Μαθηματικό περιοδικό

Ευκλείδης Α΄ για το Γυμνάσιο

113

ΙΟΥΛΙΟΣ- ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00

Σχολιάζουμε επιλεγμένα θέματα από τον διαγωνισμό «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ»

Η απόδειξη του μικρού Gauss για το άθροισμα 1+2+3+…+100 με σφαιρίδια

Μεγάλες Επιτυχίες για την Ε.Μ.Ε.

Αργυρό, Χάλκινα μετάλλια & Εύφημες μνείες στην Ολυμπιάδα

Αργυρά, Χάλκινα μετάλλια στην Βαλκανιάδα

Αργυρά & Χάλκινα μετάλλια Junior Balkan

Χάλκινα μετάλλια & Εύφημες μνείες στην Ολυμπιάδα Κοριτσιών

Χάλκινα μετάλλια στον Διαγωνισμό Νέων MYMC

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΕΚΔΟΤΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7)
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 113
Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2019
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34, 106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος
Τριανταφύλλου Ανδρέας

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 7998

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί/ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Καλή Σχολική χρονιά.

Παραδίδουμε το πρώτο τεύχος της νέας περιόδου με την ελπίδα ότι θα ικανοποιήσει και τον πιο απαιτητικό αναγνώστη. Όπως θα διαπιστώσετε σε αυτό το τεύχος, όπως και σε όλα τα προηγούμενα, υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία άρθρων που επιλέξαμε ώστε να καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα θεμάτων μαθηματικού ενδιαφέροντος και όχι μόνο.

Από την όχι και τόσο γνωστή στο ευρύ κοινό παράδοση της Γεωμετρίας sagaku μέχρι και την γυναίκα μαθηματικό που πήρε το σπουδαίο βραβείο Άμπελ, και από σχολικά μέχρι και τα διασκεδαστικά Μαθηματικά υπάρχουν κείμενα αρκετά ελκυστικά για όλους.

Όπως τονίζουμε πάντα, ο στόχος μας είναι συνεχώς να εμπλουτίζουμε το υλικό των τευχών του περιοδικού μας ώστε να καλύπτει όσο το δυνατόν περισσότερα ενδιαφέροντα θέματα γύρω από τα Μαθηματικά. Θα χαρούμε ιδιαίτερα να έχουμε τη δική σας γνώμη και τις δικές σας προτάσεις.

Καλή σχολική χρονιά.

Η ομάδα συντονισμού του περιοδικού.

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία - Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ).
τηλ.: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Α΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=ευρώ 12,00).
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 10,00
Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044
2. Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK
3. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

SANGAKU

η παραδοσιακή Ιαπωνική Γεωμετρία

Γιώργος Λαγουδάκος

Θα επισκεφθούμε σε μία άλλη εποχή, μία χώρα με διαφορετική κουλτούρα από την δική μας. Θα ταξιδέψουμε στην Ιαπωνία στις αρχές του 17ου αιώνα. Η περίοδος αυτή της ιστορίας της Ιαπωνίας λέγεται Edo (1603-1867), είναι μία περίοδος όπου η χώρα είναι αποκομμένη από τον υπόλοιπο κόσμο. Το εξωτερικό εμπόριο απαγορεύονταν και μία φορά το χρόνο μόνο ένα Γερμανικό πλοίο πλησίαζε στο Nagasaki.

Επειδή η πρόσβαση σε όλες τις μορφές του δυτικού πολιτισμού ήταν αδύνατη, περιορίστηκε και η διείσδυση όλων των δυτικών επιστημονικών ιδεών και επιτευγμάτων.

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου απομόνωσης, ένα νέο είδος Ιαπωνικών μαθηματικών ήκμασε. Οι Ιάπωνες μαθηματικοί, οι σαμουράι, οι έμποροι και οι αγρότες, θα λύσουν μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων γεωμετρίας. Θα καταγράψουν τις προσπάθειές τους σε ξύλινες πινακίδες και θα κρεμάσουν τα έργα αυτά κάτω από τις στέγες των ναών.

Τα μαθηματικά αυτά προβλήματα ονομάζονται sangaku, μια λέξη που σημαίνει μαθηματική πινακίδα, και συνοδευόταν πάντα με την πρόκληση «Λύστε αυτό αν μπορείτε»! Το πιο παλιό sangaku που σώζεται είναι του 1683 σε ναό στην περιφέρεια Tochigi και το πιο πρόσφατο του 1870 στο ναό Ubara.

Η πλειοψηφία των προβλημάτων που εμφανίζονται στα sangaku είναι γεωμετρικά με κύκλους και τρίγωνα. Στα προβλήματα σπάνια δινόταν και η λύση, κάτι που ερμηνεύεται σαν πρόκληση για εύρεση της λύσης.

Τα sangaku δημιουργήθηκαν από άνδρες, γυναίκες και παιδιά όλων των κοινωνικών τάξεων. Γιαυτό υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία από θέματα, από πολύ εύκολα ως και σε πολύ δύσκολα που απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις για να λυθούν.

Τα έργα αυτά είναι γραμμένα σε μια γλώσσα που ονομάζεται Kanbun, η οποία χρησιμοποιούσε κινεζικούς χαρακτήρες και ουσιαστικά κινεζική γραμματική. Η χρήση Kanbun έπαιξε ένα ρόλο παρόμοιο με ταΛατινικά στη Δύση οπότε όποιος χρησιμοποιούσε τη γλώσσα αυτή ήταν μορφωμένος. Για αυτό το λόγο η πλειοψηφία των δημιουργών sangaku ήταν μέλη της τάξης των σαμουράι.

Ο μεγάλος αριθμός των Sangaku οφείλεται μάλλον, στην εκλαΐκευση της γεωμετρίας. Έτσι οι όμορφες και μυστηριώδεις ξύλινες πινακίδες που εμφανίζονται σε χώρους λατρείας, βοήθησαν να αποκτήσουν τα μαθηματικά ένα ιδιαίτερο ρόλο στην ιαπωνική κουλτούρα.

Η κίνηση αυτή μοιάζει με την αντίστοιχη Πλατωνική θεώρηση. Ας μη ξεχνάμε την προμετωπίδα της Ακαδημίας του Πλάτωνα «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω».

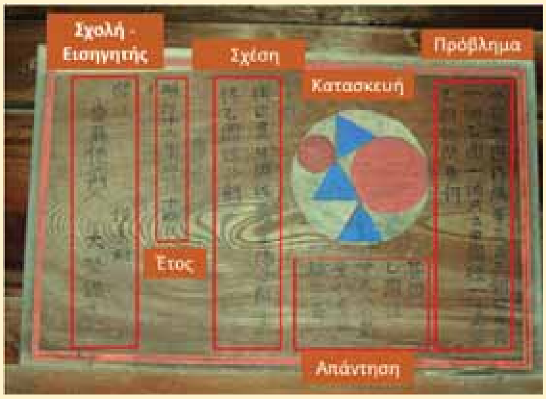
Η αντίληψη ότι η Γεωμετρία είναι ένα πολύ καλό μέσο για να μπορεί κάποιος να φιλοσοφεί μας οδηγεί στην θέση ότι η Γεωμετρία και η προσήλωση που απαιτεί η λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος βοηθά να ασχοληθεί κάποιος με βαθύτερα φιλοσοφικά ερωτήματα, αλλά και να αποκτήσει έναν βαθμό συνειδητότητας που απαιτείται για να βρεθεί κάποιος σε ένα ιερό χώρο.

Στο ελληνικό σχολείο του $21^{ου}$ αιώνα η ενασχόληση με τα προβλήματα αυτά μπορεί να αποτελέσει την αφορμή να μάθουν οι μαθητές να επιλύουν ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία που γνωρίζουν, χωρίς όμως να γνωρίζουν την ύλη πάνω στην οποία βασίζεται η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Μπορούν να χρησιμοποιήσουν Ευκλείδεια γεωμετρία, αναλυτική γεωμετρία, τριγωνομετρία αλλά και μεθόδους και τεχνικές ανάλυσης. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων αλλά και στάσεις ως προς την αναγκαιότητα για έρευνα και δημιουργία.


Ναός στην περιοχή Fukushima

Sangaku που υπάρχει στην προμετωπίδα



Σε κάθε sangaku παρουσιάζονται ένα πλήθος στοιχείων όπως η σχολή και το όνομα του εισηγητή, η ημερομηνία διατύπωσης της άσκησης, το σχήμα και η εκφώνηση καθώς και η απάντηση του προβλήματος.

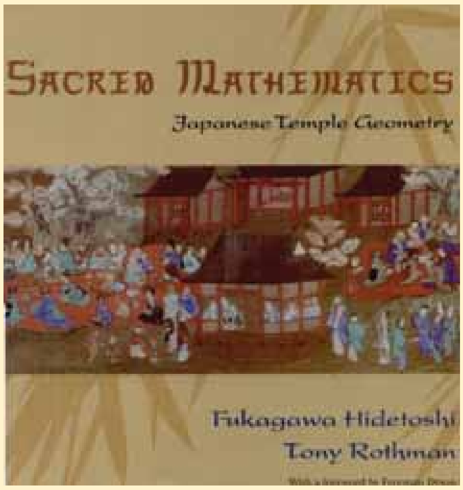
Στη διπλανή εικόνα υπάρχει η εξής εκφώνηση για το πρόβλημα που προτείνει η πινακίδα:

¨Στο διπλανό σχήμα εικονίζεται ο κύκλος (O,R) (ο μεγάλος) και άλλοι έξι κύκλοι, οι τέσσερεις με ακτίνα ρ και οι δύο μικρότεροι με ακτίνα r. Να υπολογίσετε τις ακτίνες ρ και r συναρτήσει της ακτίνας R¨.

Εδώ αν κάποιος προσπαθήσει να το λύσει θα διαπιστώσει ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο.

Τα έργα αυτά στην Ελληνική βιβλιογραφία αναφέρονται αποσπασματικά σε πολύ περιορισμένο αριθμό δημοσιευμάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε το άρθρο στο περιοδικό Quantum τεύχος Μαρτίου – Απριλίου 1995 με τίτλο Γεωμετρία της παγόδας του George Berzseny, στη μεταπτυχιακή εργασία της Γεωργίας Γκρίτζαλη με τίτλο «Ιστορία των προβλημάτων στα μαθηματικά», στην εργασία του Λυγάτσικα Ζήνων με τίτλο Sangakou 19.999 προβλήματα στη γεωμετρία Π.ΓΕΛ Βαρβακείου σχολής και στο περιοδικό «Απολλώνιος» της Ε.Μ.Ε. Ημαθίας τεύχος 4ο το άρθρο του Γιάννη Απλακίδη SAN-GAKU «πολύχρωμα γεωμετρικά προβλήματα από την Ιαπωνία».

Στην διεθνή βιβλιογραφία κεντρικό ρόλο έχει η εργασία του **Hidetoshi Fukagawa** που μαζί με τον **Daniel Pedoe** δημοσίευσε το 1989 την πρώτη συλλογή Sangaku στο βιβλίο “**Japanese temple geometry problems**”



Ακολούθησαν:

το βιβλίο “**Traditional Japanese mathematics problems from the 18th and 19th centuries**” των **Fukagawa** και **Sokolowsky**.

Το βιβλίο “**sacred mathematics**” των **Fukagawa** και **Rothman**. Αλλά και πλήθος άλλων άρθρων στην Αμερικάνικη Μαθηματική Εταιρεία και papers Αμερικάνικων και Ιαπωνικών Πανεπιστημίων.

Ορισμένα από αυτά τα υπέροχα προβλήματα θα μπορούσαν να παρουσιάζονται στη Β΄ και στη Γ΄ Γυμνασίου. Για το Λύκειο θα μπορούσαν να ενταχθούν στο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γεωμετρίας και Μαθηματικών προσανατολισμού στο Ελληνικό σχολείο.

Για παράδειγμα:
Στο διπλανό σχήμα εικονίζονται τέσσερεις κύκλοι εγγεγραμμένοι σε κύκλο (O,R) και μεταξύ τους ένας μικρότερος κύκλος ακτίνας r.
Να βρείτε την ακτίνα r ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Sangaku από τον ναό Iasaniwa Jinjya με διαστάσεις 107X77 εκ.

Αποτελεί πρόκληση στον καθένα να επιχειρήσει την επίλυση των γεωμετρικών αυτών προβλημάτων, που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν αληθινά γεωμετρικά έργα τέχνης…

Κάρεν Κέσκουλα Ούλενμπεκ:
Βραβείο Άμπελ 2019

Βαρβάρα Γεωργιάδου-Καμπουρίδη

Το βραβείο Άμπελ απονέμεται, κάθε χρόνο στη Νορβηγία, σε επιστήμονα που έχει διακριθεί για εξαιρετική επιστημονική εργασία στον τομέα των μαθηματικών. Η ονομασία του οφείλεται στο μεγάλο Νορβηγό μαθηματικό Νιλς Άμπελ και η απονομή του είναι ανάλογη των βραβείων Νόμπελ.

Το 2019 το βραβείο Άμπελ απονομήθηκε στη μαθηματικό Κάρεν Κέσκουλα Ούλενμπεκ (Karen Keskulla Ulenbeck) για την πρωτοποριακή της εργασία στη γεωμετρία, την ανάλυση, τη μαθηματική φυσική και άλλους τομείς της επιστήμης. Είναι η πρώτη γυναίκα μαθηματικός που παίρνει το βραβείο, από το 2003 που αυτό θεσπίστηκε.

Εικόνα 1: Η Κάρεν σε μια πρόσφατη διάλεξή της

Η Κάρεν γεννήθηκε το 1942 στο Κλήβελαντ του Οχάιο, αλλά οι παππούδες της ήταν από την Εσθονία. Σπούδασε μαθηματικά στα Πανεπιστήμια Μίτσιγκαν, Νέας Υόρκης και Μπράντεϊς, όπου έκανε και τις μεταπτυχιακές της σπουδές.

Έχει βραβευθεί αρκετές φορές από πανεπιστήμια και οργανισμούς για το έργο της.

Τα Μαθηματικά με τα οποία έχει ασχοληθεί η Κάρεν είναι πολύ προχωρημένα και θα ήταν ανέφικτο να αναλύσουμε με απλό τρόπο, όσο και αν προσπαθήσουμε, τις ιδέες της.

Επιγραμματικά αναφέρουμε τους τομείς με τους οποίους έχει ασχοληθεί όπως η γεωμετρική ανάλυση, η τοπολογική θεωρία του κβαντικού πεδίου και τα ολοκληρωμένα συστήματα.

Είναι αδύνατο να αναφερθούμε εδώ, έστω και επιγραμματικά, σε όλες τις μαθηματικές ιδέες, που μελέτησε και ανέπτυξε η Κάρεν. Μπορεί κάποιος να μελετήσει δημοσιεύσεις της στο διαδίκτυο, αρκετές από τις οποίες βρίσκονται σε ελεύθερη πρόσβαση, αρκεί να διαθέτει ένα καλό μαθηματικό υπόβαθρο.

Από τον τεράστιο όγκο των μελετών της Κάρεν, επιλέξαμε να παρουσιάσουμε παρακάτω, πώς ένα απλό παιχνίδι, που ενθουσιάζει τα παιδιά, έγινε θέμα μαθηματικού προβληματισμού γι' αυτήν και την οδήγησε σε αξιόλογα επιστημονικά επιτεύγματα.

Σαπουνόφουσκες

Όλοι γνωρίζουν το παιχνίδι. Έχει χαμηλό κόστος, είναι διασκεδαστικό και όσοι δεν το έχουν παίξει- μάλλον απίθανο- ας το δοκιμάσουν όταν διαβάσουν τις επόμενες παραγράφους.

Θα το δουν με άλλο μάτι.

Γιατί με άλλο μάτι το είδε και η Κάρεν, η βραβευμένη μαθηματικός.

Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική ιδέα της που συνδέεται με το παιχνίδι, έχει να κάνει με το πλαστικό πλαίσιο που βυθίζουμε στο μπουκαλάκι με το σαπουνόνερο και πάνω του φυσάμε για να βγουν οι φυσαλίδες. Πιο συγκεκριμένα, με τη μεμβράνη που εμφανίζεται στο πλαστικό πλαίσιο

Εικόνα 2

(κόκκινο στην εικόνα 2) πριν σχηματιστούν οι φυσαλίδες.

Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή...

Εικόνα 3

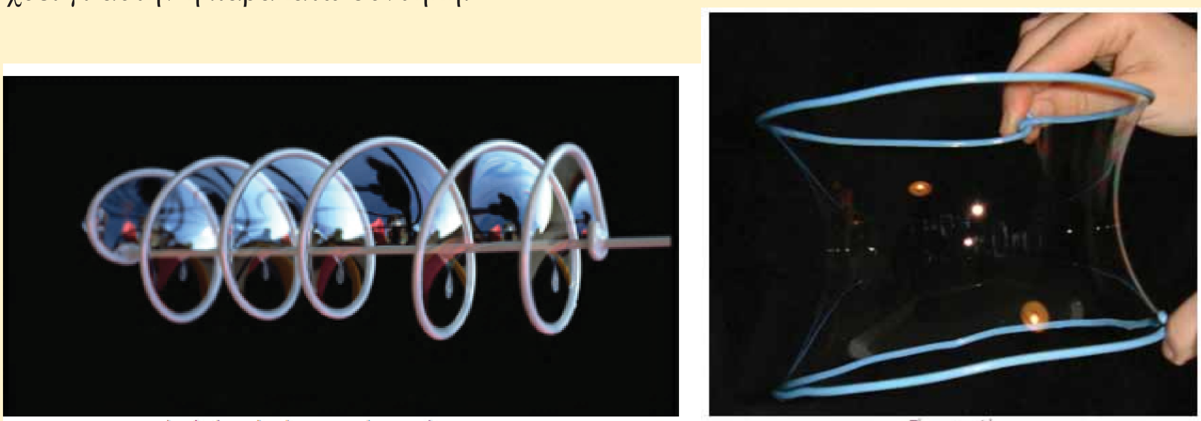
Μια σειρά μελετών και ανακαλύψεων, από τις πολλές της Κάρεν Ούλενμπεκ, ξεκινά από κάτι που είναι σε όλους γνωστό: η μικρότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο είναι μια ευθεία γραμμή (εικόνα 3). Οι περισσότεροι από εμάς, το θεωρούμε δεδομένο αλλά είναι επίσης δυνατό να αποδειχθεί με πλήρη μαθηματική αυστηρότητα. Έχοντας μια οποιαδήποτε διαδρομή που συνδέει τα δύο σημεία, υπάρχει ένας τύπος που δίνει το μήκος της. Εργαζόμενοι με αυτόν τον τύπο μπορούμε να βρούμε πώς αυτή η διαδρομή ελαχιστοποιείται. Η απόδειξη ανήκει σε μια περιοχή των μαθηματικών, που ονομάζεται λογισμός των μεταβολών και αφορά στην ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση κάποιας ποσότητας, που υπόκειται σε περιορισμούς, όπως είναι στη συγκεκριμένη περίπτωση η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο.

Και τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στο παιχνίδι με τις σαπουνόφουσκες. Αρκεί να αφήσουμε το επίπεδο όπου μελετούσαμε την απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία, και να περάσουμε στον τρισδιάστατο χώρο. Προσγειωνόμαστε, λοιπόν, στον περίεργο κόσμο των μεμβρανών από σαπουνόνερο. Είναι τα παιχνίδια που χρησιμοποιούμε, όπου φυσούμε τη μεμβράνη, μέσα από το πλαστικό πλαίσιο που έχουμε εμβαπτίσει σε σαπουνόνερο, ώστε να σχηματιστούν φυσαλίδες.

Η μεμβράνη, που σχηματίζεται μέσα στο πλαίσιο μετά από εμβάπτιση στο σαπουνόνερο, έχει τη μικρότερη δυνατή περιοχή, είναι επίπεδη. Θεωρητικά, θα μπορούσε κάποιος να φανταστεί ότι η μεμβράνη παίρνει όλα τα είδη των σχημάτων. Θα μπορούσε να περιέχει, για παράδειγμα, φουσκώματα ή εξογκώματα. Όμως αυτή είναι επίπεδη, διότι το επίπεδο σχήμα που παίρνει ελαχιστοποιεί την έκταση και ισοδύναμα, από την σκοπιά της φυσικής, ελαχιστοποιεί την επιφανειακή τάση και την ενέργεια. Είναι γνωστό ότι η φύση αρέσκεται στο να είναι λιτή.

Σαπουνόνερο και επιφάνειες ελάχιστης έκτασης

Για έναν μαθηματικό όμως, αυτό δημιουργεί μια προφανή πρόκληση: ενώ φαίνεται πως είναι σχετικά εύκολο να βρει τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο, είναι επίσης εύκολο να βρει μια επιφάνεια ελάχιστου εμβαδού που παράγεται από ένα δεδομένο πλαίσιο; Στην πραγματικότητα, στα μαθηματικά μια επιφάνεια θεωρείται ελάχιστης έκτασης όταν ισχύει γι΄αυτήν η παρακάτω συνθήκη:



Εικόνα 4 Η ελικοειδής και η αλυσιδωτή

“Σε κάθε σημείο της να μπορεί κάποιος να σχεδιάσει ένα βρόχο στην επιφάνεια, έτσι ώστε εάν βύθιζε αυτόν τον βρόχο σε σαπουνόνερο, η μεμβράνη που θα σχηματιζόταν στο βρόχο θα ταίριαζε με την υπόλοιπη επιφάνεια”.

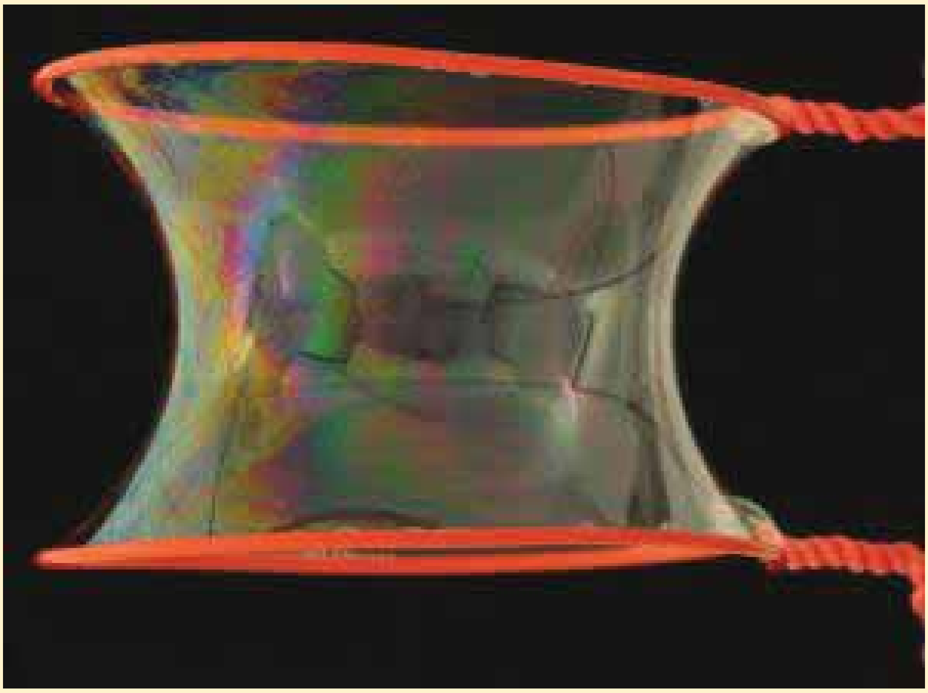
Κάπως έτσι όλη η επιφάνεια αποτελείται από μικρές επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Οποιαδήποτε μέθοδος εφαρμοστεί για να βρεθεί μια ελάχιστη επιφάνεια, θα πρέπει να λειτουργεί όχι μόνο σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, αλλά σε κάθε περίπτωση.

Γι αυτό και η προσπάθεια να βρούμε επιφάνειες ελάχιστης έκτασης είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα. Μέχρι τον 19ο αιώνα μόνο τρεις ελάχιστες επιφάνειες ήταν γνωστές: η επίπεδη, η αλυσιδωτή και η ελικοειδής (Εικόνα 4).

Η γεωμετρία των μεμβρανών και των φυσαλίδων από σαπουνόνερο ή αλλιώς

Το πρόβλημα του Πλατό (Plateau):

Η εύρεση επιφάνειας ελάχιστου εμβαδού με δεδομένο σύνορο στο χώρο.



Εικόνα 5

Π.χ Αν βυθίσουμε δύο δαχτυλίδια από σύρμα (όπως φαίνονται στην εικόνα 5) σε ένα διάλυμα σαπουνόνερου, ποια είναι η επιφάνεια που σχηματίζεται από την μεμβράνη ανάμεσα στα δυο δαχτυλίδια;

Μια γυναίκα μαθηματικός πρότυπο

Η Κάρεν Ούλενμπεκ εργάστηκε πάνω στην ιδέα των επιφανειών ελάχιστης έκτασης. Θεωρείται ότι θεμελίωσε την μοντέρνα γεωμετρική ανάλυση. Οι εργασίες της αποτέλεσαν τη βάση για πολύ σημαντικές εξελίξεις στη φυσική και τα μαθηματικά επί 4 δεκαετίες.

Σε μια συνέντευξή της πριν από χρόνια, η Κάρεν είχε δηλώσει:

"*Πραγματικά μου αρέσει πολύ η ιδέα ότι τα μαθηματικά έχουν πολλές διαφορετικές όψεις. Χρειάζεται κανείς να βλέπει τις συνδέσεις ανάμεσα σε αυτές*". Επιπλέον είχε πει πως "*Θα ήθελα πάρα πολύ να μάθω πράγματα που δεν είναι 'σκέτα' μαθηματικά αλλά μαθηματικά που συνδέονται με άλλες περιοχές της επιστήμης*".

Και το κατάφερε. Κι ακόμη εργάζεται πάνω σε αυτά.

Σε μια άλλη συνέντευξή της, η Κάρεν αποκάλυψε την απογοήτευσή της για το μικρό αριθμό γυναικών που ασχολούνται με τα μαθηματικά ή κατέχουν ηγετικές θέσεις. Θεωρεί ότι το αυτό οφείλεται στις κοινωνικές πιέσεις που ακόμη δέχονται οι γυναίκες αλλά και στην κουλτούρα της ίδιας της μαθηματικής κοινότητας. Η ίδια αναγνωρίζει ότι αποτελεί ένα πρότυπο επιστήμονα για την γυναίκα στο σύγχρονο κόσμο, ενώ υπογραμμίζει παράλληλα: "*Πάντως είναι δύσκολο να είσαι ένα πρότυπο. Επειδή αυτό που πραγματικά πρέπει να κάνουμε είναι να δείξουμε στους μαθητές και σπουδαστές πως μπορούν και ως ατελείς άνθρωποι να επιτύχουν ... Μπορεί να είμαι μια θαυμάσια μαθηματικός και διάσημη εξαιτίας αυτού του γεγονότος, όμως είμαι επίσης πολύ ανθρώπινη*".

Ποσοστά ένας άγνωστος γνωστός (Μέρος 1ο)

Γράφει ο Σπύρος Φερεντίνος

Η λέξη ποσοστό είναι μια λέξη που τη λέμε πολύ συχνά στη ζωή μας, όμως ξέρουμε τι πραγματικά σημαίνει και πως μπορούμε να τη χειρισθούμε;

Στο άρθρο θα κάνουμε μια προσπάθεια να κατανοήσουμε βαθιά τη λέξη αυτή και ως μαθηματική έννοια και ως πολύτιμο εργαλείο που συνδέεται με πλήθος από καθημερινές ανάγκες και προβλήματα.

Ας ξεκινήσουμε….
Στη ζωή συχνά συναντάμε προβλήματα που για να τα λύσουμε χρειάζεται να συγκρίνουμε μεταξύ τους 2 ή και περισσότερα κλάσματα. Ένα τέτοιο πρόβλημα που συνδέεται με αθλητικές επιδόσεις είναι το παρακάτω:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σε ένα αγώνα μπάσκετ ο Κώστας πέτυχε 13 καλάθια στις 20 προσπάθειες και ο Νίκος 3 καλάθια στις 5 προσπάθειες. Ποιός θεωρείτε ότι είναι ο περισσότερο εύστοχος παίκτης από τους δύο;

Για να απαντηθεί το ερώτημα θα πρέπει να συγκρίνουμε τις επιδόσεις των δύο παικτών. Δηλαδή να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{13}{20}$ και $\frac{3}{5}$.

Γνωρίζουμε ότι για να συγκρίνουμε 2 κλάσματα πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα, οπότε το κλάσμα με το μεγαλύτερο αριθμητή θα αντιστοιχεί στον πιο εύστοχο παίκτη.

Εάν κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα, το κλάσμα $\frac{3}{5}$ θα γίνει $\frac{12}{20}$ και έτσι θα συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{13}{20}$ που αντιστοιχεί στον Κώστα και $\frac{12}{20}$ που αντιστοιχεί στο Νίκο. Από τη σύγκριση των κλασμάτων προκύπτει ότι ο περισσότερο εύστοχος παίκτης είναι ο Κώστας.

Λίγη Ιστορία

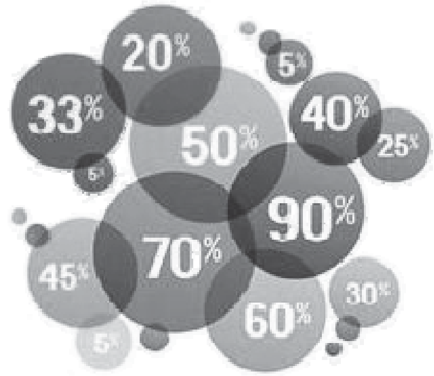
Όπως καταλαβαίνουμε ο παραπάνω τόπος σύγκρισης απαιτεί να κάνουμε κάθε φορά ομώνυμα τα κλάσματα, άρα είναι μάλλον κουραστικός για καθημερινή χρήση. Έτσι συμφωνήθηκε η σύγκριση να γίνεται με κλάσματα που έχουν κοινό παρανομαστή το 100.

Ο τρόπος αυτός εφαρμόστηκε πριν πάρα πολλά χρόνια στην Αρχαία Ρώμη, όπου οι υπολογισμοί γίνονταν συνήθως με κλάσματα τα οποία μετατρέπονταν σε εκατοστά.

Στη διάρκεια του Μεσαίωνα οι υπολογισμοί με παρονομαστή το 100 έγιναν πιο συχνοί και από τα τέλη του 15ου αιώνα μέχρι και τις αρχές του 16ου αιώνα συνηθιζόταν να συμπεριλαμβάνονται τέτοιοι υπολογισμοί σε αριθμητικά κείμενα.

Με βάση τα παραπάνω τα κλάσματα του παραδείγματός μας θα είναι $\frac{65}{100}$ και $\frac{60}{100}$.

Ακόμη για να είναι πιο σύντομη και κομψότερη η γραφή συμφωνήθηκε, σε μεταγενέστερους χρόνους, κλάσματα όπως αυτά του παραδείγματός μας να γράφονται μόνο με τον αριθμητή, δίπλα στον οποίο γραφόταν το σύμβολο %. Έτσι τα κλάσματα του παραδείγματός μας γράφονται 65% και 60% και αυτός ο τρόπος γραφής ονομάζεται ποσοστό ενός ποσού και χαρακτηρίζεται από το σύμβολο %. Με τον τρόπο αυτό καταλαβαίνουμε ότι είναι άμεση και εύκολη η μεταξύ τους σύγκριση.



Αυτό που είναι αναγκαίο να καταλάβουμε είναι ότι το ποσοστό δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα κλάσμα με παρανομαστή το 100. Θα μπορούσε να είναι ένα κλάσμα με οποιονδήποτε άλλο παρανομαστή, αλλά ιστορικά επικράτησε ως παρανομαστής το 100, γιατί θεωρήθηκε ως ο πλέον βολικός και εύκολος στη χρήση παρανομαστής.

Γενικότερα στα μαθηματικά, το ποσοστό είναι ένας αριθμός ή ένας λόγος που εκφράζεται με ένα κλάσμα που έχει παρονομαστή το 100 ή το 1000.
Το σύμβολο α% ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$**.**
Παρόμοια το σύμβολο α‰ ονομάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με το κλάσμα $\frac{\alpha}{1000}$**.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ο καθηγητής ανακοινώνει στον Ομάρ ότι σε ένα διαγώνισμα που περιείχε κάποιες ερωτήσεις όπου στην κάθε μια υπήρχε η επιλογή ΝΑΙ για το σωστό και ΌΧΙ για το λάθος, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του ήταν 90%.

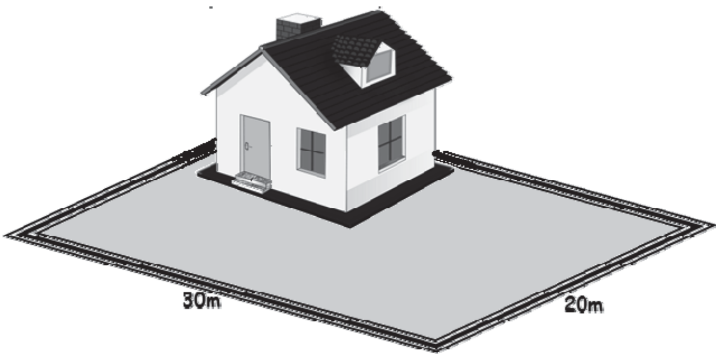
Τι σημαίνει άραγε αυτό το 90%; Μια πρώτη σωστή απάντηση θα μπορούσε να είναι ότι εάν το διαγώνισμα είχε 100 ερωτήσεις ο Ομάρ θα είχε απαντήσει σωστά στις 90, άρα μπορούμε να κάνουμε και διάφορες κρίσεις για την επίδοση του Ομάρ. Για παράδειγμα ότι πιθανώς είναι αρκετά έως πολύ καλός μαθητής, ανάλογα με τη δυσκολία των ερωτήσεων ή ότι εάν το κριτήριο επιτυχίας είναι να συγκεντρώσει ο μαθητή ποσοστό άνω του 70%, ο Ομάρ είχε επιτυχημένη επίδοση.

Είναι όμως ολοκληρωμένη η πληροφορία που αναφέρει ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του ήταν 90%; Προφανώς όχι, γιατί στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε τον αριθμό των ερωτήσεων. Αν για παράδειγμα το διαγώνισμα περιείχε 30 ερωτήσεις τότε ο Ομάρ θα είχε απαντήσει σωστά στις $30 \cdot \frac{90}{100} = 27$ ερωτήσεις.

Έτσι περνάμε και σε μια άλλη χρήση του ποσοστού, πολύ συνηθισμένη στην καθημερινή ζωή, που είναι ο υπολογισμός του μέρους μιας ποσότητας β, δηλαδή το α% του β είναι $\frac{\alpha}{100}\cdot\beta$, όπως θα δούμε και στο παρακάτω πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Στο παρακάτω οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων 30m (μήκος) × 20m (πλάτος) είναι χτισμένο ένα σπίτι που καταλαμβάνει τα 30% του οικοπέδου. Πόσο χώρο του οικοπέδου καταλαμβάνει το σπίτι.



Εφόσον το μήκος του οικοπέδου είναι 30m και το πλάτος 20m, τότε το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $30m \times 20m = 600m^2$. Άρα το 30% του εμβαδού του οικοπέδου που καταλαμβάνει το σπίτι είναι $\frac{30}{100}$. $600\ m^2 = 180\ m^2$.

Το ποσοστό αποτελεί τη μαθηματική έννοια που συναντάμε, ίσως περισσότερο από κάθε άλλη μαθηματική έννοια, στην καθημερινή ζωή. Η κατανόηση και η εφαρμογή υπολογισμών με αυτά έχουν μεγάλη σημασία, αφού έχουν εφαρμογές στους υπολογισμούς τόκων – επιτοκίων, στις πωλήσεις αγαθών και προϊόντων, στις οικοδομικές δραστηριότητες, στη βιομηχανία, στην τοπογραφία, στη πολιτική, στη διαφήμιση, στις δημοσκοπήσεις, στο εμπόριο, στη Μετεωρολογία, στον αθλητισμό, στη Στατιστική, στις έρευνες, στην εκπαίδευση και γενικότερα σε μεγάλο αριθμό φαινομένων, δραστηριοτήτων και εκδηλώσεων της ζωής.

Τα παρακάτω παραδείγματα δίνουν μια ιδέα για το πλήθος των εκφράσεων της καθημερινής ζωής που αναφέρονται σε ποσοστά.

- *Με συστηματικό διάβασμα, ένας μαθητής αύξησε τη βαθμολογία του 15%.*
- *Ένα μαγαζί έκανε εκπτώσεις 30%.*
- *Η πιθανότητα να σπουδάσει κάποιος σε Πανεπιστήμιο της Αγγλίας είναι 37%.*
- *Το 10% των υποψηφίων στις Πανελλαδικές εξετάσεις έγραψε άριστα στα Μαθηματικά.*
- *Ο Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) σε ορισμένα προϊόντα είναι 23%.*

Όλες αυτές οι πληροφορίες είναι σε κάθε περίπτωση χρήσιμες και βοηθητικές; Δεν είναι πάντα βέβαιο, γιατί σε αρκετές περιπτώσεις υπάρχουν και στοιχεία που δεν γνωρίζουμε, δηλαδή συχνά χρειάζεται κάτι περισσότερο από τη γνώση ενός ποσοστού για να έχουμε εγκυρότερη και ασφαλέστερη γνώμη για ένα θέμα.

Για παράδειγμα η πληροφορία ότι το 10% των υποψηφίων στις Πανελλαδικές εξετάσεις έγραψε άριστα στα Μαθηματικά τι άραγε σημαίνει;

Προφανώς δεν γνωρίζομε με μόνη την πληροφορία αυτή ποιος πραγματικά είναι ο αριθμός των μαθητών που έγραψε άριστα στα Μαθηματικά, επίσης δεν γνωρίζουμε εάν το γεγονός ότι το 10% των υποψηφίων στις Πανελλαδικές εξετάσεις έγραψε άριστα στα Μαθηματικά σημαίνει ότι αυξήθηκε ή μειώθηκε ο αριθμός των καλών μαθητών στα Μαθηματικά.

Εάν γνωρίζουμε ότι την περσινή χρόνια το 5% των υποψηφίων στις Πανελλαδικές εξετάσεις έγραψε άριστα στα Μαθηματικά, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυξήθηκε ο αριθμός των καλών μαθητών στα Μαθηματικά, μπορεί το ποσοστό να αυξήθηκε επειδή τα θέματα τη φετινή χρονιά ήταν αρκετά ευκολότερα σε σχέση με τα περσινά.

Εάν ένα μαγαζί κάνει εκπτώσεις 30% δεν αποτελεί πάντα ασφαλή πληροφορία, γιατί μπορεί ένα άλλο μαγαζί να κάνει μεγαλύτερη έκπτωση ή να κάνει μικρότερη έκπτωση αλλά να έχει πιο ποιοτικά προϊόντα και επίσης με μόνο την πληροφορία ότι ένα μαγαζί κάνει εκπτώσεις 30% δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε τι ποσό θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε ένα συγκεκριμένο προϊόν.

Για να χειριστούμε με ικανοποιητικό τρόπο την έννοια του ποσοστού είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τους παρακάτω στόχους που συνδέονται με την αντίληψη της έννοιας του ποσοστού.

Παρατήρηση: Προκειμένου να αποκτηθεί μια ολοκληρωμένη γνώση του χειρισμού των ποσοστών χρησιμοποιήθηκαν και έννοιες που είτε δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου (πιθανότητες και μέθοδος των τριών), είτε έχουν (προσωρινά;) τεθεί εκτός ύλης (αναλογίες). Όλες οι έννοιες αυτές υπάρχουν στα βιβλία του Δημοτικού και η ύλη της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης αποτελεί ένα ενιαίο σύνολο.

Στόχος 1: Να αντιλαμβανόμαστε την έννοια του ποσοστού στις διάφορες εκφράσεις που συνδέονται με ποσοστά μέσα από παραδείγματα της καθημερινής ζωής..

Για παράδειγμα:

- *Λόγω της οικονομικής κρίσης ο μισθός ενός υπαλλήλου μειώθηκε κατά 12%.*
- *Με συστηματικό διάβασμα, ένας μαθητής αύξησε τη βαθμολογία του κατά 15%.*
- *Το επιτόκιο καταθέσεων σε μια Τράπεζα είναι 2,5.*
- *Το 5% του πληθυσμού μιας χώρας βρίσκεται κάτω από το όριο της φτώχειας.*
- *Το 4% των οικογενειών της Αττικής έχει πάνω από 2 αυτοκίνητα.*
- *Το ποσοστό των ατόμων που νόσησαν από γρίπη το 2012 αυξήθηκε κατά 200% σε σχέση με το 2011.*
- *Το ποσοστό των ψήφων που έλαβε στις εκλογές το κόμμα Α αυξήθηκε κατά 7%. σε σχέση με τις προηγούμενες εκλογές.*
- *Η Ελένη σε ψηφοφορία, στην οποία κάθε μαθητής είχε το δικαίωμα μιας μόνο επιλογής, μεταξύ των συμμαθητών της προκειμένου να αναδειχθεί ο πλέον δημοφιλής μαθητής της τάξης έλαβε το 60%.*

Κατανόηση της έννοιας του ποσοστού σημαίνει ότι μπορώ να αξιολογώ και να διατυπώνω κρίσεις για εκφράσεις που περιέχουν ποσοστά.

- Η έκφραση ότι *το 130% των ενηλίκων Αθηναίων έχει αυτοκίνητο* προφανώς είναι παράλογη γιατί το σύνολο των ενηλίκων Αθηναίων δεν μπορεί να ξεπεράσει το 100%.
- Αντίθετα υπάρχουν ποσά που μπορούν να ξεπεράσουν το 100%, για παράδειγμα η έκφραση *το ποσοστό των ατόμων που νόσησαν από γρίπη το 2012 αυξήθηκε κατά 200% σε σχέση με το 2011* έχει λογική γιατί είναι δυνατό να αυξηθεί κατά πολύ από τη μια χρονιά στην άλλη ο πληθυσμός που νόσησε από γρίπη (αύξηση 200% σημαίνει ότι τριπλασιάσθηκε).
- Επίσης έχει λογική η έκφραση *οι μαθητές παιδιά μεταναστών που φοιτούν στο 1ο Λύκειο Ζωγράφου αυξήθηκαν κατά 130% από το σχολικό έτος 2017 - 2018 στο σχολικό έτος 2018 - 2019*. Αντίθετα η έκφραση *το 120% των μαθητών του 1ο Λυκείου Ζωγράφου γνωρίζει Αγγλικά* είναι παράλογη.

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΡΙΣΕΩΣ 1

Μπορείτε με βάση τα παραπάνω παραδείγματα να διαμορφώσετε μια άποψη για το πότε ένα ποσοστό μπορεί να ξεπεράσεις το 100%;

Η έκφραση λόγω της οικονομικής κρίσης ο μισθός ενός υπαλλήλου μειώθηκε κατά 12% προφανώς εκφράζει ότι ο μισθός του συγκεκριμένου υπάλληλου ελαττώθηκε, αλλά δεν έχει ιδιαίτερη αξία εάν δεν γνωρίζουμε τον αρχικό μισθό. Άλλη βαρύτητα έχει η ελάττωση κατά 12% ενός μισθού 4000€ και άλλη η ελάττωση κατά 12% ενός μισθού 600€.
Ακόμη η έκφραση *το ποσοστό των ψήφων που έλαβε στις εκλογές το κόμμα Α αυξήθηκε κατά 7% σε σχέση με τις προηγούμενες εκλογές* δεν αποτελεί ιδιαίτερα σημαντική πληροφορία εάν δεν γνωρίζουμε τον αριθμό των ψήφων που είχε λάβει το κόμμα στις προηγούμενες εκλογές.
Επομένως αυτό που είναι απαραίτητο να τονισθεί είναι ότι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή η έννοια του ποσοστού και σε αρκετές περιπτώσεις για να γίνει πλήρως κατανοητή χρειάζονται και συμπληρωματικές πληροφορίες.
Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου το ποσοστό δίνει άμεση πληροφόρηση.
Για παράδειγμα η έκφραση *η Ελένη σε ψηφοφορία, στην οποία κάθε μαθητής είχε το δικαίωμα μιας μόνο επιλογής μεταξύ των συμμαθητών της, προκειμένου να αναδειχθεί ο πλέον δημοφιλής μαθητής της τάξης έλαβε το 60%* έχει το ξεκάθαρο νόημα ότι η Ελένη είναι η πλέον δημοφιλής μαθήτρια της τάξης της και δεν χρειάζεται κάποια άλλη πληροφορία για να συμπληρωθεί το νόημα πχ ο αριθμός των μαθητών της τάξης.
Ακόμη στο παραπάνω παράδειγμα φαίνεται και η αξίας μιας πληροφορίας σε μορφή ποσοστού.

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΡΙΣΕΩΣ 2

Εάν αντί του $60\% = \frac{60}{100}$ χρησιμοποιούσαμε το ισοδύναμο κλάσμα $\frac{3}{5}$ θα ήταν το ίδιο άμεση η πληροφόρηση;
Ποια είναι η άποψή σας για το παραπάνω ερώτημα;

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΡΙΣΕΩΣ 3

Στο ίδιο παράδειγμα που αφορά τη δημοφιλία της Ελένης, εάν στην *ψηφοφορία κάθε μαθητής είχε το δικαίωμα περισσότερες από μιας επιλογές* θα ήταν πάλι βέβαιο ότι η Ελένη θα ήταν η πλέον δημοφιλής μαθήτρια; Θα είχε την ίδια αξία η πληροφορία ότι η Ελένη έλαβε το 60% των ψήφων;
Ποια είναι η άποψή σας για το παραπάνω ερώτημα;

Το άρθρο θα ολοκληρωθεί με το δεύτερο μέρος του στο επόμενο τεύχος.

Επίλυση προβλήματος με την βοήθεια εξίσωσης

Λαγός Γεώργιος - Τζίφας Νίκος

Με την εργασία μας αυτή απευθυνόμαστε περισσότερο στους μαθητές της Β' τάξης και θέλουμε να τους βοηθήσουμε να αποκτήσουν εμπειρία, ώστε να αντιμετωπίζουν με αρκετή ευχέρεια την επίλυση προβλημάτων με την βοήθεια των εξισώσεων.

Έχουμε την γνώμη ότι αν επιλύσουμε μαζί ένα τέτοιο πρόβλημα, με τρόπο που να επιτρέπει την συμμετοχή σου, η δραστηριότητα αυτή θα συμβάλλει στην απόκτηση αυτής της εμπειρίας.

Το πρόβλημα που σας προτείνουμε είναι το παρακάτω.

''Μοίρασα σε τέσσερα παιδιά φιλικών μου οικογενειών το χρηματικό ποσό των 650€, όπως περιγράφω παρακάτω. Ο Βασίλης πήρε τριπλάσια χρήματα από την Μαρία και η Άλκηστις τετραπλάσια από τον Νίκο. Ζητώ να βρείτε πόσα χρήματα πήρε το καθένα από τα παιδιά, αν γνωρίζετε ακόμα ότι η Άλκηστις πήρε 100€ λιγότερα από τον Βασίλη.''

Φυσικά γνωρίζετε από όσα σας έχουν πει οι καθηγητές στο σχολείο ότι για να λύσετε ένα τέτοιο πρόβλημα πρέπει:

- **Να το έχετε μελετήσει αρκετά και μάλιστα να το συγκρατείτε στην μνήμη σας .**
- **Να συμβολίσετε με x την τιμή μιας από τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος.**
- **Να εκφράσετε με την βοήθεια του x όλες τις υπόλοιπες άγνωστες ποσότητές του.**
- **Να καταστρώσετε και να επιλύσετε την εξίσωση αυτή.**
- **Να υπολογίσετε στη συνέχεια τις τιμές των άλλων αγνώστων ποσοτήτων.**

Ας προχωρήσουμε λοιπόν τώρα παρακάτω.

Διαπιστώνουμε ότι οι άγνωστες ποσότητες του προβλήματος είναι τέσσερεις και ας υποθέσουμε ότι **ο Βασίλης πήρε x ευρώ.** Τότε:

- Η Άλκηστις (x-100) **€** γιατί πήρε 100**€** λιγότερα από τον Βασίλη
- Η Μαρία $\frac{x}{3}$ **€** γιατί ο Βασίλης πήρε τριπλάσια από αυτήν και
- Ο Νίκος $\frac{x-100}{4}$ **€** γιατί η Άλκηστις πήρε τετραπλάσια από αυτόν.

Η εξίσωση που προκύπτει είναι: $x+x-100+\frac{x}{3}+\frac{x-100}{4}=650$

και η επίλυσή της $2x+\frac{x}{3}+\frac{x-100}{4}=750$ ή $12\cdot 2x+12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x-100}{4}=12.750$

ή $24x+4x+3\cdot(x-100) = 9000$ ή $28x +3x - 300=9000$ ή $31x=9300$ ή $x=300$

Επομένως ο Βασίλης πήρε 300€, η Άλκηστις πήρε 300€ – 100€ = 200€, η Μαρία πήρε 300€/3= 100ευρώ και ο Νίκος 200€/4= 50€.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια το πρόβλημά μας υποθέτοντας ότι **η Άλκηστις πήρε x €.**

Τότε:

Ο Βασίλης πήρε x+100 **€** γιατί ……………...…………………………………………………..

Η Μαρία πήρε $\frac{x+100}{3}$ **€** γιατί ……………………………….……..…………………………………

Ο Νίκος πήρε $\frac{x}{4}$ **€** γιατί …………………………………………..…………………….………..

Ήλθε τώρα η σειρά σας.
Πάρτε το μολύβι σας και συμπληρώστε στα παραπάνω κενά το σκεπτικό με το οποίο καταλήξαμε στα συμπεράσματα αυτά.

Παρόμοια η εξίσωση που προκύπτει είναι: $(x+100)+x+(x+100)/3+x/4 = 650$
Πάρτε τώρα και χαρτί για να επιλύσετε την εξίσωση, αφού προσπαθήσετε να προβλέψετε την τιμή του αγνώστου x=…….. που θα βρείτε μετά την επίλυση της εξίσωσης.

Συμπληρώστε επίσης και τα ποσά που πήρε το κάθε πρόσωπο:
Ο Βασίλης πήρε :……… **€**, η Άλκηστις πήρε: …………**€**, η Μαρία πήρε:……….. **€** και ο Νίκος πήρε :………….. **€.**

Μπορούμε τώρα να ανακεφαλαιώσουμε συγκεντρωτικά την μέχρι τώρα εργασία μας με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα. Σας προτείνουμε μάλιστα να τον συμπληρώσετε και να λύσετε την εξίσωση που θα φτιάχνετε κάθε φορά.

ΒΑΣΙΛΗΣ	ΑΛΚΗΣΤΙΣ	ΜΑΡΙΑ	ΝΙΚΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
x	x-100	$\frac{x}{3}$	$\frac{x-100}{4}$	$x+x-100+\frac{x}{3}+\frac{x-100}{4}=650$
x+100	x	$\frac{x+100}{3}$	$\frac{x}{4}$	$x+100+x+\frac{x+100}{3}+\frac{x}{4}=650$
		x		
			x	
Ο Νίκος πήρε: ………….	Η Άλκηστις πήρε: …………	Η Μαρία πήρε: ……… …	Ο Δημήτρης πήρε: …………….	

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή διαπιστώνουμε ότι:

ανεξάρτητα από ποια άγνωστη ποσότητα του προβλήματος θα συμβολίσουμε με x οι τελικές τιμές των αγνώστων ποσοτήτων δεν επηρεάζονται.

Για να εξασκηθείς περισσότερο σου προτείνουμε να λύσεις μερικά ακόμα προβλήματα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Η ηλικία του πατέρα είναι εννεαπλάσια από την ηλικία του γιού του .Επίσης σε 6 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα γίνει τριπλάσια της ηλικίας του γιού του. Ποιά είναι η σημερινή ηλικία του πατέρα και ποια του γιού του;

2) Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 40 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Πόσα από αυτά είναι δίκλινα και πόσα τρίκλινα αν σε αυτά υπάρχουν 96 κρεβάτια;

3) Σε ένα Γυμνάσιο υπάρχουν 300 μαθητές. Αν η Α τάξη έχει 10 μαθητές περισσότερους από την Β τάξη και η Γ τάξη 20 μαθητές λιγότερους από την Α. Πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη;

4) Ο μαθηματικός Διόφαντος διατύπωσε τον παρακάτω διάλογο-πρόβλημα «Ευτυχισμένε Πυθαγόρα, Ελικώνιε απόγονε των Μουσών, πες μου σε παρακαλώ πόσοι φοιτούν στη σχολή σου;» .Βεβαίως θα σου πω Πολυκράτη. Οι μισοί ασχολούνται με τα ωραία Μαθηματικά, το ένα τέταρτο καταπιάνονται με την έρευνα της αθάνατης φύσης, ενώ το ένα έβδομο παραμένει τελείως αμίλητο και σκέφτεται παραμύθια. Υπάρχουν ακόμα και τρεις γυναίκες από τις οποίες ξεχωρίζει η Θεανώ. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών του Πυθαγόρα.

5) Ένας Αρχιτέκτονας σχεδιάζοντας ένα κτίριο σε ένα οικόπεδο βλέπει ότι οι διαστάσεις του δαπέδου του κτιρίου που έχει σχήμα ορθογωνίου διαφέρουν κατά 5 μέτρα. Αν η μεγαλύτερη διάσταση αυξηθεί κατά 3 μέτρα και η μικρότερη ελαττωθεί κατά 2 μέτρα, το εμβαδόν του δαπέδου παραμένει το ίδιο. Να βρείτε τις διαστάσεις του δαπέδου και το εμβαδόν του.

6) Ένα πουκάμισο κοστίζει 120 ευρώ με έκπτωση 10%. Πόσο ήταν η αρχική τιμή;

7) Ένα παντελόνι κοστίζει 100 ευρώ και πληρώσαμε 60 ευρώ .Πόσο τοις εκατό έκπτωση μας έκαναν;

8) Το άθροισμα πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι 35. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

9) Το ψηφίο των δεκάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων του Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του , προκύπτει αριθμός κατά 36 μικρότερος. Ποιος είναι ο αριθμός ;

10) Ένα τετράγωνο και ένα ισοσκελές τρίγωνο έχουν την ίδια πλευρά. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 6 μονάδες μεγαλύτερη από την περίμετρο του τριγώνου να βρεθούν η πλευρά, η περίμετροι και το εμβαδόν του τετραγώνου.

Ας μιλήσουμε για τις μονάδες μέτρησης επιφάνειας.

Δημήτρης Παπαϊωάννου

Για πολλά χρόνια υπήρχε ένα τεράστιο χάος ως προς τις μονάδες που χρησιμοποιούνταν για τις διάφορες μετρήσεις.

Διαφορετικές χώρες είχαν διαφορετικές μονάδες με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγάλη σύγχυση στις διάφορες δραστηριότητες που απαιτούσαν τη χρήση μονάδων.

Στην αρχαία Ελλάδα βασική μονάδα μέτρησης ήταν ο πους, το μέγεθος του οποίου δεν ήταν σταθερό. Στην Αίγυπτο η σημαντικότερη μονάδα μήκους ήταν ο βασιλικός πήχης με βασική υποδιαίρεση τον δάκτυλο.

Με την ανάπτυξη της επικοινωνίας και του εμπορίου μεταξύ των λαών, παρουσιάστηκε η ανάγκη να οριστεί ένα παγκόσμιο σύστημα μονάδων για καλύτερη συνεννόηση και αποφυγή της ταλαιπωρίας στις συναλλαγές. Η πρώτη μεγάλη προσπάθεια καθιέρωσης ενιαίου συστήματος μονάδων πραγματοποιήθηκε κατά την διάρκεια της Γαλλικής Επανάστασης.

Το 1790 η εθνική συνέλευση της Γαλλίας ανέθεσε στην Γαλλική Ακαδημία επιστημών να δημιουργήσει σταθερά πρότυπα για όλα τα μέτρα και τα σταθμά.

Έτσι το 1799 καθιερώθηκε ως μονάδα μήκους και βάση του μετρικού συστήματος το μέτρο το οποίο ισούται με το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του τεταρτημορίου του μήκους του μεσημβρινού που διέρχεται από το Παρίσι.

Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε χαραγμένο τον μεσημβρινό αυτό στο δάπεδο του αστεροσκοπείου του Παρισιού.

Για να καταλάβουμε περί τίνος πρόκειται ας φανταστούμε τον μεσημβρινό του Παρισιού, δηλαδή έναν κύκλο που συνδέει τους δύο πόλους της γης και περνά από την πόλη του Παρισιού.

Μεσημβρινός του Παρισιού

Αν χωρίσουμε τον κύκλο αυτό σε 10.000.000 ίσα μέρη, κάθε ένα από αυτά είναι ένα μέτρο.

Το μήκος ονομάζεται και θεμελιώδες μέγεθος, γιατί από αυτό παράγονται κάποια άλλα μεγέθη που ονομάζονται παράγωγα και που είναι το εμβαδόν και ο όγκος.

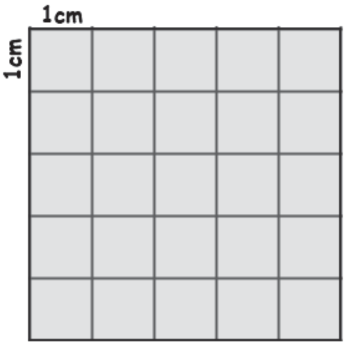
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ένα από τα παράγωγα μεγέθη του μήκους που είναι το εμβαδόν.

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 5cm, όπως στο διπλανό σχήμα (Εικόνα 1).

Μπορούμε να το χωρίσουμε σε «τετραγωνάκια» που το καθένα έχει πλευρά 1cm και εμβαδόν $1\,\text{cm}^2$. Άρα το τετράγωνο θα αποτελείται από 25 τετραγωνάκια που το καθένα έχει εμβαδόν $1\,\text{cm}^2$, δηλαδή από 25 κομμάτια σαν αυτό

Όπως είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να μετρήσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας με μονάδα μέτρησης το $1\,\text{cm}^2$ (τετραγωνικό εκατοστό).



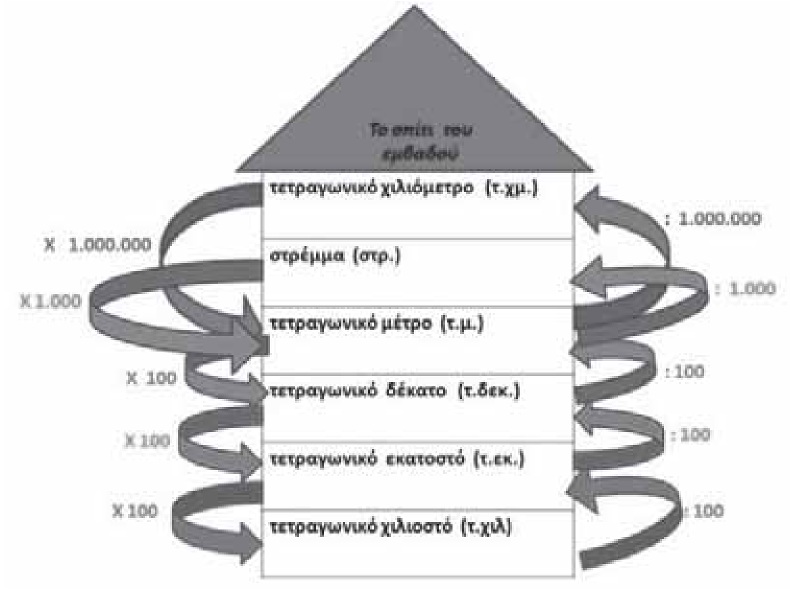
Εικόνα 1

Θα μπορούσαμε όμως να μετρήσουμε το εμβαδόν και με άλλη μονάδα μέτρησης; Φυσικά και θα μπορούσαμε!. Υπάρχουν μονάδες μέτρησης που είναι μικρότερες ή μεγαλύτερες από το $1\,\text{cm}^2$ και τις χρησιμοποιούμε ανάλογα με το μέγεθος της επιφάνειας που θέλουμε να μετρήσουμε.

Οι μονάδες μέτρησης που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αντί του $1\,\text{cm}^2$ είναι το $1\,\text{mm}^2$ (τετραγωνικό χιλιοστόμετρο), που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $1\,\text{mm}$ και είναι μονάδα μικρότερη από το $1\,\text{cm}^2$. Ακόμη υπάρχουν μονάδες μεγαλύτερες από το $1\,\text{cm}^2$ όπως, το $1\,\text{dm}^2$ (τετραγωνικό δεκατόμετρο) που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 10cm, το $1\,\text{m}^2$ (τετραγωνικό μέτρο) που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $1\ \text{m}$ και είναι η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού, το στρέμμα που είναι ένα τετράγωνο επιφάνειας $1000\,\text{m}^2$ και το $1\,\text{km}^2$ (τετραγωνικό χιλιόμετρο) που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1 Km.

Στο διπλανό σχήμα (Εικόνα 2) δείχνουμε πως μπορούμε να κάνουμε μετατροπές από μία μονάδα μέτρησης εμβαδού σε μία άλλη μονάδα μέτρησης.

Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος που μπορούμε να αλλάξουμε μονάδα μέτρησης θα επιχειρήσουμε να μετατρέψουμε το εμβαδόν του τετραγώνου της Εικόνας 1σε όλες τις δυνατές επιλογές. Θα ξεκινήσουμε με τη μικρότερη μονάδα μέτρησης από το cm^2 που είναι το mm^2.



Εικόνα 2

Παρατηρούμε ότι για να γίνει μετατροπή της μέτρησης με μονάδα το cm^2 σε μέτρηση με μονάδα το mm^2 θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν επί το 100. Συνεπώς $25\text{cm}^2 \cdot 100 = 2500\text{mm}^2$ Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου αποτελείται από 2500 «τετραγωνάκια» όπου το κάθε ένα από αυτά έχει πλευρά ίση με 1mm (χιλιοστό $\rightarrow$). Για για να γίνει μετατροπή του εμβαδού σε dm^2 και m^2 θα πρέπει διαδοχικά να διαιρέσουμε με το 100, ενώ για το στρέμμα διαιρούμε τα m^2 με το 1000 και για και το $1\,\text{km}^2$ διαιρούμε τα στρέμματα δια του 1000. Άρα,

$25\text{cm}^2 : 100 = 0,25\text{dm}^2$

$0,25\text{dm}^2 : 100 = 0,0025\text{m}^2$

και

$0,0025\text{m}^2 : 1000 = 0,0000025$ στρέμματα

$0,0000025$ στρέμματα $: 1000 = 0,0000000025\text{km}^2$

Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου της Εικόνας 1 είναι τα $\frac{25}{100}$ του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με 1dm, ή τα $\frac{25}{10.000}$ του τετραγώνου που έχει πλευρά $1\,\text{m}$ κλπ. Είναι εμφανές ότι οι μονάδες μέτρησης του $1\,\text{m}^2$, του στρέμματος και του $1\,\text{km}^2$ είναι αδύνατον να παρασταθούν στη σελίδα του περιοδικού.

Θα μπορούσατε σε ένα κομμάτι χαρτόνι να μετρήσετε έτσι ώστε να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο με πλευρά 1m και στη συνέχεια να το κόψετε. Ουσιαστικά θα έχετε φτιάξει τη μονάδα μέτρησης του $1\,\text{m}^2$ (τετραγωνικό μέτρο). Αλήθεια πόσα m^2 είναι το δωμάτιο σας ή ακόμα και το σπίτι σας; Επαληθεύστε μετά τα αποτελέσματα συζητώντας τα με τους γονείς σας!

Συμπερασματικά ισχύει ότι:

$$2500\text{mm}^2 = 25\text{cm}^2 = 0,25\text{dm}^2 = 0,0025\text{m}^2 = 0,0000025 \;\; \text{στρέμματα} = 0,0000000025\text{km}^2$$

$$2500\text{mm}^2 = 25\text{cm}^2 = 0,25\text{dm}^2 = 0,0025\text{m}^2 = 0,0000025 \;\; \text{στρέμματα}$$

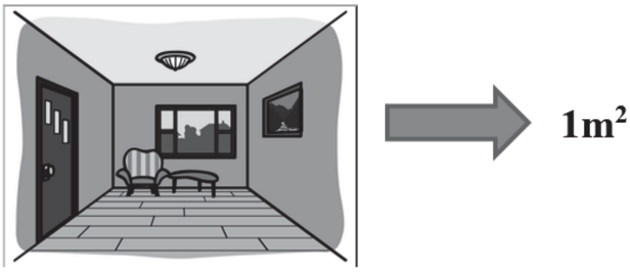
$$2500\text{mm}^2 = 25\text{cm}^2 = 0,25\text{dm}^2 = 0,0025\text{m}^2$$

$$2500\text{mm}^2 = 25\text{cm}^2 = 0.25\text{dm}^2$$

$$2500\text{mm}^2 = 25\text{cm}^2$$

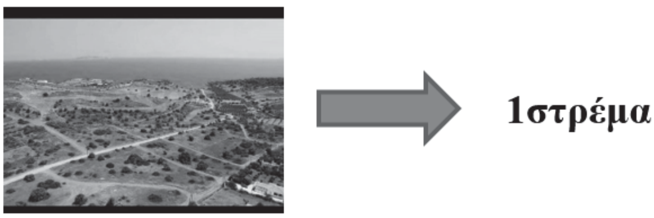
Αυτό που καταλαβαίνουμε από το παραπάνω παράδειγμα είναι ότι ο λόγος που χρησιμοποιούμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης του εμβαδού, εξαρτάται αποκλειστικά από την επιφάνεια που θέλουμε να μετρήσουμε. Κάθε φορά επιλέγουμε τη μονάδα μέτρησης που μας εξυπηρετεί καλύτερα. Για παράδειγμα:

- αν θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδό του πατώματος ή ενός τοίχου ενός δωματίου η προτιμότερη μονάδα είναι το $1\ \text{m}^2$



- αν θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδό ενός φύλου χαρτιού ή ενός γραμματόσημου η προτιμότερη μονάδα είναι το $1\,\text{cm}^2$,

- αν θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδόν ενός οικοπέδου η προτιμότερη μονάδα είναι το $1\,\text{m}^2$ εάν είναι μικρό, ενώ αν το οικόπεδο είναι μεγάλο η προτιμότερη μονάδα είναι το στρέμμα,



- επίσης αν θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδό μιας χώρας πχ όλης της Ελλάδας η προτιμότερη μονάδα είναι το $1\,\text{km}^2$.

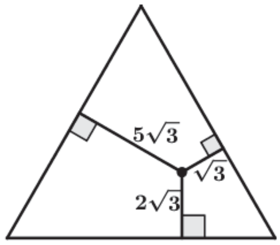
Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

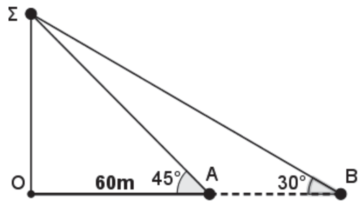
1) Υπολογίσαμε με μία αριθμομηχανή το αποτέλεσμα της δύναμης 3^{19} και η αριθμομηχανή μας έδωσε τον εξής αριθμό 11□2261467. Η οθόνη της αριθμομηχανής ήταν χαλασμένη σε ένα σημείο και έτσι δεν μπορούμε να διακρίνουμε το τρίτο ψηφίο στο οποίο εμφανίζεται ένα τετραγωνάκι. Ποιο μπορεί να είναι αυτό το ψηφίο;

2) Σε ένα κλάσμα, στο οποίο δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια απλοποίηση, αυξάνουμε τον αριθμητή κατά 20% και συγχρόνως ελαττώνουμε τον παρονομαστή κατά 80% οπότε προκύπτει ο αριθμός 4,8. Ποιο είναι το αρχικό κλάσμα;

3) Από ένα εσωτερικό σημείο ισοπλεύρου τριγώνου φέρνουμε τις αποστάσεις από τις πλευρές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Με βάση τις μετρήσεις των αποστάσεων να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.
Οι μετρήσεις εκφράζονται σε εκατοστά.



4) Μία βάρκα βρίσκεται στη θέση Α και σε απόσταση 60m από το παρατηρητήριο ΟΣ καθώς απομακρύνεται από αυτό. Μετά από 5 δευτερόλεπτα βρέθηκε στη θέση Β.
Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται η βάρκα;



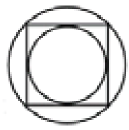
5) Διαθέτουμε τα ψηφία 1, 2, 3, 4

α) Πόσους διαφορετικούς τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία αυτά; (Τα ψηφία τα χρησιμοποιούμε όλα σε κάθε αριθμό που κατασκευάζουμε)

β) Με τι ισούται το άθροισμα όλων αυτών των αριθμών που θα κατασκευάσουμε;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 111

1) Αν α η πλευρά του τετραγώνου τότε ο μεγάλος κύκλος έχει διάμετρο $\alpha\sqrt{2}$ ενώ ο μικρός έχει διάμετρο α. Ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαγωνίων τους.



2) Έστω x το ύψος των κεριών. Κάθε ώρα από το κερί Α καίγεται το $\frac{1}{4}x$ του άρα σε t ώρες θα έχουν καεί τα $t\cdot\frac{x}{4}$ και θα έχει απομείνει το $x\text{-}t\cdot\frac{x}{4}$ του κεριού. Για το κερί Β θα έχουν απομείνει τα $x\text{-}t\cdot\frac{x}{3}$. Ισχύει $x\text{-}t\cdot\frac{x}{4}=2(x\text{-}t\cdot\frac{x}{3})$ από όπου προκύπτει $t=2+\frac{2}{5}$ της ώρας, δηλαδή 2 ώρες και 24 λεπτά. Άρα θα πρέπει να ανάψουμε τα κεριά στις 1 και 36΄.

3) Στον παρόντα 21^{o} αιώνα το μοναδικό έτος που είναι τετράγωνος αριθμός είναι το 2025 που είναι ίσο με 45^2, άρα το 2025 ο μαθηματικός θα είναι 45 χρονών επομένως σήμερα είναι 39 χρονών.

4) Ας υποθέσουμε ότι οι σελίδες του άλμπουμ είναι x και τα γραμματόσημα που έχει ο Ανάργυρος είναι α. Ισχύει $20\cdot x<\alpha<23\cdot x$ και $21\cdot x+\alpha=500$ (γιατί;). Αν στην πρώτη διπλή ανίσωση προσθέσουμε $21\cdot x$ σε όλα τα μέλη θα έχουμε $41\cdot x<500<44\cdot x$. Ο μοναδικός ακέραιος αριθμός x που ικανοποιεί την ανίσωση αυτή είναι ο 12.

5) Ένας τρόπος να κατασκευάσουμε γωνία 35^0 θα μπορούσε να είναι ο εξής: Από τον τριγωνομετρικό πίνακα στο τέλος του σχολικού βιβλίου βρίσκουμε ότι η εφ35^0 είναι με μεγάλη ακρίβεια 0,7. Αν κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 7cm και 10cm τότε η μικρότερη οξεία γωνία του θα είναι πολύ κοντά στις 35^0.

Πώς και γιατί παραγοντοποιώ;

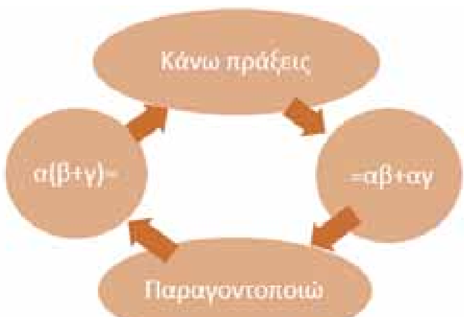
Αρδαβάνη Καλλιόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

«Σκίτσο: **Ευθυμιόπουλος Παναγιώτης**»

ΠΩΣ εργάζομαι όταν θέλω να κάνω πράξεις και **ΠΩΣ** για να παραγοντοποιήσω μία αλγεβρική παράσταση;

Κάνω πράξεις με την επιμεριστική ιδιότητα ή με μία ταυτότητα σημαίνει ότι	$\alpha\,(\beta+\gamma)=\alpha\,\beta+\alpha\,\gamma$ $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ εκτελώ τους πολλαπλασιασμούς
Κάνω παραγοντοποίηση με την επιμεριστική ιδιότητα ή με μία ταυτότητα σημαίνει ότι	$\alpha\,\beta+\alpha\,\gamma=\alpha\,(\beta+\gamma)$ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ μετατρέπω την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων

Παρατήρησε προσεκτικά τα δύο μέλη της επιμεριστικής ιδιότητας :



ΠΩΣ παραγοντοποιώ; ΠΟΙΕΣ μεθόδους ακολουθώ;

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση σκεφτόμαστε τα παρακάτω:

Βγάζω **από όλους** τους όρους κοινό παράγοντα με την επιμεριστική ιδιότητα $\boldsymbol{\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)}$ *<u>Προσοχή</u>:* $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$ *και* $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$	$3\alpha+6\beta = 3(\alpha+2\beta)$ $8\chi^2\psi - 4\chi\psi^2 = 4\chi\psi(2\chi - \psi)$ $2(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(2 - \alpha - \beta)$ $(\chi-\psi)^2+3(\psi-\chi)=(\psi-\chi)^2+3(\psi-\chi) = (\psi-\chi)(\psi-\chi+3)$ **ή** $(\chi-\psi)^2+3(\psi-\chi)=(\chi-\psi)^2-3(\chi-\psi) = (\chi-\psi)(\chi-\psi-3)$
Κοιτάζω αν **όλη η παράσταση** είναι μία ταυτότητα στην ανηγμένη της μορφή και την γράφω σε μορφή γινομένου π.χ. $\boldsymbol{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2}$ $\boldsymbol{\alpha^2 - 2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2}$ $\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)}$ $\boldsymbol{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3}$ κ.λ.π.	$(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 1 = (\alpha+\beta-1)^2$ $9 - 6\alpha + \alpha^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot\alpha + \alpha^2 = (3-\alpha)^2 = (\alpha-3)^2$ $16\chi^6+16\chi^3+4 = (4\chi^3)^2 + 2\cdot 4\chi^3\cdot 2 + 2^2 = (4\chi^3+2)^2$ $(\chi-\psi)\cdot(\chi+\psi) = \chi^2 - \psi^2$ $(-\chi+\psi)\cdot(\chi+\psi) = \psi^2 - \chi^2$ $3\chi^2 - 27 = 3(\chi^2 - 9) = 3(\chi-3)\cdot(\chi+3)$ $9\chi^2 - (2\chi+1)^2 = (3\chi)^2 - (2\chi+1)^2 = (\chi-1)\cdot(5\chi+1)$ $\chi^4 - 4\chi^2\psi 2 = \chi^2(\chi - 2\psi)\cdot(\chi+2\psi)$ $(\chi+2\psi)^2 - \chi^2 = (\chi+2\psi-\chi)\cdot(\chi+2\psi+\chi) = 4\psi\cdot(\chi+\psi)$
Εξετάζω αν μπορώ να πάρω κοινό παράγοντα **με ομάδες**	$2\chi^3 - 2\chi^2+3\chi-3 = 2\chi^2(\chi-1)+3(\chi-1) = (\chi-1)\cdot(2\chi^2+3)$ $2(\alpha-\beta)^2 - \alpha+\beta = 2(\alpha-\beta)^2 - (\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)\cdot(2\alpha-2\beta-1)$
Κοιτάζω αν έχω **συνδυασμό ομάδων και ταυτοτήτων**	$\alpha^2 - 2\alpha\beta+\beta^2 - \gamma^2 = (\alpha-\beta)^2 - \gamma^2 = (\alpha-\beta-\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)$ $\psi^2 - \chi^2 - 10\psi+25 = (\psi-5)^2 - \chi^2 = (\psi-5-\chi)\cdot(\psi-5+\chi)$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta+\beta^2 - \alpha+\beta = (\alpha-\beta)^2 - (\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta-1)$
Αν έχω ένα **τριώνυμο** με **προσθαφαίρεση**	$\alpha^2 - 3\alpha+2 = \alpha^2 - 3\cdot\alpha\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2+(\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = (\alpha-\frac{3}{2})^2+2-\frac{9}{4} =$ $=(\alpha-\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (\alpha-2)\cdot(\alpha-1)$
Αν μπορώ να κάνω **Διάσπαση** με σκοπό να πάρω ομάδες	$\chi^2 - 5\chi+4 = \chi^2 - \chi - 4\chi+4 = \chi(\chi-1) - 4(\chi-1) = (\chi-1)(\chi-4)$ αφού $-5\chi = -\chi - 4\chi$ $\alpha^2 - 3\alpha+2 = \alpha^2 - 2\alpha - \alpha+2 = \alpha\cdot(\alpha-2) - (\alpha-2) = (\alpha-2)\cdot(\alpha-1)$
Αν δεν βλέπω **Τίποτα από τα παραπάνω**	$(\alpha-\beta)^3 - (\alpha+\beta)^3 =$ $=\alpha^3 - 3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2 - \beta^3 - \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3 =$ $= -6\alpha^2\beta - 2\beta^3 = -2\beta\cdot(3\alpha^2+\beta^2)$ Κάνω πράξεις και παραγοντοποιώ τη νέα παράσταση

Ασκήσεις παραγοντοποίησης για εξάσκηση και οι απαντήσεις:

1. $(\chi-\psi)\cdot(\chi-\psi)=(\chi-\psi)^2$ γιατί;
2. $(\chi-\psi)\cdot(-\chi+\psi)=-(\chi-\psi)^2$ γιατί;
3. $(\chi-\psi)^3\cdot(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)=(\chi-\psi)^5$ γιατί;
4. $(\chi-\psi)^3-(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)=(\chi-\psi)^2\cdot(\chi-\psi-1)$ γιατί;
5. $\psi^2+2\chi-\chi^2-1=(\psi-\chi+1)\cdot(\psi+\chi-1)$ γιατί;
6. $(\chi^3-4\chi^2+4\chi)\cdot(\chi^2-\chi)=\chi^2\cdot(\chi-1)\cdot(\chi-2)^2$
7. $\chi^8-\psi^8=(\chi^4+\psi^4)(\chi^2+\psi^2)\cdot(\chi+\psi)\cdot(\chi-\psi)$ γιατί;
8. $(\alpha-\beta)^3-\alpha+\beta=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta-1)\cdot(\alpha-\beta+1)$ γιατί;
9. $2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)-8\alpha^2\beta^2=2(\alpha-\beta-\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta-\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$ γιατί;
10. $(\chi^2-81)+(\chi+9)^2=2\chi\cdot(\chi+9)$ γιατί;
11. $(\chi^2-81)-(\chi+9)^2=-18(\chi+9)$ γιατί;
12. $\chi^3-3\chi+2=(\chi-1)^2\cdot(\chi+2)$ γιατί;

ΓΙΑΤΙ Παραγοντοποιώ; Μερικά παραδείγματα:

1. Για να βρω τον Μ.Κ.Δ αλγεβρικών παραστάσεων

Μ.Κ.Δ $(\alpha^2-3\alpha+2,\ \alpha^2-2\alpha+1,\ \alpha^3-\alpha)=$ Μ.Κ.Δ$[\ (\alpha-2)\cdot(\alpha-1),\ (\alpha-1)^2,\ \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha+1)\ ]=\alpha-1$

2. Για να βρω το Ε.Κ.Π αλγεβρικών παραστάσεων

Ε.Κ.Π $(\alpha^2-3\alpha+2,\ \alpha^2-2\alpha+1,\ \alpha^3-\alpha)=$ Ε.Κ.Π $[\ (\alpha-2)\cdot(\alpha-1),\ (\alpha-1)^2,\ \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha+1)\ ]=$
$=\alpha(\alpha-1)^2\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha-2)$

3. Για να απλοποιήσω ένα κλάσμα

$$\frac{\alpha^2-3\alpha+2}{\alpha^3-\alpha}=\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}\qquad \alpha\neq -1,\ 0,\ 1$$

4. Για να βρω άθροισμα κλασμάτων

$$\frac{1}{\alpha^2-3\alpha+2}-\frac{1}{\alpha^2-4\alpha+4}=\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-1)}-\frac{1}{(\alpha-2)^2}=\frac{(\alpha-2)-(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2}=\frac{-1}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2}$$

5. Για να πολλαπλασιάσω κλάσματα

$$\frac{\alpha^2-3\alpha+2}{\alpha-2}\cdot\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha^3-\alpha}=\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)}{\alpha-2}\cdot\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha+1}{\alpha}\qquad \alpha\neq -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

6. Για να λύσω μία εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του 2 ή κλασματική

$\chi^8-1=0$ άρα $(\chi^4+1)\cdot(\chi^2+1)\cdot(\chi+1)\cdot(\chi-1)=0$ άρα $\chi=1$ ή $\chi=-1$

$\frac{4\chi}{\chi^2-9}+\frac{3}{\chi+3}=-\frac{1}{3-\chi}$ άρα $\frac{4\chi}{(\chi-3)(\chi+3)}+\frac{3}{\chi+3}=\frac{1}{\chi-3}$, Ε.Κ.Π $=(\chi-3)\cdot(\chi+3)$, άρα $4χ+3(χ-3)=χ+3$ άρα $χ=2$, δεκτή

αφού πρέπει $χ\neq 3$ και $χ\neq -3$

7. Για να κάνω νοερά πράξεις

$29^2-21^2=(29+21)\cdot(29-21)=40\cdot 8=320$

$1{,}6^2+3{,}2\cdot 8{,}4+8{,}4^2=1{,}6^2+2\cdot 1{,}6\cdot 8{,}4+8{,}4^2=(1{,}6+8{,}4)^2=100$

Να υπολογίσετε νοερά τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

$992^2+16\cdot 992+64=$

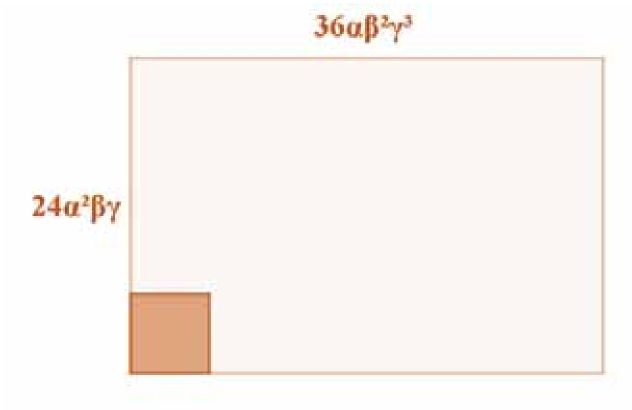
$0{,}58^2+0{,}42^2+0{,}58\cdot 0{,}84=$

$6001\cdot 5999=$

$8005^2-7995^2=$

Πρόβλημα 1:

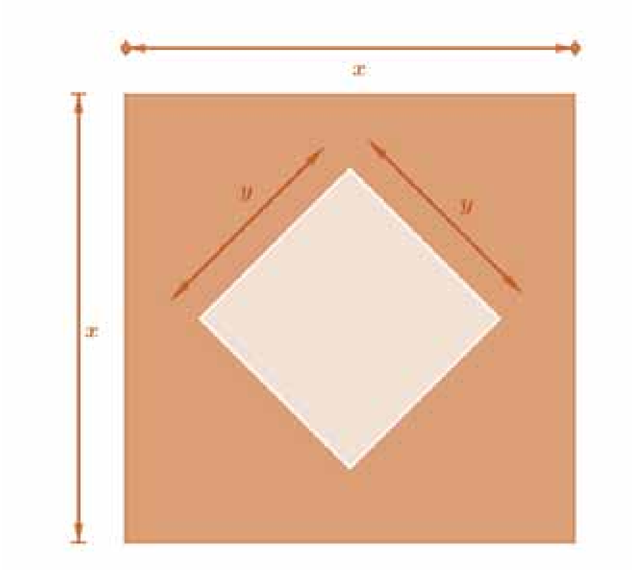
Θέλουμε να καλύψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει διαστάσεις $24α^2βγ$ και $36αβ^2γ^3$, με ίσα τετράγωνα.



1. Να βρείτε την πλευρά των μεγαλύτερων ίσων τετραγώνων που καλύπτουν το ορθογώνιο.

2. Πόσα τέτοια τετράγωνα μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος της κάθε διάστασης;

Πρόβλημα 2:



Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος ισούται με $(x-y)\cdot(x+y)$. Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Προχωρημένα θέματα για όλους. Τάξη Γ΄

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Ας υποθέσουμε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha=\sqrt{11\text{-}2\beta\cdot\gamma},\ \beta=\sqrt{11\text{-}2\alpha\cdot\gamma},\ \gamma=\sqrt{11\text{-}2\alpha\cdot\beta}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης α+β+γ.

2) Για τους θετικούς αριθμούς α, β δίνεται ότι η παράσταση $\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$

3) Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta}=2$, $\frac{\alpha\cdot\gamma}{\alpha+\gamma}=5$ και $\frac{\beta\cdot\gamma}{\beta+\gamma}=4$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης α+β+γ.

4) Να υπολογίσετε όλες τις τριάδες των αριθμών x, y, z για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις: $x\cdot y=6$, $y\cdot z=15$ και $x\cdot z=10$

5) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος 11 μονάδες ενώ οι δύο άλλες πλευρές του έχουν μήκη θετικούς ακεραίους. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 111

1) ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1: Το σύστημα είναι ισοδύναμο με $\begin{cases} y=x \text{ ή } y=-x \\ 2x^2-2\alpha x+(\alpha^2-1)=0 \end{cases}$. Από αυτό προκύπτει ότι για να έχει το σύστημα 3 λύσεις δεν θα πρέπει η δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει 2 διαφορετικές μη μηδενικές ρίζες καθώς τότε το σύστημα θα είχε 4 λύσεις (δύο για κάθε ρίζα). Η δευτεροβάθμια εξίσωση θα πρέπει να έχει μία ρίζα το 0 και μία άλλη ρίζα ≠0, άρα θα πρέπει $\alpha^2-1=0$, δηλαδή α=1 ή α=-1.

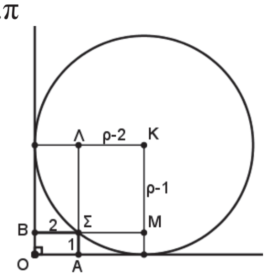
2) Γενικώς ισχύει S=u·t όπου S είναι το διάστημα, u η ταχύτητα και t ο χρόνος. Άρα θα έχω τις παρακάτω σχέσεις:

$S=u\cdot t$, $S=(u+1)\cdot\left(t-\frac{24}{60}\right)$ και $S=(u-1)\cdot\left(t+\frac{36}{60}\right)$ (η ταχύτητα σε km/h και ο χρόνος σε ώρες)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι t=2,4 h και από αυτό προκύπτει ότι S=12km.

3) Έστω c η διαφορά της ηλικίας του παππού μείον την ηλικία του εγγονού. Η διαφορά αυτή για 6 συνεχόμενα χρόνια θα είναι πολλαπλάσια της ηλικίας του εγγονού (γιατί;). Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά c θα είναι πολλαπλάσιο 6 διαδοχικών αριθμών οι οποίοι προφανώς θα ξεκινούν από το 1 (γιατί;) Οι αριθμοί αυτοί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Όμως αρκεί να είναι πολλαπλάσια των 3, 4, 5 άρα η διαφορά ηλικιών θα είναι 3·4·5=60. Στα πρώτα γενέθλια οι ηλικίες ήταν: παππούς 61, εγγονός 1. Στα δεύτερα γενέθλια θα ήταν ο παππούς 62 και ο εγγονός 2 κ.λ.π

4) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΚΜ το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει $(\rho-1)^2+(\rho-2)^2=\rho^2$ από όπου προκύπτει η εξίσωση: $\rho^2-6\rho+5=0$ άρα ρ=5 καθώς ρ>1.



5) Έχουμε $A=\sqrt{\sqrt{6^6}}-5\cdot\sqrt{9+\sqrt{72}}=\sqrt{6^3}-5\cdot\sqrt{9+\sqrt{36\cdot 2}}=\sqrt{6^3}-5\cdot\sqrt{9+6\sqrt{2}}=$
$\sqrt{6^3}-5\cdot\sqrt{3\cdot(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{6^3}-5\cdot\sqrt{3\cdot(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{6^3}-5\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{6}-5\cdot\sqrt{6}\text{-}5\cdot\sqrt{3}=$
$\sqrt{6}-\sqrt{75}$

Σχολιάζουμε επιλεγμένα θέματα από τον διαγωνισμό «ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ»

Από την Συντακτική επιτροπή

Στις 9 Φεβρουαρίου πραγματοποιήθηκε ο πρώτος διαγωνισμός με το όνομα ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ που προσφέρει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) στους μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Ο διαγωνισμός αυτός αναφέρεται στις μαθηματικές ικανότητες και όχι απλά και μόνο στις μαθηματικές γνώσεις. Στο περιοδικό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ υπάρχουν τα θέματα και οι λύσεις τους, εμείς εδώ θα αναζητήσουμε και άλλους τρόπους αντιμετώπισης των θεμάτων, ενώ συγχρόνως θα σχολιάσουμε και τη δυσκολία ή τα σημεία τα οποία χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή.

Θέμα 1^{ο}

Το ΑΤΜ μιας τράπεζας, δηλαδή το μηχάνημα από το οποίο μπορείς να πάρεις χρήματα από τον λογαριασμό σου, μπορεί να δώσει μόνο χαρτονομίσματα των 50€ και των 20€.

Ο Μάριος, μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, πήγε με τον πατέρα του σε ένα ΑΤΜ. Ο πατέρας του ζήτησε 130€.

Τι από τα παρακάτω είναι περισσότερο πιθανό να συμβεί;

Α) το μηχάνημα να του βγάλει 3 ακριβώς χαρτονομίσματα

Β) το μηχάνημα να του βγάλει 4 ακριβώς χαρτονομίσματα

Γ) το μηχάνημα να του βγάλει 5 ακριβώς χαρτονομίσματα

Δ) το μηχάνημα να εμφανίσει στην οθόνη του: «Απαγορεύεται το κάπνισμα»

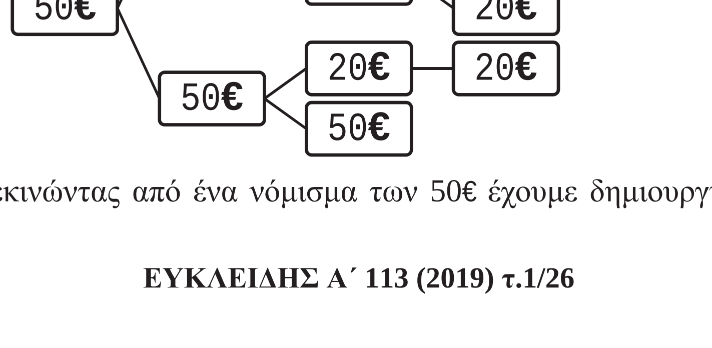
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Σχόλιο: Εδώ χρειάζεται αυτό που ονομάζουμε ¨ικανότητα συνδυαστικής σκέψης¨. Συγκεκριμένα θα πρέπει νοερά, είτε σε κάποιο πρόχειρο, να δημιουργήσουμε έναν πίνακα οργάνωσης των δυνατών συνδυασμών. Για παράδειγμα:

50€	**20€**	**ΣΥΝΟΛΟ**
0	6 ή 7	120€ ή 140€
1	**4**	**130€**
2	1 ή 2	120€ ή 140€
3	0	150€

Η οργάνωση αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως **στρατηγική** επίλυσης προβλημάτων που απαιτούν μελέτη συνδυασμών.

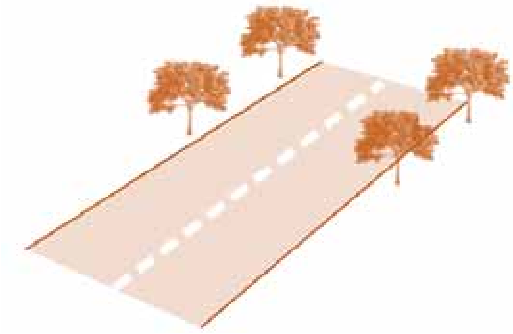
Μία άλλη παράσταση των συνδυασμών είναι αυτό που αποκαλούμε δενδροδιάγραμμα.



Παρατηρήστε ότι ξεκινώντας από ένα νόμισμα των 50€ έχουμε δημιουργήσει ένα δένδρο στο οποίο μόνο μία διαδρομή δίνει άθροισμα 130€. Η δημιουργία τέτοιων δένδρων είναι μία πολύ χρήσιμη δραστηριότητα ιδιαίτερα για όσες και όσους θέλουν να ασχοληθούν με τον κλάδο της πληροφορικής και του προγραμματισμού. Τώρα πλέον είναι προφανές ότι μόνο ένας συνδυασμός είναι κατάλληλος.

Θέμα 2ο

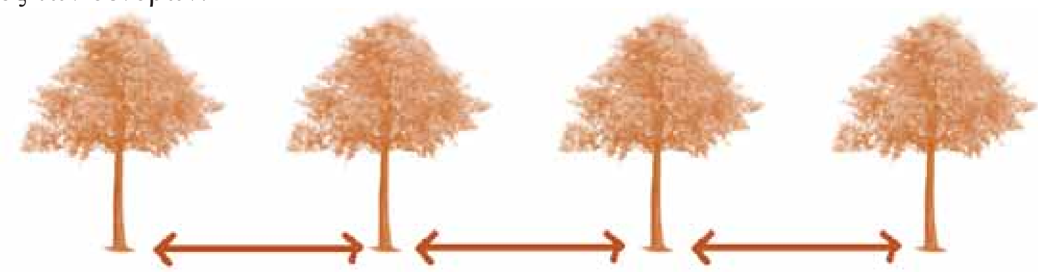
Οι κάτοικοι δύο κοινοτήτων αποφάσισαν να δενδροφυτεύσουν τον δρόμο που συνδέει τις δύο κοινότητες. Φύτευσαν λεύκες, όπως δείχνει η εικόνα, σε απόσταση 15 μέτρων την μία από την άλλη. Συνολικά χρειάστηκε να φυτεύσουν 402 λεύκες.
Πόσο μήκος έχει ο δρόμος;



Α) 3 km **Β)** 4,02 km **Γ)** 40,2 km

Δ) 402 km **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

Σχόλιο: Εδώ θα πρέπει να καταφύγουμε στην ικανότητα κριτικής σκέψης και παρατηρητικότητας. Το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να λάβουμε υπ όψιν, με βάση την εικόνα, είναι ότι δεν θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας και τα 402 δένδρα αλλά μόνο τα 201.
Στη συνέχει θα πρέπει να βρούμε πόσα διαστήματα δημιουργούν μεταξύ τους τα 201 δένδρα. Για να είμαστε σίγουροι είναι χρήσιμο να κάνουμε υπολογισμούς με μικρότερο πλήθος από δένδρα. Για παράδειγμα τα 3 δένδρα δημιουργούν 2 διαστήματα, τα 4 δένδρα δημιουργούν 3 διαστήματα και γενικά τα διαστήματα που δημιουργούνται είναι σε πλήθος κατά 1 λιγότερα από το πλήθος των δένδρων.



Τελικά τα 201 δέντρα δημιουργούν 200 διαστήματα των 15 μέτρων το κάθε ένα και έτσι προκύπτει ως σωστή απάντηση η Α)

Προτεινόμενη επέκταση:

Ένα ανάλογο πρόβλημα μπορεί να δημιουργήσει κάποιος με χρονικά διαστήματα. Προσέξτε το παρακάτω πρόβλημα.
Ο Βασίλης έχει ένα παράξενο ρολόι – ξυπνητήρι, την ώρα που είναι προγραμματισμένο να κτυπήσει βγάζει έναν στιγμιαίο ήχο, κάτι σαν καμπάνα, και στη συνέχεια κτυπά κάθε 35 δευτερόλεπτα με τον ίδιο ήχο. Ο Βασίλης το προγραμμάτισε να κτυπήσει το πρωί στις 7.20΄. Πράγματι στις 7.20΄ άρχισε να κτυπά το ξυπνητήρι και χρειάστηκαν 13 κτυπήματα για να το κλείσει και να σηκωθεί από το κρεβάτι ο Βασίλης. Τι ώρα έδειχνε τότε το ρολόι;

Είναι πολύ χρήσιμο να εντοπίσετε τις ομοιότητες αλλά και τις διαφορές των δύο προβλημάτων.

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα δύο προβλήματα είναι δομικά όμοια ή ανάλογα.

Θέμα 3ο

Ο κ. Βρασίδας πριν από αρκετά χρόνια είχε αγοράσει ένα αυτοκίνητο στην τιμή των 16.200€. Πέρυσι πούλησε το αυτοκίνητό του στην τιμή των 3.200€.

Στην αγορά των αυτοκινήτων ισχύει ο εξής κανόνας: κάθε 4 χρόνια το αυτοκίνητο χάνει το $\frac{1}{3}$ της αξίας που είχε στην αρχή κάθε τετραετίας. Πότε είχε αγοράσει το παλιό του αμάξι;

Σχόλιο: Το πρόβλημα αυτό απαιτεί να αξιοποιήσουμε ένα μοτίβο, μία κανονικότητα. Γενικά τα προβλήματα αυτής της μορφής λέμε ότι ανήκουν στο χώρο του επαγωγικού συλλογισμού. Η ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού είναι αυτή που μας επιτρέπει με βάση κάποιον κανόνα που δίνεται ή υπονοείται στο πρόβλημα να μπορούμε να βγάζουμε συμπεράσματα και στοιχεία που δεν δίδονται αλλά συνήθως ζητούνται.

- **Η στρατηγική του πίνακα τιμών**

Εδώ μία αποτελεσματική στρατηγική είναι η κατασκευή ενός πίνακα και μέσω αυτού να εντοπιστεί η ζητούμενη χρονολογία. Υπάρχουν δύο δυνατότητες, η απλούστερη είναι να ξεκινήσουμε από την αρχική αξία των 16.200€, να πολλαπλασιάζουμε συνεχώς επί $\frac{2}{3}$ μέχρι να φτάσουμε στο 3.200€.

Αξία σε €	Χρόνος
16.200	
$\frac{2}{3}\times 16.200=10.800$	
$\frac{2}{3}\times 10.800=7.200$	
$\frac{2}{3}\times 7.200=4.800$	
$\frac{2}{3}\times 4.800=3.200$	2018

Με βάση τον πίνακα αυτό μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τον χρόνο που η αξία του αυτοκινήτου ήταν 16.200€.
Έχει ενδιαφέρον να σκεφτούμε το πως θα μπορούσαμε να εργαστούμε ξεκινώντας τον πίνακα όχι από την αξία των 16.200€ αλλά από την τελική αξία των 3.200€.
Δοκιμάστε το.

- **Η στρατηγική της δημιουργίας αλγεβρικής παράστασης**

Ένας άλλος πιο προχωρημένος, από Μαθηματική άποψη, τρόπος είναι ο εξής:
Επειδή κάθε τετραετία απομένουν τα $\frac{2}{3}$ της αξίας του αυτοκινήτου, αν υποθέσουμε ότι έχουν περάσει ν τετραετίες, τότε θα ισχύει: $16.200\times\underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}......\times\frac{2}{3}}_{\nu\ \text{φορές}}=10.800$ ή $16.200\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}=10.800$

Άρα $\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}=\frac{10.800}{16.200}=\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$ που σημαίνει ότι οι τετραετίες είναι 4.

Η παραπάνω μέθοδος θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως σταδιακή **μαθηματικοποίηση** μέσα στο πλαίσιο της Άλγεβρας.

Θέμα 4ο

Σε μία συγκέντρωση μαθητών και μαθητριών αν τα αγόρια ήταν 10% περισσότερα τότε θα υπήρχαν στην αίθουσα 74 άτομα. Αν τα κορίτσια ήταν 10% περισσότερα τότε στην αίθουσα θα υπήρχαν 73 άτομα. Ποιος είναι αριθμός των αγοριών στην αίθουσα;

Σχόλιο: Προφανώς αν υπήρχαν 5 προτεινόμενες απαντήσεις, όπως στο διαγωνισμό, τότε θα έπρεπε να κάνουμε δοκιμές με κάθε μία απάντηση για να βρούμε την σωστή. Αυτό ακριβώς περιγράφεται και στο περιοδικό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ που περιέχει αναλυτικές απαντήσεις των θεμάτων του διαγωνισμού.
Εμείς εδώ θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε χωρίς τις προτεινόμενες απαντήσεις.

Έστω x ο αριθμός των αγοριών και y ο αριθμός των κοριτσιών. Τότε θα είχαμε τις δύο παρακάτω σχέσεις:

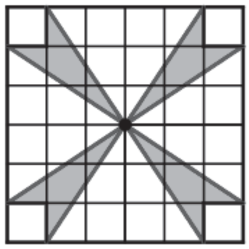
$$x+\frac{10}{100}x+y=74 \text{ δηλαδή } 1{,}1x+y=74$$

$$x+y+\frac{10}{100}y=73 \text{ δηλαδή } x+1{,}1y=73$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις θα έχουμε 2,1x+2,1y=147 άρα x+y=70. Τώρα παρατηρούμε ότι αν τα αγόρια ήταν 10% περισσότερα θα είχαμε 74 άτομα που σημαίνει ότι αυτό το 10% των αγοριών είναι τα 4 επιπλέον άτομα που εμφανίζονται και επομένως τα αγόρια θα είναι 40.

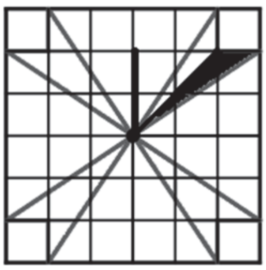
Θέμα 5ο

Το διπλανό τετράγωνο έχει περίμετρο 48 cm και είναι χωρισμένο σε μικρότερα ίσα τετραγωνάκια Πόσα cm^2 είναι το εμβαδόν του σκούρου μέρους του;



Α) 20 **Β)** 30 **Γ)** 40 **Δ)** 50 **Ε)** κανένα από τα προηγούμενα

Σχόλιο: Στο περιοδικό η αναλυτική απάντηση προτείνει τον υπολογισμό του συνολικού εμβαδού όλων των περιοχών του σχήματος που δεν είναι σκιασμένο. Ας δούμε έναν άλλο τρόπο που όμως απαιτεί να ενεργοποιήσουμε την παρατηρητικότητά μας.



Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το αρχικό σχήμα έχει 4 άξονες συμμετρίας, έναν οριζόντιο, έναν κατακόρυφο και τις δύο διαγώνιες.
Οι άξονες συμμετρίες μας επιτρέπουν να εντοπίσουμε σχήματα τα οποία είναι συμμετρικά ως προς κάποιον ή κάποιους από αυτούς τους άξονες.
Με βάση τα παραπάνω παρατηρήστε ότι το εμβαδόν που μας ζητούν αποτελείται από 8 πανομοιότυπα (ίσα) τριγωνάκια όπως αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Όπως φαίνεται και στην εικόνα αν θεωρήσουμε σαν βάση του τριγώνου αυτού την μικρή του πλευρά (2cm) τότε το ύψος του θα είναι το σκούρο παχύ τμήμα που έχει μήκος 4cm.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το μικρό αυτό τριγωνάκι έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}\cdot 2\text{cm}\cdot 4\text{cm}=4\text{cm}^2$

Τελικά το σκιασμένο μέρος του τετραγώνου έχει εμβαδόν 32cm^2.

Η Αρχαία Ελληνική Τεχνολογία ξαναζεί και συναρπάζει

Παναγιώτης Χριστόπουλος

Στο κέντρο της Αθήνας, στην οδό Πινδάρου 6, μπορεί κάποιος να συναντήσει ένα πανέμορφο, νεοκλασικό κτίριο το οποίο στο εσωτερικό του κρύβει μια πολύ όμορφη συλλογή από εκθέματα σχετικά με την αρχαία Ελληνική τεχνολογία. Ο δημιουργός των εκθεμάτων του μουσείου αυτού είναι ο Κώστας Κοτσανάς ο οποίος μετά από έρευνες και μελέτες 25 χρόνων κατασκεύασε ένα προς ένα τα 350 περίπου εξαιρετικά λειτουργικά ομοιώματα εφευρέσεων των Αρχαίων Ελλήνων.

Στο μουσείο μπορεί ο επισκέπτης να δει ¨ζωντανά¨ από το ρομπότ - υπηρέτρια του Φίλωνος μέχρι τον κινηματογράφο του Ήρωνος και από το αυτόματο ωρολόγιο του Κτησιβίου μέχρι τον αναλογικό υπολογιστή των Αντικυθήρων), δηλαδή της περιόδου από το 2000 π.Χ. μέχρι το τέλος του αρχαίου ελληνικού κόσμου.

Μας είναι ιδιαίτερα γνωστή η προσφορά των αρχαίων Ελλήνων στη Φιλοσοφία και τις Καλές Τέχνες όπως και η προσφορά τους στο χώρο των Επιστημών. Όμως η Τεχνολογία των αρχαίων Ελλήνων είναι σχετικά άγνωστη όπως και οι απίστευτες επιδόσεις τους στον τομέα αυτό.

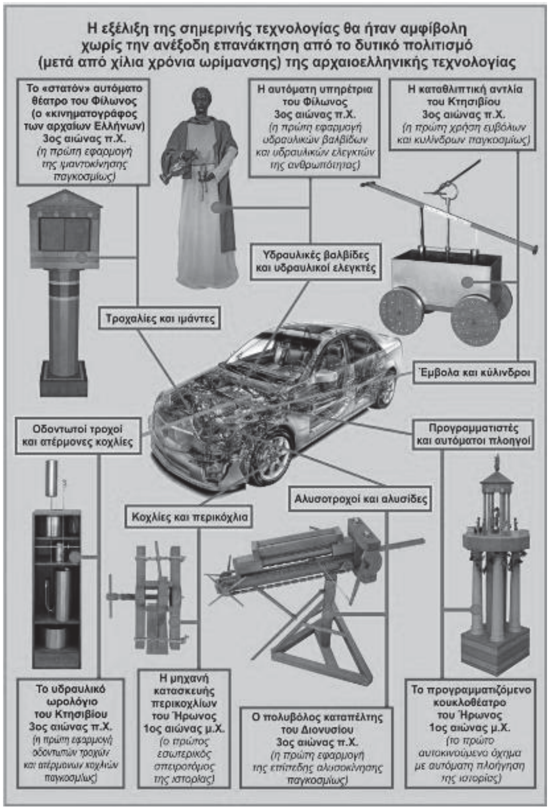
Η έκθεση αυτή της τεχνολογίας των Αρχαίων Ελλήνων είναι η εγκυρότερη αφού στηρίζεται αποκλειστικά στη συστηματική και σε βάθος μελέτη της Αρχαιοελληνικής, Λατινικής και Αραβικής γραμματείας, των αγγειογραφιών και των ελαχίστων σχετικών αρχαιολογικών ευρημάτων. Επίσης είναι και η πληρέστερη έκθεση του είδους της παγκοσμίως. Για το λόγο αυτό υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον από πάρα πολλές χώρες.

Η πρώτη έκθεση φιλοξενήθηκε στο Κατάκολο από το Δήμο Πύργου και λειτουργεί εκεί συνεχώς από το 2003. Μόνιμη έκθεση λειτουργεί και στην αρχαία Ολυμπία την οποία επισκέπτονται κάθε χρόνο χιλιάδες επισκέπτες Έλληνες και ξένοι, ενώ από τον Οκτώβρη 2018 λειτουργεί και στην Αθήνα.

Όλα τα εκθέματα και το υποστηρικτικό τους υλικό έχουν δημιουργηθεί από τον ίδιο τον κύριο Κοτσανά χωρίς καμιά επιχορήγηση από οποιοδήποτε δημόσιο ή ιδιωτικό φορέα.

Σκοπός του μουσείου είναι, να αναδείξει αυτήν τη σχετικά άγνωστη πτυχή του αρχαιοελληνικού πολιτισμού, αλλά και να αποδείξει ότι η τεχνολογία των αρχαίων Ελλήνων λίγο πριν το τέλος του αρχαιοελληνικού κόσμου ήταν εξαιρετικά όμοια με τις απαρχές της σύγχρονης τεχνολογίας μας.

Για παράδειγμα οι κοχλίες και τα περικόχλια, οι οδοντωτοί τροχοί και οι κανόνες, οι τροχαλίες και οι ιμάντες, οι αλυσοτροχοί και οι αλυσίδες, οι υδραυλικοί ελεγκτές και οι βαλβίδες, οι προγραμματιστές και οι αυτόματοι πλοηγοί (εξαρτήματα όλα της μηχανής ενός σύγχρονου αυτοκινήτου) είναι μερικά μόνο από τα εφευρήματα των αρχαίων Ελλήνων που αποτέλεσαν τους θεμέλιους λίθους της πολύπλοκης τεχνολογίας τους.



Όμως χρειάστηκαν περίπου 2.000 χρόνια ωρίμανσης για να αξιοποιήσει και πάλι η ανθρωπότητα αυτήν την αξιοθαύμαστη λησμονημένη τεχνολογία.

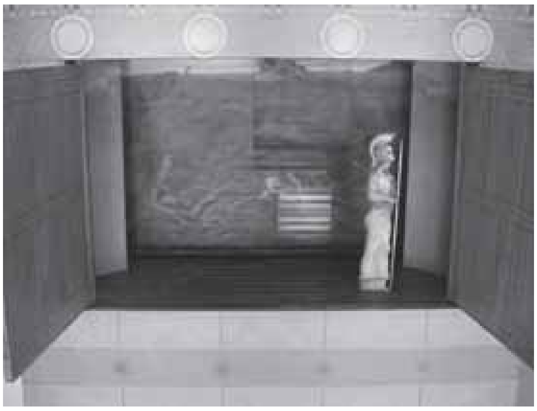
Τα εκθέματα συνοδεύονται από πλούσιο οπτικοακουστικό υλικό (στα ελληνικά και αγγλικά) όπως πινακίδες και γιγαντοαφίσες με πολλές πληροφορίες, αναλυτικά σχέδια, φωτογραφίες και πλήρεις βιβλιογραφικές αναφορές ενώ πολλά από τα εκθέματα είναι διαδραστικά.

Δεκάδες ξένα σχολεία και πανεπιστήμια επισκέπτονται κάθε χρόνο το μουσείο του Κατάκολου και της Αρχαίας Ολυμπίας, ενώ το Discovery Channel πραγματοποιεί εκπαιδευτικά προγράμματα σε αυτό.

Το ενδιαφέρον των ξένων ΜΜΕ σχετικά με το εν λόγω μουσείο είναι τεράστιο, το Γερμανόγλωσσο περιοδικό FOCUS σε σχολιασμό του μουσείου το αναφέρει ως φωτεινό παράδειγμα στην Ελλάδα. Ο δημοφιλής ταξιδιωτικός οδηγός «PELOPONNES» των εκδόσεων DUMONT το προτείνει στους 10 κορυφαίους προορισμούς της Πελοποννήσου που πρέπει να επισκεφτεί οπωσδήποτε κάποιος περιηγητής.

Στην έκθεση δίνεται η δυνατότητα στους επισκέπτες να διαπιστώσουν ότι οι αρχαίοι Έλληνες

α) είχαν ανακαλύψει έναν «κινηματογράφο» ικανό να παρουσιάζει αυτόματα την πλοκή ενός μύθου με κινούμενη εικόνα και ήχο.



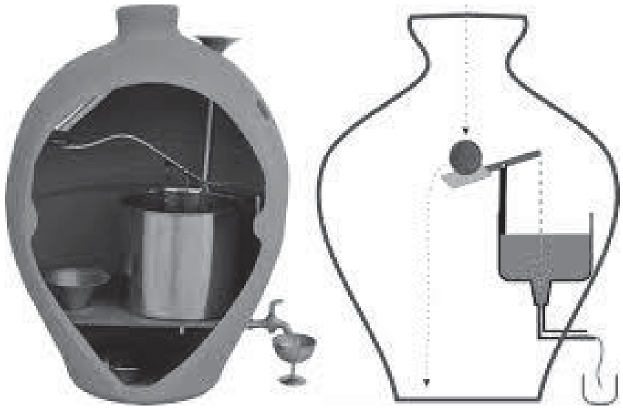
β) είχαν επινοήσει (για ψυχαγωγικό δυστυχώς μόνο σκοπό) αυτοκινούμενα οχήματα (αυτοκίνητα) με αυτόματη πλοήγηση, με κιβώτιο ταχυτήτων, υδραυλικές προγραμματιζόμενες βαλβίδες και άλλα περίπλοκα εξαρτήματα

γ) χρησιμοποιούσαν λειτουργικά ρομπότ με σκοπό να τους υπηρετούν

δ) είχαν ανακαλύψει την αρχή του ατμοστροβίλου

ε) χρησιμοποιούσαν πολύπλοκα αστρονομικά μετρητικά όργανα ακριβείας (όπως έναν αναλογικό υπολογιστή, ένα «G.P.S.», ένα θεοδόλιχο-χωροβάτη, κ.ά.) που τους επέτρεπαν να υπολογίζουν με ακρίβεια γεωδαιτικά και αστρονομικά στοιχεία

στ) είχαν επινοήσει ευφυείς μηχανές με κερματοδέκτη.



ζ) χρησιμοποιούσαν πολύπλοκα ανυψωτικά μηχανήματα ικανά να οικοδομούν πανύψηλα κτίσματα με ολιγάριθμο προσωπικό η) διέθεταν ωρολόγια (και ξυπνητήρια) ικανά να λειτουργούν αυτόματα και αδιάκοπα χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση, κ.ά.

Όλα αυτά αποδεικνύουν την υψηλής στάθμης τεχνολογία του πολιτισμού των αρχαίων Ελλήνων που δεν είχε σχεδόν τίποτα να ζηλέψει από την πρώιμη σύγχρονη τεχνολογία και που θα είχε οδηγήσει (αν οι οικονομικές και κοινωνικοπολιτικές συνθήκες της εποχής το επέτρεπαν) στη Βιομηχανική Επανάσταση από την Ελληνιστική εποχή με απρόβλεπτες συνέπειες για την ανθρωπότητα.

Τα εκθέματα του Μουσείου μεταφέρονται συχνά αφιλοκερδώς σε άλλες περιοχές (στην Ελλάδα και το εξωτερικό) ώστε όλο και περισσότεροι να γνωρίσουν αυτήν την εντελώς άγνωστη πτυχή του πολιτισμού των αρχαίων Ελλήνων και την καταπληκτική τεχνολογία τους.

Επισκεφτήκαμε το νέο μουσείο Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας στην Αθήνα Πινδάρου 6 Κολωνάκι και ζητήσαμε πληροφορίες από τον ίδιο τον δημιουργό του Μουσείου.

Κύριε Κοτσανά Καλημέρα σας

Θέλω να σας συγχαρώ για το σπουδαίο αυτό έργο σας, με το οποίο αναδείξατε το θαύμα της Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας και να σας παρακαλέσω να μας πείτε δυο λόγια για σας, σε ποια σχολεία πήγατε και ποια ήταν η σχέση σας με τα μαθηματικά;

Σας ευχαριστώ για τα καλά σας λόγια.

Είμαι Διπλ. Μηχανολόγος Μηχανικός και μετά από ένα διάστημα απασχόλησης στη βιομηχανία, ακολούθησα το λειτούργημα του εκπαιδευτικού. Δίδαξα στο ΕΠΑΛ Αμαλιάδας, στην ΤΕΣ Κυπαρισσίας και στο ΤΕΛ, το Γυμνάσιο και το Λύκειο Κρεστένων, στο ΕΠΑΛ Πύργου και στο Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας Πύργου. Τα μαθηματικά είναι ο δρόμος που με οδηγεί στη δουλειά μου.

Εσείς που ασχοληθήκατε με την αρχαία Ελληνική Τεχνολογία, πιστεύετε ότι βοηθούν οι νέες τεχνολογίες την πρόοδο των μαθητών;

Φυσικά, οι νέες τεχνολογίες βοηθούν τους μαθητές μας αφού από τη μια μεριά αποκτούν ευκολότερα γνώσεις, δεξιότητες και συμπεριφορές και από την άλλη εξοικειώνονται με αυτές κάτι που είναι απαραίτητο στην καθημερινή ζωή και την αγορά εργασίας.

Σας βοήθησαν τα μαθηματικά να ανακαλύψετε, να κατασκευάσετε και να μας δώσετε την ευκαιρία να γνωρίσουμε και εμείς την αρχαία Ελληνική Τεχνολογία;

Φυσικά, χωρίς τα Μαθηματικά θα ήταν αδύνατον να μελετηθούν και να ανασκευαστούν τα περισσότερα εκθέματα του Μουσείου από τη μουσική τεχνολογία μέχρι την πολεμική και από την ρομποτική μέχρι την οικοδομική τεχνολογία των αρχαίων Ελλήνων

Πως ξεκινήσατε να ασχολείστε με την αρχαία Ελληνική Τεχνολογία ποιος σας βοήθησε σε αυτό;

Οφείλω το έναυσμα της ενασχόλησής μου, με αυτή την σχετικά άγνωστη πτυχή του πολιτισμού των αρχαίων Ελλήνων, στον αείμνηστο καθηγητή μου της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών Ανδρέα Δημαρόγκωνα από το 1981.

Ποιες από τις κατασκευές σας θεωρείτε ποιο σημαντικές που πρέπει να δουν όλα τα παιδιά στην έκθεσή σας;

Τεχνολογίες και τεχνικές που μοιάζουν σημερινές ή μερικές χθεσινές έχουν τις απαρχές τους στην Αρχαία Ελλάδα και οφείλουμε να τις γνωρίζουμε όλοι όπως το ξυπνητήρι του Πλάτωνος και του Αριστοτέλη, το "ρομπότ - υπηρέτρια", τον "κινηματογράφο" και το υδραυλικό αυτόματο του Φίλωνος, την ύδραυλη, την καταθλιπτική αντλία, το υδραυλικό ωρολόγιο και το μουσικό καθρέπτη του Κτησιβίου, τον πολυβόλο καταπέλτη του Διονυσίου, τον τετράντα του Ιππάρχου, το υδραυλικό ωρολόγιο, το οδόμετρο, το ναυτικό δρομόμετρο, το "ατμοτηλεβόλο", το πλανητάριο και την Συρακουσία του Αρχιμήδη, το αυτοκινούμενο όχημα με αυτόματη πλοήγηση, τη διόπτρα, τον αυτόματο πωλητή και την αιολόσφαιρα του Ήρωνος, τον αστρολάβο του Πτολεμαίου και εφευρέσεις άλλων σπουδαίων αρχαίων Ελλήνων επιστημόνων που ενέπνευσαν το Ντα Βίντσι, το Γαλιλαίο, το Νεύτωνα...

Οι μαθητές που θα επισκεφτούν την έκθεσή σας, που παγκόσμια πλέον καταξιώνεται, τι άλλο μπορούν να κάνουν;

Συμπληρωματικά στο τέλος το σημαντικότερο είναι ότι οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να λειτουργήσουν οι ίδιοι αυτές τις εφευρέσεις όπως και ομοιώματα του μηχανισμού των Αντικυθήρων σε διάφορες διαστάσεις περιστρέφοντας ένα χειρομοχλό ξεκλειδώνοντας οι ίδιοι τα μυστικά του.

- ***Σας ευχαριστώ***

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Οι Διεθνείς Μαθηματικοί Διαγωνισμοί του 2019 που συμμετείχε η ΕΜΕ

60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2019

Η 60η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στο Μπαθ του Ηνωμένου Βασιλείου από 11 μέχρι και 22 Ιουλίου 2019. με συμμετοχή 112 χωρών και 621 μαθητών εκ των οποίων 65 ήταν κορίτσια. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν 1 αργυρό μετάλλιο, 2 χάλκινα μετάλλια και 3 εύφημες μνείες.

Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Εύφημη Μνεία**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Εύφημη Μνεία**
Μηλιώρη Ειρήνη	**Αθήνα**	**Εύφημη Μνεία**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της ΕΜΕ, Ομότιμος καθηγητής του ΕΜΠ, Ανάργυρος Φελλούρης και υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός Σιλουανός Μπραζιτίκος.

36η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

(http://bmo2019.md/results)

Η 36η Βαλκανική μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στην πρωτεύουσα Κιζινάου της Μολδαβίας από 30 Απριλίου μέχρι 5 Μαΐου 2019 με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη χώρες από Ασία και Ευρώπη. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν τρία αργυρά και δύο χάλκινα μετάλλια.

Γαλανόπουλος Σπυρίδων	**Ξάνθη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μαργαρίτης Μηνάς	**Ηράκλειο**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Ντόκας Ευθύμιος	**Αθήνα**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Μελάς Δημήτριος Χρυσοβαλάντης	**Αθήνα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λώλας Δημήτριος	**Τρίκαλα**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κουντουράκης Επιμενίδης	**Χανιά**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Αθανάσιος Μάγκος και υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος.

8η ΕΥΡΩΠΑΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΓΙΑ ΚΟΡΙΤΣΙΑ

https://www.egmo.org/egmos/egmo8/

ΚΙΕΒΟ – ΟΥΚΡΑΝΙΑ, 7-13 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2019

Η όγδοη Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών διοργανώθηκε φέτος στο Κίεβο της Ουκρανίας από 7 μέχρι 13 Απριλίου με συμμετοχή 50 χωρών (36 Ευρωπαϊκών και 14 από άλλες Ηπείρους). Συνολικά έλαβαν μέρος 196 κορίτσια και η Ελληνική ομάδα κατέκτησε δύο Χάλκινα μετάλλια και δύο Εύφημες Μνείες.

Μηλιώρη Ειρήνη	Αθήνα	Χάλκινο Μετάλλιο
Σάββα Άρτεμις Χρυσάνθη	Θεσσαλονίκη	Χάλκινο Μετάλλιο
Αβδελά Δανάη Χριστίνα	Σέρρες	Εύφημη Μνεία
Ρασβάνη Κωνσταντίνα	Βόλος	Εύφημη μνεία

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος** και υπαρχηγός η μαθηματικός **Ευαγγελία Λώλη.**

6ος Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός Νεότητας MYMC,

Νάπολη, Ιταλία, http://www.mymc.it/2019/mymc-2019.html

Διοργανώνεται κάθε χρόνο από Ιταλικά Πανεπιστήμια και φέτος συμμετείχαν 17 χώρες της Μεσογείου και είναι ομαδικός διαγωνισμός. Κάθε χώρα συμμετέχει με 2 αγόρια και 2 κορίτσια που δεν συμμετείχαν στην Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα της αντίστοιχης χρονιάς.

Αδαμόπουλος Διονύσιος, Πύργος, Β΄ Λυκείου	Χάλκινο MYMC
Εμμανουήλ Δημήτριος, Αθήνα, Α΄ Λυκείου	Χάλκινο MYMC
Σάββα Άρτεμις, Θεσσαλονίκη, Γ΄ Λυκείου	Χάλκινο MYMC
Κόλλια Σοφία, Αθήνα, Γ΄ Λυκείου	Χάλκινο MYMC

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός Νικόλαος Κολλιόπουλος

23η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

Αγρός, Κύπρος 20 – 25 Ιουνίου 2019

https://www.cms.org.cy/pages/competitions/jbmo-2019/jbmo-2019

Η 23η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων έγινε στην Κύπρο από 20 μέχρι 25 Ιουνίου 2019 με τη συμμετοχή μαθητών των χωρών της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και με μερικές ακόμη φιλοξενούμενες χώρες από Ασία και Ευρώπη. Οι Έλληνες μαθητές κέρδισαν τρία αργυρά και τρία χάλκινα μετάλλια, ως εξής:

Λιγνός Ορέστης	Αθήνα	Αργυρό Μετάλλιο
Σταμέλος Γρηγόρης	Αθήνα	Αργυρό Μετάλλιο
Κωνσταντινίδου Μιχαέλα	Θεσσαλονίκη	Αργυρό Μετάλλιο
Παπαλέξης Θάνος	Λάρισα	Χάλκινο Μετάλλιο
Κωνσταντινίδης Κωνσταντίνος	Θεσσαλονίκη	Χάλκινο Μετάλλιο
Γεωργελές Γιώργος	Ξάνθη	Χάλκινο Μετάλλιο

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο μαθηματικός **Αλέξανδρος Συγκελάκης,** ο οποίος είχε και την επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων που ακολουθούν, και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ανδρέας Βαρβεράκης.**

Προβλήματα και Λύσεις

Θέμα 1ο

Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p, για τους οποίους υπάρχουν θετικοί ακέραιοι *x*,*y* και *z*, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ να είναι γινόμενο ακριβώς τριών διακεκριμένων πρώτων αριθμών. (*Ελλάδα – Σ. Μπραζιτίκος*)

Λύση

Για $p=2$, παίρνουμε $x=y=4$ και $z=3$. Τότε $A=30=2\cdot 3\cdot 5$.

For $p=3$ παίρνουμε $x=3$ και $y=2$, $z=1$. Τότε $A=30=2\cdot 3\cdot 5$.
For $p=5$ παίρνουμε $x=2$ και $y=1$, $z=1$. Τότε και πάλι $A=30=2\cdot 3\cdot 5$.
Για $p\geq 7$ παίρνοντας $\bmod 2$ και $\bmod 3$ βλέπουμε ότι ο A διαιρείται από το 2 και από το 3. Επιπλέον, από το μικρό θεώρημα του Fermat έχουμε:

$$x^p+y^p+z^p-x-y-z\equiv x+y+z-x-y-z=0 \pmod p.$$

Συνεπώς από τη συνθήκη του προβλήματος, έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x^p+y^p+z^p-x-y-z=6p.$$

Αν ένας από τους αριθμούς x, y και z είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x\geq 2$, τότε $6p\geq x^p-x=x(x^{p-1}-1)\geq 2(2^{p-1}-1)=2^p-2.$

Από την άλλη, είναι εύκολο να αποδειχθεί με επαγωγή ότι $2^p-2>6p$ για όλους τους πρώτους $p\geq 7$. Έτσι, δεν υπάρχουν άλλες τιμές του πρώτου p που να ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Θέμα 2ο

Έστω α,b διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και c θετικός πραγματικός αριθμός. Αν ισχύει $\alpha^4-2019\alpha=b^4-2019b=c$ να αποδείξετε ότι $-\sqrt{c}<\alpha b<0$. (***Σαουδική Αραβία***)

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι $2019(a-b)=a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Αφού $a\neq b$, παίρνουμε $(a+b)(a^2+b^2)=2019$, συνεπώς $a+b\neq 0$. Έτσι έχουμε:

$$2c=a^4-2019a+b^4-2019b=a^4+b^4-2019(a+b)=a^4+b^4-(a+b)^2(a^2+b^2)=-2ab(a^2+ab+b^2)$$

Άρα $ab(a^2+ab+b^2)=-c<0$. Τέλος, αφού $a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+(a+b)^2\right)\geqslant 0$, άρα παίρνουμε $ab<0$. Επίσης, $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab>-ab$ (η ισότητα δε μπορεί να ισχύει καθώς $a+b\neq 0$). Επομένως $-c=ab(a^2+ab+b^2)<-(ab)^2\Rightarrow (ab)^2<c\Rightarrow -\sqrt{c}<ab<\sqrt{c}$.

Άρα τελικά είναι $-\sqrt{c}<ab<0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ABC με AB<AC. Η μεσοκάθετος της πλευράς BC τέμνει τις ευθείες AB και AC στα σημεία P και Q, αντίστοιχα. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και M,N τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων BC, PQ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες HM και AN τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC.

(*Σερβία*)

Λύση

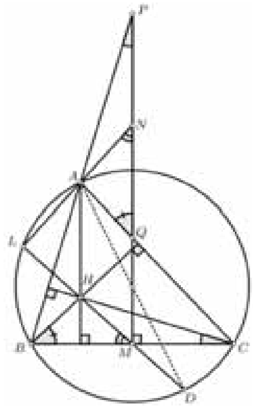
Αρχικά έχουμε $\angle APQ=\angle BPM=90^\circ-\angle MBP=90^\circ-\angle CBA=\angle HCB$,

Και $\angle AQP=\angle MQC=90^\circ-\angle QCM=90^\circ-\angle ACB=\angle CBH$.

Από αυτές τις δύο ισότητες βλέπουμε ότι τα τρίγωνα APQ και HCB είναι όμοια. Επιπλέον, καθώς τα M και N είναι τα μέσα των BC και PQ αντίστοιχα, άρα τα τρίγωνα AQN και HBM είναι επίσης. Συνεπώς, παίρνουμε $\angle ANQ=\angle HMB$.

Αν L είναι το σημείο τομής των AN και HM τότε έχουμε:

$$\angle MLN=180^\circ-\angle LNM-\angle NML=180^\circ-\angle LMB-\angle NML=$$
$$=180^\circ-\angle NMB=90^\circ.$$



Σχήμα 1

Έστω D σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC αντιδιαμετρικό του A. Είναι τότε γνωστό ότι το D είναι το συμμετρικό του H ως προς το σημείο M. Άρα λοιπόν το σημείο D ανήκει στο τμήμα MH και επίσης $\angle DLA = \angle MLA = \angle MLN = 90^\circ$. Όμως, καθώς η DA είναι η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, η συνθήκη ότι $\angle DLA = 90^\circ$ είναι αρκετή για να συμπεράνουμε ότι το σημείο L ανήκει σε αυτό τον κύκλο.

Θέμα 4^ο^

Ένα ορθογώνιο διαστάσεων 5×100 διαιρείται σε 500 μοναδιαία τετράγωνα και n από αυτά χρωματίζονται με μαύρο χρώμα ενώ τα υπόλοιπα με άσπρο χρώμα. Δύο μοναδιαία τετράγωνα ονομάζονται *γειτονικά* εάν έχουν κοινή πλευρά. Κάθε ένα από τα μοναδιαία τετράγωνα έχει το πολύ δύο γειτονικά μαύρα τετράγωνα. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του n. **(*Βουλγαρία*)**

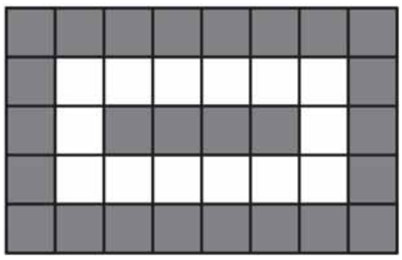
Λύση

Έστω S το πλήθος των μαύρων τετραγώνων. Χωρίζουμε τα μαύρα τα τετράγωνα του πίνακα στις κατηγορίες A, B, C ανάλογα αν είναι τετράγωνο στη γωνία, τετράγωνο στην περιφέρεια του ορθογωνίου (αλλά όχι γωνιακό) ή κάποιο από τα υπόλοιπα εσωτερικά τετράγωνα. Προφανώς $A+B+C=S$.

Μετράμε το πλήθος M των δυάδων τετράγωνο - γειτονικό μαύρο τετράγωνο. Κάθε τετράγωνο έχει το πολύ 2 γειτονικά μαύρα, οπότε έχουμε $M \le 2\cdot 500 = 1000$. Από την άλλη κάθε μαύρο τετράγωνο, ανάλογα με την κατηγορία του συνεισφέρει σε 2 ή 3 ή 4 δυάδες. Επομένως, έχουμε $M = 2A+3B+4C$, οπότε $2A+3B+4C \le 1000 \Leftrightarrow 4(A+B+C)-2A-B \le 1000$

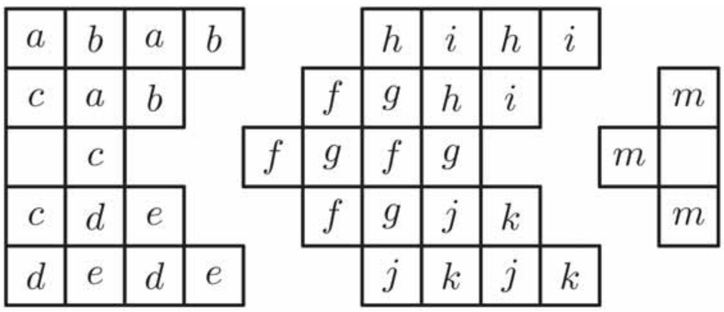
$\Leftrightarrow 4S \le 2A+B+1000 \le 2\cdot 4+202+1000 \Leftrightarrow 4S \le 1210$ άρα αφού ο S είναι ακέραιος παίρνουμε $S \le 302$. Η κατασκευή για τα 302 μαύρα τετράγωνα δίνεται παρακάτω:

Εάν χρωματίσουμε όλα τα τετράγωνα της περιφέρειας του ορθογωνίου καθώς και τη μεσαία γραμμή πλην του δεύτερου και του προτελευταίου τετραγώνου, τότε η συνθήκη ικανοποιείται και υπάρχουν 302 μαύρα τετράγωνα. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τον παραπάνω χρωματισμό για την περίπτωση 5×8.



Σχήμα 2

Μπορούμε να γεμίσουμε το ορθογώνιο με ένα σχήμα όπως το πρώτο, 24 όπως το μεσαίο και ένα όπως το τρίτο όπως εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3

Σε κάθε ένα από αυτά τα τρία σχήματα, μεταξύ των τετραγώνων με το ίδιο χρώμα, υπάρχουν το πολύ 2 που είναι χρωματισμένα μαύρα, συνεπώς ο συνολικός αριθμός των χρωματισμένων τετραγώνων είναι το πολύ $(5+24\cdot 6+1)\cdot 2+2=302$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 112

N36. Το άθροισμα 15 διαδοχικών θετικών ακέραιων είναι ένας αριθμός που μπορεί να γραφεί με διαφορετικά ψηφία από το σύνολο $\{0,1,2,4\}$. Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του μικρότερου από τους 15 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. (*Ρουμανία 2018*)

Λύση: Έστω α ο μικρότερος από τους 15 διαδοχικούς ακέραιους. Τότε οι υπόλοιποι 14 ακέραιοι θα είναι οι $\alpha+1,\alpha+2,\ldots,\alpha+14$ και έχουν άθροισμα

$$\Sigma=\alpha+(\alpha+1)+(\alpha+2)+\ldots+(\alpha+14)=15\alpha+(1+2+\cdots 14)=15\alpha+105=15\cdot(\alpha+7).$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των 15 διαδοχικών ακέραιων είναι πολλαπλάσιο του 15 με ελάχιστη δυνατή τιμή για $\alpha=1$, $15\cdot(1+7)=120$, που είναι αριθμός που γράφεται με διαφορετικά ψηφία από το σύνολο $\{0,1,2,4\}$. Επομένως, αυτή είναι και η ελάχιστη δυνατή τιμή του α.

Σημείωση. *Όλα τα υπόλοιπα δυνατά αθροίσματα πρέπει να λήγουν σε 0, αφού είναι πολλαπλάσια του 15. Έτσι οι άλλες δυνατές τιμές του Σ είναι οι 140, 210, 240, 410, 420, 1240, 1420, 2140, 2410, 4120 και 4210. Από αυτούς τους αριθμούς είναι πολλαπλάσια του 15, μόνο οι 210, 240 και 420, οπότε άλλες δυνατές τιμές για το α είναι οι 13, 15 και 27.*

N37. Συμβολίζουμε με $S(x)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου x. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν για τους οποίους υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α,β τέτοιοι ώστε $S(\alpha)=S(\beta)=S(\alpha+\beta)=\nu$. (*Ρουμανία 1999*)

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε από τη θεωρία αριθμών, το ότι οι θετικοί ακέραιοι x και $S(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το 9. Επομένως, από την ισότητα $S(\alpha)=S(\beta)=S(\alpha+\beta)$ προκύπτει ότι οι αριθμοί α,β και $\alpha+\beta$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το 9. Αυτό δίνει ότι οι αριθμοί $(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$ και $(\alpha+\beta)-\alpha=\beta$ διαιρούνται με το 9, δηλαδή είναι πολλαπλάσια του 9. Επομένως και οι ακέραιοι $S(\alpha)=S(\beta)=S(\alpha+\beta)=\nu$ θα είναι πολλαπλάσια του 9. Θα εξετάσουμε τώρα, αν για όλους τους αριθμούς της μορφής $\nu=9\kappa,\ \kappa=1,2,3,..$ υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α,β που να ικανοποιούν τις δεδομένες ισότητες. Παρατηρούμε ότι, αν θεωρήσουμε τους αριθμούς

$$\alpha=\overline{1818\ldots18},\ \beta=\overline{7272\ldots72},\ \text{τότε}\ \alpha+\beta=\overline{9090\ldots90}\ ,$$

όλους με 2κ ψηφία, παρατηρούμε ότι αυτοί ικανοποιούν τις ισότητες του προβλήματος. Επομένως ο αριθμός ν μπορεί να είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 9.

A57. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) που είναι λύσεις του συστήματος: $\{x+y-z=-1,\ x^2-y^2+z^2=1,\ -x^3+y^3+z^3=-1\}$. (*Κροατία 2018*)

Λύση: Από την πρώτη εξίσωση έχουμε: $x+y=z-1.$ (1)

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται: $x^2-y^2+z^2=1\Leftrightarrow(x+y)(x-y)+(z-1)(z+1)=0$

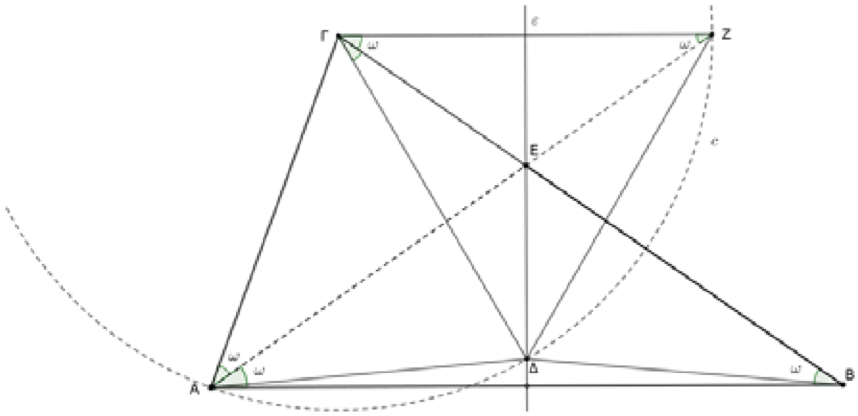
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(z-1)(x-y)+(z-1)(z+1)=0\Leftrightarrow(z-1)(x-y+z+1)=0\Leftrightarrow z=1\ \text{ή}\ x-y+z+1=0.$$

Αν $z=1$, τότε από την (1) προκύπτει η ισότητα $x=-y$, ενώ από την τρίτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε $2y^3=-2\Leftrightarrow y=-1$. Άρα έχουμε την τριάδα $(x,y,z)=(1,-1,1)$, που εύκολα επαληθεύουμε ότι είναι λύση του συστήματος.

Αν $x-y+z+1=0$, τότε $z=-x+y-1$, από την οποία με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $x=-1$. Τότε $z=-(-1)+y-1 \Rightarrow z=y$, οπότε η τρίτη εξίσωση δίνει: $2y^3=-2 \Leftrightarrow y=-1$. Άρα έχουμε την τριάδα $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$, που εύκολα επαληθεύουμε ότι είναι λύση του συστήματος.

Γ39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}}=2\hat{\mathrm{B}}$. Θεωρούμε σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Delta}$ και $\Gamma\Delta=\mathrm{A}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $\hat{\Gamma}=3\cdot\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$. (*Κροατία 2018*)

Λύση



Σχήμα 1

Από τις υποθέσεις $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Delta}$ και $\Gamma\Delta=\mathrm{A}\Gamma$ παρατηρούμε ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής δύο γεωμετρικών τόπων, της μεσοκάθετης ε της πλευράς ΑΒ και του κύκλου $c(\Gamma,\mathrm{A}\Gamma)$. Έστω $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\omega$ και έστω ότι η μεσοκάθετη της ΑΒ τέμνει την πλευρά ΓΒ στο σημείο Ε. Τότε $\mathrm{EA}=\mathrm{EB}$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{B}}=\omega$. Επειδή $\hat{\mathrm{A}}=2\hat{\mathrm{B}}$ έπεται ότι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{A}}-\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=2\omega-\omega=\omega$.

Έστω ότι η ευθεία ΑΕ τέμνει τον κύκλο $c(\Gamma,\mathrm{A}\Gamma)$ στο σημείο Ζ. Τότε $\Gamma\mathrm{Z}=\Gamma\mathrm{A}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\omega=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$. Επομένως $\Gamma\mathrm{Z}\parallel\mathrm{AB}$, γιατί τεμνόμενες από τη ΑΖ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Τότε όμως και $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{B}}=\omega$, οπότε $\mathrm{E}\Gamma=\mathrm{EZ}$. Παρατηρούμε ότι η μεσοκάθετη ε της ΑΒ περιέχει ένα σημείο που ισαπέχει από τα άκρα της ΓΖ και επιπλέον είναι κάθετη προς αυτήν. Επομένως η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη και της ΓΖ, οπότε $\Delta\Gamma=\Delta\mathrm{Z}$ και αφού $\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{Z}$, έπεται ότι το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισόπλευρο. Άρα έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}=60^0-\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=60^0-\omega. \qquad (1)$$

Όμως έχουμε ότι: $$\hat{\Gamma}=180^0-\hat{\mathrm{A}}-\hat{\mathrm{B}}=180^0-2\omega-\omega=180^0-3\omega=3\cdot(60^0-\omega) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\hat{\Gamma}=3\cdot\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$.

Σημείωση: *Στην άσκηση δίνεται ότι το σημείο Δ είναι εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και όταν το σημείο Δ είναι το μέσον της πλευράς ΑΒ ή όταν βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ.*

Ασκήσεις για λύση

Α58. Αν x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}\geq 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Α59. Αν x,y,z,a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x+y+z=a+b+c$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>2.$

Γ40. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{\mathrm{A}}=90^0$ και $\mathrm{AB}=\sqrt{2}\cdot\mathrm{A}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι του ΑΜ και ΓΝ τέμνονται κάθετα.

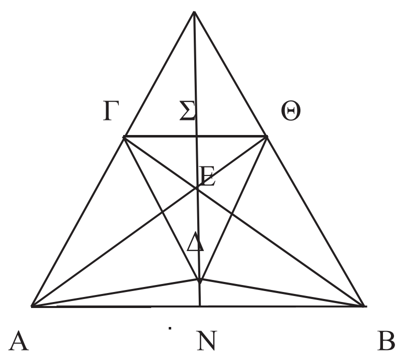
Γ41. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^0$ και $AB = 24$, $B\Gamma = 26$. Μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ εγγράφουμε ημικύκλιο που έχει τη διάμετρό του πάνω στη ΑΒ, περιέχει το σημείο Α και εφάπτεται της ΒΓ. Βρείτε το μήκος της ακτίνας του ημικυκλίου.

Προτεινόμενη λύση άσκησης ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄112 τ.4/40 Κροατία 2018

Χριστίνα Σπίγγου – Μαθηματικός Β΄ Γυμνάσιο Κέρκυρας

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε γωνία Α= 2γωνΒ. Θεωρούμε σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε

ΑΔ=ΒΔ και ΓΔ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι γων Γ=3γων.ΔΓΒ.



Κατασκευάζω την μεσοκάθετο του ευθ.τμημ.ΑΒ η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Ε ,την ΑΒ στο Ν και την προέκταση της ΑΓ στο Κ.Επίσης ονομάζω γων Α τη γωνία ΓΑΒ,γωνΒ τη γωνία ΓΒΑ και γωνία Γ τη γωνία ΑΓΒ(όλες γωνίες του τριγ.ΑΒΓ)

Τότε ΑΔ=ΒΔ,γωνΔΑΝ=γωνΔΒΝ,ΑΕ=ΕΒ,γωνΕΑΒ=γωνΕΒΑ άρα ΑΕ διχοτόμος της γων.ΓΑΒ.Επίσης τριγ.ΓΑΒ=τριγ.ΘΑΒ

διότι ΑΒ κοινή, γων ΓΑΒ=γων.ΘΒΑ=2γωνΒ (τριγ.ΚΑΒ ισοσκελές αφού ΚΝ μεσοκάθετος του ΑΒ) και γων.ΘΑΒ=γων.ΓΒΑ=γωνΒ.Άρα ΑΓ=ΘΒ=ΓΔ (ΑΓ=ΓΔ από υπόθεση) και ΓΒ=ΑΘ. Επίσης ΚΣ διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΚΓΘ(ΚΓ=ΑΚ–ΑΓ και ΚΘ=ΚΒ–ΒΘ) άρα και ύψος οπότε ΓΘ∥ΑΒ(κάθετες και οι δύο στην ΚΝ). Τότε τριγ.ΑΓΘ ισοσκελές (γων ΓΑΘ=γωνΘΑΝ=γωνΒ και γωνΘΑΝ=γωνΓΘΑ ως εντός εναλλάξ). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

τριγ.ΘΑΒ ισοσκελές άρα ΑΓ=ΓΘ=ΘΒ.Όμως και τριγ.ΓΑΔ=τριγ.ΘΒΔ(ΑΓ=ΒΘ,ΑΔ=ΒΔ και γωνΓΑΔ=2γωνΒ–γωνΔΑΝ και

γωνΘΒΔ=2γωνΒ–γωνΔΒΝ και γων ΔΑΝ=γωνΔΒΝ αφού τριγ.ΔΑΒ ισοσκελές)

άρα ΓΑ=ΓΔ=ΘΔ=ΘΒ, οπότε τριγ. ΔΓΘ ισόπλευρο. Τότε γωνΔΓΒ=60^0–γων ΒΓΘ=60^0–γων.Β, αλλά οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ έχουν άθροισμα 180^0 και

Α=2Β οπότε Γ=180^0–3Β=3(60^0–Β)=3γων.ΔΓΒ.

Η απόδειξη του μικρού Gauss για το άθροισμα 1+2+3+...+100 με σφαιρίδια

2ο Γυμνάσιο Φλώρινας

Το πρόβλημα μας

Το πρόβλημα που μας απασχόλησε είναι αυτό που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου. Η ιστορία λέει πως στο δημοτικό σχολείο στα τέλη του 1700, ο Γκάους κλήθηκε να βρει το άθροισμα των αριθμών από το 1 έως το 100. Η ερώτηση ανατέθηκε από τον δάσκαλο ως "πολυάσχολη εργασία", αλλά ο Γκάους βρήκε την απάντηση, μάλλον γρήγορα, ανακαλύπτοντας ένα πρότυπο. Οι μαθητές έπρεπε μόλις απαντήσουν στο ερώτημα να σηκωθούν και να αφήσουν την πλάκα τους στο γραφείο του δασκάλου[1]. Ο δάσκαλος εκνευρίστηκε όταν σε λίγα δευτερόλεπτα είδε τον Γκάους να σηκώνεται με την πλάκα του και να κατευθύνεται στο γραφείο του, θεωρώντας ότι η βιασύνη του θα τον είχε οδηγήσει προφανώς σε εσφαλμένο αποτέλεσμα. Έμεινε έκπληκτος όταν είδε στην πλάκα γραμμένη τη σωστή απάντηση 5050, χωρίς μάλιστα να υπάρχουν οι ανάλογες προσθέσεις.

Ο J. Rotman πιστεύει ότι αυτό το περιστατικό δεν συνέβη ποτέ[2], όπως γράφει στο βιβλίο του, με τίτλο: «A first coursein Abstract Algebra».

Ποιος ήταν ο Gauss

Ο Γιόχαν Καρλ Φρίντριχ Γκάους (Johann Carl Friedrich Gauß, 30 Απριλίου1777 – 23 Φεβρουαρίου1855) ήταν Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σε πολλά ερευνητικά πεδία της επιστήμης του, όπως η θεωρία αριθμών, η στατιστική, η μαθηματική ανάλυση, η διαφορική γεωμετρία, αλλά και συναφών επιστημών, όπως η γεωδαισία, η αστρονομία και η φυσική. Αποκλήθηκε «ο πρίγκηψ των μαθηματικών» και ο «μεγαλύτερος μαθηματικός μετά τον Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη». Ο Γκάους υπήρξε ίσως ο σημαντικότερος Γερμανός μαθηματικός όλων των εποχών και ένας από τους δύο ή τρεις σπουδαιότερους μαθηματικούς των νεότερων χρόνων (μετά την αρχαιότητα)[3].

Εικόνα 1 Προσωπογραφία του Γκάους από τον καλλιτέχνη Christian Albrecht Jensen.[4]

[1] http://eisatopon.blogspot.com/2010/12/10-gauss.html
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
[3] WaldoDunnington: "TheSesquicentennialoftheBirthofGauss", ScientificMonthly, τόμος 24, σ. 402-414
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Το «παιδί θαύμα»

Ο Γκάους ήταν αυτό που αποκαλείται «παιδί θαύμα» και υπάρχουν αρκετές ιστορίες για τις εκπληκτικές του ικανότητες ως νηπίου, ενώ οι πρώτες μεγάλες μαθηματικές ανακαλύψεις του χρονολογούνται από την εποχή της εφηβείας του. Ο Gauss γεννήθηκε στο Μπράουνσβαϊκ (Braunschweig), στο τότε δουκάτο Brunswick-Lüneburg και σήμερα μέρος της Κάτω Σαξονίας, στη Γερμανία. Οι γονείς του ήταν φτωχοί εργάτες και δεν είχαν άλλα παιδιά. Οι ιστορίες για την πρώιμη ιδιοφυΐα του ως μικρό παιδί είναι όλες αναπόδεικτες[5]. Σύμφωνα με μία, το ταλέντο του πρωτοεμφανίσθηκε σε ηλικία μόλις τριών ετών, όταν διόρθωσε χωρίς χαρτί και μολύβι, ένα λάθος που είχε κάνει ο πατέρας του στο χαρτί ενώ έκανε υπολογισμούς για τα οικονομικά της οικογένειας. Μια μέρα, ο πατέρας του συνέθεσε μερικά χαρτιά, σχετικά με τα οικογενειακά οικονομικά. Ο νεαρός Γκάους, κοιτάζοντας πάνω στο έργο του πατέρα του, επεσήμανε ένα αριθμητικό λάθος - το οποίο είχε ελέγξει νοερά.

Εικόνα 2 Ο Γκάους σε γραμματόσημο[6]

Παρά τις ικανότητες που ο Γκάους είχε μέχρι τότε επιδείξει, ο πατέρας του τον προέτρεπε να ακολουθήσει το δικό του επάγγελμα και να γίνει χτίστης ξύλινων σπιτιών. Δεν συμφωνούσε να μάθει ο Καρλ μαθηματικά και επιστήμες. Σε αυτή την προσπάθεια, ο Γκάους είχε κυρίως την υποστήριξη της μητέρας του και μετά του Δούκα του Brunswick-Lüneburg, που του έδωσε υποτροφία για να σπουδάσει στο Collegium Carolinum (το σημερινό Πολυτεχνείο του Μπράουνσβαϊκ), όπως και έγινε, από το 1792 έως το 1795.

Εικόνα 3 Ο Γκάους σε γερμανικό χαρτονόμισμα[7]

Τι σκέφτηκε ο μικρός Gauss

Το άθροισμα των 100 αριθμών γράφεται:

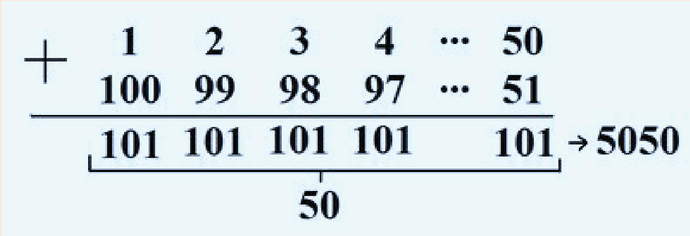
$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Ο Γκάους αντιλήφθηκε ότι η πρόσθεση κατά ζεύγη (δες εικ. 4 και εικ. 5) από τις δύο άκρες αυτής της σειράς των αριθμών έδινε πάντα το ίδιο άθροισμα: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, κ.ο.κ., δηλαδή:

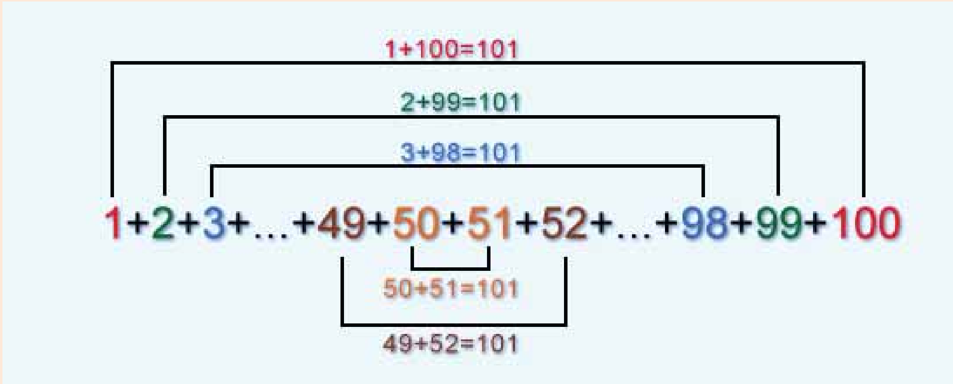
$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots\ldots = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots (50 \text{ προσθετέοι}) .$$

Άρα το άθροισμα είναι $101\times50 = 5050$.

[5] http://mathematiciancfgauss.blogspot.com/2016/
[6] http://users.wfu.edu/kuz/Stamps/Gauss/Gauss.html
[7] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Gauss.html



Εικόνα 4 Τα 50 ζευγάρια των αριθμών.

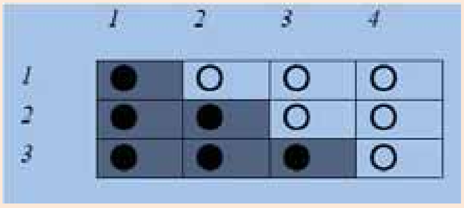


Εικόνα 5 Το άθροισμα 1 + 2 + 3 + ……..+ 97 + 98 + 99 + 100 σχηματικά

Αναζήτηση μιας άλλης λύσης

Θέσαμε το ερώτημα αν υπάρχει μια άλλη λύση στο πρόβλημα που να ακολουθεί έναν άλλο δρόμο από αυτόν του Γκάους και σκεφτήκαμε πιθανούς τρόπους που θα μπορούσαν να μας οδηγήσουν στην λύση αυτή.

Με τη βοήθεια της καθηγήτριάς μας φτιάξαμε ένα πίνακα σαν αυτόν της εικόνας 6 με τρεις γραμμές και τέσσερις στήλες εμπνεόμενοι από το βιβλίο του Roger B.Nelsen «Proofs without words»[8], στο οποίο μπορούμε να βρούμε μαθηματικές αποδείξεις χωρίς λόγια από την αρχαία Κίνα, Ελλάδα και Ινδία.



Εικόνα 6 **Πίνακας 3Χ4**

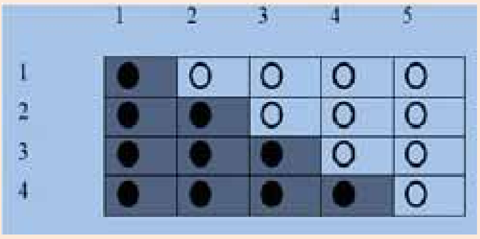
Παρατηρήσαμε ότι τα μαύρα σφαιρίδια είναι όσα και τα λευκά. Το σύνολο όλων των σφαιριδίων του πίνακα ήταν 3Χ4=12 σφαιρίδια, άρα το άθροισμα των μαύρων σφαιριδίων ήταν (δες και τον πίνακα 1): 1+2+3=6

Σύνολο σφαιρών	Άθροισμα μαύρων σφαιριδίων	Υπολογισμός
3Χ4=12	1+2+3	$1+2+3=\frac{3\times4}{2}=6$

Πίνακας 1 Υπολογισμός του αθροίσματος 1+2+3

Κάναμε την ίδια εργασία αυξάνοντας τον πίνακα 3Χ4, κατά μία γραμμή και μία στήλη, δημιουργώντας έναν νέο πίνακα τεσσάρων γραμμών και πέντε στηλών, σαν αυτόν της εικόνας 7.

[8] «Proofs without words», Roger B.Nelsen, MAA, 1993.



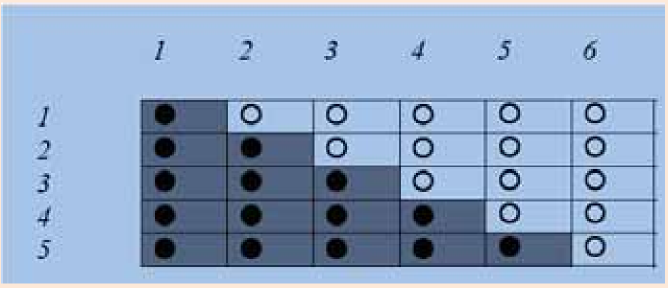
Εικόνα 7 Πίνακας 4Χ5

Καταλήξαμε ότι (δες και πίνακα 2): $1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2}=10$

Σύνολο σφαιρών	Άθροισμα μαύρων σφαιριδίων	Υπολογισμός
4Χ5=20	1+2+3+4	$1+2+3+4=\frac{4\times 5}{2}=10$

Πίνακας 2 Υπολογισμός του αθροίσματος 1+2+3+4

Συνεχίσαμε να κατασκευάζουμε τέτοιους πίνακες, φτάνοντας σε έναν πίνακα με 5 γραμμές και 6 στήλες σαν αυτόν της εικόνας 8 και καταλήξαμε (δες και πίνακα 3): $1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}=15$



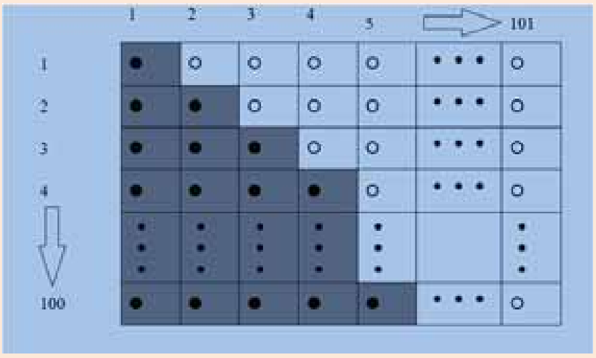
Εικόνα 8 Πίνακας 5Χ6

Σύνολο σφαιρών	Άθροισμα μαύρων σφαιριδίων	Υπολογισμός
5Χ6=30	1+2+3+4+5	$1+2+3+4+5=\frac{5\times 6}{2}=15$

Πίνακας 3Υπολογισμός του αθροίσματος 1+2+3+4+5

Μπορούμε συνεπώς τώρα να λύσουμε το πρόβλημα που απασχόλησε και τον Γκάους.

Ακολουθώντας τον ίδιο δρόμο φανταστήκαμε έναν πίνακα με 100 γραμμές και 101 στήλες σαν αυτόν της εικόνας 9. Στον πίνακα αυτόν οι τελίτσες που τοποθετήθηκαν, ‘κρύβουν’ τα μαύρα και λευκά σφαιρίδια που υπάρχουν, για λόγους συντομίας αλλά και γιατί είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο πίνακα.



Εικόνα 9 Πίνακας 100Χ101

Σύνολο σφαιρών	Άθροισμα μαύρων σφαιριδίων	Υπολογισμός
100Χ101=10100	1+2+3+4+5+…+100	1+2+3+4+…+99+100=$\frac{10100}{2}$=5050

Πίνακας 4 Υπολογισμός του αθροίσματος 1+2+3+4+…+99+100

Έτσι οδηγηθήκαμε στη λύση του προβλήματος που είναι (δες και πίνακα 4):

$$1+2+3+4+\ldots+99+100=\frac{10100}{2}=5050$$

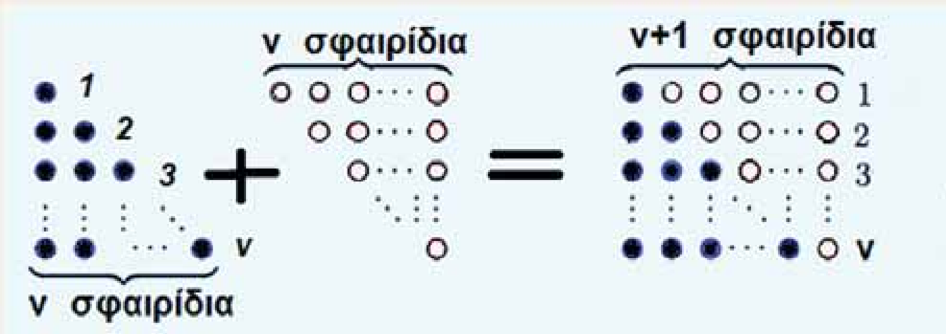
Ο πειρασμός να αλλάξουμε το πρόβλημα

Αναρωτηθήκαμε τι θα κάναμε εάν μας ζητούσαν να βρούμε το άθροισμα

1+2+3+4+…+200 ή το άθροισμα 1+2+3+4+…+1000

Σκεφτήκαμε ότι μπορούμε να ‘βαπτίσουμε’ τον τελευταίο αριθμό ν, δηλαδή στη θέση του 200 ή του 1000 να βάλουμε ένα γράμμα που να αντιπροσωπεύει έναν τυχαίο ακέραιο.

Τότε πάλι θα δημιουργούσαμε έναν πίνακα με ν γραμμές και ν+1 στήλες, σαν αυτόν της εικόνας 10.



Εικόνα 10 Πίνακας με ν γραμμές και ν+1 στήλες.

Μπορούμε να συμπεράνουμε όπως παραπάνω ότι:

$$1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$$

Δηλαδή εάν στη θέση του ν βάλουμε τον αριθμό 1000 τότε το αποτέλεσμα του αθροίσματος1+2+3+4+…+1000 θα είναι: $1+2+3+4+\ldots+999+1000=\frac{1000\cdot1001}{2}=1000500$

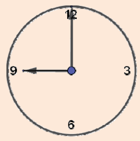
Την εργασία αυτή υλοποίησαν οι μαθήτριες: Χαλίδη Κλεονίκη και Πετκάνη Δέσποινα με την επίβλεψη της κ. Ευαγγελίας Καμπράνη Μαθηματικού ΠΕ03

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Μαρία Ρουσούλη

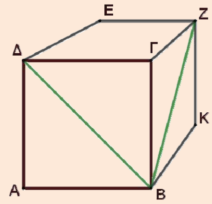
ΜΔ1. Αν σε 40 sec διανύεις 1 km, με τι ταχύτητα οδηγείς;

ΜΔ2. Αν ο δείκτης των ωρών ενός ρολογιού έχει μήκος 6 cm και των λεπτών 8 cm, να βρείτε την απόσταση των άκρων τους στις 9:00 .



ΜΔ3. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ενός τριψήφιου και του αντεστραμμένου του, διαιρείται πάντα με το 99. π.χ. αν ο αριθμός είναι ο 714 ο αντεστραμμένος του είναι ο 417, τότε 714-417=297=$3\cdot 99$

ΜΔ4. Στον διπλανό κύβο να υπολογιστεί η γωνία των διαγωνίων ΔΒ και ΒΖ .



ΜΔ5. Η Μαιρούλα κάλεσε τις φίλες της για να δοκιμάζουν την τούρτα που έφτιαξε μόνη της. Στο δωμάτιό της έχει σκαμπό με 3 πόδια και καρεκλίτσες με 4 πόδια. Τα κορίτσια ήταν όσα και τα καθίσματα. Όταν κάθισαν όλες, τα πόδια στο δωμάτιο ήταν 33. Πόσες ήταν οι φίλες της Μαιρούλας;

ΜΔ6. Λύστε το σταυρόλεξο μαυρίζοντας 6 τετράγωνα.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Οριζόντια

1. Η περίμετρος ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά α=15 ---- Η κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η υποτείνουσα είναι 20 και η άλλη κάθετη 12.
2. Τριψήφιος αριθμός μικρότερος του 300 που διαιρείται με το 5 και το 9.
3. Η αριθμητική τιμή της παράστασης $\alpha^3+3\alpha^2+50\alpha-6$ για α=7 .
4. Το 10πλάσιο του ΜΚΔ(38,57)
5. Το αποτέλεσμα των πράξεων

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 8-(-2)^3+\frac{3}{2}\right)\cdot 12$$

Κάθετα

1. Η γωνία κορυφής Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{B}=\hat{A}+27^\circ$ ---- Η λύση της εξίσωσης 6x-7=59
2. ΕΚΠ (12,16,22)
3. Το εμβαδόν ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου με μήκος 90μ και πλάτος 59μ.
4. $(-7)^2$
5. Το συνημίτονο αυτής της γωνίας (σε μοίρες) είναι $\frac{1}{2}$ ---- Ο αντίστροφος του $\frac{1}{20}$ αντίστροφα .

Απαντήσεις τεύχους 112

Όλες οι πράξεις

$(\alpha + \beta) + (\alpha\text{-}\beta) + (\alpha\cdot\beta) + \alpha/\beta = 100$

$2\alpha + \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} = 100$ ή $2\alpha\beta + \alpha.\beta^2 + \alpha = 100$

ή $\alpha(\beta^2+2\beta+1)=100$ και $\alpha(\beta + 1)^2 = 100$ εδώ ζητάμε το γινόμενο ενός αριθμού με ένα τέλειο τετράγωνο να είναι 100. Αυτό μπορεί να γίνει αν το τέλειο τετράγωνο $(\beta + 1)^2$ είναι ή 4, ή 25, ή 100, οπότε ο αριθμός α αντίστοιχα θα είναι 25, 4, 1. δηλαδή έχουμε 3 λύσεις (α =4,β = 4), (α = 25, β=1) και (α =1, β = 9).

Το σκονάκι της μαθήτριας

Αφού ξέρουμε ότι η Γιάννα λέει πάντα ψέματα συμπεραίνουμε ότι το σκονάκι είναι της Άννας ή της Ιωάννας. Η Ιωάννα όμως λέει πάντα αλήθεια και είπε ότι είναι της Άννας. Η Άννα δεν ομολόγησε γιατί καμιά φορά λέει ψεματάκια. Έτσι συμπέρανε ο καθηγητής ότι το σκονάκι είναι της Άννας.

Παράξενη πρόσθεση

Στο πρόβλημα από λάθος το ΕΠΤΑ έγινε ΕΦΤΑ στη δεύτερη περίπτωση το άθροισμα έπρεπε να δοθεί 55877 και οι αριθμοί θα ήταν 15095 και 5296. Αν το ΕΦΤΑ γραφεί ΕΠΤΑ τότε οι αριθμοί είναι 15075 και 5176. Το πρόβλημα είναι η εξίσωση 3.χ+2.Ψ=55577 που είναι Διοφαντική. Η σκέψη για τη λύση είναι ότι το Π δεν μπορεί να πάρει άλλη τιμή από το 1 και το Ε που είναι και ψηφίο μονάδων στα 3 πρώτα δεν μπορεί παρά να είναι 5. Οπότε εύκολα πλέον προσδιορίζονται τα άλλα γράμματα.

Ο Πολλαπλασιασμός

```
      4 1 5
X      3 8 2
------------------
        8 3 0
    3 3 2 0
  1 2 4 5
-------------------
  1 5 8 5 3 0
```

Ο κυρ Φάνης και το κρασί

Ο κυρ Φάνης για να δώσει:

1 λίτρο, γέμιζε το κανάτι των 4 λίτρων και το έριχνε στο άλλο δοχείο των 7 λίτρων, ξαναγέμιζε το 4λιτρο έριχνε στο άλλο κανάτι να γεμίσει και έτσι έμενε μέσα σε αυτό μόνο 1 λίτρο.
2 λίτρα, επαναλάμβανε την προηγούμενη διαδικασία.
3 λίτρα, γέμιζε το κανάτι των 7 λίτρων έριχνε στο άλλο τα 4 λίτρα να γεμίσει και του έμεναν στο κανάτι μόνο 3 λίτρα.
4 λίτρα, απλώς γέμιζε το μικρό κανάτι.
5 λίτρα, έβαζε 4 λίτρα και 1 όπως στην πρώτη περίπτωση.
6 λίτρα, 4 λίτρα και 2 λίτρα όπως παραπάνω.
7 λίτρα, απλώς γέμιζε το μεγάλο κανάτι.
8 λίτρα, 7 λίτρα και 1 λίτρο όπως παραπάνω.
9 λίτρα, 7 λίτρα και 2 λίτρα όπως παραπάνω.
10 λίτρα 7 λίτρα και 3 λίτρα όπως παραπάνω.
Επομένως με τον τρόπο αυτό μπορεί να δώσει ακριβώς όποια ποσότητα του ζητήσουν.

Ο έλεγχος προόδου

Αναλύουμε τον 7440 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και είναι: $31.2^4.5.3$ δηλαδή ο 31=15+16, ο 2^4=16 και 5.3=15 . Άρα 7440=(15+16).(16.15). Οι βαθμοί του Πέτρου στα μαθηματικά είναι 15 και 16.

ΝΕΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
Μαθηματικών Ικανοτήτων
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

15 **Φεβρουαρίου** 2020

Τα τελευταία 80 χρόνια τους μεγαλύτερους και εγκυρότερους διαγωνισμούς για τα Μαθηματικά, στην Ελλάδα, διεξάγει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ). Μέχρι τώρα, το κοινό τους ήταν οι μαθητές που διακρίνονται στα Μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης) ή που βλέπουν τα Μαθηματικά και ως παιχνίδι (διαγωνισμός Δημοτικού) με στόχο να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές **τη μαθηματική σκέψη** σε ευχάριστα και έξυπνα προβλήματα.

Η ΕΜΕ αναγνωρίζοντας την ανάγκη να δοθεί **η ευκαιρία σε όλα τα παιδιά**, ανεξαρτήτως επίδοσης ή μαθησιακού προσανατολισμού, αποφάσισε, **με αφορμή τα** 100 **χρόνια από την ίδρυσή της**, **τη δημιουργία ενός νέου διαγωνισμού με το όνομα ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ**.

Οι στόχοι του νέου διαγωνισμού:

- Να αναπτύξουν οι μαθητές την **κριτική τους ικανότητα** και **σκέψη**
- Να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη **σημασία των Μαθηματικών** στην **καθημερινή πραγματικότητα**.

Ο διαγωνισμός αυτός δεν θα ελέγχει τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, των μαθητών αλλά **την ικανότητα να σκέφτονται** με εφόδιο τη Μαθηματική γνώση. Από την ανάλυση των απαντήσεων και τις επεξηγήσεις που θα δοθούν, ο μαθητής, θα αντιληφθεί όχι τόσο τι λάθος έκανε αλλά, γιατί το έκανε και πώς μπορεί **να αναπτύξει τις ικανότητές του** στο μέλλον.

Τα ερωτήματα του διαγωνισμού, στην πλειοψηφία τους, δεν θα είναι περίπλοκα ούτε θα απαιτούν υψηλό γνωστικό υπόβαθρο, αλλά εκείνο που είναι απαραίτητο να διαθέτει ο μαθητής με βάση την ηλικία του.

Θα υπάρχουν τρεις ομάδες θεμάτων, η 1^{η} ομάδα θα καλύπτει την Γ΄ και Δ΄ τάξη του Δημοτικού, η 2^{η} ομάδα θα καλύπτει την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού και η 3^{η} ομάδα τις δύο πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Κάθε διαγωνιζόμενος καλείται να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

*Μοναδική υποχρέωση των μαθητών που θα συμμετέχουν είναι **η ετήσια συνδρομή** στη νέα ειδική έκδοση της ΕΜΕ με τίτλο περιοδικού **ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ** (κόστος 10 ευρώ).*

Τα θέματα θα επιλέγονται από την **επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ και Ολυμπιάδων**, η οποία έχει πολυετή πείρα σε θεματοδότηση Μαθηματικών διαγωνισμών και θα είναι επικεντρωμένα στην Ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα.

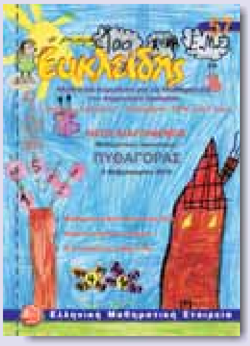
Κάθε μαθητής θα λαμβάνει **ατομικό φάκελο** με χρήσιμο, βοηθητικό υλικό και βεβαίωση συμμετοχής στο διαγωνισμό.

Περισσότερες πληροφορίες στην ιστοσελίδα της ΕΜΕ:..............

Δήλωση συμμετοχής από 1 ***Νοεμβρίου*** 2019

Η μαθηματική σκέψη μπορεί να γίνει κτήμα όλων των μαθητών

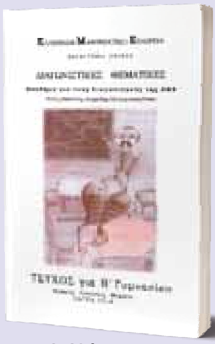
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας



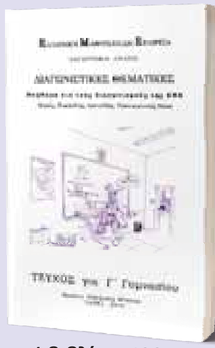
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€

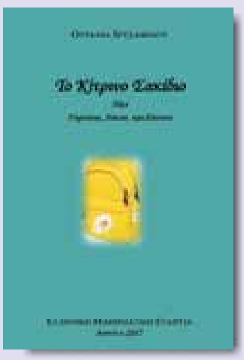


Τιμή βιβλίου: 12€



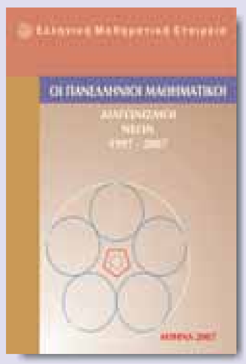
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€



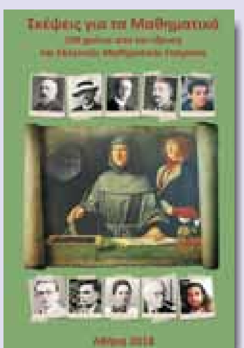
Τιμή βιβλίου: 18€

Τιμή βιβλίου: 30€



Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr