος 50% του πλάτους της εικόνας 1 και ίδιο ύψος.

Η εικόνα 3 δημιουργήθηκε με ύψος το 50% του ύψους της εικόνας 1 και ίδιο πλάτος, η εικόνα 4 με πλάτος και ύψος το 50% αντίστοιχα του πλάτους και ύψους της εικόνας1.

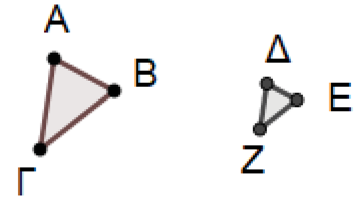
Η εικόνα 5 δημιουργήθηκε με πλάτος το 30% του πλάτους της εικόνας 1 και ύψος το 70% του ύψους της εικόνας1.

Ποια όμως από αυτές **μοιάζει** με το αγγείο της βαρελόσχημης λήκυθου στην εικόνα1;

Μήπως παρατηρήσατε ότι η εικόνα 4 μοιάζει καταπληκτικά με την εικόνα1; Ναι θα λέγαμε ότι το αγγείο στην εικόνα 4 αποτελεί μια **σμίκρυνση** του αγγείου στην εικόνα 1 ή ότι η εικόνα 1 αποτελεί μία **μεγέθυνση** του αγγείου στην εικόνα 4, ενώ όλες οι άλλες εικόνες αποτελούν μία **παραμόρφωση** της αρχικής εικόνας 1. Τι κανόνα μπορούμε να βγάλουμε στην περίπτωση που θέλουμε να φτιάξουμε μία εικόνα μικρότερη από μία άλλη ώστε να της μοιάζει και να μην την παραμορφώνει;

Τι θα γινόταν αν φτιάχναμε μία νέα εικόνα με πλάτος και ύψος το 30% της αρχικής αντίστοιχα; Σμίκρυνση ή παραμόρφωση;

Για να παρατηρήσουμε περισσότερες ιδιότητες που αφορούν την ομοιότητα σχημάτων και δη γεωμετρικών επιλέγουμε δύο αντίστοιχα τρίγωνα στις εικόνες 1 και 4, τα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη σχέση των αντιστοίχων πλευρών και γωνιών τους.



Με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων διαβήτη, χάρακα και μοιρογνωμονίου διαπιστώνουμε ότι για τις πλευρές ισχύει: ΑΒ=2ΔΕ, ΑΓ =2ΔΖ και ΒΓ=2ΖΕ ενώ για τις γωνίες: $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $\hat{B}=\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$.

Παρατηρούμε ότι: Τα δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι πλευρές ανάλογες, με λόγο ομοιότητας 2:1.

ΓΕΝΙΚΑ: Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές (πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες) ανάλογες.

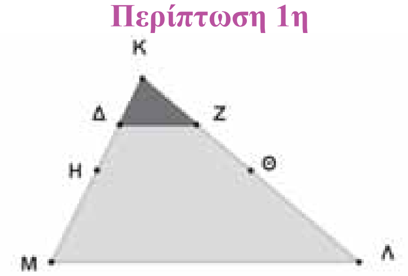
Θυμόμαστε ότι:

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία , τότε είναι όμοια.

Θα σας προτείνουμε μερικούς τρόπους να φτιάξετε μια σμίκρυνση ή μεγέθυνση ενός σχήματος π.χ. τριγώνου στο χαρτί σας με γεωμετρικά όργανα.

Ας δοκιμάσουμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο σε σμίκρυνση του τριγώνου ΚΛΜ, με λόγο 1:4.

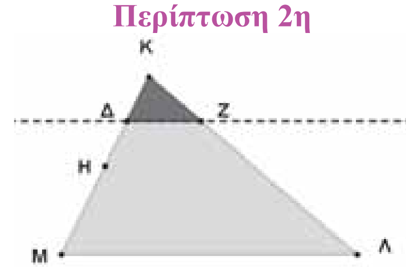
Περίπτωση 1η



Βρίσκουμε τα μέσα Η, Θ των πλευρών ΚΜ, ΚΛ αντίστοιχα και τα μέσα Δ, Ζ των ΚΗ, ΚΘ αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΚΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

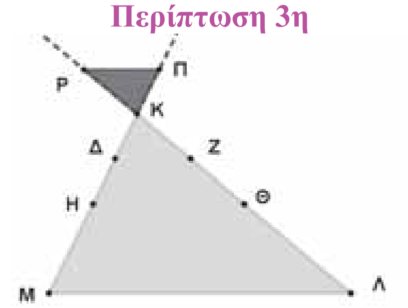
Περίπτωση 2η



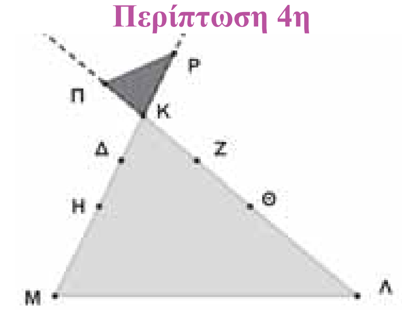
Βρίσκουμε το μέσο Η της πλευράς ΚΜ και το μέσο Δ του τμήματος ΚΗ. Από το Δ φέρνουμε ΔΖ παράλληλη στη βάση ΜΛ.

Το τρίγωνο ΚΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

Περίπτωση 3η



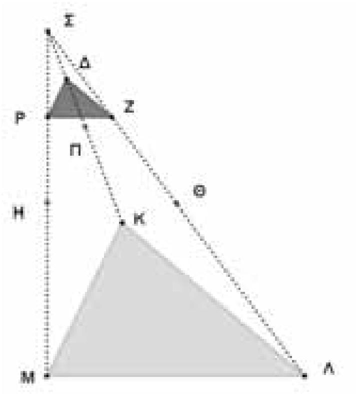
Περίπτωση 4η

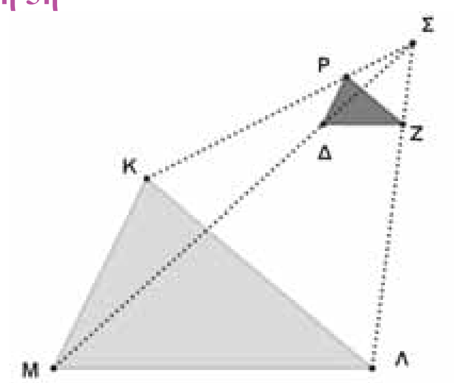


Ξεκινάμε με την δημιουργία των σημείων Δ και Ζ όπως στην $1^η$ περίπτωση και μετά δημιουργούμε το ΚΠΡ τρίγωνο από τις προεκτάσεις των πλευρών ΜΚ και ΛΚ ώστε ΚΠ =ΚΔ και ΚΡ=ΚΖ.
Το τρίγωνο ΚΠΡ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

Επαναλαμβάνουμε την δημιουργία των σημείων Δ και Ζ όπως στην $1^η$ περίπτωση και μετά δημιουργούμε το ΚΠΡ τρίγωνο από τις προεκτάσεις των πλευρών ΜΚ και ΛΚ ώστε ΚΡ=ΚΖ και ΚΠ =ΚΔ.
Το τρίγωνο ΚΠΡ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

Περίπτωση 5η





5α) Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Σ έξω από το τρίγωνο ΚΛΜ και βρίσκουμε τα μέσα Η, Π, Θ των ΣΜ, ΣΚ και ΣΛ αντίστοιχα και τα μέσα Ρ, Δ και Ζ των ΣΗ, ΣΠ και ΣΘ αντίστοιχα.
Το τρίγωνο ΡΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΜΚΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

5β) Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Σ έξω από το τρίγωνο ΚΛΜ και βρίσκουμε τα σημεία Ρ, Δ, Ζ ώστε τα τμήματα ΣΚ=4ΣΡ, ΣΜ=4ΣΔ και ΣΛ=4ΣΖ.
Το τρίγωνο ΡΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

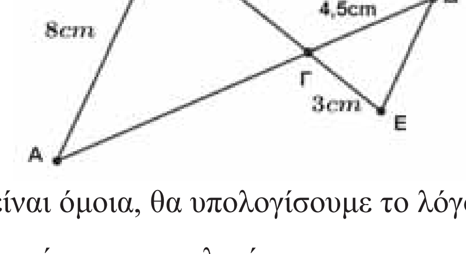
Άραγε το μέγεθος του τριγώνου ΔΡΖ που προκύπτει από τις διάφορες θέσεις του σημείου Σ αλλάζει; Μπορείτε να επινοήσετε εσείς και άλλους τρόπους κατασκευής;

Στους χάρτες βλέπουμε σημειωμένη μία κλίμακα π.χ. 1: 1000. Τι σημαίνει αυτό; Κάθε 1 εκατοστό που βλέπουμε στον χάρτη μας αντιστοιχεί σε 1000 εκατοστά του πραγματικού μέρους. Εχουμε μεγένθυνση ή σμίκρυνση; Κατά πόσο;

Άραγε τι συμβαίνει με τα εμβαδά δύο ομοίων σχημάτων; Όταν έχουμε δύο τρίγωνα όμοια με λόγο ομοιότητας 1:4 ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών τους;

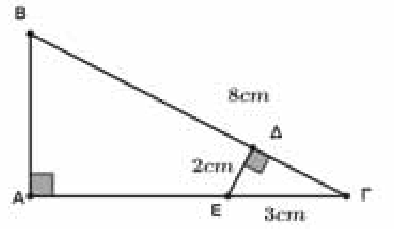
Παραδείγματα:

Παράδειγμα $1^ο$: Στο διπλανό σχήμα ΑΒ//ΔΕ και Γ είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΑΔ. Αν ΑΒ=8cm, ΒΓ=6cm, ΓΔ=4,5cm και ΓΕ=3cm να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ και της ΑΓ.



Γνωρίζουμε ότι ΑΒ//ΔΕ άρα $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma$ (εντός εναλλάξ γωνίες) και $B\hat{\Gamma}A = E\hat{\Gamma}\Delta$ (ως κατακορυφήν) άρα τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια, θα υπολογίσουμε το λόγο των ομόλογων πλευρών και είναι $\lambda = \frac{B\Gamma}{E\Gamma} = \frac{6}{3} = 2$. Πάμε τώρα να υπολογίσουμε και τις άλλες πλευρές με τη βοήθεια του λόγου λ, θα έχουμε: $\lambda = \dfrac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{4,5} = 2$ άρα ΑΓ=9cm και $\lambda = \dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{8}{\Delta E} = 2$ καταλήγουμε ότι ΔΕ=4cm.

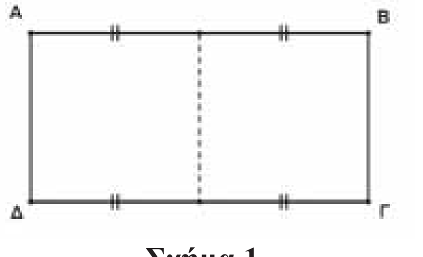
Παράδειγμα 2^{o}: Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$), από το σημείο Ε της ΑΓ με ΕΓ=3cm, κατασκευάζουμε ΕΔ□ΒΓ. Αν ΕΔ=2cm και ΒΓ=8cm να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.



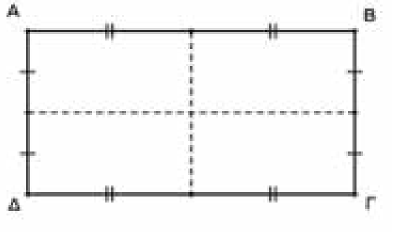
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια αφού έχουν: $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία, θα υπολογίσουμε το λόγο των ομόλογων πλευρών και έχουμε $\lambda = \dfrac{B\Gamma}{E\Gamma} = \dfrac{8}{3}$ και $\lambda = \dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{AB}{2}$ άρα $\dfrac{8}{3} = \dfrac{AB}{2}$ δηλαδή $AB = \dfrac{16}{3}$ cm.

Ασκήσεις προς διερεύνηση:

Άσκηση 1^{η}: Έχουμε ένα χαρτί Α4 και το διπλώνουμε μία φορά στη μέση (σχήμα 2). Τα ορθογώνια που σχηματίζονται είναι όμοια με το αρχικό; Έχουμε ένα χαρτί Α4 και το διπλώνουμε στη μέση, μία φορά στον οριζόντιο άξονα και μία ακόμη φορά στον κατακόρυφο άξονα (σχήμα2). Τα ορθογώνια που σχηματίζονται είναι όμοια με το αρχικό (Γιατί;)



Σχήμα 1

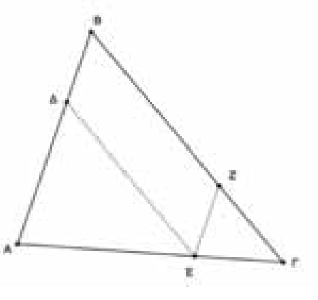


Σχήμα 2

Άσκηση 2^{η}: Ένας μάστορας χρωμάτισε ένα τοίχο καταστήματος με διαστάσεις 5,4m x 3,2m και ζήτησε για την εργασία 2 ημερών σε αυτό, αμοιβή 80 ευρώ. Ένας γείτονας ζήτησε από τον μάστορα να αναλάβει τον τοίχο του καταστήματος του, με διπλάσιες διαστάσεις. Ο μάστορας δέχτηκε και συμφωνήσανε ότι θα τελειώσει αυτό το νέο έργο κάνοντας 4 μεροκάματα και ζήτησε διπλάσια αμοιβή. Έπραξε σωστά στους υπολογισμούς του; Μήπως υπήρξε λάθος; Μπορείτε να το βρείτε; Ποιος ζημιώθηκε από τους λάθους υπολογισμούς;

Άσκηση 3^{η}: Σχεδιάστε ένα γεωμετρικό σχήμα σε μιλιμετρέ (ας έχει τις κορυφές του σε κορυφές τετραγώνων του μιλιμετρέ) και ζητήστε από ένα συμμαθητή σας να σας το σχεδιάσει με κλίμακα 1:3 και 3:1.

Άσκηση 4^{η}: Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: ΕΖ//ΑΒ και ΕΔ//ΒΓ. Αν ΑΒ=15cm, ΑΔ=10cm και ΒΓ=20cm, να υπολογίσετε το μήκος του ΒΖ.



Θέματα Ισότητας - Ομοιότητας τριγώνων

Γεώργιος Μπατέλης

Άσκηση

Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ≠ΒΓ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε. Στη συνέχεια φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΔΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Ρ.

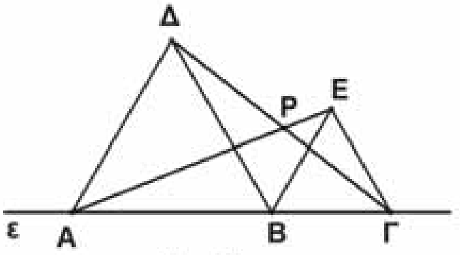
I. **Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΓΔ.**

II. $A\hat{E}P = \Delta\hat{\Gamma}B$

III. **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΡΓ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.**

Λύση

- Κάνουμε πάντα ένα σχήμα με γεωμετρικά όργανα, όσο γίνεται καλύτερα. (Το σχήμα 1)
- Θα πρέπει, από την εκφώνηση της άσκησης να κρατήσουμε να αναγκαία. Γράφουμε λοιπόν Υπόθεση (Δεδομένα)-Ζητούμενα (Συμπέρασμα).



(Σχ. 1)

Υ (υπόθεση)	**Σ (συμπέρασμα)**
$\overset{\triangleleft}{AB\Delta}$ ισόπλευρο $\overset{\triangleleft}{B\Gamma E}$ ισόπλευρο	**i)** $AE = \Gamma\Delta$ **ii)** $A\hat{E}B = \Delta\hat{\Gamma}B$ **iii)** $\overset{\triangleleft}{ABE} \approx \overset{\triangleleft}{AP\Gamma}$

I. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΑΕ=ΓΔ.

Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων περνάει μέσα από την ισότητα δύο τρίγωνων.

Αναζητούμε λοιπόν δύο τρίγωνα, το ένα να περιέχει την ΑΕ και το άλλο την ΓΔ. Αυτά είναι τα ΑΕΒ και ΔΒΓ, τα οποία φαίνεται και από το σχήμα ότι μάλλον είναι ίσα. Μην ξεχνάτε ένα καλό σχήμα πάντα βοηθάει στην λύση μιας άσκησης.

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $\overset{\triangleleft}{ABE} = \overset{\triangleleft}{\Delta B\Gamma}$.

Πώς γίνεται αυτό;

Κριτήρια ισότητας τριγώνων. Ποια είναι αυτά;

Ας τα θυμηθούμε.

Τι παρατηρείτε; Τι θα πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουν οπωσδήποτε;

Τουλάχιστον μια πλευρά ίση.

Ποια μπορεί να είναι αυτή, ειδικά όταν το σχήμα είναι λίγο μπερδεμένο;

Ας το ξεμπερδέψουμε!

Θα γράψουμε τα δύο τρίγωνα που θέλουμε να συγκρίνουμε και κάτω από κάθε τρίγωνο θα βάλουμε τα πρωτεύοντα στοιχεία τους, ώστε να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

$\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$	$\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$
ΑΒ	**ΒΓ**
ΑΕ	**ΓΔ**
ΒΕ	**ΔΒ**
$Α\hat{Β}Ε$	$Δ\hat{Β}Γ$
$Α\hat{Ε}Β$	$Δ\hat{Γ}Β$
$Ε\hat{Α}Β$	$Β\hat{Δ}Γ$

Θα πρέπει να δούμε ποια πλευρά του $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ είναι ίση με ποια του πλευρά του $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$.

Ας ξεκινήσουμε από την ΑΒ.

Η ΑΒ δεν φαίνεται να είναι ίση με την ΒΓ, ούτε με την ΓΔ, μένει λοιπό μόνο η ΔΒ.

Φαίνεται ότι είναι ίσες, χρειάζεται όμως επιβεβαίωση (απόδειξη). Ποιος θα με βοηθήσει;

Ο «βοηθός» μου, Ποιος είναι αυτός;

Μα η υπόθεση, αυτός είναι ο «βοηθός» μου! Αυτός και μόνο αυτός, θα με βοηθήσει να δώσω απαντήσεις στα ερωτήματά μου.

Για να δούμε τι έχουμε στην υπόθεση.

Το τρίγωνο $\overset{\triangleleft}{ΑΒΔ}$ είναι ισόπλευρο.

Πως το χρησιμοποιούμε αυτό για τις πλευρές;

Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

Δηλαδή ΑΒ=ΑΔ=ΒΔ, άρα, αποδείξαμε ότι **ΑΒ=ΒΔ (1).**

Το πρώτο βήμα έγινε, δηλαδή αποδείξαμε ότι τα δύο τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ και $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$ έχουν μια πλευρά ίση και η απόδειξη έγινε με την βοήθεια της υπόθεσης (του βοηθού μου) και μάλιστα όχι όλης της υπόθεσης. Υπάρχει και άλλο τρίγωνο που είναι ισόπλευρο, το $\overset{\triangleleft}{ΒΓΕ}$. Θα πρέπει και αυτό να το χρησιμοποιήσουμε.

Προσοχή: Για να λύσουμε μια άσκηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όλες τις υποθέσεις μας, τουλάχιστον μια φορά την καθεμία.

Ας δούμε λοιπόν μήπως τα τρίγωνα που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ίσα, δηλαδή τα $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ και $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$ έχουν και άλλη πλευρά ίση.

Η πλευρά ΑΕ του $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ φαίνεται να ίση με την πλευρά ΓΔ του $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$, αυτό όμως πρέπει να αποδειχτεί.

Ας δούμε και τις δύο τελευταίες πλευρές, δηλαδή τις ΒΕ και ΒΓ.

Η ΒΕ και η ΓΒ είναι πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου $\overset{\triangleleft}{ΒΓΕ}$, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή θα έχουμε **ΒΕ=ΒΓ (2).**

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την υπόθεσή μας βρήκαμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ και $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$ έχουν δύο πλευρές ίσες.

Τί πρέπει να αποδείξουμε ώστε τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{ΑΒΕ}$ και $\overset{\triangleleft}{ΔΒΓ}$ να είναι ίσα;

Ας θυμηθούμε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Έχουμε ήδη δύο πλευρές ίσες, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι έχουν τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AB E}}$ η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ και ΒΕ (επειδή οι δύο πλευρές έχουν κοινό σημείο το Β, να τις γράψουμε ΒΑ και ΒΕ) είναι η $\mathbf{A\hat{B}E}$.

Όμοια στο τρίγωνο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΒΔ και ΒΓ είναι η $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma}$ **(3). (Αυτός είναι τώρα ο στόχος)**
Τις δύο υποθέσεις τις έχουμε χρησιμοποιήσει και αποδείξαμε την ισότητα δύο πλευρών σε κάθε τρίγωνο. Θέλουμε όμως και ισότητα γωνιών.
Θα προστρέξουμε πάλι στον βοηθό μας και θα ζητήσουμε βοήθεια για γωνίες.
Τι γνωρίζουμε για τα ισόπλευρα τρίγωνα και τις γωνίες τους;
Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60^o.
Αυτό μας βολεύει για να φτάσουμε στον στόχο μας;

Πόσες μοίρες φαίνεται να είναι κάθε μία από τις γωνίες $\mathbf{A\hat{B}E}$ και $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$;
Προφανώς περισσότερες από 60^o. Πόσες άραγε;

Ας δούμε την $\mathbf{A\hat{B}E}$ η οποία είναι $\mathbf{A\hat{B}E = A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}E = 60^o + \Delta\hat{B}E}$ **(4).**

Ας δούμε και την $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$ η οποία είναι $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E + 60^o}$ **(5).**
Από τις σχέσεις (4) και (5), έχουμε ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα θα είναι και τα πρώτα, οπότε $\mathbf{A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma}$, δηλαδή αποδείξαμε τη σχέση (3) που ήταν και ο στόχος μας.
Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται συνοπτικά τι έχουμε κάνει μέχρι τώρα.

$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$	$\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$
ΑΒ	**ΒΓ**
ΑΕ	**ΓΔ**
ΒΕ	**ΔΒ**
$\mathbf{A\hat{B}E}$	$\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$
$\mathbf{A\hat{E}B}$	$\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$
$\mathbf{E\hat{A}B}$	$B\hat{\Delta}\Gamma$

Για να είναι πλήρης η απάντηση μας, θα πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα που αναφέρεται στην ισότητα των τριγώνων ώστε να βγάλουμε το συμπέρασμα που θέλουμε.

Τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ έχουν:

- **ΑΒ** = **ΔΒ** λόγω της σχέσης (1)
- **ΒΕ** = **ΒΓ** λόγω της σχέσης (2)
- $\mathbf{A\hat{B}E}$ = $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$ λόγω της σχέσης (3)

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (κριτήριο δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία), οπότε θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}} = \overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$, οπότε θα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα.
Ποια είναι αυτά;
Προφανώς οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες.
Συγκεκριμένα έχουμε ότι ΑΕ=ΓΔ, καθώς και ότι οι άλλες δύο γωνίες είναι ίσες.
Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα i).

II. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\hat{E}B = \Delta\hat{\Gamma}B}$.

Θα ξανακάνουμε τους ιδίους συλλογισμούς.
Η ισότητα των γωνιών περνάει μέσα από την ισότητα δύο τριγώνων.
Ποια τρίγωνα περιέχουν τις παραπάνω γωνίες;

Αυτά είναι τα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ τα οποία όμως αποδείξαμε στο ερώτημα i) ότι είναι ίσα, άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
Ποιες όμως είναι αυτές που απομένουν;

Οι γωνίες του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ είναι οι $\mathbf{A\hat{E}B}$ και $\mathbf{E\hat{A}B}$.

Οι γωνίες του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ είναι οι $\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$.
Ποιες όμως είναι ίσες και γιατί;

Βέβαια εδώ μας ζητάει να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\hat{E}B} = \Delta\hat{\Gamma}B$, αν όμως μας ζητούσε να βρούμε ποιες από τις άλλες γωνίες των τριγώνων $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$, $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ είναι ίσες πως θα το βρίσκαμε;
Πραγματικά είναι ένα πολύ εύλογο ερώτημα.
Η απάντηση είναι σε αυτό που γράφει και το βιβλίο σας: "όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν όλα τους τα **αντίστοιχα** στοιχεία ίσα".
Τι σημαίνει αντίστοιχα στοιχεία ίσα;
Η απάντηση είναι: απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομοίως ίσες πλευρές.

Η γωνία $\mathbf{A\hat{E}B}$ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ η οποία είναι ίση με την πλευρά ΔΒ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$, που απέναντί της είναι η γωνία $\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$, άρα θα είναι $\mathbf{A\hat{E}B} = \Delta\hat{\Gamma}B$ (4).
Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα ιι).

III. Η λογική είναι παρόμοια.
Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας δύο τριγώνων;

Τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$ έχουν μια **γωνία κοινή**, την $\mathbf{E\hat{A}B} = \mathbf{P\hat{A}\Gamma}$.
Μάλλον και όπως φαίνεται και από το σχήμα, αρκεί να έχουν άλλη μία γωνία ίση.
Γράφουμε τα δύο τρίγωνα με τις γωνίες τους.

$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$	$\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$
$\mathbf{A\hat{B}E}$	$\mathbf{A\hat{P}\Gamma}$
$\mathbf{A\hat{E}B}$	$\mathbf{P\hat{A}\Gamma}$
$\mathbf{E\hat{A}B}$	$\mathbf{P\hat{\Gamma}A}$

Πολλές φορές ένα δεύτερο ερώτημα σε μια άσκηση βοηθιέται από το πρώτο ερώτημα. Στο πρώτο ερώτημα αποδείξαμε την ισότητα δύο τριγώνων, των $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$.

Ας ρίξουμε μια ματιά μήπως κάποιο από τα ζευγάρια των γωνιών που θέλουμε να αποδείξουμε έχει ήδη αποδειχτεί.

Προφανώς η γωνία $\mathbf{A\hat{P}\Gamma}$ του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$ δεν μπορεί να είναι, γιατί δεν είναι γωνία των $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$, $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$.

Άρα θα δούμε τη γωνία $\mathbf{Ρ\hat{Γ}Α}$.

Η γωνία $\mathbf{Ρ\hat{Γ}Α = Δ\hat{Γ}Β}$ του τριγώνου $\mathbf{\overset{\triangle}{ΔΒΓ}}$ και λόγω της σχέσης (4) είναι $\mathbf{Α\hat{Ε}Β = Δ\hat{Γ}Β}$, άρα $\mathbf{Ρ\hat{Γ}Α = Α\hat{Ε}Β}$, οπότε τα τρίγωνα $\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΒΕ}}$ και $\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΡΓ}}$ είναι όμοια.

Θα βρούμε τώρα τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Ξέρουμε ότι αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Πως θα βρούμε όμως τις ομόλογες πλευρές των τριγώνων;

Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ας δούμε πως θα τα καταφέρουμε.

Στον παρακάτω πίνακα σημειώνονται οι ίσες γωνίες των δύο τριγώνων:

$\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΒΕ}}$	$\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΡΓ}}$
$\mathbf{\hat{Α}ΒΕ}$ →	$\mathbf{Α\hat{Ρ}Γ}$
$\mathbf{Α\hat{Ε}Β}$	$\mathbf{Ρ\hat{Α}Γ}$
$\mathbf{Ε\hat{Α}Β}$	$\mathbf{Ρ\hat{Γ}Α}$

Για να γράψουμε του λόγους των πλευρών κάνουμε τα παρακάτω:

- Γράφουμε τρείς γραμμές με δύο =, δηλαδή

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- Στους αριθμητές βάζουμε τις πλευρές του ενός τριγώνου, έστω του $\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΒΕ}}$

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\quad} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{\quad} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{\quad}$$

- Στους παρονομαστές βάζουμε τις ομόλογες πλευρές του άλλο τριγώνου. Πως τις βρίσκουμε;

  Στο τρίγωνο ΑΒΕ η πλευρά ΑΒ έχει απέναντί της τη γωνία $\mathbf{Α\hat{Ε}Β}$ η οποία είναι ίση με τη γωνία $\mathbf{Ρ\hat{Γ}Α}$ του τριγώνου $\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΡΓ}}$, η οποία έχει απέναντί της τη πλευρά την ΑΡ. Δηλαδή στον πρώτο λόγο ο παρονομαστής θα είναι ΑΡ.

  Όμοια στο τρίγωνο ΑΒΕ η πλευρά ΑΕ έχει απέναντί της τη γωνία $\mathbf{\hat{Α}ΒΕ}$ η οποία είναι ίση με τη γωνία $\mathbf{Α\hat{Ρ}Γ}$ του τριγώνου $\mathbf{\overset{\triangle}{ΑΡΓ}}$, η οποία έχει απέναντί της τη πλευρά την ΑΓ. Δηλαδή στον δεύτερο λόγο ο παρονομαστής θα είναι ΑΓ.

  Υποχρεωτικά η τρίτη πλευρά ΡΓ θα μπει στον τρίτο λόγο:

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathrm{ΑΡ}} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{\mathrm{ΑΓ}} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{\mathrm{ΡΓ}}$$

  Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων τότε θα είναι :

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{ΑΡ}} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{\mathbf{ΑΓ}} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{\mathbf{ΡΓ}} = λ$$

Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα iii).

Αριθμητικές πράξεις με το μυαλό - Τετράγωνα ακέραιων αριθμών

Άγγελος Μποχώρης[1]

Εισαγωγή

Πάντα με ενθουσίαζε η δυνατότητα μερικών ανθρώπων να κάνουν αριθμητικές πράξεις, μερικές φορές όχι τόσο απλές, με το μυαλό τους και να αναφέρουν το ορθό (συνήθως) αποτέλεσμα, άμεσα ή μετά από σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα.

Προσπαθώντας να κάνω το ίδιο, παρατήρησα ότι διαμορφώνοντας και ακολουθώντας κάποιους κανόνες οι πράξεις με το μυαλό ή, εναλλακτικά, οι πράξεις χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής γίνονται πιο εύκολα.

Στις επόμενες ενότητες περιγράφονται:

- τέσσερεις εύχρηστοι κανόνες για τον υπολογισμό με το μυαλό των τετραγώνων ακέραιων αριθμών,
- μία απλή και συνοπτική Μεθοδολογία για τον ίδιο σκοπό, η οποία προέκυψε από τη σύνθεση των τεσσάρων Κανόνων,
- πρακτικά παραδείγματα υιοθέτησης της Μεθοδολογίας για τον υπολογισμό των τετραγώνων ενός τριψήφιου και δύο διψήφιων ακέραιων αριθμών.

1) Ανασκόπηση Συναφών Πληροφοριών

Μια γρήγορη αναζήτηση στο διαδίκτυο οδήγησε σε σημαντικό αριθμό συναφών όρων, όπως:

- προφορικός αριθμητικός λογισμός, αριθμητική με το νου, νοητικές μαθηματικές ικανότητες, mental arithmetic, mental mathematics, mental computation, κ.λπ.,
- ευρημάτων όπως δημοσιευμένα βίντεο, άρθρα, βιβλία, μεταπτυχιακές διπλωματικές εργασίες[2], εθνικές στρατηγικές[3] για τη βελτίωση των νοητικών μαθηματικών ικανοτήτων, αλλά και αναφορές σε πανευρωπαϊκούς - παγκόσμιους διαγωνισμούς[4].

Από τα βιβλιογραφικά και τα λοιπά ευρήματα προέκυψε ότι η ικανότητα νοητικών αριθμητικών πράξεων:

- είναι ένα αντικείμενο που συγκεντρώνει πολύπλευρο ενδιαφέρον (επιστημονικό, κοινωνικό, κ.λπ.)
- διευκολύνεται από τυποποιημένους κανόνες υπολογισμού του αποτελέσματος.
- *«… περιλαμβάνει διαχείριση αριθμών, γνώση μαθηματικών και απαιτεί νοητικές δεξιότητες και επαναλαμβανόμενη εφαρμογή …»*
- *«είναι ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών, … σημαντική απαίτηση της κοινωνίας, … διαχείρισης της καθημερινότητας»*[2]
- *«τα ηλεκτρονικά μέσα εκτελούν αριθμητικές πράξεις με ταχύτητα, το ζητούμενο είναι να υπάρχει η ικανότητα να αντιμετωπίζουμε με κριτικό πνεύμα την πλημμυρίδα των ποσοτικών σχέσεων που μας κατακλύζουν καθημερινά»*[1]

2) Συμβατικός και Εναλλακτικός Τρόπος Υπολογισμού

Το τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού i βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό i με τον εαυτό του:

$$i^2 = i \times i$$

---

[1] Μαθητής Γ' Γυμνασίου στο Κολλέγιο Αθηνών (Ψυχικού)

[2] Αριθμητική με το Νου και Αριθμητικοί Υπολογισμοί με Προσέγγιση, Μαίρη Στρικούδη, 2007.

[3] Teaching children to calculate mentally, Department for Education, UK, 2010.

[4] Junior Mental Calculation Championship, European Championship in Mental Calculation, Mental Calculation World Cup.

Για να ολοκληρωθεί η πράξη αυτή νοητικά, αρκεί να επαναληφθεί με το μυαλό, ο συμβατικός τρόπος υπολογισμού, ο οποίος είναι εφικτός για διψήφιους ακέραιους, δυσκολότερος για τριψήφιους και ίσως απαγορευτικός για τετραψήφιους, ή/και μεγαλύτερους ακέραιους αριθμούς.

Η αναζήτηση εναλλακτικού τρόπου υπολογισμού ξεκίνησε από την παρατήρηση ότι το τετράγωνο ενός θετικού ακέραιου αριθμού i^2 μπορεί να προκύψει αν στο τετράγωνο του αμέσως προηγούμενου θετικού ακέραιου αριθμού $(i-1)^2$, προστεθεί ο ίδιος (i), αλλά και ο προηγούμενος ακέραιος αριθμός $(i-1)$.

Για την επιβεβαίωση της ισχύος της παρατήρησης αυτής παρατίθενται ως ενδεικτικά παραδείγματα, τα παρακάτω ζεύγη ακέραιων αριθμών:

9 (3^2) και 4 (2^2), 225 (15^2) και 196 (14^2), 6.400 (80^2) και 6.241 (79^2)

για τα οποία επιβεβαιώνεται ότι: 9=4+(3+2), 225=196+(15+14), 6.400=6.241+(80+79)

Η καθολική ισχύς της παρατήρησης αυτής, για δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς i και $i-1$, επιβεβαιώνεται εύκολα από την εξίσωση:

$$i^2 = [(i-1)+1]^2 = (i-1)^2 + 2(i-1) + 1^2 = (i-1)^2 + 2i - 2 + 1 = (i-1)^2 + [i + (i-1)]$$

η δε ακόλουθη αναδιατύπωση της: $i^2 - (i-1)^2 = i + (i-1)$

μας οδηγεί στον 1^{ο} Κανόνα της Προτεινόμενης Μεθοδολογίας.

3) Κανόνες Υπολογισμού

Κανόνας 1^{ος}

Με βάση τα προαναφερθέντα:

> Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι ίση με το άθροισμα των δύο ακέραιων αριθμών.

Κανόνας 2^{ος}

Η διαφορά δύο οποιονδήποτε, μη διαδοχικών θετικών ακέραιων αριθμών i και j, όπου $i > j+1$, μπορεί να προκύψει από την ακόλουθη γνωστή ταυτότητα: $i^2 - j^2 = (i-j) \times (i+j)$ οπότε ο 2^{ος} Κανόνας έχει ως ακόλουθα:

> το τετράγωνο ενός θετικού ακέραιου αριθμού μπορεί να προκύψει αν στο τετράγωνο του οποιουδήποτε μικρότερου θετικού ακέραιου αριθμού προστεθεί το αποτέλεσμα του γινομένου της διαφοράς των δύο αριθμών επί το άθροισμα τους.

Στην περίπτωση που οι δύο θετικοί ακέραιοι είναι διαδοχικοί, ισχύει δηλαδή η ισότητα $i = j+1$, τότε η προαναφερθείσα ταυτότητα απλοποιείται ως ακόλουθα:

$$i^2 - j^2 = (i-j) \times (i+j) = [(j+1) - j] \times [(j+1) + j] = 1 \times (i+j) = i + j$$

οπότε ο 2^{ος} Κανόνας απλοποιείται στον 1^{ο} Κανόνα.

Κανόνας 3^{ος}

Η αναζήτηση κανόνων για τα τετράγωνα θετικών ακέραιων αριθμών συνεχίστηκε στο διαδίκτυο, όπου, μεταξύ άλλων, βρέθηκε το δημοσίευμα «Τετράγωνα αριθμών που τελειώνουν σε 5» [5] όπου περιγράφεται ο ακόλουθος τρόπος υπολογισμού (3^{ος} Κανόνας) :

> *«… πολλαπλασιάζετε τον ακέραιο αριθμό που διαμορφώνεται από το ψηφίο ή τα ψηφία που προηγούνται του 5 με τον αμέσως επόμενο ακέραιο αριθμό και τοποθετείτε το 25 στο τέλος του γινομένου …*

Παράδειγμα: *Για τον αριθμό 25 (ή 75), το ψηφίο που προηγείται του 5 είναι το 2 (ή το 7). Κατά συνέπεια, υιοθετώντας τον Κανόνα, το τετράγωνο του 25 (75) μπορεί να υπολογισθεί ως ακόλουθα:* $25^2 = \underline{(2*3)}25 = \underline{(6)}25 = 625$ *ή* $75^2 = \underline{(7*8)}25 = \underline{(56)}25 = 5625$

Στο ίδιο δημοσίευμα υπάρχει και η ακόλουθη αναλυτική ανάδειξη:

5 Squaring numbers that end in 5, Rick Garlikov, http://www.garlikov.com/math/SquaringNumbersEndingIn5.html

«… κάθε αριθμός που τελειώνει σε 5 μπορεί να γραφεί ως $10 \times \zeta + 5$*, όπου ζ είναι ο ακέραιος αριθμός που διαμορφώνεται από το ψηφίο ή τα ψηφία που προηγούνται του 5.*

Το τετράγωνο κάθε τέτοιου αριθμού λοιπόν είναι:

$$(10 \times \zeta + 5)^2 = (10 \times \zeta)^2 + 2 \times (10 \times \zeta) \times 5 + 5^2 = (10 \times \zeta)[(10 \times \zeta) + 10] + 25 =$$
$$(10 \times \zeta)[(10 \times (\zeta + 1)] + 25 = 100 \times [\zeta \times (\zeta + 1)] + 25$$

Έχουν ήδη καταληφθεί οι θέσεις των μονάδων και των δεκάδων άρα το υπόλοιπο μέρος, στα αριστερά του 25, δεν μπορεί παρά να είναι ο αριθμός $\zeta \times (\zeta + 1)$ των εκατοντάδων.

Κανόνας 4^{ος}

Ο αριθμός των μηδενικών στο τέλος ενός τετραγώνου είναι ζυγός αριθμός, πχ 100 (10^2), 400 (20^2), 22.500 (150^2), 90.000 (300^2), 1.000.000 (1.000^2), κ.λπ.

- Κατ' αντιστοιχία με τον 3^ο Κανόνα: κάθε αριθμός που τελειώνει σε 0 μπορεί να γραφεί ως $10 \times \zeta$, όπου ζ είναι ο αριθμός που διαμορφώνεται από το ψηφίο ή τα ψηφία που προηγούνται του 0. Το τετράγωνο κάθε τέτοιου αριθμού είναι: $(10 \times \zeta)^2 = 100 \times \zeta^2 = \underline{\zeta^2}00$ άρα:

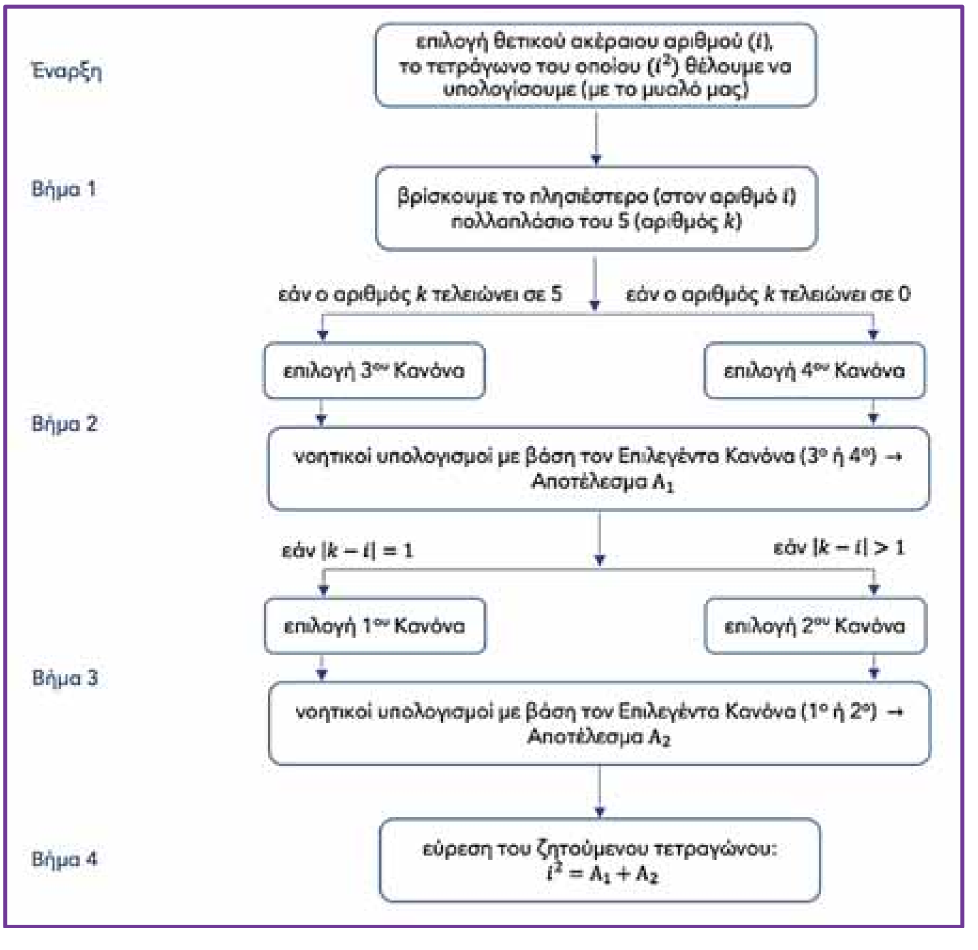
- το τετράγωνο αριθμού που τελειώνει σε 0 μπορεί να προσδιοριστεί αν στο τέλος του τετραγώνου του αριθμού που διαμορφώνεται από το ψηφίο ή τα ψηφία που προηγούνται του 0 τοποθετηθούν δύο μηδενικά (4^{ος} Κανόνας).
  Με βάση τα προαναφερθέντα: η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι ίση με το άθροισμα των δύο ακέραιων αριθμών.

4) Προτεινόμενη Μεθοδολογία. Η προτεινόμενη μεθοδολογία :

α) επιμερίζει τον υπολογισμό σε απλούστερους, αξιοποιώντας τους προαναφερθέντες Κανόνες.

β) απεικονίζεται σε διαγραμματική μορφή στο λογικό διάγραμμα που ακολουθεί (Σχήμα 1).

5) Λογικό Διάγραμμα Προτεινόμενης Μεθοδολογίας



6) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε νοητικά (με το μυαλό μας) το τετράγωνο του αριθμού 77.

Ακολουθώντας τον συμβατικό τρόπο υπολογισμού κάνουμε με το μυαλό μας αρχικά τους πολλαπλασιασμούς $7 \times 77 = 539$ και $70 \times 77 = 5390$ και στην συνέχεια, αθροίζοντας νοητικά τα αποτελέσματα των δύο αυτών γινομένων, λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα $77^2 = 5929$.

Ακολουθώντας την προτεινόμενη μεθοδολογία, προκύπτουν σταδιακά:

Έναρξη $i = 77$

Βήμα 1. Το πλησιέστερο (στον αριθμό i) πολλαπλάσιο του 5 (αριθμός k) του 5 είναι το 75 ($k = 75$).

Βήμα 2. Δεδομένου ότι το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 5 στην συγκεκριμένη περίπτωση τελειώνει σε 5 ($k = 75$), αξιοποιώντας τον 3ο Κανόνα, έχουμε:

$$A_1 = 75^2 = \underline{(7 * 8)}25 = \underline{(56)}25 = 5625$$

Βήμα 3. Οι αριθμοί $i = 77$ και $k = 75$ δεν είναι διαδοχικοί και, κατά συνέπεια, αξιοποιώντας τον 2ο Κανόνα έχουμε: $A_2 = 77^2 - 75^2 = (77 - 75) \times (77 + 75) = 2 \times 152 = 304$

Βήμα 4. Βρίσκουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα (το τετράγωνο i^2) αθροίζοντας τα επιμέρους αποτελέσματα A_1 και A_2, δηλαδή $i^2 = A_1 + A_2 = 5625 + 304 = 5929$

Παράδειγμα 2ο

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το τετράγωνο του αριθμού 92.

Ακολουθώντας τον συμβατικό τρόπο υπολογισμού, κάνουμε με το μυαλό μας αρχικά τους πολλαπλασιασμούς $2 \times 92 = 184$ και $90 \times 92 = 8280$ και στην συνέχεια, αθροίζοντας νοητικά τα αποτελέσματα των δύο αυτών γινομένων, λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα $92^2 = 8464$.

Ακολουθώντας την προτεινόμενη μεθοδολογία, προκύπτουν σταδιακά τα παρακάτω:

Έναρξη $i = 92$

Βήμα 1. Το πλησιέστερο (στον αριθμό i) πολλαπλάσιο του 5 είναι το 90 ($k = 90$).

Βήμα 2. Δεδομένου ότι το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 5 στην συγκεκριμένη περίπτωση τελειώνει σε 0 ($k = 90$), αξιοποιώντας τον 4ο Κανόνα, έχουμε:

$$A_1 = 90^2 = \underline{(9^2)}00 = \underline{(81)}00 = 8100$$

Βήμα 3. Οι αριθμοί $i = 92$ και $k = 90$ δεν είναι διαδοχικοί και, κατά συνέπεια, αξιοποιώντας τον 2ο Κανόνα έχουμε:

$$A_2 = 92^2 - 90^2 = (92 - 90) \times (92 + 90) = 2 \times 182 = 364$$

Βήμα 4. Βρίσκουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα (το τετράγωνο i^2) αθροίζοντας τα επιμέρους αποτελέσματα A_1 και A_2.

$$i^2 = A_1 + A_2 = 8100 + 364 = 8464$$

Παράδειγμα 3ο

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε με το μυαλό μας το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού 321.

Ακολουθώντας τον συμβατικό τρόπο υπολογισμού, κάνουμε με το μυαλό μας αρχικά τους πολλαπλασιασμούς $1 \times 321 = 321$, $20 \times 321 = 6420$ και $300 \times 321 = 96300$ και στην συνέχεια, αθροίζοντας νοητικά τα αποτελέσματα των τριών αυτών γινομένων λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα $321^2 = 103041$.

Ακολουθώντας την προτεινόμενη μεθοδολογία, προκύπτουν σταδιακά τα παρακάτω:

Έναρξη $i = 321$

Βήμα 1. Το πλησιέστερο (στον αριθμό i) πολλαπλάσιο του 5 είναι το 320 ($k = 320$).

Βήμα 2. Δεδομένου ότι το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 5 στην συγκεκριμένη περίπτωση τελειώνει σε 0 ($k = 320$), αξιοποιώντας τον 4ο Κανόνα, έχουμε: $A_1 = 320^2 = (32 \times 10)^2 = 32^2 \times 100$.

Δεδομένου ότι: $30^2 = \underline{(3^2)}00 = \underline{(9)}00 = 900$ για τον υπολογισμό του 32^2 αξιοποιούμε τον 2ο Κανόνα: $32^2 - 30^2 = (32-30) \times (32+30) = 2 \times 62 = 124$ και κατά συνέπεια:

$$A_1 = 320^2 = 32^2 \times 100 = (900+124) \times 100 = 102400$$

Βήμα 3. Οι αριθμοί $i = 321$ και $k = 320$ είναι διαδοχικοί και, κατά συνέπεια, αξιοποιώντας τον 1ο Κανόνα: $i^2 - k^2 = i + k$ έχουμε: $A_2 = 321^2 - 320^2 = 321 + 320 = 641$

Βήμα 4. Βρίσκουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα (το τετράγωνο i^2) αθροίζοντας τα επιμέρους αποτελέσματα A_1 και A_2: $i^2 = A_1 + A_2 = 102400 + 641 = 103041$

1. Συμπεράσματα

Από μία σύντομη ανασκόπηση των διαθέσιμων στο διαδίκτυο συναφών αναφορών, αναδείχθηκε η σημασία των νοητικών αριθμητικών υπολογισμών.

Περιγράφηκαν τέσσερεις εύχρηστοι Κανόνες για τον υπολογισμό με το μυαλό των τετραγώνων ακέραιων αριθμών, οι οποίοι στη συνέχεια συντέθηκαν σε μία απλή και συνοπτική Μεθοδολογία για τον ίδιο σκοπό.

Η προτεινόμενη Μεθοδολογία περιγράφηκε αναλυτικά, αποτυπώθηκε διαγραμματικά και χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των τετραγώνων ενός τριψήφιου και δύο διψήφιων ακέραιων αριθμών.

Τέλος, σε πιο προσωπικό επίπεδο, αποκόμισα πολλά από τη διαδικασία συγγραφής του συγκεκριμένου άρθρου, όπως η βιβλιογραφική ανάδειξη των πολλαπλών πτυχών των νοητικών μαθηματικών υπολογισμών, η συνειδητοποίηση του μεγέθους της προσπάθειας που απαιτείται για τη λεπτομερή διατύπωση και για την έγγραφη, δημόσια απόδοση ακόμη και ώριμων, εκτενώς δοκιμασμένων, συναφών σκέψεων, κα.

Ευχαριστίες

Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τους Καθηγητές μου που μου μεταλαμπάδευσαν την αγάπη και το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, καθώς και τους γονείς μου που με παρακίνησαν να αποτυπώσω τις σκέψεις και τα ευρήματα μου σ’ αυτό το άρθρο.

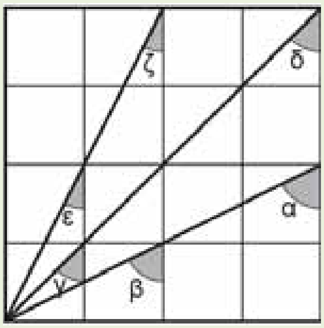
Βιβλιογραφία

- Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου; Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ., ΙΤΥΕ Διόφαντος, ISBN 978-960-06-2766-4.
- Μαθηματικά Β’ Γυμνασίου, Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ., ΙΤΥΕ Διόφαντος, ISBN 978-960-06-2718-3.
- Μαθηματικά Α’ Γυμνασίου; Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ.; ΙΤΥΕ Διόφαντος; ISBN 978-960-06-2670-4.
- Αριθμητική με το Νου και Αριθμητικοί Υπολογισμοί με Προσέγγιση, Στρικούδη Μ., 2007, Παιδαγωγικό Τμήμα – Επιστήμες της Αγωγής – Διδακτική των Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Teaching children to calculate mentally, Department for Education, UK, 2010, Crown (Ref: 00365-2010PDF-EN-01), https://dera.ioe.ac.uk/778/1/735bbb0036bed2dcdb32de11c7435b55.pdf
- Squaring numbers that end in 5, Garlikov R., http://www.garlikov.com/math/SquaringNumbersEndingIn5.html
- Mental computation: Is it more than mental architecture? Ann Heirdsfield, Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology (QUT), Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education Brisbane, Sydney, 4 – 7 December 2000.
- Mental Calculation World Cup, https://worldmentalcalculation.com/mental-calculation-world-cup/
- 2020, Junior Mental Calculation Online Championship, https://worldmentalcalculation.com/2020/06/04/junior-mental-calculation-online-championship-2020/
- 2019 European Championship in Mental Calculation, https://worldmentalcalculation.com/2019/02/11/announcement-of-the-2019-european-championship-in-mental-calculation/

Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια **Στέφανος Κεΐσογλου**

1) Στο παρακάτω σχήμα ένα τετράγωνο είναι χωρισμένο σε μικρότερα τετράγωνα. Να υπολογίσετε το άθροισμα α+β+γ+δ+ε+ζ των γωνιών που σημειώνονται στο σχήμα αυτό.



2) Το σχολικό βιβλίο στις επαναληπτικές ασκήσεις του 1ου κεφαλαίου έχει το εξής θέμα:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ **(Ταυτότητα Eüler)**

β) Αν α+β+γ=0, να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

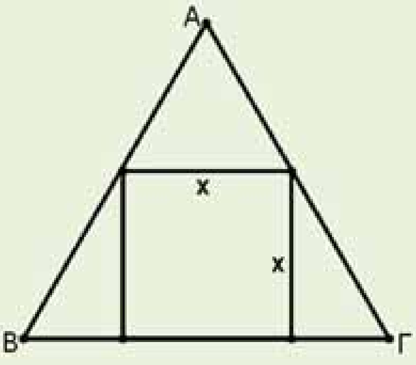
Να θεωρήσετε δεδομένο ότι ισχύει το συμπέρασμα στο ερώτημα β) και με βάση αυτό να απλοποιήσετε την παράσταση: $\Pi=\frac{(x^2-y^2)^2}{(1-x^2)(y^2-1)}+\frac{(1-x^2)^2}{(x^2-y^2)(y^2-1)}+\frac{(y^2-1)^2}{(x^2-y^2)(1-x^2)}$

3) Σε μία ομάδα παιδιών μοιράστηκε ένα ορισμένο ποσό χρημάτων εξ ίσου. Αν τα παιδιά ήταν 6 λιγότερα θα έπαιρνε το καθένα 1€ περισσότερο. Αν τα παιδιά ήταν 8 λιγότερα θα έπαιρνε το καθένα 1,5€ περισσότερο. Πόσα χρήματα μοιράστηκαν και πόσα ήταν τα παιδιά;

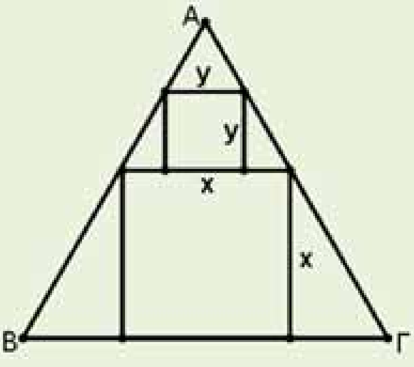
4) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη (α, β) μη μηδενικών ρπαγματικών αριθμών για τους οποίους ιχύει: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}$.

5) α) Σ ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε (εγγράφουμε) ένα τετράγωνο πλευράς x. (Εικόνα 1). Να υπολογίσετε την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου με βάση το x.

β) Στην προηγούμενη κατασκευή κατασκευάζουμε (εγγράφουμε) ένα τετράγωνο πλευράς y. (Εικόνα 2). Να υπολογίσετε την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με βάση το y.



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Απαντήσεις Θεμάτων τεύχους 118

1) Ας πάρουμε τον παρονομαστή της παράστασης, δηλαδή το άθροισμα:

$\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}$. Για το άθροισμα αυτό ισχύει:

$\frac{5}{2025}<\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}<\frac{5}{2021}$ αυτό σημαίνει ότι:

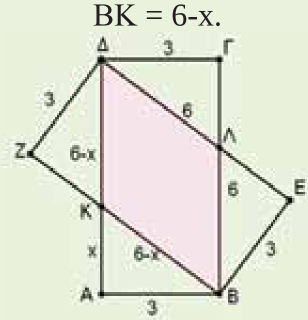
$\frac{2021}{5}<\frac{1}{\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}}<\frac{2025}{5}$ δηλαδή 404,2<Π<405 οπότε το ακέραιο μέρος του Π είναι προφανώς ο αριθμός 404.

2) Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΖΔ με κάθετες πλευρές παράλληλες προς τις κάθετες πλευρές του ΑΒΓ.

Καθώς τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ έχουν παράλληλες πλευρές οι γωνίες $\hat{Γ}$ και $\hat{Ε}$ είναι ίσες άρα έχουν ίσα ημίτονα, δηλαδή $\frac{x}{6α}=\frac{5}{2α}$ άρα x=15cm. Τελικά το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\frac{15cm\cdot 8cm}{2}=60cm^2$

3) Τα τρίγωνα ΔΖΚ, ΚΑΒ, ΒΕΛ και ΛΓΔ είναι ίσα (γιατί;). Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΚΑΒ δίνει: $(6-x)^2=x^2+9$ από όπου προκύπτει ότι $x=\frac{9}{4}$ άρα το εμβαδόν του ΚΑΒ είναι ίσο με $\frac{27}{8}$ μονάδες εμβαδού. Τα δύο τρίγωνα ΚΑΒ και ΔΓΛ έχουν συνολικό εμβαδόν $\frac{27}{4}$ μονάδες εμβαδού οπότε το εμβαδόν του ΔΛΒΚ είναι ίσο με $18-\frac{27}{4}$ μονάδες εμβαδού.

Αν x το τμήμα ΑΚ τότε ΔΚ=6-x και επομένως ΒΚ = 6-x.



4) Θα πρέπει η εξίσωση $x^2=3x+κ$ να έχει μία διπλή λύση. Αν κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου θα έχουμε $x^2-3x-κ=0$ άρα η εξίσωση: $x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-κ=0$ θα πρέπει να έχει μία διπλή λύση. Η εξίσωση γίνεται $(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-κ=0$ από όπου προκύπτει ότι θα πρέπει $κ=-\frac{9}{4}$ και τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\frac{3}{2}$ και το αρχικό σύστημα έχει για μοναδική λύση το ζεύγος $(\frac{3}{2},\ \frac{9}{4})$.

5) Αφού ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3x+1=0$ θα ισχύει $α^2-3α+1=0$ επομένως $α^2=3α-1$ (1) ή $α^2+1=3α$ (2). Η παράσταση $Π=\frac{2α^5-5α^4+2α^3-8α^2}{α^2+1}$, με βάση τις σχέσεις (1) και (2) γίνεται:

$$Π=\frac{α^2\cdot(2α^3-5α^2+2α-8)}{3α}=\frac{α\cdot[α^2\cdot(2α-5)+2α-8)]}{3}=\frac{α\cdot[(3α-1)\cdot(2α-5)+(2α-5)-3]}{3}=$$

$$\frac{α\cdot[(2α-5)\cdot 3α-3)]}{3}=\frac{α\cdot(6α^2-15α-3)}{3}=α\cdot(2α^2-5α-1)=α\cdot(6α-2-5α-1)=α\cdot(α-3)=α^2-3α=\mathbf{-1}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 118

A66. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y, z που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{(y-z)(y+z)}+\frac{1}{(z-x)(z+x)}=0.$$

Ουκρανία 2013

Λύση

Θέτουμε $a=x^2-y^2\neq 0,\ \ b=y^2-z^2\neq 0,$ οπότε θα είναι $z^2-x^2=-\left(x^2-y^2\right)-\left(y^2-z^2\right)=-a-b$

και η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)^2=ab\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=0\Leftrightarrow\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=0\Leftrightarrow a=b=0,$$

που είναι αδύνατη από τους περιορισμούς.

N42. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν οι οποίοι έχουν περισσότερους από $\frac{\nu}{2}$ θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

Ουκρανία 2013

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο θετικός ακέραιος ν μπορεί να έχει διαιρέτη μεγαλύτερο του $\frac{\nu}{2}$ μόνο τον εαυτό του.

Επομένως για να έχει ένας θετικός ακέραιος περισσότερους από $\frac{\nu}{2}$ θετικούς διαιρέτες, πρέπει να διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το $\frac{\nu}{2}$ και προφανώς από τον εαυτό του.

Θεωρούμε τον θετικό ακέραιο $\mu=\begin{cases}\dfrac{\nu}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ \dfrac{\nu-1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

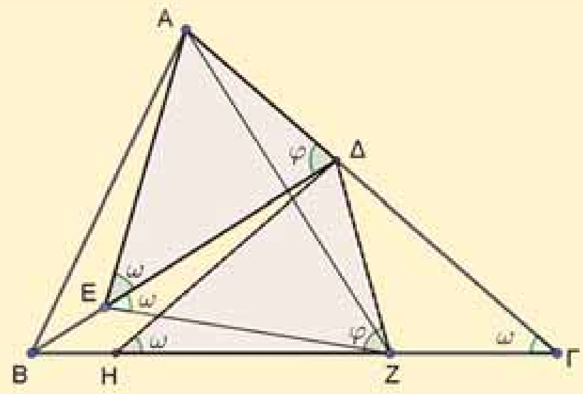
Αν $\nu\geq 10,$ τότε $(\mu,3)=1$ ή $(\mu-1,3)=1$. Επομένως πρέπει $\nu\geq 3\mu,$ αφού ο ν πρέπει να διαιρείται και με το 3 και με το μ. Όμως, τότε $\nu\geq 3\left(\frac{\nu-1}{2}-1\right)\Rightarrow 2\nu\geq 3\nu-9\Rightarrow \nu\leq 9,$ άτοπο.

Άρα πρέπει $\nu\leq 9,$ οπότε με έλεγχο όλων των αριθμών από το 1 μέχρι και το 9 διαπιστώνουμε ότι οι θετικοί ακέραιοι $\nu\in\{1,2,3,4,6\}$ έχουν περισσότερους από $\frac{\nu}{2}$ θετικούς διαιρέτες.

Γ46. Οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι τέτοιο ώστε η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$ να ισούται με την πλευρά ΑΒ. Πάνω στη διχοτόμο ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $A\hat{E}\Delta = B\hat{\Gamma}A$. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΔΓ. **Ουκρανία 2013**

Λύση

Επειδή $\hat{A} = A\hat{\Delta}B > \hat{\Gamma}$, έπεται ότι $AB < B\Gamma$. Θεωρούμε το συμμετρικό, έστω Ζ, του Α ως προς τη διχοτόμο ΑΔ. Τότε $A\Delta = \Delta Z$ και $B\hat{Z}\Delta = \hat{A} = A\hat{\Delta}B$, από την υπόθεση ότι ΑΒ = ΒΔ. Παίρνουμε πάνω στο τμήμα ΖΒ σημείο Η τέτοιο ώστε ΖΗ = ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΗΖ είναι ίσα, αφού έχουν $A\Delta = \Delta Z$, ΖΗ = ΔΕ και $A\hat{\Delta}E = \hat{A} = \Delta\hat{Z}H$ Επομένως θα έχουν ΑΕ = ΔΗ και $Z\hat{H}\Delta = A\hat{E}\Delta = \omega = \hat{\Gamma}$. Επομένως το τρίγωνο ΔΗΓ είναι ισοσκελές με ΔΓ = ΔΗ =ΑΕ.



Ασκήσεις για λύση

Α67. Αν x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$x + y + z \le xyz + 2.$$

Ν43. Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β με $(\alpha, \beta) = 1$ (πρώτοι μεταξύ τους), που ικανοποιούν την εξίσωση: $\alpha^2 + \beta = (\alpha - \beta)^3$.

Γ47. Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε την εφαπτομένη δ του περιγεγραμμένου του κύκλου γ στο σημείο Β. Η κάθετη από το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ προς την ευθεία δ την τέμνει στο σημείο Κ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.

Γ48. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB \le A\Gamma < B\Gamma$ και τα σημεία Δ και Ε πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma A$ και $BE = BA$. Αν Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΕ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ.

Γ49. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και τα σημεία Δ και Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $A\Delta = \Gamma\Delta$ και $AE = BE$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ και από το Ε φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι $K B = K\Gamma$.

Μαθηματική λογοτεχνία-ποίηση

Ι. Αθηναίου (μαθήτρια)

Στο παρακάτω ποίημα πηγή έμπνευσής μου είναι ο άνθρωπος και η λογική του φύση .Μια εξύμνηση του ανθρώπου και ένα ευχαριστήριο στην φύση που μας ξεχώρισε από τα υπόλοιπα όντα.

Φύσει μαθηματικός

ὦ άνθρωπε, πλάσμα λογικόν,
σύ αρχή και τέλος έδωκες στο σύμπαν.
σύ τα αστέρια αριθμούς εποίησας
και στο συναίσθημα έβαλλες –και εκεί- μέτρον.
Και το μέλλον το άγνωστο, το αβυσσαλέο, το ανατρεπτικό,
σύ, μελέτησες με υποθέσεις .
Σύ, σύ, άνθρωπε, με τρίγωνα και κύκλους πολιτείες
έκτισες,
Και κάθε τι στην ύπαρξη σε σύνολα το βάζεις.
Και ύστερα άπαντα σε ένα σύνολο τα βάζεις βρίσκοντας τον κοινό πυρήνα των απάντων .
Σύ, και την σκέψη κατευθύνεις, μικρέ Θεέ, φύσει προικισμένε,
Και όταν ερωτηθείς, ὦ άνθρωπε, πώς άπαντα μπορείς
να κατευθύνεις
Αποκρίνεσαι :<΄Η Φύση εποίησε εμέ πλάσμα λογικόν, ιδού η φύσις, φύσει μαθηματικός!>

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Μαρία Ρουσούλη

LES MATHEMATIQUES SONT LA POESIE DES SCIENCES

Léopold Sédar Senghor (1906-2001) Σενεγαλέζος ποιητής

ΜΔ1. Στον άξονα των πραγματικών αριθμών κάποιος ακέραιος απέχει 30 μονάδες από τον διπλάσιό του. Ποιος είναι αυτός ο ακέραιος;

ΜΔ2. Ένας αριθμός λέγεται «ευτυχισμένος» όταν : το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του δίνει ένα αριθμό, του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του δίνει αριθμό, του οποίου ……………………… το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων δίνει το 1.

Π.χ. 94	44
81+16=97	16+16=32
81+49=130	9+4=13
1+9+0=10	1+9=10
1+0=1	1+0=1

Βρείτε κι άλλους «ευτυχισμένους» αριθμούς μικρότερους του 100.

ΜΔ3. Σε όλες τις γραμμές και στήλες υπάρχουν οι αριθμοί 1,2,3,4,5. Αφού βρείτε τα α,β και γ , συμπληρώστε όλο το τετράγωνο.

1			**α**	**2**
	2		**5**	
		3	**β**	**1**
2				
	3	**γ**	**1**	

ΜΔ4. Μία τάξη έχει 24 μαθητές. Το $\frac{1}{3}$ είναι αγόρια. Από τα κορίτσια το $\frac{1}{4}$ φοράει γυαλιά. Πόσα κορίτσια δεν φοράνε γυαλιά?

ΜΔ5. Ένας κύβος με ακμή 1μέτρο χωρίζεται σε μικρότερους κύβους με ακμή 10 εκατοστά. Μπορούμε να κτίσουμε ένα τοίχο με διαστάσεις 4 μέτρα μήκος και 2,5 μέτρα ύψος;

ΜΔ6. Η Αμαλία μετρούσε επί πέντε μέρες τη θερμοκρασία στο μπαλκόνι της, σε βαθμούς κελσίου και βρήκε πέντε διαφορετικές θερμοκρασίες (σε ακέραιους αριθμούς) που το γινόμενό τους ήταν 12. Ποιες ήταν οι θερμοκρασίες?

Απαντήσεις στους Γρίφους τ.118

Η γιαγιά και τα εγγόνια: Η Χριστίνα είναι 5, ο Βασίλης 2, και η Ελισάβετ 3 ετών.

Τα γενέθλια: Η πιθανότητα είναι $(5/7)^4$=0,26 δηλαδή 26%.

Ένα λίτρο: Βάζουμε νερό μέχρι ένα σημείο και το σημειώνουμε, γυρίζουμε το μπουκάλι ανάποδα και αν το νερό είναι στο ίδιο σημάδι τότε έχουμε 1 λίτρο.

Το 2021 **Α)** $2021=43x47=(45-20)\ x(45+2)=45^2-2^2$

Β) $2021=45^2-2^2=5^2\ x\ 3^4\ -2^2$

Γ) $2021=(40+3)\ x\ (40+7)=40^2+10\ x\ 40+21=2^6\ x5^2+2^4\ x\ 5^2+5^2-2^2$ ή

$2021=(50-7)\ x(50-3)=50^2-10\ x50+21=5^4\ x\ 2^2-5^3\ x\ 2^2+5^2-2^2$

Τα μελομακάρονα

Το άθροισμα (1+2+3+4+5+6+7)-(1+2)=28-3 άρα την πρώτη μέρα έφαγε 7, τη $2^η$ 6, την $3^η$ 5, την $4^η$ 4 και την $5^η$ 3.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Χρυσό Μετάλλιο
Ακαδημίας Αθηνών
2018

νέος πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων

Πυθαγόρας

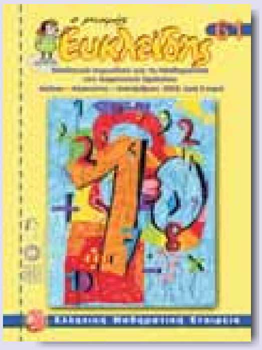
για μαθητές

Β΄, Γ΄- Δ΄, Ε΄- ΣΤ΄ Δημοτικού
και Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου

Όλοι μπορούν να αναπτύξουν
τη μαθηματική τους σκέψη

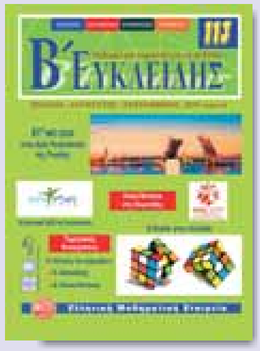
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€

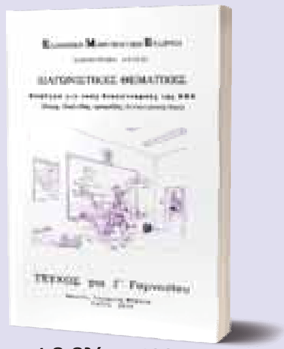


Τιμή τεύχους: 3,5€

Τιμή τεύχους: 10€

Διαγωνισμοί

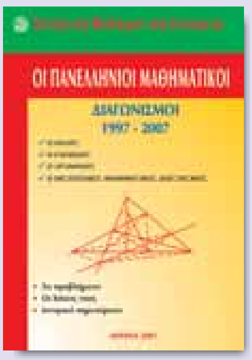
Τιμή βιβλίου: 12€



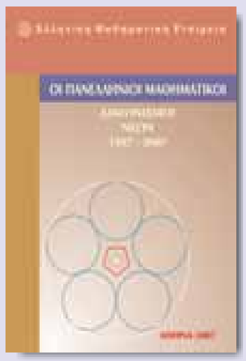
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

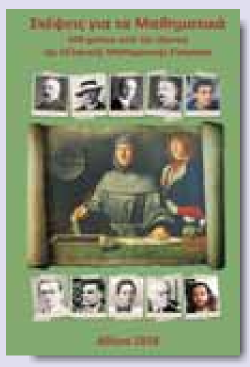


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr