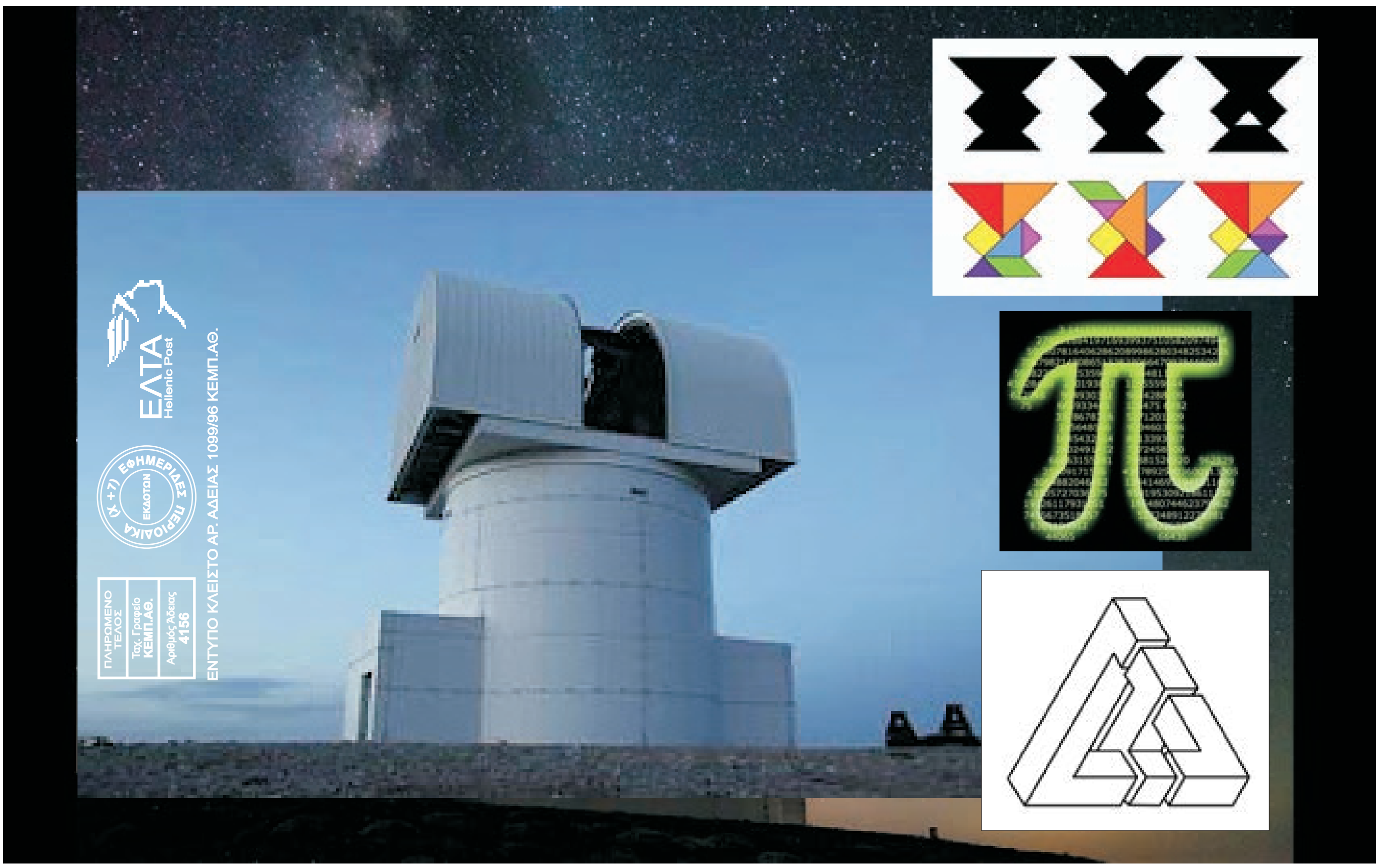
128

Μαθηματικό περιοδικό για το

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Ευκλείδης Α΄ Γυμνάσιο

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2023 ευρώ 3,00



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 128
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2023
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Μια ακόμα σχολική χρονιά ολοκληρώνεται σε λίγες μέρες.

Οι ευχές μας, από όλα τα μέλη της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού, να έχετε καλά αποτελέσματα στις εξετάσεις σας και ένα υπέροχο καλοκαίρι γεμάτο με παιχνίδια και ευχάριστες στιγμές.

Θα σας περιμένουμε ξεκούραστους για την επόμενη σχολική χρονιά με ένα νέο περιοδικό, γεμάτο επίκαιρα άρθρα, νέα ύλη και φυσικά τη δική σας αλληλογραφία.

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

Οι Συντονιστές της επιτροπής του περιοδικού
Π. Δρούτσας
Π. Χριστόπουλος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

ΣΤΗΝ ΑΝΟΙΞΗ η Γιορτή του π

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Μια πρόσκληση έκπληξη πήραμε στην ΕΜΕ. Στις 28-3-23 είμαστε προσκεκλημένοι στο **Γυμνάσιο Άνοιξης Αττικής**. Η ημερίδα είχε σαν θέμα της τους **Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς**. Με χαρά αποδεχτήκαμε την πρόσκληση και πήγαμε οι: **Παναγιώτης Χριστόπουλος**, **Στέφανος Κεϊσογλου**, **Ρούλα Αθανασίου και Βαγγέλης Ζώτος**.

Μας υποδέχτηκαν οι μαθητές της Τρίτης Γυμνασίου με την Μαθηματικό **Χριστίνα Πούλιου** και την Διευθύντρια του σχολείου. Το κτίριο είναι μικρό και παλιό, αλλά η πνοή της ομορφιάς και της καλαισθησίας που αντικρίσαμε μας άφησε άφωνους.

Τα παιδιά είχαν ετοιμάσει **μαθηματική γιορτή**, την γιορτή για τον αριθμό π, για το 3,14, που είναι στις 14-3^{ου} (14 Μάρτη). Με την είσοδό μας στο σχολείο, η φαντασία, το ταλέντο και οι γνώσεις των μαθητών στα μαθηματικά, ήταν αποτυπωμένα στα έργα τους. Ήταν στις καταπληκτικές εικόνες που στόλιζαν και ζωντάνευαν κάθε χώρο του σχολείου. Στα έργα αυτά τα παιδιά, με τη βοήθεια του καθηγητή στο μάθημα των καλλιτεχνικών, έδιναν στο μέγιστο βαθμό την φαντασία τους και το ταλέντο τους ακόμα και στις αφηρημένες έννοιες των μαθηματικών.

Τα παιδιά ήταν καταπληκτικά με συμμετοχή και ενδιαφέρον για τα θέματα στα οποία εμείς αναφερθήκαμε. Μιλήσαμε στα παιδιά για το **Θαλή**, **τον Πυθαγόρα**, **τον Αρχιμήδη και την Υπατία**. «Η διαδραστική αλληλεπίδραση εντυπωσίασε και ενθουσίασε τους μαθητές μας, που μαγεύτηκαν από τον λόγο των καθηγητών», έγραψε η κα Χριστίνα Πούλιου και την ευχαριστούμε. Στη συνέχεια έγινε η γιορτή του π, με μικρό έξυπνο και αστείο θεατρικό δρώμενο από τους μαθητές και προσφορά γλυκών και εδεσμάτων. Είχαν τούρτα και κεράσματα, όλα με το συμβολισμό αυτού του καταπληκτικού αριθμού π. (***Ο π είναι ένας υπερβατικός αριθμός**, **δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές**. **Αυτό κάνει αδύνατη και τη λύση του αρχαίου προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη***.)

Μιλήσαμε με την Διευθύντρια κα Μπελέρη Αθηνά, τον Υποδιευθυντή Κυριαζή Ηλία, την ψυχή του σχολείου, όπως μας είπαν. Μιλήσαμε με τους καθηγητές του σχολείου, που πέρα του διδακτικού τους έργου, δουλεύουν με αγάπη και ενθουσιασμό για πολιτιστικές, επιστημονικές, περιβαλλοντολογικές και άλλες δράσεις. Έτσι στις δράσεις αυτές ήταν και η πρόσκληση προς την ΕΜΕ. Ξεναγηθήκαμε στους χώρους του σχολείου, όπου οι τοίχοι του, είχαν μετατραπεί σε γκαλερί, στολισμένοι με τα έργα των μαθητών που διδάσκονται από τον κο Κυριαζή, καθηγητή εικαστικών και ζωγράφο.

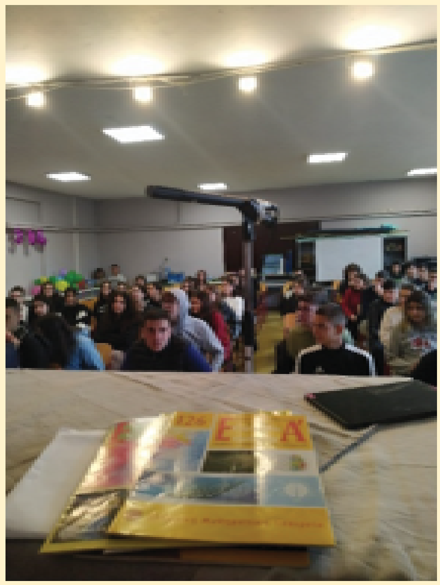
Την επόμενη μέρα δημοσίευσαν: «***Εχτές, υποδεχτήκαμε στο Γυμνάσιο Άνοιξης, Έλληνες Μαθηματικούς, μέλη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας. Ο Ευάγγελος Ζώτος, ο Στέφανος Κεΐσογλου, ο Παναγιώτης Χριστόπουλος και η κα Ρούλα Αθανασίου, μας έκαναν την τιμή, να μιλήσουν στους μαθητές μας για τους Αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς, Θαλή, Πυθαγόρα, Αριστοτέλη, Υπατία, αλλά και για το ήθος μέσα στην γνώση και την αξία της μαθηματικής επιστήμης. Στην συνέχεια συνομίλησαν με τους μαθητές και τέλος έγινε μια μικρή γιορτή για την μαθηματική σταθερά "π" με θεατρικό δρώμενο και γλυκά, πίτες και άλλα εδέσματα που έφτιαξαν οι μαθητές και εγώ. Ευχαριστούμε θερμά για την παρουσία τους στο σχολείο μας. Οι μαθητές εντυπωσιάστηκαν με τον λόγο τους, ήταν μεστός, κατανοητός με μηνύματα ουσιαστικά. Η χαρά τους φαίνεται και στις φωτογραφίες***....». ***Χριστίνα Πούλιου***.

Εορτή για αριθμό είναι κάτι το παράξενο. Οι μαθηματικοί εδώ και μερικά χρόνια έχουν ορίσει αυτή την παράξενη γιορτή για τον αριθμό «π». **Την** 14^{η} **Μαρτίου κάθε χρόνου την**

ονόμασαν «ημέρα του π» , **δηλαδή εορτή για τη μαθηματική σταθερά «π», γνωστή ως** 3,14 . **Η ακριβέστερα όταν γράψουμε έναν κύκλο και διαιρέσουμε το μήκος του με την διάμετρό του**, **για οποιονδήποτε κύκλο προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός**.

Ο αριθμός αυτός δεν είναι ακέραιος, δεν είναι κλάσμα, είναι ένας άρρητος αριθμός δηλαδή

αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που τελειωμό δεν έχουν αλλά ούτε καμιά περιοδικότητα. Έτσι αφού είναι άρρητος σημαίνει δεν λέγεται άρα ήταν απαραίτητο να δίνεται με ένα σύμβολο. Ο Euler το 1736 τον ονόμασε με το μικρό **γράμμα π**, από το αρχικό γράμμα της λέξης **περιφέρεια**. Το π είναι το $16^{ο}$ γράμμα της Ελληνικής Αλφαβήτου. Ο Euler έγραψε: «**για λόγους συντομίας θα γράφουμε τον αριθμό «π», ο π είναι ίσος με το μισό της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας** 1» (κάτι που κάνουμε στην Τριγωνομετρία, με τον τριγωνομετρικό κύκλο). Ο συμβολισμός αυτός με το μικρό Ελληνικό γράμμα **π** έκτοτε καθιερώθηκε σε όλο τον κόσμο. Προσοχή όχι κεφαλαίο το κεφαλαίο γράμμα Π χρησιμοποιείται στο γινόμενο όρων ακολουθίας.



Έκτοτε οι μαθηματικοί για χιλιάδες χρόνια είχαν επιδοθεί σε έναν αγώνα για να βρουν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του **π** και να τον κατανοήσουν. Οι μαθηματικοί πάντα στα προβλήματά τους κάνουν χρήση του αριθμού με προσέγγιση, το ίδιο και οι άλλοι επιστήμονες. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν για το **π** το 22/7=3,14285 που έχει μικρή προσέγγιση. Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του π βρίσκονται στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα. Στη Βαβυλώνα το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούν τον **π** ως 25/8 = 3.125. Στην Αίγυπτο, ο **Πάπυρος** Rhind 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το **π** ως (16/9)2 = 256/81 ≈ 3.1605.

Οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν το π=3,1547, οι Ινδοί στο Shulba Sutras (σανσκριτικά κείμενα, 600 π.Χ.) έχουν το π=(9785/5568)2 ≈ 3.088.

Δύο στίχοι της **Εβραϊκής Βίβλου** 8ο αιώνα π.Χ. περιγράφουν μια τελετουργική λεκάνη στο Ναό του Σολομώντα με διάμετρο δέκα πήχεις και η περίμετρός του τριάκοντα πήχεις. Οι στίχοι υποδηλώνουν ότι ο π είναι περίπου τρία αν η λεκάνη είναι κυκλική, ίσως η διαφορά να ήταν λόγω του πάχους.

Ο Αρχιμήδης τον $3^{ο}$ αιώνα π.Χ. χρησιμοποίησε γεωμετρικές τεχνικές με κανονικά πολύγωνα, για να υπολογίσει με ακρίβεια την τιμή του π. Χρησιμοποίησε πολύγωνο με 96 πλευρές και υπολογίζει το π 223/71<π<22/7 .

Το 1220 μ.Χ. Ο Leonardo Fibonacci βρίσκει π=3,141818

Το 1593 μ. Χ. Ο Francois Viete βρίσκει το άπειρο γινόμενο για να το περιγράψει.

Το 1674 μ. Χ. Ο Leibniz χρησιμοποιεί τόξο εφαπτομένης για το π .

Το 1855 ο Richter υπολογίζει 500 δεκαδικά ψηφία για το π.

Από το 1947 οι υπολογισμοί του π γίνονται με τη βοήθεια των Η/Υ.

Ο Euler καθιέρωσε μια σύνδεση μεταξύ του **π** και των πρώτων αριθμών που αυτό αργότερα βοήθησε στη μελέτη της συνάρτησης ζήτα του Riemann.

Ο Ελβετός επιστήμονας **Λάμπερτ** το 1761 απέδειξε ότι ο **π** είναι άρρητος.

Ο Γάλλος μαθηματικός **Λεζάντρ** απέδειξε το 1794 ότι ο π^2 είναι επίσης **άρρητος**.

Το 1882, ο Γερμανός μαθηματικός **Φον Λίντεμαν** απέδειξε ότι ο **π** είναι **υπερβατικός**.

Οι επιστήμονες στους υπολογισμούς τους δεν χρειάζονται πολλά δεκαδικά ψηφία.

Ρώτησαν την NASA πόσα ψηφία χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς της για την διαπλανητική πλοήγηση των διαστημοπλοίων και η απάντηση ήταν τα πρώτα 15 δεκαδικά ψηφία του π: «3.141592653589793»

Ας δούμε πόσο ακριβείς είναι οι υπολογισμοί με αυτή την προσέγγιση. Αν ένα διαστημόπλοιο είναι 20 **τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα μακριά από τη Γη** τότε έχουμε έναν κύκλο με διάμετρο 40 τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα.

Το μήκος αυτού του κύκλου είναι 40 τρις επί 3.141592653589793. Η τιμή της διαμέτρου σε αυτόν τον κύκλο που υπολογίσαμε με τα 15 μόνο δεκαδικά ψηφία είναι μόνο 4 εκατοστά λιγότερα της πραγματικής.

Μνημονικός κανόνας για τα 23 **ψηφία** του π είναι: «**Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί**, **το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω**, **παρήγαγεν αριθμόν απέραντον**, **καί όν**, **φευ**, **ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι**». Βέβαια ο καθένας μπορεί να δημιουργήσει το δικό του μνημονικό κανόνα, εγώ έγραψα το δικό μου μνημονικό κείμενο για τα 32 ψηφία του π το 33^{ο} είναι 0. «**Εάν ο νους ο απλός πλησιάσει το σύμπαν πάντα στη μνήμη κρύβεται Πυθαγόρας Έλληνας Επιστήμων**. **Εάν με νέα δεκαδικά τώρα μπλέξω θα χαλάσω πολύ και όχι σκοτεινή ύλη σε άσκοπες μηδενικές αξίες**». «3,14159265358979’323846264 33832795». κάνετε και σεις ένα δικό σας κείμενο. Στην απομνημόνευση πολλών ψηφίων διαπρέπουν οι Ιάπωνες.

Α΄Τάξη

Ερωτήσεις Ασκήσεις και Προβλήματα

Γιώργος Λυμπερόπουλος – Μάκης Μαυρέλης

Ερωτήσεις Θεωρίας:

1. Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς;
2. Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;
3. Πότε δυο γωνίες ονομάζονται εφεξής;
4. Πότε 2 γωνίες ονομάζονται κατακορυφή;
5. Πότε δυο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα; Πάραδειγμα.
6. Πως συγκρίνουμε δυο κλάσματα; Παρδείγματα.
7. Να συμπληρωθούν οι ισότητες : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\ldots$, $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\gamma}{\beta}=\ldots$, $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha}=\ldots$, $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\gamma}{\delta}=\ldots$
8. Πότε δυο γωνίες ονομάζονται συμπληρωματικές και πότε παραπληρωματικές;
9. Τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική
α) Της οξείας γωνίας , β) Της ορθής γωνίας και γ) Της αμβλείας γωνίας;
10. Τι ονομάζουμε απόσταση σημείου από ευθεία; Να γίνει και σχήμα.
11. Πότε ένας αριθμός λέγεται πρώτος και πότε σύνθετος; Γράψτε τους 10 πρώτους φυσικούς αριθμούς.
12. Τι ονομάζουμε Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) και τι Μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ) ,δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών;
13. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
α. Μία ορθή γωνία και η κατά κορυφή της είναι Παραπληρωματικές. ☐
β. Η κατακορυφή μιας γωνίας 53^{0} είναι 77^{0} . ☐
γ. Η παραπληρωματική μιας αμβλείας γωνίας είναι αμβλεία γωνία . ☐
δ. Η παραπληρωματική μιας οξείας γωνίας είναι αμβλεία γωνία. ☐
ε. Η συμπληρωματική μιας οξείας γωνίας είναι οξεία γωνία. ☐
στ. Οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες . ☐
14. Ποια διαίρεση δηλώνει η ισότητα Δ=δ.π+υ ; Ποιες μαθηματικές έννοιες δηλώνουν τα γράμματα που βλέπουμε; Αν δ=7 ποιες τιμές μπορεί να πάρει το υ;
15. Πότε λέμε ότι μία διαίρεση ακεραίων αριθμών είναι Τέλεια Διαίρεση;
16. Τα τρίγωνα σε σχέση με τις γωνίες τους ονομάζονται :
α. Ορ - - - - - - - , β. Ο- - - - - - -, γ. Α - - - - - - - - -
συμπληρώστε τις παύλες με τα γράμματα που λείπουν.
17. Τα τρίγωνα σε σχέση με τις πλευρές τους ονομάζονται:
α. Σ - - - - - - , β. Ι - - - - - - - , γ. Ι - - - - - - - -
συμπληρώστε τις παύλες με τα γράμματα που λείπουν.
18. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 και πότε με το 5; Μπορούμε να λέμε με βεβαιότητα ότι , για να διαιρείται ένας φυσικός αριθμός με το 15 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του να είναι το 0 ή το 5 και το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται ακριβώς με το 3;

19. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 4 και πότε με το 9;

20. Πότε δυο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα; Ποια από τα κλάσματα: $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{25}$ είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{2}$; Ποιο από τα κλάσματα αυτά είναι μεγαλύτερο και ποιο μικρότερο από το $\frac{1}{2}$;

21. Από δυο ομώνυμα κλάσματα ποιο είναι μικρότερο και ποιο μεγαλύτερο;

22. Από δυο κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο μικρότερο;

23. Να σχεδιάσετε δυο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες και δυο εφεξής συμπληρωματικές γωνίες.

24. Να συμπληρωθούν οι ισότητες: $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}$ =….., $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}$=……, $(\alpha^{\mu})^{\nu}$=…….

25. Πότε μια δύναμη αρνητικού αριθμού με εκθέτη φυσικό αριθμό δίνει αποτέλεσμα θετικό και πότε αρνητικό;

26. Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο; Ποιες είναι οι ιδιότητές του;

27. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ρόμβος; Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο; Ποιες οι ιδιότητες του ρόμβου;

28. Τι ονομάζουμε διχοτόμο μιας γωνίας; Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας;

29. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ; Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου; Η μεσοκάθετος είναι ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα;

30. Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

31. Πως ονομάζεται το επίπεδο σχήμα που κάθε σημείο του απέχει την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο που το ονομάζουμε κέντρο του;

32. Ποια ποσά ονομάζονται ανάλογα και ποια ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα;

33. Στα ανάλογα ποσά όταν το ένα ποσό μειώνεται το άλλο αυξάνεται;

34. Μπορούμε να λέμε ότι : Όταν έχω δυο ποσά τέτοια ώστε , όταν το ένα αυξάνεται τότε αυξάνεται και το άλλο , τα ποσά είναι ανάλογα;

35. Μπορούμε να λέμε ότι: Όταν έχω δυο ποσά τέτοια ώστε, όταν το ένα πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό τότε το άλλο διαιρείται με τον αριθμό αυτό, τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα;

36. Σε ένα μεγάλο έργο όλοι οι εργάτες αποδίδουν το ίδιο.
Τι ποσά είναι μεταξύ τους
α) Ο αριθμός των εργατών και το παραγόμενο έργο;
β) Ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που χρειάζεται για να τελειώσει το έργο;

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Να βρείτε η τιμή της αριθμητικής παράστασης: Α= $4+2.5-3^2+2.(17-3.5)^3$.
Αποτέλεσμα: Α= 21

2. Δίνονται οι παραστάσεις :
Α=$(2^{-3}.2^4.2^2)^3:(-2)^8$ και Β=$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}.(-1)^{2008}\right\}:\{2^5-(-3).(-6)\}$.
Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων και να εξεταστεί αν είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Υπόδειξη : Υπολογίζω … Α=2, Β= $\frac{1}{2}$, παίρνω το Α.Β=…. κ.ο.κ

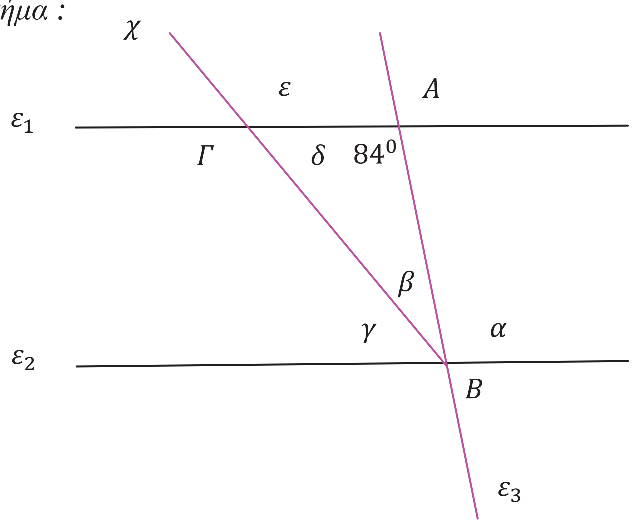
3. Ένας Εργάτης εκτελεί τα $\frac{2}{7}$ ενός έργου σε 6 ημέρες. Να βρεθεί πόσες ημέρες χρειάζεται να εκτελέσει τα $\frac{2}{3}$ του ίδιου έργου.

Υπόδειξη: Το $\frac{1}{7}$ του έργου τελειώνει σε 6:2=3 μέρες, το όλο έργο τελειώνει σε 3.7=21 μέρες άρα τα $\frac{2}{3}$ του έργου είναι…

4. Συμπληρώστε τις παύλες - 7 - με ψηφία ώστε, οι τετραψήφιοι αριθμοί που θα προκύψουν να διαιρούνται με τον αριθμό 45. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν αυτή ην ιδιότητα;

Υπόδειξη: Επειδή 45=5.9, ο τετραψήφιος αριθμός διαιρείται με 5 και 9 άρα το τελευταίο ψηφίο είναι 0 ή 5 και το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9 κ.ο.κ…

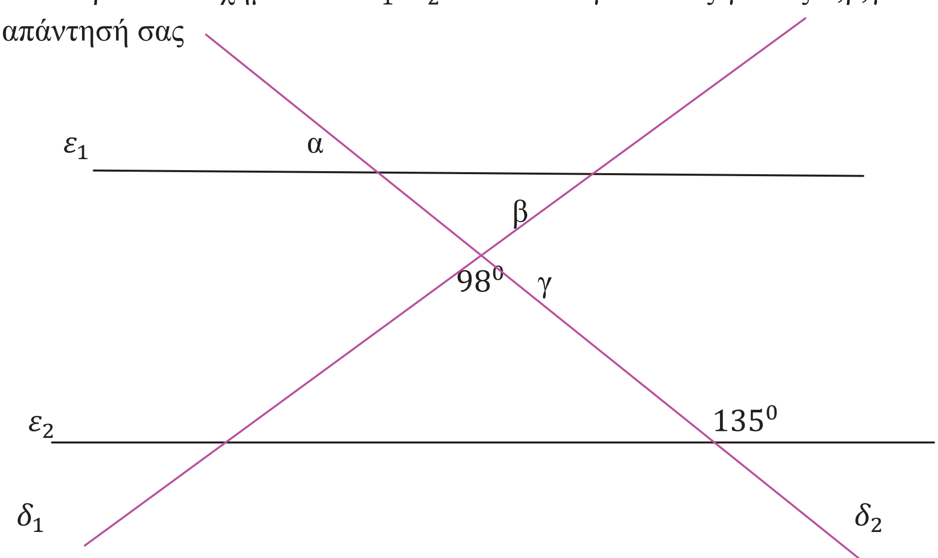
5. *Στο παρακάτω σχήμα :*



Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και η ημιευθεία Βχ είναι διχοτόμος της $AB\varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α,β,γ,δ,ε.

Υπόδειξη: Αφού Βχ διχοτόμος , τότε β=γ , β+γ=84^0 άρα β=γ=δ= 42^0,δ+ε=180^0 κ.ο.κ.

6. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α,β,γ αιτιολογώντας την απάντησή σας



Υπόδειξη: Η γωνία α είναι παραπληρωματική της γωνίας 135^0, η γωνία γ είναι παραπληρωματική της γωνίας 98^0, η γωνία γ ανήκει σε τρίγωνο που γνωρίζω τις άλλες 2 γωνίες του κ.ο.κ…

7. Πλήρωσε κάποιος το $\frac{1}{3}$ το $\frac{1}{4}$ του χρέους του και του έμεινε υπόλοιπο 6.000 Ευρώ. Ποιό ήταν το χρέος του;

Υπόδειξη: Το υπόλοιπο του χρέους του είναι $1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=$…. κ.ο.κ

8. Τα αγόρια ενός Σχολείου είναι 270 και αποτελούν τα $\frac{3}{7}$ του συνόλου των μαθητών.

α. Πόσοι είναι οι μαθητές του Σχολείου συνολικά;

β. Πόσα είναι τα κορίτσια;

γ. Αν τα $\frac{2}{9}$ των κοριτσιών διδάσκονται τη γερμανική γλώσσα , πόσα είναι ;

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{7}$ των μαθητών είναι 270:3=90 μαθητές κ.ο.κ..

9. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A=3.5^2+(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}).\frac{6}{9}-\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{2}{5}}-2^3.(8-2.3)$

Υπόδειξη: Εκτελούμε τις πράξεις με τη σειρά που έχουμε μάθει . ο αποτέλεσμα είναι: Α= 9.

10. Μία πλατεία έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 60 m και πλάτους 40m. Μέσα στη πλατεία υπάρχει κήπος με λουλούδια που έχει τετραγωνικό σχήμα πλευράς 20 m. Το υπόλοιπο της πλατείας θα στρωθεί με τετράγωνα πλακίδια που έχουν πλευρά 50cm.

α. Να υπολογιστεί το εμβαδό όλης της πλατείας και του κήπου.

β. Πόσα πλακίδια για να στρωθεί ο υπόλοιπο μέρος της πλατείας;

Υπόδειξη: Βρίσκουμε το Εμβαδό της πλατείας και του κήπου. Από το εμβαδό της πλατείας αφαιρούμε το εμβαδό του Κήπου και βρίσκουμε το υπόλοιπο μέρος που πρέπει να στρωθεί σε m^2.

Το εμβαδό του πλακιδίου το βρίσκουμε σε cm^2.

Γνωρίζοντας ότι $1m^2=(100cm)^2=10.000cm^2$, μετατρέπουμε το εμβαδό του υπόλοιπου μέρους της πλατείας σε cm^2 κ.ο.κ…

Θέματα προαγωγικών εξετάσεων στα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου

Παναγιώτης Κυλάφης – Ανδρέας Τριανταφύλλου

Α ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Πότε δυο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα; Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα.

Β. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. ………………………... λέγονται τα κλάσματα που δεν απλοποιούνται .

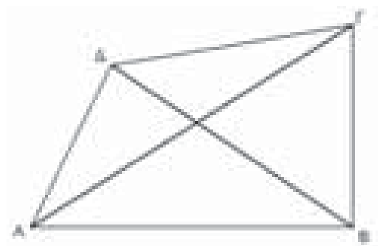
β. Τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται …...........................

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το Λ , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

	Σ	*Λ*
Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δυο όρους ενός κλάσματος με το 2, τότε το αρχικό κλάσμα γίνεται 2 φορές μεγαλύτερο.		
Τα κλάσματα 5/9 και 4/3 είναι αντίστροφα.		

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒΓ =900 .Να γράψετε ένα ζεύγος γωνιών που είναι



α. Κατακορυφήν

β. Εφεξής

γ. Συμπληρωματικές

δ. Παραπληρωματικές

Β. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Μία ευθεία γωνία έχει μέτρο …………..........

β. Μια ορθή γωνία έχει μέτρο ………….............

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

	Σ	*Λ*
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.		
Οι διαδοχικές γωνίες είναι ίσες.		

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Ένας αγρότης καλλιεργεί στο 1/3 του χωραφιού του βαμβάκι, στο 25% του χωραφιού του σιτάρι και στο 1/6 του χωραφιού καλαμπόκι. Το υπόλοιπο μέρος του χωραφιού το αφήνει ακαλλιέργητο.

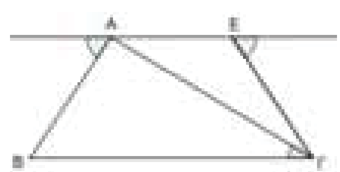
Α. Τι ποσοστό του χωραφιού μένει ακαλλιέργητο;

Β. Αν το ακαλλιέργητο τμήμα του χωραφιού είναι 15 στρέμματα πόσα στρέμματα είναι συνολικά το χωράφι του;

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{1}{3}+2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+2:\frac{4}{3}+\frac{2023}{2023}$$



Β. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\Lambda=2\cdot 4^2-3\cdot(3^2-2^3)+1^{10}$$

Γ. Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{K}{\Lambda}$ και $\frac{26}{60}$

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΕ // ΒΓ. Να υπολογίσετε:

Α. Τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ.

Β. Τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του;

Γ. Είναι ΑΕ=ΕΓ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Α ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Πότε δυο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα ;

Να γράψετε δύο κλάσματα που είναι ισοδύναμα.

Β. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Δυο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν …………………………………….……

β. Ομώνυμα κλάσματα λέγονται εκείνα που έχουν …..……………………………

γ. Για να πολλαπλασιάσουμε δυο κλάσματα ……………………………………..…

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

	Σ	*Λ*
α. Το κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί λέγεται ανάγωγο.		
β. Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα συγκρίνουμε τους αριθμητές των κλασμάτων.		
γ. Για να αφαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα πρέπει πρώτα να τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.		

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Πότε δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές; ………………………………………

Αν μια γωνία είναι 65° πόσες μοίρες είναι η παραπληρωματική της γωνία; …………….

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία ω της στήλης Α με την αντίστοιχη ονομασία της από τη στήλη Β

ΣΤΗΛΗ Α			**ΣΤΗΛΗ Β**
$\widehat{\omega}=180^o$	◆	◆	Πλήρης γωνία
$\widehat{\omega}<90^o$	◆	◆	Αμβλεία γωνία
$\widehat{\omega}=0^o$	◆	◆	Μηδενική γωνία
$\widehat{\omega}=360^o$	◆	◆	Ευθεία γωνία
$90^o<\widehat{\omega}<180^o$	◆	◆	Οξεία γωνία

Γ. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:

Εφεξής γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την …………………… κορυφή, μια κοινή……………. και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό ……………

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha=2\cdot 3^2+2\cdot(3^3-5^2)-(3^2-2\cdot 4)^{2023}$ και

$$\beta=4^2:2+(15+5):4-8$$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=33$ **Β.** Να αποδείξετε ότι $\beta=5$

Γ. Ποιος αριθμός από τους αριθμούς α και β είναι πρώτος και ποιος σύνθετος;

ΘΕΜΑ 2ο

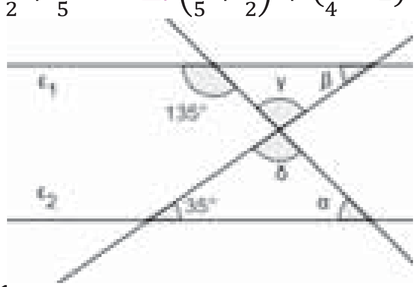
Να εκτελέσετε τις πράξεις **Α.** $\frac{4}{6}+\frac{5}{6}$ **Β.** $\frac{6}{7}+\frac{3}{4}$ **Γ.** $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ **Δ.** $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)+(\frac{6}{4}-1)$

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

Να υπολογίσετε: **Α.** Τις γωνίες α και β **Β.** Τις γωνίες γ και δ.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Α ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε δύο ποσά x και y λέγονται ανάλογα.

Α2. Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας αναλόγων ποσών.

x	6	15
y	8	20

Α3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) Η σχέση που συνδέει τα ανάλογα ποσά x και y με συντελεστή αναλογίας α είναι …………

β) Αν διπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά, και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού ……………………………………………………

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και μετά να τον μεταφέρετε στην κόλλα σας, αντιστοιχίζοντας κάθε γωνία της στήλης Α, με το χαρακτηριστικό της που υπάρχει στην στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	
Α	Ορθή γωνία
Β	Ευθεία γωνία
Γ	Πλήρης γωνία
Δ	Αμβλεία γωνία
Ε	Οξεία γωνία

ΣΤΗΛΗ Β	
1	Το μέτρο της είναι 360^o
2	Το μέτρο της είναι 180^o
3	Το μέτρο της είναι 90^o
4	Γωνία με μέτρο μικρότερο των 90^o
5	Γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90^o και μικρότερο των 180^o

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

Β2. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;

Β3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Εφεξής λέγονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια ………………………………., μία ………………………… πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι παραστάσεις,

$\alpha = (25-3)\cdot 2 + (2^3 : 4) + 2^2$, $\quad \beta = 2\cdot(2\cdot 10 - 10) + 12:3 + 1^{2022}$

Α1. Να αποδειχθεί ότι, $\alpha = 50 \; και \;\; \beta = 25$.

Α2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $X = \alpha + \beta$, όπου α και β τα αποτελέσματα του Α1 ερωτήματος, διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 5.

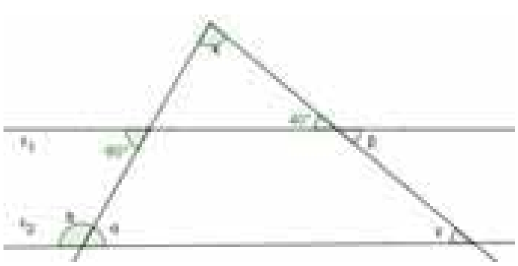
ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι παραστάσεις, $A = \frac{2}{11} + \frac{5}{11}$, $\quad B = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right)\cdot\left(1 + 1\,\frac{1}{3}\right)$ $\quad \Gamma = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}}$

Β1. Να αποδειχθεί ότι $A = \frac{7}{11} \; και \; B = \frac{7}{4}$

Β2. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma = \frac{4}{7}$ και να συγκρίνεται τα κλάσματα $A \; και \; B$ του ερωτήματος Β1.

Β3. Να βρεθεί το γινόμενο $B \cdot \Gamma$. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς $B \; και \; \Gamma$;



ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

Γ1. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\alpha} \;\; και \;\; \hat{\beta}$.

Γ2. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\gamma} \;\; και \;\; \hat{\delta}$.

Γ3. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\kappa}$.

Α ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης.

……………………………………………………………………………………..

Β. Να γράψετε σ•• • **ii)** x• x• x **iii)** 1•1•1•......•1 (ν φορές)

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το Λ , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

	Σ	*Λ*
Από δυο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.		
Για να προσθέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα πρώτα προθέτουμε τους παρονομαστές τους.		
Ετερώνυμα κλάσματα είναι αυτά που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.		

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό, ποιο οξυγώνιο και ποιο ορθογώνιο;

Β. Να σχεδιάσετε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην κορυφή Α καθώς και τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το Λ , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

	Σ	*Λ*
Παραπληρωματικές ονομάζονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o .		
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι πάντα ίσες.		
Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 90^o .		

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ομώνυμα:

i) $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{7}$ **ii)** $\frac{3}{4}$ *και* $\frac{17}{20}$ **iii)** $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{1}{12}$

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις: **Α)** $x-7=3$ **Β)** $\frac{x}{3}=\frac{6}{8}$ **Γ)** $\frac{3x-5}{2}-2=\frac{3}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90^o .

Α. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο.

Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.

Γ. α. Να φέρετε τη διχοτόμο της γωνίας Α και να ονομάσετε Μ το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την πλευρά ΒΓ. Κατόπιν να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{A}M$ και $\Gamma\hat{A}M$.

Τι παρατηρείτε;

β. Να δείξετε ότι η ΑΜ είναι ταυτόχρονα και το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

1. Τα θέματα και στις 3 τάξεις του Γυμνασίου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στα θέματα της θεωρίας που είναι δύο (2) και στα θέματα ασκήσεων που είναι τρία (3).

2. Από τα 2 θέματα της θεωρίας οι μαθητές απαντούν **μόνο** στο ένα και από τα τρία θέματα των ασκήσεων **μόνο** στα δύο.

3. Ο χρόνος εξέτασης είναι δύο ώρες.

4. Τα 3 θέματα που συνολικά πρέπει να απαντήσουν οι μαθητές είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Πηγή: Για περισσότερα θέματα και των 3 τάξεων Γυμνασίου στο

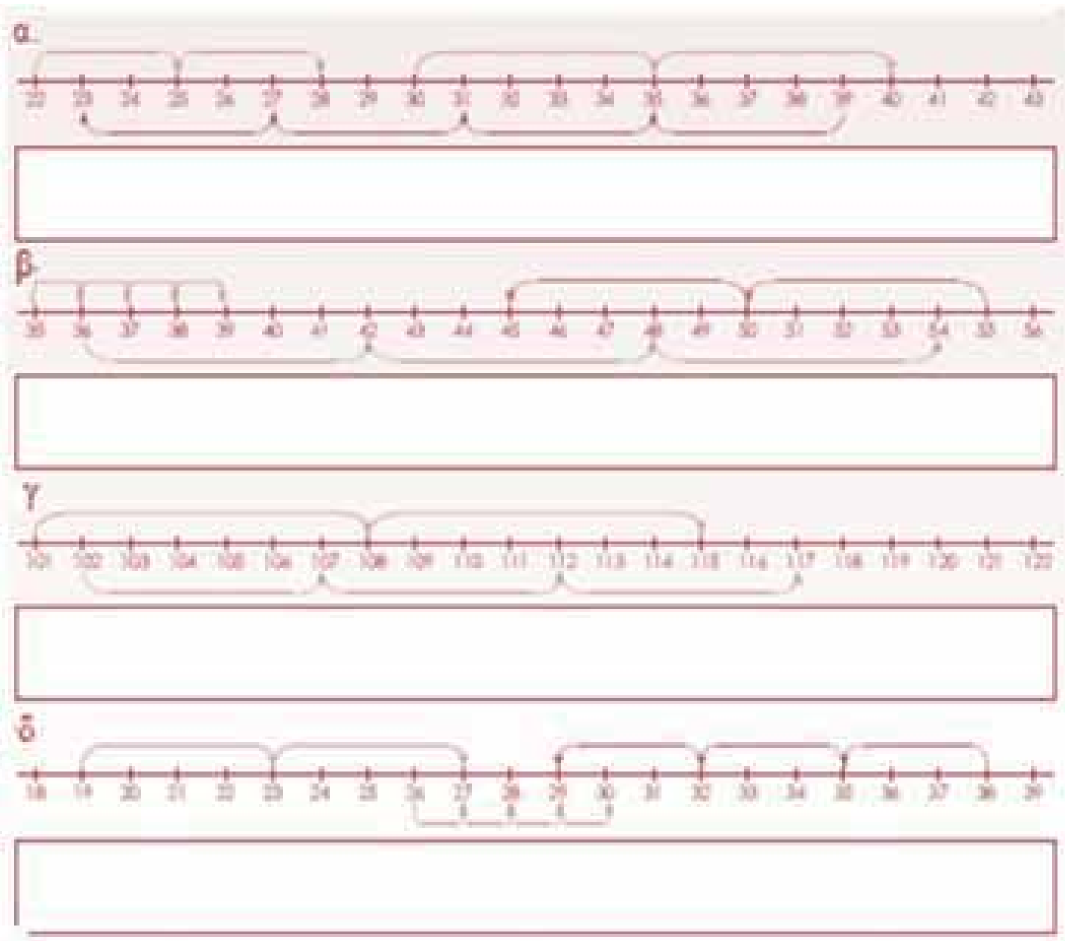
Α΄ Τάξη

Παρατηρώντας μοτίβα

Στυλιανός Μαραγκάκης – Ανδρέας Τριανταφύλλου

Περιγράφω τα μοτίβα χρησιμοποιώντας «πρόσθεση» ή «αφαίρεση», όπως στο παράδειγμα.

Παράδειγμα



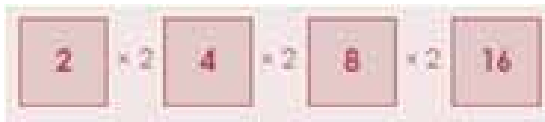
Περιγράφω τα παρακάτω μοτίβα χρησιμοποιώντας «πρόσθεση» ή «αφαίρεση», όπως στο παράδειγμα

Παράδειγμα: 27, 36, 45, 54, 63, 72, . . .

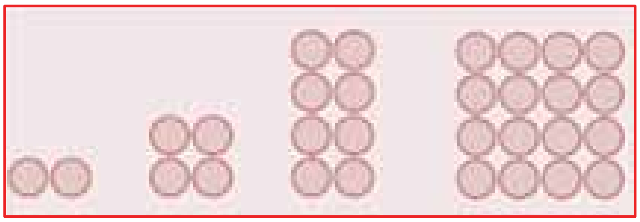
Κανόνας: προσθέτω 9

Περιγράφω το μοτίβο

2, 4, 8, 16, . . .

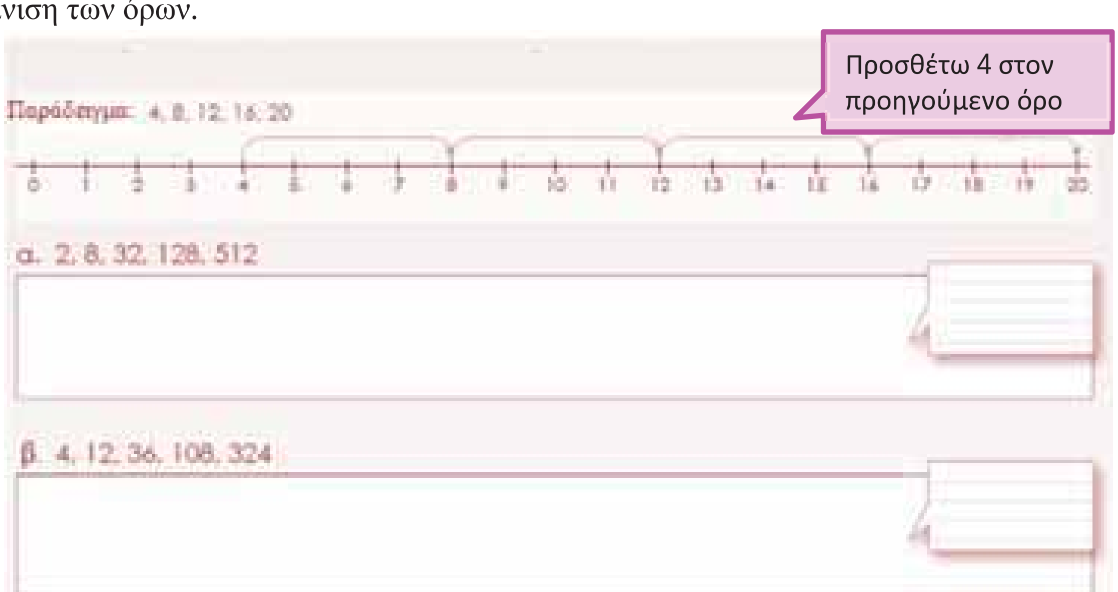


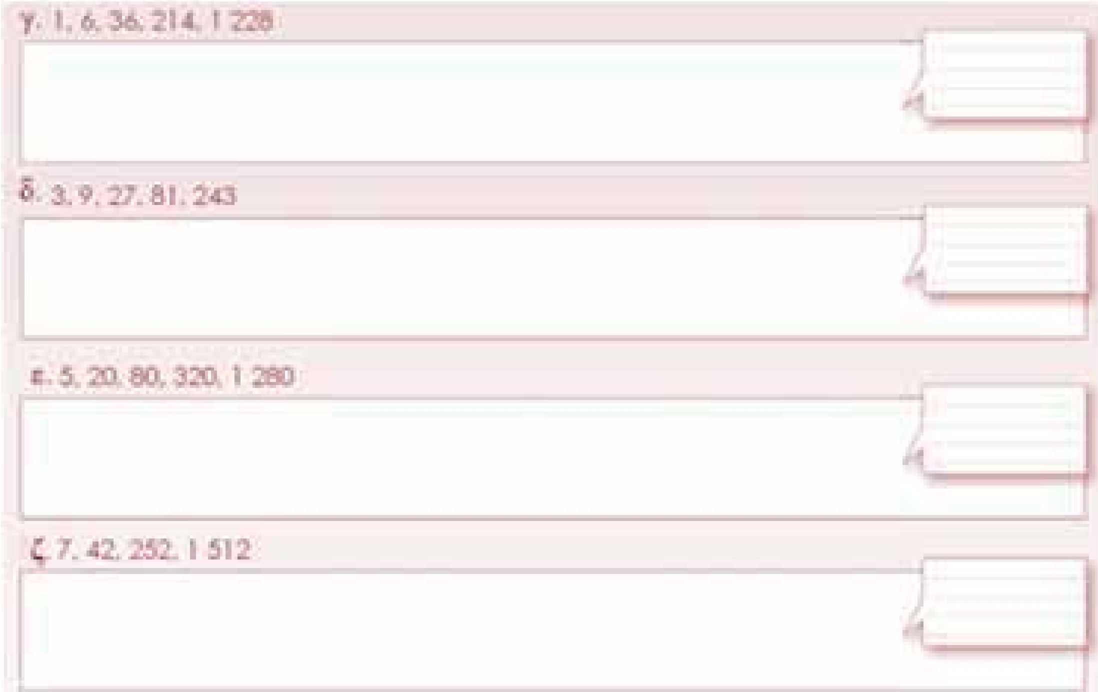
Προσδιορίζω τη σταθερή αναλογία μεταξύ των διαδοχικών όρων. Αυτό το μοτίβο μπορεί να είναι περιγραφεί με λόγια ως "πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο όρο με τον αριθμό 2".



Μπορείτε να βρείτε τη σταθερή αναλογία μεταξύ των διαδοχικών όρων σε αυτό το μοτίβο;

Περιγράφω το μοτίβο και σχηματίζω μια αριθμογραμμή για την εμφάνιση των όρων.





Αν ο κανόνας είναι «αφαιρώ 9», δώστε τους πρώτους πέντε όρους της ακολουθίας που ξεκινούν από το 104.

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ σταθερής διαφοράς και αναλογίας:

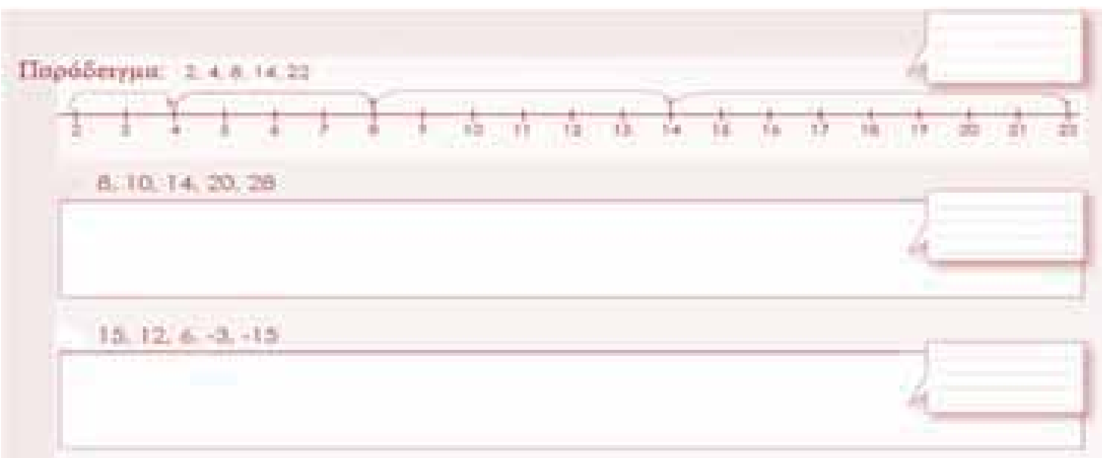
- σταθερή διαφορά, π.χ. 21, 25, 29, 33,…
- σταθερή αναλογία, π.χ. 3, 6, 12, 24,…

Περιγράψτε το μοτίβο: 1, 2, 4, 7, 11, 16,…

Αυτό το μοτίβο δεν έχει ούτε σταθερή διαφορά ούτε σταθερή αναλογία. Μπορεί να περιγραφεί ως «αύξηση της διαφοράς μεταξύ διαδοχικών όρων κατά μια μονάδα κάθε φορά».

εφαρμόζοντας τον κανόνα που προσδιορίσαμε, ποιοι θα είναι οι επόμενοι τρεις όροι;

Περιγράφω το μοτίβο και σχηματίζω μια αριθμογραμμή για την εμφάνιση των όρων.



Κατασκευή Αριθμητικών μοτίβων με τη βοήθεια πίνακα

Δώστε έναν κανόνα για να περιγράψετε τη σχέση μεταξύ των αριθμών αυτής της ακολουθίας: 2, 4, 6, 8, ...

Χρησιμοποιήστε τον κανόνα για να βρείτε τον δέκατο όρο της.

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4	. . .	10
Όροι	2	4	6	8	. . .	;

Ο «δέκατος όρος» αναφέρεται στη θέση 10 στην αριθμητική ακολουθία. Πρέπει να βρεθεί ένας κανόνας για τον προσδιορισμό του δέκατου όρου, αντί για τη συνέχιση της ακολουθίας μέχρι τη δέκατη θέση.

Θα πρέπει να αναγνωρίσετε ότι κάθε όρος στην κάτω σειρά προκύπτει διπλασιάζοντας τον αριθμό στην επάνω σειρά. Άρα διπλάσιο του 10 είναι το 20.

Επομένως ο δέκατος όρος είναι 20.

Περιγράφω στις παρακάτω ακολουθίες το μοτίβο, όπως στο παράδειγμα

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		10
όροι της ακολουθίας	3	6	9	12		30
	1 × 3	2 × 3	3 × 3	4 × 3		10 × 3

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		10
όροι της ακολουθίας	4	8	12	16		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		10
όροι της ακολουθίας	8	16	24	32		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		10
όροι της ακολουθίας	12	24	36	48		

Ποιος θα είναι ο όρος στις παρακάτω ακολουθίες;

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		20
όροι της ακολουθίας	10	20	30	40		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		25
όροι της ακολουθίας	3	6	9	12		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		35
όροι της ακολουθίας	8	16	24	32		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		50
όροι της ακολουθίας	1	8	27	64		

Θέση στην ακολουθία	1	2	3	4		100
όροι της ακολουθίας	12	24	36	48		

Πηγή: basic education — Department: Basic Education, REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

Προβλήματα για τις τάξεις Α΄ και Β΄

Αγγελική Δανιήλογλου

Άσκηση 1.

Το ένα τρίτο των μαθητών ενός σχολείου πηγαίνει στο σχολείο με τα πόδια, το ένα τέταρτο με το λεωφορείο, το ένα έκτο με Ι.Χ και 24 μαθητές με ποδήλατο. Πόσοι είναι οι μαθητές του σχολείου συνολικά;

Λύση

1ος τρόπος

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\overset{\text{ΕΚΠ}=12}{=}\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}$$

Οι μαθητές που πηγαίνουν με τα πόδια είναι: $1-\frac{9}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ των μαθητών του σχολείου.

Άρα το $\frac{1}{4}$ είναι 24 μαθητές, οπότε όλοι οι μαθητές του σχολείου είναι: $\frac{4}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=4\cdot 24=96$.

2ος τρόπος

Έστω x οι μαθητές του σχολείου. Άρα

$\frac{x}{3}$ οι μαθητές που πηγαίνουν με τα πόδια

$\frac{x}{4}$ οι μαθητές που πηγαίνουν με το λεωφορείο

$\frac{x}{6}$ οι μαθητές που πηγαίνουν με το Ι.Χ.

Άρα όλοι οι μαθητές του σχολείου είναι: $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+24=x$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+24=x$ ή

$12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x}{4}+12\cdot\frac{x}{6}+12\cdot 24=12\cdot x$ ή

$4x+3x+2x+288=12x$ ή

$3x=288$ ή

$\frac{3x}{3}=\frac{288}{3}$ ή

$x=96$

Άσκηση 2.

Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 2 μέτρα. Αν το μήκος (η μεγαλύτερη πλευρά) μεγαλώσει κατά 3 μέτρα τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγαλώνει κατά 24 τετραγωνικά μέτρα. Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση

1ος τρόπος

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι ίσο με μήκος επί πλάτος.

Το ότι το εμβαδό μεγαλώνει κατά 24 τετρ. μέτρα, οφείλεται στο ότι, το μήκος μεγαλώνει κατά 3 μέτρα. Άρα το πλάτος είναι $\frac{24}{3}=8$ μέτρα. Οπότε το μήκος είναι 10 μέτρα.

2ος τρόπος

Έστω $x\,m$ το μήκος του ορθογωνίου, τότε το πλάτος του είναι $(x-2)$ m και το εμβαδόν του $E=x(x-2)\ m^2$.

Αφού το μήκος μεγαλώνει κατά 3 m γίνεται $(x+3)m$ και το εμβαδόν του $(x+3)\cdot(x-2)=x(x-2)+3(x-2)=E+3(x-2)$

Άρα $3(x-2)=24$ ή $x-2=8$ ή $x=10$.

Άρα το αρχικό μήκος είναι 10 m και το πλάτος 8 m.

Άσκηση 3.

Στην Β΄ τάξη ενός γυμνασίου, ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι $\frac{9}{10}$. Γράφονται στην Β΄ τάξη άλλα 17 αγόρια και ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια γίνεται $\frac{8}{7}$. Να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια της τάξης.

Λύση

1ος τρόπος

Η διαφορά στους λόγους $\frac{\text{αγόρια}}{\text{κορίτσια}}$, δηλαδή $\frac{8}{7}-\frac{9}{10}=\frac{80}{70}-\frac{63}{70}=\frac{17}{70}$ οφείλεται στα 17 παραπάνω αγόρια της τάξης.

Άρα τα $\frac{17}{70}$ αντιστοιχούν σε 17, άρα τα $\frac{70}{70}$ αντιστοιχούν σε 70.

Άρα τα κορίτσια είναι 70.

2ος τρόπος

Έστω x τα αγόρια και y τα κορίτσια.

$\frac{x}{y}=\frac{9}{10}$ και $\frac{x+17}{y}=\frac{8}{7}$ δηλαδή $\frac{x}{y}+\frac{17}{y}=\frac{8}{7}$, δηλαδή $\frac{9}{10}+\frac{17}{y}=\frac{8}{7}$, δηλαδή $\frac{17}{y}=\frac{8}{7}-\frac{9}{10}$

δηλαδή $\frac{17}{y}=\frac{17}{70}$, άρα $y=70$. Άρα τα κορίτσια είναι 70.

Άσκηση 4.

Η κυρία Μαριάννα πήγε σχολείο 5 χρονών. Πέρασε το ένα τέταρτο της ζωής της σαν μαθήτρια και φοιτήτρια και όταν αποφοίτησε βρήκε αμέσως δουλειά ως καθηγήτρια. Δούλεψε το μισό της ζωής της και όταν πήρε σύνταξη, έζησε ακόμη 14 χρόνια. Πόσο χρονών ήταν όταν πήρε σύνταξη;

Λύση

1ος τρόπος

Το χρονικό διάστημα της ζωής της που σπούδασε και δούλεψε είναι: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\overset{ΕΚΠ=4}{=}\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

Το υπόλοιπο $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ της ζωής της είναι τα $5+14=19$ που έζησε ακόμα, οπότε έζησε $4\cdot 19=76$ χρόνια. Άρα πήρε σύνταξη όταν ήταν $76-14=62$ χρονών.

2ος τρόπος

Έστω x τα χρόνια που έζησε η κα Μαριάννα. Άρα

$\frac{x}{4}$ τα χρόνια που σπούδασε

$\frac{x}{2}$ τα χρόνια που εργάστηκε

Άρα $5+\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+14=x$, δηλαδή $20+x+2x+56=4x$, δηλαδή $x=76$.

Άρα πήρε σύνταξη όταν ήταν $76-14=62$ χρονών.

Άσκηση 5.

Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0,1,2,3,4,5 να σχηματίσετε τριψήφιους με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία.
Α) Πόσους τριψήφιους μπορείτε να σχηματίσετε;
Β) Πόσοι από αυτούς θα είναι άρτιοι;

Λύση

Α) Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 0 στην πρώτη θέση. Άρα η πρώτη θέση θα έχει έναν από τους υπόλοιπους 5 αριθμούς. Στην $2^η$ και $3^η$ θέση μπορεί να μπει και το 0, άρα αυτές μπορούν να έχουν έναν από τους υπόλοιπους 5 η $2^η$ θέση και για την τρίτη θέση μας περισσεύουν οι άλλοι 4 αριθμοί.
Άρα συνολικά θα σχηματίσουμε $5\cdot 5\cdot 4=100$ τριψήφιους.

Β)

Για να βρούμε τους άρτιους θα αφαιρέσουμε τους περιττούς από τους 100 τριψήφιους που έχουμε ήδη σχηματίσει.
Οι περιττοί τελειώνουν σε 1,3,5 άρα η τελευταία θέση θα γεμίσει με 3 τρόπους.
Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 0 στην πρώτη θέση, άρα η πρώτη θέση θα γεμίσει με έναν από τους υπόλοιπους 4 αριθμούς και η δεύτερη με επίσης 4. Άρα συνολικά θα σχηματιστούν $3\cdot 4\cdot 4=48$ περιττοί αριθμοί. Άρα οι άρτιοι είναι $100-48=52$ αριθμοί.

Άσκηση 6.

Ένας εργάτης χτίζει έναν τοίχο 3 μέτρα, αν δουλέψει το πρωί. Αν δουλέψει και το απόγευμα, τότε κατασκευάζει συνολικά 5 μέτρα. Αν σε 10 ημέρες ο εργάτης κατασκεύασε 36 μέτρα τοίχο, πόσες ημέρες δούλεψε μόνο τα πρωινά;

Λύση

1ος τρόπος

Αν δούλευε μόνο τα πρωινά θα έχτιζε συνολικά $10 \cdot 3 = 30$ μέτρα τοίχο. Αφού έχτισε 36 μέτρα θα δούλεψε και κάποιες μέρες απόγευμα. Παρατηρούμε ότι αν δουλεύει και το απόγευμα χτίζει $5-3=2$ μέτρα παραπάνω. Άρα έχει δουλέψει $6:2=3$ μέρες και απόγευμα.
Άρα δούλεψε 7 μέρες μόνο τα πρωινά.

2ος τρόπος

Αν δούλευε και τα απογεύματα θα έχτιζε συνολικά $10 \cdot 5 = 50$ μέτρα τοίχο. Αφού έχτισε 36 μέτρα, θα πρέπει να μην δούλευε όλες τις ημέρες και απόγευμα. Η διαφορά $50-36=14$ οφείλεται στις ημέρες που δούλεψε μόνο τα πρωινά και έχτισε 2 μέτρα λιγότερο τοίχο δηλαδή δούλεψε 7 μέρες μόνο τα πρωινά.

Άσκηση 7.

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \left(3^2 - 2023^0\right) \cdot 4 - 6^2 \div 2 + 1$ **και** $B = \dfrac{\frac{5}{9} - \frac{7}{15}}{1 - \frac{5}{9} \div \frac{15}{7}}$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A \cdot B$

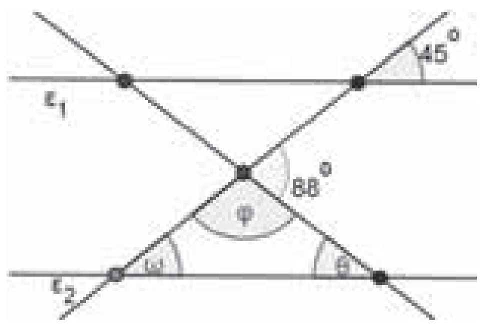
Λύση

$$A = \left(3^2 - 2023^0\right) \cdot 4 - 6^2 \div 2 + 1 = (9-1) \cdot 4 - 36 \div 2 + 1 = 32 - 18 + 1 = 14 + 1 = 15$$

$$B = \frac{\frac{5}{9} - \frac{7}{15}}{1 - \frac{5}{9} \div \frac{15}{7}} = \frac{\frac{25}{45} - \frac{21}{45}}{1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{15}} = \frac{\frac{4}{45}}{1 - \frac{7}{27}} = \frac{\frac{4}{45}}{\frac{20}{27}} = \frac{\cancel{4}^{1} \cdot \cancel{27}^{3}}{\cancel{20}_{5} \cdot \cancel{45}_{5}} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25}$$

Άρα $A \cdot B = 15 \cdot \dfrac{3}{25} = \dfrac{9}{5}$.

Άσκηση 8.



Να υπολογιστούν οι γωνίες ω, φ και θ του διπλανού σχήματος, αν γνωρίζετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

Λύση

Η γωνία ω είναι εντός εκτός και επί τα αυτά με την γωνία 45°, άρα $\hat{\omega} = 45^\circ$.

Η γωνία φ είναι παραπληρωματική με την γωνία 88°, άρα $\hat{\varphi} + 88^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 180^\circ - 88^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 92^\circ$.

Η γωνία 88° είναι εξωτερική στο τρίγωνο, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 88^\circ$ ή $45^\circ + \hat{\varphi} = 88^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 88^\circ - 45^\circ$ ή $\hat{\varphi} = 43^\circ$.

Άσκηση 9.

Σ΄ ένα Γυμνάσιο, για την ανάδειξη προέδρου του 15μελούς, ψήφισαν 250 μαθητές. Ο υποψήφιος Α πήρε το 46 % των ψήφων, ο υποψήφιος Β πήρε 100 ψήφους ενώ τα υπόλοιπα ψηφοδέλτια ήταν άκυρα και λευκά.

α. Πόσες ψήφους πήρε ο υποψήφιος Α;

β. Τι ποσοστό πήρε ο υποψήφιος Β και τι ποσοστό πήραν τα άκυρα και λευκά ψηφοδέλτια;

Λύση

α. Ο υποψήφιος Α πήρε $\overset{5}{\cancel{25}\cancel{0}}\cdot\dfrac{46}{\underset{2}{\cancel{10}\cancel{0}}}=5\cdot\dfrac{46}{2}=5\cdot 23=115$ ψήφους.

β. Ο υποψήφιος Β πήρε 100 ψήφους, άρα τα άκυρα και λευκά ήταν $250-115-100=35$

το ποσοστό που πήρε ο Β υποψήφιος είναι $\dfrac{100}{250}=\dfrac{2}{5}=0,4$ δηλαδή πήρε το $40\ \%$ των ψήφων και τα άκυρα λευκά το $(100-46-40)\%=14\%$ των ψήφων.

Άσκηση 10.

Η τιμή πώλησης μιας τηλεόρασης 50 ιντσών το 2021 ήταν 1400 ευρώ. Το 2022 μειώθηκε η τιμή της κατά 20 %. Το 2023 μειώθηκε εκ νέου η τιμή της κατά 25 % .

Να υπολογίσετε:

α) την τιμή πώλησης της τηλεόρασης το 2022 μετά την πρώτη μείωση.

β) την τιμή πώλησης της τηλεόρασης το 2023 μετά τη δεύτερη μείωση.

γ) Αν γινόταν συνολικά μία ενιαία μείωση της τιμής πώλησης της τηλεόρασης ίση με το άθροισμα των ποσοστών των δύο διαδοχικών μειώσεων (δηλαδή 20 % + 25 % = 45 %) , θα υπήρχε διαφορά ως προς την τελική τιμή και αν ναι, πόση;

Λύση

α) Αφού η τιμή της μειώθηκε κατά 20 % θα κοστίζει το 100 % – 20 % = 80 % της αρχικής τιμής. Άρα θα κοστίζει $1400\cdot\dfrac{80}{100}=14\cdot 80=1120$ ευρώ.

β) Το 2023 έχουμε μείωση τιμής κατά 25% , οπότε θα κοστίζει το 100% – 25% = 75% της τιμής που κόστιζε το 2022.

Άρα θα κοστίζει $1120\cdot\dfrac{\overset{3}{\cancel{75}}}{\underset{4}{\cancel{100}}}=\dfrac{1120\cdot 3}{4}=840$ ευρώ.

γ) Αν γινόταν συνολικά μείωση κατά 45 % της αρχικής τιμής του 2021, θα κοστίζει το 100% – 45%=55% .

Άρα το 2023 θα κοστίζει $1400\cdot\dfrac{55}{100}=14\cdot 55=770$.

Δηλαδή θα έχουμε μία διαφορά κατά 840 – 770 = 70 ευρώ φθηνότερα.

Β΄ Τάξη   Επαναληπτικές Ασκήσεις

Λέοντας Κουτσούρης

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Δύο τροχοί συνδέονται με ιμάντα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι ακτίνες τους είναι R και ρ που η R είναι η λύση της εξίσωσης

$$\frac{3(1+R)}{2}-2(R-1)=\frac{1}{4}(1-R)-\frac{R-2}{8}$$

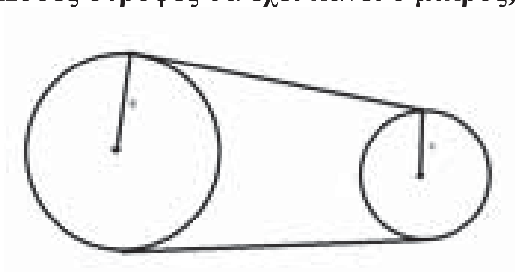
και η ρ η τιμή της παράστασης

$$\rho=\frac{4\sqrt{8}}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{14\sqrt{22}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{50\sqrt{14}}{40\sqrt{11}}-2023^0\cdot\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{256}}}.$$

Αν ο μεγάλος τροχός κάνει 120 στροφές, να βρείτε:

α) Να δείξετε ότι R=24cm και ρ=18cm

β) Πόσες στροφές θα έχει κάνει ο μικρός;



Λύση

α) $\frac{3(1+R)}{2}-2(R-1)=\frac{1}{4}(1-R)-\frac{R-2}{8}$

$\rho=\frac{4\sqrt{8}}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{14\sqrt{22}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{50\sqrt{14}}{40\sqrt{11}}-2023^0\cdot\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{256}}}$

$\frac{3+3R}{2}-2R+2=\frac{1-R}{4}-\frac{R-2}{8}$

$\rho=\frac{4}{7}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\frac{14}{2}\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{7}}\frac{50}{40}\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{11}}-1\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 16}}$

4(3+3R)-16R+16=2(1-R)-(R-2)

$\rho=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{8}{2}}\cdot 7\frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\frac{5}{4}\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{11}}-\sqrt{2\sqrt{4}}$

12+12R-16R+16=2-2R-R+2

$\rho=\frac{4}{7}\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2\cdot 2}$

12R-16R+2R+R=-12-16+2+2

$\rho=2\cdot 5\cdot\sqrt{2}^2-\sqrt{4}$, R=-24

$\rho=10\cdot 2-2$, R=24

$\rho=20-2=18$

β) L1=2πR= 2π24= 48π

L2=2πρ = 2π18= 36π

Ο L1 κάνει 120 στροφές άρα για τον L2 θα έχουμε $\frac{L1}{L2}=\frac{120}{\chi}$, χ=160 στροφές

Για εξάσκηση ερώτηση γ) Αν υποθέσουμε ότι οι τροχοί είναι γεωργικού μηχανήματος, να βρείτε την απόσταση που έχει διανύσει το μηχάνημα σε 100 στροφές.

(Απάντηση 48π μέτρα)

ΑΣΚΗΣΗ 2

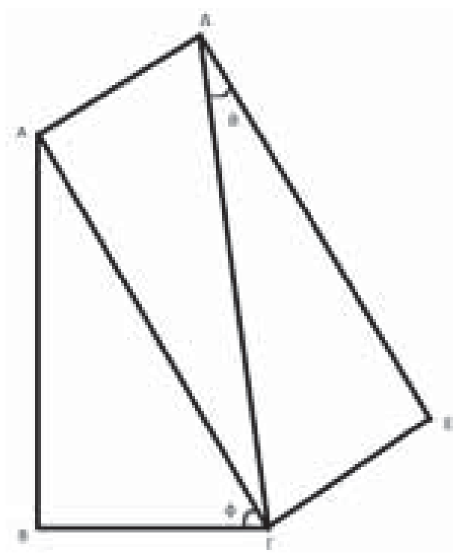
Το ΑΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 36cm^2 ενώ η γωνία Β=90°. Δίνεται η πλευρά ΒΓ=4cm καθώς και το συνφ =4/9.

α) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου

β) Να βρείτε το μήκος της διαγώνιου ΔΓ

γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΒΓΕΔ



Λύση

α) Για να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, πρέπει να βρούμε τις πλευρές ΑΔ και ΑΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$συνφ = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ όπου συνφ=$\frac{4}{9}$ και ΒΓ=4cm

Επομένως $\frac{4}{9} = \frac{4}{ΑΓ}$, $άρα\ ΑΓ = 9$cm

Από υπόθεση γνωρίζω ότι (ΑΔΕΓ)=36cm^2 , ΑΓ·ΑΔ=36 , 9·ΑΔ=36 , ΑΔ=4cm

Άρα ΑΓ=ΔΕ=9cm και ΑΔ=ΓΕ=4cm

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρω τη ΔΓ

$ΔΓ^2 = ΔΕ^2 + ΕΓ^2$, $ΔΓ^2=9^2 + 4^2$,$ΔΓ^2 = 81 + 16$, $ΔΓ^2 = 97$ $ΔΓ = \sqrt{97}$

γ) Στο τρίγωνο ΔΕΓ έχω ΔΓ=$\sqrt{97}$, ΔΕ= 9cm, ΓΕ= 4cm

$εφθ = \frac{ΓΕ}{ΔΕ}$,$εφθ = \frac{4}{9}$,$ημθ = \frac{ΓΕ}{ΓΔ}$,$ημθ = \frac{4}{\sqrt{97}} = \frac{4\sqrt{97}}{97}$,$συνθ = \frac{ΔΕ}{ΓΔ}$,$συνθ = \frac{9}{\sqrt{97}} = \frac{9\sqrt{97}}{97}$

δ) εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΒΓ, $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$,$9^2 = ΑΒ^2 + 4^2$, $ΑΒ^2 = 81 - 16$,$ΑΒ^2 = 65$, $ΑΒ = \sqrt{65}$

το εμβαδόν (ΑΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ)+(ΑΓΕΔ)

$= \frac{ΑΒ \cdot ΑΔ}{2} + 36 = \frac{\sqrt{65} \cdot 4}{2} + 36 = 2\sqrt{65} + 36\ cm^2$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα είδος σοκολάτας κοστίζει 2 € η κάθε μία.

α) να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών

Πλήθος σοκολάτες χ	1	2	3	4
Αξία σε € y				
Λόγος $\frac{y}{χ}$				

Τι παρατηρείτε για το λόγο $\frac{y}{χ}$;

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του χ και να σχεδιάσετε την παράσταση

γ) Δίνεται η συνάρτηση y=(3λ-4)χ + β η οποία είναι παράλληλη της y=2χ και διέρχεται από το σημείο

$$\left(2\sqrt{5^2 + 3^2 \cdot 6},\ \ 2^2 \cdot \frac{5}{2}\right)$$

να βρεθεί τιμή του λ, η μορφή της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

α) Αφού η μία σοκολάτα κοστίζει 2 ευρώ, οι 2 σοκολάτες θα κοστίζουν 2·2=4 € κ.λ.π.

Άρα ο πίνακας τιμών θα γίνει

Πλήθος σοκολατών χ	1	2	3	4
Κόστος σε ευρώ Y	2	4	6	8
Λόγος $\frac{y}{χ}$	2	2	2	2

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{χ}$ παραμένει πάντα σταθερός και ίσος με 2 σε κάθε περίπτωση. Άρα, τα ποσά χ και y είναι ανάλογα.

β) Από το α ερώτημα βρήκαμε ότι $\frac{y}{χ} = 2$ ή y=2χ.

γ) κάνω τις πράξεις των παραστάσεων στο σημείο που διέρχεται η συνάρτηση.

$\sqrt{5^2 + 3^2 \cdot 6}$=$\sqrt{25 + 9 \cdot 6}$=2$\sqrt{25 + 54}$=$\sqrt{81}$=9

$2^2 \cdot \frac{5}{2}$=4·$\frac{5}{2}$=10

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου είναι (9, 10)

Όταν δύο συναρτήσεις είναι παράλληλες έχουν ίδιο συντελεστή δηλαδή κλήση

επομένως 3λ-4=2, λ=2

η μορφή της συνάρτησης είναι $y = 2x + β$

αντικαθιστώ το σημείο στη συνάρτηση

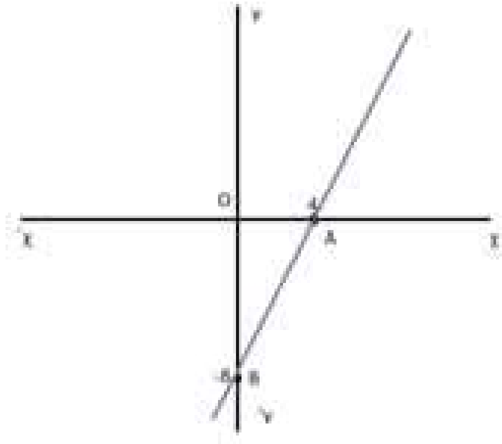
10=2· 9 +β, β = -8

οπότε τελική μορφή $y = 2x - 8$

Για να σχεδιάσω τη συνάρτηση βρίσκοντας σημεία που τέμνει τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος αξόνων

στον ΄χχ : y=0 άρα 0=2χ-8, χ=4 Α(4,0)

στον ΄yy : y=β άρα y=-8 Β(0,-8)



ΑΣΚΗΣΗ 5

Στο προηγούμενο σχήμα, Έστω τετράγωνο με πλευρά την ΑΒ cm, να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου και το μήκος της διαγώνιου του.

Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ, έχουμε $AB^2 = OA^2 + OB^2$, $AB^2 = 4^2 + (-8)^2$, $AB^2 = 16 + 64$, $AB^2 = 80$, $AB = \sqrt{80}4\sqrt{5}$ cm.

Την πλευρά του τετραγώνου την συμβολίζω με z και την διαγώνιο με δ. Άρα το εμβαδόν είναι z^2 =80 cm^2 με τον σχεδιασμό της διαγώνιου προκύπτει ορθογώνιο τρίγωνο άρα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε, $\delta^2 = z^2 + z^2$, $\delta^2 = 2z^2$, $\delta^2 = 2 \cdot 80$, $\delta^2 = 160$, $\delta = \sqrt{160} = 40cm$ ή και από τη σχέση δ= z$\sqrt{2}$=$\sqrt{80}$. $\sqrt{2}$=40cm.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Α. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΒΑΓ με ΑΒ = $\frac{3\chi-12}{2}$, ΑΓ= $\frac{\chi+3}{3}$, *ΒΓ*= χ+1 όπου έχει περίμετρο 36cm.

α) να υπολογίσετε την τιμή του χ.

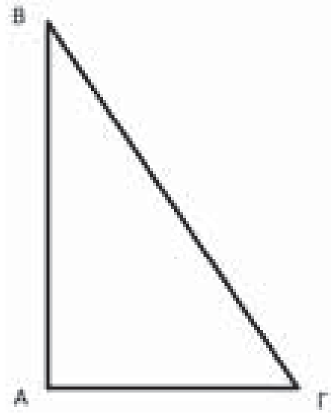
β) με δεδομένο ότι το χ = 12cm να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ) να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου.

δ) να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ προς την πλευρά λάμδα ΒΓ.

Β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\varepsilon\varphi^4 60^\circ \cdot \chi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot \chi = \eta\mu^3 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + 2$$



Λύση

Α. α) Η περίμετρος υπολογίζεται από το άθροισμα των πλευρών του σχήματος επομένως,

ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ=Π

$\frac{3\chi-12}{2} + \frac{\chi+3}{3}$ +χ+1=36

$6\frac{3\chi-12}{2} + 6\frac{\chi+3}{3}$ + 6χ+6·1=6·36

3(3χ-12) +2(χ+3) + 6χ+6=216

9χ-36+2χ+6+6χ+6=216

17χ=204 , χ=12

β) υπολογίζω τα μήκη των πλευρών

ΑΒ= $\frac{3\chi-12}{2} = \frac{3\cdot 12-12}{2} = 12cm$

ΑΓ= $\frac{\chi+3}{3} = \frac{12+3}{3} = 5$, ΒΓ= χ+1=12+1=13

Εφαρμόζω αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

$13^2 = 169$, 12^2+$5^2 = 144 + 25 = 169$ ίσα άρα το τρίγωνο ορθογώνιο.

γ) (ΑΒΓ)= $\frac{AB\cdot A\Gamma}{2} = \frac{12\cdot 5}{2} = 30cm^2$

δ) Για κάθε τρίγωνο Ε=$\frac{B\cdot \upsilon}{2}$ επομένως

(ΑΒΓ)= $\frac{B\Gamma\cdot A\Delta}{2}$, $30 = \frac{13\cdot\upsilon}{2}$, $\upsilon = \frac{60}{13}cm$

Γ΄ Τάξη Επαναληπτικά Θέματα Γ’ Γυμνασίου

Ιωάννης Πατακάκης

1) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις, με **Σ** αν είναι σωστές και **Λ** αν είναι λανθασμένες.

- $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$
- Αν $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$ τότε α=0 ή β=0
- $(\alpha - \beta)^3 = (\beta - \alpha)^3$
- $(--\alpha - 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$
- $(\alpha + \frac{1}{\alpha}) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$
- $(9\alpha^2 - 16) = (3\alpha - 4)(4 + 3\alpha)$
- Αν α και β αριθμοί αντίστροφοι και ισχύει: $\alpha + \beta = 2$, τότε $\alpha^2 + \beta^2 = 2$
- Για κάθε τιμή του α ισχύει ότι $\alpha^2 + 2\alpha \geq -1$
- Αν $\alpha > -2$, τότε $(\alpha^2+1)(\alpha+2) < 0$
- Αν η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + 1 = 0$, $\lambda \neq 0$ έχει 2 άνισες λύσεις, τότε $\lambda > 2$
- Η εξίσωση $x(x^2 - 4)(x^2 - 4x)(x^2 + 4) = 0$ έχει 7 άνισες λύσεις
- Η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{|\alpha|}$ ορίζεται για κάθε τιμή του α
- Η ρητή παράσταση $\frac{x}{x(x-1)}$ ορίζεται μόνο όταν $x \neq 1$
- Οι εξισώσεις $\frac{x}{1-x} = \frac{2}{x-1}$ και $\frac{1-x}{x} = \frac{x-1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις
- Κάθε σημείο της διαμέσου ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ απέχει εξίσου από τα άκρα Β και Γ της πλευράς ΒΓ
- Δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες μία προς μία είναι ίσα
- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία αντίστοιχη γωνία τους ίση είναι ίσα
- Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο εμβαδών 5. Τότε ο λόγος ομοιότητάς τους είναι και αυτός 5.

2) Να κάνετε τη διαίρεση $\frac{x^2-xy}{6y} : \frac{x^2-y^2}{6y^2}$

Στη συνέχεια, αφού υπολογίσετε τη ρητή παράσταση που θα προκύψει, να την υπολογίσετε όταν $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

3) Δίνονται τα πολυώνυμα $A = (x^2 - 9)^2 - (x+5)(x - 3)^2$ και

$B = (x - 1)^2 - 4$

i) Να τα παραγοντοποιήσετε.

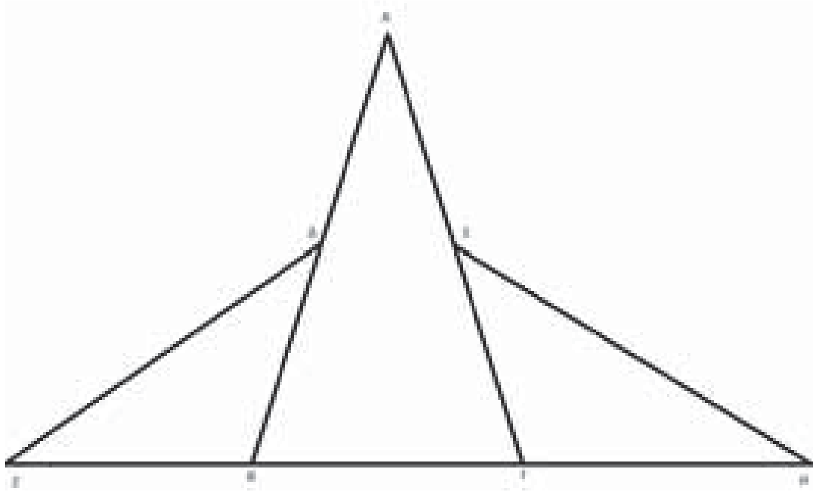
ii) Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των Α και Β.

iii) Να λύσετε τις εξισώσεις Α=0 και Β=0.

iv) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα $\frac{A}{B}$ και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

v) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -10$.

4)

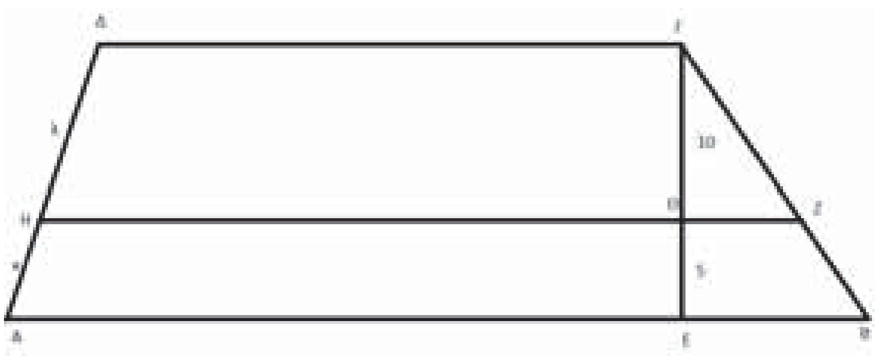


Στο σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ), τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και ισχύει ότι ΒΖ=ΓΗ.

i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΓΗ.

ii) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΔΖ και ΕΗ και τις γωνίες $\hat{Z}$ και $\widehat{H}$.

5)



i) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύει ότι ΑΔ=18cm, ΒΓ=21cm, ΗΖ//ΑΒ//ΓΔ, ΓΘ=10cm και ΕΘ=5cm. Να βρείτε τα μήκη κ , λ , μ και ν.

ii) Για τις τιμές των κ και λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αντιστοιχίσετε τα συστήματα της στήλης Α με τις προτάσεις της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
$\begin{cases} 3x+6y=2 \\ 6x+\lambda y=2 \end{cases}$	1. Έχει μία λύση
$\begin{cases} 3x+6y=2 \\ \kappa x+\lambda y=4 \end{cases}$	2. Είναι αδύνατο
$\begin{cases} 3x+6y=2 \\ \kappa x+\lambda y=x \end{cases}$	3. Είναι αόριστο

Γ΄ Τάξη Επαναληπτικές Ασκήσεις Γ΄ Γυμνασίου

Χρήστος Κουστέρης

Άσκηση 1

(α) Να λυθεί η εξίσωση : $(x-2)^2+x(x^2+1)=x(2-x)+x^3+7$

(β) Αν $\alpha=3$ **και** $\beta=\frac{1}{2}$ **οι λύσεις τις παραπάνω εξίσωσης να λυθεί το παρακάτω σύστημα:**

$$\begin{cases} \alpha x-2\beta y=2 \\ (\alpha+1)x+4\beta y=16 \end{cases}$$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+1}{3}-\frac{2-x}{6}\geq 2$ **και να εξετάσετε ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) και του συστήματος από το ερώτημα (β) είναι και λύσεις της ανίσωσης.**

Λύση

(α) Κάνοντας τις πράξεις που υπάρχουν και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε :

$$(x-2)^2+x(x^2+1)=x(2-x)+x^3+7$$

$$x^2-4x+4+x^3+x=2x-x^2+x^3+7$$

$$x^2-4x+4+x^3+x-2x+x^2-x^3-7=0$$

$$2x^2-5x-3=0$$

Η εξίσωση $2x^2-5x-3=0$ είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ με $\alpha=2, \beta=-5$ και $\gamma=-3$ επομένως $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49$

Άρα οι λύσεις είναι :

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 7}{4}=\begin{cases} x=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3 \\ \text{ή} \\ x=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

(β) Αντικαθιστώντας στο σύστημα $\begin{cases} \alpha x + 2\beta y = 2 \\ (\alpha+1)x - 4\beta y = 16 \end{cases}$ όπου $\alpha = 3$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ γίνεται :

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών :

$$\left.\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}\right| \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε : $10x = 20$ ή $x = 2$

Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 2$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε :

$$3 \cdot 2 - y = 2 \text{ ή } 6 - 2 = y \text{ ή } y = 4$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$ και $y = 4$ δηλαδή το ζευγάρι $(x, y) = (2, 4)$

(γ) Για την επίλυση της ανίσωσης εργαζόμαστε ως εξής :

$$\frac{x+1}{3} - \frac{2-x}{6} \geq 2 \text{ ή } 6 \cdot \frac{x+1}{3} - 6 \cdot \frac{2-x}{6} \geq 6 \cdot 2 \text{ ή } 2(x+1) - (2-x) \geq 12$$

$$\text{ή } 2x + 2 - 2 + x \geq 12 \text{ ή } 3x \geq 12 \text{ ή } x \geq 4$$

Οι λύσεις των ερωτημάτων (α) και (β) είναι οι αριθμοί : $-\frac{1}{2}, 2, 3, 4$ και παρατηρούμε ότι μόνο ο αριθμός 4 είναι λύση της ανίσωσης .

Άσκηση 2

(α) Για οποιαδήποτε γωνία θ να αποδείξετε ότι: $(\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (2\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 5$.

(β) Αν για την αμβλεία γωνία θ ισχύει: $5\eta\mu^2\theta - 29\eta\mu\theta + 20 = 0$

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και στην συνέχεια να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς.

Λύση

(α) Παίρνουμε το 1^{o} μέλος της σχέσης :

$$\left(ημθ-2συνθ\right)^2+\left(2ημθ+συνθ\right)^2$$

$$=ημ^2θ-2\cdot ημθ\cdot 2συνθ+\left(2συνθ\right)^2+\left(2ημθ\right)^2+2\cdot 2ημθ\cdot συνθ+συν^2θ$$

$$=ημ^2θ-4ημθσυνθ+4συν^2θ+4ημ^2θ+4ημθσυνθ+συν^2θ$$

$$=5ημ^2θ+5συν^2θ=5\left(ημ^2θ+συν^2θ\right)=5\cdot 1=5$$

(β) Η εξίσωση $5ημ^2θ-29ημθ+20=0$ είναι $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο το $ημθ$.

Θέτουμε $ημθ=x$ επομένως έχουμε : $5x^2-29x+20=0$

$Δ=29^2-4\cdot 5\cdot 20=841-400=441$

Άρα $x=\dfrac{29\pm\sqrt{441}}{2\cdot 5}=\dfrac{29+21}{10}=\begin{cases} x=\dfrac{29+21}{10}=5 \\ x=\dfrac{29-21}{10}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Επειδή ισχύει : $-1\le ημθ\le 1$ η λύση $x=5$ απορρίπτεται επομένως $ημθ=\dfrac{4}{5}$

Ισχύει : $ημ^2θ+συν^2θ=1$ για οποιαδήποτε γωνία $θ$.

Αντικαθιστώντας $ημθ=\dfrac{4}{5}$ έχουμε :

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+συν^2θ=1$ ή $\dfrac{16}{25}+συν^2θ=1$ ή $συν^2θ=1-\dfrac{16}{25}$ ή $συν^2θ=\dfrac{9}{25}$

Επομένως : $συνθ=\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ ή $συνθ=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

Δηλαδή: $συνθ=\dfrac{3}{5}$ ή $συνθ=-\dfrac{3}{5}$ επειδή η γωνία είναι αμβλεία $συνθ<0$ άρα $συνθ=-\dfrac{3}{5}$,

για την εφαπτομένη έχουμε: $εφθ=\dfrac{ημθ}{συνθ}$ άρα $εφθ=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται το πολυώνυμο $P(x)=(x-4)^2+2x(x-2)-(x-2)(x+2)$ και ο αριθμός

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$$

(α) Να δείξετε ότι $P(x)=2x^2-12x+20$

(β) Να δείξετε ότι $\alpha=10$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=\alpha$

(δ) Αν x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος **(γ)** με $x_1<x_2$ τότε να βρείτε τις τιμές των κ,λ λύνοντας ο σύστημα

$$\begin{cases} 2\kappa x_1+(2-x_2)\lambda=5x_1-x_2 \\ (2+x_1)\kappa-\lambda(x_2-3)=x_1+x_2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2-7x+12=0$ αποτελούν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, $\widehat{A}=90^\circ$ και $AB<B\Gamma$

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ του τριγώνου και του ύψους ΑΔ.

(β) Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{B}$

(γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια .

ΘΕΜΑ 3

Η εξίσωση $x^2-4x+(\kappa+\lambda)=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4$ ενώ η εξίσωση $x^2-3x+(4\kappa+2\lambda)=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=-2$ και $\lambda=5$

(β) Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραγοντοποιήσετε τα αντίστοιχα τριώνυμα .

(γ) Αν $\eta\mu\omega = \dfrac{\rho+2}{\lambda}$, όπου ρ η κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

(δ) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega)^2-2(1-\eta\mu\omega)(1+\eta\mu\omega)+(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{\eta\mu^2\omega}=\frac{9}{8}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{x^3-6x^2+5}{x^3-x}$ και $B=\dfrac{x^3+8x^2+7x}{x^3+2x^2+x}$

(α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται και στο τέλος να την απλοποιήσετε.

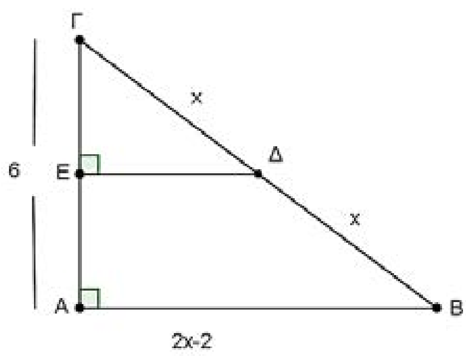
(β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Β στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται και στο τέλος να την απλοποιήσετε .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $A^2-6B+2B^2+2A+10=0$

ΘΕΜΑ 5

Στο διπλανό σχήμα οι αριθμοί $6, x, 2x-2$ είναι εκφρασμένοι σε μέτρα .

Με βάση τα στοιχεία του σχήματος



(α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ .

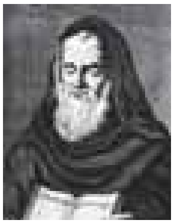
(β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΕΔ .

(γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΕΔΒ

Τα μαθηματικά δίνουν την απάντηση

Μάριος Καμμένος, Αγρίνιο



Γιατί τα Μαθηματικά είναι τόσο σπουδαία; Μια οξυδερκή απάντηση έδωσε ο Άγγλος Φραγκισκανός φιλόσοφος και εκπαιδευτικός μεταρρυθμιστής **Ρότζερ Μπέικον** (1220–1292):

«*Όποιος αγνοεί τα Μαθηματικά δεν μπορεί να γνωρίσει άλλες επιστήμες, ούτε τα αντικείμενα του κόσμου μας και το χειρότερο είναι ότι οι άνθρωποι που τα αγνοούν δε συνειδητοποιούν τηνίδια την άγνοιά τους και επομένως δεν μπορούν να τη θεραπεύσουν*»

Προς επίρρωση των λεγόμενων του Μπέικον θα μελετήσουμε μερικές εφαρμογές, που στηρίζονται στην ύλη των Μαθηματικών του Γυμνασίου.

1. Η μάζα των έμβιων όντων της βιόσφαιρας υπολογίζεται ότι είναι 10^{20} gr. Οι φυτικοί οργανισμοί αποτελούν το 99,99% της μάζας αυτής και το υπόλοιπο οι ζωικοί οργανισμοί. Πόση η μάζα σε τόνους των ζωικών οργανισμών;

Λύση

Αφού οι φυτικοί οργανισμοί αποτελούν το 99,99% της μάζας των έμβιων όντων της βιόσφαιρας, τότε οι ζωικοί αποτελούν το 100–99,99=0,01% της μάζας αυτής. Αφού η ολική μάζα είναι 10^{20}gr τότε η μάζα των ζωικών οργανισμών είναι $0{,}01\%\cdot 10^{20} = \frac{1}{10000}\cdot 10^{20} = \frac{1}{10^4}\cdot 10^{20} = 10^{16}$gr. Άρα $10^{16}/1000$ τόνοι δηλαδή 10^{13} τόνοι.

2. Σε μια αποθήκη φρούτων αποθηκεύονται 1000kg φρέσκα μούρα. Τα φρούτα φρεσκοκομμένα, περιείχαν 99% νερό. Μετά από μερικές ημέρες διαπιστώθηκε ότι περιέχουν 98%, λόγω ξήρανσης. Πόσο ζυγίζουν τώρα τα μούρα;

Λύση

Έστω x η μάζα των μούρων μετά την ξήρανση. Στην αρχή το 100–99=1% των μούρων δεν είναι νερό, δηλαδή το $1\%\cdot 1000 = \frac{1000}{100} = 10$kg. Επομένως μετά την ξήρανση τα 10kg των μούρων που δεν είναι νερό αποτελούν το 100–98 = 2% της μάζας των μούρων. Άρα $2\%\cdot x = 10 \Leftrightarrow 2x = 10\cdot 100 \Leftrightarrow 2x = 1000 \Leftrightarrow x=500$kg.

3. Τα σταθερά ημερήσια έξοδα σε μια βιομηχανία παραγωγής σκι είναι 3750€ και τα μεταβλητά έξοδα είναι 68 € για κάθε ζευγάρι σκι. Η τιμή πώλησης κάθε ζευγαριού σκι είναι 110€. Πόσα τουλάχιστον ζευγάρια σκι πρέπει να πουλάει η βιομηχανία ώστε κάθε μέρα να έχει κέρδος;

Λύση

Έστω ότι η βιομηχανία πουλάει το πλήθος ζευγάρια σκι την ημέρα, τότε:

Κόστος ημερήσιας παραγωγής = 68x+3750 €.
Ημερήσια έσοδα = 110x€.
Κέρδος = Έσοδα–Κόστος = 110x–(68x+3750)=42x–3750 €.
Πρέπει: Κέρδος>0, 42x–3750>0, x>$\frac{3750}{42}$ = 89,29
Άρα για να έχει κάθε μέρα κέρδος βιομηχανία πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 90 ζευγάρια σκι την ημέρα.

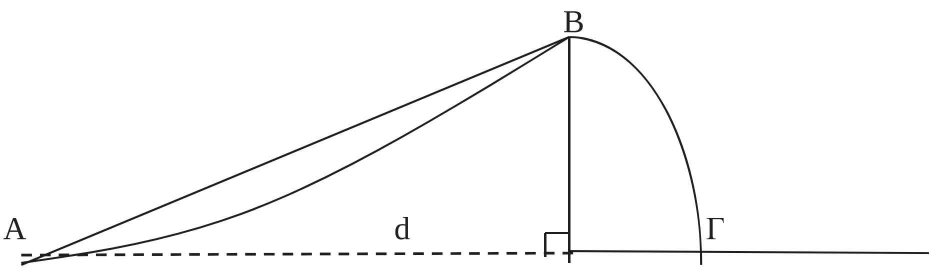
4. Ο Παρθενώνας έχει μήκος 69,5m, πλάτος 30,9m και ύψος 13,72m. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια μακέτα του Παρθενώνα μήκους 50cm, πόσα cm πρέπει να είναι το πλάτος και πόσα το ύψος της μακέτας;

Λύση

Μήκος Παρθενώνα = 69,5m= 6950cm. Πλάτος
Παρθενώνα = 30,9m = 3090cm. Ύψος
Παρθενώνα = 13,72m = 1372cm. Μήκος
μακέτας = 50cm. Πλάτος
μακέτας = x cm. Ύψος
μακέτας = y cm. Επειδή οι διαστάσεις της μακέτας πρέπει να είναι ανάλογες προς τις διαστάσεις του Παρθενώνα, έχουμε:

$\frac{x}{3090} = \frac{y}{1372} = \frac{50}{6950} = \frac{1}{159}$, άρα $\frac{x}{3090} = \frac{1}{159}$ και $\frac{y}{1372} = \frac{1}{159}$ έτσι x = $\frac{3090}{159}$ = 19,43cm και

y = $\frac{1372}{159}$=8,63cm



5. Σε ένα χιονοδρομικό κέντρο θέλαμε να κατασκευάσουμε τελεφερίκ που να συνδέει το σημείο Α με την κορυφή Β του βουνού στην πλαγιά του οποίου βρίσκεται η πίστα του σκι. Γνωρίσουμε ότι το υψόμετρο του Α είναι 1200m και του Β 2350m. Σε ένα χάρτη κλίμακας 1:20000 βρήκαμε ότι η απόσταση d είναι 10cm. Πόση είναι η απόσταση ΑΒ στην πραγματικότητα;

Λύση

Αφού ο χάρτης έχει κλίμακα 1:20000 η πραγματική απόσταση d είναι 20000·10=200000 cm δηλαδή 2000m.

Η απόσταση ΒΓ είναι ίση με το υψόμετρο Β μείον το υψόμετρο Α δηλαδή 2350–1200 = 1150m. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ: AB^2= $ΓB^2$+$ΓA^2$⇔AB^2 = 1150^2+2000^2⇔AB^2 = 1.322.500 + 4.000.000⇔AB^2 = 5.322.500 = 2.307,054m.

6. Ένας πολιτικός μηχανικός σχεδίασε ένα τούνελ μήκους 2km.
Αν η διατομή του τούνελ ήταν ημικύκλιο ακτίνας 5m πόσο όγκο θα έχει το χώμα που θα βγει για να γίνει το τούνελ; Ποια θα είναι η επιφάνεια του τούνελ;

Λύση

Το τούνελ επομένως είναι το μισό ενός κυλίνδρου. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε αυτά που θέλουμε πάνω σε έναν κύλινδρο ίσων διαστάσεων, δηλαδή ακτίνας 5m και μήκους 2000m. Το εμβαδόν της καμπύλης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με Ε = 2πrh = 2·3,14·5·2000 = 62800 m^2 δηλαδή για το τούνελ το εμβαδόν της κοίλης επιφάνειας του είναι ίσο με Ε/2 = 31400m^2. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με V = πr^2h = 3,14·5^2·2000 = 3,14·25·2000=157000m^3 άρα ο όγκος που θα έχει το χώμα είναι V/2 = 78.500m^3

7. Μια εταιρεία super–market σκοπεύει να λειτουργήσει τέσσερα καταστήματα στις κωμοπόλεις Α,Β,Γ,Δ οι οποίες συνδέονται με ένα δρόμο. Οι αποστάσεις μεταξύ των κωμοπόλεων είναι: ΑΒ=10km, ΒΓ = 18km και ΓΔ = 22km. Σε ποιο σημείο του δρόμου πρέπει να κτίσει μια αποθήκη η εταιρεία, ώστε η τροφοδοσία των super–market να είναι η πιο συμφέρουσα, όταν οι κωμοπόλεις έχουν ίσους κατά προσέγγιση πληθυσμούς;

Λύση

Το πρόβλημα δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε ότι ο δρόμος που περνάει από τις κωμοπόλεις είναι μια ευθεία γραμμή, εφ' όσον διατηρούνται οι αποστάσεις μεταξύ των κωμοπόλεων. Έστω ότι η αποθήκη κατασκευάζεται στο σημείο Ο του δρόμου. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ =|x|+|x–10|+|x–28|+|x–50| (προφανώς το Ο πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των Α και Δ). Θέτουμε d = x|+|x–10|+|x–28|+|x–50|(1) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Το Ο βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, δηλαδή 10≤x≤28, τότε (1) ⇔d = x–x+10–x+28–x+50 = = –2x+88 είναι 0≤x≤10⇔0≥–2x≥–10⇔68≤–2x+88≤88 ⇔68≤d≤88
- Το βρίσκεται Ο μεταξύ των Β και Γ, δηλαδή 10≤x≤28, τότε (1)⇔ d = x+x–10–x+28–x+50 = 68
- Το Ο βρίσκεται μεταξύ των Γ και Δ, δηλαδή 28≤x≤50, τότε (1)⇔d = x+x–10+x–28–x+50= = 2x+12 είναι 28≤x≤50⇔56≤x≤100⇔ 68≤2x+12≤112⇔68≤d≤112.

Επομένως d_{min} = 68 και το Ο πρέπει να βρίσκεται στο τμήμα του δρόμου από την κωμόπολη Β μέχρι τη Γ.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Θέματα Προκριματικού Διαγωνισμού

18 Μαρτίου 2023

Πρόβλημα 1

Μία τάξη έχει 24 μαθητές. Κάθε τριάδα μαθητών συνεδριάζει και αποφασίζει να πάρει ένα δώρο σε κάποιον μαθητή Α από τους υπόλοιπους. Τότε ο Α θεωρεί τα άτομα της τριάδας «φίλους». Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μαθητής που έχει τουλάχιστον 10 φίλους.

Λύση

Έστω ότι κάθε μαθητής έχει το πολύ 9 φίλους, οπότε θα λάβει το πολύ $\binom{9}{3} = 84$ δώρα. Τότε, το πλήθος των δώρων που θα λάβουν όλοι οι μαθητές της τάξης θα είναι το πολύ $84 \cdot 24 = 2016 < 2024 = \binom{24}{3}$, άτοπο.

Πρόβλημα 2

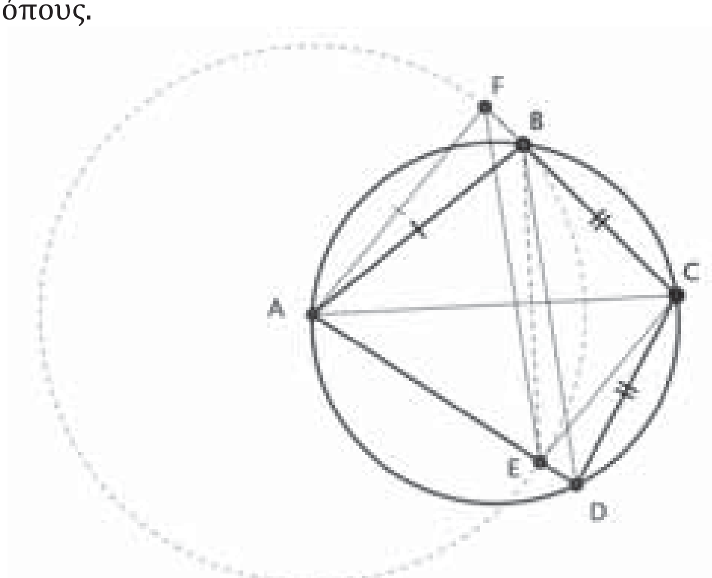
Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$, με $BC = CD$ και $AD > AB$. Έστω E σημείο της πλευράς AD και F σημείο της ευθείας CB, ώστε $AE = AB = AF$. Να αποδείξετε ότι $FE \parallel BD$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $E\hat{F}B = D\hat{B}C$. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$ και το ισοσκελές τρίγωνο BCD παίρνουμε

$$B\hat{A}C = B\hat{D}C = D\hat{B}C = D\hat{A}C.$$

Άρα η AC διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}D$, οπότε είναι η μεσοκάθετος της βάσης BE του ισοσκελούς τριγώνου BAE. Από αυτό το σημείο, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη με δύο τρόπους.



1ος τρόπος. Αφού τα σημεία E, B, F ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα AB, από την παραπάνω παρατήρηση και τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, παίρνουμε

$$E\hat{F}B = \frac{E\hat{A}B}{2} = E\hat{A}C = D\hat{A}C = D\hat{B}C, \text{ όπως θέλαμε.}$$

2ος τρόπος. Είναι $CE = CB = CD$ και $C\hat{E}D = C\hat{D}E$. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$

και το ισοσκελές τρίγωνο FAB παίρνουμε $A\hat{F}B = A\hat{B}F = A\hat{D}C = C\hat{E}D = 180^\circ - A\hat{E}C$, οπότε το τετράπλευρο $AFCE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Έτσι, έχουμε

$$E\hat{F}B = E\hat{F}C = E\hat{A}C = D\hat{A}C = D\hat{B}C, \text{ όπως θέλαμε.}$$

Πρόβλημα 3

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, c ικανοποιούν την ισότητα: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2}{2ca} + \frac{2(ab+bc+ca)}{3} \geq 5.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

1ος τρόπος. Αφού $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) + \left(\frac{b^2+c^2}{2bc} + 1\right) + \left(\frac{c^2+a^2}{2ca} + 1\right) + \left(\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} + 1\right) \geq 9.$$

η οποία γράφεται

$$\frac{(a+b)^2}{2ab} + \frac{(b+c)^2}{2bc} + \frac{(c+a)^2}{2ca} + \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 9.$$

Έστω L το αριστερό μέλος της τελευταίας. Τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz στη μορφή Engel ή Andreescu έπεται ότι

$$L \geq \frac{\big((a+b)+(b+c)+(c+a)+(a+b+c)\big)^2}{2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2} = \frac{9(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 9,$$

όπως θέλαμε. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν,

$$\frac{a+b}{2ab} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{c+a}{2ca} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Αφού $a, b, c > 0$, από τις πρώτες δύο εξισώσεις παίρνουμε $a = b = c$, οι οποίες σε συνδυασμό με την τελευταία δίνουν $a = b = c = 1$.

2ος τρόπος. Η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right) + \left(\frac{b^2+c^2}{2bc} - 1\right) + \left(\frac{c^2+a^2}{2ca} - 1\right) - \left(2 - \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\right) \geq 0$$

η οποία γράφεται

$$\frac{(a-b)^2}{2ab} + \frac{(b-c)^2}{2bc} + \frac{(c-a)^2}{2ca} - \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 0.$$

ή ισοδύναμα: $(a-b)^2\left(\frac{1}{2ab} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + (b-c)^2\left(\frac{1}{2bc} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) +$

$$+(c-a)^2\left(\frac{1}{2ca} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) \geq 0$$

Η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$(a-b)^2\frac{(a-b)^2+c^2}{2ab} + (b-c)^2\frac{(b-c)^2+a^2}{2bc} + (c-a)^2\frac{(c-a)^2+b^2}{2ca} \geq 0.$$

η οποία αληθεύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $a - b = b - c = c - a = 0$, δηλ. αν, και μόνο αν, $a = b = c = 1$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (k, n) θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$1! + 2! + \cdots + k! = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
1!+2!+...+k!	1	3	9	33	153	873	5913	46233	409113	4037913

Προφανώς, τα ζεύγη $(k,n)=(1,1)$ και $(k,n)=(2,2)$ αποτελούν λύσεις. Θα δείξουμε ότι η μοναδική λύση με $k>2$ είναι η $(k,n)=(5,17)$.

Παρατηρούμε ότι αφού το $k!$ διαιρείται με το 100 για $k\geq 10$, το άθροισμα $1!+2!+\cdots+k!$ αφήνει υπόλοιπο 13 στη διαίρεση του με το 100 για $k>=9$. Αν ισχύει η ισότητα

$$1!+2!+\cdots+k!=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

για κάποιο $k\geq 10$, τότε θα υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε $n(n+1)=100m+26$ ή, ισοδύναμα, $n^2+n-100m-26=0$.

Τότε, η διακρίνουσα $\Delta=400m+105$ της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Αλλά δεν υπάρχει ακέραιος x τέτοιος ώστε $x^2\equiv 5(mod 100)$,

αφού αλλιώς θα έπρεπε το 25 να διαιρεί το 5. Άρα η δοθείσα ισότητα δεν ισχύει για $k\geq 9$, αλλά ούτε για $k=7$.

Αφού $9=3^2$, $153=3^2\cdot 17$, $873=3^2\cdot 97$ και $46233=3^2\cdot 11\cdot 467$, βλέπουμε ότι μόνο το $2\cdot 153=18\cdot 17$, είναι γινόμενο διαδοχικών ακέραιων για $k>2$. Τότε παίρνουμε μόνο τη λύση $(k,n)=(5,17)$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 127

Ν45. Δίνεται ο θετικός ακέραιος $N=2^n\cdot p$, όπου $n,p\in\mathbb{N}^*$ και ο p είναι πρώτος. Να προσδιορίσετε τον πρώτο αριθμό p, έτσι ώστε ο αριθμός N να ισούται με το άθροισμα των θετικών διαιρετών του που είναι μικρότεροι του N.

Λύση

Οι θετικοί ακέραιοι διαιρέτες του $N=2^n\cdot p$ είναι οι όροι που προκύπτουν από το γινόμενο $(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+p)=1+2+2^2+\cdots+2^n+p+2p+2^2\cdot p+\cdots+2^n\cdot p$.

Επομένως, το άθροισμα τους χωρίς να υπολογίζεται ο $N=2^n\cdot p$ είναι:

$$(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+p)-2^n\cdot p=(2^{n+1}-1)(1+p)-2^n\cdot p=2^n\cdot p+2^{n+1}-p-1.$$

Άρα έχουμε: $2^n\cdot p+2^{n+1}-p-1=N\Leftrightarrow 2^{n+1}=p+1\Leftrightarrow p=2^{n+1}-1$

Επειδή ο p είναι πρώτος, πρέπει ο $2^{n+1}-1$ να είναι πρώτος, δηλαδή πρέπει ο $n+1$ να είναι πρώτος, έστω $n+1=q$.

Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί $N=2^{q-1}\cdot(2^q-1)$, όπου q πρώτος.

Σημείωση. *Ένας φυσικός αριθμός που ισούται με το άθροισμα των θετικών διαιρετών του που είναι μικρότεροί του λέγεται τέλειος, π.χ. οι αριθμοί 6, 28, 496,...*

Ν46. Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους ν για τους οποίους ο αριθμός ν^2+3ν+5 είναι πολλαπλάσιο του 11. Υπάρχουν ακέραιοι ν για τους οποίους ο αριθμός ν^2+3ν+5 είναι πολλαπλάσιο του 121;

Λύση

Έστω $\nu^2+3\nu+5=11\kappa,\kappa\in\mathbb{Z}$. Για να έχει η εξίσωση $\nu^2+3\nu+5-11\kappa=0,\kappa\in\mathbb{Z}$ ακέραιες λύσεις, πρέπει η διακρίνουσα της $\Delta=44\kappa-11=11\cdot(4\kappa-1)$ να ισούται με τέλειο τετράγωνο, δηλαδή πρέπει

$$44\kappa-11=\lambda^2,\lambda\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 11\cdot(4\kappa-1)=\lambda^2,\lambda\in\mathbb{Z}\Rightarrow 11|\lambda\Rightarrow\lambda=11\rho,\rho\in\mathbb{Z}.$$

Άρα πρέπει $11\cdot(4\kappa-1)=(11\rho)^2\Leftrightarrow 4\kappa-1=11\rho^2,\rho\in\mathbb{Z}$.

Πράγματι, αν $4\kappa = 1 + 11\rho^2, \rho \in \mathbb{Z}$, έχουμε:
$\Delta = (121\rho)^2$ οπότε η εξίσωση $\nu^2 + 3\nu + 5 - 11\kappa = 0$ έχει τις λύσεις

$$\nu = \frac{-3 \pm 11\rho}{2},$$

οι οποίες είναι ακέραιες, μόνον όταν $\rho = 2\mu + 1, \mu \in \mathbb{Z}$, οπότε έχουμε

$$\nu = 11\mu + 4, \mu \in \mathbb{Z} \text{ ή } \nu = -11\mu - 7, \mu \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, για $\nu = 11\mu + 4, \mu \in \mathbb{Z}$ $\nu = -11\mu - 7, \mu \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

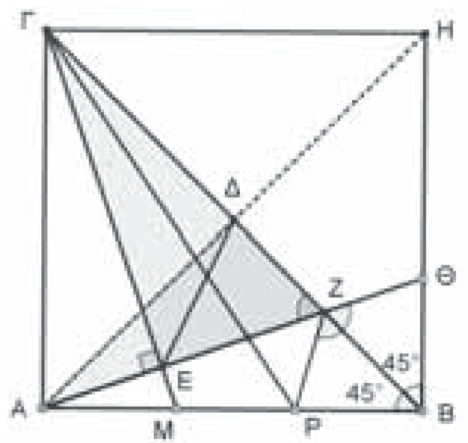
$$\nu^2 + 3\nu + 5 = 121\mu(\mu + 1) + 33 = \pi o\lambda. 11.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι $\nu^2 + 3\nu + 5 = 121\mu(\mu + 1) + 33 \neq \pi o\lambda. 121$, όταν ο αριθμός $\nu^2 + 3\nu + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 11. Επειδή για να διαιρείται ο αριθμός $\nu^2 + 3\nu + 5$ με το 121 πρέπει να διαιρείται και με το 11, από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι αυτό δεν είναι δυνατό.

Γ61. Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^0$. Θεωρούμε τα σημεία Μ, Ρ στην πλευρά ΑΒ έτσι ώστε $\mathrm{AM} = \mathrm{BP}$ και με διάταξη Α, Μ, Ρ, Β. Θεωρούμε σημείο Ε στο τμήμα ΓΜ και σημείο Ζ στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε τα σημεία Α, Ε, Ζ να είναι συνευθειακά και η ΑΖ να είναι κάθετη στη ΓΜ. Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \mathrm{P}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$. **(β) $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 45^0$.** **ΜΟ Ρουμανίας** 2004

Λύση

(α) Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΕΓ και έστω Θ το σημείο τομής των ευθειών ΒΕ και ΑΖ.
Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΘΒΑ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και έχουν $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Theta$, $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AB}$. Άρα θα έχουν και $\mathrm{AM} = \mathrm{B}\Theta$. Επειδή από υπόθεση είναι $\mathrm{AM} = \mathrm{BP}$ έπεται ότι $\mathrm{B}\Theta = \mathrm{BP}$.
Τότε και τα τρίγωνα ΒΡΖ και ΒΘΖ είναι ίσα, αφού έχουν ΒΖ κοινή πλευρά, $\mathrm{B}\Theta = \mathrm{BP}$ και $\mathrm{P}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$.
Άρα είναι $\mathrm{P}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Theta$ και αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Theta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$, ως κατά κορυφή, έπεται ότι: $\mathrm{P}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$.
(β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΕΖ είναι όμοια,



έχουμε $\frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Gamma\mathrm{Z}}$, οπότε και τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΓΖ είναι όμοια. Άρα έχουν $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 45^0$.

Ασκήσεις για λύση

Ν47. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε θετικό διαιρέτη δ του ν, ο $\delta + 1$ είναι διαιρέτης του $\nu + 1$.

Ν48. Να βρείτε πόσα ζεύγη ακέραιων (μ, ν) με $1 \leq \mu, \nu \leq 2022$ υπάρχουν, τα οποία ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: Για κάθε θετικό ακέραιο N, υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος κ και ακέραιος $\delta > N$ έτσι ώστε οι $\frac{\mu - \kappa^2}{\delta}$ και $\frac{\nu + 2\kappa}{\delta}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Γ62. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 90^0$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς την πλευρά ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Έστω Ε το μέσο του τμήματος ΓΔ. Αν οι ευθείες ΒΔ και ΓΜ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι:
(α) Τα τρίγωνα ΓΜΕ και ΑΒΔ είναι όμοια.
(β) Οι ευθείες ΕΜ και ΑΒ είναι κάθετες.

Τα Μυστικά του κόσμου

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **«Ο άνθρωπος που είναι εγωιστής, υπερηφανεύεται ότι ξέρει πολλά, ο σοφός όμως λυπάται που δεν έμαθε περισσότερα.»**
>
> **Αριστοτέλης**

Λένε ότι οι αριθμοί κρύβουν τα μυστικά του κόσμου.

Τα όντα είναι αριθμοί έλεγαν οι Πυθαγόρειοι και ότι «**Το σύμπαν δημιουργήθηκε από το** 1 **μετά από διαίρεσή του από την εισπνοή απείρου**». (Κάτι ανάλογο με την σημερινή θεωρία του Big Bang). Έτσι από το 1 προκύπτει το 2 που δίνει την ευθεία, από το 2 προκύπτει το 3 που δίνει το τρίγωνο, από το 3 το 4 που δίνει τετράεδρο και από αυτά έγιναν όλα τα σώματα, που αποτελούνται από τα τέσσερα στοιχεία τα: **πυρ**, **ύδωρ**, **γη και αήρ**. Έτσι, αφού όλα είναι αριθμοί, έχουν ιδιότητες την δικαιοσύνη, τη νόηση, την ψυχή, τη μουσική γι’ αυτό **το σύμπαν έχει αρμονία**.

Η βάση της Πυθαγόρειας διδασκαλίας ήταν η «**τετρακτύς**» δηλαδή οι αριθμοί 1,2,3,4 που το άθροισμά τους είναι το 10. Οι αποστάσεις και οι ταχύτητες των πλανητών αλλά και των απλανών αστέρων διέπονται από τους ίδιους λόγους που παράγουν και την αρμονία στους ήχους, 2/1 **οκτάβα**, 3/2 **πέμτη**, 4/3 **τέταρτη**. Οι αποστάσεις των πλανητών όπως υπολογίστηκε αργότερα από τους Μπόντε-Τίτιους με αρκετά μεγάλη προσέγγιση σε **αστρονομικές μονάδες** είναι: $\frac{4+a}{10}$ όπου α είναι οι αριθμοί (όροι γεωμετρικής προόδου) 0,3,6,12,24,48,96, … (1 **α**στρονομική **μ**ονάδα= απόσταση **Γης-Ηλίου**, 150 **εκατομμύρια χιλιόμετρα**). Δηλαδή κατά τους Πυθαγορείους η μουσική και η κοσμική αρμονία κρύβεται στις σχέσεις των 4 πρώτων φυσικών αριθμών.

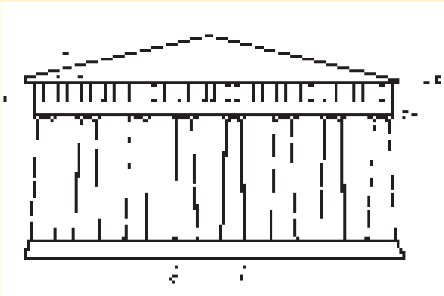
1, 2, 3, 4

Η Αρπεδόνη

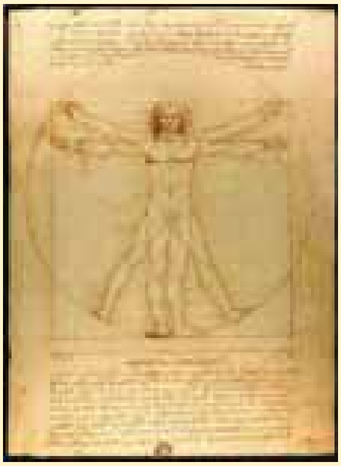
Στην αρχαία Αίγυπτο κατά τον Ηρόδοτο άνθρωποι που γνώριζαν Γεωμετρία είχαν ένα σχοινί με δώδεκα κόμπους σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις, είχε το όνομα **αρπεδόνη**. Με την αρπεδόνη μετρούσαν μήκη εμβαδά και όχι μόνο. Δημιουργούσαν ορθογώνιο τρίγωνο 12=3+4+5, ισόπλευρο 12=4+4+4, ισοσκελές 12=5+5+2, τετράγωνο12=3+3+3+3, παραλληλόγραμμο 12=2+4+2+4 ή 1+5+1+5 και συνθέτοντας τρίγωνα δημιουργούσαν πολύγωνα. Ακόμη στην αρχαιότητα είχαν και τους **Ιερούς Γεωμετρικούς λόγους** **π**, **φ**, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. (π=3,14…, φ=1,6…)

Έτσι έχουμε τη χρυσή τομή, το χρυσό ορθογώνιο με λόγο πλευρών φ, το χρυσό τρίγωνο ισοσκελές με γωνία κορυφής 30^o. Οι λόγοι αυτοί συναντώνται στα ουράνια σώματα, στα φυτά, τα ζώα, τους ανθρώπους τα ψάρια. Στον Παρθενώνας το πλάτος προς ύψος είναι φ=1,6.., το

μήκος προς ύψος είναι $\sqrt{5}$ κ.ά.. Η μεγάλη πυραμίδα στην Αίγυπτο έχει βάση τετράγωνο που αν διαιρέσουμε το ύψος δια του μισού της πλευράς της βάσης παίρνουμε $\sqrt{\phi}$, ενώ ο λόγος του παράπλευρου ύψους προς το μισό της πλευράς της βάσης είναι **φ**. Λέγεται ότι οι αρχαίοι Έλληνες έχτιζαν τα ιερά τους σε κατάλληλες θέσεις ώστε να έχουν μεταξύ τους συγκεκριμένες αποστάσεις, δεν ξέρουμε αν φρόντιζαν για κάτι τέτοιο ή αν είναι τυχαίο. Οι Δελφοί που ονομάστηκαν και ο ομφαλός ή αφαλός της Γης απέχει σε ευθεία 190 km περίπου από τη Δωδώνη και 190 km από το Δίον δημιουργούν δηλαδή ισοσκελές τρίγωνο. Η Ακρόπολη το ίδιο, έχει την ίδια απόσταση από το Ναό της Αθηνάς στην Αίγινα και τους Δελφούς. κ.ά.
Ακόμα **ο κύκλος συμβόλιζε τον πνευματικό κόσμο ενώ αντίθετα το τετράγωνο συμβόλιζε τον φυσικό κόσμο**. Τετραγωνισμός του κύκλου βέβαια δεν γίνεται γιατί ο πνευματικός κόσμος διαφέρει από τον φυσικό.



Οι καλλιτέχνες στα έργα τους κάνουν χρήση των λόγων αυτών. Ο DA VINCI στη ζωγραφική του με την τεχνική του **σφουμάτο** και όχι μόνο, χρησιμοποίησε **το χρυσό ορθογώνιο**. Ο Βιτρούβιος είχε καταλήξει στο συμπέρασμα πως το ανθρώπινο σώμα, με τα χέρια σε έκταση, χωράει στα δύο τέλεια γεωμετρικά σχήματα τον κύκλο και το τετράγωνο και πως το κέντρο του σώματος ήταν ο αφαλός. Ο Λεονάρντο Da Vinci, με τις δικές του μελέτες, διόρθωσε κάποιες ανακολουθίες του Βιτρούβιου.



Η γνώση των ανθρώπινων διαστάσεων και αναλογιών ήταν δεδομένη για πολλούς από τους καλλιτέχνες του 15ου αιώνα, ενώ ο Λεονάρντο επιχείρησε λεπτομερείς μελέτες για τις διαστάσεις αλλά και τη λειτουργία του ανθρωπίνου σώματος. (Ο λόγος των τμημάτων των δακτύλων μας, των διαστάσεων των οφθαλμών, του προσώπου, του πήχη με το μπράτσο, της κνήμης με το μηρό έχουν το λόγο **φ** της χρυσής τομής και πολλά άλλα και στο ζωικό και φυτικό κόσμο).

Είχε πάθος με τους Μαθηματικούς Γρίφους

Ο **Γάλλος_Μπασέ** δεν ήταν μαθηματικός αλλά ποιητής, του άρεσε όμως να μελετά τους κλασικούς αλλά το πάθος του ήταν στους μαθηματικούς γρίφους. Το πρώτο του δημοσίευμα ήταν μια συλλογή γρίφων. Το 1621 μετέφρασε και δημοσίευσε «**Τα αριθμητικά**» **του Διόφαντου** που μετά την πυρπόληση της βιβλιοθήκης στην Αλεξάνδρεια είχαν λησμονηθεί. Με αυτό τον τρόπο ο Μπασέ αλλά και άλλοι μελετητές έφεραν και πάλι στην δημοσιότητα τη θεωρία αριθμών και αναζωπύρωσαν τις μεθόδους των Αρχαίων Ελλήνων. Ένα αντίγραφο του βιβλίου του Μπασέ ενέπνευσε τον **Φερμά** που παράλληλα με τα δικαστικά του καθήκοντα μελετούσε μαθηματικά. Στα περιθώρια κάθε σελίδας του βιβλίου του Μπασέ, ο Φερμά σημείωνε τους συλλογισμούς του. Εκεί σημείωσε και το γνωστό **τελευταίο θεώρημά του** που έμελλε να βασανίσει πολλές γενιές μαθηματικών από το 1670, όταν μετά το θάνατό του, ο γιός του δημοσίευσε τα χειρόγραφά του. Ο Φερμά είχε εντυπωσιαστεί από την απόδειξη του Ευκλείδη που έδειχνε ότι υπάρχουν άπειρες πυθαγόρειες τριάδες και είχε σημειώσει δίπλα στο περιθώριο του βιβλίου: «**Είναι αδύνατο δύναμη μεγαλύτερη του τετραγώνου να γραφεί ως άθροισμα ίδιων δυνάμεων**» και συνέχιζε «έχω μια υπέροχη απόδειξη, όμως δεν χωρά σε ένα τόσο στενό περιθώριο». Είδε αυτό σε κάποια βιβλιοθήκη ο 10χρονος Άντριου Ουάλις και 30 χρόνια αργότερα και το 1994 έδωσε την απόδειξή του.

Το μετάλλιο στα βραβεία Fields

Το Νόμπελ δεν έχει βραβείο για Μαθηματικούς. Υπάρχουν όμως άλλα βραβεία. Το μετάλλιο στα βραβεία Fields(Νόμπελ των μαθηματικών) έχει στη μια όψη τον Αρχιμήδη και το όνομά του γραμμένο στα Ελληνικά. Στην άλλη όψη μια σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο, διάγραμμα που ο Αρχιμήδης είχε ζητήσει να τοποθετηθεί στον τάφο του και μια επιγραφή στα Λατινικά που σημαίνει: «**Ξεπέρασε τον εαυτό σου και συλλάμβανε τον κόσμο**».

Βραβεία Αντι-Νόμπελ(IgNobel)

Από το 1991 και κάθε χρόνο στο πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ στη Βοστόνη των ΗΠΑ γίνεται μια ασυνήθιστη τελετή βράβευσης κάποιων ευρηματικών επιστημονικών ιδεών. Σε αντίθεση με τα βραβεία Νόμπελ, τα Ig Nobel δίνονται προς τιμή των ανακαλύψεων που πρώτα «**κάνουν τους ανθρώπους να γελάσουν και μετά να σκεφτούν**».

Βέβαια και το βραβείο είναι αστείο. Δίνουν ένα εκατομμύριο αλλά σε νόμισμα μιας χώρας που η αξία του ποσού είναι ένα δολάριο. Ο εμπνευστής των βραβείων Marc Abrahams πάντα κλείνει την τελετή λέγοντας: «εάν δεν κερδίσατε φέτος κάποιο βραβείο Ig Nobel, αλλά ειδικά εάν κερδίσατε, σας εύχομαι καλύτερη τύχη του χρόνου».

Θέματα του βραβείου.

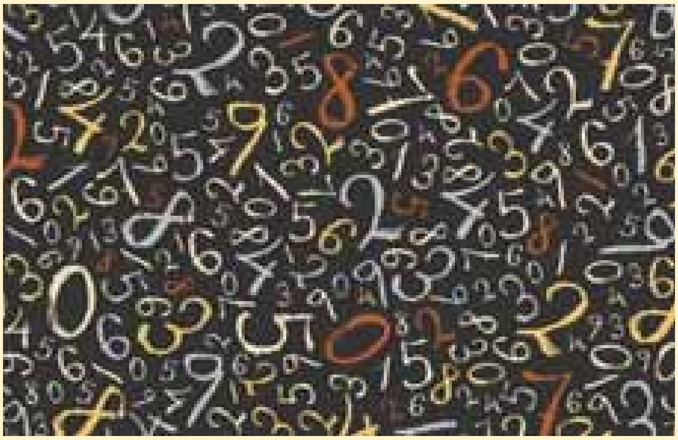
Ο μαθηματικός, Joseph Keller πριν από χρόνια κέρδισε το Αντι-Νόμπελ φυσικής. Όταν πήγαινε για τζόγκινγκ παρατηρούσε τις κοπέλες να τρέχουν και οι κοτσίδες τους να χοροπηδούν αριστερά – δεξιά. **Αναρωτήθηκε αφού το κεφάλι τους πηγαίνει πάνω – κάτω, γιατί η κοτσίδα χοροπηδάει αριστερά – δεξιά**;

Η φαινομενικά απλή ερώτηση είχε δύσκολη απάντηση. Έκανε μια σειρά μηχανικών πειραμάτων και μαθηματικών μοντέλων. Μπορεί μια κοτσίδα να φαίνεται ως ένα ομοιόμορφο σώμα αλλά στην πραγματικότητα αποτελείται από δεκάδες χιλιάδες τρίχες, οι οποίες ασκούν ελαστική δύναμη. Στα μαθηματικά αυτό ονομάζεται «πρόβλημα πολλών σωμάτων». Με την βοήθεια φυσικών, ο Joseph Keller κατάφερε να καταλήξει σε ένα σύνολο απλών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά της ταλαντωμένης κοτσίδας. Έτσι βρήκε ότι, θα μπορούσε να κινείται και πάνω – κάτω, αλλά όταν η συχνότητα του τρεξίματος είναι διπλάσια της συχνότητας της ταλαντωμένης κοτσίδας, η κίνηση δεν είναι ευσταθής. Επειδή όταν τρέχουμε έχουμε χονδρικά μια σταθερή συχνότητα με την οποία ανεβοκατεβαίνει το κεφάλι και επειδή οι κοτσίδες είναι περίπου το ίδιο μέγεθος, πηγαίνουν αριστερά – δεξιά.

Άλλα θέματα ήταν: υπολογισμός της βαρύτητας που θα πρέπει να έχει ένας πλανήτης ώστε κάποιος να μπορεί να τρέξει στην επιφάνεια μίας λίμνης δίχως να βυθιστεί, την επιβεβαίωση πως η μέθη συνοδεύεται και από την αίσθηση πως είμαστε πιο ελκυστικοί, η πρόβλεψη για το πότε μια αγελάδα πρόκειται να καθίσει, η διαπίστωση πως τα καρδιοπαθή ποντίκια ζούνε περισσότερο όταν ακούνε όπερα, πως τα σκαθάρια χρησιμοποιούνε τα αστέρια για το προσανατολισμό τους.

Οι τέλειοι

Οι αριθμοί, χαρακτηρίζονται ανάλογα με τις ιδιοτητές τους πρώτοι, σύνθετοι, ρητοί, άρρητοι, τρίγωνοι, τετράγωνοι, φίλοι, τέλιοι κ.ά. Στα στοιχεία του Ευκλείδη **τέλειος είναι ο αριθμός που είναι ίσος προς τα μέρη του** δηλαδή **ο φυσικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των διαιρετών του** (**χωρίς τον εαυτό του στους διαιρέτες**). Παράδειγμα οι 1,2,3 είναι διαιρέτες του 6 με 1+2+3=6 άρα ο 6 είναι τέλειος.



Το ίδιο και ο 28=1+2+4+7+14 (Σε 6 μέρες δημιουργήθηκε ο κόσμος, σε 28 η σελήνη κάνει κύκλο γύρω από τη Γη). Οι επόμενοι είναι 496 και 8128. Αυτοί βρέθηκαν τον $4^{ο}$ π.Χ. αιώνα από τον Ευκλείδη. Προσέξτε τα ψηφία τους, ο 6 έχει ένα ψηφίο, ο 28 έχει δύο, ο 496 τρία, ο 8128 τέσσερα, είναι άρτιοι, τελειώνουν σε 6 ή 8, το ίδιο ισχύει και για τους επόμενους 45 που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα. Η μόνη γνωστή μέθοδος για την εύρεση τέλειων αριθμών είναι στα στοιχεία του Ευκλείδη. Παίρνουμε όρους από την γεωμετρική πρόοδο 1, 2, 4, 8, 16, … **αν το άθροισμα ενός ορισμένου πλήθους είναι πρώτος αριθμός τότε το γινόμενο του αθροίσματος αυτού επί τον τελευταίο αριθμό δίνουν γινόμενο τέλειο αριθμό**. Παράδειγμα 1+2+4+8+16=31 το 31 είναι πρώτος άρα 31·16=496 τέλειος. **Ο τύπος που τους γεννάει δόθηκε τον $4^{ο}$ π.Χ. αιώνα από τον Ευκλείδη και είναι**: $T=2^{ν-1}(2^{ν}-1)$, **όπου ν=πρώτος**.

Ο επόμενος τέλειος έχει 8 ψηφία και ο $49^{ος}$ που γνωρίζουμε από το 2016 έχει περισσότερα από 44 εκατομύρια ψηφία.

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Στην αρχαία Αθήνα ο Σωκράτης είχε μαθητή τον Πλάτωνα, ο οποίος είχε μαθητή τον Αριστοτέλη.

Σοφές φράσεις

1. Άγνοια, η ρίζα και ο μίσχος όλου του κακού.
2. Αυτή η πόλη είναι αυτό που είναι γιατί οι πολίτες της είναι αυτό που είναι.
3. Εκείνος που θέλει να γίνει άριστος, δεν πρέπει να αγαπά περισσότερο τον εαυτό του, μήτε τα δικά του, αλλά τα δίκαια.
4. Εάν ο άνθρωπος λάβει την ορθή παιδεία, μέσα του ξυπνάει σφοδρή η δύναμη και η θέληση να αναπτυχθεί ως το θεϊκότερο και ημερότερο ζώο. Αλλά αν δεν τύχη της καλής και επιμελούς ανατροφής, γίνεται το πιο άγριο απ' όσα γεννάει η Γη.

Φεύγοντας για το διάστημα

Κανένα σώμα δεν μπορεί να φύγει από τη Γη αν δεν υπερνικήσει τη Βαρυτική έλξη. Αυτό μπορεί να γίνει αν έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από τα 11.200 μέτρα το δευτερόλεπτο, η οποία λέγεται ταχύτητα διαφυγής. Για να φύγει ο πύραυλος με μικρότερη ταχύτητα και να εξοικονομήσουμε καύσιμα, οι επιστήμονες εκμεταλλεύονται δύο πράγματα. Πρώτα η εκτόξευση γίνεται από θέσεις κοντά στον ισημερινό που η ακτίνα της Γης είναι μεγαλύτερη άρα το βάρος των σωμάτων μικρότερο. Δεύτερο εκμεταλλεύονται την περιστροφή της Γης που γίνεται με κατεύθυνση ανατολικά και τους εκτοξεύουν προς αυτή την κατεύθυνση. Το κέρδος στην ταχύτητα σημαντικό, περισσότερο από 600 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Διαγωνισμοί Γρίφων

Τα τελευταία χρόνια πολλά σχολεία διοργανώνουν διαγωνισμούς Γρίφων. Η στήλη μας αυτή πιστεύουμε να είναι χρήσιμη σε μαθητές και καθηγητές και για αυτούς τους διαγωνισμούς. Πήραμε πρόσκληση από την **Εκπαιδευτική Αναγέννηση** που οργάνωσε φέτος τον 5ο Διαγωνισμό Γρίφων Μαθηματικών & Λογικής στις 18-3-23 για μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου. Υπεύθυνος του διαγωνισμού ο συνάδελφος **Λάττας Κωνσταντίνος**, **Μαθηματικός**.

Έγραψε ο συνάδελφος Λάττας:

«Με επιτυχία πραγματοποιήθηκε το Σάββατο 18 Μαρτίου 2023, ο 5ος Διαγωνισμός Γρίφων Μαθηματικών & Λογικής που διοργάνωσε η Εκπαιδευτική Αναγέννηση – Εκπαιδευτήρια Αντωνόπουλου με την αιγίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Μια ημέρα γεμάτη γρίφους βασισμένους στη μαθηματική σκέψη και λογική είχαν την ευκαιρία να βιώσουν μαθητές Γυμνασίων και Λυκείων, απολαμβάνοντας το παιχνίδι με τα Μαθηματικά χωρίς το άγχος των βαθμών.

Στόχος του διαγωνισμού γρίφων της Εκπαιδευτικής Αναγέννησης είναι να καλλιεργήσει στους μαθητές την αγάπη στα Μαθηματικά και να δώσει τη δυνατότητα σε κάθε μαθητή να προσεγγίσει τη γνώση με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο. Όταν η μάθηση γίνει παιχνίδι, και το παιχνίδι μάθηση, έχει επέλθει διανοητική, συναισθηματική, κοινωνική ισορροπία. Κατά τη διάρκεια επίλυσης γρίφων ενθαρρύνεται η μαιευτική – ανακαλυπτική μέθοδος, που βοηθά τους μαθητές να εξελίξουν τις ικανότητές τους, καθώς κατά την εφαρμογή δράσεων, δίνεται έμφαση κυρίως στη διαδικασία και λιγότερο στο αποτέλεσμα. Οι μαθητές σε συνεργασία με τους συμμαθητές τους στην ομάδα τους, κατά τη διάρκεια του διαγωνισμού έχουν την ευκαιρία να συνεργαστούν, να φέρουν στην επιφάνεια ό,τι γνώσεις έχουν αποκτήσει στα σχολικά χρόνια, να εξελίξουν και να αναπτύξουν νέους τρόπους επίλυσης προβλημάτων, να αποκτήσουν νέες εμπειρίες και να σκεφθούν με ενθουσιασμό. Εξάλλου, σύμφωνα με τον Gardner, ευφυΐα είναι η δυνατότητα να επιλύσουμε ένα πρόβλημα. Η οργανωτική επιτροπή του διαγωνισμού επιλέγει τα θέματα από διάφορα είδη γρίφων, όπως γρίφοι λογικής, υπολογισμού, σπαζοκεφαλιές, κουίζ, κτλ. Οι γρίφοι με μαθηματικό περιεχόμενο είναι απαλλαγμένοι από την απολυτότητα του αυστηρού καθαρού διδακτικού μαθηματικού λόγου. Μέσα στο προστατευτικό πλαίσιο του παιχνιδιού ο μαθητής μπορεί να νιώσει και να κάνει τα πάντα, να καλλιεργήσει αρετές, να

καταστείλει τον εγωισμό του και να αποκτήσει αίσθημα κοινωνικότητας.

Στην έναρξη του Διαγωνισμού απηύθυναν χαιρετισμό ο Δρ. Στέφανος Αρετάκης Αναπληρωτής Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο και η κυρία Γεωργία Λύτρα, Ειδική Σύμβουλος στο Αυτοτελές Γραφείο Προέδρου της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής. Οι εκλεκτοί ομιλητές μίλησαν στο μαθητικό κοινό για τη σημασία και την αξία της μαθηματικής σκέψης και συνεχάρησαν το Σχολείο για την άρτια διοργάνωση.

Στο 5ο Διαγωνισμό Γρίφων Μαθηματικών & Λογικής συμμετείχαν τα παρακάτω σχολεία: Ζάννειο Πρότυπο Γυμνάσιο, Πρότυπο Λύκειο Αγίων Αναργύρων, Λύκειο Αναβρύτων, Πρότυπο Γυμνάσιο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, Βαρβάκειο Πρότυπο Γυμνάσιο, Γυμνάσιο Διονύσου, 3ο ΓΕΛ Ηρακλείου Αττικής, ΓΕΛ Βουλιαγμένης, ΓΕΛ Θρακομακεδόνων, ΓΕΛ Σχηματαρίου, 1ο Γυμνάσιο Πανοράματος, Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Γέρακα με Λυκειακές Τάξεις, Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη, Αμερικάνικο Κολλέγιο Ελλάδος (Pierce), Φροντιστήρια Μ.Ε. Τσιάλας, Φροντιστήριο Αλκή.

Στο τέλος της εκδήλωσης δόθηκαν τα βραβεία στους συμμετέχοντες

Εμείς να συγχαρούμε μαθητές και καθηγητές για αυτή την **υπέροχη διοργάνωση** και ένα μεγάλο **Μπράβο**.

Τρεις από τους Γρίφους του διαγωνισμού:

Γρίφος $1^{ος}$

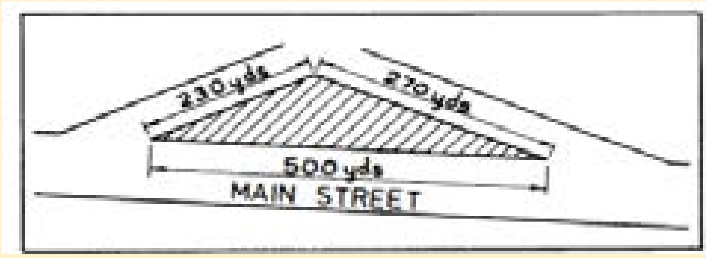
Οι 7 αδερφές πήγαν στο εξοχικό και η καθεμία ξεκίνησε να κάνει κάτι.

Η πρώτη άρχισε να διαβάζει ένα μυθιστόρημα,
η δεύτερη να τηγανίζει τηγανίτες,
η τρίτη να παίζει σκάκι,
η τέταρτη να λύνει σταυρόλεξο,
η πέμπτη να πλένει τα ρούχα
και η έκτη άρχισε να ποτίζει τα φυτά.

Τι έκανε η έβδομη;

Γρίφος 2^{ος}

Μέσα σε ένα γκαράζ υπάρχουν μηχανές και αυτοκίνητα. Όλα τα οχήματα έχουν **συνολικά** 24 **ρόδες και οι ρόδες των αυτοκινήτων είναι ίσες με τις ρόδες των μηχανών**. Πόσα είναι τα οχήματα μέσα στο γκαράζ;



Γρίφος 3^{ος}

Η μεσιτική εταιρεία Properties Universal έβαλε αυτή τη διαφήμιση στην τοπική εφημερίδα: «Το τριγωνικό οικόπεδο που φαίνεται στην φωτογραφία βρίσκεται στην Main Street, σε ένα από τα πιο ακριβά μέρη της πόλης. Πώληση την 1^{η} Απρίλιου .»

Γιατί νομίζετε ότι δεν υπήρχαν αγοραστές;

Όλα τα ψηφία

Το τετράγωνο και ο κύβος μαζί, ενός διψήφιου αριθμού, περιέχουν και τα 10 ψηφία (0,1,2,3, ..., 8,9) από μια φορά το καθένα. Ποιος είναι ο αριθμός; (Το Γρίφο μας έστειλε ο συνάδελφος **Λευτέρης Τσιλιακός**)

Απάντηση στους γρίφους

Γρίφος 1^{ος}

Η έβδομη αδερφή παίζει σκάκι με την τρίτη.

Γρίφος 2^{ος}

Τα οχήματα είναι 9.

12 ρόδες οι μηχανές άρα 6 **μηχανές**

12 ρόδες τα αυτοκίνητα άρα 3 **αυτοκίνητα**

Γρίφος 3^{ος}

Το συνολικό μήκος των δύο μικρότερων πλευρών του τριγωνικού οικοπέδου είναι ίδιο με το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς: 230 + 270 = 500.

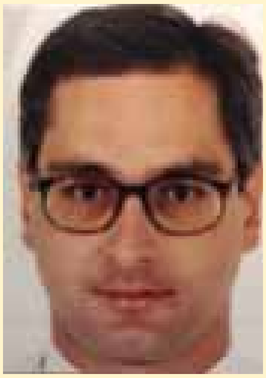
Το οικόπεδο είναι απλά ένα ευθύγραμμο τμήμα και δεν καλύπτει καμία γη.

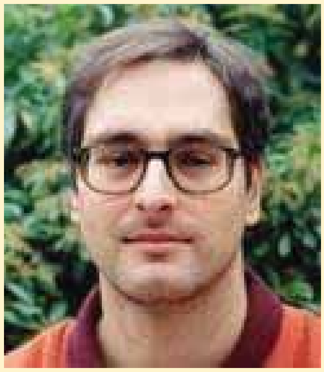
Όλα τα ψηφία

Είναι 69^2=4761 και 69^3=328509.

Το βραβείο "Emilios Harlaftis"

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος





Φοιτητής

Μαθητής Λυκείου

Ο αστροφυσικός **Χαρλαύτης**, **Αιμίλιος** (1965-2005).

Την 1**η Σεπτεμβρίου** 2020, το Διοικητικό Συμβούλιο της **Ελληνικής Αστρονομικής Εταιρείας** (ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ) μετονόμασε το βραβείο καλύτερου διδακτορικού διπλώματος που είχε από το 1997 σε βραβείο καλύτερης διδακτορικής διατριβής «**Αιμίλιος** Χ**αρλαύτης**».

Ο αστροφυσικός Αιμίλιος Χαρλαύτης υπήρξε μαθητής μου, τελείωσε με άριστα στο 39ο Λύκειο Αθήνας το 1982. Φοίτησε στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, πήρε το πτυχίο του το 1987 και το 1991 πήρε το διδακτορικό του στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Ο τίτλος της διατριβής του ήταν «Disc structure and variability in dwarf novae». Εργάστηκε στα αστεροσκοπεία Γκρήνουιτς, Λα Πάλμα και Καναρίων Νήσων, κ.ά.. Ασχολήθηκε με τα διπλά συστήματα αστέρων. Το 1998 είναι ερευνητής στο Αστεροσκοπείο Αθηνών. Υπήρξε ο επόπτης της εγκατάστασης του αστεροσκοπείου «Αρίσταρχος» του Χελμού. Μαζί δημιουργήσαμε το 2002 το «θερινό σχολείο» για μαθητές στο Αστεροσκοπείο Πεντέλης. Ο Αιμίλιος ήταν ένας έξυπνος, ανήσυχος, εργατικός, ταλαντούχος άνθρωπος. Δυστυχώς όμως χάσαμε τον Αιμίλιο νωρίς, σε ηλικία 39 ετών. Σκοτώθηκε από χιονοστιβάδα σε ορειβασία στο όρος Μαίναλο, μαζί με τέσσερις ακόμα ορειβάτες, στις 13-2-2005. Ήταν ένα από τα τραγικότερα ατυχήματα σε Ελληνικό βουνό που απασχόλησε πολύ την κοινή γνώμη. Προς τιμή του δόθηκε το όνομά του το αστεροσκοπείο του Χελμού και την αίθουσα διαλέξεων του αστεροσκοπείου Πεντέλης. Από το 2021 η Ελληνική Αστρονομική εταιρεία για να τιμήσει την μνήμη του θέσπισε στο όνομά του βραβείο, για την καλύτερη διδακτορική διατριβή, που απονέμεται κάθε δύο χρόνια. Στο φετινό συνέδριο της Ελληνικής

Αστρονομικής Εταιρείας στις 25 Ιουνίου 2023 θα γίνει ειδική τελετή για την απονομή του Βραβείου

στον Ραφαήλ Σκαλίδη. Ο κος Σκαλίδης είναι απόφοιτος του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης και θα βραβευθεί για τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο Κρήτης με την επίβλεψη του Καθηγητή Κων. Τάσση. Η εργασία έχει τίτλο «Estimating of the magnetic field strength in the interstellar medium».

Το προηγούμενο βραβείο είχε δοθεί το 2021 στον Γεώργιο Βαλογιάννη (PhD από το Cornell Univ., ΗΠΑ) Διατριβή: «Testing gravity with cosmology: efficient simulations, novel statistics and analytical approaches».

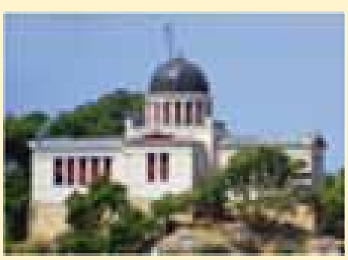
Το Βραβείο συνοδεύεται από χρηματικό έπαθλο 1.000 Ευρώ, προσφορά της οικογένειας Χαρλαύτη.

Το Σκεπτικό του Βραβείου και η Διαδικασία Αίτησης (Από την σελίδα της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ.)

Το βραβείο απευθύνεται σε μέλη της Εταιρείας που εκπόνησαν και υποστήριξαν επιτυχώς τη διατριβή τους σε Πανεπιστήμιο της Ελλάδας ή του εξωτερικού κατά την περίοδο αναφοράς. Το θέμα της διατριβής θα πρέπει να εμπίπτει στο γενικότερο ερευνητικό πεδίο της Αστρονομίας/Αστροφυσικής. Το χρηματικό έπαθλο των 1.000 Ευρώ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη συμμετοχή σε Επιστημονικό Συνέδριο. Το μέλος που θα επιλεγεί θα πρέπει να παραβρεθεί στην τελετή απονομής η οποία λαμβάνει χώρα στο συνέδριο της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ. κατά το έτος του βραβείου, οπότε και θα έχει την ευκαιρία για προφορική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της διατριβής του/της.

Όλα τα Τακτικά μέλη της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ. μπορούν να προτείνουν υποψήφιους για το βραβείο. Η πρόταση υποψηφιότητας θα πρέπει να συνοδεύεται από: α) συστατική επιστολή, β) το βιογραφικό σημείωμα του προτεινόμενου, γ) μία λίστα με δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά με κριτές και παρουσιάσεις των αποτελεσμάτων του ερευνητικού έργου σχετικού με τη διατριβή σε διεθνή συνέδρια, και δ) από περίληψη της διατριβής (όχι πάνω από τρεις σελίδες μεγέθους Α4).

Οι υποψηφιότητες αξιολογούνται από τα μέλη του Διοικητικού Συμβουλίου της Εταιρείας. Τα βασικά κριτήρια είναι ο αριθμός των δημοσιεύσεων, που είναι άμεσα σχετικές με το θέμα της διατριβής και στις οποίες ο υποψήφιος είναι πρώτος συγγραφέας, στα κύρια περιοδικά Αστροφυσικής διεθνώς (π.χ. A&A, MNRAS, ApJ, AJ και Nature, Science, PRL κλπ), ο αριθμός των ετεροαναφορών που έχουν δεχτεί αυτές οι δημοσιεύσεις, το βιογραφικό σημείωμα του υποψηφίου και η συστατική επιστολή που συνοδεύει την κάθε υποψηφιότητα.

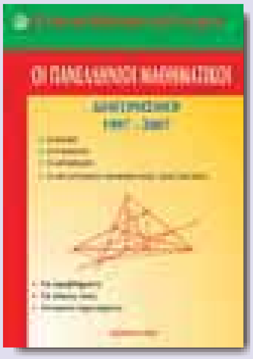


Αιτήσεις για το επόμενο «Βραβείο Καλύτερης Διδακτορικής Διατριβής Αιμίλιος Χαρλαύτης», γίνονται δεκτές από μέλη της Εταιρείας για υποψηφίους που υποστήριξαν επιτυχώς τη διδακτορική τους διατριβή κατά την περίοδο 1 Ιαν. 2023 έως 31 Δεκ. 2024. Η καταληκτική ημερομηνία υποβολής αιτήσεων είναι η 31 Ιανουαρίου 2025. Το υλικό όλων των αιτήσεων πρέπει να σταλεί με e-mail στο Γραμματέα της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

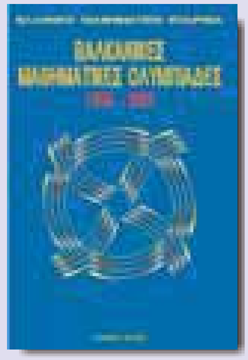
Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Νέα τιμή βιβλίου: 10€

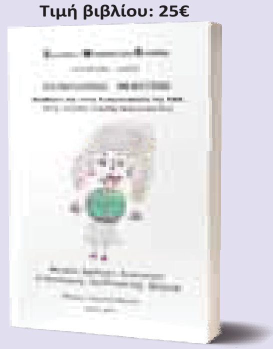


Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

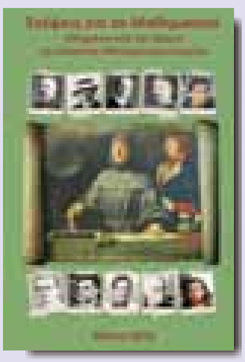
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€



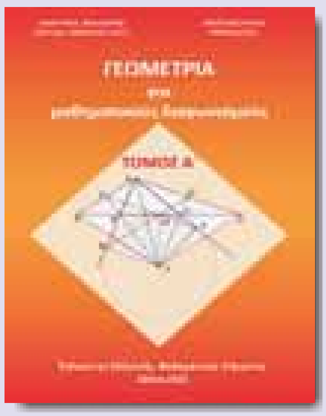
Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

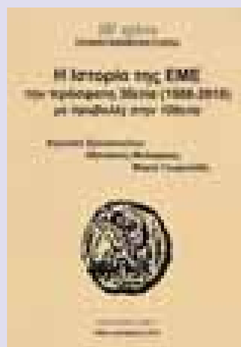


Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο



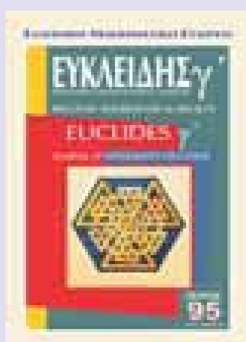
Τιμή βιβλίου: 25€



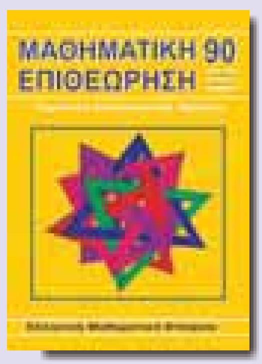
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr