133

Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024 ευρώ 3

5 μετάλλια

28th JBMO

Έγινε στην **Τουρκία**
25 - 30 Ιουνίου 2024

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 133

Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτεμβριος 2024

Τιμή Τεύχους 3,00 Εύρω

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Σας ευχόμαστε ολόψυχα η νέα σχολική χρονιά **2024-25** να είναι η καλύτερη. Τα σχολικά χρόνια είναι από τα **πιο όμορφα στη ζωή του ανθρώπου. Συνεργαστείτε** με τους **συμμαθητές σας, δημιουργήστε, χαρείτε, ανακαλύψτε τη γνώση και τις πραγματικές αξίες της ζωής. Συνεργαστείτε** με τους **καθηγητές σας**. Μη **σπαταλάτε** το χρόνο σας **αξιοποιήστε** τον διαβάζοντας **βιβλία** και **περιοδικά**.

Το περιοδικό μας **ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄** θα είναι ο φίλος σας στα **μαθηματικά.** Πολλοί νέοι και **αξιόλογοι** καθηγητές που διδάσκουν σε διάφορα σχολεία και φροντιστήρια, **συμμετέχουν** στην επιτροπή του περιοδικού και με τα **άρθρα** τους **τονίζουν** τα πιο **σημαντικά θέματα κάθε κεφαλαίου**.

Επικοινωνήστε με το περιοδικό, πείτε μας την άποψή σας, στείλτε μας τις εργασίες σας, τις απορίες σας ή ότι άλλο επισημαίνετε στα μαθηματικά.

Καλή πρόοδο, καλή σχολική Χρονιά.

Από τη Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Ιππίας ο Ηλείος η Αρχαία Ολυμπία και οι αγώνες

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Το Νοέμβρη του 2024 θα διεξαχθεί το 39ο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στην Αρχαία Ολυμπία από το παράρτημα του Νομού Ηλίας που φέρει το όνομα «Ιππίας ο Ηλείος».

Ποιος ήταν ο Ιππίας;

Ο Ιππίας ο Ηλείος ήταν σοφιστής τον 5ο π.Χ. αιώνα(443-399), ήταν μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος, σύγχρονος με το Σωκράτη και τον Πρωταγόρα. Δίδαξε στην Αθήνα και γνωστά έργα του είναι ο «Τρωικός λόγος», «Ολυμπιονικών αναγραφή» και «Εθνών ονομασίες». Σημαντικές πληροφορίες για τον Ιππία παρέχονται από τους διαλόγους του Πλάτωνα «Ιππίας μείζων» και «Ιππίας ελάσσων». Ο Ιππίας ήταν η πλέον χαρακτηριστική περίπτωση σοφιστή που αποζητούσε την ολοκλήρωσή του μέσα στην παντογνωσία και την παντεχνία. Ήταν ο σπουδαιότερος από τους σοφιστές και παρείχε απλόχερα στους μαθητές του κάθε λογής εξειδικευμένες γνώσεις. Ο Ιππίας, είχε καταγωγή από την Ήλιδα, έκανε πολλά ταξίδια σε όλο τον τότε ελληνικό κόσμο, εκπροσώπησε την πατρίδα του σε διάφορες αποστολές και απέκτησε μεγάλη φήμη με τις ομιλίες του. Η εμφάνισή του ήταν ξεχωριστή, επιβλητική, με τον πορφυρό μανδύα που φορούσε πήγαινε στην κοντινή Ολυμπία, σαν τους μεταγενέστερους διάσημους των Αυτοκρατορικών Χρόνων.

Το ακροατήριο του το προσφωνεί πάντα ως εξής: ***συγγενείς τε και οικείοι και πολίτες φύσει, ου νόμω***.

Με αυτό ήθελε να υπογραμμίσει την αντίθεση ανάμεσα στη φύση και στο νόμο, ότι η φύση ενώνει το όμοιο με το όμοιο, αλλά ο νόμος ωσάν τύραννος, καταδυναστεύει σε πολλά τη φύση. Δηλαδή ότι η φύση έχει πραγματική αξία, ενώ ο νόμος επιβάλλει στους ανθρώπους απαράδεκτες διακρίσεις και διαχωρισμούς.

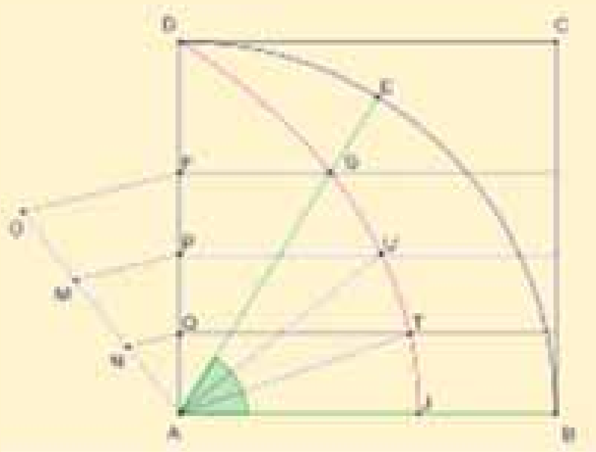
Από τον Πρωταγόρα του Πλάτωνα ξέρουμε ότι ο Ιππίας ασχολήθηκε ακόμα και με το έπος, την τραγωδία, το διθύραμβο, αλλά και την πεζογραφία. Βέβαια έκανε και ένα πολύ σημαντικό έργο για την ιστορία, την καταγραφή των ονομάτων όλων των ολυμπιονικών από 776 π.Χ. μέχρι των ημερών του.

Πρώτος ο Ιππίας με την ενασχόλησή του, με πληθώρα γνωστικών αντικειμένων (αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία, γραμματική, ρητορική, διαλεκτική, μουσική) μας οδηγεί σε αυτό που σήμερα λέμε εγκυκλοπαιδικές γνώσεις. Είχε μνημονικές τεχνικές και γι’ αυτό είχε εκπληκτική μνήμη που του επέτρεπε να συγκρατεί πολλές γνώσεις.

Ο Ιππίας ασχολήθηκε και με τα μαθηματικά και όπως αναφέρει ο Πρόκλος σε κάποιο σχόλιο του, ο Ιππίας ασχολήθηκε με τη Γεωμετρία και δοξάστηκε.

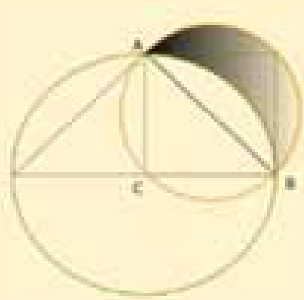
Τριχοτόμηση γωνίας με χρήση της τετραγωνίζουσας.

Στον Ιππία αποδίδεται η λύση της διαίρεσης μιας γωνίας σε οιονδήποτε αριθμό ίσων μεταξύ τους γωνιών. Το γενικό αυτό πρόβλημα έχει τη ρίζα του σε ένα πιο συγκεκριμένο, αυτό της τριχοτόμησης μιας γωνίας. Η διχοτόμηση μιας γωνίας είχε στην αρχαιότητα γνωστή γεωμετρική λύση με γνώμονα και διαβήτη, όμως η τριχοτόμηση ήταν αδύνατη. Ο σοφιστής Ιππίας έδειξε πως το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη χρήση μιας καμπύλης γραμμής, που την ονομάζουμε τετραγωνίζουσα και σήμερα λέμε **τετραγωνίζουσα του Ιππία**. Ο Δεινόστρατος μέσω της τετραγωνίζουσας, τετραγώνισε τον κύκλο.



Οι σύγχρονοι του Ιππία συγκαταλέγουν τη λύση αυτή μαζί με άλλες στις «**σοφιστείες**», αφού χρησιμοποιεί ένα τέχνασμα, μέσω μιας μηχανικής κατασκευής, προκειμένου να λύσει ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο πρέπει η λύση να γίνει με γεωμετρικά όργανα, δηλαδή γνώμονα και διαβήτη, και όχι με μηχανικά τεχνάσματα. Η τετραγωνίζουσα είναι μια καμπύλη η οποία μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας το συνδυασμό δύο ανεξάρτητων μεταξύ τους κινήσεων: της ομαλής κυκλικής και της ευθύγραμμης ομαλής.

Τα προβλήματα που από την αρχαιότητα απασχόλησαν μεγάλους μαθηματικούς ήταν:

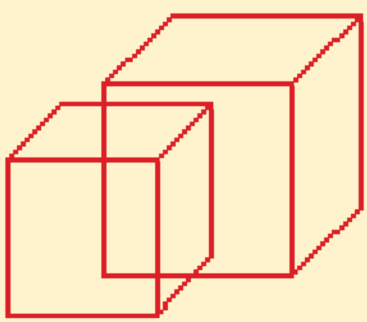


Ο τετραγωνισμός του κύκλου, η κατασκευή με χάρακα και διαβήτη τετράγωνου εμβαδού ίσο με το εμβαδό δοθέντος κύκλου.

Ο διπλασιασμός του κύβου, η κατασκευή με χάρακα και διαβήτη κύβου με όγκο διπλάσιο του όγκου δοθέντος κύβου.

Η τριχοτόμηση γωνίας, ο χωρισμός με χάρακα και διαβήτη δοθείσης γωνίας σε τρία ίσα μέρη.

Η μέτρηση του εμβαδού ενός επιπέδου που περικλείεται από ένα επίπεδο σχήμα γίνεται με τη μονάδα που είναι ένα τετράγωνο με μήκη πλευρών τη μονάδα μήκους. Έγινε η μέτρηση(τετραγωνισμός) του τριγώνου, του παραλληλογράμμου, των πολυγώνων, κλπ, αλλά του κύκλου ήταν αδύνατο. Η Τριχοτόμηση γωνίας προέκυψε από τις προσπάθειες για την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων.



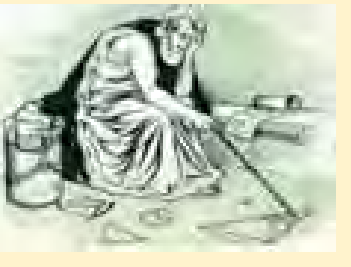
Ο διπλασιασμός του κύβου προέκυψε κατά το μύθο όταν το μαντείο των Δελφών πρότεινε στους Δηλίους τον διπλασιασμό του βωμού του Απόλλωνα που ήταν κυβικής μορφής για να σταματήσουν οι ταλαιπωρίες τους. Οι Δήλιοι ζήτησαν τη βοήθεια του Πλάτωνα ο οποίος τους εξήγησε ότι ο Θεός πρότεινε αυτό επειδή παραμελούν την παιδεία και τους παρέπεμψε στους μαθηματικούς Εύδοξο τον Κνίδιο και Ελίκωνα τον Κιζυκινό, που ξέρουν πως να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αλλά τους τόνισε ότι ο Θεός δεν ζητάει να λύσουν το πρόβλημα, αλλά τους προστάζει να σταματήσουν τον πόλεμο και να ασχοληθούν με τις Επιστήμες, έτσι θα καταπραΰνουν τα πάθη τους και με τα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία θα βελτιώσουν τις σχέσεις τους.

Αυτά τα προβλήματα βασάνισαν τους μαθηματικούς για 2500 χρόνια μέχρι να βρεθεί το 19ο αιώνα ότι είναι αδύνατο να λυθούν γεωμετρικά, με τα όργανα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το χάρακα και το διαβήτη. Συγκεκριμένα, η απόδειξη της αδυναμίας λύσης με χάρακα και διαβήτη του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου δόθηκε από τον Lindemann **το** 1882, του διπλασιασμού του κύβου από τον Mobius **το** 1829 και της τριχοτόμησης της γωνίας από τον Wantzel **το** 1837.

Εδώ θέλω να προσθέσω και τις προσπάθειες που έκανε ένας μαθητής πριν 57 χρόνια σε σχολείο της Αθήνας για να τριχοτομήσει την γωνία. Ο μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου αγωνιζόταν, διάβαζε βιβλία και προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα. Αποτέλεσμα να αποκτήσει τόσες γνώσεις ο μαθητής που από τη Δευτέρα Λυκείου έγινε πτυχιούχος φοιτητής σε Αμερικανικό Πανεπιστήμιο. Ο μαθητής αυτός σήμερα είναι ο πιο σπουδαίος επιστήμονας της Ελλάδας, ο Νομπελίστας μαθηματικός και φυσικός **Δημήτρης Χριστοδούλου**.

Με τα προβλήματα αυτά από την αρχαιότητα ασχολήθηκαν και έδωσαν μη Ευκλείδειες λύσεις όλοι σχεδόν οι μεγάλοι μαθηματικοί. Ο Αρχιμήδης, ο Ερατοσθένης, ο Απολλώνιος, ο Δεινόστρατος, ο Εύδοξος, ο Ιπποκράτης ο Χίος και πολλοί άλλοι που με αφορμή αυτά τα προβλήματα έδωσαν τις βάσεις για πολλούς κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών.

Τα προβλήματα αυτά απασχολούσαν τόσο πολύ τους αρχαίους Έλληνες που τον 5ο αιώνα π.Χ. αναφέρθηκαν σε δύο θεατρικά έργα της εποχής. Ο Ευριπίδης(485-407 π.Χ.) αναφέρει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και ο Αριστοφάνης(452-385 π.Χ.) το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.



Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα σε κύκλο, απέδειξε **ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου που η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη με το μήκος του κύκλου**. Με το θεώρημα αυτό ο τετραγωνισμός του κύκλου ανάγεται στην προσπάθεια να βρεθεί ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς την διάμετρο, που είναι το π.(το βιβλίο του Αρχιμήδη Κύκλου Μέτρησις είναι η προσπάθεια να υπολογίσει αυτόν το λόγο).

Hermite

Ferdinand von Lindemann

Με τη μέθοδο αυτή του Αρχιμήδη έγινε αργότερα ο υπολογισμός του π.

Αλγεβρικά το πρόβλημα απαιτούσε τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης x^2-π=0. Για το π πριν από τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί δεν γνώριζαν ότι είναι υπερβατικός αριθμός, δηλαδή ότι ο π δεν είναι λύση (ρίζα) αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς αριθμούς για συντελεστές. Το 1873 ο μαθηματικός Hermite απέδειξε ότι ο e είναι υπερβατικός και το 1883, ο Ferdinand von Lindemann βασίστηκε στις ιδέες του Hermite και έδειξε ότι και ο π είναι υπερβατικός αριθμός.

Αρχαία Ήλις - Αρχαία Ολυμπία

Δύο πόλεις με παράλληλη ιστορική διαδρομή

Γιώργος Α. Κουσινιώρης -Παράρτημα ΕΜΕ Ν. Ηλείας

Η **Ήλιδα** ή **Ήλις** ήταν μια από τις δύο πόλεις – κράτη της αρχαίας Ηλείας, κτισμένη, κατά τον Παυσανία[1], στην αριστερή όχθη του Πηνειού ποταμού. Ο Στράβων[2] επίσης αναφέρει ότι διαρρέεται από τον Πηνειό ποταμό. Κάποια ερείπια της αρχαίας πόλης ήταν ορατά μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα και το 1911 άρχισαν οι πρώτες ανασκαφικές έρευνες από τον Αυστριακό αρχαιολόγο Ότο Βάλτερ. Το 1968 οι εργασίες για να περάσει ένας

αρδευτικός αγωγός έφεραν στο φως έναν αρχαιολογικό θησαυρό. Η ανασκαφή, υπό την επίβλεψη του τότε Εφόρου Αρχαιοτήτων Ολυμπίας Νικολάου Γιαλούρη, ήταν μεγάλης κλίμακας και έγινε με εργατικά χέρια. Αναδύθηκε μέρος της αρχαίας πόλης που έσφυζε από ζωή, οργάνωση, δρόμους, ευρήματα πάσης φύσεως (μαρμάρινα, χάλκινα, πήλινα που περιείχαν νομίσματα) τα οποία είναι εφάμιλλα με τον πλούτο των ευρημάτων της αρχαίας Ολυμπίας.

Σύμφωνα με τη μυθολογία ιδρύθηκε από τον Αέθλιο, που ήταν και ο πρώτος βασιλιάς της, γιο του Διός και της Πρωτογένειας της κόρης του Δευκαλίωνος και της Πύρρας[3]. Η Ήλιδα κατοικήθηκε από τα προϊστορικά χρόνια, βρίσκεται κοντά στην Αρχαία Ολυμπία και στη μυκηναϊκή εποχή έγινε ανεξάρτητο βασίλειο. Οι κάτοικοί της ονομάζονταν Επειοί και σύμφωνα με το Όμηρο συμμετείχε στον Τρωικό Πόλεμο με αρχηγό τον Πολύξενο. Ο πληθυσμός της, κατά την ιστορική εποχή, ξεπερνούσε τις 60.000 κατοίκους. "*Η Ήλιδα έκοβε και δικά της νομίσματα, ήδη από το τέλος του 6 αι. π.Χ., υφίσταται κατ' αυτήν ακριβώς την περίοδο Βουλή των Ηλείων και Δήμος των Ηλείων που, παράλληλα με την Ολυμπιακή Βουλή, εκδίδουν και αυτοί ψηφίσματα*" γράφει στο βιβλίο του ΄΄Αρχαία Ήλις΄΄ ο καθηγητής Νικόλαος Γιαλούρης. Η πόλη κατοικήθηκε και στα πρώτα βυζαντινά χρόνια και γνώρισε την οριστική παρακμή όταν ο Θεοδόσιος Α', το 392 μ.Χ., απαγόρευσε τους Ολυμπιακούς Αγώνες. Μερικοί από τους σπουδαίους βασιλείς της Ήλιδας ήταν: Ο Αέθλιος, ο Ενδυμίων, ο Επειός, ο Αιτωλός, ο Ηλείος ή Ήλιος, (οι κάτοικοι, εξ αυτού, αντί Επειοί τώρα ονομάζονται Ηλείοι), ο Αυγείας, ο οποίος ήταν γιος του Ηλείου, ο Αγαθοσθένης, γιος του Αυγεία, ο Όξυλος, ο Οινόμαος και ο Πέλοπας.

Την εποχή του Ομήρου, στην Ήλιδα, διεξάγονταν ιππικοί αγώνες με έπαθλο έναν τρίποδα. Κατά τον Παυσανία σε ένα τμήμα της Αγοράς της Ήλιδας, που λεγόταν Ιππόδρομος, οι Ηλείοι

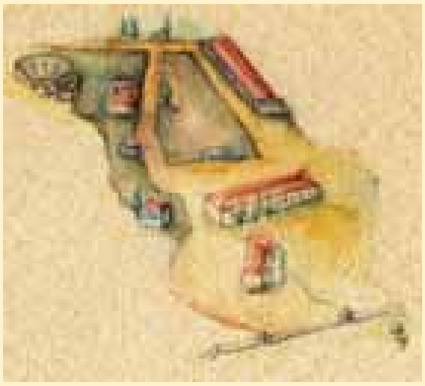
[1] Ο Παυσανίας (110μ.Χ. – 180μ.Χ.): ήταν Έλληνας περιηγητής και γεωγράφος από τη Λυδία της Μικράς Ασίας.
[2] Στράβων (63π.Χ. – 23μ.Χ.): Έλληνας γεωγράφος, φιλόσοφος και ιστορικός από την Αμάσεια της Μικράς Ασίας.
[3] Ο Δευκαλίων και η Πύρα κατά την Ελληνική Μυθολογία είναι οι μόνοι άνθρωποι που επέζησαν από τον κατακλυσμό και αναδημιούργησαν την ανθρωπότητα.

γύμναζαν τα άλογά τους. Ο Αθηναίος[4] μας πληροφορεί ότι στην Ήλιδα οργανώνονταν ανδρικά καλλιστεία (Αγώνες Κάλλους) προς τιμήν της θεάς Αθηνάς. Η Ήλιδα ανέδειξε πολλές προσωπικότητες του αρχαίου κόσμου κατά την περίοδο της ακμής της όπως ο σοφιστής Ιππίας ο Ηλείος (5ος αι. π.Χ.) το όνομα του οποίου φέρει το Παράρτημα Ηλείας της ΕΜΕ, ο σκεπτικός φιλόσοφος Πύρρων (365-275 π.Χ.), ο μαθητής του Σωκράτη Φαίδων, ο φιλόσοφος της Μεγαρικής Σχολής Αλεξίνος και ο μαθητής του Πλάτωνα Φορμίων. Ανέδειξε επίσης προσωπικότητες του αθλητισμού όπως ο ολυμπιονίκης Κόροιβος ο Ηλείος και ο Ίφιτος (9ος ή 8ος αι. π.Χ.), ένας από τους διοργανωτές των Ολυμπιακών Αγώνων, ο οποίος μαζί με τον Λυκούργο από τη Σπάρτη και τον Κλεοσθένη από την Πίσα ήταν εμπνευστής της Ολυμπιακής Εκεχειρίας.

Η **Πίσα** ήταν η δεύτερη πόλις – κράτος της αρχαίας Ηλείας. Βρίσκεται ανατολικά από τον αρχαιολογικά χώρο της Αρχαίας Ολυμπίας, κοντά στις βόρειες όχθες του Αλφειού ποταμού, σε μια περιοχή που έχει χαρακτηριστεί σαν τοπίο ιδιαιτέρου φυσικού κάλλους. Απέχει μόλις τέσσερα χιλιόμετρα από την Ολυμπία, πήρε το όνομα του ιδρυτή της Πίσου, ή κατά τον Στράβωνα από την ομώνυμη πηγή που υπήρχε στην περιοχή. Οι κάτοικοί της ονομάζονταν Νηλείδες. Γνώρισε μεγάλη ακμή στη μυκηναϊκή εποχή και στο κράτος της ανήκε και η Ολυμπία ενώ είχε δικούς της βασιλείς. Σύμφωνα με την μυθολογία οι Πισάτες διοργάνωσαν τους πρώτους αγώνες, όταν ο Πέλοπας νίκησε σε αρματοδρομία τον βασιλιά της Οινόμαο και έλαβε ως έπαθλο την κόρη του Ιπποδάμεια.

Όταν ο Ηρακλής καθάρισε τους στάβλους του Αυγεία και αυτός αρνήθηκε να τον πληρώσει, για αντίποινα ο Ηρακλής κατέλαβε όλη την Ηλεία εκτός από την Πίσα και την σύμμαχο της Πύλο γιατί τον εμπόδισε ένας χρησμός της Πυθίας. Όταν ο Όξυλος, βασιλιάς της Ήλιδας (περίπου 1104 π.Χ.), θέλησε να ενώσει την Ηλεία σε ένα κράτος και το κατόρθωσε, πολλοί Πισάτες αρνήθηκαν την ηγεμονία του και έφυγαν στην Ήπειρο δημιουργώντας εκεί νέες πόλεις, όπως η Αρχαία Ελάτρεια (στο σημερινό νομό Πρεβέζης), η Πανδοσία (στο σημερινό Καστρί του Δήμου Πάργας) και το Βουχέτιο (στο σημερινό Δήμο Ζηρού του νομού Πρεβέζης). Αποικία επίσης θεωρείται και η Πίζα της Ιταλίας. Επίνειο λιμάνι της ήταν η Φειά.

Η Ήλιδα και οι Ολυμπιακοί Αγώνες.



Η Ήλιδα και η Πίσα βρέθηκαν πολλές φορές σε αντιπαράθεση για τον έλεγχο των Ολυμπιακών Αγώνων. Η Πίσα είχε αρχικά την ευθύνη των αγώνων αλλά αυτό το προνόμιο το πήραν οριστικά οι Ηλείοι έπειτα από μακροχρόνιο πόλεμο που κράτησε από το 588 π.Χ. μέχρι το 580 π.Χ., οπότε και κατέλαβαν την Πίσα. Η Ήλιδα, ως διοργανώτρια πόλη των Πανελλήνιων Αγώνων "Τα Ολύμπια", είχε την εποπτεία τους για περισσότερο από χίλια χρόνια, από τον 6ο π.Χ. αιώνα έως το 393 μ.Χ. Οι αθλητές πριν βρεθούν στην Ολυμπία για τους αγώνες ήταν υποχρεωμένοι να προσέρχονται ένα μήνα νωρίτερα στην Ήλιδα προκειμένου να γυμναστούν, να μάθουν τους κανονισμούς και να γίνει ο διαχωρισμός των αθλητών κατά άθλημα, ηλικία και κατηγορία. Για το σκοπό αυτό στην Ήλιδα υπήρχαν αθλητικές εγκαταστάσεις. Σύμφωνα με την περιγραφή του Παυσανία εκτός των άλλων εγκαταστάσεων υπήρχαν δύο συγκροτήματα Γυμνασίων, το καθένα πολύ μεγαλύτερο εκείνου της Ολυμπίας, καθώς και η Παλαίστρα. Η Παλαίστρα χρησίμευε για την προπόνηση των παλαιστών και λόγω του σχήματός του ονομαζόταν Τετράγωνον.

[4] Αθηναίος ο Ναυκρατίτης (Αίγυπτος περίπου 170μ. Χ. – Ρώμη 230 μ.Χ.): Έλληνας συγγραφέας. Το σπουδαιότερο έργο του είναι οι "Δειπνοσοφισταί", ένα σύγγραμμα εγκυκλοπαιδικής μορφής..

Η Ήλιδα διοργάνωνε και τα ΄΄Ηραία΄΄ προς τιμή της θεάς Ήρας. Τα Ηραία ήταν αγώνες γυναικών που διεξάγονταν κι αυτοί κάθε τέσσερα χρόνια στην Ολυμπία ενδιάμεσα των Ολυμπιακών Αγώνων. Σύμφωνα με την παράδοση, τους αγώνες αυτούς ίδρυσε η Ιπποδάμεια μετά τον γάμο της με τον Πέλοπα, για να τιμήσει τη θεά Ήρα. Συμμετείχαν μόνο παρθένες (ανύπαντρες γυναίκες) της Ήλιδας σε αγώνα δρόμου μήκους περίπου ενός σταδίου. Κατά τον Παυσανία οι αθλήτριες διαγωνίζονταν με μαλλιά λυτά στους ώμους, κοντό χιτώνα πάνω από το γόνατο, που αφήνει το δεξιό ώμο ακάλυπτο ως το στήθος. Το έπαθλο ήταν ένα στεφάνι από κλαδί ελιάς. Τη διοργάνωση αναλάμβαναν δεκαέξι γερόντισσες από επιφανείς οικογένειες της Ήλιδας που ήταν και οι κριτές.

Η Ήλιδα χάρις στο "Ηλειακόν Δίκαιον", την πιστή εφαρμογή των νόμων και τα αξιώματα που

ήταν συνδεδεμένα άμεσα με την καλλιέργεια του πνεύματος, της άσκησης και με την οργάνωση των Αγώνων στην Ολυμπία, κατάφερε να πραγματοποιήσει αυτό που με δύο λέξεις ονομάζουμε Ολυμπιακό Ιδεώδες: Το «**Εὖ Αγωνίζεσθαι**», δηλαδή οι αξίες της εντιμότητας, του σεβασμού των κανόνων διεξαγωγής των αγώνων, της ισότητας, της δικαιοσύνης, του σεβασμού των συναθλητών και η «**Ευγενής Άμιλλα**», δηλαδή οι αξίες της αριστείας, του ευγενούς συναγωνισμού ανάμεσα σε άτομα και λαούς, της τάσης για διάκριση και υπεροχή μακριά από κάθε αντιπαλότητα. Για το σκοπό αυτό στην Ήλιδα υπήρχαν οι αξιωματούχοι που ήταν επιφορτισμένοι με την τήρηση των νόμων και των κανονισμών. Οι αξιωματούχοι αυτοί ήταν κυρίως οι μαστροί οι οποίοι αποτελούσαν το ανώτατο δικαστήριο, οι ελλανοδίκες που ήταν οι διαιτητές των αγώνων και ιεραρχικά ανήκαν στους μαστρούς, οι νομοφύλακες που δίδασκαν τους ελλανοδίκες τους κανονισμούς των αγώνων, ο αλυτάρχης με τους αλύτας (ραβδοφόρους και μαστιγοφόρους) ήταν στην υπηρεσία των ελλανοδικών για την τήρηση της τάξης, οι θεσμοφύλακες έργο των οποίων ήταν η εφαρμογή και τήρηση των νόμων, οι θεωροί ή σπονδοφόροι, που ήταν απεσταλμένοι της Ήλιδας στις άλλες πόλεις για την αναγγελία της ημερομηνίας της κάθε νέας Ολυμπιάδας, οι τελεσταί ήταν υπεύθυνοι για τις θυσίες και τις άλλες τελετές, οι θεαροδόκοι ήταν οι υπεύθυνοι εθιμοτυπίας και υποδοχής των θεωρών, των εκπροσώπων των άλλων πόλεων κ. α. Επίσης υπήρχε ο πολέμαρχος και ο ίππαρχος επί κεφαλής του ηλειακού στρατού, με κύριο σώμα εκείνο των τριακοσίων λογάδων, επίλεκτης μονάδας από την ανώτερη τάξη της ηλειακής κοινωνίας. Η εκλογή όλων αυτών των αξιωματούχων ανάμεσα στους Ηλείους πολίτες γινόταν από το ιερατείο. Την παραμονή της έναρξης των Ολυμπιακών Αγώνων, σχηματιζόταν η μεγαλοπρεπής Ιερά Πομπή η οποία ξεκινούσε από την Ήλιδα και ακολουθώντας την Ιερά Οδό μετέβαινε με πεζοπορία στην Ολυμπία, διανύοντας μια απόσταση τριακοσίων σταδίων. «*Δύο οδοί ήγον παρ' αρχαίοις εκ της πόλεως Ήλιδος εις Ολυμπίαν· τούτων δ' η μεν καλουμένη ορεινή οδός 130 σταδίων (24980 μέτρων) ήτο συντομωτέρα και δυσβατωτέρα [...] Η δε πεδινή, η δ' άλλως ιερά οδός καλουμένη, ήτο μακροτέρα μεν, δηλ. 300 σταδίων (57700 μέτρων), ων τα 180 από Ήλιδος εις Λετρίνους και τα 120 από Λετρίνους εις Ολυμπίαν, αλλ' επίπεδος, ευρυχωροτάτη και τελειοτάτη ένεκα της χρησιμότητος αυτής [...].*» Από το βιβλίοτου Δ.Φ. Γυμνασιάρχου Γεώργιου Παπανδρέου "Η Ηλεία δια μέσου των αιώνων" σελ. 120.

Η Ολυμπιακή Εκεχειρία

Κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας των Ολυμπιακών Αγώνων απαγορευόταν σε οποιονδήποτε ένοπλο η είσοδος στην περιοχή τη Ήλιδας και από την έβδομη μέρα πριν από την έναρξή τους μέχρι και την έβδομη μέρα μετά το πέρας τους, οι πόλεμοι σταματούσαν έτσι ώστε οι αθλητές, απαλλαγμένοι από στρατιωτικές υποχρεώσεις, να μπορούν να ταξιδέψουν για να συμμετάσχουν στους Αγώνες. Η Διεθνής Ολυμπιακή Επιτροπή, σε συνεργασία με την Ελλάδα, το Δεκέμβριο του 1999 ίδρυσε το Διεθνές Κέντρο Ολυμπιακής Εκεχειρίας με συμβολική έδρα την Αρχαία Ολυμπία. Αποστολή του Διεθνούς Κέντρου Ολυμπιακής Εκεχειρίας είναι η προώθηση των Ολυμπιακών Αξιών, της Ειρήνης, της Φιλίας και η καλλιέργεια της διεθνούς κατανόησης. Ειδικότερα, το Διεθνές Κέντρο Ολυμπιακής Εκεχειρίας αποσκοπεί στην τήρηση της Ολυμπιακής Εκεχειρίας, επιδιώκοντας την παύση όλων των εχθροπραξιών σε όλο τον κόσμο κατά τη διάρκεια των Ολυμπιακών Αγώνων και πέραν αυτών.

Η Αρχαία Ήλιδα σήμερα.

Σήμερα στο χώρο της Αρχαίας Ήλιδας συνεχίζονται οι ανασκαφές που φέρνουν στο φως όλο

και περισσότερα από τα ερείπια της αρχαίας πόλης. Από το 2004 στην περιοχή κατασκευάστηκε και λειτουργεί ένα σύγχρονο Αρχαιολογικό Μουσείο στο οποίο εκτίθενται πολλά από τα ευρήματα των ανασκαφών στην Ήλιδα. Η αξιοποίηση της Αρχαίας Ήλιδας αποτελεί αναγκαιότητα εθνικής σημασίας. Πέραν της οικονομικής ανάπτυξης που μπορεί να φέρει στην περιοχή, θα μπορούσε άριστα ο επισκέπτης να συνδυάσει την επίσκεψή του τόσο στον χώρο διοργάνωσης των Ολυμπιακών Αγώνων όσο και στον χώρο πραγματοποίησής τους, αποκτώντας έτσι μια πλήρη

εικόνα της τότε πραγματικότητας. Τις τελευταίες δεκαετίες με πρωτοβουλία της "Εταιρείας Φίλων Αρχαίας Ήλιδας", πραγματοποιείται κάθε καλοκαίρι το Φεστιβάλ Αρχαίας Ήλιδας, μια σειρά εκδηλώσεων που αποτελεί το κατ' εξοχήν πολιτιστικό γεγονός της Δυτικής Πελοποννήσου και βρίσκει ευρεία ανταπόκριση από τον κόσμο. Το αρχαίο θέατρο - το οποίο δεν είχε κερκίδες αλλά οι θεατές παρακολουθούσαν τις παραστάσεις από τα πρανή καθισμένοι στο έδαφος και βλέποντας προς τον Πηνειό Ποταμό - τα ερείπια του οποίου σώζονται μέχρι σήμερα, ξαναζωντανεύει κάθε χρόνο για να θυμίζει στις νεότερες γενιές ότι

στον τόπο αυτόν κάποτε έλαμψαν το Ολυμπιακό Ιδεώδες και η Ολυμπιακή Εκεχειρία και άφησε έντονα σημάδια η πολιτιστική ανωτερότητα των κατοίκων της πόλης αυτής.

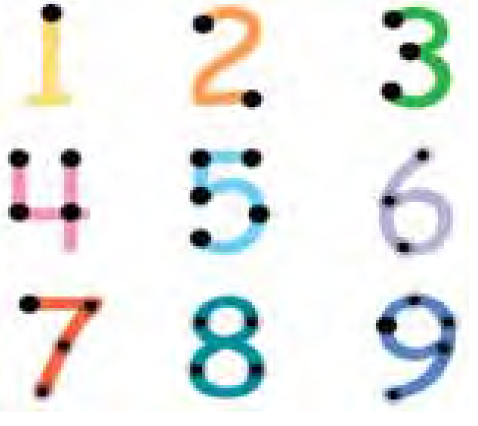
Πηγές: «**Η Ηλεία δια μέσου των Αιώνων**». Γεωργίου Παπανδρέου Δ. Φ. Γυμνασιάρχου (Εκδ. Βιβλιοπανόραμα 2010)

- https://el.wikipedia.org/wiki/Ηλιδα
- http://odysseus.culture.gr/h/3/gh351.jsp?obj_id=2400
- https://el.wikipedia.org/wiki/Πίσα
- https://el.wikipedia.org/wiki/Ηραία
- https://ilia-olympia.org/αρχαιολογικό-μουσείο-ήλιδας
- https://elismuseum.com/
- https://olympictruce.org/profil/poioi-eimaste/

Σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά με προβλήματα όρασης

Ιωάννης Ρίζος

Οι μαθητές με διαταραχές της όρασης συχνά αντιμετωπίζουν σημαντικές προκλήσεις στα Μαθηματικά, εξαιτίας της έντονα οπτικής φύσης του γνωστικού αντικειμένου. Οι προκλήσεις αυτές περιλαμβάνουν δυσκολίες στην πρόσβαση στα δεδομένα των ασκήσεων, σε σύμβολα, γραφήματα, αναπαραστάσεις και γεωμετρικά σχήματα, τα οποία, όπως είναι φυσικό, είναι απαραίτητα για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Η υπέρβαση αυτών των εμποδίων απαιτεί την ανάπτυξη εξειδικευμένων στρατηγικών διδασκαλίας, εργαλείων και πόρων που, υπό προϋποθέσεις, μπορούν να διευκολύνουν την αποτελεσματική μάθηση. Το σύντομο αυτό άρθρο σκιαγραφεί τις βασικότερες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με προβλήματα όρασης στο μάθημα των Μαθηματικών, εξετάζει ορισμένες καλές πρακτικές για τη διδασκαλία, και επισημαίνει τον ρόλο των υποστηρικτικών τεχνολογιών στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης χωρίς αποκλεισμούς.



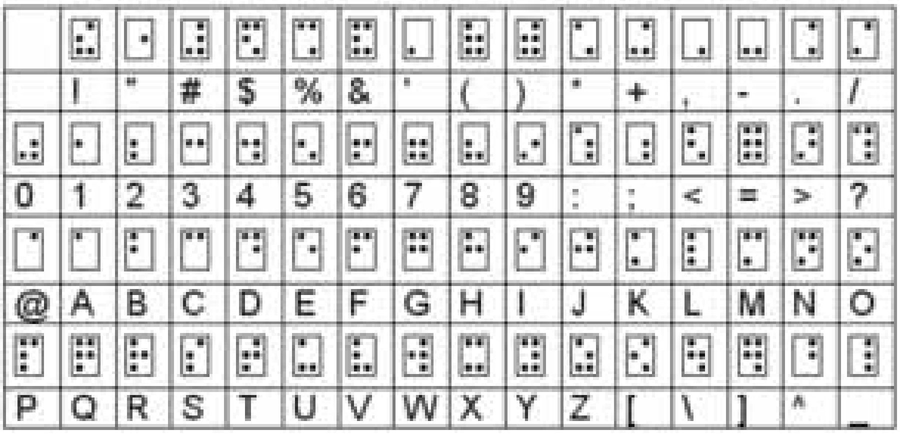
Οι οπτικές διαταραχές (visual impairments) επηρεάζουν την ικανότητα αντίληψης και επεξεργασίας οπτικών πληροφοριών, η οποία αποτελεί βασική παράμετρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ορισμένες από τις κυριότερες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με οπτικές αναπηρίες είναι:

Δυσκολία στην πρόσβαση σε οπτικές αναπαραστάσεις: Ένα σημαντικό μέρος της διδασκαλίας των Μαθηματικών βασίζεται σε οπτικές αναπαραστάσεις, όπως γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα, διαγράμματα (π.χ. διαγράμματα Venn) και αριθμογραμμές. Για τους μαθητές με προβλήματα όρασης, αυτά τα οπτικά βοηθήματα μπορεί να μην είναι προσβάσιμα στην τυπική τους μορφή, καθιστώντας έτσι δύσκολη την κατανόηση βασικών εννοιών, ειδικά στη Γεωμετρία, όπου η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων (και η κατασκευή τους) παίζει κεντρικό ρόλο.

Κατανόηση των χωρικών σχέσεων: Ο χωρικός συλλογισμός είναι σημαντικός σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας. Οι μαθητές με οπτική αναπηρία συνήθως δυσκολεύονται με την κατανόηση των χωρικών σχέσεων λόγω της περιορισμένης πρόσβασής τους σε οπτικές ενδείξεις. Για παράδειγμα, η κατανόηση του εμβαδού ενός τριγώνου ή ενός χωρίου συχνά απαιτεί την ικανότητα οπτικοποίησης των σχέσεων μεταξύ σχημάτων, μια εργασία που γίνεται εξαιρετικά δύσκολη χωρίς όραση.

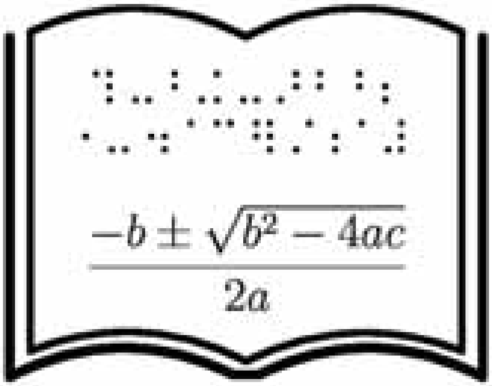
Πρόσβαση σε μαθηματικούς συμβολισμούς: Οι συνήθεις μαθηματικοί συμβολισμοί, όπως αριθμοί, τελεστές κ.ά. παρουσιάζονται οπτικά, με αποτέλεσμα οι μαθητές με προβλήματα όρασης να δυσκολεύονται να αλληλεπιδράσουν. Συμβολισμοί Braille υπάρχουν, αλλά συνήθως είναι περιορισμένης εμβέλειας, ενώ ενδέχεται ορισμένοι μαθητές ή/και εκπαιδευτικοί να μην είναι εξοικειωμένοι με το συγκεκριμένο είδος γραφής, περιπλέκοντας ακόμη περισσότερο την κατάσταση.

Πέρα από τα παραπάνω όμως, δεν θα πρέπει να αγνοηθούν παράγοντες όπως οι καθημερινές δυσκολίες μέσα στις “αφιλόξενες πόλεις”, η κόπωση, η έλλειψη ενδιαφέροντος ή κινήτρων από την μεριά των παιδιών, καθώς και οι προκαταλήψεις ή η άγνοια μέρους του κοινωνικού συνόλου επάνω σε αυτά τα θέματα (βλ. [1]).

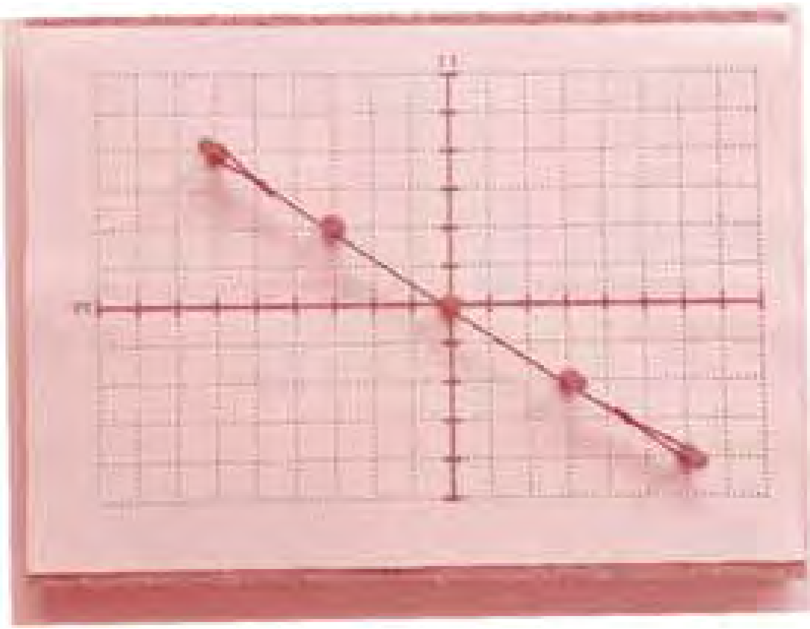


Έρευνες αναφέρουν [2], [3], [4] ότι οι παράγοντες που θεωρούνται πιο σημαντικοί για την αποτελεσματική εκμάθηση των Μαθηματικών από μαθητές με προβλήματα όρασης είναι οι εξής:

- Επιλογή και διδασκαλία ειδικών μαθηματικών κωδίκων Braille (όπως ο κώδικας Nemeth, ο οποίος αναπτύχθηκε το 1946 από τον Dr. Abraham Nemeth)
- Προσαρμογή του ήδη υπάρχοντος κειμενικού υλικού και παροχή νέου, κατάλληλα προσαρμοσμένου στις ανάγκες των παιδιών
- Χρήση μαθηματικών εργαλείων, όπως άβακες, γεωμετρικά όργανα, χειροκίνητες υπολογιστικές μηχανές, χειραπτικό υλικό (manipulative material), σχέδια με υπερυψωμένες γραμμές (raised-line drawings) κ.λπ.
- Προετοιμασία και χρήση κατάλληλων σχεδίων μαθήματος και εμπειριών προσομοίωσης, σαφείς λεκτικές περιγραφές των σχημάτων κ.λπ.
- Χρήση προγραμμάτων ανάγνωσης οθόνης (Text-to-Speech) και συναφείς υποστηρικτικές τεχνολογίες, όπως το MathPlayer, το MathML, το Desmos κ.ά.



Ιδιαίτερα η χρήση της υποστηρικτικής τεχνολογίας (assistive technology) από μαθητές με προβλήματα όρασης, μπορεί να βελτιώσει τα μαθησιακά αποτελέσματα, όχι μόνο στα Μαθηματικά αλλά και στα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα [5]. Οι υποστηρικτικές τεχνολογίες παρέχουν πρόσβαση σε πολλές δραστηριότητες που σχετίζονται με το σχολείο, ενισχύοντας τις υπάρχουσες οπτικές ικανότητες ή αξιοποιώντας άλλες αισθήσεις (π.χ. ακοή) και δεξιότητες (π.χ. προφορικός λόγος). Παραδείγματα τέτοιων τεχνολογικών εργαλείων είναι οι αριθμομηχανές που μιλούν (talking calculators), η τρισδιάστατη εκτύπωση μαθηματικών μοντέλων, τα εργαλεία γραφικών παραστάσεων με βάση τον ήχο, και οι εφαρμογές που εκφωνούν μαθηματικές εκφράσεις και τύπους, όπως το MathPlayer.



Η διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές με προβλήματα όρασης παρουσιάζει ένα σύνολο προκλήσεων, αλλά με τα κατάλληλα εργαλεία, στρατηγικές και πόρους, οι προκλήσεις αυτές μπορούν να αντιμετωπιστούν. Το κλειδί της επιτυχίας έγκειται στην προσαρμογή της διδασκαλίας στις ανάγκες κάθε μαθητή ξεχωριστά, στη χρήση χειραπτικού υλικού, στην αξιοποίηση υποστηρικτικών τεχνολογιών και στην παροχή σαφούς προφορικής επικοινωνίας. Στο παραπάνω πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται την έμπρακτη υποστήριξη του Υπουργείου Παιδείας για να ανταποκριθούν σ’ αυτόν τον σύνθετο ρόλο και να υπηρετήσουν στην πράξη «ένα σχολείο για όλους», χωρίς αποκλεισμούς παιδιών από την εκπαιδευτική διαδικασία. Καθώς οι τεχνολογικές εξελίξεις είναι ραγδαίες και η συμπερίληψη φαίνεται πως προτάσσεται ως εκπαιδευτική πολιτική, το μέλλον της μαθηματικής εκπαίδευσης για τους μαθητές με προβλήματα όρασης μοιάζει να είναι ελπιδοφόρο, με περισσότερες ευκαιρίες για ανεξαρτησία και επιτυχία στην κατάκτηση των Μαθηματικών!

Ασκήσεις επανάληψης στην Άλγεβρα

Αργυροπούλου Τερψιχόρη – Διαμαντοπούλου Μαρία – Παράρτημα ΕΜΕ Ν. Ηλείας

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση:

i. Η παράσταση $(3^2 - 2^3)^{2024} + 2^2 + 1$ είναι ίση με: Α.6 Β.5 Γ.10 Δ.14

ii. Η παράσταση $2(5^2 - 2^4)$ είναι ίση με: Α. 34 Β.52 Γ.18 Δ.22

iii. Η παράσταση $(2\cdot 5^2):10$ είναι ίση με: Α.1 Β.10 Γ.4 Δ.5

iv. Ο αριθμός 765 διαιρείται με: Α. το 2 Β. το 3 και το 5 Γ. το 4

v. Στο τριπλάσιο ενός αριθμού προσθέτουμε το 2 και βρίσκουμε 8. Ποια από τις παρακάτω ισότητες περιγράφει την παραπάνω πρόταση:

Α. $3\cdot 2+x=8$ **Β.** $3x+2=8$ **Γ.** $2x+3=8$

2. Να χαρακτηρίσετε Σωστές ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. Ο ΜΚΔ(5, 10)=10

ii. Το ΕΚΠ(5, 10, 20)=20

iii. Το 8 είναι πολλαπλάσιο του 32

iv. Το 7 είναι διαιρέτης του 14

v. Οι αριθμοί 15 και 25 είναι πρώτοι μεταξύ τους

vi. Ο αριθμός 49 είναι πρώτος αριθμός

vii. Η ισότητα $70=5\cdot 10+20$ είναι ισότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

3. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9:

α) 7…8 **β)** 301…

4. Δίνονται οι αριθμοί:
7, 11, 12, 15, 19, 23, 26, 36
Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Πρώτοι αριθμοί είναι οι ……………….

β) Σύνθετοι αριθμοί είναι οι ………..……..

γ) Με το 2 διαιρούνται οι αριθμοί ………..

δ) Με το 3 διαιρούνται οι αριθμοί …..……

ε) Με το 5 διαιρούνται οι αριθμοί ...………

στ) Με το 9 διαιρούνται οι αριθμοί ………

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$\mathbf{A= 4^3+3^3+2\cdot 10^2 - (4-3)\cdot(4^2+2^2 - 3\cdot 2)+7}$

Λύση

$A=4^3+3^3+2\cdot 10^2-(4-3)\cdot(4^2+2^2-3\cdot 2)+7=$
$=4^3+3^3+2\cdot 10^2-(4-3)\cdot(16+4-3\cdot 2)+7=$
$=4^3+3^3+2\cdot 10^2-1\cdot(16+4-6)+7=$
$=4^3+3^3+2\cdot 10^2-1\cdot 14+7=$
$= 64+27+2\cdot 100-14+7=$
$= 64+27+200-14+7=284$

Άσκηση 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:
$\mathbf{\alpha= 6^2 - 5\cdot 7,\ \beta=7^2 - 2^2\cdot 10}$ **και** $\mathbf{\gamma=10^2 - 3^2\cdot 10}$

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των α, β, γ

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\mathbf{K=\alpha^{2024}+(\beta+1):\gamma}$

Λύση

α) $\alpha=36-5\cdot 7=36-35=1$
$\beta= 49-4\cdot 10=49-40=9$
$\gamma= 100-9\cdot 10=100-90=10$

β) $K= \alpha^{2024}+(\beta+1):\gamma= 1^{2024}+(9+1):10=$
$=1+10:10=1+1=2$

Άσκηση 3

Δίνεται η παράσταση:

$$\mathbf{A=\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{\frac{11}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{2}{3}-\frac{7}{10}}}$$

α) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης Α

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$B=\frac{A}{\frac{2}{3}}:\frac{1}{A}\cdot 1152$$

γ) Να αναλυθεί η παράσταση Β σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Λύση

α) $\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{\frac{11}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{2}{3}-\frac{7}{10}}=$

$=\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)\right]:\frac{\frac{11}{3}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{10}}=$

$=\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4}{6}\right]:\frac{\frac{22}{6}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{10}}=$

$=\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4}{6}\right):\frac{\frac{22}{6}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}}{\frac{12}{10}-\frac{7}{10}}=$

$=\left(\frac{10}{9}+\frac{8}{6}\right):\frac{\frac{16}{6}}{\frac{5}{10}}=\left(\frac{20}{18}+\frac{24}{18}\right):\frac{160}{30}=$

$=\left(\frac{20}{18}+\frac{24}{18}\right):\frac{160}{30}=\frac{44}{18}:\frac{16}{3}=\frac{44}{18}\cdot\frac{3}{16}=$

$=\frac{132}{288}=\frac{11}{24}$

β) $B=\frac{A}{\frac{2}{3}}:\frac{1}{A}\cdot 1152=\frac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}:\frac{1}{\frac{11}{24}}\cdot 1152=$

$\frac{33}{48}\cdot\frac{11}{24}\cdot 1152=\frac{363}{1152}\cdot 1152=363.$

γ) Είναι

363	3
121	11
11	11
1	

Άρα $363=3\cdot 11\cdot 11=3\cdot 11^2$

Άσκηση 4

Δίνονται οι αριθμοί $x=\frac{1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{3}}$ **και** $y=\frac{3-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=2^3+(20x+9y):25-3^2+3$$

β) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $90\cdot y:A$

Λύση

α) Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή των x και y:

$x=\frac{1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{20}{12}-\frac{9}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{33}{60}$

ή $x=\frac{11}{20}$.

$y=\frac{3-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{2}}$ ή $y=\frac{14}{9}$.

Τότε έχουμε:

$A=2^3+(20x+9y):25-3^2+3=$

$=2^3+\left(20\cdot\frac{11}{20}+9\cdot\frac{14}{9}\right):25-3^2+3=$

$=2^3+(11+14):25-3^2+3=$

$=8+25:25-9+3=8+1-9+3=3$

β) Η διαίρεση 90y:A, δηλαδή, $\left(90\cdot\frac{14}{9}\right):3$ = 140:3 έχει πηλίκο το 46 και υπόλοιπο το 2, αφού $140=3\cdot 46+2$.

Άσκηση 5

Αν $x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{12}+\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}$

και $y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{6}{8}-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{8}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$

α) Να υπολογίσετε την τιμή τους

β) Να χαρακτηρίσετε Σωστές ή Λάθος τις σχέσεις: i) x>y ii) x<y iii) x>1

γ) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που είναι διαιρέτες της παράστασης $z=3\cdot 2^3\cdot x$.

Λύση

α) $x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{12}+\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{12}+\frac{8}{12}\right)\cdot\frac{1}{4}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{12}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{10}{12}\cdot\frac{1}{4}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{12}{18}+\frac{10}{48}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{24}=\frac{36}{24}-\frac{16}{24}+\frac{5}{24}$

και τελικά $x=\frac{25}{24}$.

$y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{6}{8}-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{8}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]=$

$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{6}{8}-\frac{4}{8}\right)\right]\cdot\left[\frac{16}{6}-\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\right)\right]=$

$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{2}{8}\right]\cdot\left(\frac{16}{6}-\frac{7}{6}\right)=\left[\frac{1}{8}+\frac{6}{8}\right]\cdot\frac{9}{6}=$

$=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{6}=\frac{63}{48}$ και τελικά $y=\frac{21}{16}$

β) Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $x=\frac{25}{24}$ και $y=\frac{21}{16}$ θα βρούμε το ΕΚΠ των παρονομαστών 24 και 16 για να κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα.

Έχουμε: $24=3\cdot 2^3$ και $16=2^4$.

Άρα το ΕΚΠ(16, 24) = $3\cdot 2^4=48$.

Επομένως, οι αριθμοί είναι: $x=\frac{50}{48}$ και $y=\frac{21}{16}=\frac{63}{48}$

Παρατηρούμε ότι $x<y$ και $x>1$.

Άρα, σωστές είναι οι σχέσεις ii και iii και λάθος είναι η σχέση i.

γ) Η παράσταση $z=3\cdot 2^3\cdot x$ γίνεται

$z=3\cdot 2^3\cdot x=3\cdot 2^3\cdot\frac{25}{24}=3\cdot 8\cdot\frac{25}{24}=25$ και οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν το 25 είναι το 1, το 5 και το 25.

Άσκηση 6 (Για λύση)

α) Να βρείτε τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:

$A=\left(5^2+3^5:3^4\right):14+2^6:2^4+\left(28:2^2-3\right):2^2$

$B=\left(5^2-4^2-3^2\right)^{2025}+(3\cdot 4^2-3\cdot 2^2):6^2$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$5A-B^2-2^2\cdot A$$

Απάντηση: α) A=7, B=1 **β)** 6

Άσκηση 7 (Για λύση)

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{2(2\cdot 6-7)-(2\cdot 5-3^2)}{4^2-1-2^2-(9-8)^{2024}}-\frac{3^3-4^2}{2^4-3:3}$$

$$B=\frac{3\cdot 4-2\cdot 4}{(3\cdot 5-2\cdot 6)^2}-\frac{15:3-4}{(17-5)\cdot(9-6)}+\frac{3^3-2\cdot 10}{4^2-3^2}$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή τους

β) Να εξετάσετε αν είναι ανάγωγο το κλάσμα 2A+3B (αν δεν είναι, να το μετατρέψετε σε ανάγωγο)

γ) Να συγκρίνετε τις παραστάσεις A, B

Απάντηση: α) $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{17}{12}$

β) Το κλάσμα $2A+3B=\frac{55}{12}$ είναι ανάγωγο κλάσμα *(γιατί;)*.

γ) Είναι A<B *(γιατί;)*

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης:

1. i (Α) ii (Γ) iii (Δ) iv) (Β) v) (Β)

2. i (Λ) ii (Σ) iii (Λ) iv (Σ) v (Λ) vi (Λ) vii(Λ)

3. α) 3 β) 5

4. α) 7, 11, 19, 23

β) 12, 15, 26, 36

γ) 12, 26, 36

δ) 12, 15, 36

ε) 15

στ) 36

Ασκήσεις επανάληψης Β΄Γυμνασίου

Λήλου Ν. Σάντρα - Παράρτημα ΕΜΕ Ν. Ηλείας

Άσκηση 1.

Αν α = 360 και 25 < β < 50 και επιπλέον ισχύει ότι Μ.Κ.Δ(α, β) = 24 ,τότε να βρείτε τον αριθμό β και το Ε.Κ.Π (α, β)

Λύση

Ισχύει ότι α = 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ και ότι

Μ.Κ.Δ(α, β) = 24 = $2^3 \cdot 3$

Επομένως ο β είναι πολλαπλάσιο του 24, οπότε είναι $\beta = 2^3 \cdot 3 = 24$

ή $\beta = 2 \cdot 24 = 48$

ή $\beta = 3 \cdot 24 = 72$

ή $\beta = 4 \cdot 24 = 96$ κ.ο.κ.

όμως επειδή 25 < β < 50 είναι $\beta = 48 = 2^4 \cdot 3$.

Άρα Ε.Κ.Π(α, β)= $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ = 720.

Άσκηση 2.

Η Μαρία έχει 40 συμμαθητές εκ των οποίων 40% είναι αγόρια. Από τα αγόρια τα $\frac{3}{4}$ είναι μελαχρινοί ,ενώ από τα αγόρια που δεν είναι μελαχρινά ένας έχει ύψος πάνω από 1.70m.

α) Να βρείτε τι ποσοστό των αγοριών δεν είναι μελαχρινά και έχουν ύψος κάτω από 1.70m

β) Η μητέρα της Μαρίας παρατήρησε μια μέρα ότι 12 κορίτσια από την τάξη της κόρης της είναι μελαχρινά και σκέφτηκε ότι το 50% των κοριτσιών στην τάξη είναι μελαχρινά.
Σκέφτηκε σωστά η μητέρα της Μαρίας;

Λύση

α) Τα αγόρια της τάξης είναι $\frac{40}{100} \cdot 40 = \frac{1600}{100} = 16$

Τα αγόρια που είναι μελαχρινά θα είναι τα $\frac{3}{4}$ του 16, δηλαδή $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$.

Συνεπώς αυτοί που δεν είναι μελαχρινοί είναι 16–12 = 4.

Από αυτούς 3 είναι κάτω από 1.70 m

Το ποσοστό αυτών είναι $\frac{3}{16} = 0{,}1875$. Δηλαδή 18,75%

β) Τα κορίτσια στην τάξη (χωρίς τη Μαρία) θα είναι 40–16 = 24 .Άρα το σύνολο των κοριτσιών στην τάξη θα είναι 25.

Το ποσοστό των κοριτσιών της τάξης που είναι μελαχρινά θα είναι $\frac{12}{25} = 0{,}48$ =48%

Είναι 48% < 50%

Άρα η μητέρα της Μαρίας σκέφτηκε λάθος.

Άσκηση 3.

Ο Μάριος αποφάσισε να ασχοληθεί με τη γυμναστική.
Τον Σεπτέμβριο του 2023 έτρεξε 15km σε 1 ώρα και 30 λεπτά ενώ τον Αύγουστο του 2024, που είχε εξασκηθεί περισσότερο, έτρεξε 24km σε 2 ώρες.
Σε σχέση με τον Σεπτέμβριο πόσα λεπτά λιγότερο χρειάζεται ο Μάριος για να διανύσει το 1km τον Αύγουστο;

Λύση

Τα 15km τα διανύει σε 1 ώρα και 30 λεπτά δηλαδή σε 90 λεπτά. Ισχύει ότι 90:15=6

Άρα το Σεπτέμβριο το 1km μπορούσε να το διανύσει σε 6 λεπτά

Στην συνέχεια τα 24km τα διανύει σε 2 ώρες δηλαδή 120 λεπτά. Ισχύει ότι 120:24=5.

Άρα τον Αύγουστο το 1 km μπορεί να το διανύσει σε 5 λεπτά.

Συνεπώς σε σχέση με την αρχική του επίδοση ο Μάριος χρειάζεται 1 λεπτό λιγότερο για να διανύσει το 1 km.

Άσκηση 4.

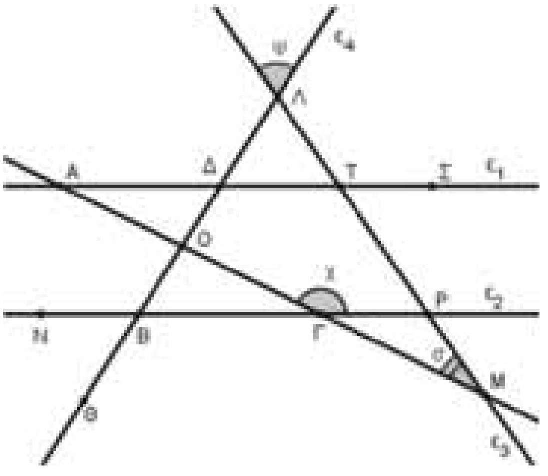
Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και

$O\hat{A}\Delta = 20°$, $N\hat{B}\Theta = 70°$ και $P\hat{T}\Sigma = 70°$.

α) Να βρεθεί η γωνία $\hat{x}$ και το είδος του τριγώνου ΟΒΓ ως προς τις γωνίες του.

β) Να δείξετε ότι το ΔΤΡΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Να βρεθούν οι γωνίες $\widehat{\psi}$ και $\widehat{\sigma}$.



Λύση

α) Η γωνία $\hat{x}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $O\widehat{A}\Delta$ ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε_3. Άρα $\hat{x} = 180° - 20° = 160°$.

Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ορθογώνιο αφού $O\widehat{\Gamma}B = 20°$ ως παραπληρωματική της $\hat{x}$ και $O\widehat{B}\Gamma = 70°$ ως κατακορυφήν της $N\widehat{B}\Theta = 70°$. Και από άθροισμα γωνιών τριγώνου $B\widehat{O}\Gamma = 180° - 70° - 20° = 90°$.

β) Ισχύει ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και οι ΒΤ και ΤΡ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Λ. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες γωνίες στις βάσεις είναι ίσες.

Εδώ ισχύει ότι $\Delta\widehat{B}P = T\widehat{P}B = 70°$ ως εντός εναλλάξ της $P\widehat{T}\Sigma$ και $\Delta\widehat{B}P$ ως κατακορυφήν της $N\widehat{B}\Theta$.

Επιπλέον είναι $\Delta\widehat{T}P = 110°$ ως παραπληρωματική της γωνίας $P\widehat{T}\Sigma$ και $B\widehat{\Delta}T = 110°$ ως εντός εκτός εναλλάξ της $N\widehat{B}\Theta$

γ) Από άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΒΛΡ είναι

$\widehat{\Lambda} = 180° - \widehat{B} - \widehat{P} = 180° - 70° - 70° = 70°$.

Επειδή η $\widehat{\Lambda}$ είναι κατακορυφήν της $\widehat{\psi}$ είναι $\widehat{\psi} = 40°$.

Από άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΡΓΜ έχουμε $\widehat{\sigma} = 180° - \Gamma\widehat{P}M - M\widehat{\Gamma}P = 180° - 110° - 20° = 50°$.

Η $\Gamma\widehat{P}M$ είναι παραπληρωματική της $T\widehat{P}B$, άρα $\Gamma\widehat{P}M = 180° - 70° = 110°$.

Η $M\widehat{\Gamma}P$ είναι παραπληρωματική της $\hat{x}$, άρα $M\widehat{\Gamma}P = 180° - 160° = 20°$.

Άσκηση 5.

α) Να υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{16}\right) - 3\cdot 2\cdot(-2)\cdot 2 - 4\cdot(-3+1)\cdot(-2) + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot(-7)$$

$$B = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5} - \frac{15}{3} + \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{3} + \frac{14}{16}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{-\frac{A}{2}}{\frac{5}{3}}\cdot B - \frac{\frac{3}{2}}{5} + |B - A| + 6$$

γ) Να συγκρίνετε τις παραστάσεις|:

$$-\frac{1}{K},\ -\frac{2}{A},\ -|-B|.$$

Λύση

$$A = \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{16}\right) + 24 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) + \frac{3}{\cancel{5}^{1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{7}^{1}}\right)\cdot\left(-\cancel{7}^{1}\right)$$

$$A = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{16}{3}\right) + 24 - 16 + 3$$

$$A = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}^{1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{3}^{1}}\right) + 24 - 16 + 3$$

$A = -4 + 24 - 16 + 3$ και τελικά $A = 7$.

$$B = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5} - \frac{15}{3} + \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{3} + \frac{14}{16}$$

$$B = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{8} - \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{3}^{1}} + \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{5}^{1}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{3}^{1}} + \frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{16}^{6}}$$

$$B = \frac{10}{2} - \frac{5}{5} + \frac{1}{8} - 5 + 3 + \frac{7}{8} = 5 - 1 - 2 + \frac{1}{8} + \frac{7}{8}$$

$\mathrm{B} = 2 + \frac{8}{8} = 2 + 1$ και τελικά $\mathrm{B} = 3$.

β) $\mathrm{K} = \dfrac{-\frac{\mathrm{A}}{2}}{\frac{5}{3}} \cdot \mathrm{B} - \dfrac{3}{\frac{2}{5}} + |\mathrm{B} - \mathrm{A}| + 6$

$\mathrm{K} = \dfrac{-\frac{7}{2}}{\frac{5}{3}} \cdot 3 - \dfrac{3}{\frac{2}{5}} + |3 - 7| + 6$

$\mathrm{K} = -\frac{21}{10} \cdot 3 - \dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{2}{5}} + |-4| + 6 = -\frac{63}{10} - \frac{15}{2} + 4 + 6 =$

$= -\frac{63}{10} - \frac{75}{10} + 10 = -\frac{138}{10} + \frac{100}{10} = -\frac{38}{10}$

και τελικά $\mathrm{K} = -\frac{19}{5}$

γ) Είναι:

- $-\dfrac{1}{\mathrm{K}} = -\left(\dfrac{1}{-\frac{19}{5}}\right) = -\left(-\dfrac{5}{19}\right) = \dfrac{5}{19}$
- $-\dfrac{2}{\mathrm{A}} = -\dfrac{2}{7}$
- $-|-\mathrm{B}| = -|-3| = -3 = -\dfrac{21}{7}$

Ισχύει ότι $-\frac{21}{7} < -\frac{2}{7} < \frac{5}{19}$, άρα είναι $-|-\mathrm{B}| < -\frac{2}{\mathrm{A}} < -\frac{1}{\mathrm{K}}$.

Άσκηση 6

Ένας βιολόγος μελετά μικροοργανισμούς στο μικροσκόπιο. Ένας μικροοργανισμός στο μικροσκόπιο φαίνεται 2 cm ενώ το πραγματικό του μέγεθος είναι 0,08 mm.

α) Να βρείτε την κλίμακα της μεγέθυνσης του μικροσκοπίου

β) Πόσα εκατοστά θα φαίνεται ένας στο μικροσκόπιο ένας μικροοργανισμός που έχει μέγεθος 0,8 χιλιοστά;

Λύση

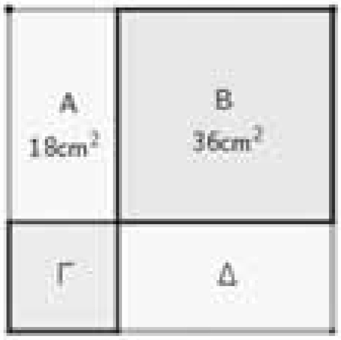
α) Η κλίμακα της μεγέθυνσης είναι ο λόγος $\kappa = \dfrac{\text{Μέγεθος στο μικροσκόπιο}}{\text{Πραγματικό μέγεθος}}$, οπότε ή κλίμακα του μικροσκοπίου είναι $\kappa = \dfrac{20\mathrm{mm}}{0{,}08\mathrm{mm}}$, (αφού 2 cm = 20 mm) οπότε $\kappa = 250$.

Αυτό σημαίνει ότι το μικροσκόπιο μεγεθύνει τα αντικείμενα κατά 250 φορές.

β) Το μικροσκόπιο μεγεθύνει κατά 250 φορές το πραγματικό μέγεθος, άρα ο μικροοργανισμός που έχει μέγεθος 0,8mm θα φαίνεται στο μικροσκόπιο 0,8· 250 = 200 mm = 20 cm.

Άσκηση 7

Το τετράγωνο του διπλανού σχήματος είναι χωρισμένο στα τετράγωνα Β και Γ και στα ορθογώνια Α και Δ. Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου Α είναι $18\mathrm{cm}^2$ και του τετραγώνου Β είναι $36\mathrm{cm}^2$, να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Γ και Δ.



Λύση

Αν είναι α η πλευρά του τετραγώνου Β το εμβαδόν του είναι $E_B = \alpha \cdot \alpha$, άρα α·α = 36 οπότε α = 6cm.

Το ορθογώνιο Α έχει εμβαδόν $18\mathrm{cm}^2$ και η μία πλευρά του είναι α=6cm (όσο και η πλευρά του τετραγώνου Β). Αν η άλλη πλευρά του ορθογωνίου Α είναι β, το εμβαδόν του είναι $E_A = \alpha \cdot \beta$ οπότε είναι α·β = 18 ή 6·β = 18 άρα β = 18:6 ή β = 3cm.

Το τετράγωνο Γ έχει πλευρά β = 3cm οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$E_\Gamma = \beta^2 = 3^2 = 9\mathrm{cm}^2$$

Το ορθογώνιο Δ έχει πλευρές $\alpha = 6\mathrm{cm}$ και $\beta = 3\mathrm{cm}$, επομένως το εμβαδόν του είναι:

$$E_\Delta = \alpha \cdot \beta = 6 \cdot 3 = 18\mathrm{cm}^2.$$

Β΄ Τάξη

Υπάρχουν μικρές και μεγάλες, Δυνάμεις!!

Θέμις Καψή

Όπως έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις, οι δυνάμεις αποτελούν έναν τρόπο να γράφουμε πιο σύντομα ένα γινόμενο με παράγοντες που είναι μεταξύ τους ίσοι.

Ορισμός

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \cdot \alpha$, που έχει ν παράγοντες ίσους με το α λέγεται δύναμη του α στη ν ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^{ν}.

Ο αριθμός α λέγεται βάση της δύναμης και ο αριθμός ν λέγεται εκθέτης.

Η δύναμη του αριθμού στη δευτέρα, δηλαδή το $\boldsymbol{\alpha^2}$, λέγεται και τετράγωνο του α καθώς εκφράζει το εμβαδό τετραγώνου πλευράς α.

Η δύναμη του αριθμού στην τρίτη, δηλαδή το $\boldsymbol{\alpha^3}$, λέγεται και κύβος του α, καθώς εκφράζει τον όγκο κύβου ακμής α.

Το α^1 δηλαδή η πρώτη δύναμη ενός αριθμού α είναι ο ίδιος ο αριθμός α.

Οι δυνάμεις του 1, δηλαδή το 1^{ν} , είναι όλες ίσες με 1.

Για τις δυνάμεις ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Δυνάμεις με ίδια **βάση**	Δυνάμεις με ίδιο **εκθέτη**
$\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$	$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$
$\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$	$\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = (\dfrac{\alpha}{\beta})^{\nu}$
$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu}$	

Επίσης στη β γυμνασίου μαθαίνουμε και τις δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζοντας ότι:

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

Τέλος δεν ορίζεται το 0^0, ενώ οποιοσδήποτε άλλος αριθμός υψωθεί στη μηδενική, το αποτέλεσμα ισούται με 1, δηλαδή $\alpha^0 = 1$, για κάθε $\alpha \neq 0$.

Εξάσκηση

Άσκηση 1η

Να γράψετε όσο το δυνατό απλούστερα τις ακόλουθες αριθμητικές παραστάσεις:

Α. $\dfrac{3^7 \cdot 3^7}{3^{12}} =$

Β. $\dfrac{\left(3^7\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-7}}{\left(3^{-4}\right)^{-3}} =$

Γ. $\dfrac{9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}}{\left(3^{-1}\right)^{-3}} =$

Δ. $\dfrac{8^{-5} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}}{\left(4^{-4}\right)^{-4}} =$

https://images.app.goo.gl/42s8QBCirE1wCQfP6

Ε. $\dfrac{2^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 3^3}{27 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} =$

ΣΤ. $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-7} \cdot 8^{-3} \cdot 3^{-3}}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^2} =$

Άσκηση 2η

Να γράψετε όσο το δυνατό απλούστερα τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

Α. $\dfrac{\left(\alpha^{-3}\right)\cdot 8^{-2}\cdot\left(\alpha^{-3}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^{3}}=$

Β. $\dfrac{\left(\alpha^{-3}\right)^{2}\cdot\beta^{-2}\cdot\left(\alpha^{-3}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{3}}=$

Άσκηση 3η

Τι πρόσημο έχουν οι παρακάτω παραστα-σεις;

Α. $(-2)^{6}$ **Β.** $(-3{,}1)^{16}$

Γ. $(-3{,}1)^{9}$ **Δ.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

Ε. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}$ **ΣΤ.** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-6}$

Άσκηση 4η

Αν η βάση μιας δύναμης είναι μικρότερη του μηδενός και ο εκθέτης της είναι ο μονοψήφιος αριθμός που έχει τους περισσότερους διαιρέτες, να βρείτε το πρόσημο της δύναμης αυτής.

Άσκηση 5η

Σε ποια δύναμη πρέπει να υψωθεί το α^{ν}, για να είναι ίσο με 1;

Άσκηση 6η

Α. Πόσες φορές μεγαλύτερο από το 8 είναι το 2^{4};

Β. Πόσες φορές μικρότερο από το 2 είναι το 4^{-2};

Άσκηση 7η

Α. Με τι πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο αριθμός $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-7}$, ώστε το γινόμενο να είναι ίσο με 1;

Β. Ποιος είναι ο αντίστροφος του αριθμού $\left(-\dfrac{8}{3}\right)^{-6}$;

Γ. Με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρεθεί το 2^{-4}, ώστε το πηλίκο να είναι ίσο με 2;

Άσκηση 8η

Να γράψετε όσο το δυνατό απλούστερα τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

Α. $\left(-4^{2}\right)\cdot 8^{-2}\cdot\left(-2^{-3}\right)^{-1}$

Β. $(-4)^{4}\cdot(-3)^{12}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}\cdot(-9)^{3}$

Γ. $\dfrac{(-3)^{10}\cdot 27^{-3}\cdot 2^{3}\cdot(-8)^{-3}}{3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{9}}=$

Άσκηση 9η

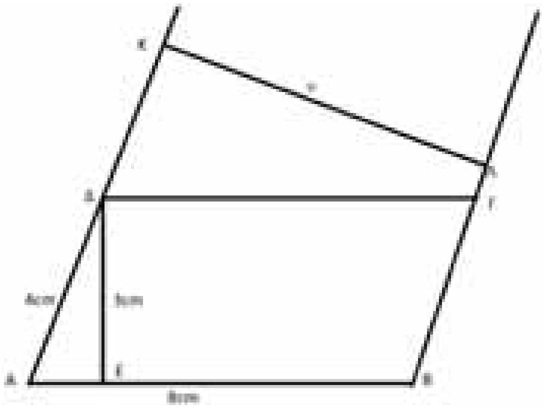
Να γράψετε όσο το δυνατό απλούστερα την παρακάτω αλγεβρική παράσταση:

$$(-2)^{10}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-3}\cdot\left(-2^{2}\right)^{5}\cdot(-\alpha)^{-3}$$

Άσκησης Γεωμετρίας Β΄ Γυμνασίου

Λέοντας Κουτσούρης

1) Να υπολογίσετε την απόσταση υ των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με ΑΔ=4cm ΔΕ=3cm ΑΒ=8cm



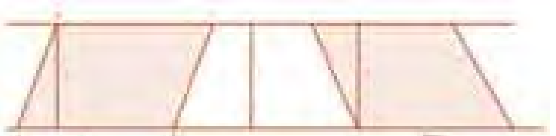
Λύση:

Αν χαρακτηρίσουμε σαν βάση του παραλληλογράμμου την πλευρά ΑΒ, ύψος θα είναι το ΔΕ και συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι Ε=Βάση · Ύψος= ΑΒ·ΔΕ= 8·3=$24cm^2$.
Παίρνουμε τώρα σαν βάση τη ΒΓ (που είναι ίση με την ΑΔ), οπότε ύψος θα είναι το ΚΛ=υ, θα έχουμε λοιπόν Ε= ΒΓ·υ ή 24= 4·υ ή υ=$\frac{24}{4}$ ή υ=6cm.

2) Δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΔΓ μήκους 7cm μετακινούνται πάνω σε 2 παράλληλες ευθείες. Να δείξετε ότι σε οποιοδήποτε θέση τους το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι πάντοτε το ίδιο.

Λύση:

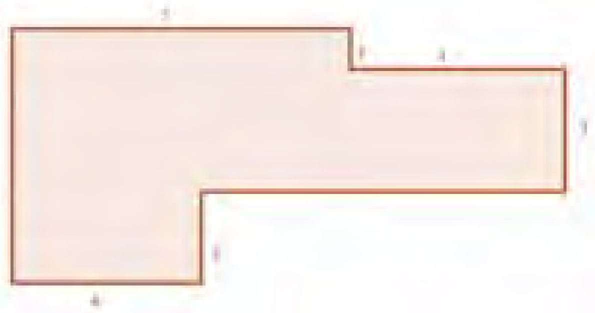
Σε κάθε θέση των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΔΓ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες όπως υποθέσαμε.



Αν πάρουμε τώρα σαν βάση την πλευρά ΑΒ=7cm , και αν η απόσταση των 2 παραλλήλων ευθειών είναι υ τότε για οποιαδήποτε θέση των ΑΒ και ΔΓ το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ που είναι παραλληλόγραμμο θα είναι Ε=7υ cm.

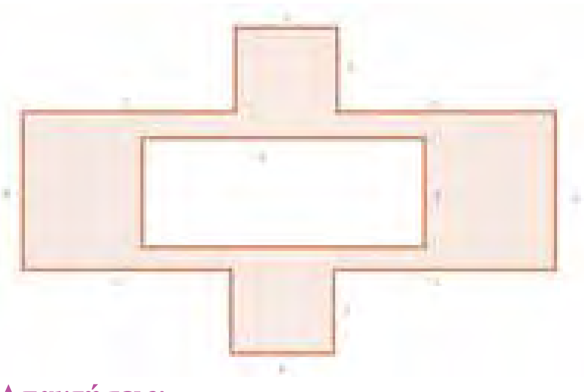
3) Να βρείτε τα εμβαδά των επιφανειών που περικλείονται από τις συγκεκριμένες γραμμές στα πιο κάτω σχήματα.

Σχήμα 1



Σχήμα 2

Την επιφάνεια μεταξύ του ορθογώνιου παραλληλογράμμου και της εξωτερικής γραμμής.

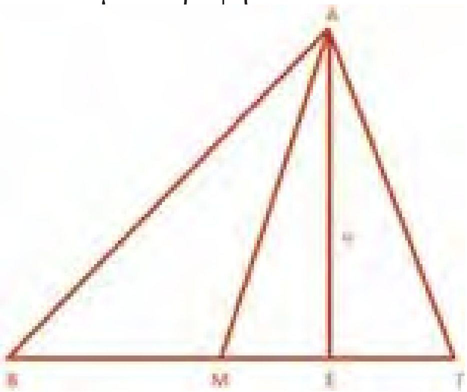


Απαντήσεις:

Αν τα μεγέθη είναι σε εκατοστά τότε η επιφάνεια του 1^{ου} σχήματος είναι Ε= 48cm^2 και η επιφάνεια του 2^{ου} σχήματος είναι Ε =96 cm^2

4) Να δείξετε ότι κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο άνισα τρίγωνα αλλά ισοδύναμα δηλαδή με ίδιο εμβαδό.

Λύση:
Σχεδιάζουμε τυχαίο τρίγωνο και φέρω τη διάμεσο από μια κορυφή του.



Ορίζουμε βάση ΒΓ = β, ύψος ΑΕ = υ και διάμεσος ΑΜ. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις τις ΒΜ και ΜΓ. Αλλά ΒΜ = ΜΓ = $\frac{\beta}{2}$

Επομένως είναι:

(ΑΒΜ)=$\frac{1}{2} BM \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} . \upsilon = \frac{\beta\upsilon}{4}$

(ΑΓΜ)=$\frac{1}{2} \Gamma M \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} . \upsilon = \frac{\beta\upsilon}{4}$

Συνεπώς είναι (ΑΒΜ) = (ΑΓΜ) δηλαδή η διάμεσος ΑΜ χωρίζει το τρίγωνο σε 2 τρίγωνα με ίσα εμβαδά .

5) Τι σχέση θα έχει το εμβαδό ενός τριγώνου με το εμβαδό τριγώνου πού έχει διπλάσια βάση και το μισό ύψος;

Απάντηση :
Αν Ε=β.υ τότε Ε΄= 2β.υ/2= 2βυ/2= β.υ άρα έχουν το ίδιο εμβαδό.

6) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ισοδύναμο (έχει ίδιο εμβαδό) με το τετράγωνο πλευράς 6cm και έχει περίμετρο 28cm. Να βρείτε την απόσταση των μεγαλύτερων πλευρών του παραλληλογράμμου αν ξέρετε ότι η μία του πλευρά είναι 6cm

Υπόδειξη :
Ετετραγώνου=36 cm^2

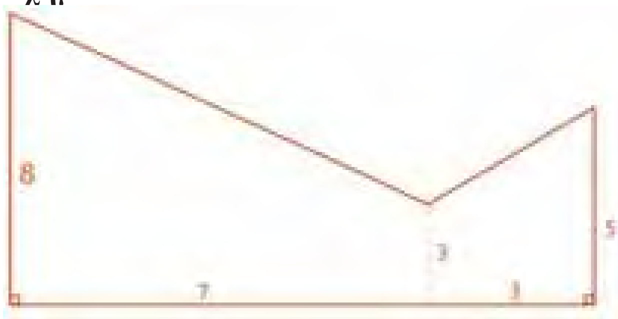
Περίμετρος παραλληλογράμμου Ρ=2 (μικρή πλευρά+ μεγάλη πλευρά) = **28cm**, βρίσκω μεγάλη πλευρά=8cm

Άρα Επαραλληλογράμμου = βάσηχύψος όπου παίρνω για βάση τη μεγάλη πλευρά **8cm**

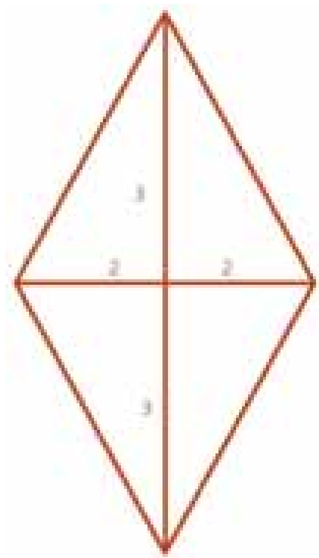
Η απόσταση των δύο μεγαλύτερων πλευρών εκφράζεται από την τιμή πού θα βρούμε για το ύψος υ (**υ=4,5cm**) .

7) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων.

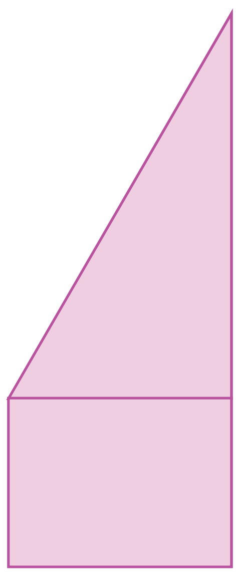
Σχήμα 1



Σχήμα 2. (Οι διαγώνιες του Ρόμβου τέμνονται κάθετα).



Σχήμα 3. (Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που τα μήκη των καθέτων πλευρών του είναι φυσικοί αριθμοί και το εμβαδό του 20 εκατ. Στη μικρή πλευρά του τριγώνου σχεδιάζουμε τετράγωνο, πιο θα είναι το εμβαδό του τετραγώνου. Είναι μοναδική η λύση;).



Γ΄ Τάξη Ασκήσεις στις Ταυτότητες και στην Παραγοντοποίηση

Δήμητρα Σαφαρη – Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Άσκηση 1

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ταυτότητες

α) $(\mathbf{x}+\cdots)^2 = \ \ldots + \mathbf{6x^3} + \ldots$

β) $(\ldots . -\mathbf{3β})^2 = (\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{β^2}} - \cdots + \cdots)$

γ) $(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{ψ}} - \cdots \ )^2 = (\ldots\ldots \ - \mathbf{2} \ldots\ldots)$

δ) $(\mathbf{5x}+ \ldots..)\cdot(\ldots - \ldots..) = \ldots \mathbf{-2ψ^2}$

ε) $(\ldots + \ \ldots)^3 = \mathbf{8x^3} + \mathbf{12x^2} + \ + \ \ldots..$

στ) $\mathbf{27x^3} - \ \ldots = \ (\ldots - \ \ldots\ldots)(\ldots + \mathbf{x} + \ \ldots)$

Λύση

α) $(x+3x^2)^2 = \ 9x^2 + \ 6χ^3 \ 9x^4$

β) $(\frac{2}{β} - 3β)^2 = (\frac{4}{β^2} - 12 + 9β^2)$

γ) $(\frac{x}{ψ} - \frac{ψ}{x} \ )^2 = (\frac{x^2}{ψ^2} \ - 2 + \frac{ψ^2}{x^2})$

δ) $(5χ+\sqrt{2}ψ)\cdot(5x - \sqrt{2}\ ψ) = 25x^2 - 2ψ^2$

ε) $(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + \ 6x + \ 1$

στ) $27x^3 - \ \frac{1}{27} = (3x - \frac{1}{3})\left(9x^2 + x + \ \frac{1}{9}\right)$.

Άσκηση 2

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathbf{α^2}+\mathbf{4})\cdot(\mathbf{x^2}+\mathbf{1}) - (\mathbf{αx}+\mathbf{2})^2 = (\mathbf{2x}-\mathbf{α})^2$

β) $(\mathbf{x}-\mathbf{2})^3 - (\mathbf{x}-\mathbf{1})^3 + \mathbf{3}(\mathbf{x^2}-\mathbf{3x}+\mathbf{3}) = -\mathbf{16}$

Β) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\mathbf{α} - \mathbf{β} + \mathbf{γ})^2$

β) $(\mathbf{2x} - \mathbf{3ψ} + \mathbf{1})^2$

Λύση

α) $α^2x^2 + α^2 + 4x^2 + 4 - [(αx)^2 + 4αx + 4] =$
$α^2x^2 + α^2 + 4x^2 + 4 - α^2x^2 - 4αx - 4 =$
$α^2 + 4x^2 - 4αx = 4x^2 - 4αx + α^2 = (2x-α)^2$

β) $x^3 - 3x^2 2 + 3x2^2 - 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3x^2 - 9x + 9 =$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + 3x^2 - 9x9 = 0.$

Β) α) $(α-β+γ)^2 =$
$$α^2+β^2+γ^2-2αβ+2αγ-2βγ$$

β) $(2x-3ψ+1)^2 =$
$(2x)^2 + (3ψ)^2 + 1^2 - 12xψ + 4x - 6ψ =$
$$4x^2 + 9ψ^2 + 1 - 12xψ + 4x - 6ψ$$

Άσκηση 3

Αν για τους αριθμούς α,β,γ ισχύει α+β+γ=0 να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{α^2} + \mathbf{β^2} = \mathbf{γ^2} - \mathbf{2αβ}$

β) $\mathbf{α^3} + \mathbf{β^3} + \mathbf{γ^3} = \mathbf{3αβγ}$

Λύση

α) από τη υπόθεση προκύπτει:

α+β=–γ (σχέση .1)

(υψώνω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο)

$(α+β)^2 = (-γ)^2$
$α^2 + 2αβ + β^2 = γ^2$
$α^2 + β^2 = γ^2 - 2αβ$

β) $(α+β)^3 = (-γ)^3$
$α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3 = -γ^3$
$α^3 + β^3 + γ^3 = -3α^2β - 3αβ^2$
$α^3 + β^3 + γ^3 = -3αβ(α+β)$ (σχ.1)
$α^3 + β^3 + γ^3 = -3αβ(-γ)$
$α^3 + β^3 + γ^3 = 3αβγ.$

Άσκηση 4

Αν $\mathbf{χ} = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$ **και** $\mathbf{ψ} = \sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$ **να υπολογίσετε :**

α) $\mathbf{x\cdot ψ}$ **β)** $\mathbf{x+ψ}$ **γ)** $(\mathbf{x}+\mathbf{ψ})^2$

δ) $\mathbf{x^2} + \mathbf{ψ^2}$ **ε)** $(\mathbf{x}-\mathbf{ψ})^2$ **στ)** $\mathbf{x^3} + \mathbf{ψ^3}$

Λύση

α) $x\cdot ψ = (\sqrt{2} - 1)\cdot(\sqrt{2} + 1) =$
$(\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

β) $x+ψ = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$

γ) $(x+ψ)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

δ) $x^2 + ψ^2 = (x+ψ)^2 - 2xψ = 8 - 2 = 6$

ε) $(x-ψ)^2 = x^2 - 2xψ + ψ^2 = 6 - 2\cdot 1 = 4$

στ) $x^3 + ψ^3 = (x+ψ)(x^2 - xψ + ψ^2) =$
$2\sqrt{2} \cdot (6-1) = 10\sqrt{2}$.

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι σταθερά.

A= $\mathbf{(6x+2)^2+(8x+1)^2-(10x+2)^2}$

B=$\mathbf{(2x-1)^3-(2x+1)^3+24x^2}$

Λύση

A=$36x^2+24x+4+64x^2+16x+1-(100x^2+40x+4)=$

$100x^2+40x+5-100x^2-40x-4=$

1 (σταθερό).

B=$8x^3-3(2x)^2+3\cdot 2x-1-[(2x)^3+3(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x+1]+24x^2=$

$=8x^3-12x^2+6x-1-(8x^3+12x^2+6x+1)+24x^2=$

$=8x^3-12x^2+6x-1-8x^3-12x^2-6x-1+24x^2=-2$.

Άσκηση 6

A) Αν $\mathbf{x-\psi=(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)}$, **να βρείτε τη τιμή της παράστασης:**

$$\mathbf{A=2025+4x\psi-(x+\psi)^2}$$

B) α) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{(\alpha+2)^2-8\alpha=(\alpha-2)^2}$$

β) Να βρείτε τον αριθμό:

$$\mathbf{A=\sqrt{2028^2-16208}}$$

Λύση

$x-\psi=(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)=\sqrt{5}^2-2^2=$

$=5-4=1$

A=$2025+4x\psi-(x^2+2x\psi+\psi^2)=$

$=2025+4x\psi-x^2-2x\psi-\psi^2=$

$=2025-x^2+2x\psi-\psi^2=$

$=2025-(x^2-2x\psi+\psi^2)$

$=2025-(x-\psi)^2=2025-1=2024$.

B) $(\alpha+2)^2-8\alpha=(\alpha)^2+4\alpha+4-8\alpha=$

$\alpha^2-4\alpha+4=(\alpha-2)^2$

β) $\sqrt{2028^2-16208}=$

$\sqrt{(2026+2)^2-8\cdot 2026}=$

$\sqrt{(2026-2)^2}=\sqrt{2024}^2=2024$

Άσκηση 7

Αν για τους αριθμούς α,β ισχύει: $\mathbf{(\alpha-\beta)^2=-4\alpha\beta}$**, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίθετοι.**

Λύση

$(\alpha-\beta)^2=-4\alpha\beta$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=-4\alpha\beta$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=0$

$(\alpha+\beta)^2=0$

α+β=0, άρα οι α,β είναι αντίθετοι.

Άσκηση 8

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\mathbf{5x+2\alpha x-5\alpha-2x^2}$

β) $\mathbf{3x^4(x-1)+12x^2(1-x)}$

γ) $\mathbf{4x^2\psi^2+8x\psi^3+4\psi^4}$

δ) $\mathbf{x^2+\frac{9}{x^2}-7}$

ε) $\mathbf{x^2(3\psi-2)^3-4x(3\psi-2)^2+12\psi-8}$

στ) $\mathbf{x^2-2x\psi-3\psi^2}$

Λύση

α) $5x+2\alpha x-5\alpha-2x^2=$

$5(x-\alpha)+2x(\alpha-x)=$

$5(x-\alpha)-2x(x-\alpha)=$

$(x-\alpha)(5-2x)$

β) $3x^4(x-1)+12x^2(1-x)=$

$3x^4(x-1)-12x^2(x-1)=$

$3x^2(x-1)(x^2-4)=$

$3x^2(x-1)(x-2)(x+2)$.

γ) $x^2\psi^2+8x\psi^3+4\psi^4=$

$4\psi^2(x^2+2x\psi+\psi^2)=$

$4\psi^2(x+\psi)^2$.

δ) $x^2+\frac{9}{x^2}-7=\quad x^2-6+\frac{9}{\chi^2}-1=$

$x^2-2x\cdot\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2-1=$

$(x-\frac{3}{x})^2-1^2=(x-\frac{3}{x}-1)(x-\frac{3}{x}+1)$

ε) $x^2(3\psi-2)^3-4x(3\psi-2)^2+12\psi-8=$

$x^2(3\psi-2)^3-4x(3\psi-2)^2+4(3\psi-2)=$

$(3\psi-2)[x^2(3\psi-2)^2-4x(3\psi-2)+4]=$

$(3\psi-2)[x(3\psi-2)-2]^2=$

$(3\psi-2)(3x\psi-2x-2)^2$

στ) $x^2-2x\psi-3\psi^2=$

$x^2-2x\psi+\psi^2-4\psi^2=$

$(x-\psi)^2-(2\psi)^2=$

$[(x-\psi)-2\psi][x-\psi+2\psi]=(x-3\psi)(x+\psi)$.

Άσκηση 9

Αν οι αριθμοί x, ψ έχουν άθροισμα 10, να βρείτε τη τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A = x^2 + \psi^2 + 2x\psi + 2x + 2\psi}$$

Λύση

$A=x^2 + \psi^2 + 2x\psi + 2x + 2\psi=$

$=(x+\psi)^2 + 2(x+\psi)$

$=(x+\psi)(x+\psi+2)=10(10+2)=10\cdot 12 = 120$

Άσκηση 10

Αν για τους αριθμούς χ, ψ ισχύει ότι:

$$\mathbf{x^3 - \psi^3 = x\psi^2 - x^2\psi}$$

Να αποδείξετε ότι οι x, ψ είναι ίσοι ή αντίθετοι.

Λύση

$x^3 - \psi^3 - x\psi^2 + x^2\psi=0$

$x^3 - x\psi^2 - \psi^3 + x^2\psi=0$

$x(x^2-\psi^2) - \psi(\psi^2 - x^2) = 0$

$x(x^2-\psi^2) + \psi(x^2 - \psi^2) = 0$

$(x^2-\psi^2)(x+\psi) = 0$

$(x-\psi)(x+\psi)(x+\psi) = 0$

$(x-\psi)\cdot(x+\psi)^2 = 0$

Άρα $x-\psi = 0$ ή $x+\psi = 0$

$x = \psi$ ή $x = -\psi$

Ισχύει : Αν α·β = 0, τότε α = 0 ή β = 0

Άσκηση 11

Αν για τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ ΑΒ= γ, ΒΓ= α, ΓΑ= β ισχύει ότι:

$$\mathbf{(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Λύση

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma = 3\alpha^2+3\beta^2+\gamma^2$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma = 0$

$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=0$ οπότε

$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2 = 0$

Ισχύει ότι αν: $\alpha^2+\beta^2 = 0$ τότε $\alpha=\beta=0$

Προκύπτει ότι:α–β=0 και α–γ=0 και β–γ=0.

Άρα α=β=γ που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 12

Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha=\kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\cdot\lambda$, και $\gamma = \kappa^2-\lambda^2$ με $\kappa>\lambda>0$

α) Να εξηγήσετε γιατί α > γ και α > β

β) Να αποδείξετε α, β, γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση

α) ισχύει ότι: $\alpha-\beta=\kappa^2+\lambda^2-2\kappa\lambda =$

$\kappa^2+\lambda^2-2\kappa\lambda=(\kappa-\lambda)^2>0$

αφού είναι άθροισμα θετικών όρων άρα **α> β**

και $\alpha-\gamma=\kappa^2+\lambda^2-(\kappa^2-\lambda^2) =$

$=\kappa^2+\lambda^2-\kappa^2+\lambda^2 = 2\lambda^2>0$

Άρα **α> γ.**

β) από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η μεγαλύτερη πλευρά είναι η **α,** και θα εξετάσω αν ισχύει το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος.

$$\gamma^2+\beta^2=(\kappa^2-\lambda^2)^2+(2\kappa\lambda)^2=$$
$$\kappa^4+\lambda^4-2\kappa^2\lambda^2+4\kappa^2\lambda^2=$$
$$\kappa^4+\lambda^4+2\kappa^2\lambda^2=(\kappa^2+\lambda^2)^2=\alpha^2$$

Ισχύει $\gamma^2+\beta^2=\alpha^2$ είναι ορθογώνιο.

Με υποτείνουσα τη πλευρά α.

Άσκηση 13

Να παραγοντοποιήσετε το παρακάτω τριώνυμο με δύο τρόπους.

$$\mathbf{A=-4x^2+8x-3}$$

α΄ τρόπος

$A=-4x^2+6x+2x-3=$

$=-2x(2x-3)+(2x-3)=(-2x+1)(2x-3)$

β΄ τρόπος

$A=-4x^2+8x-3$

$\alpha=-4,\ \beta=8,\ \gamma=-3$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta=8^2-4(-4)(-3)=$

$\Delta=64-48=16$

$$x_1=\frac{-8+\sqrt{16}}{2(-4)}=\frac{-8+4}{-8}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-8-\sqrt{16}}{2(-4)}=\frac{-8-4}{-8}=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$$

Άρα $A=-4x^2+8x-3=$

$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(-2x+1)(2x-3).$

Γ΄ Τάξη

Ασκήσεις Επανάληψης σε Πράξεις Ανάμεσα σε Ρητούς Αριθμούς

Μαρία Παππά

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Για να προσθέσουμε 2 ομόσημους αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε μπροστά το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε 2 ετερόσημους αριθμούς αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και βάζουμε μπροστά το κοινό τους πρόσημο.

Π.χ. $(+8)+(-2)=+6, \quad (-8)+(-2)=-10, \quad (-8)+(+2)=-6$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να αφαιρέσουμε 2 ρητούς αριθμούς αρκεί να προσθέσουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου .

$$\boldsymbol{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$$

Π.χ. $(+7)-(-9)=(+7)+(+9)=16$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΌΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να πολλαπλασιάσουμε 2 ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και αν είναι ομόσημοι βάζουμε μπροστά «+», ενώ αν είναι ετερόσημοι βάζουμε «-».

Π.χ. $(-3)\cdot(-2)=+6, \quad (+3)\cdot(-2)=-6$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να διαιρέσουμε 2 ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\boldsymbol{\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \quad , \quad \beta\neq 0}$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΤΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ
2. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ – ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ
3. ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ – ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

Αν υπάρχουν **παρενθέσεις** προηγούνται οι πράξεις σε αυτές με την παραπάνω σειρά.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

- Αν έξω από μία παρένθεση υπάρχει «+» , φεύγει η παρένθεση και το «+» και να βγουν όλοι οι αριθμοί που υπάρχουν σε αυτή χωρίς να αλλάξουν πρόσημα.
- Αν έξω από μία παρένθεση υπάρχει -+» , φεύγει η παρένθεση και το «-» και να βγουν όλοι οι αριθμοί που υπάρχουν σε αυτή με αντίθετα πρόσημα.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις: $\boldsymbol{A=(-15):(-3)+6\cdot(-2-1)-12:(-8+11)}$

Λύση: Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρανθέσεις: $A=(-15):(-3)+6\cdot(-3)-12:(+3)$
Στη συνέχεια οι διαιρέσεις και οι πολλαπλασιασμοί: $A=+5-2-4$. Οπότε: $A=\ +5-6=-1$

2. Να βρείτε την τιμή της παρακάτω παράστασης για τις τιμές των γραμμάτων που δίνονται: $\mathbf{A=x-(y+z)-(x-z)+(-y+z)-y, \quad x=-3,\ y=-2\ ,\ z=4}$

Λύση: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις είναι προτιμότερο να κάνουμε πρώτα απαλοιφή παρανθέσεων και αφού την απλοποιήσουμε στο τέλος αντικαθιστούμε τις μεταβλητές με τα νούμερα που δίνονται.

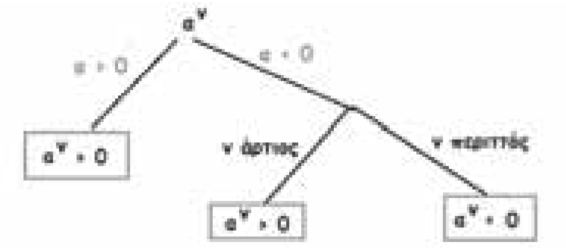
$$A=x-(y+z)-(x-z)+(-y+z)-y=x-y-z-x+z-y+z-y$$

$$=x-x-y-y-y-z+z+z=-3y+z=-3\cdot(-2)+4=6+4=10$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ που έχει ν παράγοντες ισους με α, λέγεται δύναμε του α ή νιοστή δύναμη του α και συμβολίζεται με α^{ν}. $\boldsymbol{\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ



Π.χ. $3^4 > 0$, $(-3)^4 > 0$, $(-3)^3 < 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
2. $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
3. $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
5. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

Επίσης:

1. $\alpha^0 = 1,\ \alpha \neq 0$
2. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}, \alpha \neq 0$
3. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις: $\boldsymbol{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}-1\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - (-6+4)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =}$

Λύση

$\left(2-\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}-1\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - (-6+4)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$

$\left(\frac{6}{3}-\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}-\frac{3}{3}\right)^2 : \left(-\frac{8}{27}\right) - (-2)^3 - \left(+\frac{1}{9}\right) =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{27}{8}\right) + 8 - \frac{1}{9} =$

$\frac{1}{9} - \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{27}{8}\right) + 8 - \frac{1}{9} =$

$\frac{1}{9} + \frac{108}{72} + 8 - \frac{1}{9} =$

$\frac{1}{9} + \frac{3}{2} + 8 - \frac{1}{9} =$

$\frac{3}{2} + 8 =$

$\frac{3}{2} + \frac{16}{2} = \frac{19}{2}$

2. Κάντε τις παρακάτω πράξεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

a. $(-2)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **b.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ **c.** $\left(-\frac{1}{2}xy^{-1}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}x^{-1}y\right)^{-1}$

Λύση

a. $(-2)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

$(-2)^{-4}\cdot(-2)^3 =$ Εδώ θυμίζουμε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

$(-2)^{-4+3} =$ $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$

$(-2)^{-1} =$ $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$

$\frac{1}{(-2)^1}=-\frac{1}{2}$

b. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}=$ $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(\alpha\cdot\beta)^{\nu}$

$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\right]^{-5}=$

$\left(-\frac{2}{4}\right)^{-5}=$

$\left(-\frac{4}{2}\right)^{5}=$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

$(-2)^5=-32$

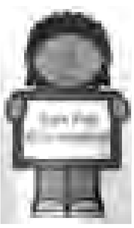
c. $\left(-\frac{1}{2}xy^{-1}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}x^{-1}y\right)^{-1}=$

$\left(-\frac{xy^{-1}}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3x^{-1}y}{2}\right)^{-1}=$

$\left(\frac{2}{xy^{-1}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3x^{-1}y}\right)^{1}=$

$\frac{4}{x^2y^{-2}}\cdot\frac{2}{3x^{-1}y}=$

$\frac{8}{3xy^{-1}}$



1. Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων:

a. $-4\cdot 2-5\cdot 3+7\cdot 2+6\cdot 4-4$ b. $(-4+2\cdot 6)-(8-3\cdot 4)+(-3\cdot 4-6)$

$c.$ $(-2)^3-(-3-2)^2+(4-7)^2-(-2+3)^{20}$

2. Να βρείτε τα αποτελέσματα των πράξεων:

$\boldsymbol{\alpha}.$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ $\boldsymbol{\beta}.$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ $\boldsymbol{\gamma}.$ $(-4)^{-3}$ $\boldsymbol{\delta}.$ $(-2)^{-4}$ $\boldsymbol{\varepsilon}.$ $(-4)^{-3}$

3. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να βρείτε τα αποτελέσματα:

$\boldsymbol{\alpha}.$ $\frac{2^{12}\cdot 2^{-6}}{2^3\cdot 2^{-2}}$ $\boldsymbol{\beta}.$ $\frac{(-4)^{-5}\cdot(-4)^{-3}}{(-4)^{-2}\cdot(-4)^{-3}}$ $\boldsymbol{\gamma}.$ $(-3)^5\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^5$ $\boldsymbol{\delta}.$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-15}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-15}$

4. Αν $x=-16,\ y=\frac{1}{8},$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=(x^{-1}\cdot y^3)^2\cdot(x^{-4}\cdot y^{-2})^{-1}\cdot y^{-6}$

Γ΄ Τάξη

Η έννοια της ισότητας σχημάτων και η ισότητα τριγώνων μέσω μετασχηματισμών

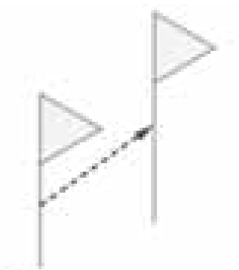
Δημήτρης Διαμαντίδης

Η ισότητα σχημάτων

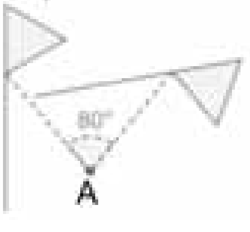
Δύο σχήματα του επιπέδου λέμε ότι είναι ίσα, όταν είναι δυνατόν να συμπέσουν, αν αλλάξει η θέση τους με κατάλληλο τρόπο. Δηλαδή να εφαρμόσει με ακρίβεια το ένα με το άλλο, χωρίς να μεγαλώσουν ή να μικρύνουν οι πλευρές τους, χωρίς να αλλάξουν τα μέτρα των γωνιών τους και γενικά χωρίς να αλλοιωθούν. Χρησιμοποιώντας την σύμπτωση δύο σχημάτων για να τεκμηριώσουμε την ισότητά τους, ακολουθούμε αυτά που αναφέρονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη[1]. Ωστόσο, κάθε οικογένεια σχημάτων έχει τα δικά της ειδικά χαρακτηριστικά που μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε ειδικά κριτήρια ισότητας.

Για να αλλάξουμε τη θέση των σχημάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους εξής γεωμετρικούς μετασχηματισμούς: την παράλληλη μετατόπιση, την στροφή και την ανάκλαση.

Στην παράλληλη μετατόπιση μετακινούμε ένα σχήμα κατά ένα διάνυσμα, όπως στην εικόνα.

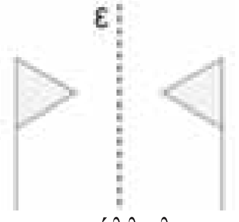


Στη στροφή περιστρέφουμε ένα σχήμα κατά μια γωνία με δοσμένο μέτρο (π.χ. 80^o), γύρω από ένα σημείο (όπως το Α).



[11] Τα Στοιχεία είναι το πολύ γνωστό και σημαντικό έργο δεκατριών βιβλίων του Ευκλείδη που γράφτηκε τον 3^o αιώνα π.Χ. Η ισότητα συναντάται στις πρώτες σελίδες του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων. Με προσεκτική μελέτη της αναφοράς του Ευκλείδη στην ισότητα, ο αναγνώστης μπορεί να βγάλει ενδιαφέροντα συμπεράσματα για το «τι εννοεί» ο Ευκλείδης όταν χαρακτηρίζει δύο σχήματα ίσα.

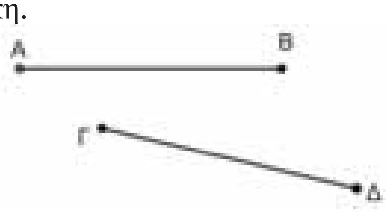
Στην ανάκλαση, βρίσκουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας μια ευθεία, όπως η (ε).



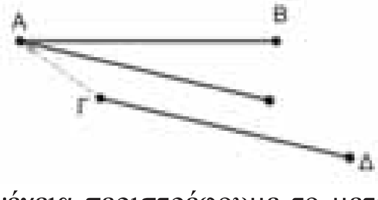
Το κοινό χαρακτηριστικό της παράλληλης μετατόπισης, της στροφής και της ανάκλασης είναι ότι δεν αλλοιώνουν τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών των σχημάτων που μετασχηματίζονται.

Ευθύγραμμα τμήματα

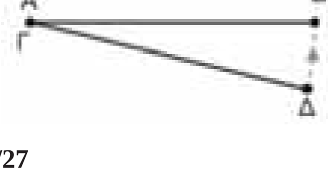
Για να είναι ίσα δύο ευθύγραμμα τμήματα αρκεί να έχουν ίσα μήκη, γιατί τότε μπορούμε, αλλάζοντας τη θέση τους να τα κάνουμε να συμπέσουν. Για παράδειγμα, στο σχήμα τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν ίσα μήκη.



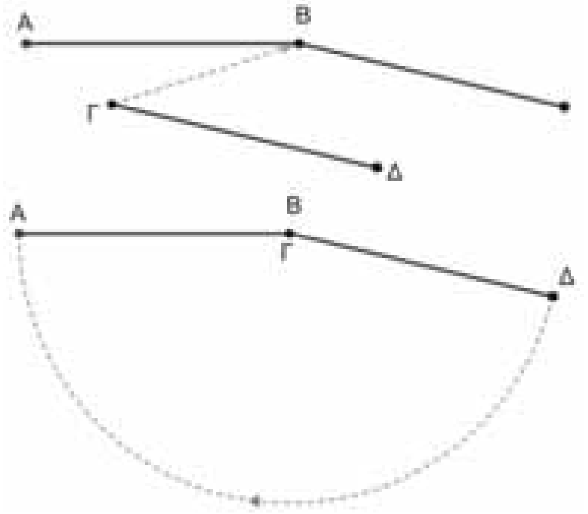
Αλλάζοντας με κατάλληλο τρόπο τη θέση του ΓΔ, ώστε το μήκος του να παραμείνει αμετάβλητο, αυτό μπορεί να συμπέσει με το ΑΒ. Αρχικά μπορούμε να μετατοπίσουμε παράλληλα το ΓΔ, ώστε το σημείο Γ να συμπέσει με το Α:



Στη συνέχεια περιστρέφουμε το μετατοπισμένο ΓΔ γύρω από το Γ, ώστε το Δ να συμπέσει με το Β.



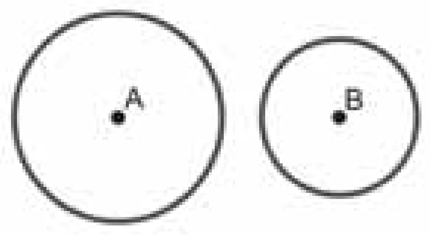
Ένας άλλος τρόπος είναι να μετατοπίσουμε παράλληλα το ΓΔ, ώστε το Γ να συμπέσει με το Β και στη συνέχεια να το περιστρέψουμε γύρω από το Γ (ή το Β), ώστε το Δ να συμπέσει με το Α, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είχαν άνισα μήκη, τότε δε θα μπορούσαν να συμπέσουν με κανέναν τρόπο.
Επομένως, η ισότητα των μηκών είναι κριτήριο για το αν είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσα ή όχι.

Κύκλοι

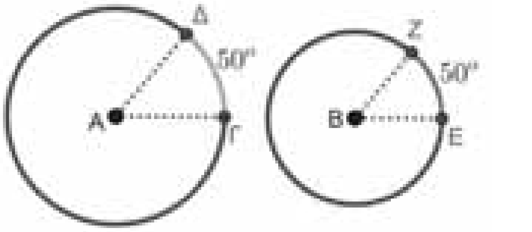
Για να είναι δύο κύκλοι ίσοι, δηλαδή για να συμπίπτουν ο ένας με τον άλλο, ένα κριτήριο είναι να έχουν ίσες ακτίνες. Πράγματι, αν μετατοπίσουμε τον έναν κύκλο, ώστε να συμπέσουν τα κέντρα τους, δηλαδή να γίνουν ομόκεντροι, τότε συμπίπτουν και οι κύκλοι μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.
Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι με κέντρα Α και Β έχουν άνισες ακτίνες. Ακόμα κι αν μετατοπίσουμε έναν από τους δύο, ώστε το Α να συμπίπτει με το Β, οι κύκλοι δεν θα συμπέσουν.



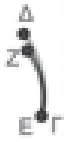
Άρα είναι άνισοι.

Τόξα

Στο σχήμα έχουμε δύο άνισους κύκλους.



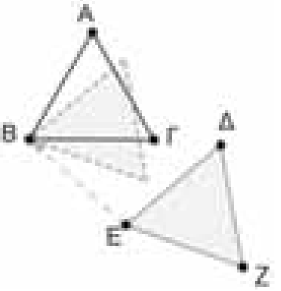
Σε κάθε έναν από αυτούς έχουμε από ένα τόξο μέτρου 50°, το $\overset{\frown}{ΓΔ}$ και το $\overset{\frown}{ΕΖ}$. Αυτά τα τόξα δεν μπορούν να εφαρμόσουν το ένα με το άλλο.
Για παράδειγμα αν μετατοπίσουμε το ένα από τα τόξα, ώστε το Ε και το Γ να ταυτιστούν, θα δούμε ότι δεν υπάρχει τρόπος σύμπτωσης των τόξων, όποια περιστροφή ή



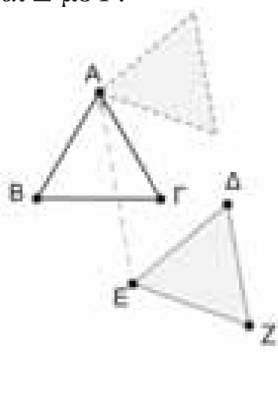
άλλο μετασχηματισμό και αν επιχειρήσουμε. Επομένως τα τόξα δεν είναι ίσα.
Για να είναι ίσα δύο τόξα, δεν αρκεί να έχουν το ίδιο μέτρο. Επιπλέον χρειάζεται να ανήκουν και σε ίσους κύκλους.

Ισόπλευρα τρίγωνα

Ας δούμε την περίπτωση δύο ισοπλεύρων τριγώνων. Για να είναι δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ίσα αρκεί οποιαδήποτε από τις πλευρές του ενός τριγώνου να είναι ίση με οποιαδήποτε από τις πλευρές του άλλου. Τότε όλες οι πλευρές του ΑΒΓ είναι ίσες με όλες τις πλευρές του ΔΕΖ και τα τρίγωνα εφαρμόζουν ακριβώς.
Για παράδειγμα μπορούμε να μετατοπίσουμε το ΔΕΖ ώστε η κορυφή Ε να συμπέσει με τη Β.



Στη συνέχεια μπορούμε να το περιστρέψουμε κατάλληλα γύρω από το Β, ώστε να συμπέσουν οι κορυφές Δ με Α και Ζ με Γ.
Ένας άλλος τρόπος να εφαρμόσουν τα δύο τρίγωνα είναι να μετατοπίσουμε το ΔΕΖ, ώστε η κορυφή Ε να συμπέσει με την Α. Στη συνέχεια θα κάνουμε κατάλληλη περιστροφή του τριγώνου γύρω από το σημείο Α.

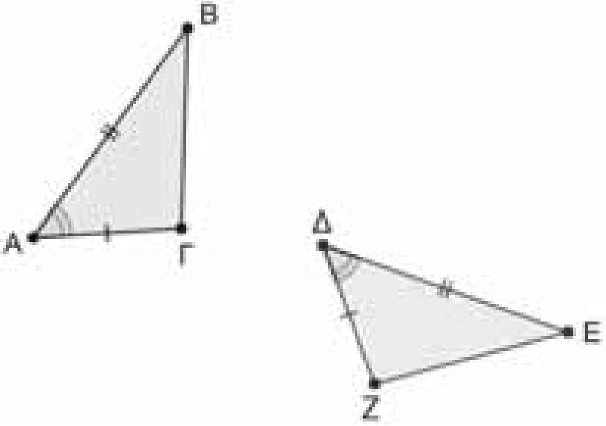


Έτσι θα συμπέσουν οι κορυφές Ζ με Β και Δ με Γ.

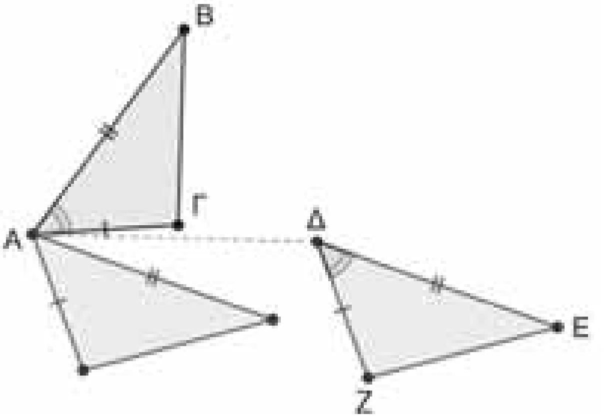
Σκαληνά τρίγωνα

1η περίπτωση

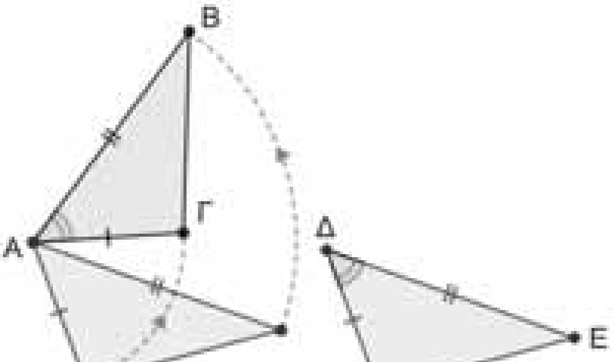
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι σκαληνά και έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $AB=\Delta E$ και $A\Gamma=\Delta Z$.



Αρχικά μετατοπίζουμε το ΔΕΖ έτσι ώστε οι κορυφές Δ και Α να ταυτιστούν.



Στη συνέχεια το περιστρέφουμε κατάλληλα γύρω από το σημείο Α, ώστε να εφαρμόσουν τα τρίγωνα.



Με αυτούς τους μετασχηματισμούς:

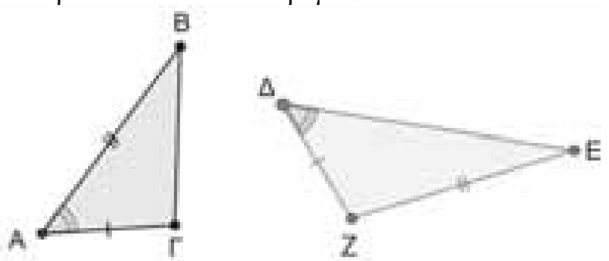
- Το μήκος της ΔΕ διατηρείται και είναι ίσο με το μήκος της ΑΒ, γι’ αυτό η κορυφή Ε συμπίπτει με τη Β.
- Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta}$ διατηρείται και παραμένει ίσο με το μέτρο της $\hat{A}$.
  Επίσης, το μήκος της ΔΖ διατηρείται και είναι ίσο με το μήκος της ΑΓ. Έτσι οι κορυφές Ζ και Γ συμπίπτουν.

Επομένως τα τρίγωνα εφαρμόζουν ακριβώς και άρα είναι ίσα.

Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει τρόπος να εφαρμόσουν τα τρίγωνα, με σύμπτωση άλλων ζευγών κορυφών μεταξύ τους, παρά μόνο όπως παραπάνω: η Α με τη Δ, η Β με την Ε και η Γ με τη Ζ.

2η περίπτωση

Στην 1η περίπτωση τα τρίγωνα είχαν δύο πλευρές του ενός ίσες με δύο του άλλου (μία προς μία) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα με δύο πλευρές του ενός ίσες, μία προς μία, με δύο του άλλου και μία γωνία ίση, χωρίς να είναι αναγκαστικά η περιεχόμενη των δύο αυτών πλευρών και στα δύο τρίγωνα.

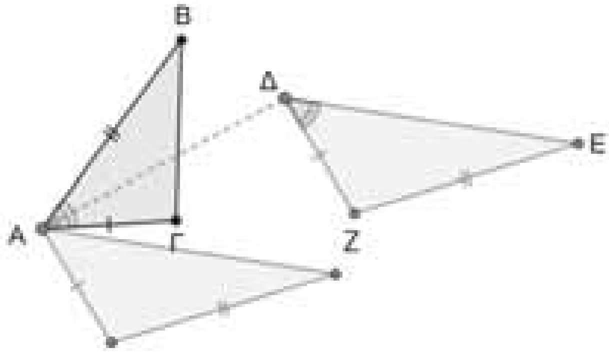


Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα έχουμε δύο σκαληνά τρίγωνα, το ΑΒΓ και το ΔΕΖ με ΑΒ=ΖΕ, ΑΓ=ΔΖ και $\hat{A}=\hat{\Delta}$. Η γωνία $\hat{\Delta}$ δεν περιέχεται στις ίσες πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ.

Επίσης, εφόσον είναι σκαληνά η ΑΒ και ΔΕ είναι άνισες.

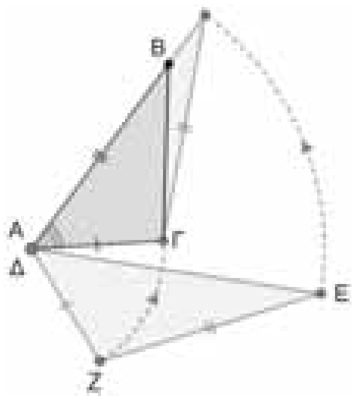
Ας προσπαθήσουμε με μετασχηματισμούς να εφαρμόσουμε το ΔΕΖ στο ΑΒΓ.

Αρχικά μετατοπίζουμε το ΔΕΖ έτσι ώστε το Δ να ταυτιστεί με το Α, όπως στο σχήμα.



Στη συνέχεια περιστρέφουμε το τρίγωνο, με κέντρο το Α κατά κατάλληλη γωνία, ώστε οι πλευρές των ίσων γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ να συμπέσουν:

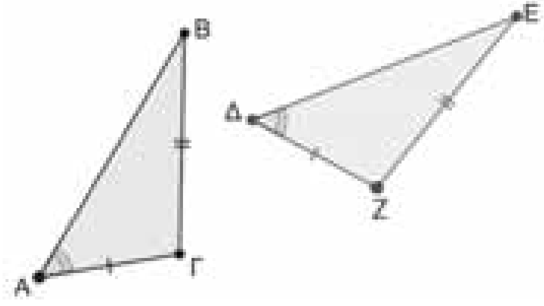
Οι πλευρές των γωνιών, ως ημιευθείες συμπίπτουν, καθώς οι γωνίες έχουν ίσα μέτρα. Ωστόσο τα τρίγωνα δεν εφαρμόζουν, επομένως δεν είναι ίσα.



Αυτό συμβαίνει, γιατί οι πλευρές ΑΒ και ΔΕ είναι άνισες, δηλαδή δεν έχουν ίσα μήκη. Έτσι τα σημεία Β και Ε δε συμπίπτουν μετά την στροφή, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

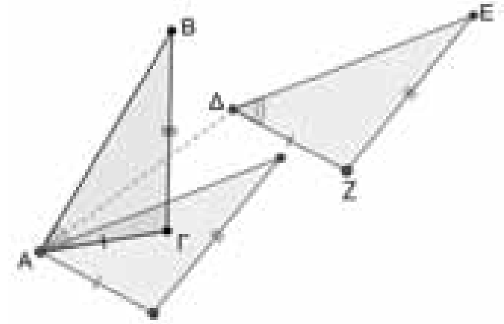
$3^{η}$ περίπτωση

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε πάλι δύο τρίγωνα με δύο πλευρές τους ενός ίσες με δύο του άλλου και μία γωνία του ενός ίση με μία του άλλου.

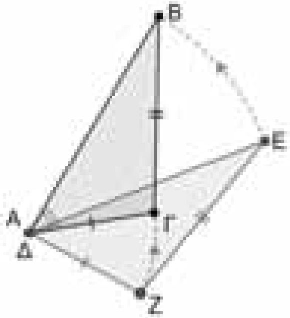


Σε αυτή την περίπτωση καμία από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ δεν περιέχεται στις ίσες πλευρές, ΑΓ=ΔΖ και ΒΓ=ΕΖ.

Ωστόσο φαίνεται ότι με κατάλληλους μετασχηματισμούς τα τρίγωνα εφαρμόζουν, άρα είναι ίσα. Αρχικά μετατοπίζουμε το ΔΕΖ, ώστε η κορυφή Δ να συμπέσει με την Α.



Στη συνέχεια περιστρέφουμε το ΔΕΖ γύρω από το Δ κατάλληλα και τα τρίγωνα συμπίπτουν.
Άρα τα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



Επομένως. από τις τρεις περιπτώσεις που εξετάσαμε, βλέπουμε ότι:

- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές του ενός ίσες με δύο του άλλου (μία προς μία) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς γίνεται να εφαρμόσουν και άρα να είναι ίσα (όπως στην $1^{η}$ περίπτωση).
- Αν οι ίσες γωνίες δεν είναι περιεχόμενες των ίσων πλευρών, τότε ενδεχομένως τα τρίγωνα να μην εφαρμόζουν, άρα μπορεί να μην είναι ίσα (στην $3^{η}$ περίπτωση ήταν ίσα, ενώ στην $2^{η}$ όχι).

Το κριτήριο ισότητας τριγώνων που αντιστοιχεί στα παραπάνω, αναφέρεται ως «πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων» και είναι το εξής:

«Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα».

Έχουμε ακόμα δύο κριτήρια τριγώνων, όπως και ειδικότερα κριτήρια ισότητα για τα ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία μπορείτε να αναζητήσετε στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ γυμνασίου. Έτσι, χρησιμοποιούμε τα κριτήρια για να αποδείξουμε με συλλογισμούς ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Σκεφτείτε: Μπορούν να διαμορφωθούν άλλα κριτήρια για ειδικές περιπτώσεις τριγώνων, π.χ. για τα ισοσκελή ή για τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα;

Η **ακολουθία των αριθμών** Fibonacci.

Μαρία Παππά

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

- ✓ Οι δύο πρώτοι αριθμοί Fibonacci είναι 0 και **1.**
- ✓ Κάθε επόμενος αριθμός είναι το **άθροισμα** των δύο προηγούμενων .
- ✓ Ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της **ακολουθίας Fibonacci** τείνει προς την **χρυσή τομή ή χρυσή αναλογία,** δηλαδή τον αριθμό **φ=1,618033989…**

Υπέροχοι και μυστήριοι χαρακτηρίζονται αυτοί οι **αριθμοί** και απαντώνται παντού και σε διάφορες επιστήμες.

Εκπληκτικός είναι ο τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί **Fibonacci** εμφανίζονται στη **φύση.** Είναι το αριθμητικό **σύστημα** της φύσης.

Εμφανίζονται παντού:

- στη διάταξη των φύλλων ενός φυτού,
- στο μοτίβο των **πετάλων** ενός λουλουδιού,

- Τα **φυτά** δε γνωρίζουν για την ακολουθία Fibonacci – απλά μεγαλώνουν με τον πιο **αποτελεσματικό** τρόπο.
- Αν μετρήσει κανείς τα πέταλα ενός λουλουδιού, θα διαπιστώσει ότι ο **αριθμός** τους είναι συχνά 3, 5, 8, 13, 21, 34 ή ακόμα και 55. Σπάνια θα συναντήσουμε λουλούδι με δύο **πέταλα.**
- Υπάρχουν εκατοντάδες **είδη,** τόσο άγρια όσο και καλλιεργημένα με πέντε πέταλα.
- Τα **λουλούδια** με **8** πέταλα δεν είναι τόσο κοινά όπως με τα **5**, αλλά υπάρχουν αρκετά γνωστά είδη.
- Λουλούδια με **13, 21 και 34 πέταλα** είναι επίσης αρκετά κοινά.

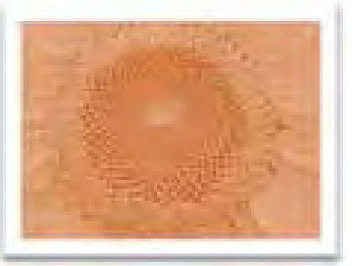
  Μπορούμε να μετρήσουμε στις **μαργαρίτες 13, 21, 34, 55,** ή και **89** πέταλα.

Φωτογραφία knitalatte11

Οι κοινές μαργαρίτες του **αγρού** έχουν συνήθως **34** πέταλα γεγονός που σίγουρα επηρεάζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού «μ’ αγαπά δεν μ’ αγαπά».

Ο **κρίνος** έχει **3** πέταλα, η **νεραγκούλα** έχει **5**, κ.λ.π.

Ηλίανθος



Φωτογραφία lucapost

Οι σπόροι του **ηλίανθου** κατανέμονται **κυκλικά**. Η σπείρα είναι προς τα έξω ενώ έχει διπλή κατεύθυνση, δηλαδή και όπως κινούνται οι **δείκτες** του ρολογιού και αντίστροφα από το **κέντρο** του **λουλουδιού.** Ο αριθμός των σπειρών στο κάθε φυτό **δεν είναι ίδιος**. Γιατί γενικά είναι είτε **21** και **34**, είτε **34** και **55**, είτε **55** και **89**, ή **89** και **144**; Ο αριθμός των σπειρών ενός **ηλίανθου** και προς τις δύο κατευθύνσεις είναι **2 διαδοχικοί** αριθμοί στην ακολουθία **Fibonacci.**

Φωτογραφία JJ Harrison

Κουκουνάρια

Όλα τα κουκουνάρια αναπτύσσονται **σε σπείρες,** ξεκινώντας από τη βάση όπου είναι ο μίσχος, και πηγαίνοντας **κυκλικά**μέχρι να φτάσουμε στην κορυφή.

Φωτογραφία RDBury

Χαμομήλι

Στη **φωτογραφία** παραπάνω βλέπετε ένα μικρό **χαμομήλι.**

Τα πέταλα που βρίσκονται στο κέντρο του **λουλουδιού** σχηματίζουν σπείρες, σύμφωνα με τη ακολουθία **Fibonacci**.

Υπάρχουν 21 πιο σκούρες μπλε σπείρες και 13 σπείρες με τυρκουάζ χρώμα.

Το 13 και το 21 είναι διαδοχικοί **αριθμοί** στην ακολουθία Fibonacci.

Φωτογραφία OpenCage

Σαλιγκάρι

Το κέλυφος των **σαλιγκαριών** ακολουθεί και αυτό την ακολουθία Fibonacci.

Το ίδιο και το κέλυφος του **ναυτίλου** (μαλάκιο).

Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι το κέλυφος του ναυτίλου αναπτύσσεται σε τρισδιάστατες σπείρες, ενώ το κέλυφος των **σαλιγκαριών** αναπτύσσεται σε δισδιάστατες**σπείρες.**

Φωτογραφία Chris 73

Δελφίνι

- Η ακολουθία εφαρμόζεται στο σώμα του **δελφινιού,** στον αστερία, αλλά και στο **ανθρώπινο** σώμα.

Άνθρωπος

- Η αναλογία του μήκους **του πήχη του χεριού** προς το μήκος του χεριού ισούται με 1.618…, δηλαδή ισούται με τη **Χρυσή Αναλογία**.

- Όμοια, η χρυσή τομή και η ακολουθία Fibonacci μπορούν να βρεθούν και στα **δάκτυλά** μας.

- Η **αναλογία** μεταξύ του μήκους και του φάρδους του προσώπου και η αναλογία του μήκους του στόματος προς το φάρδος της μύτης είναι μερικά ακόμα **παραδείγματα** της εφαρμογής των αριθμών αυτών στο ανθρώπινο **σώμα.**

Σίγουρα, αυτός ο **συνδυασμός** φύσης και μαθηματικών **δεν είναι τυχαίος**!

Άραγε, τα μαθηματικά αντιγράφουν τη φύση ή η φύση τα μαθηματικά;

Ε**κπληκτικός** ο τρόπος που συνδυάζονται, όπως και το **αποτέλεσμα!**

28η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων
Αττάλεια, Τουρκία
25 - 30 Ιουνίου 2024

Η **28η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (ΒΜΟΝ)** πραγματοποιήθηκε από 25 έως 30 Ιουνίου 2024 στην Αττάλεια της Τουρκίας. Συνολικά συμμετείχαν είκοσι δύο ομάδες από είκοσι μία χώρες. Από αυτές, οι έντεκα ήταν χώρες των Βαλκανίων (Αλβανία, Βοσνία και Ερζεγοβίνη, Βουλγαρία, Κύπρος, Δημοκρατία της Βόρειας Μακεδονίας, Ελλάδα, Μαυροβούνιο, Δημοκρατία της Μολδαβίας, Ρουμανία, Σερβία, και Τουρκία), ενώ προσκλήθηκαν άλλες έντεκα (Αζερμπαϊτζάν, Γαλλία, Γεωργία, Καζακστάν, Κιργιστάν, Κροατία, Ουκρανία, Ουζμπεκιστάν, Σαουδική Αραβία, Τατζικιστάν, και Τουρκμενιστάν). Η Τουρκία, ως η διοργανώτρια χώρα, συμμετείχε και με μια δεύτερη ομάδα ανάμεσα σε αυτές των προσκεκλημένων χωρών.

Τα έξι μέλη της ελληνικής αποστολής, τα οποία επέλεξε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών «ΘΑΛΗΣ», «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» και «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» μεταξύ των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν και διακρίθηκαν, ήταν τα εξής:

Τσουρέκας Μιχαήλ	Μουσικό Σχολείο Ιλίου	Αργυρό Μετάλλιο
Κανελλόπουλος Πέτρος	Γυμνάσιο Κάτω Αχαΐας	Χάλκινο Μετάλλιο
Πολίτης Χαράλαμπος	Μουσικό Σχολείο Λαμίας	Χάλκινο Μετάλλιο
Κολέττα Μαρία Στεφανία	Αμερικάνικο Κολλέγιο Ανατόλια	Χάλκινο Μετάλλιο
Μουρούκος Κωνσταντίνος	7ο Γυμνάσιο Αγρινίου	Χάλκινο Μετάλλιο
Ιακωβάκης Χαράλαμπος	Εκπαιδευτική Αναγέννηση	Συμμετοχή

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, πέντε μαθητές μας κατάφεραν να αποσπάσουν **ένα Αργυρό** και **τέσσερα Χάλκινα Μετάλλια** συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες και δημιουργώντας υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια.

Πριν την ΒΜΟΝ, οι μαθητές μας προετοιμάστηκαν συστηματικά, μελετώντας ατελείωτες ώρες εν μέσω απολυτήριων εξετάσεων και παρακολουθώντας εντατικό πρόγραμμα δίωρων μαθημάτων εξ αποστάσεως, από τα μέλη της επιτροπής διαγωνισμών της ΕΜΕ: Αλέξανδρο Συγκελάκη, Αγγελική Βλάχου, Ανδρέα Βαρβεράκη και Αχιλλέα Συνεφακόπουλο. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει θερμά όλα τα μέλη της ομάδας για την σκληρή τους προσπάθεια, τη συμμετοχή και την επιτυχία τους.

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Βόρεια Μακεδονία). Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Λύση (1ος τρόπος) Είναι γνωστό ότι $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z. Θέτοντας $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$ και $z=\sqrt{a^2+b^2}$, παίρνουμε

$$xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\le\frac{1}{2xyz},$$

και άρα

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{1}{2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\le\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

ή ισοδύναμα, αφού πολλαπλασιάσουμε χιαστί και υψώσουμε στο τετράγωνο, ότι

$$8(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\ge(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Όμως, είναι γνωστό ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$. Για παράδειγμα, η τελευταία έπεται άμεσα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Γράφοντας τις αντίστοιχες ανισότητες που προκύπτουν για $(x,y)=(a,b)$, $(x,y)=(b,c)$, και $(x,y)=(c,a)$, και πολλαπλασιάζοντας τες κατά μέλη, παίρνουμε τη ζητούμενη.

(2ος τρόπος) Ισχύει $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$. Έτσι, έπεται ότι

$$(a+b)(c+a)+(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)=a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)\le4(a^2+b^2+c^2)=1.$$

Από την ανισότητα Τετραγωνικού-Αριθμητικού μέσου έπεται ότι $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{x+y}$ για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}&\le\sqrt{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\&=\sqrt{2}\frac{(a+b)(c+a)+(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&\le\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)},\end{aligned}$$

όπως θέλαμε.

Σχόλιο. Παρόμοιες λύσεις με τον δεύτερο τρόπο έδωσαν οι μαθητές μας Μιχαήλ Τσουρέκας, Πέτρος Κανελλόπουλος και Μαρία Στεφανία Κολέττα.

Πρόβλημα 2 (Βουλγαρία). Δίνεται ένα τρίγωνο ABC με $AB < AC$. Έστω ότι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος απέναντι από το A εφάπτεται στις ευθείες AB, AC και BC στα σημεία D, E και F, αντίστοιχα, και έστω J το κέντρο του. Έστω P ένα σημείο στην πλευρά BC. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDP και CEP τέμνονται για δεύτερη φορά στο Q. Έστω R το ίχνος της καθέτου από το A στην ευθεία FJ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία P, Q και R είναι συνευθειακά.

(Ο *παρεγγεγραμμένος κύκλος* ενός τριγώνου ABC απέναντι από το A είναι ο κύκλος που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα BC, στην ημιευθεία AB προς το B, και στην ημιευθεία AC προς το C.)

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Μιχαήλ Τσουρέκα). Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $BDQP$ και $CEQP$ παίρνουμε $D\widehat{Q}P = A\widehat{B}C$ και $P\widehat{Q}E = A\widehat{C}B$, αντίστοιχα. Αφού $A\widehat{D}J = A\widehat{E}J = 90°$, το τετράπλευρο $ADJE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω ω. Τότε

$$D\widehat{J}E = 180° - D\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = D\widehat{Q}P + P\widehat{Q}E = D\widehat{Q}E,$$

οπότε το τετράπλευρο $DQJE$ είναι επίσης εγράψιμο στον ω.

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BDJF$ και $FJEC$ παρατηρούμε ότι

$$D\widehat{J}F = A\widehat{B}C \quad \text{και} \quad F\widehat{J}E = A\widehat{C}B,$$

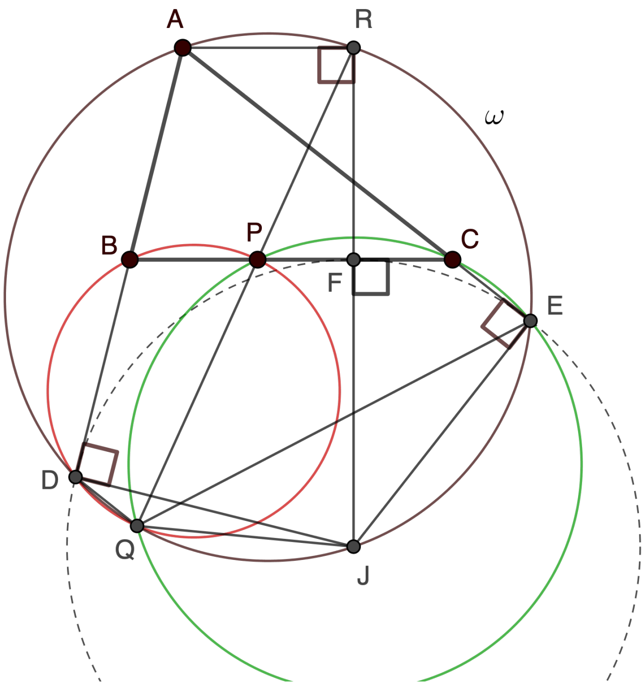
αντίστοιχα. Αφού η ευθεία RJ είναι κάθετη στις AR και BC, έπεται ότι οι τελευταίες είναι παράλληλες: $AR||BC$. Έτσι,

$$R\widehat{A}E = R\widehat{A}C = A\widehat{C}B = F\widehat{J}E,$$

οπότε το σημείο R ανήκει και αυτό στον ω. Συνεπώς,

$$D\widehat{Q}R = D\widehat{J}R = D\widehat{J}F = A\widehat{B}C = D\widehat{Q}P,$$

που σημαίνει ότι τα σημεία P, Q και R είναι συνευθειακά.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 2

Πρόβλημα 3 (Σερβία). Να βρείτε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Λύση (Βασισμένη στη λύση του Πέτρου Κανελλόπουλου). Αφού $2020 = 2^2 \cdot 505$ και $2024 = 2^3 \cdot 253$, η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$2^{2x} \cdot 505^x + 2^y = 2^{3z} \cdot 253^z. \tag{1}$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $2x = y$. Τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται $2^{2x}(505^x + 1) = 2^{3z} \cdot 253^z$, και αφού ο αριθμός $505^x + 1$ είναι άρτιος, έπεται ότι $2^{2x} < 2^{3z}$, και άρα $2x < 3z$.

  Έστω ο θετικός ακέραιος $k = 3z - 2x$. Τότε έχουμε

  $$505^x + 1 = 2^k \cdot 253^z. \tag{2}$$

  Αφού $505 \equiv 1 \pmod 4$, είναι $505^x + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Επίσης, $253^z \equiv 1 \pmod 4$. Έτσι, αν ισχύει η (2), τότε είναι

  $$2^k \equiv 2 \pmod 4,$$

  η οποία δίνει αναγκαστικά $k = 1$ (αφού αν ήταν $k > 1$, θα είχαμε $2^k \equiv 0 \pmod 4$). Άρα $3z - 2x = 1$, οπότε $x = 3t + 1$ και $z = 2t + 1$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο t.

  Έτσι, η εξίσωση (2) γράφεται

  $$505^{3t+1} + 1 = 2 \cdot 253^{2t+1}.$$

  Μια προφανής λύση της είναι η $t = 0$, η οποία δίνει $(x, y, z) = (1, 2, 1)$. Αυτή είναι και η μοναδική σε αυτή την περίπτωση, αφού αν $t \geq 1$, τότε είναι

  $$2 \cdot 253^{2t+1} < 2 \cdot 505^{2t+1} < 505^t \cdot 505^{2t+1} = 505^{3t+1}.$$

- $2x < y$. Τότε $v_2(2^{2x} \cdot 505^x + 2^y) = 2x$ και $v_2(2^{3z} \cdot 253^z) = 3z$, οπότε η (1) δίνει $2x = 3z$. Έτσι, $x = 3k$ και $z = 2k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k, οπότε η (1) γίνεται

  $$2^{6k} \cdot 505^{3k} + 2^y = 2^{6k} \cdot 253^{2k}.$$

  Η τελευταία είναι αδύνατη, αφού αν $k > 0$, τότε

  $$2^{6k} \cdot 253^{2k} < 2^{6k} \cdot 505^{2k} < 2^{6k} \cdot 505^{3k} < 2^{6k} \cdot 505^{3k} + 2^y.$$

  Συνεπώς, δεν παίρνουμε κάποια λύση της (1) σε αυτή την περίπτωση.

- $2x > y$. Τότε $v_2(2^{2x} \cdot 505^x + 2^y) = y$ και $v_2(2^{3z} \cdot 253^z) = 3z$, οπότε η (1) δίνει $y = 3z$. Έτσι, η (1) γίνεται

  $$2^{2x} \cdot 505^x + 2^{3z} = 2^{3z} \cdot 253^z,$$

  ή, ισοδύναμα,

  $$2^{2x-3z} \cdot 505^x = 253^z - 1,$$

  με $2x - 3z = 2x - y > 0$. Αλλά, το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης διαιρείται με το 3, ενώ το αριστερό όχι. Άρα, δεν παίρνουμε κάποια λύση της (1) ούτε σε αυτή την περίπτωση.

Συνεπώς, η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

Πρόβλημα 4 (Βόρεια Μακεδονία). Τρεις φίλοι, ο Αργύρης, ο Βαγγέλης και ο Γιάννης, παίζουν ένα παιχνίδι. Στην αρχή του παιχνιδιού, καθένας από αυτούς έχει μια στοίβα από 2024 βώλους. Ο Αργύρης κάνει την πρώτη κίνηση, ο Βαγγέλης κάνει τη δεύτερη, ο Γιάννης κάνει την τρίτη, και συνεχίζουνε να κάνουν κινήσεις με την ίδια σειρά. Σε κάθε κίνηση, ο παίκτης που κάνει την κίνηση, πρέπει να επιλέξει έναν θετικό ακέραιο n μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αριθμό έχει επιλεγεί έως τότε από οποιονδήποτε παίκτη, να πάρει $2n$ βώλους από τη στοίβα του, και να τους μοιράσει ισομερώς στους άλλους δύο παίκτες. Αν ένας παίκτης δεν μπορεί να κάνει μια κίνηση, το παιχνίδι τελειώνει και αυτός ο παίκτης χάνει.

Να προσδιορίσετε όλους τους παίκτες που έχουν τέτοια στρατηγική ώστε να μην χάσουν, ανεξάρτητα από το πως παίζουν οι άλλοι δύο παίκτες.

Λύση. Θα δείξουμε ότι ο μοναδικός παίκτης που έχει στρατηγική ώστε να μην χάσει είναι ο Γιάννης. Αρχικά, ας δούμε τι συμβαίνει πριν ένας παίκτης χάσει το παιχνίδι. Έστω t ο αριθμός που έχει επιλεγεί στην τελευταία κίνηση, και έστω ότι ο παίκτης ο οποίος χάνει έχει s βώλους στη στοίβα του πριν την κίνηση. Για να χάσει ο παίκτης θα πρέπει να ισχύει $2t+2>s+t$, ώστε να μην μπορεί να κάνει την επόμενη κίνηση. Τότε θα είναι $t \geq s-1$. Δηλ. πριν την κίνηση, ο προηγούμενος παίκτης θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $2s-2$ βώλους. Αυτό σημαίνει ότι αν ένας παίκτης πριν την επόμενη κίνηση του έχει τουλάχιστον $2s-2$ βώλους και ο επόμενος παίκτης έχει s βώλους, τότε μπορεί να επιλέξει $s-1$ για να εξαναγκάσει τον επόμενο παίκτη σε ήττα. Επίσης, εάν ένας παίκτης X έχει s βώλους, ενώ ο παίκτης Y έχει το πολύ $2s-3$ βώλους ακριβώς πριν παίξει ο παίκτης Y, τότε ο παίκτης X εξασφαλίζει ότι δεν θα χάσει το παιχνίδι σε αυτή τη σειρά.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο σημείο του παιχνιδιού, οι διαδοχικοί παίκτες έχουν x, y και z βώλους στις στοίβες τους και επιλέγουν τους αριθμούς u, $u+v$ και $u+v+w$, αντίστοιχα. Σε αυτές τις τρεις κινήσεις έχουμε

$$(x, y, z) \rightarrowtail (x-2u, y+u, z+u) \rightarrowtail$$

$$(x-u+v, y-u-2v, z+2u+v) \rightarrowtail$$

$$(x+2v+w, y-v+w, z-v-2w).$$

Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, βλέπουμε ότι ισχύουν τα εξής

(i) Αν ο παίκτης που παίζει δεύτερος (μετά το παραπάνω σημείο) παίξει $v=1$, τότε μετά από τις τρεις κινήσεις, ο αριθμός των βώλων στη στοίβα του δεν φθίνει, αφού $w>0$, οπότε $y-1+w \geq y$.

(ii) Αν ο παίκτης που παίζει τρίτος (μετά το παραπάνω σημείο) παίξει $w=1$, τότε μετά από τις τρεις κινήσεις, ο αριθμός των βώλων στη στοίβα του δεύτερου παίκτη δεν αυξάνει, αφού $v>0$, οπότε $y-v+1 \leq y$.

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις για κάθε παίκτη. Έστω a_i, b_i, c_i ο αριθμός που επιλέγει ο Αργύρης, ο Βαγγέλης, και ο Γιάννης, αντίστοιχα, στην i-οστή σειρά τους.

Ισχυρισμός 1. Ο Γιάννης έχει στρατηγική ώστε να μην χάσει.

Απόδειξη. Μετά την πρώτη κίνηση του Αργύρη, ο Γιάννης έχει τουλάχιστον 2025 βώλους στη στοίβα του. Εάν ο Γιάννης επιλέξει $c_i = b_i + 1$, από το (i) βλέπουμε ότι μετά από $3i+1$ κινήσεις, ο Γιάννης έχει τουλάχιστον 2025 βώλους στη στοίβα του αφού είναι στη θέση του μεσαίου παίκτη. Για να χάσει ο Γιάννης, ο Βαγγέλης θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $2 \cdot 2024$ βώλους σε κάποιο σημείο. Αλλά ο συνολικός αριθμός των βώλων που είναι $3 \cdot 2024$ δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, οπότε αυτό είναι αδύνατο, αφού $3 \cdot 2024 < 2 \cdot 2024 + 2025$.

Άρα, επιλέγοντας $c_i = b_i + 1$, ο Γιάννης έχει στρατηγική ώστε να μην χάσει.

Ισχυρισμός 2. Ο Βαγγέλης δεν έχει στρατηγική για να μην χάσει.

Απόδειξη. Έστω ότι ο Αργύρης και ο Γιάννης ακολουθούν τη στρατηγική επιλέγοντας $a_{i+1} = c_i+1$ και $c_i = b_i + 1$ (όπου $c_0 = 0$ εξ ορισμού). Από το (ii) ο αριθμός των βώλων στη στοίβα του Βαγγέλη μετά από $3i$ κινήσεις δεν αυξάνει. Αφού πριν την πρώτη κίνηση έχει 2024 βώλους, δεν μπορεί να έχει περισσότερους από 2024 βώλους σε οποιοδήποτε σημείο μετά από $3i$ κινήσεις. Αν σε κάποιο σημείο πριν την τελευταία του κίνηση ο Βαγγέλης επιλέξει $b_i > a_i + 1$, τότε αυξάνει το πλήθος των βώλων στη στοίβα του Αργύρη πριν την $3i + 2$-οστή κίνηση, σε τουλάχιστον 2025, οπότε ο Αργύρης δεν μπορεί να χάσει. Επίσης, ο Γιάννης ακολουθεί μια στρατηγική για να μην χάσει, οπότε σε αυτή την περίπτωση ο Βαγγέλης θα χάσει. Αλλιώς, έχουμε την εξής κατάσταση:

$$(2024, 2024, 2024) \xrightarrow{1} (2022, 2025, 2025) \xrightarrow{2} (2024, 2021, 2027) \xrightarrow{3}$$

$$(2027, 2024, 2021) \xrightarrow{4} \cdots \xrightarrow{2019} (4043, 2024, 5) \xrightarrow{2020} (3, 4044, 2025).$$

Έπειτα ο Βαγγέλης μπορεί να επιλέξει το 2021 ή το 2022, χάνοντας και στις δύο περιπτώσεις:

$$(3, 4044, 2025) \xrightarrow{2021} (2024, 2, 4046) \xrightarrow{2022} (4046, 2024, 2) \xrightarrow{2023} (0, 4047, 2025),$$

$$(3, 4044, 2025) \xrightarrow{2022} (2025, 0, 4047) \xrightarrow{2023} (4048, 2023, 1) \xrightarrow{2024} (0, 4047, 2025).$$

Αυτό σημαίνει ότι ο Βαγγέλης δεν έχει στρατηγική για να μην χάσει.

Ισχυρισμός 3. Ο Αργύρης δεν έχει στρατηγική για να μην χάσει.

Απόδειξη. Έστω ότι ο Βαγγέλης και ο Γιάννης επιλέγουν $b_i = a_i + 1$ και $c_i = b_i + 1$ μέχρι την τελευταία σειρά. Αν ο Αργύρης επιλέξει $a_i = c_{i-1} + 1$ κάθε φορά που έρχεται η σειρά του (ενώ $c_0 = 0$), τότε οδηγεί ξανά στην περίπτωση $(4043, 2024, 5)$. Στη συνέχεια, ο Αργύρης μπορεί να επιλέξει 2020 ή 2021 και σε κάθε περίπτωση ο Βαγγέλης και ο Γιάννης μπορούν να εξαναγκάσουν τον Αργύρη να χάσει ως εξής:

$$(4043, 2024, 5) \xrightarrow{2020} (3, 4044, 2025) \xrightarrow{2021} (2024, 2, 4046) \xrightarrow{2023} (4047, 2025, 0),$$

$$(4043, 2024, 5) \xrightarrow{2021} (1, 4045, 2026) \xrightarrow{2022} (2023, 1, 4048) \xrightarrow{2023} (4046, 2024, 2).$$

Τώρα υποθέτουμε ότι Αργύρης επιλέγει $a_i > c_{i-1} + 1$ πριν συμβεί αυτή η περίπτωση. Τότε, έστω ότι ο Βαγγέλης επιλέγει $b_i = a_i + 1$ και ο Γιάννης επιλέγει $c_i = b_i + a_i - c_{i-1}$. Σε αυτή την περίπτωση, πριν κινηθεί ο Αργύρης, οι παίκτες έχουν $(2024 + 3k, 2024, 2024 - 3k)$ βώλους μετά από $3k$ κινήσεις. Αν ο Αργύρης, στην $3k + 1$-οστή κίνηση, επιλέξει $(2024 + 3k)/2 > L > 3k + 1$, η σειρά των κινήσεων είναι

$$(2024 + 3k, 2024, 2024 - 3k) \xrightarrow{L} (2024 + 3k - 2L, 2024 + L, 2024 + L - 3k) \xrightarrow{L+1}$$

$$(2024 + 3k - L + 1, 2024 - L - 2, 2024 + 2L - 3k + 1) \xrightarrow{2L-3k+1}$$

$$(2024 + L + 2, 2024 + L - 3k - 1, 2024 - 2L + 3k - 1),$$

αντίστοιχα για τον Αργύρη, το Βαγγέλη και τον Γιάννη, και βλέπουμε ότι όλες οι κινήσεις μπορούν να γίνουν. Τότε ο Βαγγέλης έχει $2024 + L - 3k - 1 \geq 2025$ βώλους πριν παίξει ο Αργύρης, και ο Γιάννης έχει τουλάχιστον 2025 βώλους πριν παίξει ο Βαγγέλης. Τότε, από το (i) , επιλέγοντας $b_i = a_i + 1$ και $c_i = b_i + 1$, ο Βαγγέλης και ο Γιάννης εξασφαλίζουν ότι δεν θα χάσουν, οπότε σε αυτή την περίπτωση χάνει ο Αργύρης.

Αν ο Αργύρης επιλέξει $(2024 + 3k)/2 = L < 2023$, τότε αφού παίξει έχουμε την περίπτωση $(0, 2024 + L, 4048 - L)$. Έστω ότι ο Βαγγέλης επιλέγει $L + 1$, που μπορεί, οπότε έχουμε την περίπτωση $(L + 1, 2022 - L, 4049)$. Τότε, ο Γιάννης μπορεί να επιλέξει 2024, οπότε ο Αργύρης δεν μπορεί να κάνει κάποια κίνηση και χάνει.

Επομένως, ο Αργύρης δεν έχει στρατηγική για να μην χάσει.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι μόνο ο Γιάννης έχει στρατηγική ώστε να μην χάσει.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 132

Α78. Ο θετικός ακέραιος ν είναι τέλειο τετράγωνο. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του 2023 με το ν είναι $223-\dfrac{3\nu}{2}$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης αυτής.

Λύση. Αν $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι το πηλίκο, τότε από τον κανόνα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$$2023 = \nu\kappa + 223 - \frac{3\nu}{2} \Leftrightarrow (2\kappa - 3)\nu = 3600. \qquad (1)$$

Επειδή το υπόλοιπο είναι μη αρνητικός ακέραιος μικρότερος από το διαιρέτη, έχουμε ότι ο ν πρέπει να είναι άρτιος και

$$0 \leq 223 - \tfrac{3\nu}{2} < \nu \Leftrightarrow 5\nu > 446 \geq 3\nu \Leftrightarrow 90 \leq \nu < 148.$$

Επειδή από την υπόθεση ο ν είναι τέλειο τετράγωνο, έπεται ότι $\nu \in \{100, 144\}$.

Για $\nu = 100$ από την (1) προκύπτει ότι $2\kappa - 3 = 36 \Leftrightarrow 2\kappa = 39$, αδύνατη.

Για $\nu = 148$ από την (1) προκύπτει ότι $2\kappa - 3 = 25 \Leftrightarrow \kappa = 14$.

Α79. (i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\alpha + \beta\gamma$, $\beta + \gamma\alpha, \gamma + \alpha\beta$, να είναι ρητοί.

(ii) Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ έχουν άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και οι αριθμοί $\alpha + \beta\gamma$, $\beta + \gamma\alpha, \gamma + \alpha\beta$ είναι ρητοί μη μηδενικοί, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί.

Λύση. (i) Το ερώτημα απλοποιείται, αν θεωρήσουμε ότι $\alpha = \beta = \gamma$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε κάποιον άρρητο αριθμό α τέτοιον ώστε ο αριθμός $\alpha + \alpha^2$ να είναι ρητός.

Επομένως αρκεί η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha^2 + \alpha - \rho = 0, \rho \in \mathbb{Q}$, να είναι διάφορη τελείου τετραγώνου ρητού αριθμού. Επιλέγοντας $\rho = 1$, έχουμε $\Delta = 5$ και μία τιμή για το α είναι

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(ii) Επειδή $\beta + \gamma\alpha, \gamma + \alpha\beta \in \mathbb{Q}$, έπεται ότι:

$$\beta + \gamma\alpha + \gamma + \alpha\beta = (\beta + \gamma)(1 + \alpha) \in \mathbb{Q} \qquad (1).$$

Από την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha^2 \in \mathbb{Q}.$$

Ομοίως προκύπτει ότι και οι αριθμοί β^2 και γ^2 είναι ρητοί. Επιπλέον είναι ρητός και ο αριθμός $(\alpha + \beta\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma$, οπότε θα είναι και $\alpha\beta\gamma \in \mathbb{Q}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι ο αριθμός $\alpha(\alpha + \beta\gamma) = \alpha^2 + \alpha\beta\gamma \in \mathbb{Q}$ και επειδή ο αριθμός $\alpha + \beta\gamma$ είναι μη μηδενικός ρητός, έπεται ότι $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ομοίως προκύπτει ότι και $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

Α80. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν για τους οποίους υπάρχουν $1 + 2^{\nu+2}$ ακέραιοι μεταξύ των αριθμών 3^ν και $3^{\nu+1}$.

Λύση. Μεταξύ των ακεραίων 3^{ν} και $3^{\nu+1}$ υπάρχουν $3^{\nu+1}-3^{\nu}-1=2\cdot 3^{\nu}-1$ θετικοί ακέραιοι, οπότε αρκεί να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης με άγνωστο το ν:

$$2\cdot 3^{\nu}-1=1+2^{\nu+2} \Leftrightarrow 3^{\nu}-2^{\nu+1}=1. \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) για $\nu=1$, δεν αληθεύει. Αληθεύει για $\nu=2$.

Για $\nu \geq 3$ θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $3^{\nu}-2^{\nu+1}>1$.

Για $\nu=3$ έχουμε $27-16=11>1$, ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή

$$3^{\kappa}-2^{\kappa+1}>1. \qquad (2)$$

Τότε έχουμε

$$3^{\kappa}>1+2^{\kappa+1} \Rightarrow 3^{\kappa+1}>3+3\cdot 2^{\kappa+1} \Rightarrow 3^{\kappa+1}>1+2\cdot 2^{\kappa+1}=1+2^{\kappa+2},$$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει και για $\nu=\kappa+1$.

Άρα το ζητούμενο ισχύει για $\nu=2$.

Γ65. **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{AB}=\mathbf{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathbf{B}}=\mathbf{72^o}$. Θεωρούμε σημείο Δ στην ευθεία ΒΓ έτσι ώστε $\mathbf{\Gamma\Delta}=\mathbf{AB}$ και το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ.**

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\mathbf{B\widehat{A}\Delta}$.

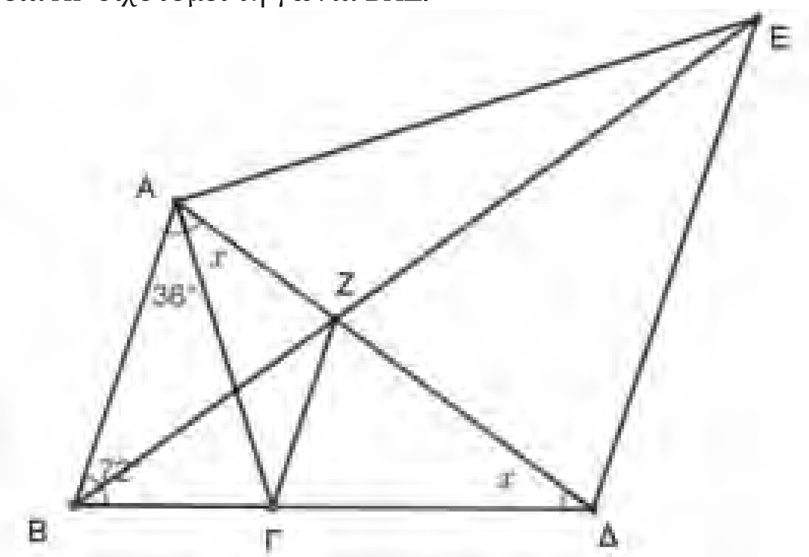
(β) Στην παράλληλη που άγεται από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε τα σημεία Α και Ε να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ και επιπλέον $\mathbf{\Delta E}=\mathbf{\Delta B}$.

Αν οι ευθείες ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ζ να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΑΕ είναι κάθετες και $\mathbf{AZ}=\mathbf{Z\Gamma}=\mathbf{B\Gamma}$.

Λύση. (α) Από τις υποθέσεις είναι $\Gamma\Delta=A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και ισχύει η ισότητα $\Gamma\widehat{A}\Delta=\Gamma\widehat{\Delta}A=x$. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\widehat{B}+B\widehat{A}\Delta+B\widehat{\Delta}A=180^o \Rightarrow 72^0+36^o+x+x=180^o \Rightarrow x=36^o.$$

Επομένως η ευθεία ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{A}\Delta$.



Σχήμα 1

(β) Από την ισότητα γωνιών $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{B\hat{A}\Delta} = 72^o$ έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε έχουμε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Delta}$. Επειδή $\mathrm{\Delta E} = \mathrm{\Delta B}$, έπεται ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\mathrm{\Delta\hat{A}E} = \frac{180^o - \mathrm{A\hat{\Delta}E}}{2} = \frac{180^o - 72^o}{2} = 54^o.$$

Επομένως, έχουμε

$$\mathrm{\Gamma\hat{A}E} = \mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{A}E} = 36^o + 54^o = 90^o,$$

οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΑΕ είναι κάθετες.

Επειδή $\mathrm{\Delta E} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{\Delta B} = \mathrm{\Delta E}$, έπεται ότι

$$\mathrm{\Delta\hat{B}E} = \mathrm{B\hat{E}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}E} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 36^o,$$

οπότε έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{\Delta\hat{Z}E} = \mathrm{\Delta\hat{B}E} + \mathrm{B\hat{\Delta}Z} = 36^o + 36^o = 72^o.$$

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΖ είναι ίσα, οπότε $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AZ}$.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{B\Delta} - \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Delta A} - \mathrm{AZ} = \mathrm{\Delta Z}$, οπότε το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ. Επομένως είναι και $\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{B\Gamma}$.

Ασκήσεις για λύση

Α81. Αν $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4$, να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$A = \frac{2x + 4xy - 2y}{x - y - 2xy}.$$

Α82. Αν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \neq 0$, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς α, β, γ είναι αντίθετοι.

Α83. Το σύνολο Α έχει στοιχεία 13 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. Το σύνολο Β έχει στοιχεία 12 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους, ενώ τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ είναι 15 διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι.
(α) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathrm{A} - \mathrm{B}$.
(β) Αν επιπλέον το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Α ισούται με το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Β, να προσδιορίσετε τα σύνολα Α και Β.

Γ66. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\mathrm{AO} = \mathrm{OB}$, $\mathrm{\Gamma O} = \mathrm{O\Delta}$ και $\mathrm{A\hat{O}B} = \mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta} = 120^o$. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

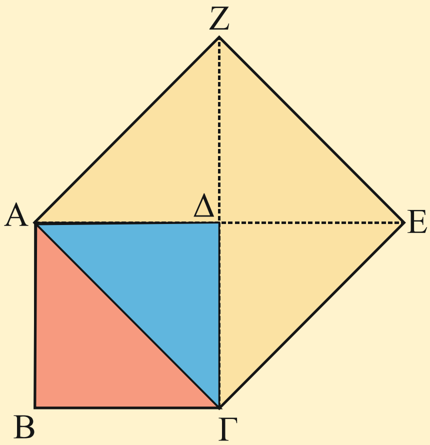
Η ανακάλυψη της παράδοξης τετραγωνικής ρίζας του 2 και το πρόβλημα της ασυμμετρίας

Γιώργος Κόσυβας

Στο Γυμνάσιο θα μιλήσουμε μεταξύ άλλων και για την περίεργη τετραγωνική ρίζα του 2 που είναι ο λόγος της διαγωνίου ενός τετραγώνου προς την πλευρά του.

Το ενοχλητικό εύρημα ήταν ένα νέο είδος αριθμών, τους οποίους σήμερα ονομάζουμε άρρητους. Οι άρρητοι αριθμοί δεν προκύπτουν από τη διαίρεση δύο ακέραιων αριθμών. Το χαρακτηριστικό του άρρητου αριθμού είναι ότι παραμένει πεισματικά ανολοκλήρωτος, ό,τι κι αν συμβεί. Η τετραγωνική ρίζα του τετράγωνου αριθμού 4, που γράφεται συμβολικά $\sqrt{4}$ είναι το καθαρό και ήρεμο 2. Επίσης για την τετραγωνική ρίζα του τετράγωνου αριθμού 9 ισχύει $\sqrt{9}=3$. Όμως μια άρρητη τετραγωνική ρίζα μάς δίνει έναν απειροψήφιο δεκαδικό αριθμό με ατέλειωτη σειρά, χωρίς καμία περιοδική επανάληψη των ψηφίων μετά το κόμμα. Για την τετραγωνική ρίζα του 2 έχουμε:

$$\sqrt{2}=1,41421...$$



με άπειρα δεκαδικά ψηφία που μας είναι άγνωστα και δύσκολο να εντοπιστούν στο μεγαλύτερο μέρος τους καθώς απουσιάζουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Έτσι, η προηγούμενη απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση δεν μας παρέχει την πλήρη εικόνα του άρρητου αριθμού. Το πιο εκνευριστικό όμως για μια νοικοκυρεμένη σκέψη είναι ότι οι άρρητες τετραγωνικές ρίζες προβάλλουν ξαφνικά ξεπηδώντας στην τύχη με ακανόνιστη συχνότητα.

Το ορθογώνιο τρίγωνο μας δίνει ένα παραστατικό παράδειγμα. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν μήκη 3 και 4 μονάδες, τότε η υποτείνουσα σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα είναι ίση με 5 μονάδες. Όμως, τέτοιοι απλοί συνδυασμοί σπανίζουν. Μεταξύ των «τέλειων» ορθογωνίων τριγώνων παρεμβάλλεται ένας μεγάλος αριθμός «ατελών», με πλευρές π. χ. $1,1,\sqrt{2}$ ή $2,2,\sqrt{8}$ ή $1,2,\sqrt{5}$. Η θαυμαστή ανακάλυψη των άρρητων αριθμών έχει συνδεθεί με το όνομα του Ίππασου, μαθητή του Πυθαγόρα. Μια μέρα ο Ίππασος κατασκεύασε ένα τετράγωνο με πλευρά ΑΒ ίση με μία μονάδα μήκους και με αυτήν επιχείρησε να «μετρήσει» το μήκος της διαγωνίου ΑΓ. Στο σχήμα η διαγώνιος ΑΓ του μικρού τετραγώνου είν αι πλευρά του μεγάλου τετραγώνου.

Ίππασος
(αυθαίρετη σύγχρονη αναπαράσταση)

Ο Ίππασος διαπίστωσε ότι η διαγώνιος ΑΓ, με οποιαδήποτε γνωστή μονάδα κι αν μετρηθεί δεν βγαίνει ακριβώς. Μόλις είχε ανακαλύψει τους άρρητους αριθμούς. Η πλευρά ΑΒ και η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου δεν έχουν καμία κοινή μονάδα μέτρησης: είναι «ασύμμετρες». Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κανένα κλάσμα του οποίου το τετράγωνο να είναι ίσο με 2. Ενώ η πλευρά ΑΒ είναι ακριβής και εκφράζεται με μία μονάδα μήκους η διαγώνιος ΑΓ είναι ίση με $\sqrt{2}$.

Μάλιστα το τετράγωνο ΑΓΕΖ που κατασκευάζουμε με πλευρά την ΑΓ αποτελείται από 4 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα και έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Είναι παράδοξο και ανεξήγητο να υπάρχουν τέτοια γεωμετρικά μεγέθη τα οποία, ενώ είναι αντιληπτά μέσω της εποπτείας, αρνούνται να υποταχτούν στον αριθμητικό λογισμό.

Η ανακάλυψη των «ασύμμετρων αριθμών», η οποία ξεκίνησε με την κακορίζικη τετραγωνική ρίζα του 2, ήταν μια ρηξικέλευθη τομή που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους φιλοσόφους και τοποθετείται κατά προσέγγιση στα μέσα του $5^{ου}$ αιώνα π.Χ. Όπως είναι γνωστό οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι λόγοι των αποστάσεων μεταξύ των διακριτών ψηφίδων είναι λόγοι ακέραιων αριθμών. Όταν ανακάλυψαν αυτούς τους περίεργους και ανεξήγητους αριθμούς, τρόμαξαν τόσο πολύ, που τους είπαν «άρρητους», δηλαδή αριθμούς «που δεν μπορούν να ειπωθούν», «δεν έχουν λόγο» ή «παράλογους». Θεώρησαν μάλιστα ότι η ανακάλυψη ήταν ανησυχητική και έπρεπε να παραμείνει μυστική, δηλαδή ότι αυτοί οι άρρητοι αριθμοί «δεν πρέπει να ειπωθούν». Η αποκάλυψή τους ανέτρεψε τις πυθαγόρειες πεποιθήσεις για τον αριθμό και συγκλόνισε την πορεία της ελληνικής μαθηματικής σκέψης.

Στο εξής οι αρχαίοι Έλληνες ξεπέρασαν την κρίση επιδεικνύοντας νέα επιτεύγματα μαθηματικής δημιουργίας. Αντικατέστησαν τις διακριτές ψηφίδες με ευθύγραμμα τμήματα και έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Θεαίτητος, ο Εύδοξος, ο Ευκλείδης και ο Θεόδωρος μελέτησαν διεξοδικά τους άρρητους. Κατάφεραν μάλιστα να κατασκευάσουν πολλούς άρρητους αριθμούς όπως είναι ο $\sqrt{2}$ και ο $\sqrt{3}$, φτάνοντας μέχρι τον $\sqrt{17}$.

Otto Stolz

Ο άρρητος αριθμός, ως δεκαδικός μη περιοδικός, ορίστηκε το 1886 (Otto Stolz), ενώ το 1696 είχε οριστεί ο ρητός ως δεκαδικός περιοδικός (John Wallis). Έπρεπε να φτάσουμε σχεδόν στο 2000 για να θεωρούνται οι άρρητοι ως αριθμοί.

Στο Γυμνάσιο γίνεται μόνο μια πρώτη γνωριμία με τους άρρητους αριθμούς. Το συναρπαστικό ταξίδι της μάθησης συνεχίζεται στο Λύκειο.

John Wallis

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ [Άρρητοι, Ρητοί(Ακέραιοι(Φυσικοί))]

Άσκηση

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι.

$\sqrt{3\times 75}$, $\sqrt{7\times 343}$, $\sqrt{11\times 44}$, $\sqrt{11\times 55}$

$\sqrt{2\times 32}$, $\sqrt{10\times 20}$, $\sqrt{\frac{75}{3}}$, $\sqrt{4x\pi}$

Μέλισσες, οι μηχανικοί της φύσης

Παντελής Γρυπάρης - Νίκος Σαμπάνης

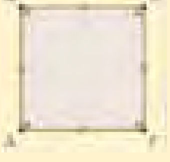
«Οι μέλισσες… χάρη σε μια συγκεκριμένη γεωμετρική πρόβλεψη… γνωρίζουν ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και θα κρατήσουν περισσότερο μέλι για την ίδια δαπάνη υλικού».

Σκεφτείτε τα πιο ευφυή και περίπλοκα επιτεύγματα μηχανικής στον κόσμο. Ίσως να σκεφτείτε τις Πυραμίδες της Αιγύπτου, το Στόουνχεντζ, μεγάλα φράγματα ή σύγχρονες γέφυρες. Αλλά θα πιστεύατε ποτέ ότι οι μέλισσες στην αυλή σας θα μπορούσαν να σχεδιάσουν κάτι τόσο καινοτόμο όσο αυτά τα τεχνητά οικοδομήματα;
Οι μέλισσες πιθανότατα δεν έχουν σπουδάσει ποτέ αρχιτεκτονική ή κάποια τεχνική διακόσμησης επιφάνειας με επαναλαμβανόμενα μοτίβα σχημάτων, συνήθως πολύγωνα, που εφαρμόζουν το ένα δίπλα στο άλλο χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Ωστόσο, ορισμένα μοτίβα συμπεριφοράς τους μπορούν να εξηγηθούν μαθηματικά. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μέλισσες έχουν την έμφυτη ικανότητα να χρησιμοποιούν όσο το δυνατόν λιγότερη ενέργεια και πόρους όταν κατασκευάζουν την κυψέλη τους. **Τα τετράγωνα, τα τρίγωνα και τα εξάγωνα** είναι τα μόνα τρία κανονικά πολύγωνα που μπορούν να αυτο-ψηφιδωθούν και είναι γνωστά στις μέλισσες.

Από τα τρία, το εξάγωνο έχει την μικρότερη περίμετρο για δεδομένη επιφάνεια.

Ισόπλευρο τρίγωνο (πλευράς α)

$$\boldsymbol{Περίμετρος = α + α + α = 3α \quad Εμβαδόν = \frac{α^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$



Τετράγωνο (πλευράς α)

$$\boldsymbol{Περίμετρος = α + α + α + α = 4α \quad Εμβαδόν = α^2}$$

Κανονικό εξάγωνο (πλευράς α)

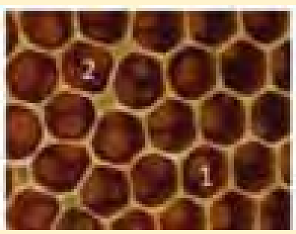
$$\boldsymbol{Περίμετρος = α + α + α + α + α + α = 6α}$$

$$\boldsymbol{Εμβαδόν = \frac{α^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}}$$

Ας σκεφτούμε τώρα τι σημαίνει να συγκρίνουμε τα σχήματα αυτά με βάση την επιφάνεια και την περίμετρο τους. Φανταστείτε ότι έχετε τρία διαφορετικά σχήματα: ένα κανονικό εξάγωνο, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Όλα αυτά έχουν την ίδια επιφάνεια, δηλαδή το εσωτερικό τους είναι ίσο σε μέγεθος. Ωστόσο, οι πλευρές τους, που σχηματίζουν την περίμετρο, δεν είναι ίδιες. Θέλουμε να δούμε ποιο σχήμα έχει τη μικρότερη περίμετρο για την ίδια επιφάνεια.

Γιατί το εξάγωνο έχει τη μικρότερη περίμετρο;

Το εξάγωνο είναι πολύ "στρογγυλό", αφού έχει 6 πλευρές που σχηματίζουν έναν κύκλο γύρω από την επιφάνειά του. Όσο πιο πολλές πλευρές έχει ένα σχήμα, τόσο πιο κοντά έρχεται στον κύκλο, ο οποίος είναι το σχήμα με την ελάχιστη περίμετρο για δεδομένη επιφάνεια. Έτσι, το εξάγωνο, με τις περισσότερες πλευρές, έρχεται πιο κοντά στον κύκλο. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει μόνο τρεις πλευρές, και το τετράγωνο έχει τέσσερις. Αυτό σημαίνει ότι, για την ίδια επιφάνεια, τα σχήματα με λιγότερες πλευρές (όπως το τρίγωνο ή το τετράγωνο) πρέπει να έχουν πιο μεγάλες σε μήκος (μακριές) πλευρές για να κλείσουν την ίδια επιφάνεια. Όσο λιγότερες είναι οι πλευρές, τόσο μεγαλύτερη είναι η περίμετρος που χρειάζονται. Επομένως το κανονικό εξάγωνο, με τις 6 πλευρές του, είναι το σχήμα που χρησιμοποιεί τη λιγότερη περίμετρο για να περικλείσει την ίδια επιφάνεια σε σχέση με το τρίγωνο και το τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι αν φτιάξουμε ένα εξάγωνο, ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο με την ίδια επιφάνεια, το εξάγωνο θα έχει τις μικρότερες πλευρές συνολικά. Άρα, όσο πιο πολλές πλευρές έχει ένα κανονικό σχήμα, τόσο πιο κοντά φτάνει στην ιδανική "στρογγυλή" μορφή του κύκλου, και αυτό μειώνει την περίμετρό του σε σχέση με την επιφάνεια που κλείνει.



Δηλαδή, όταν οι μέλισσες κατασκευάζουν τις φωλιές τους, τα εξαγωνικά κελιά στην κυψέλη χρησιμοποιούν λιγότερο κερί και απαιτούν λιγότερη εργασία. Ποιος τους το δίδαξε;

Τα τοιχώματα της κηρήθρας αποτελούνται από κελιά πάχους 3 χιλιοστών που μπορούν να αντέξουν 30 φορές το βάρος τους. Μια κηρήθρα διαστάσεων 37 x 22 εκατοστών μπορεί να χωρέσει περισσότερα από 2 κιλά μέλι. Αυτό εξηγεί επίσης γιατί είναι τόσο βαριές. Χρησιμοποιώντας εξαγωνικά πρίσματα, οι μέλισσες κατασκευάζουν τρία τμήματα σε σχήμα ρόμβου με γωνίες 120 μοιρών μεταξύ των τοιχωμάτων. Ακόμα πιο εκπληκτικό είναι ότι οι μέλισσες εργάζονται ταυτόχρονα σε διαφορετικά τμήματα σχηματίζοντας μια κηρήθρα χωρίς ορατές ραφές. Κατασκευάζεται κάθετα προς τα κάτω και οι μέλισσες χρησιμοποιούν μέρη του σώματός τους ως όργανα μέτρησης. Στην πραγματικότητα, τα κεφάλια τους λειτουργούν ως βαρίδια. Η κατασκευή των φωλιών με το λιγότερο κερί και την λιγότερη ενεργειακά εργασία για τις μέλισσες είναι αποκλειστικά έμφυτο τους ταλέντο;

Το π και φ από την αρχαιότητα

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Διαβάζοντας την ιστορία των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών, μπορούμε να μάθουμε και να θαυμάσουμε το μεγαλείο της σκέψης των προγόνων μας. Να θαυμάσουμε τον πρώτο μαθηματικό επιστήμονα, το Θαλή που μας έδωσε την απόδειξη και τα Μαθηματικά ως επιστήμη. Μέτρησε το ύψος των πυραμίδων από απόσταση χωρίς όργανα από την σκιά τους. Να θαυμάσουμε τον Ερατοσθένη που επίσης με τη σκιά μιας ράβδου μέτρησε την ακτίνα της Γης. Να θαυμάσουμε τον Αρχιμήδη για τις έξυπνες κατασκευές του και τις επιστημονικές του γνώσεις για τα Μαθηματικά και τη Φυσική. Να θαυμάσουμε τόσους και τόσους ακόμα αρχαίους Έλληνες που έβαλαν τις βάσεις για την ανάπτυξη των επιστημών. Η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών μας δίνει μεγαλύτερη κατανόηση της ιστορίας γενικά και μεγάλο εύρος γνώσεων.

Οι αριθμοί που συμβολίζονται διεθνώς **π** και **φ** είναι αριθμοί που ήταν γνωστοί σε κάποιους αρχαίους λαούς, τους βρίσκουμε σε αρχαία μνημεία, αλλά και οι αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν την σπουδαιότητά τους.

Ο Χρυσός αριθμός, ο αριθμός Φ=1,618… θεωρείτο από τους αρχαίους Έλληνες ως αναλογία θεϊκή και την χρησιμοποιούσαν όταν έχτιζαν ναούς ή αγάλματα θεών. Αποτέλεσμα τα καλλιτεχνικά τους δημιουργήματα να είναι «ωραία» και «θαυμαστά» ακόμα και σήμερα. Στην πρόσοψη του Παρθενώνα έχουμε ένα παράδειγμα χρήσης της χρυσής αναλογίας-χρυσής τομής(Φ) στην αρχιτεκτονική των αρχαίων Ελλήνων.

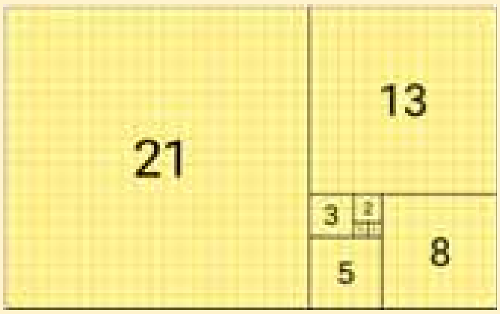
Ο **Λεονάρντο της Πίζας** (1175-1240), ο γνωστός μας Ιταλός **Φιμπονάτσι** (*Fibonacci*) είναι αυτός που έφερε στην Ευρώπη το Ινδο-Αραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Σπούδασε στην Αλγερία Λογιστικά και Μαθηματικά. Μετά τις σπουδές του το 1200 επιστρέφει στην Πίζα όπου γράφει τα μαθηματικά κείμενα (υπάρχουν ακόμα τα χειρόγραφά του, δεν είχε εφευρεθεί ακόμα η τυπογραφία), το 1202 έγραψε το liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών) που περιέχει μαθηματικές γνώσεις που συγκέντρωσε. Ο Fibonacci έγινε περισσότερο γνωστός με την ανακάλυψη μιας ακολουθίας αριθμών που φέρει το όνομά του και οι όροι της έχουν την ιδιότητα να μας δίνουν λόγους ίσους με τη χρυσή αναλογία. Είναι η ακολουθία που δημιουργείται αν πάρουμε έναν αριθμό α, ένα δεύτερο 2.α, και στη συνέχεια οι επόμενοι αριθμοί να είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Έτσι μπορούμε να έχουμε π.χ. τις παρακάτω (από 11 όρους) τρείς ακολουθίες Fibonacci :

1η	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
2η	5	10	15	25	40	65	105	170	275	445	720
3η	11	22	33	55	88	143	231	374	605	979	1584

Οι λόγοι μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών της κάθε ακολουθίας είναι:

$$=\ldots.\frac{13}{8}=\frac{65}{40}=\frac{143}{88}=\cdots\ldots.=\frac{144}{89}=\frac{720}{445}=\frac{1584}{979}=\cdots..=1{,}6179\ldots.=\Phi.$$

Από κάποιο όρο και μετά έχουμε μεγαλύτερη προσέγγιση, το αποτέλεσμα συγκλίνει όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια στον χρυσό αριθμό, Φ= 1.6179…. .



Τον λόγο του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του, που είναι ίδιος σε κάθε κύκλο, ο Euler το 1736 τον ονόμασε με το μικρό **γράμμα π**. Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του **π** βρίσκονται στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα. Στη Βαβυλώνα το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούν τον **π** ως 25/8 = 3.125, ο Πάπυρος Rhind 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το **π** ως $(16/9)^2 = 256/81 \approx 3.1605$. Στις πυραμίδες της 3ης χιλιετίας π.Χ., στη Μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα, ένα από τα επτά θαύματα του κόσμου, βρίσκουμε πολλές μαθηματικές ιδιότητες και αστρονομικά στοιχεία στο σχήμα και τις διαστάσεις. Έχει ύψος 147,65 μέτρα, η τετράγωνη βάση έχει μήκος πλευράς 231,93 μέτρα. Η περίμετρος της βάσης είναι 4x231,93=927,72 αν διαιρεθεί με το ύψος έχουμε 927,72:147,65=6,2832…=2π. Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν πολύ με το **π** ιδιαίτερα για τον τετραγωνισμό του κύκλου και υπολόγισαν αρκετά ψηφία του.

Όλοι οι λαοί διέδιδαν τις γνώσεις τους στα Μαθηματικά με **Γρίφους**. Είναι ενδιαφέρον πώς η αναζήτηση λύσεων σε αυτά τα προβλήματα-γρίφους μπορεί να μας οδηγήσει σε μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών δομών και να μας προσφέρει χαρά και δημιουργικότητα. Οι γρίφοι και τα πνευματικά παιχνίδια ενθαρρύνουν την κριτική σκέψη και την μαθηματική προσέγγιση, τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή. Τα Μαθηματικά, ως η γλώσσα του σύμπαντος, έχουν τη δύναμη να μας μεταφέρουν σε έναν κόσμο όπου η λογική και η φαντασία συναντιούνται. Οι αρχαίοι Έλληνες, με πρωτοπόρους το Διόφαντο, το Ζήνωνα, τον Αρχιμήδη, ανακάλυψαν την ομορφιά που κρύβεται πίσω από κάθε θεώρημα και απόδειξη. Μέσα από τα **Διασκεδαστικά Μαθηματικά**, η απλότητα και η ευφυΐα των μαθηματικών προβλημάτων γίνονται προσιτά σε όλους, αποκαλύπτοντας πως η μαθηματική σκέψη δεν είναι μόνο για τους ειδικούς, αλλά μπορεί να είναι μια πηγή χαράς και έμπνευσης για τον καθένα.

Τα Μαθηματικά παράδοξα και οι γρίφοι προκαλούν την περιέργεια και τη δημιουργικότητα, ενθαρρύνουν την εξερεύνηση και την ανακάλυψη. Είναι εργαλεία που διδάσκουν την αξία της επιμονής και της πρωτότυπης σκέψης, ενώ παράλληλα διασκεδάζουν και εκπαιδεύουν.

Το βιβλίο τα «**Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**» που κυκλοφόρησε από την ΕΜΕ είναι μία συλλογή τέτοιων προβλημάτων, που συνδυάζει την αρχαία σοφία με σύγχρονες παιδαγωγικές μεθόδους, καθιστώντας τα **Μαθηματικά προσιτά και συναρπαστικά για όλες τις ηλικίες**. Τα πνευματικά παιχνίδια όπως και τα σωματικά ψυχαγωγούν και απελευθερώνουν τον άνθρωπο, φέρνουν το γέλιο και την αισιοδοξία. Τα παιχνίδια και οι γρίφοι δίνουν **αυτοπεποίθηση**, ενθαρρύνουν την αντισυμβατική σκέψη, μας οδηγούν σε νέα μονοπάτια της γνώσης, στην ανακάλυψη, στην προσπάθεια για έρευνα και **δημιουργικότητα**. Μέσα από τα παιχνίδια μαθαίνουμε να συνεργαζόμαστε, να χάνουμε, να κερδίζουμε, **μαθαίνουμε τον εαυτό μας**.

ΓΡΙΦΟΙ

Μαντέψτε

Παιχνίδι με τους φίλους, να μαντεύουμε αριθμούς που σκέφτηκαν.

Ένα 3ψήφιο και δύο μονοψήφιους

Αν σκέφτηκαν π.χ. τους αριθμούς 542, 3, 7 πείτε τους να πολλαπλασιάσουν τον 3ψήφιο επί 10 και να προσθέσουν 5 ύστερα να προσθέσουν και τον μονοψήφιο 3, το αποτέλεσμα να το πολλαπλασιάσουν επί 10 να προσθέσουν 55 και το 7. Αφού σας πουν το αποτέλεσμα μπορείτε να μαντέψετε εσείς τους αριθμούς;

Η αφαίρεση

Η Φανή και η Ζωή κάθονται σε ένα τραπέζι η μια απέναντι από την άλλη. Πάνω στο τραπέζι είναι γραμμένοι ο ένας κάτω από τον άλλο δύο 3ψήφιοι αριθμοί. Όταν τους αφαιρεί η Φανή βρίσκει 222, αλλά όταν τους αφαιρεί η Ζωή βρίσκει 111. Πώς το εξηγείτε;

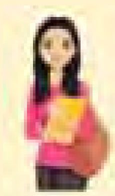
Ο Πολλαπλασιασμός

Μπορείτε να συμπληρώσετε με ψηφία τους αστερίσκους στον παρακάτω πολλαπλασιασμό:

```
      * 1 *
X     3 * 2
------------------
       * 3 *
   3 * 2 *
 * 2 * 5
-------------------
 1 * 8 * 3 *
```

Το λάθος του ταμία

Ο ταμίας της τράπεζας εξαργύρωσε την επιταγή της Ναταλίας που ήταν 49€ αλλά έκανε λάθος. Η Ναταλία αφού πήρε τα λεφτά χωρίς να τα μετρήσει πήγε για ψώνια. Αγόρασε ένα φόρεμα και πλήρωσε 45€ όμως διαπίστωσε ότι δεν της περίσσεψαν μόνο 4€ αλλά 45€ περισσότερα. Τι λάθος είχε κάνει ο ταμίας;



Η Ελένη

Σε δέκα χρόνια η Ελένη θα έχει την τριπλάσια ηλικία, απ' αυτήν που είχε πριν από δέκα χρόνια. Ποια είναι η ηλικία της;

Η περίφραξη

Τρία επίπεδα αγροτεμάχια έχουν το ίδιο εμβαδό. Το ένα έχει σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου, το άλλο τετραγώνου και το τρίτο κανονικού εξάγωνου ποιο θα χρειαστεί τη μικρότερη περίφραξη;

Το Μπαστούνι

Ένας εγγονός θέλει να στείλει ένα μπαστούνι στον παππού του. Έχει ένα κουτί με διαστάσεις 80x20 εκατοστά αλλά το μπαστούνι είναι 2 εκατοστά πιο μεγάλο. Τι θα κάνει να αξιοποιήσει το κουτί;

Ο φύλακας

Ένας φύλακας κάθεται στο μέσο μιας τετράγωνης φυλακής, μπρος, πίσω, δεξιά και αριστερά είναι τα κελιά.

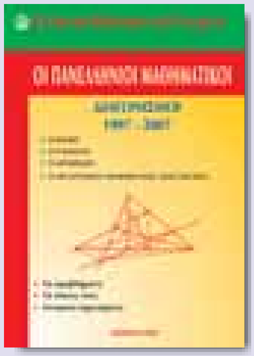
	Φ	

Βλέπει σε κάθε πλευρά 9 κρατούμενους κάθε φορά και κάθετε ήσυχος ότι δεν δραπέτευσε κανένας. Σωστά ελέγχει;

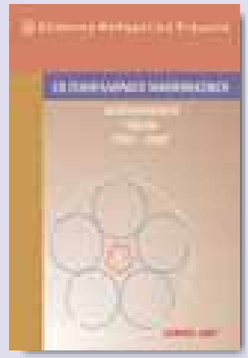
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

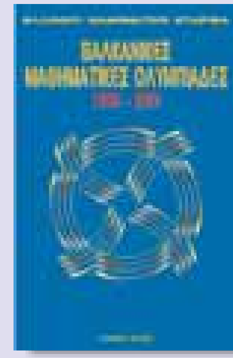
Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

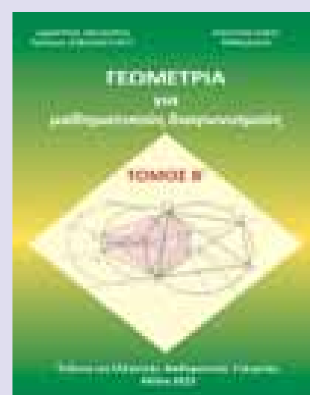
Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

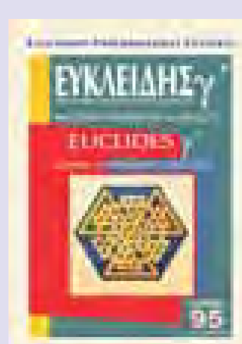
Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr