131

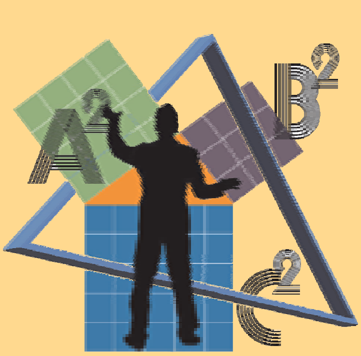
Μαθηματικό περιοδικό για το

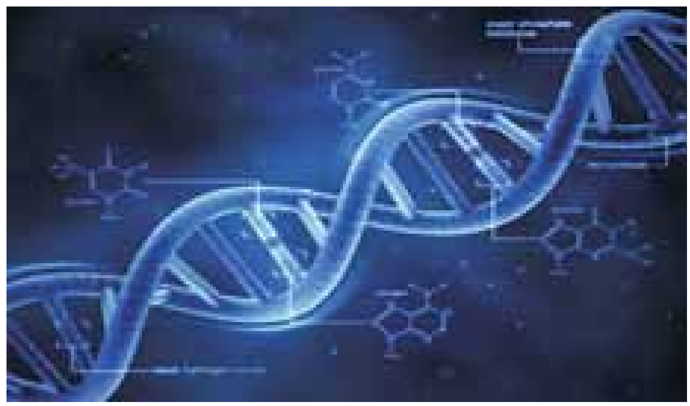
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

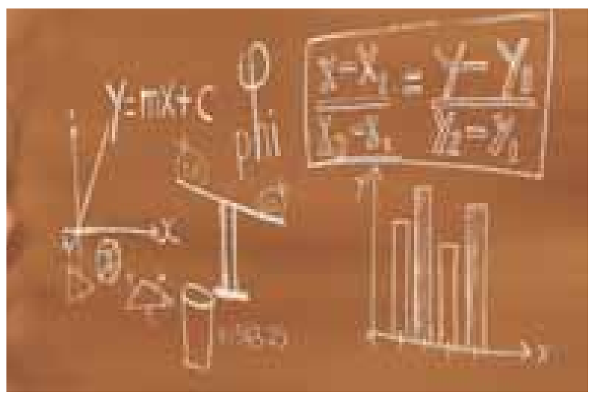
Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2024 ευρώ 3,00

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.







Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 131
Ιανουάριος- Φεβρουάριος - Μάρτιος 2024
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Είμαστε και πάλι μαζί σας με νέες ιδέες και άρθρα από καθηγητές με όρεξη και μεράκι για τη διδασκαλία των μαθηματικών.
Για το Πάσχα που πλησιάζει να έχετε καλές και ευχάριστες διακοπές.

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Τι εορτάζουν οι μαθηματικοί στις 14 Μάρτη;

του Παναγιώτη Π. Χριστόπουλου

Πίτες και γλυκίσματα στην εκδήλωση για το π στο Γυμνάσιο Άνοιξης Αττικής

Εορτή για αριθμό, είναι κάτι το παράξενο. Οι μαθηματικοί εδώ και μερικά χρόνια έχουν ορίσει γιορτή για τον αριθμό **«π»**. **Την $14^{η}$ Μαρτίου κάθε χρόνου την ονόμασαν «ημέρα του π» , δηλαδή εορτή για τη μαθηματική σταθερά «π», γνωστή ως 3,14 . Ακριβέστερα, όταν γράψουμε έναν κύκλο και διαιρέσουμε το μήκος του με την διάμετρό του, για οποιονδήποτε κύκλο προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός.**

Ο αριθμός αυτός δεν είναι ακέραιος, δεν είναι κλάσμα, είναι ένας άρρητος αριθμός δηλαδή αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που τελειωμό δεν έχουν αλλά ούτε καμιά περιοδικότητα. Έτσι αφού είναι άρρητος σημαίνει δεν λέγεται άρα ήταν απαραίτητο να δίνεται με ένα σύμβολο.

Ο Euler το 1736 τον ονόμασε με το μικρό **γράμμα π**, από το αρχικό γράμμα της λέξης **περιφέρεια**. Το π είναι το $16^{ο}$ γράμμα της Ελληνικής Αλφαβήτου.

Ο Euler έγραψε: **«για λόγους συντομίας θα γράφουμε τον αριθμό συμβολικά «π», ο π είναι ίσος με το μισό της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας 1»** (κάτι που κάνουμε στην Τριγωνομετρία σήμερα, με τον τριγωνομετρικό κύκλο). Ο συμβολισμός αυτός με το μικρό Ελληνικό γράμμα **π** έκτοτε καθιερώθηκε σε όλο τον κόσμο.

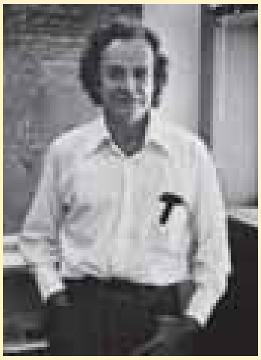
Το π είναι τόσο σημαντικό;

Το 1966 ένας σπουδαίος επιστήμονας ο **Richard Feynman** είπε ότι ο αριθμός **π** είναι γεμάτος μυστήριο και δεν μπορεί να εξηγήσει πως είναι δυνατόν να βρίσκεται και στους τύπους που δίνουν τη συχνότητα συντονισμού των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Το π εκτός από όλους τους κλάδους των μαθηματικών, της φυσικής και της αρχής της απροσδιοριστίας, το βρίσκουμε ακόμα και στους τύπους της μελέτης του Σύμπαντος, τις μαύρες τρύπες, στην κίνηση του ηλεκτρονίου και σε όλα τα φυσικά φαινόμενα. Ακόμα και στην βιολογία σε σχέση με το DNA. Λέγεται και σταθερά του Σύμπαντος.

Ο εορτασμός

Από τα πρώτα ψηφία του π, όρισαν την 14^{η} Μαρτίου (3.14) ως ημέρα εορτασμού του «**π**». Η



ημέρα του **«π»** καθιερώθηκε το 1988 από τον **Larry Shaw** στο Σαν Φρανσίσκο. Στα διάφορα μέρη του κόσμου μαθηματικοί και σχολές Πανεπιστημίων γιορτάζουν με διάφορους τρόπους. Προσπαθούν ότι κάνουν να παραπέμπει στο **π**. Ξεκινούν τη γιορτή ακριβώς στη 1:59΄ και 26 δευτερόλεπτα μετά το μεσημέρι, καθώς τα 1, 5, 9, 2, 6 είναι οι πέντε αριθμοί που ακολουθούν τη σταθερά 3,14.

Μια άλλη σημαντική δραστηριότητα που κάνουν κατά την ημέρα του π είναι να απομνημονεύουν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του. Όλο και πετυχαίνουν μεγαλύτερα ρεκόρ. Πως τα θυμούνται;

Υπάρχουν οι αριθμομνήμονες, αλλά και άλλοι που δημιουργούν στιχάκια με το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης να είναι και ένα ψηφίο του **π**. Ο Πλάτωνας έλεγε: «*Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί*». Από αυτή τη φράση προκύπτει ο μνημονικός κανόνας όπου το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξεις μας δίνει τα 5 δεκαδικά ψηφία, Αεί = 3, ο = 1, Θεός = 4, ο =1, μέγας = 5, γεωμετρεί = 9, (π=3,14159).

Η ημέρα εορτασμού του **π** δεν είναι μια απλή γιορτή, αντιπροσωπεύει την πρόοδο που έχει πετύχει η ανθρωπότητα μέσω των αριθμών. Ο άνθρωπος, με την Παγκόσμια γλώσσα των Μαθηματικών και με την ενιαία γραφή των αριθμών, κατάφερε στον 21^{ο} αιώνα να έχει επιλύσει προβλήματα που για χιλιάδες χρόνια τον προβλημάτιζαν. Κατάφερε να ερμηνεύσει τη δομή της ζωής και του Σύμπαντος. Η έννοια αριθμός έπαιξε σημαντικό ρόλο στη ζωή και την εξέλιξη του ανθρώπου. Το μεγαλύτερο κατόρθωμά του είναι ότι απέκτησε την ικανότητα της μέτρησης και να εκφράζεται με αριθμούς. Στο παρελθόν κάθε λαός είχε τη δική του γραφή για τους αριθμούς. Χρειάστηκαν πολλά χρόνια για να φτάσουμε στην σημερινή Αραβική γραφή των αριθμών. Το πιο δύσκολο ήταν να συμπεριλάβουμε στα ψηφία και σύμβολο για το μηδέν. Αυτό έγινε μεταξύ 9^{ου} και 11^{ου} αιώνα μ.Χ., τον 16ο αιώνα εμφανίστηκαν οι δεκαδικοί (δεκαδικά κλάσματα) και το 1717 εισάγεται η υποδιαστολή από τον John Napier.

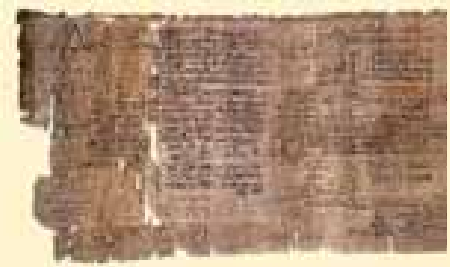
Σήμερα όλοι σχεδόν οι άνθρωποι μετράμε με το δεκαδικό σύστημα, και παράλληλα χρησιμοποιούμε λίγα από τα παλιά συστήματα, όπως: το 60δικό στον κύκλο, το 12δικό στις ώρες της ημέρας, και με την χρήση των Η/Υ το 2αδικό , 8δικό, 16αδικό.

Στις 14 Μάρτη το 1879, γεννήθηκε και ο φυσικός Άλμπερτ Αϊνστάιν.

***Σημ**. Μη ξεχάσετε να ευχηθείτε στο «π» τον Μάρτη(3^{ο} μήνα) στις 14 και ώρα 1:59΄ απαγγέλοντας «αεί ο θεός ο μέγας γεωμετρεί», π=3,14159…*

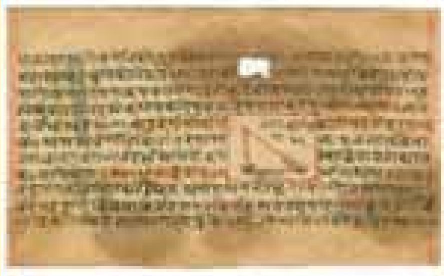
ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Ο αριθμός **π** με λίγα δεκαδικά ψηφία ήταν γνωστός στους Βαβυλώνιους και τους Αιγύπτιους. Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν και διατύπωσαν πολλά θέματα με το **π**. Έκτοτε οι μαθηματικοί για χιλιάδες χρόνια είχαν επιδοθεί σε έναν αγώνα για να βρουν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του **π** και να τον κατανοήσουν. Οι μαθηματικοί για πολλά χρόνια στα προβλήματά τους κάνουν χρήση του αριθμού **π** με προσέγγιση, το ίδιο και οι άλλοι επιστήμονες. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν για το **π** το 22/7=3,14285 που έχει μικρή

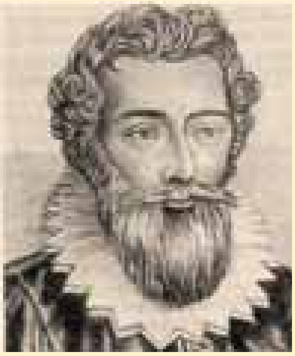


προσέγγιση. Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του π βρίσκονται στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα. Στη Βαβυλώνα το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούν τον **π** ως 25/8 = 3.125. Στην Αίγυπτο, ο **Πάπυρος Rhind** 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το **π** ως (16/9)2 = 256/81 ≈ 3.1605.

Οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν το **π**=3,1547, οι Ινδοί στο **Shulba Sutras** (**σανσκριτικά** κείμενα, 600 π.Χ.) έχουν το **π**=(9785/5568)2 ≈ 3.088.



Δύο στίχοι της **Εβραϊκής Βίβλου,** 8ο αιώνα π.Χ., περιγράφουν για μια τελετουργική λεκάνη στο Ναό του Σολομώντα με **διάμετρο δέκα πήχεις** και η περίμετρός του τριάκοντα πήχεις. Οι στίχοι υποδηλώνουν ότι ο **π** είναι περίπου τρία, ίσως η διαφορά να ήταν λόγω του πάχους της λεκάνης.



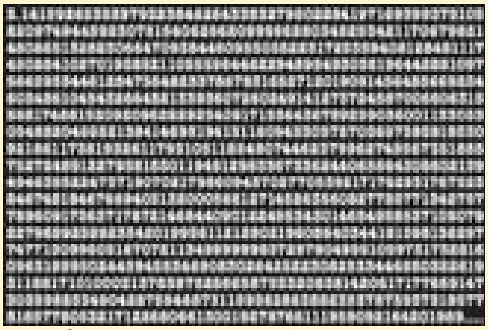
Francois Viete

Ο Αρχιμήδης τον 3^{ο} αιώνα π.Χ. χρησιμοποίησε γεωμετρικές τεχνικές με κανονικά πολύγωνα, για να υπολογίσει με ακρίβεια την τιμή του **π**. Χρησιμοποίησε πολύγωνο με 96 πλευρές και υπολογίζει το π 223/71<**π**<22/7. Το 1220 μ.Χ. Ο **Leonardo Fibonacci** βρίσκει **π**=3,141818 . Το 1593 μ. Χ. **Ο Francois Viete** και ο Ολλανδός **Adrianus Romanus** βρίσκουν 15 δεκαδικά ψηφία .

Το 1674 μ. Χ. Ο **Leibniz** χρησιμοποιεί τόξο εφαπτομένης για το **π** .

Το 1855 ο **Richter** υπολογίζει 500 δεκαδικά ψηφία για το **π**.

Από το 1947 οι υπολογισμοί του **π** γίνονται με τη βοήθεια των Η/Υ, και τελευταία ανακοίνωσαν ότι βρήκαν 63 τρισεκατομμύρια ψηφία. Όσοι υπολογίζουν ψηφία του **π**, το



κάνουν γιατί επιδιώκουν ρεκόρ και δημοσιότητα, να πάρουν στο ρεκόρ Γκίνες. Δεν είναι απαραίτητα τόσα πολλά ψηφία για τους υπολογισμούς στα προβλήματα της επιστήμης και δεν έχουν καμιά άλλη χρησιμότητα Οι μαθηματικοί σε ότι κάνουν, γενικά δεν το κάνουν επειδή χρειάζεται κάπου, ούτε κανείς γνωρίζει από πριν αν κάτι από τα μαθηματικά θα χρειαστεί κάπου.

Ο Euler καθιέρωσε μια σύνδεση μεταξύ του **π** και των **πρώτων αριθμών**.

Ο Ελβετός επιστήμονας **Λάμπερτ** το 1761 απέδειξε ότι ο **π** είναι άρρητος.

Ο Γάλλος μαθηματικός Λεζάντρ απέδειξε το 1794 ότι ο π^2 είναι επίσης άρρητος.

Το 1882, ο Γερμανός μαθηματικός **Φον Λίντεμαν** απέδειξε ότι ο **π** είναι **υπερβατικός. Υπερβατικός αριθμός,** σημαίνει ότι δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου μη-μηδενικού με ρητούς συντελεστές και δεν είναι κατασκευάσιμος. Γι' αυτό δεν μπορούμε να κάνουμε τετράγωνο με εμβαδό ίσο με το εμβαδό ενός κύκλου με κανόνα και διαβήτη. (αρχαίο πρόβλημα τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη).

Ο Ινδός **Srinivasa Ramanujan**, δημοσίευσε δεκάδες καινοτόμες μορφές εφαρμογών του **π,** που έχουν κομψότητα, μαθηματικό βάθος, ταχεία σύγκλιση και χρησιμοποιούνται στην πληροφορική.

Πόσα ψηφία χρειάζονται οι επιστήμονες στους υπολογισμούς τους ;

Ρώτησαν την NASA πόσα ψηφία χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς της για την διαπλανητική πλοήγηση των διαστημοπλοίων και απάντησε μόνο τα 15 πρώτα δεκαδικά ψηφία του

π: «3.141592653589793».

Πόσο ακριβείς είναι οι υπολογισμοί με αυτή την προσέγγιση;

Αν ένα διαστημόπλοιο είναι 20 τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα μακριά από τη Γη, όπως το Voyager 1, τότε έχουμε έναν κύκλο με διάμετρο 40 τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα.

Το μήκος αυτού του κύκλου 2**π**ρ=(2ρ)**π** είναι 40 τρις επί **3.141592653589793**. Η τιμή της διαμέτρου σε αυτόν τον κύκλο που υπολογίσαμε με τα 15 μόνο δεκαδικά ψηφία είναι μόνο 4 εκατοστά λιγότερα της πραγματικής.

Για τη Γη που έχει ακτίνα 12.750 χιλιόμετρα το σφάλμα είναι μικρότερο από χιλιοστό του χιλιοστού. Μάλιστα η ΝΑΣΑ εξέτασε και το ενδεχόμενο για ολόκληρο το Σύμπαν. Αν θεωρήσουμε ότι το Σύμπαν έχει ακτίνα 46 δισεκατομμύρια έτη φωτός, τότε με 40 δεκαδικά ψηφία του **π** το σφάλμα θα είναι όσο η διάμετρος του ατόμου του υδρογόνου.

Το DNA και το π

Ένα απόσπασμα από την εργασία που μας έστειλε ο Βιολόγος **Μαρίνος Σπηλιόπουλος.**

«Μέθοδος υπολογισμού ψηφίων του π=3,14 ..., μέσω του DNA»

Αν πεις ότι μπορεί να συνδέεται το **π** με το DNA (γενετικό υλικό), όλοι θα πουν ότι δεν γίνεται, είναι ασύνδετα πράγματα. Όμως βλέπουμε το **π** να μετέχει στους μαθηματικούς τύπους που διέπουν διάφορα φυσικά φαινόμενα του μικρόκοσμου και του μακρόκοσμου. Θα ήταν παράλογο ή καλύτερα αφύσικο, να μην μετέχει και στο DNA το βασικό χημικό μόριο της ζωντανής ύλης. Λένε ότι η ζωή και η εξέλιξή της, έχει σπειροειδή μορφή, σαν την μορφή του DNA. Οι δομικοί λίθοι του DNA ονομάζονται νουκλεοτίδια και έχουν συγκεκριμένη χημική δομή. Ανάλογα με την αζωτούχα βάση που περιέχουν διακρίνονται σε νουκλεοτίδια της Αδενίνης (A), της Θυμίνης (T), της Γουανίνης (G) και της Κυτοσίνης (C). Τα μοριακά τους βάρη αντίστοιχα είναι 331, 322, 347 και 307. Δημιουργούμε την παρακάτω μαθηματική σχέση με τις αριθμητικές τιμές μεταξύ των μοριακών βαρών και βλέπουμε τα εξής:

$$G + T - A - C = 31$$
$$14G + 6T - 14A - 6C = 314$$
$$141G + 59T - 141A - 59C = 3141$$
$$1415G + 585T - 1415A - 585C = 31415$$
$$14159G + 5841T - 14159A - 5841C = 314159 \text{ κ.λ.π.}$$

Αν πάρουμε μια γραμμή και αντικαταστήσουμε τα μοριακά βάρη π.χ. την τελευταία έχουμε: $14159 \cdot 347 + 5841 \cdot 322 - 14159 \cdot 331 - 5841 \cdot 307 =$ **314159 .** Δηλαδή η σχέση κάθε γραμμής μας δίνει το **π**=3,14159... επί 10^{ν} , νάτο πάλι το **π** και στο DNA.

Όγκος των Στερεών
και το «γνωσιόμετρο» Pierre van Hiele

του Γιάννη Νικολόπουλου

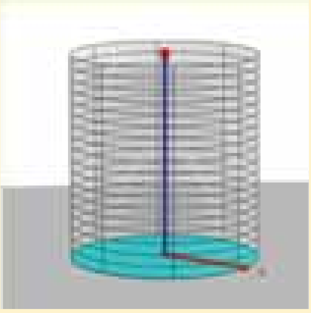
Το άρθρο αναφέρεται στη διδασκαλία του όγκου των στερεών, των αντικειμένων δηλαδή που αντικρίζουν καθημερινά στη ζωή τους οι μαθητές. Αυτό γιατί έχουν εκφρασθεί απόψεις από διάφορους ερευνητές και από το ζεύγος Dina & Pierre van Hiele, ότι πρέπει η διδασκαλία της Γεωμετρίας να αρχίζει από τα στερεά, που είναι αντιληπτά οπτικά και απτικά, και κατόπιν να συνεχίζεται στα επίπεδα.

Για την διδασκαλία του θέματος των στερεών, όπως και κάθε θέματος, οφείλουμε στην αρχή να προσδιορίσουμε τις έννοιες που το συγκροτούν, εν προκειμένω οι έννοιες «όγκος» και «γνωσιόμετρο».

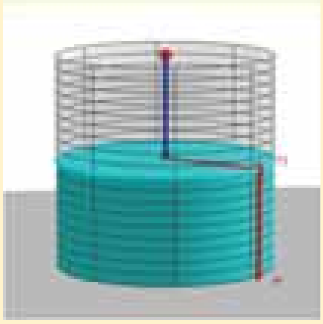
Η έννοια του «όγκου» προσδιορίζεται ως η ποσότητα του χώρου που καταλαμβάνει το συγκεκριμένο στερεό και διαφέρει από την χωρητικότητα. Γιατί συνήθως συγχέουμε τον όγκο με την χωρητικότητα. Στον παρακάτω πίνακα αριστερά είναι ένα μάρμαρο που καταλαμβάνει χώρο αλλά δεν έχει χωρητικότητα και δεξιά ένα κοντέινερ που έχει χωρητικότητα π.χ. 40 κιβωτίων πλυντηρίων.

Σχήμα (1)

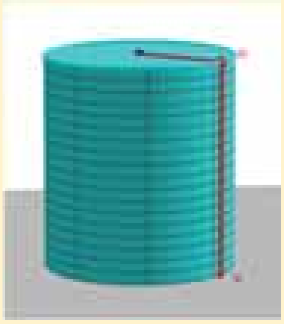
Να τονίσουμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά τόσο στην κατανόηση όσο και στην ουσία ανάμεσα στον όγκο των στερεών και στον όγκο των υγρών. Μάλιστα υποστηρίζεται ότι ο όγκος των υγρών είναι εύκολα κατανοητός γιατί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα γίνεται αντιληπτός οπτικά.



Άδειος ο Κύλινδρος



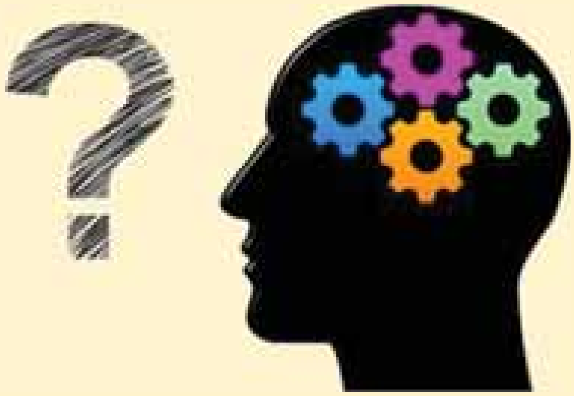
Μισογεμάτος ή Μισοάδειος



Γεμάτος ο Κύλινδρος

Σχήμα (2)

Επίσης χρειάζεται να επεξηγήσουμε την έννοια «γνωσιόμετρο», όπως αντιλαμβανόμαστε προέρχεται από τις λέξεις: γνώση + μέτρο και χρησιμοποιείται για την άτυπη μέτρηση ή αξιολόγηση της γεωμετρικής γνώσης. Το ζεύγος των Van Hiele ασχολήθηκε στα μέσα του περασμένου αιώνα με την μέτρηση της γνώσης των μαθητών στη γεωμετρία. Μάλιστα η σταδιακή εξέλιξη της σκέψης των παιδιών κατά τον Pierre van Hiele αναλύεται στις εξής φάσεις μάθησης:



1) Προσδιορισμός προϋπαρχουσών γνώσεων και προετοιμασία για το επόμενο προς διδασκαλία θέμα κατόπιν,

2) Κατευθυνόμενη μάθηση μέσω δραστηριοτήτων που χρειάζεται να οργανωθούν από τον εκπαιδευτικό,

3) Στη συνέχεια χρήση των γνώσεων και σχέσεων που αποκτήθηκαν για διερεύνηση νέων ανοιχτών δραστηριοτήτων και ενσωμάτωση όσων έχουν κατανοήσει οι μαθητές σε νέα δίκτυα νοητικών σχέσεων.

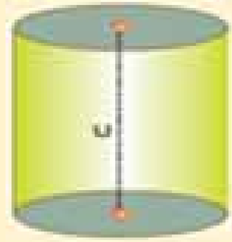
Στην ταξινόμηση αυτή κυριαρχεί σε πρώτο στάδιο η εύρεση και αξιολόγηση των προϋπαρχουσών γνώσεων που γίνεται με το «γνωσιόμετρο» των van Hiele. Τα επίπεδα Pierre van Hiele είναι πέντε και από αυτά τα τρία αναφέρονται στο Γυμνάσιο. Για να «ανέβει» ο κάθε μαθητής από το $1^{ο}$ στο $2^{ο}$ και κατόπιν στο $3^{ο}$ επίπεδο θα μας χρειασθεί το αποκαλούμενο «γνωσιόμετρο» ή αλλιώς όπως αναφέρεται από τους δημιουργούς του, το «εργαλείο ελέγχου». Για το λόγο αυτό δημιουργούνται ερωτηματολόγια που μετρούν άτυπα τις γνώσεις του μαθητή για να «ταξινομήσουν» σε ποιο επίπεδο των van Hiele κατατάσσεται η γεωμετρική του σκέψη. Έχουν διαμορφωθεί δύο ερωτηματολόγια που αναφέρονται στην επιπεδομετρία και ένα στην στερεομετρία.

Πως τα ερωτηματολόγια μπορούν να στοιχειοθετήσουν ένα «γνωσιόμετρο»;

Ας παρατηρήσουμε καταρχάς πώς αντιμετωπίζει το όλο εγχείρημα ο Pierre van Hiele (2011). Εκτιμάται ότι κάποιος ανήλθε σ' ένα ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης όταν αναπτύσσεται ένας νέος ειρμός σκέψης, δηλαδή μια δεξιότητα που του επιτρέπει στη συνέχεια να εφαρμόσει ότι έχει κατακτήσει, και σε νέα αντικείμενα. Αυτή η παρατήρηση, δείχνει ότι διαμορφώνεται στο μαθητή μια βάση γνώσεων και επιπλέον μια δεξιότητα, που του δίνει την δυνατότητα να αντιμετωπίζει τα νέα ζητήματα των μαθηματικών, που συναντά με 'νέο ειρμό σκέψης'. Για να αφήσουμε την γενικολογία και να ασχοληθούμε με το συγκεκριμένο που θα βοηθήσει σε μαθησιακά αποτελέσματα. Τα τρία πρώτα επίπεδα ανταποκρίνονται από το τέλος του Δημοτικού έως την αρχή του Λυκείου.

Επίπεδο $1^{ο}$: Ο μαθητής αναγνωρίζει τα σχήματα συνολικά (ολότητα).

Βλέπει το ανωτέρω σχήμα και αναγνωρίζει ότι είναι Ορθογώνιο.



Βλέπει το ανωτέρω σχήμα και αναγνωρίζει ότι είναι Κύλινδρος.

Επίπεδο 2^{o} : Οι μαθητής αναγνωρίζει και περιγράφει τις δομές του κάθε σχήματος ή ακόμη διακρίνει τα στοιχεία και τις ιδιότητες του.

Στο 2^{o} επίπεδο οι μαθητές διακρίνουν ότι οι απέναντι πλευρές του Ορθογωνίου είναι ίσες και παράλληλες και οι γωνίες Ορθές και από αυτά τα στοιχεία προκύπτει το όνομα. Ενώ στον Κύλινδρο αντιλαμβάνονται ότι έχει άνω και κάτω βάσεις που είναι ίσοι Κυκλικοί Δίσκοι και η παράπλευρη επιφάνεια (ανάμεσα στις δύο βάσεις) είναι Ορθογώνιο.

Επίπεδο 3ο: Οι μαθητές εδώ αντιλαμβάνονται ότι μια ιδιότητα είναι συνέπεια κάποιας άλλης και αρχίζουν να καταλαβαίνουν έννοιες.

Στο 3^{o} επίπεδο οι μαθητές κατανοούν την έννοια του εμβαδού π.χ. στο Ορθογώνιο, σαν μέρος επίπεδου και ως γινόμενο Βάσης x Ύψος και την έννοια του όγκου σαν μέρος του χώρου που καταλαμβάνει ο Κύλινδρος και ως το γινόμενο του Εμβαδού της Κυκλικής Βάσης x Ύψος.

Στο ερώτημα αν ο μαθητής της Α' λυκείου εκτιμάται ότι έχει κατακτήσει το 3^{o} επίπεδο δεν υπάρχει σαφής απάντηση, ωστόσο έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές γυμνασίου και λυκείου λειτουργούν κυρίως στο 1ο και δευτερευόντως στο 2ο επίπεδο του Pierre van Hiele.

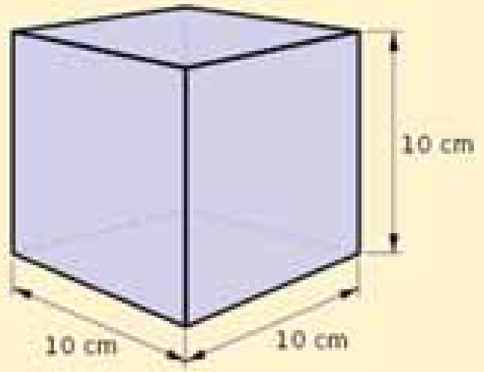
Η Μαθηματική Σκέψη και η Ηλικία

Μέχρι πριν λίγα χρόνια, κυριαρχούσε η άποψη πως τα παιδιά ωριμάζουν στη μαθηματική και ειδικά στη γεωμετρική σκέψη με την πάροδο των χρόνων, αυτό χωρίς να παραβούμε πλήρως την εν λόγω άποψη εντούτοις έχουμε δείγματα όπως οι διαγωνισμοί της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και όχι μόνο, πως υπάρχουν μαθητές που η σκέψη τους ωριμάζει δυσανάλογα με την ηλικία τους.

Αναφέρει ο Pierre van Hiele, δεν μπορούμε να αποδεχτούμε ότι η μαθηματική ανάπτυξη προκύπτει αποκλειστικά λόγω της βιολογικής ωρίμανσης όπως ισχυρίζεται ο Piaget, ενώ τα ερευνητικά πειράματα και η ζωή έχουν αποδείξει ότι το πολιτιστικό και μαθησιακό περιβάλλον παίζει καθοριστικό ρόλο στην ωρίμανση του μαθητή.

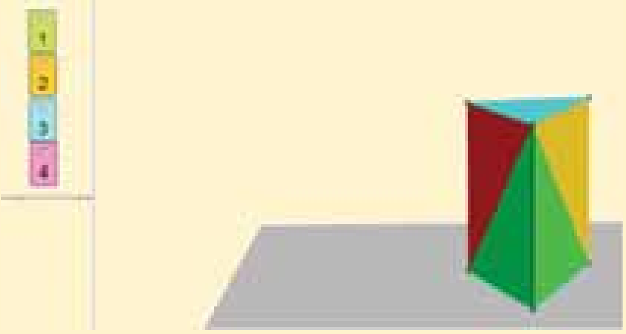
Όταν αναφερόμαστε στα χαρισματικά παιδιά ακριβώς υπονοούμε την γενετική αλλά και την περιβαλλοντική επίδραση που επηρεάζει την γοργή, πέρα από τη βιολογική, ανάπτυξη αυτών των παιδιών.

Επανερχόμενοι στα στερεά αναφέρουμε πως, στην ερώτηση: «Ποια δεδομένα ή αλλιώς ποια κριτήρια χρησιμοποιεί ο μαθητής για να συμπεράνει την ύπαρξη ενός όγκου στερεού» δεν έχει προκύψει μια σαφής απάντηση. Κάποιοι μαθητές που έχουν καλλιεργήσει την Οπτικοχωρική δεξιότητα «διαισθάνονται» ότι ο όγκος είναι μέρος του χώρου, επίσης η εξοικείωση με την κυβική παλάμη ή το κυβικό εκατοστό διευκολύνει στην κατανόηση του όγκου.

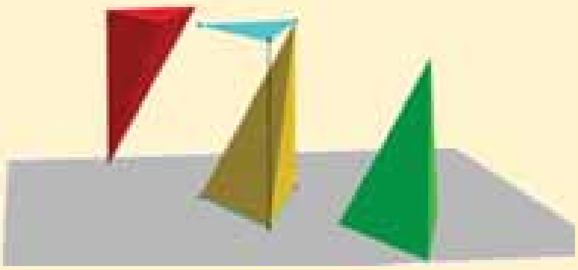


Η Κυβική Παλάμη ή Κυβικό Δεκατόμετρο   Το κυβικό εκατοστόμετρο

Υπάρχουν αποτελέσματα έρευνας, ότι είναι δυνατόν οι μαθητές με μια κατάλληλη διδασκαλία να βρεθούν σε ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, από το συνηθισμένο που κατακτούν με την κλασσική διδασκαλία στη δεδομένη τάξη και ηλικία. Αυτή η «κατάλληλη διδασκαλία» περιλαμβάνει συνδυασμό Παραδοσιακής και ΤΠΕ (συγκεκριμένα με δομές GeoGebra). Ένα δείγμα αποτελούν οι παραπάνω τρεις Κύλινδροι που βέβαια τους βλέπουν οι μαθητές σε κίνηση.

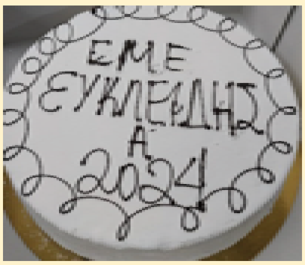


Στο σχήμα φαίνεται το τριγωνικό πρίσμα με τα «κουμπιά» που καθοδηγούν την εξέλιξη.



Με την GeoGebra παρουσιάζονται οι τρεις Τριγωνικές Πυραμίδες.

Η κοπή της πίτας από τα μέλη της Συντακτικής επιτροπής του Ευκλείδη Α΄



Η κοπή της πίτας από τα μέλη της Συντακτικής επιτροπής του Ευκλείδη Α΄

Α΄ Τάξη

Ασκήσεις στους Ρητούς αριθμούς

Παντελής Γρυπάρης

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν θεμελιώδες κομμάτι των μαθηματικών και διαδραματίζουν καίριο ρόλο σε πλήθος επιστημονικών κλάδων. Η μελέτη τους στο γυμνάσιο προσφέρει στους μαθητές μια σειρά από οφέλη:

Κατανόηση του αριθμητικού συστήματος:

Οι ρητοί αριθμοί, όντας αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν ως κλάσματα, αποτελούν δομικό στοιχείο του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Η μελέτη τους βοηθά τους μαθητές να εμβαθύνουν στην έννοια των δεκαδικών αριθμών, των ακεραίων, και των κλασμάτων, χτίζοντας μια στέρεα βάση για μελλοντική μαθηματική εξέλιξη.

Ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων:

Η εργασία με ρητούς αριθμούς καλλιεργεί βασικές μαθηματικές δεξιότητες, όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Μέσα από ασκήσεις και προβλήματα, οι μαθητές εξοικειώνονται με αλγορίθμους και τεχνικές, ενώ παράλληλα οξύνουν την κριτική και λογική τους σκέψη.

Εφαρμογές σε ποικίλους τομείς:

Οι ρητοί αριθμοί βρίσκουν εφαρμογή σε πλήθος πεδίων, από την καθημερινή ζωή έως την επιστήμη και την τεχνολογία. Μελετώντας ρητούς αριθμούς, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά τους σε μετρήσεις, υπολογισμούς, γεωμετρία, φυσική, χημεία, οικονομικά και πολλά άλλα.

Ιστορική και πολιτισμική σημασία:

Η έννοια των ρητών αριθμών έχει μακρά ιστορία, χρονολογώντας από την αρχαιότητα. Η μελέτη της εξέλιξης και χρήσης ρητών αριθμών σε διάφορες πολιτισμικές ομάδες προσφέρει σε όλους μια πλούσια μαθηματική κληρονομιά, ενισχύοντας παράλληλα το ενδιαφέρον τους για το αντικείμενο.

Συνοψίζοντας, η μελέτη ρητών αριθμών στο γυμνάσιο αποτελεί θεμελιώδες βήμα για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, και την εξοικείωση με πλήθος εφαρμογών σε διάφορους επιστημονικούς και καθημερινούς τομείς.

Πρόβλημα 1: **Ας θέσουμε τις χρονολογίες γέννησης 4 σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών σε μια αριθμογραμμή**
Ο Ευκλείδης γεννήθηκε περίπου το 350πΧ (θέση Α), ο Πυθαγόρας περίπου το 580πΧ (θέση Β), ο Καραθεοδωρής το 1874μΧ (θέση Γ) και τέλος ο Φωκάς το 1952μΧ (θέση Δ).

Λύση:

Πρόβλημα 2: Η θερμοκρασία σε μία περιοχή ξεκινάει από –5 βαθμούς Κελσίου. Κάθε ώρα μειώνεται κατά 3 βαθμούς. Ποια θα είναι η θερμοκρασία σε 2 ώρες;

Λύση: Μετά από 1 ώρα κατεβαίνει και άλλους 3 βαθμούς άρα η θερμοκρασία θα είναι –8 βαθμούς.

Μετά από ακόμη 1 ώρα κατεβαίνει και άλλους 3 βαθμούς άρα η θερμοκρασία θα είναι –11 βαθμούς.

Πρόβλημα 3:Κάθε Δευτέρα έχετε 15€ ως χαρτζιλίκι τη βδομάδα και κάθε μέρα χαλάτε 3€. Θα σας φτάσουν τα χρήματα μέχρι το Σάββατο;

Λύση: Δευτέρα 15€ –3€=12€
Τρίτη 12€ –3€=9€
Τετάρτη 9€ –3€=6€
Πέμπτη 6€ –3€=3€
Παρασκευή 3€ –3€=0€ άρα δεν έχετε άλλα χρήματα και δεν φτάνουν για την επόμενη ημέρα, η οποία είναι το Σάββατο

Πρόβλημα 4: Να γίνουν οι πράξεις:

i. $|-4|+|-10|-|-7|$

ii. $|-6|\cdot|-9|-\frac{|-4|\cdot|-5|}{|-2|}$

Λύση:

i. Βρίσκουμε πρώτα στο μυαλό ή γράφουμε αναλυτικά ότι
$|-4|=4,\quad |-10|=10,\quad |-7|=7$
τότε έχουμε: $|-4|+|-10|-7=$
$=4+10-7=14-7=7$

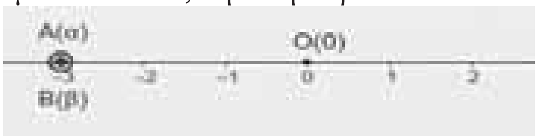
ii, Βρίσκουμε πρώτα στο μυαλό ή γράφουμε αναλυτικά ότι $|-6|=6$, $|-9|=9$, $|-4|=4$, $|-5|=5$, $|-2|=2$
τότε έχουμε: $|-6|\cdot|-9|-\frac{|-4|\cdot|-5|}{|-2|}=6\cdot 9-\frac{4\cdot5}{2}=54-\frac{20}{2}=54-10=44$

Πρόβλημα 5: Δύο αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές. Ποια σχέση συνδέει τους δύο αριθμούς;

Λύση: Εφόσον μας δίνεται ότι οι δύο αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, αυτό σημαίνει ότι έχουν την ίδια απόσταση από το 0. Επομένως ας πούμε ο ένας είναι ο αριθμός α και ο άλλος ο αριθμός β αυτό σημαίνει είτε:

- Και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί και έχουν την ίδια απόσταση από το 0, άρα οι τετμημένες ταυτίζονται και τελικά οι αριθμοί είναι ίσοι, δηλαδή α=β.

- Και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί και έχουν την ίδια απόσταση από το 0, άρα οι τετμημένες ταυτίζονται και τελικά οι αριθμοί είναι ίσοι, δηλαδή α=β.



- Όμως υπάρχει και η περίπτωση που ο αριθμός β είναι θετικός και ο α είναι αρνητικός. Τότε δεν είναι ίσοι, αλλά είναι δύο αριθμοί συμμετρικοί ως προς το 0. Αυτοί λέγονται αντίθετοι.

Πρόβλημα 6 (χωρίς λύση):
Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

x	2,5	–4,3	1/2	–3/4	–2024
–x					
–(–x)					
|x|					
|–x|					

Πρόβλημα 7: Δίνονται τρεις ρητοί αριθμοί: $x = -3,2$, $y = 8$, $z = -4,5$.
Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
(α) Των x και y με το z,
(β) Των x και y με το αντίθετο του z,
(γ) Του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z και
(δ) Του αντίθετου του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z.

Λύση: (α) Άθροισμα των x και y με το z, δηλαδή (x+y)+z. Αρκεί να βρούμε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των x και y και στη συνέχεια αυτό το άθροισμα να το προσθέσουμε τον αριθμό z. Έχουμε:

$$x + y = (-3{,}2) + (+8) = +(|+8| - |-3{,}2|) = +(8 - 3{,}2) = +4{,}8$$

και στην συνέχεια

$$(x + y) + z = (+4{,}8) + (-4{,}5) = +(|+4{,}8| - |-4{,}5|) = +(4{,}8 - 4{,}5) = +0{,}3$$

(β) Ο αντίθετος αριθμός του z=–4,5 είναι ο αριθμός –z=+4,5 επομένως έχουμε:

$$(x + y) + (-z) = (+4{,}8) + (+4{,}5) = +(|+4{,}8| + |+4{,}5|) = +(4{,}8 + 4{,}5) = +9{,}3$$

(γ) Ο αντίθετος αριθμός του y=8 είναι ο αριθμός –y= –8 και ο αντίθετος αριθμός του z=–4,5 είναι ο αριθμός –z=+4,5 επομένως έχουμε: $x + (-y) = (-3{,}2) + (-8) = -(|-3{,}2| - |-8|) = -(3{,}2 + 8) = -11{,}2$
και στην συνέχεια

$$(x + (-y)) + (-z) = (-11{,}2) + (+4{,}5) = -(|-11{,}2| - |+4{,}5|) = -(11{,}2 - 4{,}5) = -6{,}7$$

(δ) Ο αντίθετος αριθμός του x=–3,2 είναι ο αριθμός –x=+3,2, ο αντίθετος αριθμός του y=8 είναι ο αριθμός –y= –8 και ο αντίθετος αριθμός του z=–4,5 είναι ο αριθμός –z=+4,5 επομένως έχουμε: $-x + (-y) = (+3{,}2) + (-8) = -(|-8| + |-3{,}2|) = -(8 - 3{,}2) = -4{,}8$
και στην συνέχεια

$$(-x + (-y)) + (-z) = (-4{,}8) + (+4{,}5) = -(|-4{,}8| - |+4{,}5|) = -(4{,}8 - 4{,}5) = -0{,}3$$

Πρόβλημα 8 (χωρίς λύση): Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathbf{A = -3 + 6 \cdot (2 - 4)}$$

$$\mathbf{B = -2 - 3 \cdot (-7 - 2 + 1), \quad \Gamma = A \cdot B}$$

$$\mathbf{\Delta = \frac{4}{5} \cdot 10 - 4 \cdot (-2) + 6 : (-3) - \frac{3}{7} \cdot (-14)}$$

$$\mathbf{E = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot (1 - 2)}$$

$$\mathbf{Z = A^0 + (-B)^0 + \Gamma^0 - 2 \cdot \Delta^0 - E^0}$$

$$\mathbf{H = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot \left(3 + \frac{3}{2}\right) - 2,}$$

$$\mathbf{\Theta = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)}$$

$$\mathbf{I = \frac{4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}}{-3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{6}}, \qquad K = \frac{\Delta}{E}}$$

1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αμαρουσίου

Μαθηματικές δράσεις του σχολικού έτους 2022-23

Κουτσώνα Αφροδίτη, Μαγουλάς Αντώνιος, Ρουμπή Κατερίνα

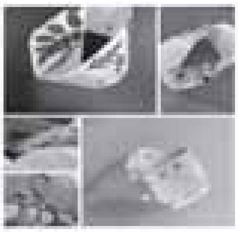
Η μαθηματική εκπαίδευση στο 1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αμαρουσίου εστιάζει στη βιωματική προσέγγιση και την εμπλοκή των μαθητών με κατασκευές χειραπτικές και ηλεκτρονικές. Παράλληλα με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ενισχύουμε τη δημιουργικότητα και την ελεύθερη έκφραση των μαθητών με σταθερό στόχο τη σύνδεση του μαθήματος με την καθημερινή ζωή. Συχνά παρεξηγημένο μάθημα τα Μαθηματικά θεωρείται πως περιλαμβάνει πράξεις σαν ένα διανοητικό παιχνίδι ξεκομμένο από τη ζωή. Στην πραγματικότητα διέπει όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες, μας βοηθά να σκεφτόμαστε μεθοδικά και να παίρνουμε σωστά σταθμισμένες αποφάσεις.

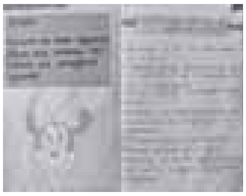
Σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές της α΄τάξης εκπονούν κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς ποικιλία εργασιών άλλες ατομικά και άλλες ομαδικά μερικές από τις οποίες περιγράφονται παρακάτω:

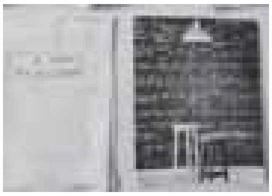
α) Κατασκευάζουν ένα αληθινό τετραγωνικό μέτρο και υπολογίζουν το εμβαδόν της αυλής. Στη συνέχεια παρουσιάζουν ολοκληρωμένη εργασία με κάτοψη της αυλής σχεδιασμένη με κλίμακα και αναλυτική περιγραφή των βημάτων σκέψης και επίλυσης που ακολούθησαν, των δυσκολιών που αντιμετώπισαν και τις λύσεις που βρήκαν. Μεγάλη έμφαση δίνεται στη μαθηματική συζήτηση που θέλουμε να ακολουθεί κάθε παρουσίαση.

Στο τέλος συγκρίνουμε τα διαφορετικά αποτελέσματα που βρήκαν οι ομάδες και μας δίνεται αφορμή να μιλήσουμε για στατιστική και μέσο όρο. Με αυτό το απλό πρόβλημα, λοιπόν, μέτρησης της αυλής του σχολείου, μελετάμε μονάδες μέτρησης εμβαδού, κλίμακα, γεωμετρική απεικόνιση, στατιστική και στρογγυλοποίηση.

β) Στο τέλος κάθε κεφαλαίου οι μαθητές κάνουν επανάληψη δημιουργώντας ένα μικρό, αυτοσχέδιο οκτασέλιδο βιβλιαράκι. Συγκεντρώνουν τα σημαντικότερα στοιχεία του κεφαλαίου από το βιβλίο και το τετράδιο και γίνονται συγγραφείς και σκιτσογράφοι. Ο κάθε μαθητής αποφασίζει για το περιεχόμενο του βιβλίου του. Δεν καλείται να αντιγράψει από το βιβλίο ούτε τη θεωρία ούτε ασκήσεις, αλλά να σημειώσει αυτά που θεωρεί εκείνος σημαντικά , που ίσως δεν ήξερε ή τον δυσκόλεψαν ή τον εντυπωσίασαν. Πολλοί μαθητές χρησιμοποιούν χιούμορ ή μυστήριο στο βιβλίο τους γράφοντας μια ιστορία με μαθηματικό περιεχόμενο. Η ιδέα για τα μικρά βιβλιαράκια επανάληψης προήλθε από την παιδαγωγική Φρενέ. (Βιβλιογραφία/Δικτυογραφία http://mikra-vivlia.weebly.com/pialphaiotadeltaalphagammaomegagammaiotakappa942-phirhoepsilonnu941.html και https://skasiarxeio.wordpress.com/celestin-freinet/%CE%B2%CE%B9%CE%B2%CE%BB%CE%AF%CE%B1/)







Συγκεκριμένα για το σχολικό έτος 2022-23 εκπονήθηκαν και οι παρακάτω δημιουργικές εργασίες:

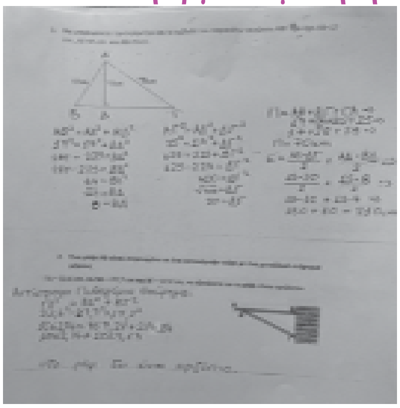
1) Στο πλαίσιο του μαθήματος της Γεωμετρίας της α’ τάξης οι μαθητές του Α3 τμήματος μελέτησαν την έννοια του άπειρου μέσα από την ευθεία και το

επίπεδο και την ταινία του Mobius. Αποτέλεσμα αυτής της μελέτης ήταν η δημιουργία **ταινίας** 6 λεπτών με τίτλο " Ποτέ Μην Αμφισβητείς Την Γεωμετρία" όπου οι μαθητές έγιναν σεναριογράφοι και ηθοποιοί. Με αυτήν την ταινία συμμετείχαμε στο 3ο Πανελλήνιο, Διαδικτυακό, Μαθητικό, Μαθηματικό Φεστιβάλ.
https://www.youtube.com/watch?v=Rgu9hi7jzVA&list=PLzr21r4id6IJRskBvpBZBAIXudMcVNvbL&index=10&t=8s

2) Στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών και του εργαστηρίου Δεξιοτήτων εκπονήσαμε **διαθεματικό πρότζεκτ** δημιουργίας εικονικής επιχείρησης με τους μαθητές του Α2. Οι μαθητές επέλεξαν να δημιουργήσουν εκδοτικό οίκο με την επωνυμία " U-KNOW ? MATHS " με εξειδίκευση σε βιβλία με μαθηματικό περιεχόμενο και συγγραφείς τους ίδιους τους μαθητές που απευθύνονται σε συνομηλίκους τους. Μελέτησαν το οικονομικό κομμάτι της επιχείρησης και προχώρησαν στην **έκδοση βιβλίου** μαθηματικού περιεχομένου που έγραψαν και εικονογράφησαν οι ίδιοι οι μαθητές συνεργατικά. Αριθμοί ζωντανεύουν, στρογγυλοποιούνται, συγκρούονται και παλεύουν για το δίκαιο. Το βιβλίο πήρε ISBN και μετά από πολύμηνη εργασία εκδόθηκε και μας έκανε όλους πολύ υπερήφανους!

3) Στο πλαίσιο του προγράμματος **Connect** μαθητές της **Β τάξης** του σχολείου μας διδάχτηκαν την έννοια του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη μέθοδο της ανεστραμμένης τάξης και τη βοήθεια της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να αναγνωρίσουν τη στενή συσχέτιση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία και να περιγράφουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας με τη βοήθεια συγκεκριμένης αλγεβρικής σχέσης). Οι μαθητές με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας διδάσκονται το θεώρημα κυρίως μέσα από ένα μαθηματικό τύπο τον οποίο καλούνται να μάθουν να διαχειρίζονται με αριθμούς χωρίς να έχουν ιδιαίτερη γεωμετρική εποπτεία του θέματος.
Στο νέομαθησιακό περιβάλλον του λογισμικού, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με διαδικασίες διεξαγωγής πειραμάτων, παρατήρησης, μεθοδικής καταγραφής δεδομένων, διατύπωσης υποθέσεων, ελέγχου για επιβεβαίωσή τους και εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων, συνεργάζονται μεταξύ τους, συνδιαλέγονται και επιχειρηματολογούν για τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους. Επιπλέον, θα έχουν τη δυνατότητα να συνδέσουν το ΠΘ με την επίλυση διάφορων προβλημάτων με εμβαδά.
Στην ασύγχρονη μελέτησαν σε δικό τους ρυθμό την έννοια του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια παραδειγμάτων μέσω του e-class .Οι μαθητές/τριες μελέτησαν το υλικό που περιγράφει το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τα αντίστοιχα παραδείγματα του. Στη συνέχεια εργάστηκαν ατομικά στο σπίτι με ένα αρχικό φύλλο εργασίας απλών εφαρμογών του θεωρήματος https://drive.google.com/file/d/18sXmvG4XzJj3ThGd9VE5z4k6ftcKDyAQ/view?usp=sharing και όλοι μαζί στην τάξη παρακολούθησαν βίντεο για την κατανόηση της απόδειξης του Θεωρήματος https://www.youtube.com/watch?v=vbG_YBTiN38 ώστε το επόμενο φύλλο εργασίας με συνδυαστικά θέματα να επεξεργαστεί σε ομάδες και να παρουσιαστεί στην ολομέλεια.
https://drive.google.com/file/d/11hi5BON7RuFEzedvtNvrnbZeB2_Kwdjg/view?usp=sharing
Τέλος στην ετερόχρονη διδασκαλία οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο με σκοπό να αξιολογήσουν τη διδασκαλία και τη μαθησιακή εμπειρία τους.
(https://docs.google.com/forms/d/1OzUsC7epDGNpN_Fh6ie7l6uUNzx46D9F_AiwgyNePeA/viewform?edit_requested=true#responses)

Ενδεικτική εργασία μαθητή:

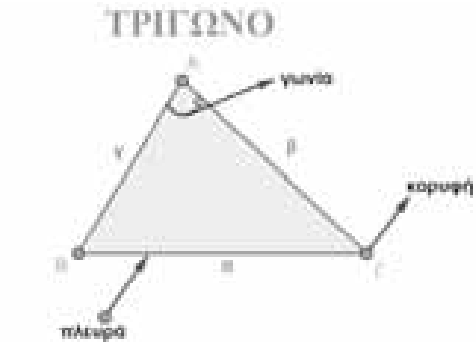


Με τα λόγια των μαθητών: «Μου άρεσε το γεγονός ότι μόνος μου ξεκίνησα να ανακαλύπτω το θεώρημα και να κατανοώ σε κάποιο βαθμό τη λογική πίσω από το τύπο. Στην τάξη συμπλήρωσα και τις υπόλοιπες γνώσεις ».
«Δεν περίμενα ποτέ η καθηγήτρια να μας εμπιστευτεί να δουλέψουμε μόνοι μας από την αρχή, χωρίς να μας έχει μαθει τη θεωρία. Τελικά τα Μαθηματικά είναι γεμάτα εκπλήξεις»!
«Το μάθημα είχε ποικιλία: eclass, βιντεο, εργασία ομαδική στην τάξη»

Α΄ Τάξη

Τα τρίγωνα

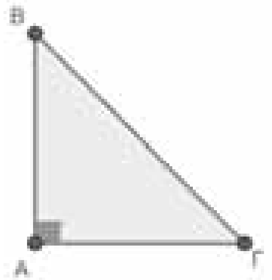
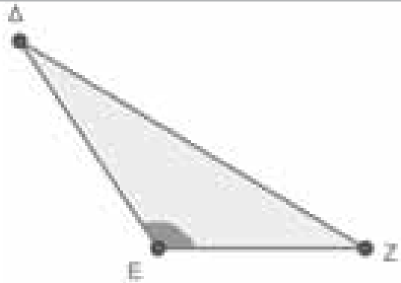
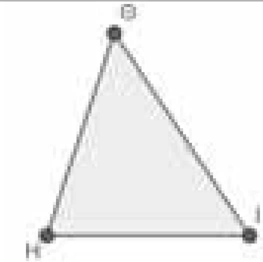
Μαρία Παππά



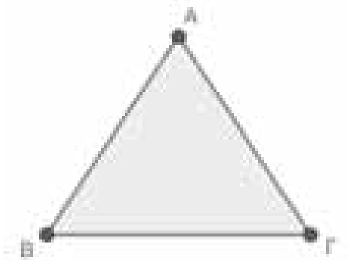
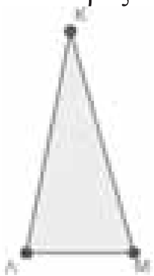
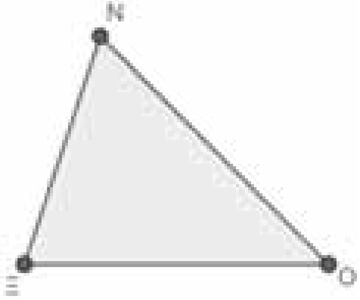
Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις **κορυφές** **Α, Β, Γ,** τρεις **πλευρές** **ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ** και τρεις γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.

Τα **ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ**, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.

Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

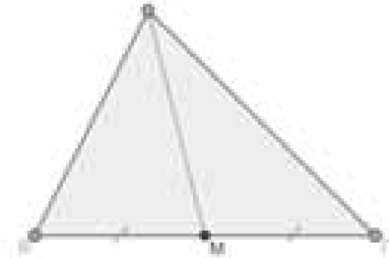
Πλευρές κάθετες	Όχι κάθετες πλευρές	
Μία γωνία ορθή	Μια γωνία μεγαλύτερη της ορθής	Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής
		
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	**ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ**	**ΟΞΥΓΩΝΙΟ**

Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Ισότητα πλευρών		Ανισότητα πλευρών
Τρεις πλευρές ίσες	Δύο πλευρές ίσες	Όλες οι πλευρές άνισες
		
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ	**ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ**	**ΣΚΑΛΗΝΟ**

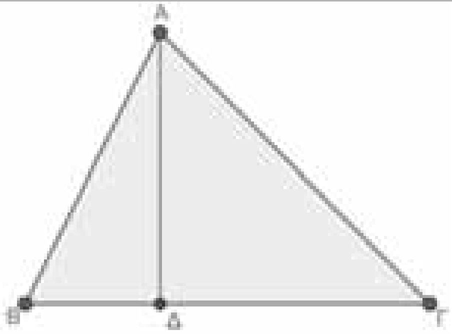
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος



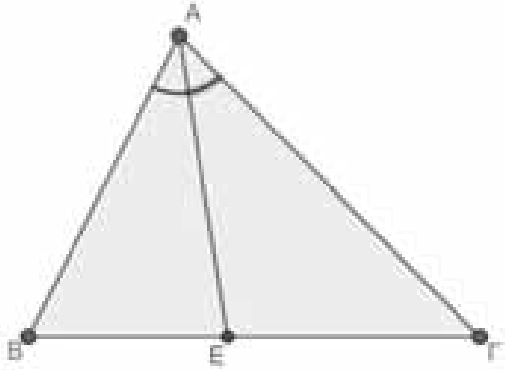
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται: **διάμεσος** του τριγώνου.

Ύψος



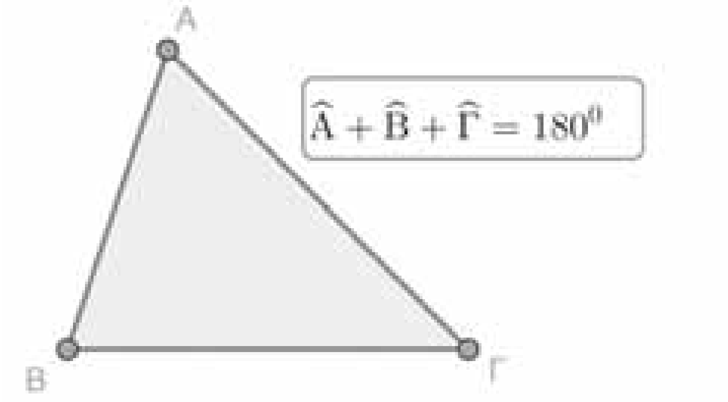
Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται **ύψος** του τριγώνου.

Διχοτόμος



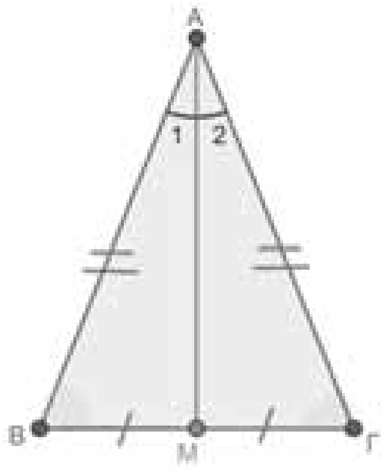
Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται:**διχοτόμος** του τριγώνου.

Ιδιότητες τριγώνου



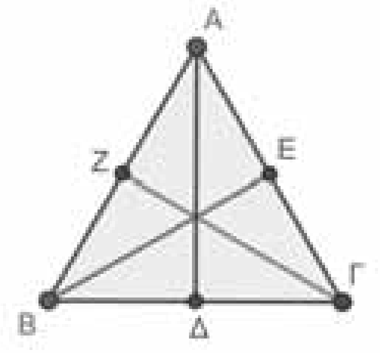
Σε κάθε **ισοσκελές** τρίγωνο ισχύει ότι:

► Η ευθεία της **διαμέσου**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **άξονας συμμετρίας** του ισοσκελούς τριγώνου.
► Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **ύψος** και **διχοτόμος**.
► Οι **προσκείμενες γωνίες** στη βάση του ισοσκελούς είναι **ίσες**.

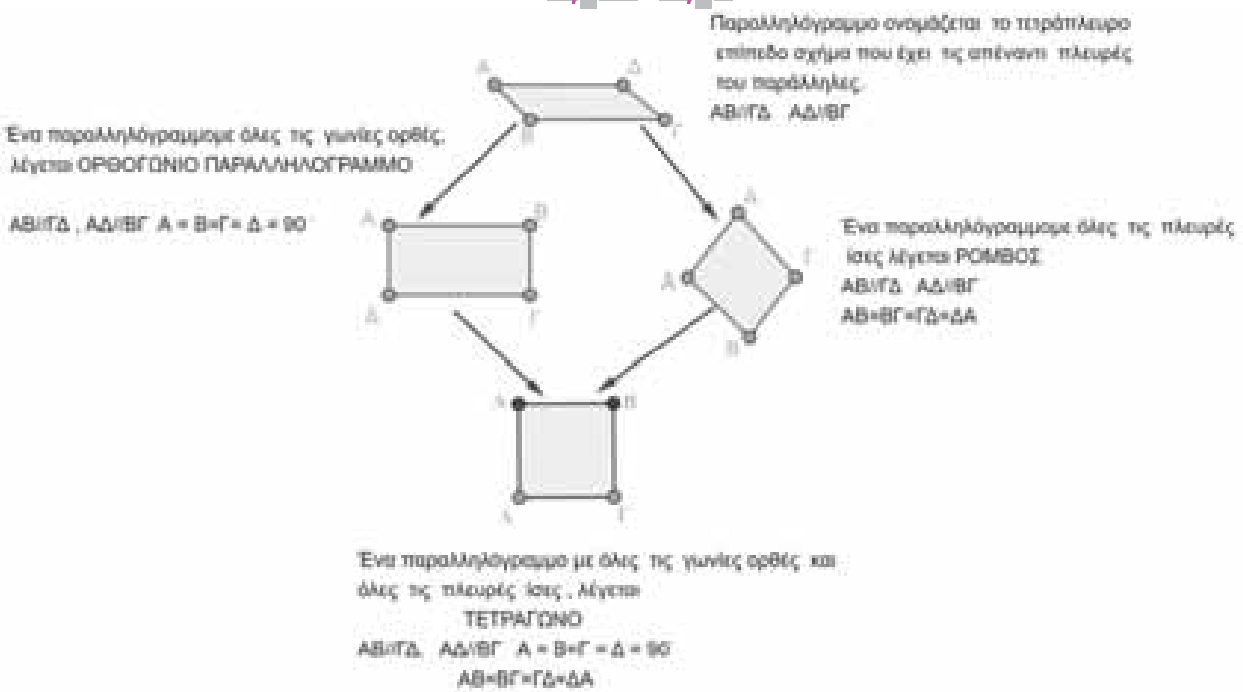


Σε κάθε ***ισόπλευρο*** τρίγωνο ισχύει ότι:

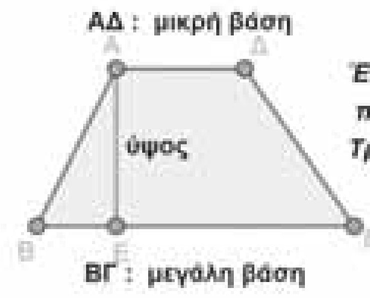
► Οι **ευθείες των διαμέσων** είναι **άξονες συμμετρίας** του ισοπλεύρου τριγώνου
►**Κάθε διάμεσος** είναι **ύψος** και **διχοτόμος**.
►**Όλες οι πλευρές** και **όλες οι γωνίες**του ισοπλεύρου τριγώνου είναι **ίσες**.



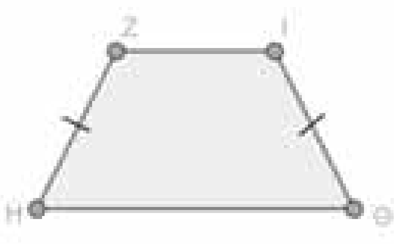
Τετράπλευρα



Τραπέζιο



Ένα τετράπλευρο με δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες ονομάζεται Τραπέζιο (ΑΔ//ΒΓ)



Αν σε ένα τραπέζιο οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες τότε ονομάζεται ισοσκελές τραπέζιο ΖΙ//ΗΘ , ΗΖ = ΙΘ.
Επίσης στο ισοσκελές τραπέζιο:
Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες

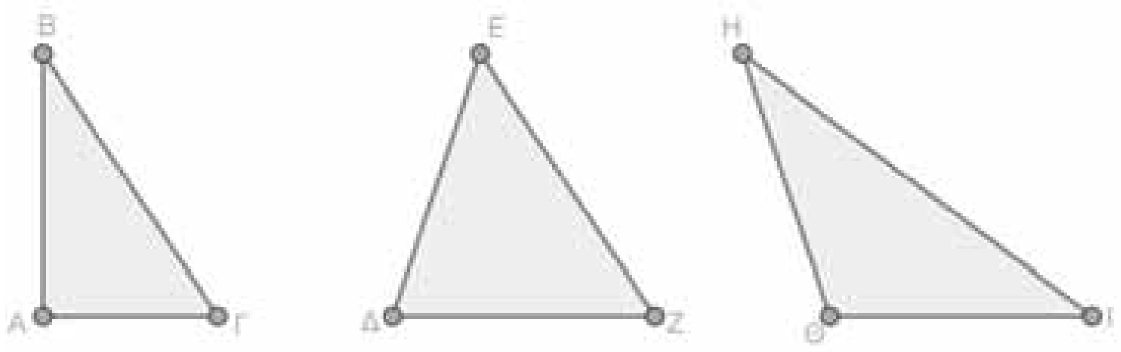
Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με $AB = 4\,cm$, $A\Gamma\ = 2\,cm$, $B\Gamma\ = 6\,cm$ και να φέρετε τη διάμεσο AM. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΜ και να το συγκρίνετε με την υποτείνουσα ΒΓ.

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε τα ύψη στα παρακάτω τρίγωνα:



Άσκηση 3

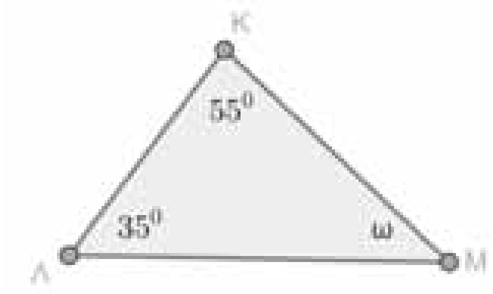
Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε τα μέσα των πλευρών του και να φέρετε τις διαμέσους του.

Άσκηση 4

Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε τη διχοτόμο του ΑΔ. Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους και τις διαμέσους του τριγώνου ΑΔΓ.

Άσκηση 5

Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B} και \hat{\Gamma}$.



Άσκηση 6

Στο διπλανό τρίγωνο ΚΛΜ, να υπολογίσετε η γωνία ω.

Άσκηση 7

Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, με $AB\ =\ A\Gamma$ και $\hat{B} = 50^0$.

Άσκηση 8

Σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{A} =\ 36^0$ και η $\hat{B}$ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Άσκηση 9

Να σημειώσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

a. Κάθε παραλληλόγραμμο είναι και τετράγωνο.
b. Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.
c. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.
d. Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 10

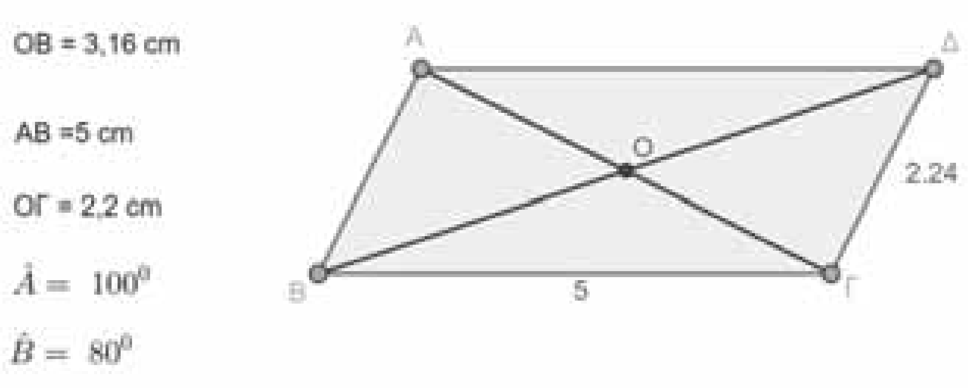
Να γράψετε 2 ομοιότητες και 2 διαφορές ανάμεσα σε :

Α) τετράγωνο και ρόμβο

Β) τετράγωνο και ορθογώνιο

Γ) ορθογώνιο και ρόμβο

Άσκηση 11



Να συμπληρώσετε τα κενά.

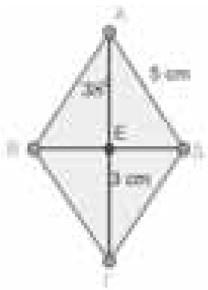
$\hat{B} =$_____ , $\hat{\Gamma} =$______, $O\Delta =$______ , $OA =$ _____ , $AB =$______

Άσκηση 12

Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, να συμπληρώσετε τα κενά:

$B\Gamma =$ $\quad$ $A\Gamma =$ $\quad$ $BO =$ $\quad$ $B\hat{A}\Gamma =$

$B\widehat{A\Delta} =$ $\quad$ $A\hat{B}\Gamma =$



Άσκηση 13

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 5cm$ είναι $\hat{A} = 80^o$.

α) Να κατασκευάσετε το τρίγωνο. β) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του.

Άσκηση 14

Αν σε ισοσκελές τρίγωνο η μια γωνία του είναι 100^o να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του.

Άσκηση 15

Σε ισοσκελές η παρά τη βάση οξεία γωνία του είναι $\hat{B} = 50^o$. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του.

Άσκηση 16

Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου αν η μια είναι πενταπλάσια της άλλης.

Άσκηση 17

Σε ένα τραπέζιο η μια βάση του είναι μεγαλύτερη κατά 25 cm από την άλλη που είναι 0,42 m. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου έχουν άθροισμα 5,8 dm να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου.

Άσκηση 18

Σε ένα ρόμβο η περίμετρός του έχει μήκος 60 cm. Να βρεθεί η πλευρά.

Άσκηση 19

Σε ισοσκελές τρίγωνο, η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι 15° μεγαλύτερη καθεμιάς από τις ίσες γωνίες. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

Άσκηση 20

Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία απέναντι από τη βάση του είναι διπλάσια καθεμιάς από τις ίσες γωνίες. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου αυτού.

Άσκηση 21

Σ’ ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι 72°. Να υπολογίσετε τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του τριγώνου.

Άσκηση 22

Σ’ ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι εξαπλάσια της $\hat{\Gamma}$. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

Άσκηση 23

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι 40° και η γωνία $\hat{B}$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά 60° μοίρες. Τι τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$;

Β΄ Τάξη Παραστάσεις με ...νόημα και σχέσεις με...ουσία!

Βαρβάρα Καμπουρίδη

Τα προβλήματα που ακολουθούν είναι βασισμένα σε αληθινές ιστορίες. Όμως, όπως γράφεται και στην έναρξη κάποιων ταινιών, τα πρόσωπα και τα ονόματα δεν είναι τα πραγματικά.

1. Η εταιρεία "Galaxy stars" θα αγοράσει φορητούς υπολογιστές και ταμπλέτες για το προσωπικό της. Η εταιρεία χρησιμοποιεί την αλγεβρική παράσταση $\Sigma = 480\varphi + 160\tau$ για να υπολογίσει το συνολικό κόστος αυτών των αγορών με φ τον αριθμό των φορητών και τ τον αριθμό των ταμπλετών. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις μάς δίνει τον αριθμό των φορητών φ, αν γνωρίζουμε το Σ (συνολικό κόστος) και το τ (αριθμό ταμπλετών).

1. $\varphi = \dfrac{\Sigma}{480} - 160\tau$

2. $\varphi = \Sigma - 160\tau - 480$

3. $\varphi = \dfrac{\Sigma - 160\tau}{480}$

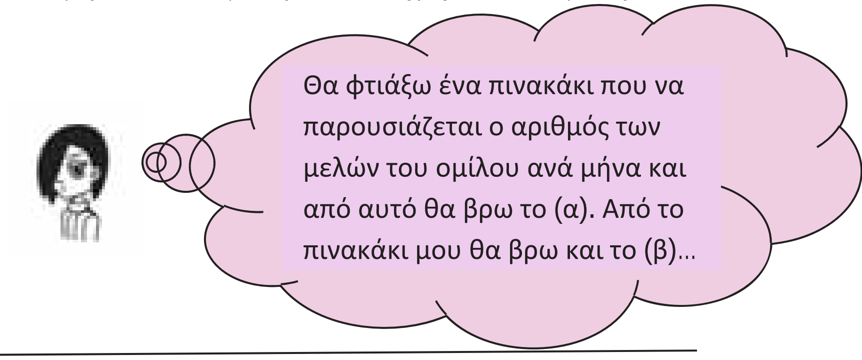
4. $\varphi = \Sigma - \dfrac{160\tau}{480}$

2. Ο Αχιλλέας και τρεις φίλοι του θέλουν να ξεκινήσουν έναν αθλητικό όμιλο για να παίζουν σε γηπεδάκι 5Χ5 και να μικρύνουν το έξοδο της ενοικίασης του γηπέδου. Τον πρώτο μήνα οι 4 φίλοι έφεραν κι από ένα νέο μέλος. Αν κάθε μήνα το κάθε μέλος φέρνει ένα νέο μέλος,

α) ποια από τις παρακάτω σχέσεις μας δίνει τον αριθμό των μελών κάθε μήνα (όπου x οι μήνες);

1	2	3	4
$2x + 4$	$4x + 4$	$2x^2$	$4 \cdot 2^x$

β) Σε ποιο μήνα πρέπει να σταματήσουν να φέρνουν νέα μέλη αν ο στόχος είναι τα μέλη να είναι τουλάχιστον 120 και το πολύ 130;



γ) Αν ο Αχιλλέας είχε μόνο 2 φίλους για να ξεκινήσουν τον αθλητικό όμιλο και ίσχυαν τα ίδια με τους 3 φίλους, βρείτε τη σχέση που θα έδινε τον αριθμό των μελών κάθε μήνα.

3. https://www.youtube.com/watch?v=zDq2614I_kc

Κάθε 10 χρόνια περίπου η Ελληνική Στατιστική Αρχή διενεργεί απογραφή του πληθυσμού στη χώρα μας. Το 2020 ο πληθυσμός στην Άνω Παναγιά ήταν 3.000 κάτοικοι και στην Κάτω Παναγιά 500 κάτοικοι. Αν κάθε 10 χρόνια ο πληθυσμός της Άνω Παναγιάς μειώνεται κατά 1.000 άτομα και της Κάτω Παναγιάς διπλασιάζεται, σε πόσα χρόνια η Κάτω Παναγιά θα ξεπεράσει σε πληθυσμό την Άνω Παναγιά;

Απογραφή 2020 Κάτοικοι		Απογραφή.......		
Κάτω Παναγιά				
Άνω Παναγιά				

Απάντηση: ____

4. Δύο ηλεκτρονικά καταστήματα νοικιάζουν βιντεοπαιχνίδια. Το Άραζον χρεώνει μηνιαία συνδρομή 9,5 ευρώ και 2 ευρώ για κάθε βιντεοπαιχνίδι. Το Άκαζον δεν έχει μηνιαία συνδρομή αλλά χρεώνει το βιντεοπαιχνίδι 4 ευρώ. Πόσα βιντεοπαιχνίδια πρέπει τουλάχιστον να νοικιάσει η Εύη για ένα μήνα για να της συμφέρει να νοικιάσει από το Άραζον;

Κάνε εδώ τις πράξεις σου. Μήπως ένα πινακάκι σε βοηθήσει;

Απάντηση: ____

5. Η σχέση 4α - 8, όπου το α παίρνει τιμές 1,2,......, μας δίνει τους όρους ενός μοτίβου.

α) Ποια τιμή του α δίνει στη σχέση θετική τιμή; ______________________

β) Ποια είναι η τιμή της σχέσης για το άθροισμα του 1ου και 5ου όρου του μοτίβου;

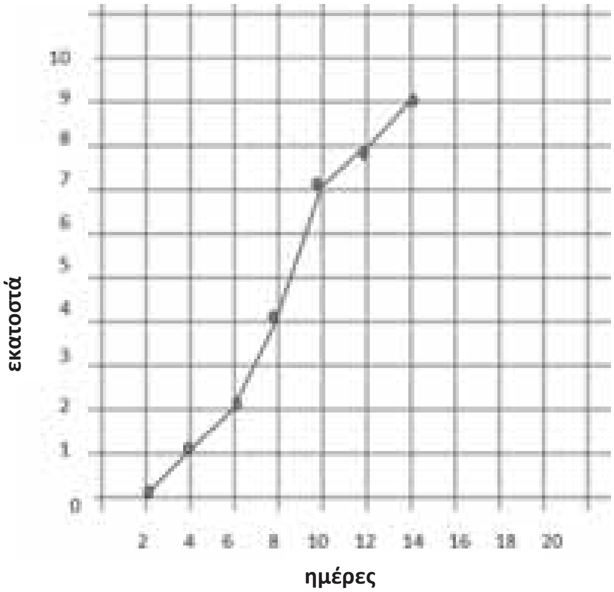
____

6. Στην εξίσωση αX + 16 = 2X + 17 ποια είναι η τιμή του α ώστε ο X να είναι 1;

____

Γράψε μία διαφορετική εξίσωση όπου η μεταβλητή Χ είναι και στις δύο πλευρές της εξίσωσης και Χ = 2.

7. Ο αδελφός του Μανόλη που πάει στη Β΄Δημοτικού φύτεψε μια φασολιά σε ένα κυπελάκι.



Κάθε δύο μέρες μετρούσε το ύψος του φυτού και το σημείωνε στο γράφημα. Σε ποιο διάστημα το φυτό είχε τη μεγαλύτερη αύξηση ύψους; Κύκλωσε το σωστό:

Α. Από την 4η στην 6η μέρα **Β**. Από την 6η στην 8η μέρα

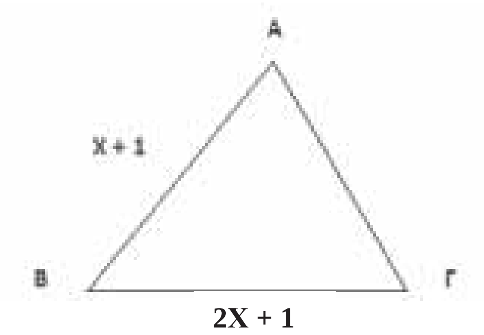
Γ. Από την 8η στη 10η μέρα **Δ.** Από την 10η στη 12η μέρα **Ε.** Από την 12η στην 14η μέρα

8. Το πόστερ της ομάδας του Μηνά για την εργασία στην Ιστορία είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η μία πλευρά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει μήκος όσο τα 2/3 της άλλης πλευράς. Αν η περίμετρός του είναι 400 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος της κάθε πλευράς;

9. Ο Λέανδρος ρώτησε στον αθλητικό όμιλο της γειτονιάς του πόσο χρεώνουν για να γίνει κάποιος μέλος και του απάντησαν με την παράσταση: Σ = 20μ + 30 ευρώ, όπου μ είναι ο αριθμός των μηνών που θα είναι μέλος και Σ το πληρωτέο ποσό. Πώς υπολόγισε ο Λέανδρος πόσο θα του κοστίσει να είναι μέλος του αθλητικού ομίλου για ένα χρόνο;

Πόσο θα κοστίσει η επόμενη χρονιά στον Λέανδρο, αν γνωρίζει πως ο σταθερός συντελεστής 20 θα μειωθεί κατά 25% ; Γράψε τη νέα σχέση και υπολόγισε για να δώσεις την απάντηση.

10. Η περίμετρος του τριγώνου είναι 7Χ - 6. Ποια από τις παρακάτω τέσσερις σχέσεις μας δίνει την πλευρά ΑΓ; Κύκλωσε τη σωστή.



1. 4Χ - 4
2. 4Χ - 6
3. 6Χ - 2
4. 6Χ - 6

11. Το κυλικείο σε ένα διάλειμμα εισέπραξε 40 νομίσματα των 2 ευρώ και των 50 λεπτών συνολικής αξίας 57,50 ευρώ. Ποια από τα παρακάτω ζευγάρια σχέσεων ισχύει:
(**δ** για τα νομίσματα των 2 ευρώ και **π** για τα νομίσματα των 50 λεπτών)

1	2
$\delta + \pi = 57,50$ $40\delta + 40\pi = 57,50$	$2\delta + 0,50\pi = 40$ $\delta + \pi = 57,50$
3	**4**
$\delta + \pi = 40$ $2\delta + 0,50\pi = 57,50$	$2\delta + 0,50\pi = 57,50$ $40\delta + 40\pi = 57,50$

12. Η Μελίνα είναι πρωτοετής φοιτήτρια και εργάζεται τα σαββατοκύριακα σε ένα καφέ για να "βγάζει" κάποια από τα έξοδα της φοιτητικής της ζωής. Έχουμε τις εξής πληροφορίες για τη Μελίνα.

- Με **μ** παριστάνουμε το ποσό σε ευρώ που εισπράττει κάθε μήνα και **α** τα χρήματα σε ευρώ που θέλει να αποταμιεύει από το ποσό που εισπράττει για τις καλοκαιρινές της διακοπές.
- Θα αποταμιεύει τουλάχιστον το μισό ποσό που εισπράττει και ακόμη 10 ευρώ κάθε μήνα.
- Μπορεί να αποταμιεύει το πολύ 40 ευρώ επιπλέον από τα 2/3 του ποσού που εισπράττει το μήνα.
- Το ποσό που εισπράττει για τη δουλειά της κάθε μήνα είναι τουλάχιστον 560 ευρώ αλλά δεν μπορεί να υπερβαίνει τα (να είναι περισσότερο από) 650 ευρώ.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα ποια ομάδα ανισώσεων είναι η σωστή; Υπογράμμισέ τη.

ΟΜΑΔΑ 1	ΟΜΑΔΑ 2
$\mu \le \frac{1}{2}\alpha + 10 \quad \alpha \le 560$ $\mu \ge \frac{2}{3}\alpha + 40 \quad \alpha \ge 650$	$\alpha \ge \frac{1}{2}\mu + 10 \quad \mu \ge 560$ $\alpha \le \frac{2}{3}\mu + 40 \quad \mu \le 650$
ΟΜΑΔΑ 3	**ΟΜΑΔΑ 4**
$\alpha \le \frac{1}{2}\mu + 10 \quad \mu \le 560$ $\alpha \ge \frac{2}{3}\mu + 40 \quad \mu \ge 650$	$\mu \ge \frac{1}{2}\alpha + 10 \quad \alpha \ge 560$ $\mu \le \frac{2}{3}\alpha + 40 \quad \alpha \le 650$

Β΄ Τάξη

Ασκήσεις στη Στατιστική

Ειρήνη Κοτσακιλάφη

Η Στατιστική είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη συλλογή, ανάλυση, ερμηνεία, παρουσίαση και οργάνωση δεδομένων. Η Στατιστική ως έννοια εμφανίζεται από τους μυθικούς χρόνους, από την πρώτη δημιουργία οργανωμένων κοινωνιών. Μια πρώτη γραφή στατιστικής μορφής με αριθμητικά δεδομένα είναι ο κατάλογος των πλοίων των Αχαιών στον Τρωικό πόλεμο από τον Όμηρο. Πρώτη ιστορική συλλογή καθαρά στατιστικών στοιχείων θεωρείται η απογραφή πληθυσμού από τον Αυτοκράτορα της Κίνας Γιάο (Yao) το 2238 π.Χ. Τέτοιες στοιχειώδεις απογραφές πραγματοποιήθηκαν και από άλλους λαούς, όπως οι Αιγύπτιοι, οι Βαβυλώνιοι, οι αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι. Αργότερα, κατά την Αναγέννηση και με αφετηρία την Ιταλία, η συλλογή και η καταγραφή δεδομένων για τον πληθυσμό και την οικονομία έγινε πιο συστηματική και επεκτάθηκε σε όλα τα βασίλεια της Ευρώπης. Κατά τη διάρκεια του 14^{ου} αιώνα παγιώθηκε η χρήση της Στατιστικής για την καταγραφή του πληθυσμού λόγω των θανάτων από διάφορες επιδημικές ασθένειες, πολέμους και τις δύσκολες συνθήκες διαβίωσης. Τέλος, η ανάπτυξη του εμπορίου τους επόμενους αιώνες έφερε και την μεγάλη άνθηση και την παγίωση της χρήσης της Στατιστικής και σε άλλους τομείς, όπως το εμπόριο, οι μεταφορές, η βιομηχανία και το εργατικό δυναμικό.

Πρόβλημα 1: **Οι μηνιαίες αποδοχές δέκα εργαζομένων μιας επιχείρησης είναι (σε ευρώ): 750,1200, 950, 750, 800, 700, 2100, 600,1000,1050**

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των αποδοχών των εργαζομένων.

β) Να διατάξετε τους μισθούς (αποδοχές) κατά αύξουσα σειρά.

γ) Να βρείτε το «μεσαίο» μισθό.

δ) Να συγκρίνετε τον «μεσαίο» μισθό με την μέση τιμή. Να συζητηθεί το αποτέλεσμα της σύγκρισης

Λύση:

α) Για να βρούμε τη μέση τιμή των αποδοχών των εργαζομένων χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{750+1200+950+750+800+700+2100+600+1000+1050}{10} =$$

$$= \frac{9900}{10} = 990$$

β) Διατάσσουμε τις αποδοχές από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:
600 700 750 750 800 950 1000 1050 1200 2100.

γ) Ο «μεσαίος» μισθός είναι η διάμεσος και επειδή ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι άρτιος θα είναι ίση με τον μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Εδώ λοιπόν είναι:

$$\delta = \frac{800+950}{2} = \frac{1750}{2} = 875$$

δ) Η μέση τιμή και η διάμεσος δεν είναι πάντα ο ίδιος αριθμός. Εδώ, η διάμεσος είναι μικρότερη από την μέση τιμή γιατί $875<990$.Αυτό μας δείχνει ότι η κατανομή των αποδοχών έχει μια ασυμμετρία.

Πρόβλημα 2: Για να εκτιμήσουμε πόσα βιβλία διαβάζουν οι Έλληνες το χρόνο, πήγαμε σε ένα κεντρικό βιβλιοπωλείο της Αθήνας και ρωτήσαμε συνολικά 200 πελάτες του.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο το δείγμα της έρευνας;

β) Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό και γιατί;

γ) Το 25% των ατόμων που ρωτήσαμε διαβάζει πάνω από 2 βιβλία το χρόνο. Πόσα άτομα είναι αυτά;

δ) Το 31% των ατόμων που ρωτήσαμε διαβάζει 1 με 2 βιβλία το χρόνο. Πόσα άτομα είναι αυτά;

ε) Τέλος, 38 άτομα απάντησαν ότι δεν διαβάζουν κανένα βιβλίο όλο το χρόνο. Ποιο είναι το ποσοστό % των ατόμων που δεν διαβάζουν κανένα βιβλίο;

Λύση:

α) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι Έλληνες και το δείγμα είναι οι 200 πελάτες του βιβλιοπωλείου.

β) Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό γιατί επιλέχθησαν πελάτες ενός βιβλιοπωλείου που πιθανόν να αγαπούν το διάβασμα περισσότερο. Επίσης, επιλέχθησαν κάτοικοι της Αθήνας και όχι διάφορων περιοχών.

γ) Πρέπει να υπολογίσουμε το 25% των 200 ατόμων. Άρα έχουμε:

$$200\cdot 25\% = 200\cdot\frac{25}{100}=\frac{5000}{100}=50 \text{ άτομα}$$

Επομένως,50 άτομα διαβάζουν πάνω από 2 βιβλία το χρόνο.

δ) Πρέπει να υπολογίσουμε το 31% των 200 ατόμων. Άρα, έχουμε :

$$200\cdot 31\% = 200\cdot\frac{31}{100}=\frac{6200}{100}=62 \text{ άτομα}$$

Επομένως,62 άτομα διαβάζουν 1 με 2 βιβλία το χρόνο.

ε) Οι 38 στους 200 πελάτες απάντησαν ότι δεν διαβάζουν κανένα βιβλίο όλο το χρόνο. Αποτελούν δηλαδή τα $\frac{38}{200}$ των πελατών. Για να βρούμε το ποσοστό θα μετατρέψουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100: $\frac{38}{200}=0{,}19=\frac{19}{100}=19\%$

Επομένως το 19% των πελατών δεν διαβάζει κανένα βιβλίο.

Πρόβλημα 3: Ρωτήθηκαν οι μαθητές ενός σχολείου σχετικά με το τι τους αρέσει να κάνουν στον ελεύθερο χρόνο τους. Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα.

Αγόρια

Ασχολία	Βιβλίο	Τηλεόραση	Αθλήματα	Παιχνίδι
Αριθμός παιδιών	20	40	30	15

Κορίτσια

Ασχολία	Βιβλίο	Τηλεόραση	Αθλήματα	Παιχνίδι
Αριθμός Παιδιών	35	3	25	20

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα των πινάκων σε δυο ραβδογράμματα.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε τα δεδομένα του με κυκλικό διάγραμμα.

Ασχολία	Βιβλίο	Τηλεόραση	Αθλήματα	Παιχνίδι
ΣυνολικόςΑριθμός Παιδιών				

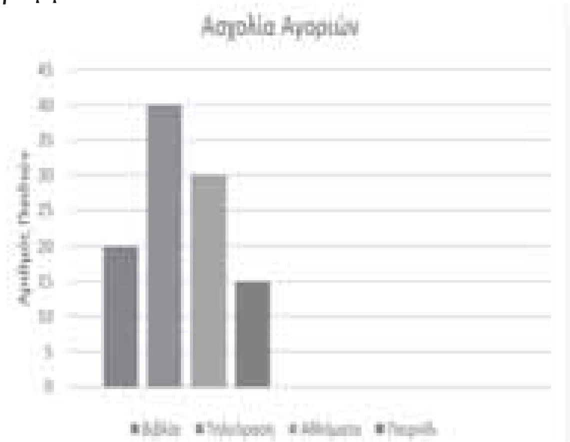
γ) Πόσα παιδιά ρωτήθηκαν συνολικά;

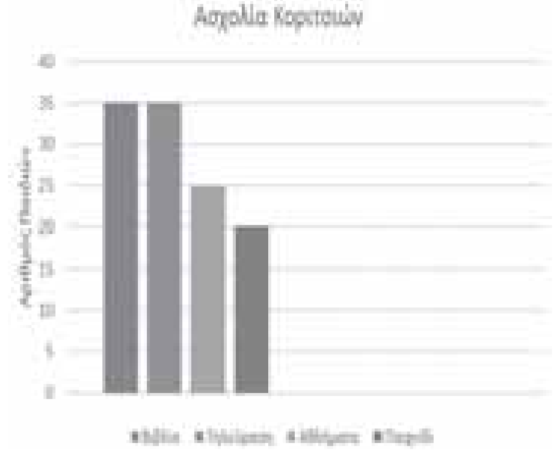
δ) Ποιο ποσοστό των παιδιών ασχολείται με τα αθλήματα στον ελεύθερο χρόνο του;

ε) Ποιο ποσοστό είναι μεγαλύτερο, των παιδιών που διαβάζουν βιβλία ή αυτών που αθλούνται;

Λύση:

α) Στον κατακόρυφο άξονα y'y τοποθετούμε τους αριθμούς 0 έως 40 ανά 5. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε 4 ορθογώνια με ίσες βάσεις και αντίστοιχα ύψη ίσα με τους αριθμούς των γραμμών του κάθε πίνακα.





β)

Ασχολία	Βιβλίο	Τηλεόραση	Αθλήματα	Παιχνίδι
Συνολικός Αριθμός Παιδιών	55	75	55	35

Για να σχεδιάσουμε το κυκλικό διάγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Τα 220 άτομα αντιστοιχούν στις 360^o του κύκλου. Επομένως έχουμε για αυτούς που διαβάζουν βιβλίο: $\frac{220}{55}=\frac{360}{\theta}$

και $\theta=\frac{55}{220}\cdot 360=\frac{1}{4}\cdot 360=90^o$

- Για όσους βλέπουν τηλεόραση:

$$\theta_1=\frac{75}{220}\cdot 360=\frac{15}{44}\cdot 360\cong 123^o$$

- Για όσους αθλούνται:

$$\theta_2=\frac{55}{220}\cdot 360=\frac{1}{4}\cdot 360=90^o$$

- Για όσους παίζουν με κάποιο παιχνίδι:

$$\theta_3=\frac{35}{220}\cdot 360=\frac{7}{44}\cdot 360\cong 57^o$$

γ) Για να βρω πόσα παιδιά ρωτήθηκαν συνολικά θα αθροίσουμε όλες τις απαντήσεις του παραπάνω πίνακα. Δηλαδή, 55+75+55+35=220 παιδιά.

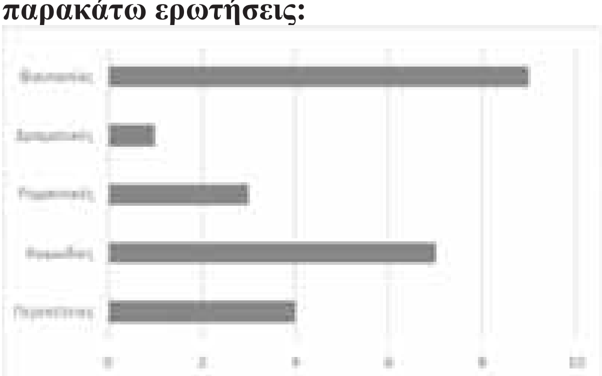
δ) Με τα αθλήματα ασχολούνται τα 55 στα 220 παιδιά. Άρα, είναι τα $\frac{55}{220}$. Επομένως,

$\frac{55}{220}=0,25=\frac{25}{100}=25\%$.

ε) Το ποσοστό των παιδιών που διαβάζουν βιβλία είναι επίσης: $\frac{55}{220}=0,25=\frac{25}{100}=25\%$.

΄Αρα στον ελεύθερο χρόνο τους το ίδιο ποσοστό παιδιών επιλέγει να διαβάσει ένα βιβλίο ή να ασχοληθεί με κάποιο άθλημα.

Πρόβλημα 4: Ο Γιώργος κάνει μια έρευνα στην τάξη του και ρωτάει τους συμμαθητές του ποιο είναι το αγαπημένο τους είδος ταινίες. Στην συνέχεια κατασκευάζει το παρακάτω ραβδόγραμμα. Με βάση το ραβδόγραμμα να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:



α) Ποιο είδος ταινίας είναι το πιο δημοφιλές και ποιο το λιγότερο δημοφιλές;

β) Πόσα παιδιά ρώτησε συνολικά ο Γιώργος;

γ) Ποιο ποσοστό των παιδιών προτιμούν ταινίες φαντασίας;

Λύση:

α) Όπως βλέπουμε από το ραβδόγραμμα το πιο δημοφιλές είδος ταινίας είναι οι ταινίες φαντασίας, διότι η συχνότητα της απάντησης είναι 9 και το αντίστοιχο ορθογώνιο είναι μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα. Αντίθετα, το λιγότερο δημοφιλές είδος είναι οι δραματικές ταινίες γιατί η συχνότητα της απάντησης είναι 1 και το αντίστοιχο ορθογώνιο είναι το μικρότερο από όλα.

β) Για να βρούμε πόσα παιδιά ρώτησε συνολικά ο Γιώργος πρέπει να προσθέσουμε όλες τις συχνότητες. Άρα 9+1+3+7+4=24 παιδιά απάντησαν.

γ) Το ποσοστό των παιδιών που προτιμούν ταινίες φαντασίας είναι: $\frac{9}{24}=0,375=37,5\%$.

Πρόβλημα 5: Τα ύψη μιας ομάδας 10 παιδιών είναι (σε cm): 168, 172, 179, 170, 174, 185, 175, 175, 169, 171.

α) Να υπολογίσετε το μέσο ύψος των παιδιών

β) Αν από την ομάδα φύγει 1 παιδί με ύψος 175 και έρθει ένα παιδί με ύψος 182,πόσο θα είναι τώρα το μέσο ύψος;

γ) Αν στην ομάδα προστεθεί ένα παιδί με ύψος 176 ,πόσο θα είναι το μέσο ύψος;

Λύση:

α) Για να υπολογίσουμε το μέσο ύψος θα προσθέσουμε όλες τις τιμές και θα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό των παιδιών. Δηλαδή: Μέσο ύψος=

$$=\frac{168+172+179+170+174+185+175+175+169+171}{10}=$$

$$\frac{1738}{10}=173,8$$

β) Αν αντικατασταθεί ένα παιδί το πλήθος τους παραμένει 10 αλλά αλλάζει το άθροισμα των παρατηρήσεων κατά 7 cm,αφού ο νέος μαθητής θα έχει ύψος 182>175.Επομένως ,θα έχουμε: Νέο Μέσο ύψος =

$$=\frac{1738+7}{10}=\frac{1745}{10}=174,5$$

γ) Αν προστεθεί ένα νέο μέλος σε αυτή την ομάδα θα αλλάξει το άθροισμα των παρατηρήσεων, θα αυξηθεί κατά 176 cm, αλλά θα αλλάξει και ο αριθμός των παρατηρήσεων, θα γίνουν 11. Άρα:

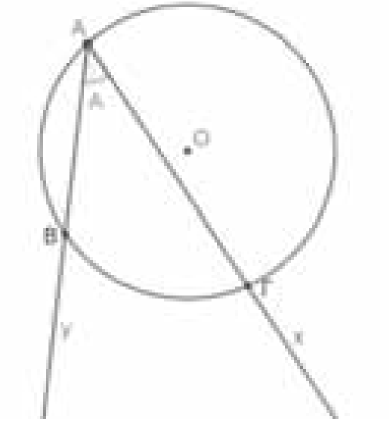
Μέσο ύψος$=\frac{1738+176}{11}=\frac{1914}{11}=174$.

Κύκλος

Θέμις Καψή

Εγγεγραμμένες γωνίες

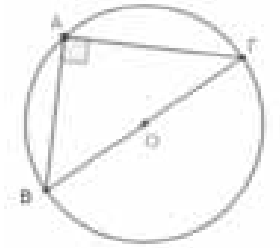
Μια γωνία $x\hat{A}y$ που η κορυφή της ανήκει στον κύκλο (O,ρ) και οι πλευρές της Ax, Ay τέμνουν τον κύκλο λέγεται εγγεγραμμένη γωνία, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



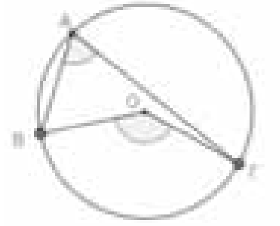
Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ του κύκλου (O,ρ), το οποίο περιέχεται στη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ λέγεται αντίστοιχο τόξο της γωνίας και επίσης λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Ισχύει ότι:

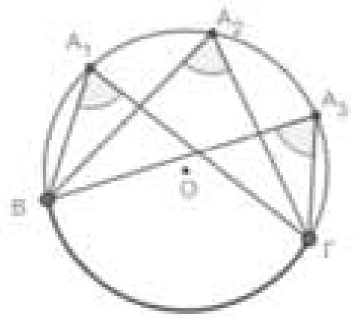
- κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή



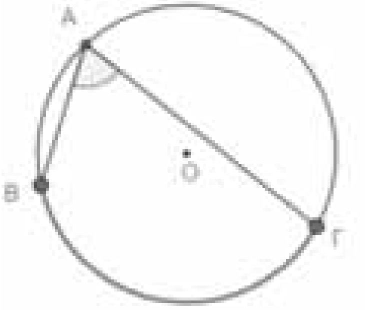
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.



- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα μεταξύ τους τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.



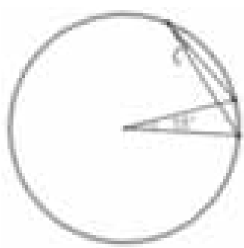
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

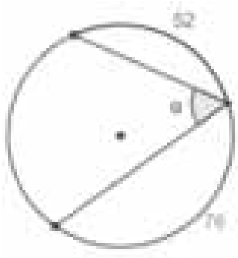


Εξάσκηση

Άσκηση 1η

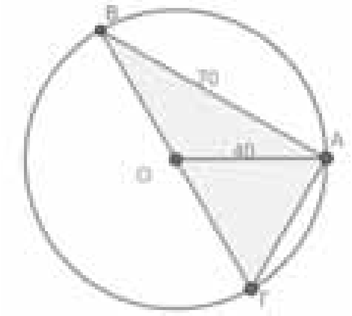
Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών που σημειώνονται παρακάτω:





Άσκηση $2^η$

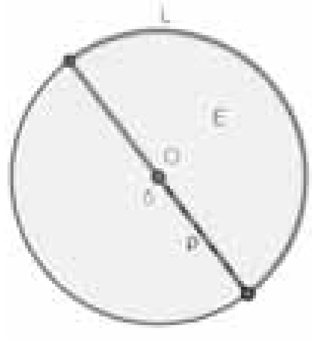
Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ του παρακάτω τριγώνου και το εμβαδό του.



Μήκος κύκλου και εμβαδό κυκλικού δίσκου

Το μήκος του κύκλου υπλογίζεται με βάση τη σχέση $L = 2\pi\rho$, όπου ρ η ακτίνα του ή τη σχέση $L = \pi\delta$, όπου δ η διάμετρός του.

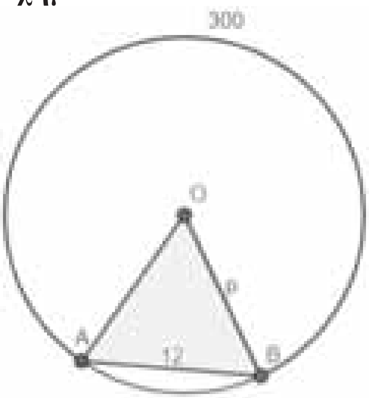
Το εμβαδό του κυκλικού δίσκου αντίστοιχα υπολογίζεατι με βάση τον τύπο $E = \pi\rho^2$



Εξάσκηση

Άσκηση $1^η$

Να υπολογίσετε το μήκος κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Άσκηση $2^η$

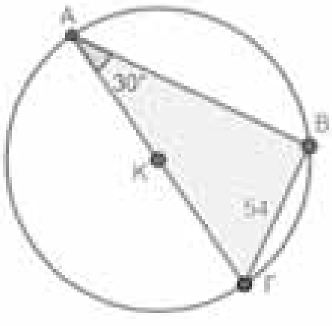
Να βρείτε τη σχέση που έχουν τα μήκη κύκλων με ακτίνες οι οποίες έχουν λόγο 2:3 και τη σχέση που έχουν τα εμβαδά κυκλικών δίσκων με ακτίνες με λόγο 2:3

Άσκηση $3^η$

Με βάση το παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε:

α. τη διάμετρο και την ακτίνα του κύκλου

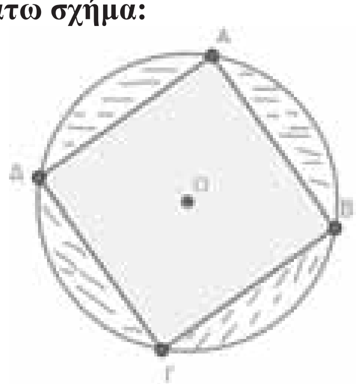
β. το εμβαδό του ημικυκλίου ΑΒΓ



Δίνεται ότι ΑΓ διάμετρος και $\eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$.

Άσκηση $4^η$

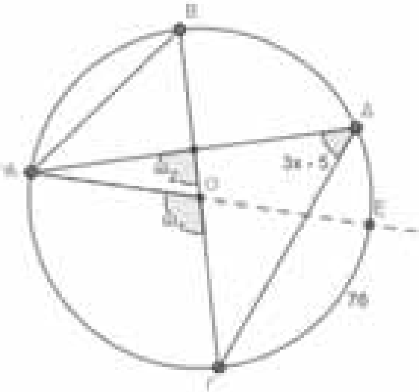
Δίνεται ότι ΑΒΓΔ τετράγωνο με κορυφές σημεία του κύκλου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με 2 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του κύκλου και το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας, που φαίνεται στο σχήμα.

Άσκηση $5^η$

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ΑΕ διάμετρος του κύκλου και τόξο ΓΕ μέτρου 76^o.

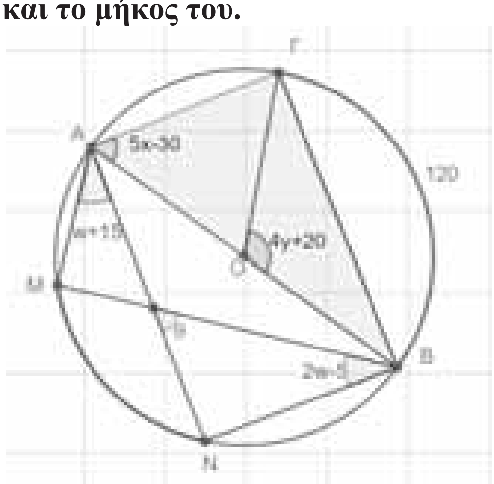


Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω_1.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω_2.
Γ. Να υπολογίσετε την τιμή του x.

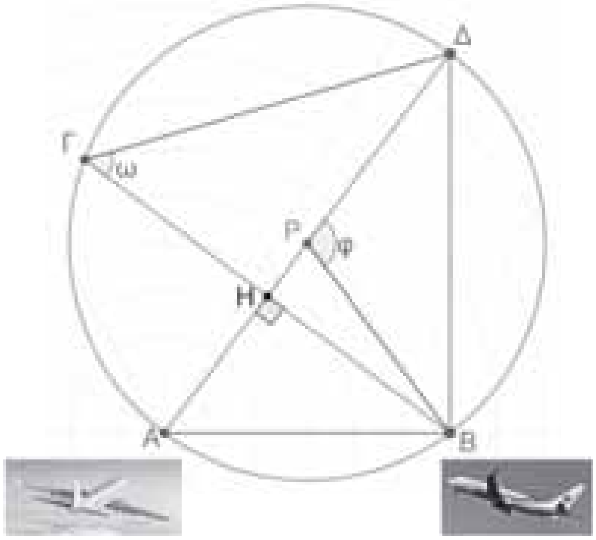
Άσκηση 6η

Με βάση το σχήμα που δίνεται στη συνέχεια,
Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΒΟΓ και στη συνέχεια την τιμή του y.
Β. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.
Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΓ και στη συνέχεια την τιμή του x.
Δ. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο.
Ε. Να υπολογίσετε την τιμή του w και του τόξου ΜΝ.
ΣΤ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΜΒΝ και το μέτρο της γωνίας ΑΝΒ.
Ζ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ.
Η. Αν ο κύκλος έχει εμβαδό 9π τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε την ακτίνα του και το μήκος του.



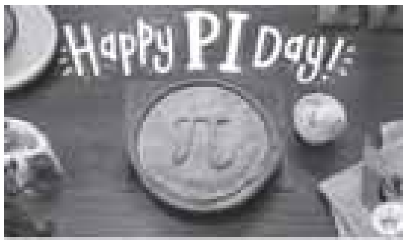
Άσκηση 7η

Ένα ραντάρ τοποθετημένο στη θέση Ρ έχει εμβέλεια με ακτίνα ΡΑ = 5 km.
Δύο αεροπλάνα βρίσκονται στα σημεία Α και Β, με τελικούς προορισμούς Δ και Γ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Α. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}\Delta$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
Δίνεται ότι τη στιγμή που εντοπίζονται τα δύο αεροπλάνα η απόστασή τους είναι 6 km (ΑΒ = 6 km).
Β. Να υπολογιστεί η απόσταση του τελικού προορισμού Δ του αεροπλάνου Α από τη θέση Β, δηλαδή το ΔΒ.
Γ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.
Δ. Να υπολογίσετε την απόσταση ΡΗ, όπου Η το σημείο από το οποίο θα διέλθουν και τα δύο αεροπλάνα.
Ε. Αν $\hat{A} = 53^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ και $P\hat{B}\Delta$
ΣΤ. Να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$.



Λίγα λόγια για το *π*

Το π έχει πολύ μεγάλη ιστορία και η προσπάθεια για προσέγγιση του αριθμού αυτού αρχίζει από την αρχαιότητα και φθάνει μέχρι και σήμερα.
Το π είναι άρρητος υπερβατικός αριθμός και ο μοναδικός άρρητος υπερβατικός που απαντάται στη φύση .
Ο Αρχιμήδης έκανε πολλές μελέτες ώστε να έχει μία καλή προσέγγιση του π.
Σήμερα οι υπολογισμοί προσεγγίσεων του π γίνονται με τη βοήθεια τεράστιων υπολογιστών.
Επιπλέον η 'Ημέρα του π' γιορτάζεται κάθε χρόνο στις 14 Μαρτίου
Στα αγγλικά μάλιστα διαβάζεται «πάι» και αντίστοιχα pi (e) day ☺



https://cardsayings.net/party-on-pi-day-14-fun-ways-to-celebrate/

Γ΄ Τάξη

Πιθανότητες

Θανάσης Χριστόπουλος

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ένας σχετικά νέος κλάδος των Μαθηματικών, άρχισαν να παίρνουν μορφή το 17ο αιώνα με την αλληλογραφία μεταξύ Pascal και Fermat, για να αναλύσουν τυχερά παιχνίδια. Το 1812 ο Πιέρ-Σιμόν Λαπλάς διατύπωσε τον κλασικό ορισμό, και το 1933 ο Kolmogorov την αξιωματική θεμελίωση. Ύστερα ακολούθησαν με τις εργασίες τους ο Bayes, ο von Mises, ο Bernouilli, ο Gauss, ο Poisson, ο de Moivre, και άλλοι.

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ

Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τον κλασικό ορισμό

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης

Μάθαμε από το σχολικό βιβλίο ότι, αν σε ένα πείραμα γνωρίζουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα του, τότε δεν είναι πείραμα τύχης. Αντίθετα στο **πείραμα τύχης δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποιο αποτέλεσμα θα έχουμε, όσες φορές και αν το εκτελέσουμε**. Κάθε φορά που μας περιγράφουν ένα πείραμα τύχης πρέπει να το κατανοήσουμε και να καταλάβουμε τη μορφή των αποτελεσμάτων, στη συνέχεια να καταγράψουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα, τα οποία αποτελούν **Δειγματικό χώρο** του πειράματος τύχης**.** Αυτό δεν είναι πάντα εύκολο, έχουμε όμως σαν βοήθεια το δενδροδιάγραμμα και τον πίνακα διπλής εισόδου.

Στη συνέχεια θα μας περιγράψουν **ένα ενδεχόμενο** δηλαδή ποια αποτελέσματα θέλουμε (ποια είναι ευνοϊκά για εμάς) και θα μας ζητηθεί η πιθανότητά του.

Για την αναγραφή του ενδεχομένου που μας περιγράφουν, δεν ξεχνάμε ότι είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω και απλά επιλέγουμε από τα στοιχεία του Ω, ποια συμφωνούν με την περιγραφή.

Για την εύρεση της πιθανότητας θα χρειαστεί **α)** να μετρήσουμε τα στοιχεία του ενδεχομένου που θέλουμε καθώς και τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω τα οποία δεν πρέπει να είναι άπειρα **β)** να εξετάσουμε αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Μόνο τότε ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, σύμφωνα με τον οποίο, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε, είναι $P(E)=\frac{\kappa}{\nu}$ (όπου **κ=** το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου που θέλουμε και **ν=** το πλήθος των στοιχείων του **Ω)** ή όπως λέμε, στον αριθμητή βάζουμε πόσα είναι τα ευνοϊκά για μας αποτελέσματα του πειράματος και στον παρονομαστή το πόσα είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα.

Τελικά για την πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου ισχύει : $0 \le P(A) \le 1$ (Διότι $0 \le \kappa \le \nu$)

Την πιθανότητα την αφήνουμε είτε σαν κλάσμα είτε σαν δεκαδικό είτε σε μορφή ποσοστού επί τοις εκατό. παράδειγμα $P(A)=\frac{3}{5}$ ή $P(A)=0{,}6$ ή $P(A)=60\%$

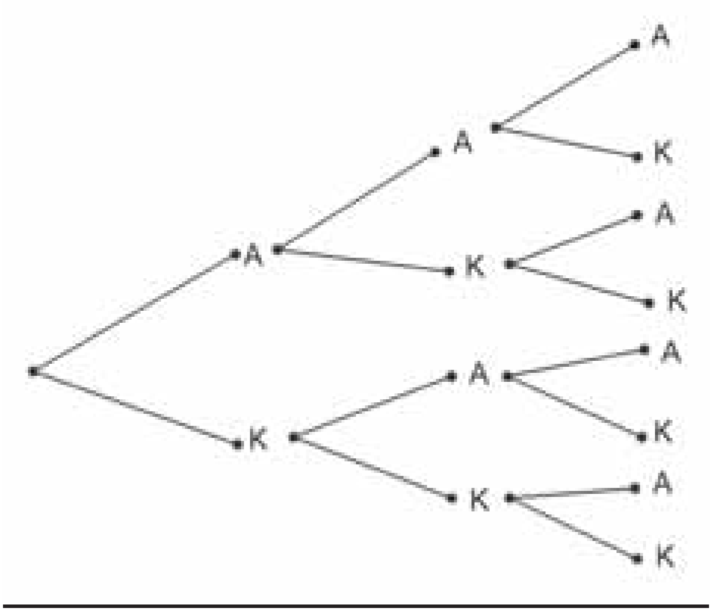
Αν το P(A)=0 σημαίνει ότι το Α δεν περιλαμβάνει κανένα από τα στοιχεία του Ω, τότε το Α λέγεται **αδύνατο** ενδεχόμενο. Αντίθετα αν P(A)=1, το Α λέγεται **Βέβαιο** ενδεχόμενο.

Παράδειγμα 1ο: Εύρεση του Δειγματικού χώρου με δενδροδιάγραμμα

Ποια η πιθανότητα αν εξετάσουμε μια τρίτεκνη οικογένεια, να έχει παιδιά και από τα δύο φύλλα.

Αρχικά θα βρούμε το δειγματικό χώρο με τη βοήθεια του δενδροδιαγράμματος

1^o παιδί 2^o παιδί 3^o παιδί



Άρα **Ω=**{ΑΑΑ,ΑΑΚ,ΑΚΑ,ΑΚΚ, ΚΑΑ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ }

Για το ενδεχόμενο, επιλέγουμε ποια από τα 8 παραπάνω στοιχεία θέλουμε που περιλαμβάνουν ένα τουλάχιστον αγόρι και ένα τουλάχιστον κορίτσι. Αυτά είναι όλα εκτός από δύο το ΑΑΑ, ΚΚΚ άρα είναι 6 τα ευνοϊκά. Η πιθανότητα μια τρίτεκνη οικογένεια να έχει παιδιά και από τα δύο φύλλα επομένως είναι: Ρ(Α)= $\frac{6}{8}=0,75$ ή 75%

Παράδειγμα 2^o: Εύρεση του Δειγματικού χώρου με πίνακα διπλής εισόδου

1) **«Ρίχνουμε δύο ζάρια» πόσα στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος;**
2) **Ένας φίλος σου προτείνει να ρίχνετε δύο ζάρια και αν το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7 να κερδίζει αυτός , ενώ αν είναι 8 να κερδίζεις εσύ. Θα δεχόσουν να παίξεις;**
3) **Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας τα δύο ζάρια, το ένα ακριβώς να είναι 6;**
4) **Ποια η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3 Θεωρείστε ότι τα ζάρια είναι αμερόληπτα δηλαδή οι ενδείξεις 1 έως 6 έχουν ίδια πιθανότητα.**

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

1) Βλέπουμε ότι ο δειγματικός χώρος έχει 36 στοιχεία (6x6)

2) Για να έχουμε άθροισμα 7, υπάρχουν 6 ευνοϊκές περιπτώσεις επομένως η πιθανότητα είναι 6/36 ενώ για το άθροισμα 8 υπάρχουν 5 (ακριβώς κάτω από τα γκρί) επομένως η πιθανότητα είναι 5/36 άρα μικρότερη, που σημαίνει ότι το παιχνίδι είναι άδικο και δεν πρέπει να αποδεχτείς.

3) Ακριβώς ένα 6 βλέπουμε σε 10 περιπτώσεις, επομένως η πιθανότητα είναι 10/36

4) Άθροισμα πολλαπλάσιο του 2 δίνουν τα αποτελέσματα :{(1,1),(1,3), (2,2),(3,1), (1,5),(2,4), (3,3),(4,2), (5,1),(2,6), (3,5),(4,4), (5,3),(6,2), (4,6),(5,5), (6,4),(6,6)} (θα τα βρείτε σε παράλληλες της διαγωνίου με τα γκρί) από αυτά, πολλαπλάσια και του 3 είναι μόνο τα: {(1,5),(2,4), (3,3),(4,2), (5,1),(6,6) } άρα η πιθανότητα είναι: P(A)= $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Παράδειγμα 3^{ο}

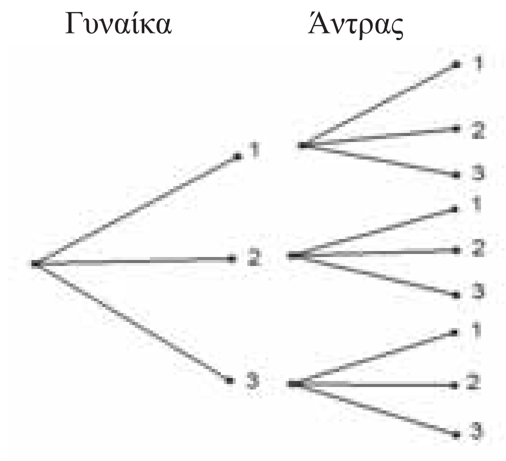
Στην Ιστοσελίδα της ΕΜΥ (**Ε**θνική **Μ**ετεωρολογική **Υ**πηρεσία) Διάβασα ότι το επόμενο Σάββατο η πιθανότητα να βρέξει είναι ίδια με την πιθανότητα να μην βρέξει, το ίδιο και για την επόμενη μέρα την Κυριακή. Να γράψετε το δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο Α: « να βρέξει και τις δύο μέρες του Σαββατοκύριακου». Ποια η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου Α.

Εδώ θα συμβολίσουμε με Β αν βρέξει και Ο αν δεν βρέξει, οπότε Ω={ ΒΒ,ΒΟ,ΟΒ,ΟΟ} και το ενδεχόμενο που θέλουμε είναι Ε={ΒΒ} Άρα **P(A)=** $\frac{1}{4}$ ή 0,25 ή 25%

ΑΣΚΗΣΗ 1^{η}

Δύο άτομα, άγνωστα μεταξύ τους, ένας άντρας και μια γυναίκα, περιμένουν στο ισόγειο ενός κτιρίου που έχει τρεις ορόφους για να μπουν στο ασανσέρ, ποια η πιθανότητα να κατέβουν στον ίδιο όροφο.

ΛΥΣΗ



Εδώ το δενδροδιάγραμμα μας δίνει 9 δυνατά αποτελέσματα τα οποία αποτελούν το δειγματικό χώρο [αν ο ένας κατέβει στον 1^{ο} όροφο και ο άλλος στο 2^{ο}, θα συμβολίσουμε με (1,2)] οπότε Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)(3,2),(3,3) }

Τα ευνοϊκά για μας αποτελέσματα είναι Α={(1,1),(2,2),(3,3)} δηλαδή 3 αποτελέσματα

Οπότε P(A)= $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ή 33,33%

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 7 μπλε, 3 μαύρα και 5 κόκκινα στυλό, ανοίγουμε το συρτάρι και παίρνουμε στην τύχη ένα, ποια η πιθανότητα να είναι μαύρο;

ΛΥΣΗ

όλα τα στυλό είναι 7 + 3 + 5 = 15 τα μαύρα στυλό είναι 3 από τα 15 , άρα P(A)= $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

ή P(A)= 0,2 ή P(A)=20%

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Κάποιος ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι με έξι έδρες και στη συνέχεια ρίχνει ένα αμερόληπτο κέρμα (κεφαλή, γράμματα) ποια η πιθανότητα να φέρουμε έξι στο ζάρι και κεφαλή στο κέρμα;

ΛΥΣΗ

Γράφουμε πρώτα το δειγματικό χώρο, όπου θα συνδυάσουμε κάθε ένδειξη του ζαριού με Κ(Κεφαλή) και Γ(Γράμματα) οπότε

Ω=={(1,Κ),(1,Γ),(2,Κ),(2,Γ),(3,Κ),(3,Γ),(4,Κ)(4,Γ),(5,Κ),(5,Γ),(6,Κ),(6,Γ)}

Τα ευνοϊκά για μας αποτελέσματα είναι Α={(6,Κ)} δηλαδή 1 στοιχείο του Ω.

Επομένως P(A)= $\frac{1}{12}$

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Σε ένα ξενοδοχείο ήρθαν σήμερα 30 τουρίστες. Από αυτούς οι 12 μιλάνε Γαλλικά οι 9 μιλάνε Ισπανικά ενώ πέντε μιλάνε Γαλλικά και Ισπανικά, οι υπόλοιποι μιλάνε μόνο Γερμανικά.

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους 30. Ποια η πιθανότητα να μιλάει:

α) μόνο Γαλλικά

β) Γερμανικά

ΛΥΣΗ

α) μόνο γαλλικά, είναι οι 12 που μιλάνε γαλλικά μείον 5 που μιλάνε γαλλικά και ισπανικά, άρα 7 τουρίστες. επομένως η πιθανότητα να μιλάει μόνο Γαλλικά είναι: P(A)= $\frac{7}{30}$

β) Για τα Γερμανικά, σκεφτόμαστε ως εξής, αν προσθέσουμε αυτούς που μιλάνε γαλλικά με αυτούς που μιλάνε ισπανικά, τότε αυτούς που μιλάνε γαλλικά και ισπανικά τους έχουμε μετρήσει δύο φορές (και με τα γαλλικά και με τα ισπανικά). άρα πρέπει να αφαιρέσουμε πέντε, δηλαδή 12+9 - 5 = 16 οπότε οι υπόλοιποι 30-16=14 θα μιλάνε Γερμανικά.

Οπότε η πιθανότητα να μιλάει Γερμανικά είναι: P(A)= $\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Ρίχνω ένα αμερόληπτο ζάρι (δηλαδή όλες οι πλευρές έχουν ίδια πιθανότητα να έρθουν), ποια η πιθανότητα η ένδειξη του να είναι ρίζα της εξίσωσης: $x^2-9=0$.

ΛΥΣΗ

Είναι εύκολο να βρούμε και το δειγματικό χώρο Ω. Πράγματι Ω ={1,2,3,4,5,6} και για το ενδεχόμενο, λύνουμε την εξίσωση $x^2-9=0$ αυτή γράφεται $(x-3)(x+3)=0$ οπότε $x-3=0$ ή $x+3=0$ και από τις ρίζες +3 και -3, το -3 δεν ανήκει στο Ω ενώ το +3 ανήκει στο Ω άρα Α={3} οπότε Ρ(Α)= $\frac{1}{6}$

ΑΣΚΗΣΗ 6η

Σε ένα pet-shop υπάρχουν 50 άσπρα και μαύρα γατάκια. Επιλέγοντας τυχαία ένα γατάκι η πιθανότητα να είναι μαύρο είναι 30% .

α) Ποια η πιθανότητα να είναι άσπρο;

β) Πόσα είναι τα άσπρα γατάκια;

ΛΥΣΗ

α) Έστω Α: «άσπρο γατάκι» κα Β: «μαύρο γατάκι» δίνεται ότι Ρ(Μ)= 30% επομένως το υπόλοιπο 70% θα είναι άσπρα, δηλαδή Ρ(Α)= 70%

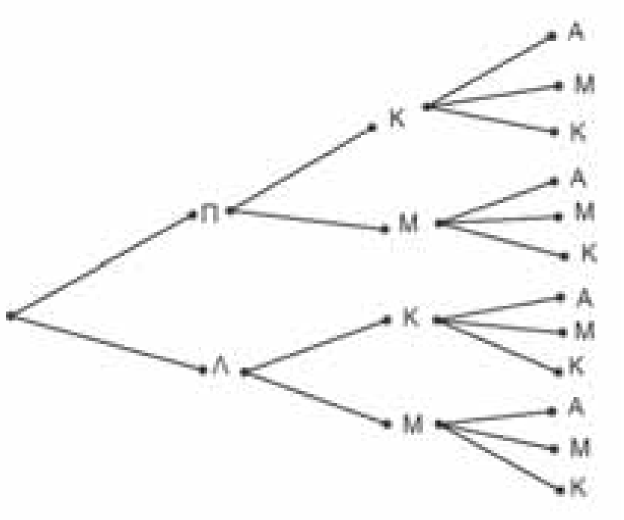
β) το 70% των 50 συνολικά είναι $\frac{70}{100}\cdot 50=35$ άσπρα γατάκια

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Ο Νάσος έχει δύο παντελόνια ένα καφέ και ένα μαύρο επίσης έχει και τρεις μπλούζες μια άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη. Ξεκίνησε σήμερα να πάει βόλτα στην πλατεία ή στο Λιμάνι. Ποια η πιθανότητα ο Νάσος τελικά να πήγε στην πλατεία ντυμένος με μαύρο παντελόνι και μαύρη μπλούζα;

ΛΥΣΗ

Τόπος Παντελόνι Μπλούζα



Εδώ το δενδροδιάγραμμα μας δίνει 12 δυνατά αποτελέσματα τα οποία αποτελούν το δειγματικό χώρο, οπότε:

Ω={(Π,Κ,Α),(Π,Κ,Μ),(Π,Κ,Κ),(Π,Μ,Α),(Π,Μ,Μ),(Π,Μ,Κ),(Λ,Κ,Α),(Λ,Κ,Μ),(Λ,Κ,Κ),
(Λ,Μ,Α),(Λ,Μ,Μ), (Λ,Μ,Κ)}

Τα ευνοϊκά για μας αποτελέσματα είναι Α={(Π,Μ,Μ)} δηλαδή 1 αποτέλεσμα

Οπότε P(A)= $\frac{1}{12}$

ΑΣΚΗΣΗ 8η

Σε ένα δοχείο έχουμε 9 μικρές μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 9 βγάζουμε τυχαία μία μπάλα και μετά μία δεύτερη που την τοποθετούμε δεξιά της, δημιουργώντας έτσι ένα διψήφιο αριθμό (για παράδειγμα αν πρώτα βγάλαμε το δύο και μετά το 5 σχηματίσαμε το 25)

α) Ποια η πιθανότητα ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιος του 5;

β) Ποια η πιθανότητα ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιος του 9;

ΛΥΣΗ

Στην άσκηση αυτή θα αποφύγουμε να γράψουμε το δειγματικό χώρο αλλά απλά να υπολογίσουμε πόσα στοιχεία έχει.

Στη θέση των δεκάδων μπορεί να υπάρχει οποιοδήποτε από τα 9 ψηφία, ενώ στη θέση των μονάδων μπορεί να έχουμε οποιοδήποτε από τα 8 που απέμειναν δηλαδή κάθε ένα από τα 9 αρχικά μπορεί να συνδυαστεί με 8 που απομένουν επομένως δημιουργούν 9x8=72 διψήφιους αριθμούς.

α) Για να είναι ένας αριθμός πολλαπλάσιο του 5 πρέπει να λήγει σε 0 ή 5 και αφού δεν έχουμε 0 θα πρέπει να έχουμε το 5 στη θέση των μονάδων και οποιονδήποτε από τους 8 που μένουν στη θέση των δεκάδων. Άρα θα έχουμε 8 διψήφιους πολλαπλάσια του 5 και η πιθανότητα είναι: P(A)= $\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$

β) για να είναι πολλαπλάσιο του 9 πρέπει το άθροισμα των ψηφίων να είναι 9, οπότε οι αριθμοί θα είναι 18,27,36,45 και οι «ανάστροφοι» τους 81,72,63,54 τελικά είναι 8 διψήφιοι αριθμοί και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι πάλι $\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$.

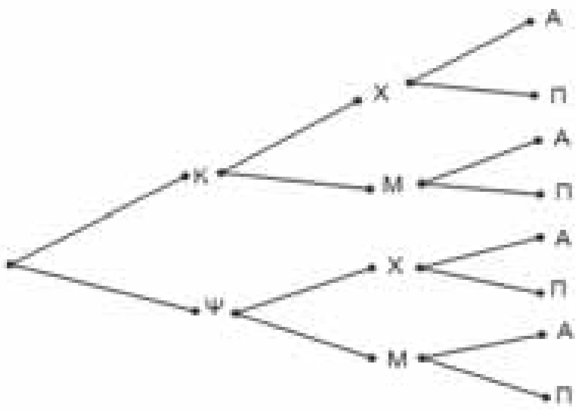
ΑΣΚΗΣΗ 9η

Πήγαμε για φαγητό σε ένα μικρό επαρχιακό ταβερνάκι το οποίο διέθετε για κυρίως πιάτο: κρέας ή ψάρι για σαλάτες, χωριάτικη ή μαρούλι και για φρούτο: αχλάδι ή πεπόνι.

Ποια η πιθανότητα επιλέγοντας ένα πλήρες γεύμα που αποτελείται από κυρίως πιάτο, σαλάτα, και φρούτο να επιλέξουμε ψάρι και για φρούτο αχλάδι; (θεωρείστε ότι όλα είναι εξ ίσου νόστιμα!)

ΛΥΣΗ

Κυρίως πιάτο Σαλάτα φρούτο



Ω={(Κ,Χ,Α),(Κ,Χ,Π)),(Κ,Μ,Α)),(Κ,Μ,Π)),(Ψ,Χ,Α)),(Ψ,Χ,Π)),(Ψ,Μ,Α)),(Ψ,Μ,Π) }

Τα ευνοϊκά για μας αποτελέσματα είναι Α={(Ψ,Χ,Α),(Ψ,Μ,Α)} δηλαδή 2 αποτελέσματα.

Οπότε $P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ ή 25%

ΑΣΚΗΣΗ 10η

Στα play off ενός πρωταθλήματος 2 ομάδες φτάνουν στον τελικό και παίζουν μεταξύ τους τόσους αγώνες ώστε κάποια από τις δύο να πετύχει 2 συνεχόμενες ή 3 συνολικά νίκες ώστε να ανακηρυχθεί πρωταθλήτρια.

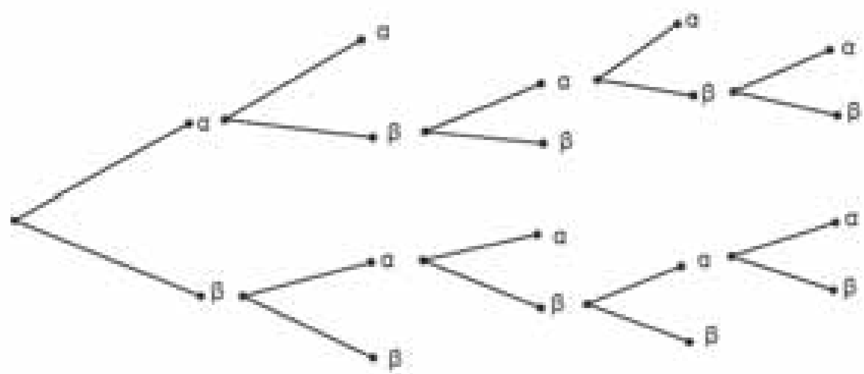
α) Πόσοι το πολύ αγώνες θα γίνουν;

β) Πόσα στοιχεία έχει το ενδεχόμενο να ανακηρυχθεί πρωταθλήτρια μια ομάδα μετά από 3 αγώνες;

ΛΥΣΗ

Συμβολίζουμε με α νίκη της πρώτης ομάδας και β νίκη της δεύτερης.

1ος αγώνας 2ος αγώνας 3ος αγώνας 4ος αγώνας 5ος αγώνας



α) Ω={αα, αβαα, αβαβα, αβαββ, αββ, ββ, βαββ, βαβαβ, βαβαα, βαα} επομένως 10 δυνατά αποτελέσματα και θα γίνουν **5 το πολύ αγώνες** για να έχουμε πρωταθλήτρια ομάδα.

β) Α={αββ, βαα} επομένως 2 στοιχεία.

Γ΄ Τάξη

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

Δημήτρης Διαμαντίδης

Πρόβλημα

Προετοιμασία για τον ημιμαραθώνιο.

Ο Χρήστος και η Ειρήνη προετοιμάζονται για τη συμμετοχή τους στον ημιμαραθώνιο της πόλης τους, ακολουθώντας διαφορετικά μηνιαία προγράμματα προπονήσεων.

Ο Χρήστος ακολουθεί το εξής πρόγραμμα:

- Ξεκινά τρέχοντας μία φορά για 1,5 ώρα.
- Τις επόμενες ημέρες μέχρι να κλείσει μήνας (δηλαδή 30 ημέρες) κάνει μικρότερες σε διάρκεια διαδρομές 36 λεπτών η κάθε μια.

Η Ειρήνη:

- Ξεκινά τρέχοντας μία φορά για 2 ώρες.
- Τις επόμενες ημέρες μέχρι να κλείσει μήνας κάνει μικρότερες σε διάρκεια διαδρομές 30 λεπτών η κάθε μια.

Και οι δύο προπονούνται στο τρέξιμο κάθε 2 ημέρες, δηλαδή μια ημέρα τρέχουν και την επόμενη όχι.

Αν ξεκινήσουν σήμερα τις προπονήσεις τους χωρίς να χάσουν καμία:

(α) Σε πόσες ημέρες θα έχουν τρέξει συνολικά ο Χρήστος και συνολικά η Ειρήνη τον ίδιο χρόνο;

(β) Ποια είναι η διαφορά σε συνολικό χρόνο τρεξίματος μεταξύ τους, στο τέλος των 30 ημερών;

Απάντηση

Ας υποθέσουμε ότι x είναι οι φορές που τρέχει ο Χρήστος από 36 λεπτά ή $\frac{36}{60}=0,6$ ώρες.

Τότε ο συνολικός χρόνος τρεξίματος, σε ώρες, για τον Χρήστο είναι $y=0,6x+1,5$ καθώς τρέχει μία φορά (στην αρχή) για 1,5 ώρες.

Ομοίως, για την Ειρήνη, εφόσον τα 30 λεπτά αντιστοιχούν σε 0,5 ώρες και τρέχει μία φορά, στην αρχή για 2 ώρες, ο συνολικός χρόνος τρεξίματος είναι $y=0,5x+2$.

Εδώ χρειάζεται να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Το x εκφράζει ημέρες προπόνησης, άρα είναι θετικός ακέραιος.
- Η πρώτη προπόνηση μέσα στις 30 ημέρες είναι 1,5 ώρες για τον Χρήστο και 2 ώρες για την Ειρήνη. Το x αντιστοιχεί στις υπόλοιπες προπονήσεις. Έτσι το $x=1$ αντιστοιχεί στην 3^{η} ημέρα από τις 30, γιατί οι προπονήσεις γίνονται κάθε 2 ημέρες. Για τον ίδιο λόγο, οι προπονήσεις γίνονται μόνο τις περιττές ημέρες από τις 30. Άρα το $x=2$ αντιστοιχει στην 5^{η} ημέρα από τις 30, το $x=3$ στην 7^{η} ημέρα, κτλ.
  Δηλαδή, η ν-οστή ημέρα προπόνησης αντιστοιχεί στο $x=\frac{\nu-1}{2}$.
- Έτσι, η τελευταία προπόνηση γίνεται την 29^{η} ημέρα και αντιστοιχεί στο $x=\frac{29-1}{2}=14$, που είναι και η μεγαλύτερη τιμή για το x.

(α) Για να βρούμε μετά από πόσες προπονήσεις ο Χρήστος και η Ειρήνη έχουν τρέξει τον ίδιο χρόνο, αθροιστικά, ψάχνουμε ένα κοινό ζεύγος (x,y) που να επαληθεύει τις δύο παραπάνω γραμμικές εξισώσεις. Άρα λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} y=0,6x+1,5 \\ y=0,5x+2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 0,5x+2=0,6x+1,5 \\ y=0,5x+2 \end{cases}$$

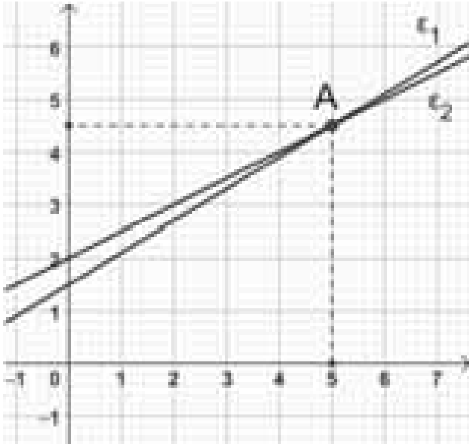
$$\text{ή } \begin{cases} 0,6x-0,5x=2-1,5 \\ y=0,5x+2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 0,1x=0,5 \\ y=0,5x+2 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 10\cdot 0,1x=10\cdot 0,5 \\ y=0,5x+2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=0,5x+2 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x=5 \\ y=0,5\cdot 5+2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=4,5 \end{cases} \text{ ή } (x,y)=(5,\ \ 4,5).$$

Άρα, μετά από $x=5$ προπονήσεις, εκτός από την πρώτη θα έχουν τρέξει και ο Χρήστος και η Ειρήνη από $y=4,5$ ώρες. Αυτό αντιστοιχεί σε $5=\frac{\nu-1}{2}$ ή $\nu=11$ ημέρες. Άρα την 11^{η} ημέρα από τις 30 θα έχουν τρέξει τον ίδιο χρόνο (4,5 ώρες).

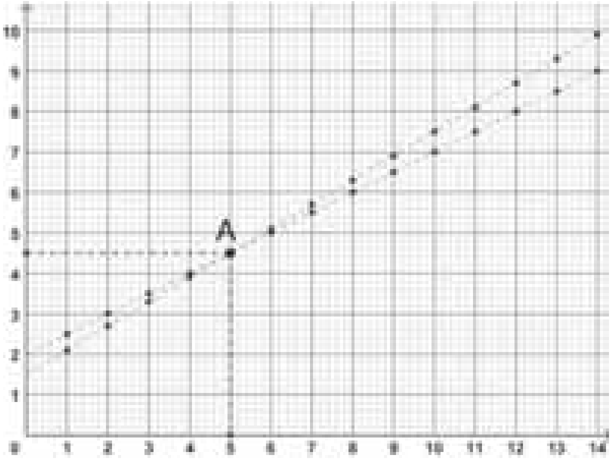
Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε αν σχεδιάσουμε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις γραμμικές εξισώσεις, την (ε_1) για την $y=0,6x+1,5$ και την (ε_2) για την $y=0,5x+2$.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα, το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το $A(5,\quad 4,5)$.

Τονίζουμε ότι οι ευθείες του διαγράμματος αντιστοιχούν στις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος και δεν απεικονίζουν επακριβώς την κατάσταση του προβλήματος. Ωστόσο αναπαριστούν το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε για να απαντήσουμε στο πρόβλημα.

Αν θέλαμε να αναπαραστήσουμε επακριβώς το πρόβλημα, τότε θα είχαμε μόνο σημεία και όχι ευθείες. Επίσης, στη γραφική παράσταση το x θα έπαιρνε τιμές από 1 έως 14, όπως στο παρακάτω σχήμα.



(β) Όπως ήδη αναφέραμε η τελευταία ημέρα του μήνα, που γίνεται προπόνηση είναι η 29^{η}, με $x=14$. Ο Χρήστος στο τέλος του μήνα έχει τρέξει συνολικά $y=0,6\cdot 14+1,5$, δηλαδή 9,9 ώρες. Η Ειρήνη αντίστοιχα έχει τρέξει $y=0,5\cdot 14+2$, δηλαδή 9 ώρες. Άρα ο Χρήστος έχει τρέξει 0,9 ώρες ή αλλιώς 54 λεπτά παραπάνω από την Ειρήνη, στο τέλος των 30 ημερών.

Ένας άλλος τρόπος να απαντήσουμε στο (β) είναι ο παρακάτω.

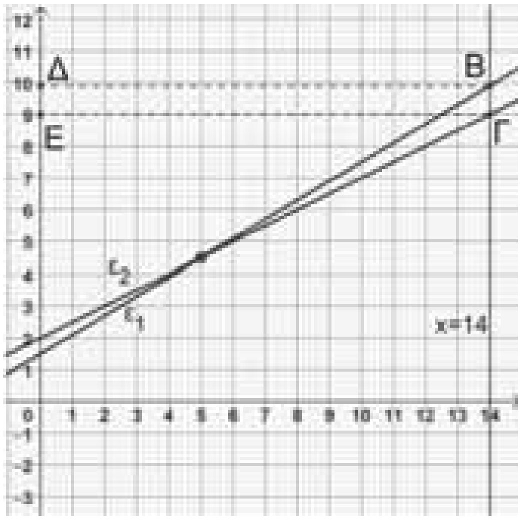
Από την μια προπόνηση στην άλλη ο συνολικός χρόνος τρεξίματος του Χρήστου αυξάνεται κατά 0,6 ώρες και της Ειρήνης κατά 0,5 ώρες. Άρα ο συνολικός χρόνος του Χρήστου αυξάνεται περισσότερο από αυτόν της Ειρήνης κατά $0,6-0,5=0,1$ ώρα.

Μετά την 5^{η} προπόνηση, δηλαδή για $x=5$ και οι δύο έχουν τρέξει το ίδιο, συνολικά. Επειδή γίνονται 14 προπονήσεις σε 30 ημέρες, μένουν άλλες 9 προπονήσεις. Σε αυτές ο συνολικός χρόνος του Χρήστου αυξάνεται περισσότερο από αυτόν της Ειρήνης κατά $9\cdot 0,1=0,9$ ώρες.

Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.

- Σχεδιάζουμε επιπλέον την κατακόρυφη ευθεία $x=14$.
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $x=14$ με τις (ε_1) και (ε_2), τα Β και Γ αντίστοιχα.
- Σχεδιάζουμε κάθετες από τα Β και Γ στον άξονα yy΄ και τα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα.

Το μήκος του ΔΕ, δηλαδή 0,9 αντιστοιχεί στη διαφορά των συνολικών χρόνων Χρήστου και Ειρήνης μετά την 14^{η} και τελευταία προπόνηση στο διάστημα των 30 ημερών.



Επιπλέον ερώτημα: Μπορείτε να απαντήσετε στο (α), αν Χρήστος τρέχει για 42 αντί για 36 λεπτά;

Γ΄ Τάξη

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΡΙΑ

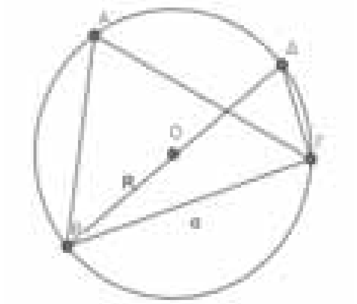
Νόμος ημιτόνων –Νόμος Συνημιτόνων

Γεώργιος Λυμπερόπουλος – Ιάκωβος Μαυρέλης

Γνωρίζουμε ότι από τρία σημεία περνάει ένας μόνο κύκλος, άρα και από τις τρεις κορυφές ενός τριγώνου περνάει ένας ακριβώς κύκλος , που ονομάζεται περιγεγραμμένος κύκλος. Όπως γνωρίζουμε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

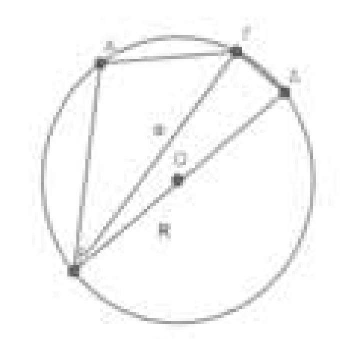
Στο σχήμα 1 έχουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του με κέντρο το Ο. Φέρνουμε τη διάμετρο ΒΔ. Αν το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι R, τότε το μήκος της διαμέτρου ΒΔ, είναι 2R. Οι γωνίες $\hat{A},\hat{\Delta}$ είναι ίσες γιατί είναι εγγεγραμμένες και αντιστοιχούν στο ίδιο τόξο, δηλαδή $\hat{A}=\hat{\Delta}$ άρα και $ημ\hat{A}=ημ\hat{\Delta}$.

Το τρίγωνο ΒΓΔ, είναι ορθογώνιο γιατί η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta=90^0$ επειδή αντιστοιχεί σε ημικύκλιο. Άρα ημΔ $=\dfrac{B\Gamma}{B\Delta}$ ή ημΔ = ημΑ $=\dfrac{\alpha}{2R}$. Το τρίγωνο που έχουμε πάρει είναι οξυγώνιο και με ανάλογο τρόπο θα έχω ημΒ= $\dfrac{\beta}{2R}$ και ημΓ= $\dfrac{\gamma}{2R}$. Από τις σχέσεις αυτές παίρνω: $\dfrac{\alpha}{ημA}=\dfrac{\beta}{ημB}=\dfrac{\gamma}{2Rημ\Gamma}=2R$.(1)



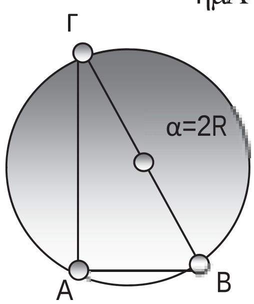
Σχ 1

Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο στη γωνία Α, σχ.2 κάνοντας τη παραπάνω διαδικασία θα δούμε ότι η γωνία στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ ($B\hat{\Gamma}\Delta=90^0$) είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{A}$, δηλαδή $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^0$. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα, άρα: ημΔ = ημΑ= $\dfrac{\alpha}{2R}$. Δηλαδή και στα αμβλυγώνια τρίγωνα έχουμε: $\dfrac{\alpha}{ημA}=\dfrac{\beta}{ημB}=\dfrac{\gamma}{ημ\Gamma}=2R$ (2).



Σχ 2

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, τότε από το Σχ3, βλέπουμε: Η ορθή γωνία Α έχει: ημΑ=1 η υποτείνουσα ΒΓ=α, είναι και διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου άρα α=2R και επομένως ισχύει κι εδώ $\dfrac{\alpha}{ημA}=\dfrac{\alpha}{1}=\alpha=2R$.

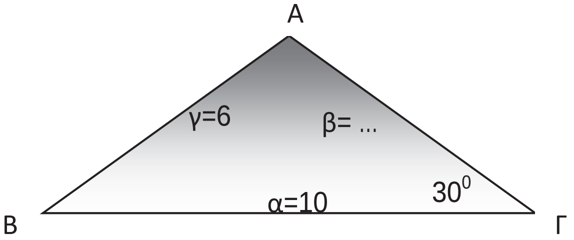


Σχ3

Συμπέρασμα για οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει, ο λόγος κάθε πλευράς προς το ημίτονο ης απέναντι γωνίας είναι σταθερός και ισούται με το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του. Η σχέση:

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$, είναι γνωστή ως νόμος των ημιτόνων και μας δίνει τη δυνατότητα, να υπολογίζω πλευρές και γωνίες ενός τριγώνου , αν γνωρίζω δύο πλευρές και μια γωνία ή δύο γωνίες του και μια πλευρά του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ, να υπολογιστούν η πλευρά ΑΓ=$\hat{\beta}$ και οι γωνίες Α και Β (η γωνία Α είναι αμβλεία).



ΣΧ4

$\eta\mu A=10\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$, από τριγωνομετρικούς πίνακες ή από τον υπολογιστή, βρίσκουμε ότι το $\dfrac{5}{6}$ είναι το ημίτονο της γωνίας $56{,}44^o$ ή της παραπληρωματικής της $180^0–56{,}44^0=123{,}56^0$ που είναι και η δεκτή γιατί η γωνία Α είναι αμβλεία. Άρα $A=123{,}56^0$.

Η γωνία $B=180^0–123{,}56^0–30^0=26{,}44^0$. Από τη σχέση $\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ έχουμε, $\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=12$

και $\beta = 12\cdot\eta\mu B$ άρα $\beta = 12\cdot\eta\mu 26{,}44^0 = 12\cdot 0{,}445 = 5{,}30$

Σε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ(σχ. 5), φέρνουμε το ύψος ου ΒΔ και εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΔΓ, έχουμε: $\gamma^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ (1)

$\alpha^2 = B\Delta^2 + (\beta - A\Delta)^2$ ή

$\alpha^2 = B\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta . A\Delta$ (2)

Αν αφαιρέσω από την (1) τη σχέση 2. Θα πάρω:

$\gamma^2 - \alpha^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - B\Delta^2 - \beta^2 - A\Delta^2 + 2\beta\cdot A\Delta$ ή $\gamma^2 - \alpha^2 = -\beta^2 + 2\beta\cdot A\Delta$ ή

$2\beta\cdot A\Delta=\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ (3)

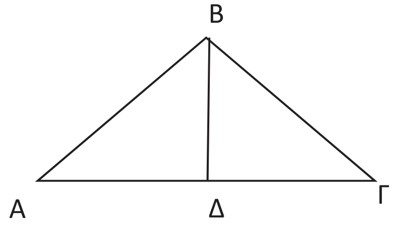
Στο Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, έχω:

$\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{A\Delta}{\gamma}$ άρα $A\Delta = \gamma\sigma\upsilon\nu A$ (4) η σχέση (3) γίνεται: $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ ή

$\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ ομοίως $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$

και $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\alpha}$ (6).

Οι σχέσεις αυτές που συνδέουν τα συνημίτονα των γωνιών ενός τριγώνου με τις πλευρές του είναι γνωστές και ως νόμος των συνημιτόνων.



ΣΧ5

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός τριγώνου με πλευρές, α= 10, β=7 και γ=6

Απάντηση: Από τις (6), έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{7^2+6^2-10^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{49+36-100}{84}=\frac{85-100}{84}=$$

$=\dfrac{-15}{84}=-0{,}178$. Η γωνία που ζητάμε είναι η παραπληρωματική αυτής που έχει συνημίτονο το 0,178 δηλαδή της γωνίας$79{,}75^0$ περίπου.

Άρα $A=180^0–79{,}75^0=100{,}25^0$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{10^2+6^2-7^2}{2\cdot 10\cdot 6}=\frac{100+36-49}{120}=$$

$$\frac{136-49}{120}=\frac{87}{120}=0{,}725$$

άρα $B=43{,}53^0$, περίπου.

Η γωνία $\Gamma=180^0–100{,}25^0–43{,}53^0$ ή $\Gamma=36{,}25^0$.

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των λύσεων είναι συνήθως κατά προσέγγιση και προκύπτουν με τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων, συνήθως όμως με η χρήση υπολογιστών και αριθμομηχανών. Δεν ξεχνώ:

1. Το ημίτονο μιας γωνίας είναι ίσο με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της.

$$\boxed{\eta\mu(90^0-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta}$$

2. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα.

$$\boxed{\begin{array}{l}\eta\mu(180^0-\theta)=\eta\mu\theta\\[6pt]\sigma\upsilon\nu(180^0-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta\end{array}}$$

3.

χ	ημχ	συνχ	εφχ
0^0	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	1	0
30^0	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	∞

4. $ημ^2θ+συν^2θ=1$

5. $εφθ=\frac{ημθ}{συνθ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Α καθώς και την πλευρά ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, στο οποίο γνωρίζουμε ότι ΑΒ=10cm, ΒΓ=9cm και $Γ=80^o$

(**Απ:** ημΑ=0,886, $Α\approx 62^o$ ΑΓ=6,25cm)

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι η γωνία $Γ=135^o$, β=3, $γ=3\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του Τριγώνου ΑΒΓ.

(**Απαντήσεις** $Β=30^o$,$Α=15^o$)

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $Γ=110^o$ ΒΓ=6cm και ΑΒ=5cm να βρείτε:

i) το $συν110^o$ **ii)** το μήκος της πλευράς ΑΓ

(**Απαντήσεις** $συν110^o=-0,34$, $ΑΓ=\sqrt{81,4}\approx$ 9,02cm)

4. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΒΓ=6cm , ΑΓ=7cm και ΑΒ=10cm. Να υπολογιστούν οι γωνίες του.

(**Απαντήσεις** $Β\approx 43^o$ $Γ\approx 101^o$ $Α=36^o$)

5. Αν σ ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Α=30^o$, ΒΓ=5cm, ΑΓ= $5\sqrt{3}$ cm. Να δείξετε ότι, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

(**Υπόδειξη.** Με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων έχουμε: $ημΒ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $Β=60^0$ ή $Β=120^0$ κ.ο.κ).

6. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι σχέσεις

i) α = βσυνΓ + γσυνΒ

ii) β = ασυνΓ + γσυνΑ

ii) γ = ασυνΒ + βσυνΑ

iv) $\frac{1}{βσυνΓ-γσυνΒ}=\frac{α}{β^2-γ^2}$

7. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση

α(ημΒ–ημΓ)+β(ημΓ–ημΑ)+γ(ημΑ–ημΒ)=0

8. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $γ^2=α^2+β^2-αβ$, τότε να αποδείξετε ότι $Γ=60^o$ και αντιστρόφως.

(**Υπόδειξη:** Γνωρίζουμε ότι:

$γ^2=α^2+β^2-2αβ\cdot συνΓ$,εξισώνουμε τις 2 σχέσεις και έχουμε:

$α^2+β^2-αβ=α^2+β^2-2αβ\cdot συνΓ$

ή αβ =2αβ.συνΓ ή $συνΓ=\frac{1}{2}$ κ.ο.κ).

9. Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου να βρείτε τα ημθ, συνθ και εφθ αν α) $θ=135^0$ β) $θ=240^0$ και γ) $θ=330^0$

10. Σε ένα τρίγωνο έχουμε: $Β=45^0$, $Γ=30^0$ και β = 8cm. Να υπολογίσετε:

α) τη πλευρά **β)** το $συν105^0$, χωρίς χρήση υπολογιστή και τριγωνομετρικών πινάκων.

(**Υπόδειξη:** Υπολογίζουμε τη πλευρά ΑΒ=γ, φέρουμε το ύψος ΑΔ υπολογίζουμε τα ΒΔ, ΔΓ και α = ΒΔ+ΔΓ κ.ο.κ το συνΑ)

11. Στη γνωστή σχέση: $ημ^2θ+συν^2θ=1$

α) διαιρέστε όλα τα μέλη της ισότητας με το $συν^2θ$ και αποδείξτε ότι:

$$συν^2θ=\frac{1}{1+εφ^2θ}$$

β) Αν για μια γωνία θ γνωρίζουμε ότι $εφθ=\frac{3}{5}$ να υπολογίσετε το ημθ και το συνθ

12. Γνωρίζοντας ότι ολόκληρος ο κύκλος ισούται με 360^0 ή σε ακτίνια (rad) 2π όπου $π\approx 3,14$ να υπολογίσετε τα:

$$ημ\frac{π}{6},\ ημ\frac{π}{4},\ ημ\frac{π}{3},\ ημ\frac{π}{2},\ συν\frac{2π}{3},\ εφ\frac{3π}{4}$$

84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2024

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων

$$\mathbf{A} = (\mathbf{5^2 - 4^2}) \cdot (\mathbf{2^3 - 2^2 + 1}) + (\mathbf{10^2 - 8^2}) \cdot \mathbf{2024^0},$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31}) \cdot (\mathbf{1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3 \cdot 5^2})$$

και να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{\mathbf{A^{1012}}}{\mathbf{B^{1012}}}$ ως δύναμη με βάση το 3.

Λύση

$$\mathrm{A} = (5^2 - 4^2) \cdot (2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2) \cdot 2024^0$$

$$= (25 - 16) \cdot (8 - 4 + 1) + (100 - 64) \cdot 1 = 9 \cdot 5 + 36 = 45 + 36 = 81 = 3^4.$$

$$\mathrm{B} = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3 \cdot 5^2)$$

$$= (1 + 3 + 9 + 27 - 31) \cdot (1 + 5 + 25 + 125 - 3 \cdot 25) = 9 \cdot 81 = 3^2 \cdot 3^4 = 3^6.$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^2}, \qquad \text{οπότε} \quad \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)^{1012} = \left(\frac{3^4}{3^6}\right)^{1012} = (3^{-2})^{1012} = 3^{-2024}.$$

Πρόβλημα 2.

Η Μαρία πριν να ανοίξουν τα Σχολεία πήγε για ψώνια στην αγορά. Εκεί από τα χρήματα που είχε μαζί της ξόδεψε το $\frac{1}{8}$ των χρημάτων της για να αγοράσει τετράδια και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων της για να αγοράσει βιβλία. Στη συνέχεια αγόρασε ένα φόρεμα με έκπτωση 20% ξοδεύοντας τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που της είχαν απομείνει. Μετά από αυτές τις αγορές η Μαρία διαπίστωσε ότι της είχαν απομείνει 50 ευρώ. Να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα είχε μαζί της η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά.

(β) Ποια ήταν η αρχική τιμή του φορέματος που αγόρασε πριν την έκπτωση.

Λύση

(α) Έστω ότι η Μαρία ξεκίνησε το πρωί με x ευρώ. Τότε πλήρωσε για τετράδια $\frac{x}{8}$ και για βιβλία $\frac{x}{4}$ ευρώ, δηλαδή

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{8} \text{ ευρώ}$$

οπότε της έμειναν

$$x-\frac{3x}{8}=\frac{5x}{8} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε την εξίσωση:

$$x=\frac{3x}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5x}{8}+50 \Leftrightarrow\ x=\frac{3x}{8}+\frac{10x}{24}+50$$

$$\Leftrightarrow 24x=9x+10x+1200 \Leftrightarrow 5x=1200 \Leftrightarrow x=240.$$

Άρα η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά είχε μαζί της 240 ευρώ.

(β) Η Μαρία πλήρωσε για το φόρεμα

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5x}{8}=\frac{10x}{24}=\frac{10\cdot 240}{24}=100 \text{ ευρώ}$$

οπότε η τιμή του πριν την έκπτωση του 20% ήταν

$$100\cdot\frac{100}{80}=\frac{1000}{8}=125 \text{ ευρώ.}$$

2ος τρόπος για το (α) ερώτημα

Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι είχαν απομείνει στη Μαρία $\frac{5x}{8}$ ευρώ.

Επομένως τα 50 ευρώ είναι το $\frac{1}{3}\cdot\frac{5x}{8}=\frac{5x}{24}$, οπότε έχουμε

$$\frac{5x}{24}=50 \Rightarrow 5x=1240 \Rightarrow x=240.$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει υποδιαιρεθεί στα τετράγωνα

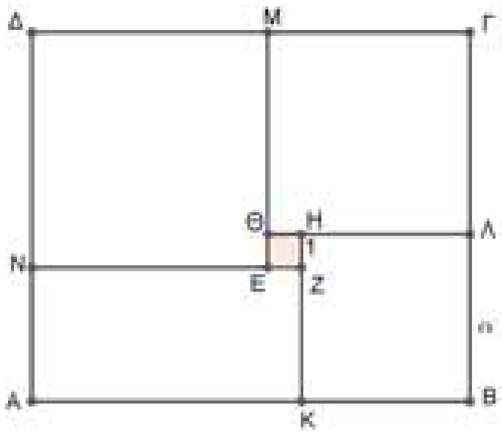
ΚΒΛΗ, ΕΖΗΘ, ΘΛΓΜ, ΝΕΜΔ

και στο ορθογώνιο ΑΚΖΝ.

Δίνεται ότι το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά ίση με 1, το τετράγωνο ΚΒΛΗ έχει πλευρά ίση με α και για το ορθογώνιο ΑΚΖΝ ισχύει η σχέση

$$\mathbf{AK=2\cdot KZ.}$$

Να βρείτε την τιμή του α και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$\Theta\Lambda=\alpha+1,\qquad \mathrm{ME}=\mathrm{M}\Theta+\Theta\mathrm{E}=\Theta\Lambda+\Theta\mathrm{E}=\alpha+2,$$

$$\mathrm{AK}=\mathrm{NZ}=\mathrm{NE}+\mathrm{EZ}=\mathrm{ME}+\mathrm{EZ}=\alpha+3, \mathrm{AN}=\mathrm{KZ}=\alpha-1.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{AK}=2\cdot\mathrm{KZ} \Leftrightarrow \alpha+3=2\cdot(\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha+3=2\alpha-2 \Leftrightarrow \alpha=5.$$

Άρα είναι

$$AB = AK + KB = \alpha + 3 + \alpha = 2\alpha + 3 = 13,$$

$$B\Gamma = B\Lambda + \Lambda\Gamma = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = 11,$$

$$(AB\Gamma\Delta) = 13 \cdot 11 = 143.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους μ, ν έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}.$$

Λύση

(α) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

(β) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμητή του κλάσματος $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο διαιρετών του 2024 η οποία να ισούται με 1. Έχουμε

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23 - 2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} - \frac{2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{1}{88} - \frac{1}{92}.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

(α) $\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta = 1100\alpha + 11\beta = 11 \cdot 100\alpha + 11\beta$

$$= 11 \cdot (100\alpha + \beta) = \text{πολ.}11.$$

(β) Επειδή αριθμός $A = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4 έπεται ότι ο ακέραιος $\overline{\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε πρέπει:

$$\beta = 0 \text{ ή } \beta = 4 \text{ ή } \beta = 8. \qquad (1)$$

Επειδή αριθμός $A = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 9, έπεται ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή $2(\alpha + \beta) \in \{9, 18, 27, 36\}$, οπότε

$$\alpha + \beta = 9 \text{ ή } \alpha + \beta = 18 \qquad (2)$$

- Αν $\beta = 0$ προκύπτει ότι $\alpha = 9$ και $\text{A} = 9900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$.
- Αν $\beta = 4$ προκύπτει ότι $\alpha = 5$ και
$$\text{A} = 5544 = 11 \cdot 504 = 11 \cdot 9 \cdot 56 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = 11 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^3.$$
- Αν $\beta = 8$ προκύπτει ότι $\alpha = 1$ και
$$\text{A} = 1188 = 11 \cdot 108 = 11 \cdot 9 \cdot 12 = 11 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 3^3 \cdot 2^2.$$

Πρόβλημα 2.

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου $\boldsymbol{\nu}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{9}\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{2}} + \mathbf{15}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{10}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{2}}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

$$\text{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu + 2)^2 + 3\nu + 6}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu + 2)^2 + (3\nu + 2) + 4}{3\nu + 2} =$$
$$= 3\nu + 3 + \frac{4}{3\nu + 2}.$$

Άρα έχουμε:

$$\text{A} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3\nu + 2) \mid 4 \Rightarrow 3\nu + 2 \in \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}.$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι: $\nu \in \{-2, -1, 0\}$.

Πρόβλημα 3

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιγνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιγνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιγνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιγνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.
(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιγνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Λύση

(α) Στην πρώτη φάση κάθε ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες 13 δύο φορές 2 φορές, οπότε έχουμε συνολικά $13 + 13 = 26$ αγωνιστικές σε κάθε μία από τις οποίες διεξάγονται $14 : 2 = 7$ παιγνίδια. Έτσι έχουμε στην πρώτη φάση

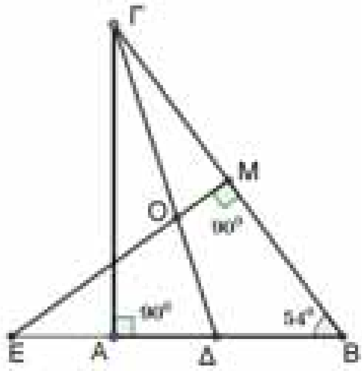
$$26 \cdot 7 = 182 \text{ παιγνίδια.}$$

Ομοίως στον όμιλο των 6 πρώτων ομάδων διεξάγονται: $10 \cdot 3 = 30$ παιγνίδια, ενώ στο όμιλο των υπόλοιπων 8 ομάδων διεξάγονται $4 \cdot 7 = 28$ παιγνίδια.

Άρα συνολικά έχουμε $182 + 30 + 28 = 240$ παιγνίδια.

(β) Αν όλα τα παιγνίδια έληγαν με νίκη μιας ομάδας, τότε θα είχαμε συνολικά το μέγιστο δυνατό αριθμό βαθμών, δηλαδή $240 \cdot 3 = 720$. Επειδή οι συνολικοί βαθμοί ήταν 677, αυτό σημαίνει ότι είχαμε και ισόπαλα παιγνίδια στα οποία οι βαθμοί για τις δύο ομάδες ήταν 2, δηλαδή κάθε ισόπαλο παιγνίδι μείωνε τον αριθμό των βαθμών κατά 1. Άρα τα ισόπαλα παιγνίδια ήταν $720 - 677 = 43$.

Πρόβλημα 4



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^0$ και $\hat{\mathrm{B}} = 54^0$. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας $\hat{\Gamma}$ στο σημείο Ο και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Έστω $\mathrm{A\Gamma} = \beta$, $\mathrm{AB} = \gamma$, $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.
(α) Να αποδείξετε ότι:
(i) $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE}$
(ii) $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Gamma E}$.
(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ συναρτήσει των μηκών των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.
Σημείωση. *Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) (i) Φέρουμε το τμήμα ΟΒ. Επειδή ΟΜ μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ έπεται ότι:

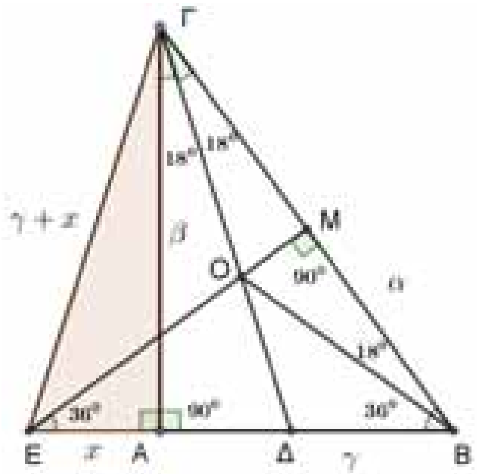
$$\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma}.$$

Τότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{90^0 - 54^0}{2} = 18^0.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}} - \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 54^0 - 18^0 = 36^0.$$



Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΕ έχουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = 90^0 - \hat{\mathrm{B}} = 90^0 - 54^0 = 36^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} \Rightarrow$ ΟΕΒ ισοσκελές με $\mathrm{OB} = \mathrm{OE}$.
Άρα έχουμε αποδείξει ότι: $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE}$.

(ii) Η γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε

$$E\widehat{\Delta}\Gamma = 54^0 + 18^0 = 72^0.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ (ΕΒ = ΕΓ), έχουμε:

$$\Delta\widehat{E}\Gamma = B\widehat{E}\Gamma = 180^0 - 2\cdot\widehat{B} = 180^0 - 2\cdot 54^0 = 72^0.$$

Άρα είναι $E\widehat{\Delta}\Gamma = \Delta\widehat{E}\Gamma$ και συνεπώς το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με ΓΔ = ΓΕ.

(β) Έστω ΑΕ $= x$. Επειδή ΕΜ μεσοκάθετη της ΒΓ θα είναι ΕΓ = ΕΒ $= \gamma + x$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

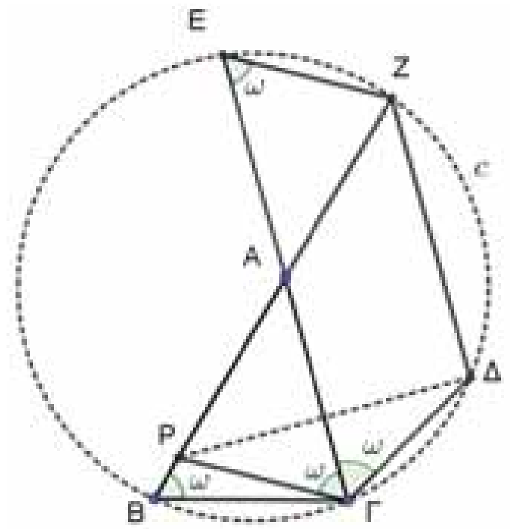
$$\beta^2 + x^2 = (\gamma + x)^2 \Rightarrow \beta^2 + x^2 = \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x \Rightarrow 2\gamma x = \beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow x = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}.$$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 130Α

Γ63. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ. Το σημείο Ρ ανήκει στην πλευρά ΑΒ και είναι τέτοιο ώστε $A\widehat{\Gamma}P = A\widehat{B}\Gamma$. Έστω Δ το συμμετρικό του Ρ ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω Ε το σημείο στο οποίο ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΑΓ.**

(Ρουμανία 2018)

Λύση



Έστω $A\widehat{\Gamma}P = A\widehat{B}\Gamma = \omega$. Τότε, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΑΓ θα είναι:

$$E\widehat{\Gamma}\Delta = A\widehat{\Gamma}P = A\widehat{B}\Gamma = \omega \qquad (1)$$

Από ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΓΔ έχουμε

$$\Gamma\widehat{E}Z = A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}P = \omega \qquad (2)$$

Επομένως, ΕΖ ∥ ΓΡ. Επιπλέον, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Gamma\widehat{E}Z = E\widehat{\Gamma}\Delta = \omega \qquad (3)$$

Επομένως, τα τόξα ΓΔ και ΕΖ είναι ίσα, οπότε ΕΖ = ΓΔ = ΓΡ, όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΑΓ.
Επειδή ΕΖ ∥ ΓΡ και ΕΖ = ΓΡ το τετράπλευρο ΕΖΓΡ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα ΑΕ = ΑΓ.

Ν51. Δίνεται ο αριθμός $\boldsymbol{A = 3\nu^2 + \nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*}$.
(α) Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\boldsymbol{A}$ είναι περιττός, για κάθε $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$.
(β) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος των ψηφίων του $\boldsymbol{A}$.

(Ρουμανία 2018)

Λύση

(α) Ο αριθμός A παίρνει τη μορφή

$$A = 3\nu^2 + \nu + 1 = \nu(3\nu + 1) + 1.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
(i) Αν $\nu = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε $A = 2\kappa(6\kappa + 1) + 1$, περιττός.
(ii) Αν $\nu = 2\kappa - 1, \kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε $A = (2\kappa - 1)(6\kappa - 2) + 1$, περιττός.
(β) Για μικρές τιμές του ν παρατηρούμε ότι για $\nu = 8$, έχουμε $A = 201$ με άθροισμα ψηφίων το 3. Θα αποδείξουμε δεν είναι δυνατόν το άθροισμα των ψηφίων του A να είναι 1 ή 2.
Πράγματι, επειδή ο A είναι περιττός, δεν μπορεί να πάρει τις μορφές

$$10^\kappa \text{ ή } 2 \cdot 10^\kappa \text{ ή } 10^\kappa + 10^\lambda, \kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*,$$

οι οποίες δίνουν αριθμούς με άθροισμα ψηφίων 1 ή 2.
Έτσι μένει προς εξέταση η μορφή

$$A = \nu(3\nu + 1) + 1 = 10^\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \nu(3\nu + 1) + 1 = 10^\kappa \Leftrightarrow \nu(3\nu + 1) = 2^\kappa \cdot 5^\kappa.$$

Επειδή $\nu < 3\nu + 1$ και $(\nu, 3\nu + 1) = 1$, έπεται ότι:

$$\nu = 2^\kappa \text{ και } 3\nu + 1 = 5^\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Για $\kappa = 1$ προκύπτει ότι $\nu = 2$ και $7 = 5$, άτοπο. Για $\kappa \geq 2$, έχουμε:

$$5^\kappa - 1 > 4^\kappa - 1 = 2^{2\kappa} - 1 = (2^\kappa - 1)(2^\kappa + 1) \geq 3 \cdot (2^\kappa + 1) > 3\nu,$$

οπότε δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα $3\nu + 1 = 5^\kappa$.

Ασκήσεις για λύση

Α77. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \geq 0.$$

Ν52. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους μ, ν που ικανοποιούν την ισότητα

$$\nu(\nu + 1) = 3^\mu + \Sigma(\nu) + 1182,$$

όπου $\Sigma(\nu)$ είναι το άθροισμα των ψηφίων του ν.

Γ64. Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω ρ σημείο του τμήματος ΟΓ και έστω Q το σημείο τομής των ευθειών ΜΡ και ΒΓ. Η παράλληλη από το Ο προς την ευθεία ΜΡ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Ν και Q είναι συνευθειακά, αν, και μόνον αν, το σημείο Ρ είναι το μέσο του ΟΓ.

Τα Δίσεκτα Έτη και η $29^{η}$ Φεβρουαρίου

Παναγιώτης Χριστόπουλος, Παντελής Γρυπάρης

Ο χρόνος, στη μαθηματική του διάσταση, είναι μια ευθεία γραμμή που εκτείνεται προς το παρελθόν και προς το μέλλον. Βέβαια οι άνθρωποι με διάφορες κοσμοθεωρίες προσπάθησαν να βάλουν αρχή και τέλος στην ευθεία. Εμείς ξεκινάμε από κάποιο σημείο αυτής της ευθείας και πηγαίνουμε μόνο προς το μέλλον, προς τα πίσω δεν μπορούμε να κάνουμε ούτε βήμα. Ο χρόνος πάντα κυλάει μπροστά, και λέγεται ότι είναι η μέτρηση της φθοράς. Ο άνθρωπος από τα πολύ παλιά χρόνια προσπάθησε να «μετρήσει τον χρόνο», δηλαδή προσπάθησε να μετρήσει:

α) **το διάστημα από μια ανατολή του Ήλιου μέχρι την άλλη.**

β) **το διάστημα από τη μια Νέα Σελήνη μέχρι την άλλη.**

γ) **το διάστημα από τη μια Άνοιξη μέχρι την άλλη.**

Το πρώτο διάστημα είναι μια πλήρης περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της και ονομάστηκε **ημέρα** (ημερόνυκτο) και χωρίστηκε μάλλον από τους Βαβυλώνιους σε 24 ώρες.

Το δεύτερο διάστημα είναι μια περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη και ονομάστηκε **μήνας.**

Το τρίτο διάστημα είναι μια περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο και ονομάστηκε **έτος.**

Τα δύο πρώτα σχεδόν εύκολα τα μέτρησαν, όμως το έτος; Αυτό ήταν ένα πολύ δύσκολο θέμα, γι' αυτό Μαθηματικοί και Αστρονόμοι έκαναν μεγάλες προσπάθειες μέχρις ότου δώσουν τις ακριβείς μετρήσεις. Ακόμα περισσότερα χρόνια πέρασαν μέχρι να γίνουν αξιόπιστα ημερολόγια και αποδεκτά από όλες σχεδόν τις χώρες.

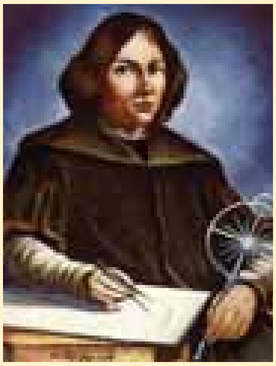
Πρώτα δημιούργησαν διάφορα όργανα μέτρησης όπως το ηλιακό ρολόι, τον αστρολάβο του Ιππάρχου, το μηχανισμό των Αντικηθύρων, μέχρι να φτάσουμε στα σημερινά ωρολόγια και τα ατομικά ωρολόγια που μετρούν εκατομμυριοστά του δευτερολέπτου.

Η εβδομάδα είναι μονάδα του χρόνου ίση με συνεχόμενα επτά ημερόνυκτα. Ο αριθμός 7 ήταν ιερός για πολλούς λαούς, άγνωστο γιατί, επτά θαύματα, επτά επί Θήβας, επτά μυστήρια, κλπ. Δεν έχει καμία σχέση με τα ημερολόγια ούτε με κάποια αστρονομική περίοδο. Καθιερώθηκε άγνωστο πότε, υπήρχε από παλιά σε όλους τους λαούς και είχε να κάνει με την εργασία και την ανάπαυση (Γένεσις) «ο θεός δημιούργησε σε 6 ημέρες τον κόσμο και την έβδομη αναπαύτηκε». Στο Εβραϊκό ημερολόγιο αργία ήταν το Σάββατο και αργότερα οι Χριστιανοί όρισαν την Κυριακή(πρώτη μέρα του Κυρίου). Οι άλλες μέρες ήταν 2η, 3η, 4η, 5η, και η Παρασκευή ονομάστηκε έτσι από τους Εβραίους ως προετοιμασία για το Σάββατο. Οι Αιγύπτιοι έδιναν στις ημέρες πλανητικές ονομασίες που δεν τις κράτησαν στο Βυζάντιο, αλλά υπάρχουν και σήμερα σε χώρες της Δύσης, Saturday(ημέρα του Κρόνου), Sunday (ημέρα του Ήλιου).

Αρχικά οι άνθρωποι πίστευαν ότι οι τροχιές των ουρανίων σωμάτων ήταν κυκλικές, γι' αυτό οι Βαβυλώνιοι υπέθεσαν ότι ο Ήλιος κάθε μέρα προχωρά κατά μια μοίρα δηλαδή ότι το έτος έχει 360 μέρες. Αφού πέρασαν κάποια χρόνια, διαπίστωσαν ότι ενώ ήταν Άνοιξη το ημερολόγιό τους έδειχνε ακόμα Χειμώνα. Οι Αρχαίοι Έλληνες και οι Αιγύπτιοι υπολόγισαν το έτος σε 365 μέρες και 6 ώρες. Βέβαια τα πρώτα ημερολόγια δεν ήταν ηλιακά αλλά σεληνιακά. Χώριζαν το χρόνο σε 12 μήνες των 29 και 30 ημερών όσο είναι ο χρόνος από τη μια Νέα Σελήνη μέχρι την άλλη(29,5 μέρες).

Όλα άλλαξαν όταν ο **Κοπέρνικος** μίλησε για το ηλιοκεντρικό σύστημα, ο **Κέπλερ** για τις ελλειπτικές τροχιές των πλανητών, ο **Νεύτωνας** για την βαρύτητα και ο **Γαλιλαίος** για το τηλεσκόπιο.

Πολλά ημερολόγια χρησιμοποίησαν και χρησιμοποιούν οι λαοί μέχρι σήμερα. Στην αρχαία Ελλάδα δεν υπήρχε ένα ενιαίο κράτος αλλά πολλά κράτη (πόλεις ή βασίλεια) και κάθε κράτος είχε το δικό του ημερολόγιο προσαρμοσμένο στις δικές του ιδιαίτερες παραδόσεις και βέβαια ήταν Σεληνιακά. Περίπου όλα ήταν παρόμοια με το **Αττικό ημερολόγιο** που είχαν οι Αθηναίοι. Είχε 12 μήνες όπως έχουμε και εμείς σήμερα, αλλά η χρονολόγηση των ετών πριν από τον $4^{ο}$ π.Χ. αιώνα γινόταν με βάση τις Ολυμπιάδες. Οι Ολυμπιακοί αγώνες διεξάγονταν μετά το θερινό ηλιοστάσιο, κάθε τέσσερα χρόνια και συμμετείχαν όλα τα κράτη μέλη. Η τετραετία αυτή ονομαζόταν «πενθετηρίς».



Οι πενθετηρίες ονομάζονταν με τον αύξοντα αριθμό της κάθε Ολυμπιάδας και τις χρησιμοποιούσαν ως χρονική αναφορά. Η πρώτη αναφερόμενη πενθετηρία ήταν το 776 π.Χ., δηλαδή ξεκινάει το καλοκαίρι του 775 π.Χ., σύμφωνα με το σημερινό ημερολόγιο.

Η αρχή του έτους ήταν μεταξύ χειμώνα και Άνοιξης, την 1η Μαρτίου.

Κάθε μήνας ήταν αφιερωμένος σε έναν ή δύο θεούς του Ολύμπου και άρχιζε με την εμφάνιση της Νέας Σελήνης. Κάθε τρία χρόνια πρόσθεταν και ένα μήνα ακόμα για να συμβαδίζουν με τις εποχές και ήταν αφιερωμένος στον Ποσειδώνα. Ο πλέον τιμημένος θεός ήταν ο Απόλλωνας στο όνομά του είχαν 5 μήνες αφιερωμένους, 3 στην Άρτεμη, 2 στο Δία και από έναν στην Ήρα, Αθηνά Διόνυσο, Ποσειδώνα.

Η ημέρα για τους αρχαίους Έλληνες αρχίζει κατά την δύση του ηλίου κι όχι όπως σήμερα τα μεσάνυχτα. Αυτό ακολούθησαν οι Βυζαντινοί και σήμερα το εφαρμόζουν στο Άγιο Όρος.

Το Αττικό ημερολόγιο πήρε την τελική του μορφή το 432 π.Χ. από το Μέτωνα, το οποίο αργότερα διόρθωσε ο Κάλλιππος και ο Ίππαρχος.

Είχαν τότε δύο ημερολόγια το κρατικό και το θρησκευτικό. Το θρησκευτικό ακολουθεί τις φάσεις της Σελήνης και έχει διάρκεια 354 ημέρες(29,5x12) ενώ το ηλιακό έχει 365 περίπου. Με την προσθήκη ενός μήνα κάθε 3 χρόνια στο θρησκευτικό γινόταν ο συγχρονισμός σε ένα ηλιοσεληνιακό έτος. Οι Αθηναίοι ένωσαν αυτά τα δύο ημερολόγια τον 5ου αιώνα π.Χ. .

Ο **Μηχανισμός των Αντικυθήρων**, είναι ένα πολύπλοκο αστρονομικό όργανο-υπολογιστής, του $2^{ου}$ αιώνα π.Χ.. Ήταν προγραμματισμένος να βρίσκει ηλιακά και σεληνοηλιακά έτη, να βρίσκει τα έτη των Ολυμπιάδων, τις χρονικές περιόδους διάρκειας 19 ετών, 76 ετών, 18 ετών και 54 ετών, κύκλοι Μέτωνα και Κάλλιπου. Ο Μέτωνας πρώτος μέτρησε ότι σε 19 έτη ή 235 μήνες ή 6940 μέρες επαναλαμβάνονται τα φαινόμενα Σελήνης και Ηλίου(ηλιακές και σεληνιακές εκλείψεις, κλπ). Ο Κάλλιπος συνέχισε το έργο του Μέτωνα, και 4πλασίασε τον κύκλο σε 76 έτη, με μία λιγότερη ημέρα.(ο Μετωνικός κύκλος υπερεκτιμά το έτος κατά 5 λεπτά, ο κύκλος του Καλλίπου το υποεκτιμά κατά 11 λεπτά). Ο Μέτωνας εγκατέστησε στην Πνύκα ηλιοτρόπιο, τα θεμέλια του οποίου είναι ακόμα ορατά, με το οποίο προσδιόριζε τις ημερομηνίες των ισημεριών και τα ηλιοστάσια. Η ετήσια φαινομενική μετακίνηση του ήλιου στον ορίζοντα είναι τόξο 60°, το μέσο του τόξου με το ηλιοτρόπιο είναι στην ευθεία που διέρχεται από την Ακρόπολη. Την περίοδο αυτή του Μέτωνα την ονομάζουμε **κύκλο της Σελήνης.** Το ημερολόγιο αυτό των αρχαίων Ελλήνων ίσχυε μέχρι το 45 π.Χ. που έγινε το Ιουλιανό ημερολόγιο.

Το Ιουλιανό ημερολόγιο

Με εντολή του Ρωμαίου αυτοκράτορα **Ιουλίου καίσαρα** το 45 π.Χ. (το 709 από κτίσεως Ρώμης), καθιερώθηκε το λεγόμενο **«Ιουλιανό Ημερολόγιο».** Το ημερολόγιο αυτό έφτιαξε ο Έλληνας αστρονόμος **Σωσιγένης της Αλεξάνδρειας.** Ο Σωσιγένης πρόσθεσε στο ημερολόγιο μια μέρα (6ώρες χ 4 =1 μέρα) κάθε 4 χρόνια, την 29η Φεβρουαρίου και τα έτη αυτά αντί 365 ημέρες είχαν 366 και ονομάστηκαν **δίσεκτα.**[1]

Οι ημέρες του έτους δεν ήταν δυνατόν να μοιραστούν εξ ίσου στους **12** μήνες διότι ο αριθμός 365 δεν είναι πολλαπλάσιο του **12**. Επίσης το 365 δεν είναι πολλαπλάσιο του **7** γι' αυτό στις ίδιες ημερομηνίες από έτος σε έτος δεν αντιστοιχεί ίδια μέρα. (4 μήνες έχουν 30 μέρες, 7 μήνες 31 ημέρες και ένας 28 ή 29)

Οι άνθρωποι τότε μετρούσαν τα χρόνια με αρχή κάποιο μεγάλο γεγονός και επειδή για τους Ρωμαίους το κτίσιμο της Ρώμης ήταν μεγάλο γεγονός, μετρούσαν τα χρόνια **από κτίσεως της Ρώμης**. Όμως η γέννηση του Χριστού ως μεγαλύτερο γεγονός (αφού είχε επικρατήσει ο Χριστιανισμός) άλλαξε πάλι την αρχή για το μέτρημα των χρόνων.

Το έτος **754 *από κτίσεως Ρώμης*** ορίστηκε ως **Primo Anno Domini** δηλαδή **<u>πρώτο έτος του Κυρίου</u> 1 μ.Χ.** . Αυτό έγινε το 1287 *από κτίσεως Ρώμης* από το Σκύθη μοναχό και βιβλιοθηκάριο στο Βατικανό, Διονύσιο Μικρό. Ο Διονύσιος Μικρός το έτος 1287 *από κτίσεως Ρώμης* με υπολογισμούς του το ονόμασε 533 μ.Χ. .

Ακόμη ο Διονύσιος ο Μικρός θεώρησε πως ο Χριστός γεννήθηκε ημέρα Κυριακή (μέρα 0) και η επόμενη μέρα μετρήθηκε ως Δευτέρα 1η Ιανουαρίου του έτους 1 μ.Χ. . Φυσικά ότι δεν χρησιμοποίησε το έτος μηδέν (0) δεν ήταν λάθος του, αφού ο αριθμός μηδέν δεν είχε χρησιμοποιηθεί ακόμη. Το μηδέν ως αριθμός άρχισε να χρησιμοποιείται για πρώτη φορά περίπου το 1200 μ.Χ. .

Επίσης έγινε και μεταφορά της πρωτοχρονιάς από την 1η Μάρτη, την 1η Ιανουαρίου που ήταν οι Ρωμαϊκές καλένδες. Το ημερολόγιο αυτό ακολούθησαν και στο Βυζάντιο μόνο που για φορολογικούς λόγους είχαν την πρωτοχρονιά την 1η Σεπτέμβρη που ήταν η αρχή του εκκλησιαστικού έτους και ισχύει μέχρι σήμερα. Όμως για το λαό η πρωτοχρονιά ήταν την 1η Ιανουαρίου.

Ο χρόνος των δίσεκτων ετών παραξένευε, τους ανθρώπους, ιδιαίτερα παλιότερα πολλοί άνθρωποι είχαν διάφορες προκαταλήψεις για τα δίσεκτα χρόνια, τους ήταν κάτι το παράξενο κάτι που κρύβει άσχημα πράγματα για τη ζωή τους, γι' αυτό π.χ. τα δίσεκτα έτη δεν παντρεύονταν.

Το σημερινό Γρηγοριανό ημερολόγιο

Όμως η διάρκεια του έτους στο Ιουλιανό ημερολόγιο υπολογίστηκε 11,22 λεπτά περισσότερα. Ο Αστρονόμος **Ίππαρχος** υπολόγισε το έτος σε 365,242 μέρες δηλαδή 365 μέρες, 5 ώρες, 48 λεπτά και 47 δευτερόλεπτα. Γι' αυτό ο πάπας Γρηγόριος XIII (13ος) το 1582 μ.Χ. έδωσε εντολή για νέα διόρθωση του ημερολογίου.

Το έργο αυτό ανέθεσε στον αστρονόμο **Lilio** (Λίλιο). Να φτιάξει δηλαδή ημερολόγιο σύμφωνα με τις μετρήσεις του Ίππαρχου, 11 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα μικρότερο του Ιουλιανού. Ο Λίλιο διαπίστωσε ότι κάθε 400 χρόνια μετρούσαν 3 ημέρες περισσότερες και κάνει τη διόρθωση αυτή με τον εξής τρόπο:

α) **αφαιρεί** κάθε 400 χρόνια 3 μέρες. ***Ορίζει να μην είναι δίσεκτα τα έτη των αιώνων που ο αιώνας δεν διαιρείται με 4.*** Δηλαδή τα έτη 1700,1800,1900,δεν ήταν δίσεκτα όπως δεν θα είναι και τα 2100,2200,2300.

β) **αφαιρεί** μία ακόμη ημέρα κάθε 4.000 χρόνια δηλαδή τα έτη 4.000,8.000,12.000,16.000 που σύμφωνα με το α) θα ήταν δίσεκτα , δεν θα είναι δίσεκτα .

και γ) **αφαιρεί** μία ακόμη ημέρα κάθε 20.000 χρόνια, από τα έτη 20.000,40.000, ..., μ.Χ. θα αφαιρεθούν **2** ημέρες δηλαδή **ο Φεβρουάριος το έτος 20.000 μ.Χ. θα έχει 27 ημέρες!!!. Αν δεν έχει αλλάξει μέχρι τότε το ημερολόγιο λόγω επιβράδυνσης της Γης, ή αν οι άνθρωποι πάνε σε άλλο πλανήτη και πρέπει να κάνουν πάλι από την αρχή το ημερολόγιο του πλανήτη (π.χ. του Άρη).**

Το Γρηγοριανό Ημερολόγιο εφαρμόστηκε στην Ελλάδα το **1923 την 16η Φεβρουαρίου** που ονομάστηκε 1η Μάρτη γιατί είχαν μέχρι τότε χαθεί 13 ημέρες. Κάποιοι που δεν ακολουθούν το νέο ημερολόγιο ονομάζονται **παλαιοημερολογίτες.**

Πέρασαν λοιπόν 2024 χρόνια από τη γέννηση του Χριστού μέχρι σήμερα, πόσα χρόνια όμως πέρασαν από την παρουσία του ανθρώπου στη Γη μέχρι τη γέννηση του Χριστού;

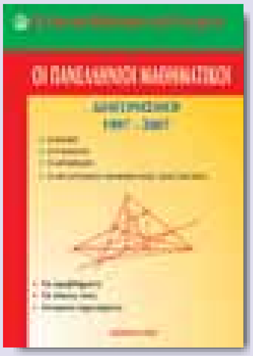
Πολλά, άλλα με ημερολόγια και άλλα χωρίς!

[1] Δίσεκτα γιατί παλιότερα την ημέρα αυτή κάθε 4 έτη την πρόσθεταν στις 6 Φλεβάρη(δις έκτη)..

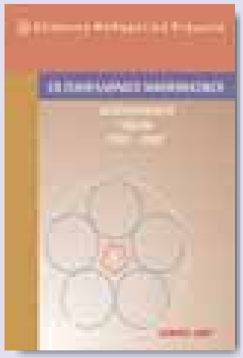
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

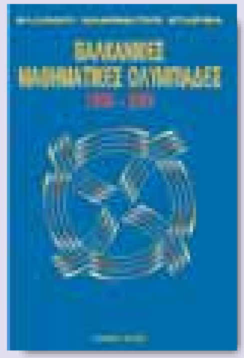
Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

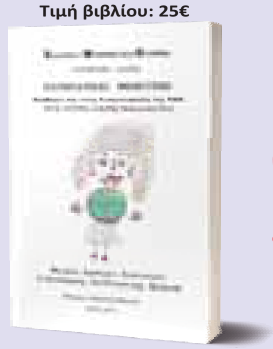
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

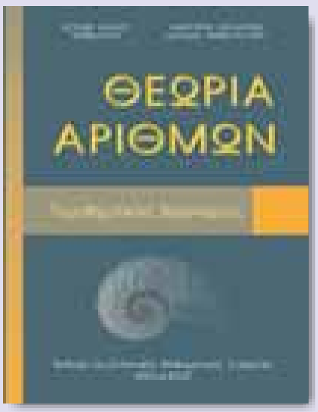


2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

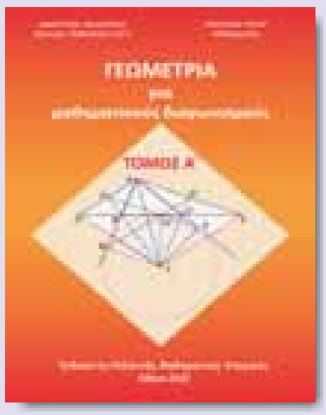
Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



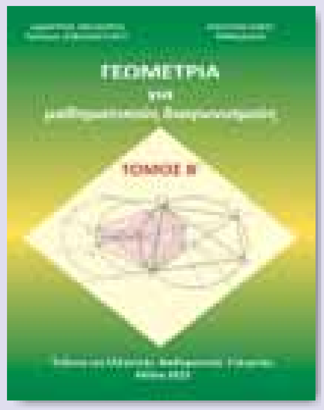
Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

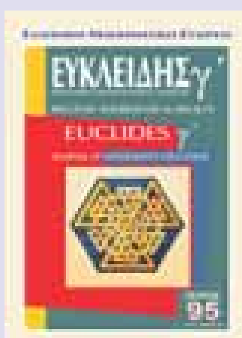
Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr