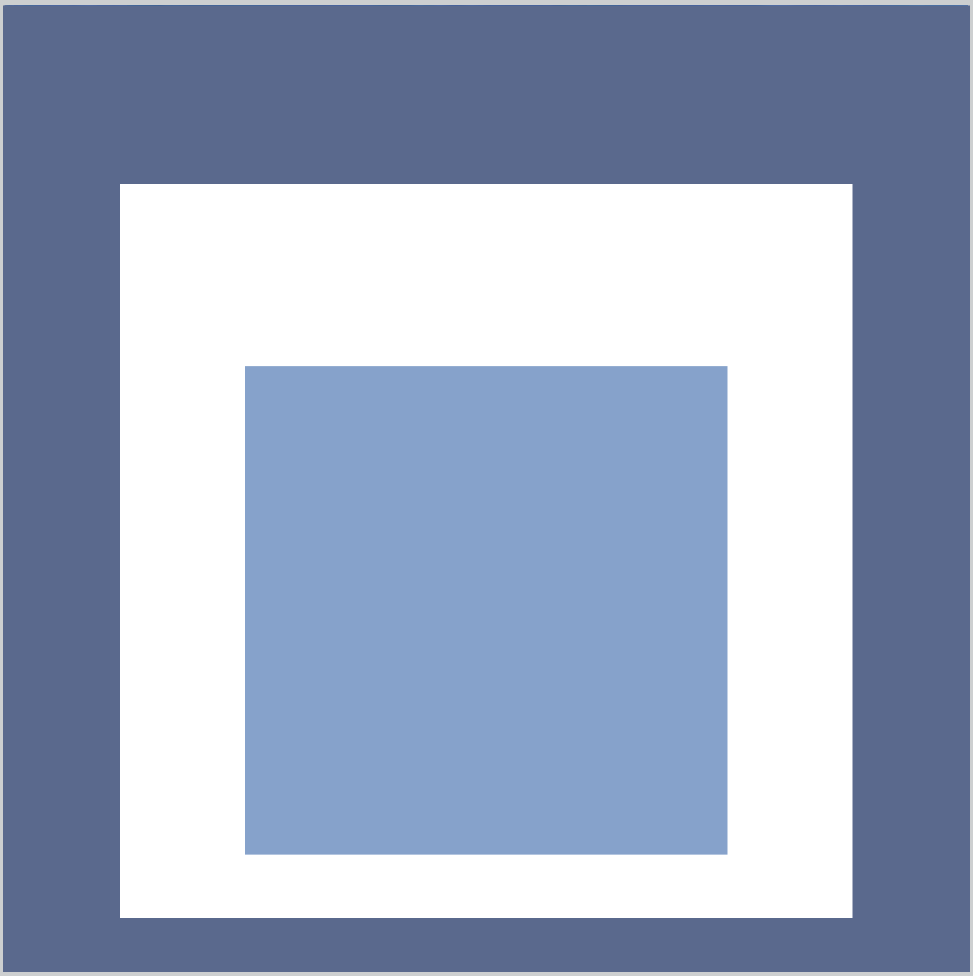
Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

116

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00



Josef Albers, (1888 - 1976)

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο

Ευκλείδης α΄

Τεύχος 116

Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2020

Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος
Κυριακοπούλου Αθανασία
Παλαιογιαννίδης Δημήτριος
Τριανταφύλλου Ανδρέας

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές:
Κεΐσογλου Στέφανος
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Φερεντίνος Σπυρίδων

Συντακτική Επιτροπή:
Αρδαβάνη Πόπη
Διαμαντίδης Δημήτριος
Δοργιάκη Ιωάννα
Κυριακοπούλου Αθανασία
Λαγός Γεώργιος
Λυμπερόπουλος Γεώργιος
Μάλλιαρης Χρήστος
Νικολόπουλος Ιωάννης
Παλαιογιαννίδης Δημήτριος
Παπαδάκη Άννα
Παπαϊωάννου Δημήτριος
Σίσκου Μαρία
Τζίφας Νικόλαος
Τσικοπούλου Στάμη
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Αποκεντρωμένοι συνεργάτες
Γεωργιάδου-Καμπουρίδη
Βαρβάρα
Ζιώγας Χρήστος
Κωστοπούλου Καλλιόπη
Παπαδάκη Μαλβίνα
Ρίζος Ιωάννης
Ρουσούλη Μαρία

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί/ές αναγνώστες/ αναγνώστριες.Αγαπητοί / ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Αρχικά ευχόμαστε σε όλες και όλους υγεία και ομαλή μετάβαση στην κανονικότητα μετά την δοκιμασία της πανδημίας .

Στο τεύχος αυτό θα βρείτε μία μεγάλη ποικιλία από επαναληπτικά θέματα Μαθηματικών αφού είναι το τελευταίο τεύχος της εφετινής σχολικής χρονιάς. Όμως δεν λείπουν και θέματα γενικού ενδιαφέροντος τα οποία πάντα περιλαμβάνει κάθε τεύχος του περιοδικού.

Καθώς υπήρχε μεγάλη προσφορά υλικού από τους συναδέλφους, έχουμε κρατήσει το κείμενο με τις δραστηριότητες σχολείων για το επόμενο τεύχος.

Ευχόμαστε να περάσετε ένα ευχάριστο και καλοκαίρι.
Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού
Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Προύσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Μαθηματικά και Ζωγραφική

Φώτης Κουνάδης

«-Μπαμπά, το τρένο καθώς φεύγει μικραίνει για να χωράει στις γραμμές; Και οι άνθρωποι που είναι μέσα μικραίνουν και αυτοί;» Είναι ερωτήσεις που έχουμε αντιμετωπίσει κατά καιρούς από μικρά παιδιά ή έχουμε οι ίδιοι κάποτε κάνει αντικρίζοντας μια εικόνα σαν αυτή με τις γραμμές του τρένου που βλέπουμε στην εικόνα δεξιά.

Έτσι δεν είναι;

Και στην ζωγραφιά που βλέπουμε αριστερά τα δέντρα πραγματικά μικραίνουν όσο το βλέμμα μας απομακρύνεται από το σημείο από το οποίο παρατηρούμε το περιβάλλον; Υπάρχει σχέση σε αυτό που βλέπουμε στις δύο εικόνες;

Και ποια σχέση έχουν αυτά με τα μαθηματικά; Στο κείμενο που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε να ρίξουμε μία σύντομη ματιά στη σχέση που συνδέει τα Μαθηματικά με την Ζωγραφική. Καθώς το θέμα είναι ιδιαίτερα σύνθετο θα εστιάσουμε σε μία σημαντική πτυχή αυτής της σχέσης, την προοπτική. Πρώτα από όλα, όμως, πρέπει να δούμε τι εννοούμε με τον όρο προοπτική.

Προοπτική είναι η τέχνη να παριστάνουμε τον χώρο των πραγμάτων και των προσώπων ενός πίνακα όπως φαίνεται και όχι όπως είναι. Δηλαδή να δημιουργούμε την ψευδαίσθηση ότι, όσο απομακρύνονται από τα μάτια μας τα αντικείμενα, τόσο τα βλέπουμε να μικραίνουν, ενώ, ταυτόχρονα, παράλληλες ευθείες φαίνεται να συγκλίνουν σε κάποιο σημείο του ορίζοντα που ονομάζεται ***σημείο φυγής***.

Παρατηρήστε την εικόνα των γραμμών του τρένου. Διακρίνονται καθαρά, στο βάθος, η γραμμή του ορίζοντα και το σημείο φυγής. Παρατηρώντας την πιο προσεκτικά αντιλαμβανόμαστε ότι μας φανερώνει, με μεγάλη αμεσότητα, τους βασικούς νόμους-κανόνες της προοπτικής:

- Οι παράλληλες στη πραγματικότητα ράγες που, όμως, στην εικόνα συγκλίνουν, πράγμα που ισχύει για όλες τις ευθείες που είναι κάθετες στο επίπεδο της εικόνας.
- Οι παράλληλες μεταξύ τους οριζόντιες γραμμές των λευκών στηριγμάτων που σταθεροποιούν τις ράγες παραμένουν και στην εικόνα παράλληλες με την διαφορά ότι οι αποστάσεις μεταξύ τους, που στην πραγματικότητα είναι σταθερές, στην εικόνα μειώνονται όσο πλησιάζουμε προς το σημείο φυγής.
- Οι κάθετες που παραμένουν κάθετες.

«Θέλω το ζωγράφο να έχει σπουδάσει τις ελεύθερες τέχνες, μα πάνω απ' όλα τον θέλω να γνωρίζει γεωμετρία. Συμφωνώ με τον αρχαίο ζωγράφο Πάμφιλο, που δίδασκε ζωγραφική στους νέους και συνήθιζε να λέει πως κανένας δεν μπορούσε να γίνει καλός ζωγράφος χωρίς να ξέρει γεωμετρία. Οι αρχές που αναπτύξαμε και αποτελούν τα θεμέλια μιας ολοκληρωμένης ζωγραφικής παιδείας μπορούν να κατανοηθούν εύκολα από ένα γεωμέτρη · αντίθετα, όσοι είναι ανίδεοι στη γεωμετρία δεν μπορούν να καταλάβουν ούτε τις στοιχειώδεις γνώσεις ούτε οποιεσδήποτε άλλες αρχές της ζωγραφικής».

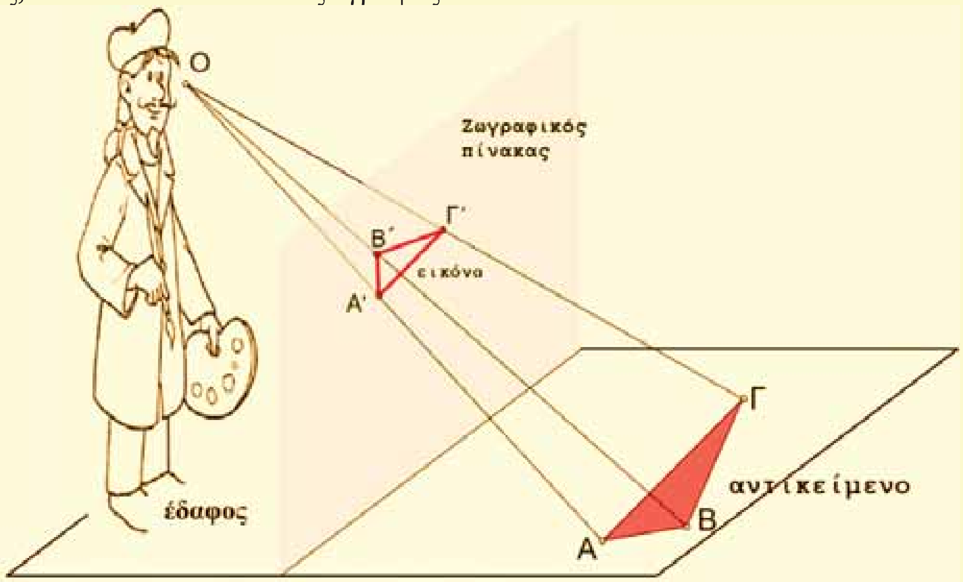
Απόσπασμα από το 3ο βιβλίο Περί ζωγραφικής του Λέον Μπατίστα Αλμπέρτι.

«Αυτοί που επιμένουν να ζωγραφίζουν πρακτικά χωρίς επιστήμη, μοιάζουν με κυβερνήτες που ταξιδεύουν χωρίς πηδάλιο και χωρίς πυξίδα».

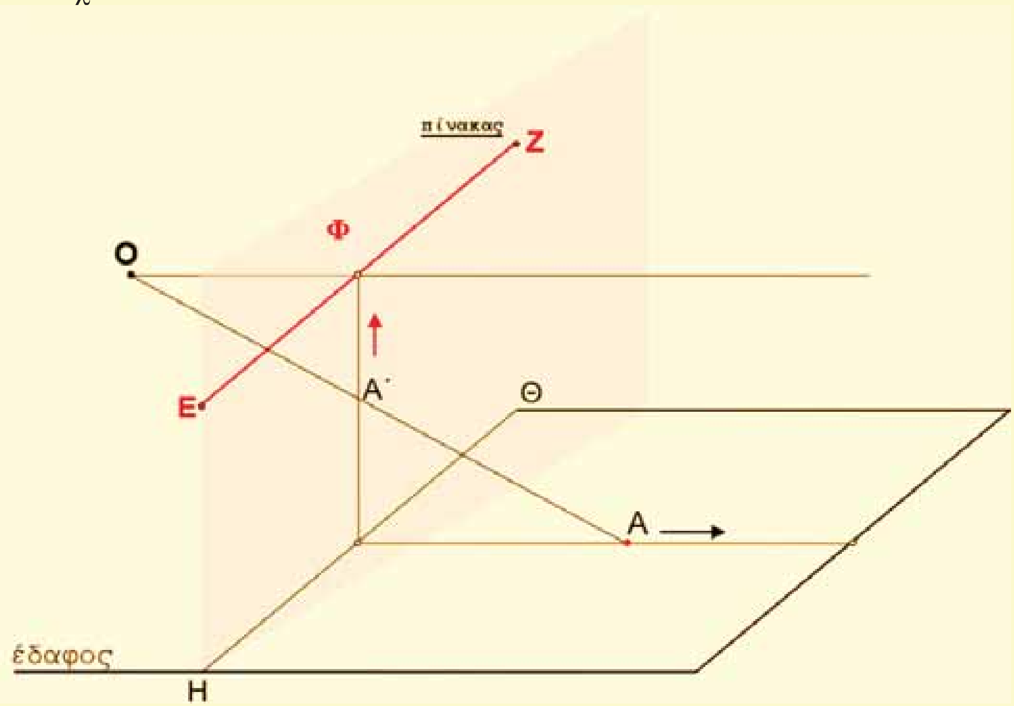
Λεονάρντο Ντα Βίντσι .

Και ποια σχέση έχουν όλα αυτά με τα μαθηματικά, και ειδικότερα με την γεωμετρία; Έχει σχέση η ζωγραφική με τα μαθηματικά; Μπορεί ο ζωγράφος να αγνοεί τις βασικές γνώσεις της γεωμετρίας; Είναι ερωτήσεις που έχουν τεθεί κατά καιρούς από πλήθος ανθρώπων που ασχολήθηκαν ή ασχολούνται με τις απεικονιστικές τέχνες. Ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι και ο Λέον Μπαττίστα Αλμπέρτι έχουν διατυπώσει με σαφήνεια την απάντησή τους στο ερώτημα.

Ας δούμε, λοιπόν, πρώτα, με ποιον τρόπο αποτυπώνονται οι εικόνες στο ζωγραφικό πίνακα. Έτσι θα έχουμε την ευκαιρία να ξαναδούμε τους κανόνες της προοπτικής με μια Μαθηματική προσέγγιση. Για ευκολία έχουμε υποθέσει ότι ο πίνακας είναι διαφανής και κάθετος στο επίπεδο του εδάφους, στο οποίο στέκεται ο ζωγράφος.

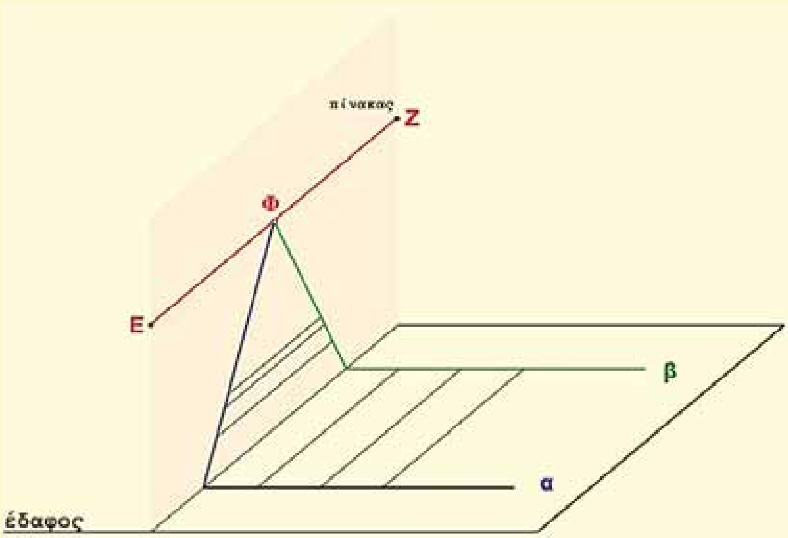


Η εικόνα του σημείου Α του εδάφους είναι το σημείο Α΄ που προκύπτει από την τομή της οπτικής ακτίνας ΟΑ (στο σημείο Ο βρίσκεται το ένα μάτι του ζωγράφου) με τον πίνακα. Το ίδιο συμβαίνει με κάθε άλλο σημείο του εδάφους και έτσι από το πραγματικό αντικείμενο ΑΒΓ προκύπτει το σχέδιο Α΄Β΄Γ΄ στο πίνακα.



Το νοητό επίπεδο που είναι παράλληλο στο έδαφος και βρίσκεται στο ύψος του ματιού του ζωγράφου τέμνει την επιφάνεια του πίνακα στη νοητή γραμμή ΕΖ που ονομάζεται ***ορίζοντας***.

Στη γραμμή του ορίζοντα υπάρχουν τα σημεία του πίνακα που βρίσκονται σε εξαιρετικά μεγάλη απόσταση (άπειρη) από εμάς. Στο μέσο της ΕΖ βρίσκεται το **σημείο φυγής** Φ.



Οι ευθείες του εδάφους α και β στην πραγματικότητα είναι παράλληλες. Όταν αποτυπώνονται όμως στον πίνακα δεν διατηρούν την σταθερή τους απόσταση αλλά συγκλίνουν και, τελικά, συναντώνται πάνω στη γραμμή του ορίζοντα στο σημείο φυγής.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι οι παράλληλες ευθείες του εδάφους που είναι κάθετες στις ευθείες α και β και ισαπέχουν μεταξύ τους, όταν αποτυπωθούν στο πίνακα παραμένουν μεν παράλληλες αλλά η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται όσο πλησιάζουμε προς τη γραμμή του ορίζοντα.

Αυτοί είναι οι πιο βασικοί τρόποι με τους οποίους μας δημιουργείται η αίσθηση του βάθους σε ένα ζωγραφικό πίνακα στην προσπάθειά μας να απεικονίσουμε την πραγματικότητα του τρισδιάστατου φυσικού χώρου σε έναν δυσδιάστατο επίπεδο πίνακα. Ακριβώς αυτό, η απεικόνιση δηλαδή της πραγματικότητας σε ένα πίνακα, είναι το πρόβλημα που έστρεψε στα Μαθηματικά τον ζωγράφο της Αναγέννησης.

Οι λόγοι για αυτή την στροφή είναι κυρίως τρεις. Πρώτα από όλα, η ζωγραφική είναι τομέας της τέχνης με πολλά νοήματα και χρήσεις που συχνά εστιάζει στην παρουσίαση του κόσμου και στην απόδοση της πραγματικότητας όσο πιο πιστά γίνεται. Οι καλλιτέχνες, πέρα από τα χρώματα, χρησιμοποιούν στοιχεία της γεωμετρίας όπως τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλους και πολύεδρα. Αξιοποιούν τις μαθηματικές αναλογίες που παρατηρούν και επιδιώκουν την αρμονία και τη χάρη στα έργα τους. Με το τρόπο αυτό ο ζωγράφος επιτυγχάνει, μέσα από τα μαθηματικά, την οργάνωση της εικόνας και την ακριβή περιγραφή των αντικειμένων.

Δεύτερον, η Αναγέννηση χαρακτηρίζεται από μία στροφή προς την σκέψη και την τέχνη των κλασσικών χρόνων. Ο άνθρωπος και ο χώρος γύρω από αυτόν αποτελούν πάλι το κεντρικό σημείο αναφοράς και ο καλλιτέχνης επιδιώκει μέσα από την αναβίωση του αρχαίου πνεύματος να εξασφαλίσει την ζητούμενη αρμονία στα έργα του. Για το σκοπό αυτό μελετά τους αρχαίους φιλόσοφους, και κυρίως τον Πλάτωνα. Όμως η αρχαία Ελληνική φιλοσοφία ήταν άρρηκτα συνδεδεμένη με τα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά αποτελούσαν την ουσία του πραγματικού κόσμου. Όπως λοιπόν και ο Έλληνας φιλόσοφος της αρχαιότητας έδινε απαντήσεις σε φιλοσοφικά ζητήματα με τη βοήθεια των Μαθηματικών, έτσι και ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης ερμήνευε την πραγματικότητα μέσα από τους κανόνες των Μαθηματικών και κυρίως της γεωμετρίας.

Τέλος, ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης ήταν συγχρόνως αρχιτέκτονας και μηχανικός, οπότε η γνώση των Μαθηματικών του ήταν απαραίτητη. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον Λεονάρντο Ντα Βίντσι: εκτός από ζωγράφος και γλύπτης, υπήρξε παράλληλα αρχιτέκτονας, μηχανικός, μαθηματικός και εφευρέτης. Ασχολήθηκε με τους νόμους του φωτός, τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, σχεδίασε ένα πλήθος μηχανών (ελικόπτερο, αεροπλάνο). Άρα ήταν άριστος γνώστης των Μαθηματικών.

Το απεικονιστικό σύστημα της γραμμικής προοπτικής αναπτύχθηκε στις αρχές του 15ου αιώνα μέσα στο μοναδικό πνευματικό και καλλιτεχνικό κλίμα της αναγεννησιακής Φλωρεντίας. Δύο είναι οι Φλωρεντινοί που χρεώνονται την «εφεύρεση» αυτή. Ο Φιλίπο Μπρουνελέσκι *(Filippo Brunelleschi,1377-1446)* και ο Λεόν Μπατίστα Αλμπέρτι *(Leon Battista Alberti, 1404-1472).*

Λεόν Μπατίστα Αλμπέρτι (1404-1472)

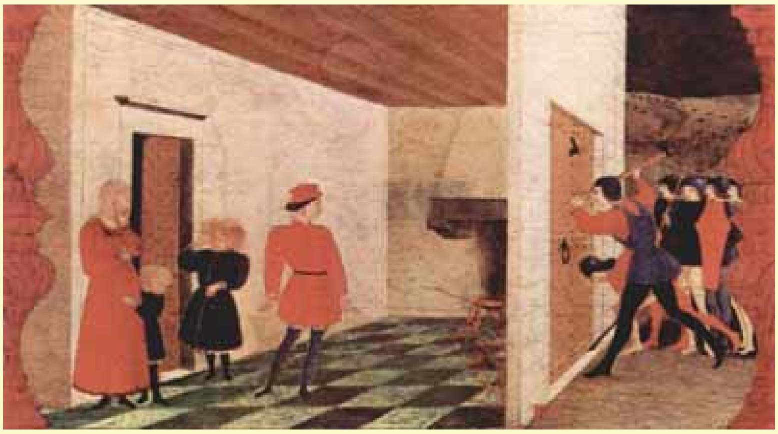
Ο Λεόν Μπατίστα Αλμπέρτι υπήρξε καλλιτέχνης, αρχιτέκτονας, αρχαιογνώστης και άνθρωπος του πνεύματος. Εισήγαγε μια απλή μέθοδο προοπτικής, χάρη στην οποία οι καλλιτέχνες μπορούσαν να αποδώσουν την αίσθηση του τρισδιάστατου χώρου και του βάθους στη δισδιάστατη επιφάνεια του πίνακα με γεωμετρική ακρίβεια.

Χαρακτηριστικός της μεθόδου του Αλμπέρτι είναι ο πίνακας «*Το θαύμα της βεβηλωμένης όστιας*» (*1467-1468*) του Πάολο Ουτσέλο (*Paolo Uccello, 1397-1475*) που είναι ένα πολύπτυχο και αποδίδει με ακρίβεια το σύστημα της προοπτικής του.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται το πρώτο μέρος του έργου. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε με ακρίβεια την μέθοδο. Αρχικά, μπορείτε να βρείτε το σημείο φυγής; Βρίσκεται στο μέσο περίπου του πίνακα στο ύψος του ματιού της γυναίκας. Είναι το σημείο στο οποίο συγκλίνουν όλες οι ευθείες που στην πραγματικότητα είναι οριζόντιες και κάθετες στο επίπεδο του πίνακα.

Παρατηρήστε επίσης ότι το ύψος της γυναίκας είναι ίσο με 3 πλακάκια από αυτά που βρίσκονται στη βάση του πίνακα (την *γραμμή του εδάφους*, την τομή δηλαδή του εδάφους με το επίπεδο του πίνακα) αλλά ότι η απόσταση του ματιού της από το έδαφος είναι ίση με 3 πλακάκια στο σημείο που πατάει. Οι αναλογίες στην εικόνα δημιουργούνται με μέτρο τα πλακάκια. Μετρώντας το μήκος οποιουδήποτε αντικειμένου της εικόνα σε πλακάκια στο σημείο στο οποίο αυτό βρίσκεται μπορούμε να βρούμε το πραγματικό του μήκος μετρώντας ίσο αριθμό από πλακάκια πάνω στην γραμμή εδάφους.

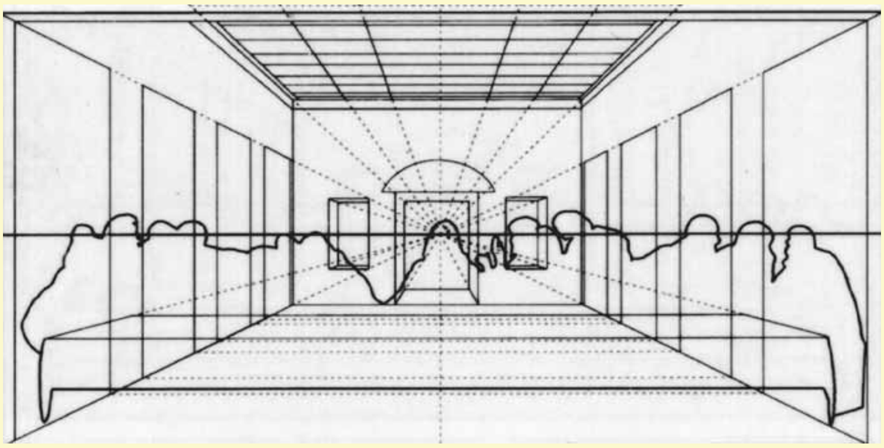
Στο δεύτερο μέρος του τρίπτυχου υπάρχει η παρακάτω δημιουργία του καλλιτέχνη.



Εδώ ο Ουτσέλο χρησιμοποιεί μεθοδολογικά και πάλι την τεχνική του Αλμπέρτι αλλά η προοπτική κατεύθυνση του χώρου δεν είναι κάθετη στο επίπεδο του πίνακα.

Ένας άλλος σημαντικός πίνακας στον οποίο ο ζωγράφος έχει αξιοποιήσει την τέχνη της προοπτικής είναι ‘‘Ο Μυστικός Δείπνος” του Λεονάρντο Ντα Βίντσι. *(περίπου το1497).* Ο πίνακας καταλαμβάνει τον βόρειο τοίχο της τραπεζαρίας της Μονής της Santa Maria Delle Grazie στο Μιλάνο.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί μπορούμε να δούμε την μέθοδο του Λεονάρντο για την δημιουργία της προοπτικής. Η τονισμένη οριζόντια γραμμή είναι ο ορίζοντας και από το σημείο φυγής (πίσω ακριβώς από το κεφάλι του Ιησού) ξεκινούν όλες οι (συγκλίνουσες) ευθείες γραμμές που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό του δωματίου.



Οι ευθείες που σχηματίζουν τα "πλακίδια" της οροφής του δωματίου, οι πόρτες που υπάρχουν στις πλευρές της αίθουσας, ακόμη και οι άκρες του τραπεζιού, όλα έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να εξυπηρετούν στη **δημιουργία της προοπτικής**, δηλαδή μιας ψευδαίσθησης **βάθους** (τρίτης διάστασης) στο έργο.

Ο Ιησούς έχει ζωγραφιστεί σε μεγαλύτερη κλίμακα από τους μαθητές. Οι περισσότεροι μαθητές είναι όρθιοι και συνωστίζονται γύρω Του δημιουργώντας την εντύπωση ενός κυματισμού.

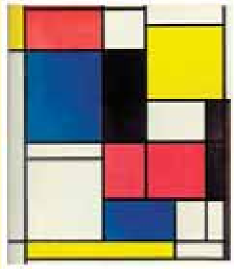
Βιβλιογραφία

1. *Περιοδικό ο Ευκλείδης Β’, τεύχος 36 – Απρίλιος-Μάιος-Ιούνιος 2000*
2. Σχολικό βιβλίο, Ιστορία της Τέχνης Γ Λυκείου.
3. Alison Cole , *Προοπτική , από τη σειρά Ανακαλύπτω την Τέχνη, εκδόσεις Δεληθανάσης-Ερευνητές.*
4. Σελ. 218, 220, *Μαθηματική εμπειρία*, P.J. Davis, R. Hersh, *Τροχαλία*

Ασκήσεις Γεωμετρίας με … STIJL

Μαρία Ρουσούλη, Γιώργος Καραφέρης

Σε βιβλία που ασχολούνται με τη Γεωμετρία παρουσιάζονται έργα καλλιτεχνών όπως των Josef Alberts, Wassily Kandinsky, Piet Mondrian κ.α. με γεωμετρικά μοτίβα. Το έργο του Piet Mondrian Πίνακας ΙΙ, λάδι σε καμβά (1921 – 1925), Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη, αποτέλεσε την έμπνευση για αυτή την εργασία, για ασκήσεις στα εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων. Προτείνουμε λοιπόν τέσσερις ασκήσεις πάνω σε πίνακες των Piet Mondrian και Theo van Doesbourg, αντιπροσώπων του Νεοπλαστικισμού, που είναι τάση του μοντέρνου κινήματος της Αφαίρεσης στη ζωγραφική.



Πίνακας ΙΙ

Η αφαίρεση στη ζωγραφική

Στη ζωγραφική όταν μιλάμε για **αφαίρεση**, εννοούμε την απομάκρυνση από τον αισθητό κόσμο και την αναπαράσταση του στη ζωγραφική επιφάνεια με γεωμετρικά σχήματα.

Τόσο ο Πλάτων όσο και ο Αριστοτέλης είχαν προφητέψει την ανεικονική τέχνη. Ο Πλάτων γράφει στον «Φίληβο»: « Όταν μιλώ για ομορφιά σχημάτων, δεν προσπαθώ να εκφράσω αυτό που θα καταλάβαιναν οι πολλοί βλέποντας ένα ζωντανό πλάσμα ή ένα έργο ζωγραφικής, αλλά εννοώ την ευθεία και την καμπύλη κι ακόμη τα επίπεδα ή τα στερεά σώματα που προκύπτουν απ’ αυτές με τη βοήθεια του τόρνου, του χάρακα και του τριγώνου… Θεωρώ επίσης όμορφα και ευχάριστα τα χρώματα που έχουν αυτό τον χαρακτήρα» [1].

Ο Αριστοτέλης έδωσε έναν εμπράγματο ορισμό της τέχνης χωρίς αντικείμενο: σε έναν ζωγραφικό πίνακα «αν τύχει και δεν έχουμε ξαναδεί το αντικείμενο που απεικονίζεται, τότε την ηδονή δεν την προξενεί η μίμηση, αλλά η εκτέλεση του έργου, το χρώμα ή κάποια άλλη παρόμοια αιτία» [2]. Ενώ στη «Ρητορική» γράφει: «Όσο περισσότερα πράγματα συνωστίζονται σ’ ένα πίνακα τόσο από μεγαλύτερη απόσταση πρέπει να τον βλέπουμε. Οι υπερβολικές λεπτομέρειες και περιττεύουν και μειώνουν την αξία» [3]

Πολλοί θεωρούν την Αφαίρεση την τυπικότερη καλλιτεχνική έκφραση του αιώνα μας, με τάσεις τον Σουπρεματισμό, Κονστρουκτιβισμό, Νεοπλαστικισμό, Ραγιονισμό, Ελεμενταρισμό κ.α

Νεοπλαστικισμός (1917-1931)

Ο Νεοπλαστικισμός – De Stijl (Το Στυλ – το ύφος) εμφανίστηκε την περίοδο 1917 – 1920 στην Ολλανδία. Το ολλανδικό τοπίο με τα ορθογώνια χωράφια, τους ίσιους δρόμους και τα κανάλια, είναι «έργο χειρών» με μέσα τη γεωμετρία και την ακρίβεια. Αυτή την ακρίβεια την εφάρμοσε η ομάδα του Stijl για να δείξει τον θρίαμβο του ανθρώπινου πνεύματος στην «αταξία» της φύσης. Είναι η αναζήτηση για μια τέχνη αντικειμενική και οικουμενική, αντίδραση στην καταστροφή που είχε επιφέρει ο Α΄ Παγκόσμιος πόλεμος. Βασικό χαρακτηριστικό του είναι η αφαίρεση (της πραγματικότητας). Η τέχνη δεν έπρεπε να είναι συναισθηματική. Έπρεπε να βασίζεται στα καθαρά ορθογώνια σχήματα, στις ευθείες κάθετες και οριζόντιες, ταυτόχρονα με τη χρήση των βασικών χρωμάτων (κόκκινο, κίτρινο, μπλε, λευκό και μαύρο). Αδιαφορεί για τη συμμετρία και την εγκαταλείπει.[7] [8] [9] [10].

Ιδρυτής και εμπνευστής του κινήματος είναι ο ζωγράφος **Pieter Cornelis Mondriaan (Piet Mondriaan)** (1872 – 1944) ο οποίος έλεγε: «επιθυμώ να πλησιάσω όσο περισσότερο μπορώ την αλήθεια και γι αυτό αφαιρώ τα πάντα μέχρι να φτάσω στη θεμελιώδη ποιότητα των αντικειμένων. Κατά τη διάρκεια του πολέμου γνωρίστηκε με τον M. Schoenmaekers ο οποίος πίστευε πως όλες οι δομές βασίζονται σε κρυμμένους μαθηματικούς νόμους και ο Mondriaan προσπαθούσε να τους μορφοποιήσει.

Ο ζωγράφος και αρχιτέκτονας Theo van Doesburg (1883 – 1931) εισήγαγε στα έργα του την διαγώνιο και την απόκλιση από την κάθετο. Εξέδιδε από το 1917 έως το 1928 το περιοδικό τέχνης De Stijl διαδίδοντας τη φιλοσοφία και τις τεχνικές των νεοπλαστικιστών.

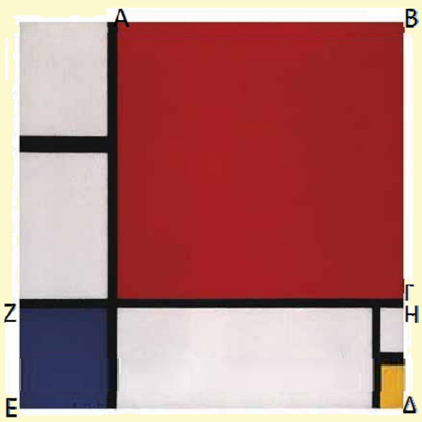
Για ένα διάστημα εργάστηκαν μαζί με τον Mondriaan στα πλαίσια της ομάδας De Stijl με φανερές αλληλεπιδράσεις στα έργα τους [4] [5] [6] [7] [8].

Προτάσεις για εφαρμογές στα εμβαδά με … Stijl

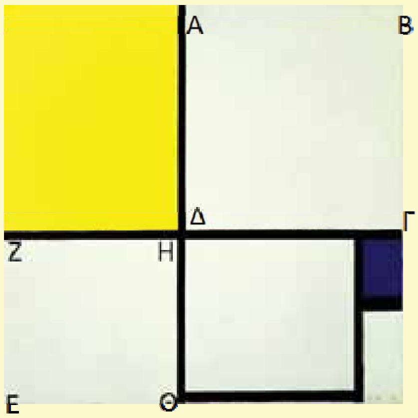
Άσκηση 1η

Στην άσκησή μας, στον τετράγωνο πίνακα «Composition in Red Blue and Yellow» (1930) του Piet Mondrian, το κόκκινο ορθογώνιο έχει πλευρά ΑΒ=$5\,cm$ και εμβαδό $24\,cm^2$, ενώ στο μπλε ορθογώνιο η ΕΖ=$1{,}7\,cm$.

Αν οι μαύρες γραμμές έχουν πάχος $0{,}1cm$ να βρείτε το εμβαδό του πίνακα.



Composition in Red Blue and Yellow 1930



Composition no iii 600x600

Άσκηση 2η

Ο τετράγωνος πίνακας «Composition no iii» του Piet Mondriaan έχει πλευρά 600mm.

Στην άσκηση το εμβαδό του είναι $49\,cm^2$, η ΑΒ=$3{,}9cm$ και η ΒΓ=$4cm$.

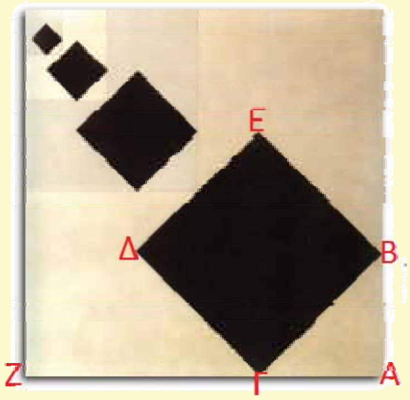
Αν οι μαύρες γραμμές έχουν πάχος $0{,}1cm$ να βρεθούν τα εμβαδά των ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ και του κίτρινου ορθογωνίου.

Πόσο είναι το εμβαδό του κίτρινου ορθογωνίου στον αυθεντικό πίνακα;

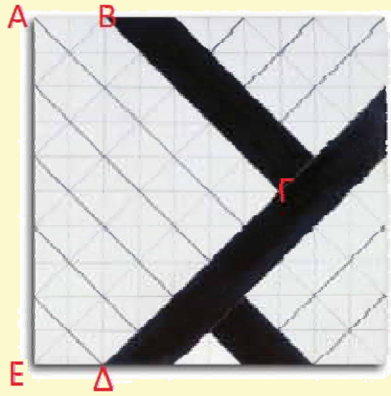
Άσκηση 3η

Στον πίνακα 1 του Theo van Doesburg "Arithmetic Composition" (1929), δίνεται (για την άσκηση) ότι ο πίνακας είναι τετράγωνο και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\widehat{A}=90^\circ$) με ΑΒ=$4\sqrt{2}$. α) Να βρεθεί το εμβαδό και η περίμετρος του τετραγώνου ΒΓΔΕ.

β) Αν κάθε επόμενο τετράγωνο έχει πλευρά ίση με το μισό της πλευράς του προηγούμενου και ΑΓ=$\frac{1}{3}$ΑΖ, να βρεθεί το εμβαδό του λευκού μέρους του πίνακα.



Arithmetic Composition (1929)



Counter Composition (1925)

Άσκηση 4η

Ο τετράγωνος πίνακας του Theo van Doesburg "Counter Composition" (1925) στην άσκησή μας, έχει πλευρά 10, η ΑΒ=2 και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο ($\hat{\Gamma}=90^\circ$) και ισοσκελές.

Να βρεθεί το εμβαδό του πίνακα και η περίμετρος και το εμβαδό του ΑΒΓΔΕ.

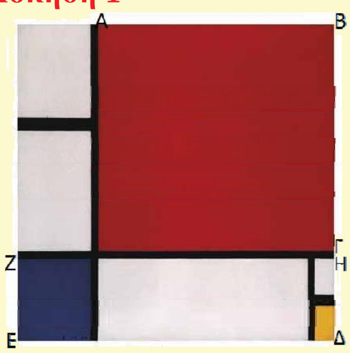
Ξέροντας ότι ο αυθεντικός πίνακας έχει πλευρά 500mm, να βρείτε το εμβαδό του καθώς και το εμβαδό του ΑΒΓΔΕ σ' αυτόν.

Βιβλιογραφία

[1] Πλάτωνος, Φιληβος 51 c-d
[2] Αριστοτέλους. Ποιητική, 1448 β17
[3] Αριστοτέλους, Ρητορική Γ 1414a
[4] https://el.wikipedia.org/wiki/Νεοπλαστικισμός
[5] Το κίνημα του Νεοπλαστικισμού (De Stijl) – Art Magazine, Αναστασία–Μαρία Ηλιοπούλου 11-9-2013
[6] https://adelaideandothersadstories.wordpress.com/2014/10/13 το-ρευμα-destijl-νεοπλαστικισμός/
[7] https://www.youtube.com/watch?v=nMI7esY3p04 Art Aspects Το κινημα De Stijl
[8] ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ, Γ΄ Γενικού Λυκείου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Λύσεις των ασκήσεων

Άσκηση 1η

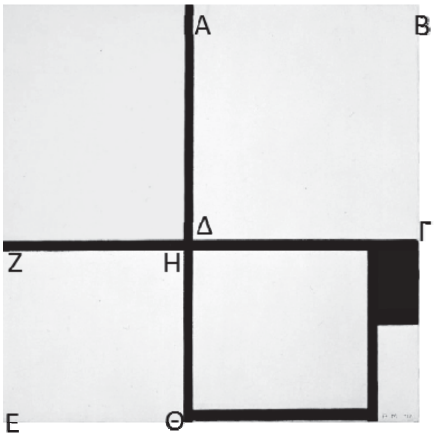


$E_{κοκ.τετρ} = ΑΒ \cdot ΒΓ$ ή $24 = 5ΒΓ$ ή $ΒΓ = \frac{24}{5}$ άρα ΒΓ=4,8cm

ΗΔ=ΖΕ άρα ΗΔ=1,7cm Η ΒΔ=ΒΓ+ΓΗ+ΗΔ=4,8+0,1+1,7=6,6

δηλ η πλευρά του τετράγωνου πίνακα είναι 6,6cm συνεπώς το εμβαδό του είναι Ε=$(6,6)^2 = 43,56cm^2$

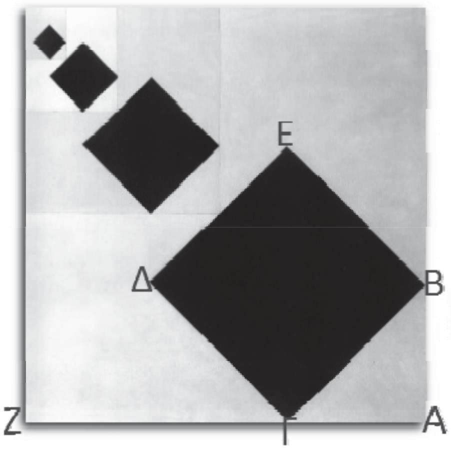
Άσκηση 2η



(ΑΒΓΔ)=ΑΒ•ΒΓ=3,9•4=15,6 cm^2. Αφού το εμβαδό του πίνακα είναι 49 cm^2 η πλευρά του είναι 7*cm*. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΓΔ=3,9. Συνεπώς η ΖΗ=7-0,1-3,9=3*cm* και τόσο είναι η βάση του κίτρινου ορθογωνίου, ενώ το ύψος του είναι ίσο με τη ΒΓ δηλ 4 *cm*. Άρα το εμβαδό του κίτρινου ορθογωνίου είναι 3•4=12 cm^2.
ΕΖ=7-4-0,1=2,9*cm* άρα (ΕΖΗΘ)=3•2,9=8,7 cm^2.
Ο αυθεντικός πίνακας έχει πλευρά 600*mm*=60*cm* και εμβαδό 60^2=3600 cm^2.

Έχουμε λοιπόν $\dfrac{Ε_{αυθεν}}{Ε_{ασκ}}=\dfrac{Ε_{κιτρ.αυθ}}{Ε_{κιτρ.ασκ}}$ δηλ $\dfrac{3600}{49}=\dfrac{x}{12}$ ή 3600•12=49x ή $x \simeq 881,6cm^2$

Άσκηση 3η



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές άρα ΑΒ=ΑΓ= $4\sqrt{2}$ οπότε ισχύει:

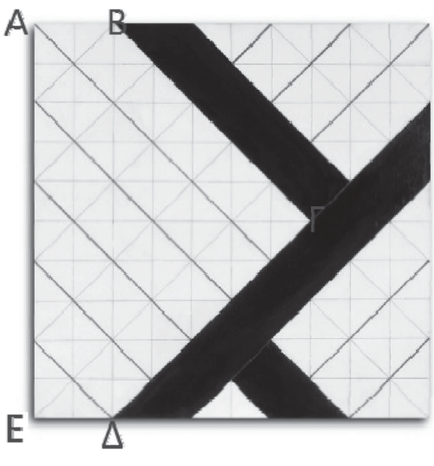
$$ΓΒ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2,\ (4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2=32+32=64.$$

Άρα και (ΒΓΔΕ)=$ΓΒ^2$=64τ.μ. (Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ΓΒ, τότε ΓΒ=$\sqrt{64}=8$). Επειδή η πλευρά κάθε επόμενου τετραγώνου είναι ίση με το μισό της προηγούμενης, το επόμενο έχει πλευρά 4 και εμβαδό $4^2=16$, το επόμενο πλευρά 2 και εμβαδό 4 το μικρό πλευρά 1 και εμβαδό 1. Συνεπώς τα μαύρα τετράγωνα μαζί έχουν εμβαδό 64+16+4+1=85.

Δίνεται ΑΓ= $\dfrac{1}{3}$ΑΖ άρα ΑΖ=3ΑΓ=3•4$\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ και το εμβαδό του πίνακα είναι $(12\sqrt{2})^2=288$. Άρα το λευκό μέρος του πίνακα έχει εμβαδό 288–85= 203τ.μ.

Άσκηση 4η

Αφού η πλευρά του τετράγωνου πίνακα είναι 10 το εμβαδό του είναι 10^2=100τ.μ.Το (ΑΒΓΔΕ)=(ΑΒΔΕ)+(ΒΓΔ) με (ΑΒΔΕ)= 2•10 =20.



Για να βρούμε το εμβαδό του τριγώνου ΒΔΓ το οποίο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές πρέπει να βρούμε την ΒΓ=x. Εφαρμόζουμε το Π.Θ. $ΒΔ^2=ΒΓ^2+ΓΔ^2$ δηλ 100=2x $x^2=\dfrac{100}{2}=50$ και (ΒΓΔ)= $\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{50}{2}=25$. Συνεπώς (ΑΒΓΔΕ)=20+25=55τ.μ. Ο αυθεντικός πίνακας έχει πλευρά 500*mm*=50*cm* και εμβαδό 50^2=2500 cm^2. Συνεπώς $\dfrac{Ε_{αυθεν}}{Ε_{ασκ}}=\dfrac{Ε_{σχ.αυθ}}{Ε_{σχ.ασκ}}$ ή $\dfrac{2500}{100}=\dfrac{Ε}{55}$ ή 2500•55=100Ε ή Ε=$\dfrac{137500}{100}=1375\ cm^2$ (Για την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $x=\sqrt{50}=\sqrt{25•2}=\sqrt{25}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$)

Επαναληπτικά Θέματα
Α΄ Γυμνασίου

Συλλογική Εργασία Καθηγητών του Τμήματος Μαθηματικών
του Pierce-Αμερικανικού Κολλεγίου Ελλάδος

Θέματα με Απαντήσεις

1) Το πηλίκο μίας διαίρεσης είναι π = 8 και το υπόλοιπο είναι υ = 8. Συμβολίζουμε με Δ τον Διαιρετέο και με δ τον διαιρέτη της διαίρεσης αυτής.

α) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης, δ.

β) Για τη μικρότερη τιμή του διαιρέτη να βρείτε το Διαιρετέο, Δ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τον Δ και να βρείτε το ΕΚΠ(Δ, δ) και ΜΚΔ(δ,π)

Απαντήσεις: ***α)*** *9,* ***β)*** *Δ=80, Δ=δ·π+υ, 80=9·8+8* ***γ)*** *720, 1*

2) α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-1\right)$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B}=\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{3}{7}\right)+\left[1-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{3}{5}\right]$

γ) Αν $\mathrm{A}=\frac{8}{9}$ και $\mathrm{B}=\frac{8}{15}$, να δείξετε ότι ο αριθμός $3\cdot\mathrm{A}-5\cdot\mathrm{B}$ δεν έχει αντίστροφο.

Απαντήσεις: **α)** $\frac{8}{9}$, **β)** $\frac{8}{15}$, **γ)** *το μηδέν δεν έχει αντίστροφο*

3) Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{-2}\right):\frac{1}{6}-\frac{3}{4}:\left(\frac{1}{-3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{-12}\right)$,

$\mathrm{B}=-\left|\frac{3}{4}-1\right|-12\left|-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right|-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{30}{24}-\frac{7}{4}\right)$ και $\Gamma=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{1}{9}\cdot(-3)-2}{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)+1}$.

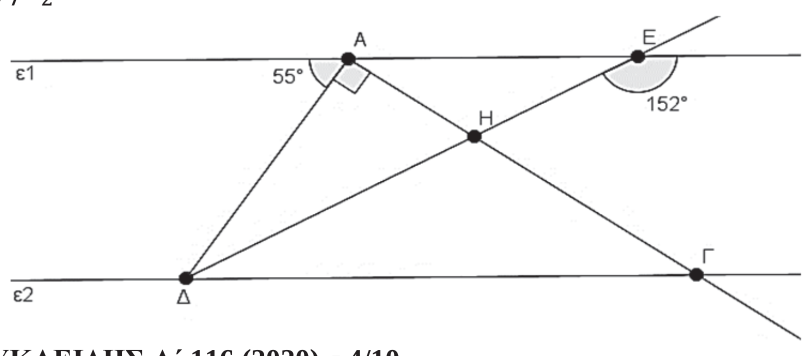
α) Να υπολογίσετε τις τιμές των Α και Β.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Γ.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Delta=-2:\mathrm{A}+\mathrm{B}-\Gamma$

Απαντήσεις: ***α)*** $\mathrm{A}=-8$, $\mathrm{B}=-2$, ***β)*** $\Gamma=\frac{1}{8}$, ***δ)*** $\Delta=-\frac{15}{8}$

4) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{E}H$ και $H\hat{A}E$.

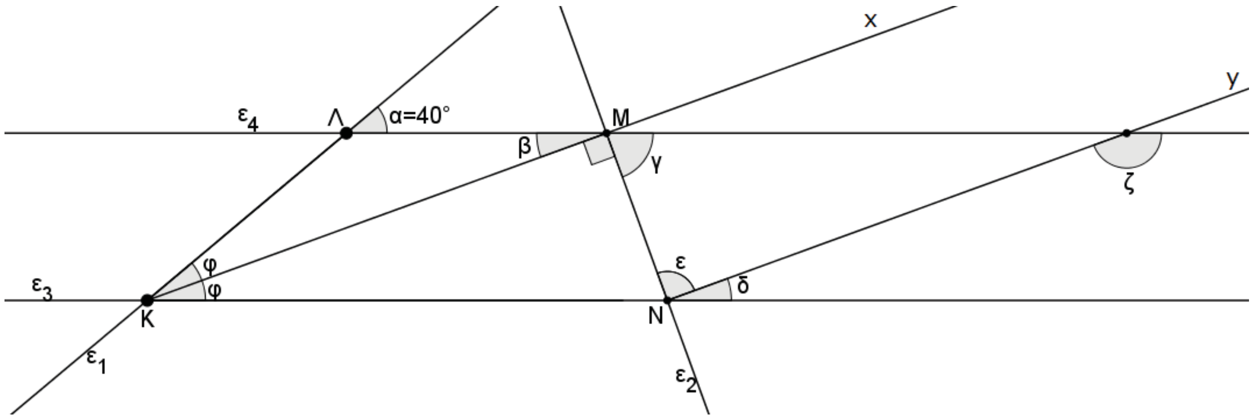
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\Delta\hat{H}\Gamma$ και $A\hat{H}\Delta$.

δ) Να υπολογίσετε την γωνία $A\hat{\Delta}H$ και να εξετάσετε και να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

Απαντήσεις: α) $A\hat{E}H=28^o$, $H\hat{A}E=35^o$, *β)* $E\hat{\Delta}\Gamma=28^o$, $A\hat{\Gamma}\Delta=35^o$, *γ)* $\Delta\hat{H}\Gamma=117^o$, $A\hat{H}\Delta=63^o$, *δ)* $A\hat{\Delta}H=27^o$, *δεν είναι ισοσκελές*

5) Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_3 και ε_4 είναι παράλληλες όπως και οι ημιευθείες Κx και Νy. Επίσης η ημιευθεία Κχ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Lambda K N}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\varphi}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\zeta}$.



Απαντήσεις : $\hat{\varphi}=20^o$, $\hat{\beta}=20^o$, $\hat{\gamma}=70^o$, $\hat{\delta}=20^o$, $\hat{\varepsilon}=90^o$, $\hat{\zeta}=160^o$

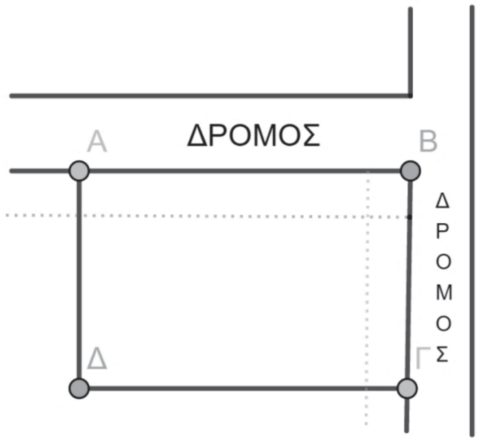
6) Στο διπλανό σχήμα το οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις 50m και 80m. Στους **2** δρόμους γύρω από το οικόπεδο ΑΒΓΔ πρόκειται να γίνει διαπλάτυνση κατά 5m.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν που έχει τώρα το οικόπεδο.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν που θα έχει το οικόπεδο αφού γίνει η διαπλάτυνση.

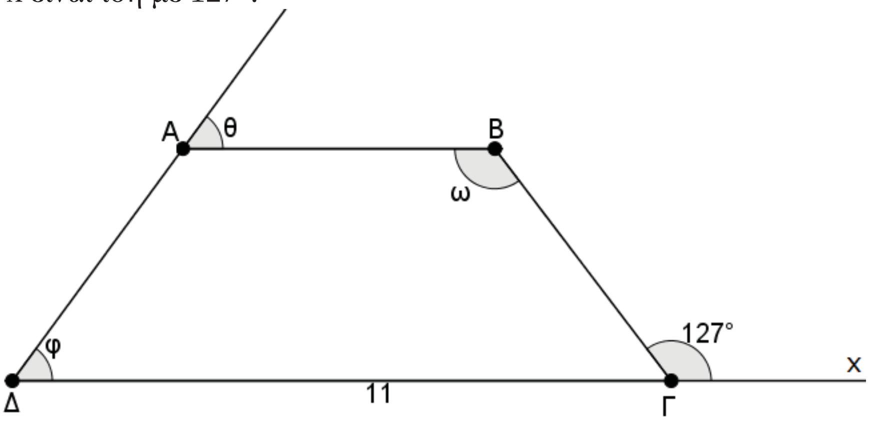
γ) Πόσο είναι το ποσοστό του εμβαδού που θα χάσει το οικόπεδο;

δ) Αν η μεγάλη διάσταση παραμείνει αμετάβλητη (80m) πόσο πρέπει να μειωθεί η μικρότερη του διάσταση έτσι ώστε το οικόπεδο να χάσει μόνο το 10% του συνολικού του εμβαδού;



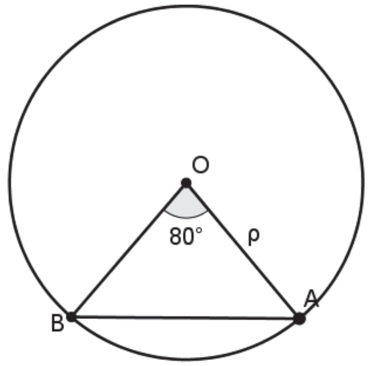
Απαντήσεις : ***α)*** *$4000\,m^2$,* ***β)*** *$3375\,m^2$,* ***γ)*** *15.625% ,* ***δ)*** *45m*

7) Στο παρακάτω σχήμα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες και η γωνία ΒΓx είναι ίση με 127°.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω, φ και θ του σχήματος.
β) Αν η πλευρά ΓΔ έχει μήκος 11 εκατοστά και η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίση με την περίμετρο ενός ρόμβου με πλευρά μήκους 6,5 εκατοστών, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.
γ) Να σχεδιάσετε τα ύψη του τραπεζίου ΒΕ και ΔΖ. Τι σχήμα είναι το ΒΕΔΖ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Απαντήσεις : α) ω = 127°, φ = 53°, θ = 53°, β) ΑΔ = 5 εκατοστά, γ) Το ΒΕΔΖ είναι ορθογώνιο επειδή όλες οι γωνίες του είναι ορθές.

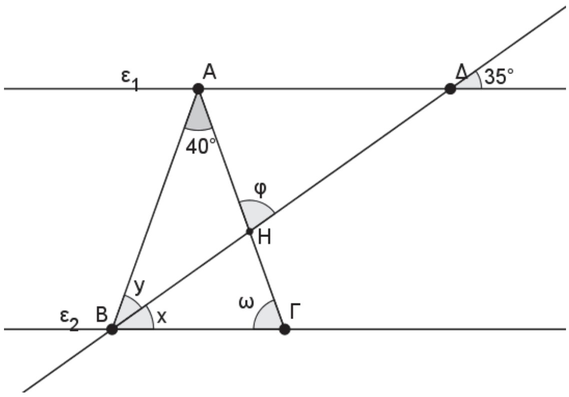
8) Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και τρίγωνο OAB.
α) Αν η γωνία $B\hat{O}A = 80^o$ να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{B}A, O\hat{A}B$
β) Να κατασκευάσετε τρίγωνο $OK\Lambda$ συμμετρικό του OAB ως προς κέντρο συμμετρίας Ο
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $OK\Lambda$ και να αιτιολογίσετε τις απαντήσεις σας
δ) Να προσδιορίσετε το είδος του τετραπλεύρου $ABK\Lambda$ αιτιολογώντας την απάντηση σας
ε) Να χαράξετε όλους τους άξονες συμμετρίας του $ABK\Lambda$.



Απαντήσεις: ***α)*** *$O\hat{B}A$=50^0, $O\hat{A}B$=50^0 ,* ***γ)*** *$\Lambda\hat{O}K$= 80^0 , $O\hat{K}\Lambda$=50^0, $O\hat{\Lambda}K$=50^0,* ***δ)*** *το ΑΒΚΛ είναι ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο και όλες του οι γωνίες είναι ορθές,* ***ε)*** *2 άξονες συμμετρίας*

Λυμένα Θέματα

1) Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία ω και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
β) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.



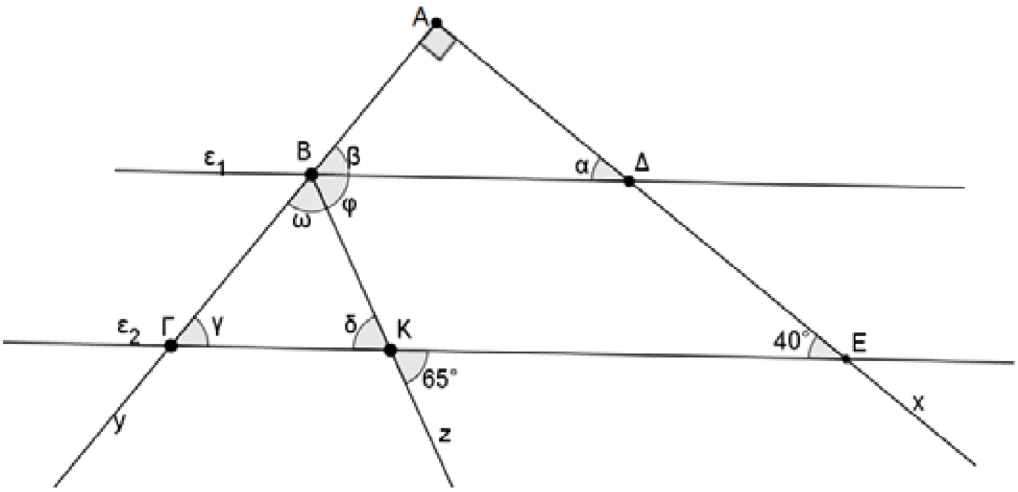
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία φ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση
α) Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.

$$\text{Άρα } \omega = \frac{180-40}{2} = 70^o$$

β) $\hat{y}$ = 35^o ως εντός εκτός και επί τα αυτά με την $\hat{\Delta}$. Από άθροισμα γωνιών τριγώνου ΗΒΓ προκύπτει ότι $B\hat{H}\Gamma$=75^O. $A\hat{H}B$=180^O-75^O=105^O, ως παραπληρωματική της $B\hat{H}\Gamma$. Από άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΗ προκύπτει ότι x=35^o. Συνεπώς προκύπτει ότι x=y=35^o, άρα ΒΔ διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$.
γ) φ=75^o ως κατακορυφήν της $B\hat{H}\Gamma$.

2) Στο ακόλουθο σχήμα γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Φέρνουμε την ημιευθεία Βz η οποία τέμνει την ε_2 στο σημείο Κ .



Αν ακόμη γνωρίζουμε ότι $K\hat{E}\Delta = 40^o$, $E\hat{K}z = 65^o$ και η Αx είναι κάθετη στην Αy τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\omega}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ΒΓΚ ως προς τις πλευρές του και να εξηγήσετε γιατί η Βz είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{B}\Delta$.

Λύση

α) $\hat{\alpha} = 40^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά με την $K\hat{E}\Delta$ και $\hat{\beta} = 50^o$ από άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ.

β) $\hat{\gamma} = 50^o$ από άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΓΕ, $\hat{\delta} = 65^o$ ως κατακορυφήν της $E\hat{K}z$ και $\hat{\omega} = 65^o$ από άθροισμα γωνιών τριγώνου ΒΓΚ.

γ) Εφόσον $\hat{\delta} = \hat{\omega}$ το ΒΓΚ είναι ισοσκελές.

$\hat{\varphi} = 180^o - \hat{\omega} - \hat{\beta} = 65^o$, $\hat{\varphi} = \hat{\omega} = 65^o$ συνεπώς Βz διχοτόμος της $\Gamma\hat{B}\Delta$.

3) α) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = -\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{21}{10} - \frac{5}{12}\right) - \frac{8}{9} : \frac{16}{15}$$

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{B} = -\left|\frac{3}{4} - 1\right| - \left(\frac{15}{12}\cdot\frac{6}{5} - \frac{7}{4}\right) - \left|-\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right|$$

γ) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$\Gamma = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 3^o + 1^{2016}$$

Λύση

α) $\mathrm{A} = -\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{21}{10} - \frac{5}{12}\right) - \frac{8}{9} : \frac{16}{15}$

$$\mathrm{A} = -\left(\frac{4}{6} - \frac{15}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2} - \frac{5}{12}\right) - \frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}$$

$$\mathrm{A} = -\left(-\frac{11}{6}\right) + \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{12}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{11}{6} + \left(\frac{21}{12} - \frac{5}{12}\right) - \frac{5}{6}$$

$$A=\frac{11}{6}+\frac{16}{12}-\frac{5}{6}$$

$$A=\frac{11}{6}+\frac{8}{6}-\frac{5}{6}$$

$$A=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

β) $B=-\left|\frac{3}{4}-1\right|-\left(\frac{15}{12}\cdot\frac{6}{5}-\frac{7}{4}\right)-\left|-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|$

$$B=-\left|\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\right|-\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{7}{4}\right)-\left|-\frac{4}{6}-\frac{5}{6}\right|$$

$$B=-\left|-\frac{1}{4}\right|-\left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)-\left|-\frac{9}{6}\right|$$

$$B=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$$

γ) $\Gamma=\dfrac{\frac{7}{3}}{-\frac{3}{2}}-1+1$

$$\Gamma=-\frac{2\cdot 7}{3\cdot 3}=-\frac{14}{9}$$

4) Τα $\frac{3}{5}$ των μαθητών ενός Γυμνασίου είναι κορίτσια και ολόκληρο το Γυμνάσιο έχει 48 αγόρια.

α) Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του Γυμνασίου και πόσα είναι τα κορίτσια;

β) Αν όλοι οι μαθητές του Γυμνασίου είναι 120 και έρθουν 30 επιπλέον μαθητές που είναι όλοι αγόρια , τότε:

i. Τι ποσοστό των μαθητών είναι τώρα τα κορίτσια;

ii. Ποιο είναι το ποσοστό αύξησης των μαθητών του Γυμνασίου ύστερα από την είσοδο των 30 επιπλέον μαθητών στο σχολείο;

Λύση

α) Εφόσον τα $\frac{3}{5}$ των μαθητών είναι κορίτσια τα αγόρια θα είναι τα $\frac{2}{5}$. Με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι το $\frac{1}{5}$ των μαθητών είναι 24 παιδιά, άρα τα $\frac{5}{5}$ θα είναι 120. Συνεπώς το γυμνάσιο συνολικά έχει 120 μαθητές και τα κορίτσια είναι $120-48=72$.

β) $120+30=150$ μαθητές συνολικά από τα οποία τα 72 κορίτσια και τα 78 αγόρια.

i) $\frac{72}{150}\cdot 100\%=48\%$ το ποσοστό των κοριτσιών.

ii) $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$ αύξηση.

5) Ένας γεωργός αποφάσισε να φυτέψει πιπεριές σε ένα κομμάτι του κτήματός του που αντιστοιχεί στο 10% της συνολικής έκτασης και ντομάτες σε ένα κομμάτι διαφορετικής έκτασης. Το υπόλοιπο της έκτασης που του απομένει είναι το μισό από το κομμάτι που χρησιμοποίησε για να φυτέψει ντομάτες.

α) Να βρείτε το ποσοστό της έκτασης που χρησιμοποίησε για να φυτέψει ντομάτες.
β) Αν το υπόλοιπο της έκτασης που του απομένει έχει εμβαδόν ίσο με 600 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τη συνολική έκταση του κτήματος.
γ) Αν ο γεωργός πουλάει το ένα κιλό πιπεριές 1,62 € και γνωρίζετε ότι ένα κιλό πιπεριές κοστίζουν 35% πιο ακριβά από ένα κιλό ντομάτες, να βρείτε πόσο κοστίζει το ένα κιλό ντομάτες.
δ) Αν ο γεωργός πούλησε 120 κιλά πιπεριές και εισέπραξε 369,36 € πουλώντας όλες τις ντομάτες να βρείτε το ποσοστό που αντιστοιχεί στα επιπλέον χρήματα που του απέφεραν οι ντομάτες σε σχέση με τις πιπεριές.

Λύση:
α) Αφού ο γεωργός είχε φυτέψει πιπεριές στο 10% της έκτασης του κτήματός του, τότε από το υπόλοιπο 90% σε ένα κομμάτι φύτεψε ντομάτες και ένα κομμάτι έμεινε κενό.
Αφού το κομμάτι που φύτεψε ντομάτες είναι διπλάσιο από το κενό κομμάτι τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η υπόλοιπη έκταση χωρίστηκε σε 3 μέρη, από τα οποία δύο χρησιμοποιήθηκαν για να φυτέψει ντομάτες και ένα έμεινε κενό.

$$\frac{90\%}{3}=30\% \qquad \text{και} \qquad 2\cdot 30\%=60\%$$

Άρα χρησιμοποίησε το 60% της έκτασης για να φυτέψει ντομάτες.
β) Αφού για να φυτέψει ντομάτες είχε χρησιμοποιήσει διπλάσια έκταση από αυτή που του έμεινε τότε ο γεωργός είχε χρησιμοποιήσει $2\cdot 600=1.200$ τετραγωνικά μέτρα για να φυτέψει ντομάτες.
Ακόμα, αν το 30% της έκτασης αντιστοιχεί σε 600 τετραγωνικά μέτρα, τότε το 10% που χρησιμοποίησε ο γεωργός για να φυτέψει πιπεριές αντιστοιχεί σε 200 τετραγωνικά μέτρα.
Άρα συνολικά το κτήμα είχε έκταση $600+1200+200=2000$ τετραγωνικά μέτρα.
γ) Αν το ένα κιλό ντομάτες που κοστίζει x€ αντιστοιχεί στο 100% της τιμής
τότε το ένα κιλό πιπεριές που κοστίζει 1,62€ αντιστοιχεί στο 135% της τιμής
Άρα $x=\frac{1{,}62}{135\%}=\frac{1{,}62}{1{,}35}=1{,}2$ € για ένα κιλό ντομάτες
δ) Αφού ο γεωργός πούλησε 120 κιλά πιπεριές και το κάθε κιλό κοστίζει 1,62 € τότε εισέπραξε 194,4 € από τις πιπεριές.
Τα επιπλέον χρήματα που κέρδισε από τις ντομάτες σε σχέση με τις πιπεριές ήταν

$$369{,}36-194{,}4=174{,}96€$$

Αν τα 194,4 € αντιστοιχούν στο 100% τότε τα 174,96 € αντιστοιχούν στο

$$\frac{174{,}96}{194{,}4}\cdot 100\%=0{,}9\cdot 100\%=90\%$$

6) Μία οικογένεια ξόδεψε τον προηγούμενο χρόνο το $\frac{1}{12}$ των εσόδων της για την ανακαίνιση του σπιτιού της, το $\frac{1}{3}$ για διατροφή, $\frac{1}{6}$ για αγορά ενός υπολογιστή, το $\frac{1}{15}$ για ρουχισμό και το 25% για τα υπόλοιπα έξοδα. Έτσι, της έμειναν 3120€ για αποταμίευση.
α) Να βρείτε πόσα ήταν τα έσοδα της οικογένειας.
β) Τι ποσοστό των εσόδων κατάφερε να αποταμιεύσει η οικογένεια;

Λύση
α) Αν x ήταν τα έσοδα της οικογένειας τότε τα έξοδα εκφράζονται ως εξής:

- $\frac{1}{12}\cdot x=\frac{x}{12}$ για την ανακαίνιση του σπιτιού της
- $\frac{1}{3}\cdot x=\frac{x}{3}$ για διατροφή

- $\frac{1}{6}\cdot x=\frac{x}{6}$ για αγορά ενός υπολογιστή
- $\frac{1}{15}\cdot x=\frac{x}{15}$ για ρουχισμό
- $25\%\cdot \mathrm{x}=\frac{25}{100}\cdot x=\frac{1}{4}\cdot x=\frac{x}{4}$ για τα υπόλοιπα έξοδα
- Συνεπώς, προκύπτει η εξίσωση $\frac{x}{12}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{15}+\frac{x}{4}+3120=x$. Το Ε.Κ.Π.(1,3,4,6,12,15)=60, άρα $\frac{5x}{60}+\frac{20x}{60}+\frac{10x}{60}+\frac{4x}{60}+\frac{15x}{60}+3120=\frac{60x}{60}$, επομένως $3120=\frac{6x}{60}$, δηλαδή $3120=\frac{x}{10}$, συνεπώς $x=10\cdot 3120$, $x=31200$ €. Τα έξοδα της οικογένειας ήταν 31200€.

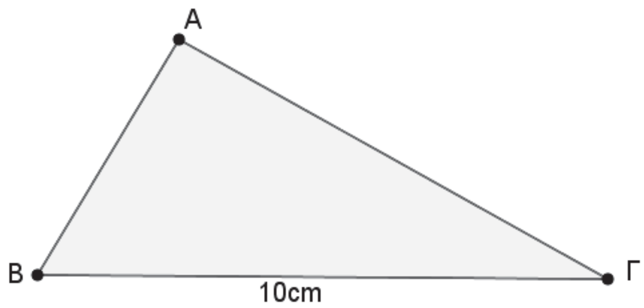
β) Για να βρούμε τι ποσοστό των εσόδων κατάφερε να αποταμιεύσει η οικογένεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απλή μέθοδο των τριών.

Η οικογένεια αποταμίευσε 3120€ από το σύνολο των 31200€ άρα
Η οικογένεια αποταμίευσε y€ από το σύνολο των 100€

Επομένως $31200\cdot y=3120\cdot 100$, άρα $y=\frac{3120\cdot 100}{31200}$, δηλαδή $y=10$.

Δηλαδή, η οικογένεια κατάφερε να αποταμιεύσει το 10% των συνολικών της εσόδων.

7) Στο παρακάτω σχήμα η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι Πcm. Η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της περιμέτρου, η πλευρά ΑΒ είναι ίση με $\frac{1}{4}$ της περιμέτρου ενώ η πλευρά ΒΓ είναι ίση με 10cm.



α) Να εκφράσετε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ χρησιμοποιώντας την περίμετρο Π.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση έτσι ώστε να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

Λύση

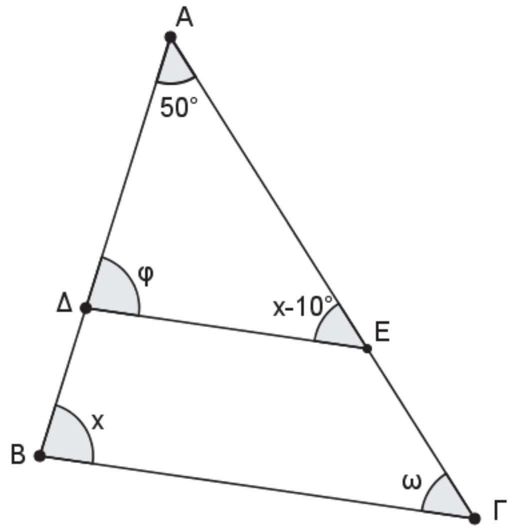
α) Αφού Π είναι η περίμετρος του τριγώνου τότε για την πλευρά ΑΒ θα ισχύει $AB=\frac{1}{4}\cdot\Pi=\frac{\Pi}{4}$ ενώ για την πλευρά ΑΓ θα ισχύει $A\Gamma=\frac{1}{3}\cdot\Pi=\frac{\Pi}{3}$.

β) Γνωρίζουμε ότι η περίμετρος ισούται με το άθροισμα των πλευρών του τριγώνου, άρα θα ισχύει $AB+A\Gamma+B\Gamma=\Pi$, δηλαδή $\frac{\Pi}{4}+\frac{\Pi}{3}+10=\Pi$. Το Ε.Κ.Π.(1,3,4)=12, άρα $\frac{3\Pi}{12}+\frac{4\Pi}{12}+10=\frac{12\Pi}{12}$, επομένως $10=\frac{12\Pi}{12}-\frac{3\Pi}{12}-\frac{4\Pi}{12}$, με $10=\frac{5\Pi}{12}$, συνεπώς $\Pi=24cm$.

γ) Από το ερώτημα **i)** γνωρίζουμε ότι $AB=\frac{\Pi}{4}\overset{\Pi=24cm}{=}\frac{24}{4}=6cm$, $AB=6cm$ και ότι

$\text{ΑΓ} = \dfrac{\Pi}{3} \overset{\Pi=24cm}{=} \dfrac{24}{3} = 8cm$, $\underline{\underline{\text{ΑΓ} = 8cm}}$.

8) Στο παρακάτω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο της βάσης ΒΓ, η γωνία της κορυφής Α είναι $\hat{\text{Α}} = 50^\circ$, ενώ οι γωνίες $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και $\widehat{\text{ΔΕΑ}}$ διαφέρουν κατά 10° γι' αυτό συμβολίζουμε με x την πρώτη από αυτές και με $x-10^\circ$ την δεύτερη. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, φ, ω χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Λύση

Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο με την βάση ΒΓ τότε $\hat{\omega} = \hat{x} - 10^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες. Επειδή το ΑΒΓ είναι τρίγωνο τότε θα ισχύει ότι $\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^o$ όμως $\hat{\text{Α}} = 50^o$, $\hat{\text{Β}} = \hat{x}$, $\hat{\Gamma} = \hat{x} - 10^o$ άρα $50^o + \hat{x} + \hat{x} - 10^o = 180^o$, δηλαδή $2\hat{x} = 140^o$, επομένως $\underline{\underline{\hat{x} = 70^o}}$. Επειδή $\hat{\omega} = \hat{x} - 10^o$, τότε $\hat{\omega} = 70^o - 10^o$, άρα $\underline{\underline{\hat{\omega} = 60^o}}$. Τέλος ισχύει ότι $\hat{x} = \hat{\varphi}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες, δηλαδή $\underline{\underline{\hat{\varphi} = 70^o}}$.

9) Ένας αγρότης παράγει σε ένα χρόνο 640 κιλά λεμόνια. Από αυτά, δίνει τα $\dfrac{3}{4}$ της παραγωγής του σε μία αλυσίδα σουπερμάρκετ και το 20% σε ένα εργοστάσιο αναψυκτικών.

Από την υπόλοιπη παραγωγή του πούλησε τα $\dfrac{5}{8}$ μόνος του στη λαϊκή.

α) Πόσα κιλά πούλησε στην αλυσίδα των σουπερμάρκετ και πόσα στο εργοστάσιο αναψυκτικών;
β) Πόσα κιλά πούλησε στη λαϊκή;
γ) Πόσα κιλά του περίσσεψαν τελικά;
δ) Αν το κάθε κιλό στην αλυσίδα των σουπερμάρκετ και στο εργοστάσιο αναψυκτικών το πούλησε προς 0,50€ ενώ στη λαϊκή προς 1,10€, πόσα έσοδα είχε συνολικά από την πώληση των λεμονιών;

Λύση

α) $640 \cdot \dfrac{3}{4} = 480$ κιλά πούλησε στο σουπερμάρκετ $640 \cdot \dfrac{20}{100} = 128$ κιλά πούλησε στην εταιρεία αναψυκτικών.

β) 480 + 128 = 608 πούλησε συνολικά και στους δύο, 640 – 608 = 32 υπόλοιπη παραγωγή

$32 \cdot \dfrac{5}{8} = 20$ κιλά πούλησε στην λαϊκή

γ) 32 - 20 = 12 κιλά του έμειναν

δ) 608·0,5 = 304 € από σουπερμάρκετ και εταιρεία αναψυκτικών.
20 . 1,1 = 22 € από λαϊκή άρα 304 + 22 = 326 € συνολικά έσοδα

Επαναληπτικά Θέματα
Β΄ Γυμνασίου

Συλλογική Εργασία Καθηγητών του Τμήματος Μαθηματικών
του Pierce-Αμερικανικού Κολλεγίου Ελλάδος

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{15}{4}-\frac{5x}{2}=\frac{-x+2}{4}-\frac{x+3}{4}$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση $\frac{1}{3}\left[\frac{23-\lambda}{2}-3\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right]-\frac{3(-\lambda+x)-7}{4}=\frac{7x}{4}$ να έχει λύση τον αριθμό $x=2$.

γ) Αν $\lambda=5$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις $A=\sqrt{7+\sqrt{\sqrt{(-85)^2}-\sqrt{\lambda^2-9}}}$ και $B=\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{3})+2\sqrt{3}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{3})+1$ και να αναφέρετε αν οι αριθμοί Α και Β είναι ρητοί ή άρρητοι.

(Απ: α. $x=2$, ***β.*** $\lambda=5$, ***γ.*** $A=4$, $B=\sqrt{15}$, *Α ρητός και Β άρρητος)*

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\kappa=\sqrt{52-\sqrt{5+\sqrt{16}}}$ $\lambda=\sqrt{26-\sqrt{94+\sqrt{36}}}$ και $\mu=\sqrt{32}-\sqrt{98}+\sqrt{72}$.

α) Να απλοποιήσετε τους αριθμούς κ, λ και μ.

β) Για $\kappa=7$, $\lambda=4$ και $\mu=3\sqrt{2}$ να ελέγξετε αν το τρίγωνο με τις πλευρές αυτές είναι ορθογώνιο.

(Απ: α. $\kappa=7$, $\lambda=4$, $\mu=3\sqrt{2}$, ***β.*** *δεν είναι ορθογώνιο)*

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ο Νίκος έχει στη συλλογή των παιχνιδιών του 3 κύβους του Ρούμπικ, αυτοκινητάκια και ποδηλατάκια. Συνολικά έχει 27 παιχνίδια. Όλα τα παιχνίδια μαζί έχουν 62 ρόδες.

α) Να βρείτε πόσα αυτοκινητάκια και πόσα ποδηλατάκια έχει ο Νίκος στη συλλογή του.

β) Αν η ρόδα από κάθε αυτοκινητάκι έχει ακτίνα 5cm, να βρείτε το συνολικό μήκος και των τεσσάρων ροδών κάθε αυτοκινήτου.

γ) Πόσες μοίρες θα είναι η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου αν το σχεδιάσουμε μέσα σε μια ρόδα ενός ποδηλάτου το οποίο διαθέτει 6 ακτίνες?

(Απ. α. *7 αυτοκινητάκια, 17 ποδηλατάκια,* ***β.*** *40π ή 125,6cm*^{2}, ***γ.*** 60^o*)*

ΑΣΚΗΣΗ 4

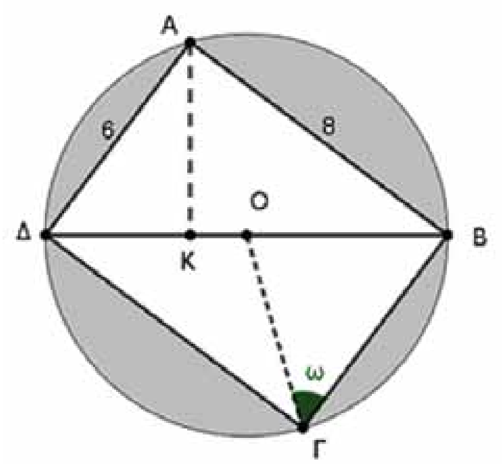
Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $\mathrm{A\Delta}=6cm$ και $\mathrm{AB}=8cm$,

α) Να βρεθεί η διαγώνιος ΔΒ

β) Να βρεθεί το ύψος ΑΚ

γ) Να βρεθεί το (γραμμοσκιασμένο) εμβαδόν εντός του κύκλου και εκτός του τετραπλεύρου.

δ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.



(Απ. α.** ΔΒ=10cm, **β.** ΑΚ=4,8cm, **γ.** $(25\pi-48)cm^2$ ή $30{,}5cm^2$, **δ.** $\eta\mu\omega=\frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}$**)

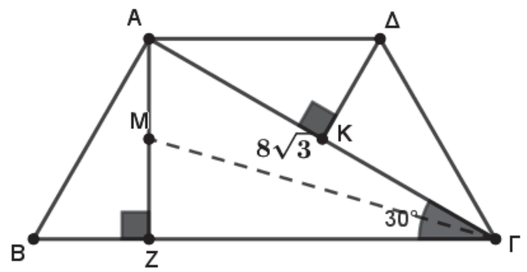
ΑΣΚΗΣΗ 5

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΔ//ΒΓ. Αν το ΑΖ είναι κάθετο στο ΒΓ, $\hat{ΑΓΒ}=30^0$, $ΑΓ=8\sqrt{3}$ cm, $ΑΔ=2ΒΖ$ cm και $(ΑΒΓΔ)=48\sqrt{3}$ cm^2, τότε:

α) Να δείξετε ότι $ΑΖ=4\sqrt{3}$, $ΓΖ=12$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΖΜ, όπου Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΖ.

β) Να δείξετε ότι $ΒΖ=4$ και να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΚ που είναι κάθετο στην ΑΓ.



	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

(Απ. α.** $E=12\sqrt{3}cm^2$, **β.** ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο, **γ.** $E=16\sqrt{3}cm^2$**)

ΑΣΚΗΣΗ 6

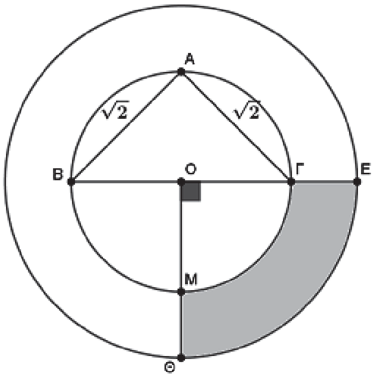
Δίνονται ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ΟΓ και ΟΕ. Αν ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν Ε=12,56cm^2 και ΑΒ=ΑΓ=$\sqrt{2}$ cm, τότε να υπολογίσετε:

α) Το ΒΓ και το εμβαδόν του μικρού κυκλικού δίσκου.

β) Την ακτίνα του μεγάλου κύκλου.

γ) Το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.

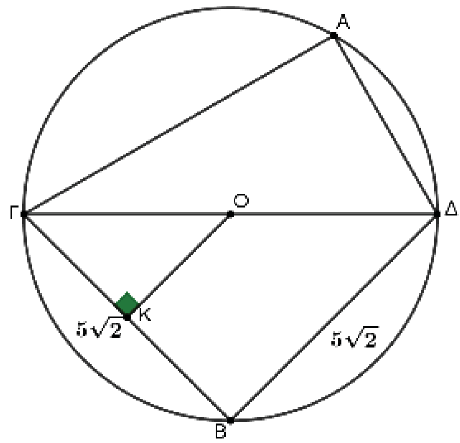
(Θεωρήστε $\pi\simeq3{,}14$)



(Απ. α. $B\Gamma = 2cm$, $E = 3{,}14cm^2$, ***β.*** $\rho = 2cm$, ***γ.*** $E = 2{,}355cm^2$**)**

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ στο παρακάτω σχήμα έχει διάμετρο ΓΔ, ενώ το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με πλευρά $B\Gamma = B\Delta = 5\sqrt{2}cm$ και το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$.



α) Να δείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5cm$ και να βρείτε τις πλευρές ΑΓ και ΑΔ του τριγώνου ΓΑΔ.

β) Αν $A\Gamma = 5\sqrt{3}cm$ και $A\Delta = 5cm$, τότε να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου και εξωτερικά του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ.

γ) Αν ΟΚ είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το Ο στην χορδή ΒΓ, τότε να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΚΒΔ.

(Απ. α. $A\Gamma = 5\sqrt{3}cm$, $A\Delta = 5cm$, **β.** $E \approx 31.8cm^2$, **γ.** $E = 18{,}75cm^2$**)**

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνονται σημεία Α και Β με συντεταγμένες $A(5\mu, 5\mu - 5)$ και $B(\lambda - 3, 2\lambda - 10)$, όπου το σημείο Α βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ και το σημείο Β έχει τετμημένη κατά ένα μικρότερη από την τετμημένη του σημείου Α.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Έστω ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $B(4,4)$.

- **i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.
- **ii.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$.

γ) Αν η ευθεία δ έχει εξίσωση $y = x - 5$, τότε:

- **i.** Να βρείτε το σημείο Γ που τέμνει η ευθεία δ τον άξονα $y'y$.
- **ii.** Να βρείτε το σημείο Κ της δ του οποίου η τετμημένη είναι διπλάσια της τεταγμένης.

(Απ. α. $A(5,0)$, $B(4,4)$, ***β. i.*** $y = x$ ***ii.*** $y = x - 5$, ***γ. i.*** $\Gamma(0,-5)$ ***ii.*** $K(10,5)$ ***)***

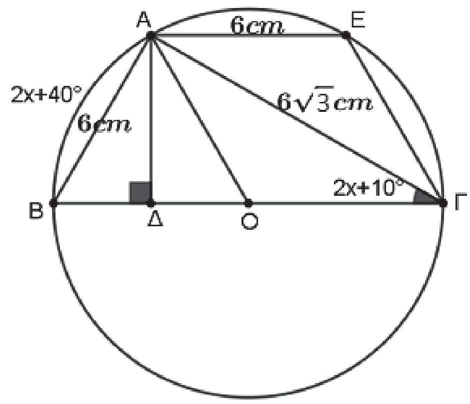
ΑΣΚΗΣΗ 9

Από ένα σημείο Α ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τις χορδές $AB = 6cm$ και $A\Gamma = 6\sqrt{3}cm$, έτσι ώστε το τόξο $\overset{\frown}{AB} = 2x + 40^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ που σχηματίζεται ισχύει ότι $\hat{\Gamma} = 2x + 10^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Gamma}B = 30^\circ$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

γ) Αν από το σημείο Α φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ, τέτοια ώστε ΑΕ = 6 cm, να βρείτε:



i. Το ύψος ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΕ.

ii. Το εμβαδό της επιφάνειας που βρίσκεται εντός του κυκλικού δίσκου και εκτός του τραπεζίου ΑΒΓΕ.

	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

(Απ. *β.* $\rho = 6cm,\ E = 36\pi cm^2$ ή $113{,}04cm^2$, ***γ. i.*** $A\Delta = 3\sqrt{3}cm$, ***ii.*** $E = 36\pi - 27\sqrt{3}cm^2$ ή $E \approx 66{,}3cm^2$)

ΑΣΚΗΣΗ 10

Έστω ευθεία (ε): $y = \frac{1}{2}x + \mu$, η οποία διέρχεται από σημείο με συντεταγμένες $\left(\mu,\ \frac{\mu}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να γράψετε την εξίσωση της.

β) Να μεταφέρετε τον πίνακα τιμών της ευθείας (ε) στην κόλλα των απαντήσεων σας και να τον συμπληρώσετε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

x	$-\frac{2}{3}$		4	
y		–2		$\frac{1}{3}$

γ) Έστω μια άλλη ευθεία (δ) η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο (2,6).

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας (δ).

ii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (δ) τέμνει τους άξονες y'y και x'x.

(Απ. α. $y = \frac{1}{2}x$, ***β.*** $y = -\frac{1}{3},\ x = -4,\ y = 2,\ x = \frac{1}{6}$, ***γ. i.*** $y = \frac{1}{2}x + 5$ ***ii.*** $(0,5),\ (-10,0)$ ***)***

Λυμένες Ασκήσεις Β΄ Γυμνάσιου

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $\frac{x-\lambda}{2} + \frac{x+\lambda}{3} = 1$ να έχει λύση τον αριθμό $x = 3$.

β) Για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση $\alpha x - 7 + \frac{\lambda}{3}x + 2\beta = 5(x+\beta) - 4$ είναι ταυτότητα;

ΛΥΣΗ

α) Για x = 3 η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{3-\lambda}{2}+\frac{3+\lambda}{3}=1 \quad ή \quad 6\cdot\frac{3-\lambda}{2}+6\cdot\frac{3+\lambda}{3}=6\cdot 1 \quad ή \quad 3(3-\lambda)+2(3+\lambda)=6 \quad ή$$

$$9-3\lambda+6+2\lambda=6 \quad ή \quad -3\lambda+2\lambda=6-6-9 \quad ή \quad -\lambda=-9 \quad ή \quad \lambda=9$$

β) Για $\lambda=9$ η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha x-7+3x+2\beta=5(x+\beta)-4 \quad ή \quad \alpha x-7+3x+2\beta=5x+5\beta-4 \quad ή$$

$$\alpha x+3x-5x=5\beta-2\beta+7-4 \quad ή \quad \alpha x-2x=3\beta+3 \quad ή \quad (\alpha-2)x=3\beta+3$$

Για να είναι ταυτότητα πρέπει να είναι της μορφής 0.x = 0, άρα πρέπει

$$\alpha-2=0 \quad δηλαδή \quad \alpha=2 \text{ και } \quad 3\beta+3=0 \quad ή \quad 3\beta=-3 \quad ή \quad \frac{3\beta}{3}=\frac{-3}{3} \quad ή \quad \beta=-1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια κυψέλη με μέλισσες αποτελείται από μία βασίλισσα, τις εργάτριες και τους κηφήνες. Σε μια κυψέλη υπάρχουν 126 μέλισσες. Κάθε μία εργάτρια παράγει 5 γραμμάρια μέλι την ημέρα. Η βασίλισσα τρώει 20 γραμμάρια μέλι την ημέρα. Κάθε κηφήνας τρώει 2 γραμμάρια μέλι την ημέρα. Αν στο τέλος της μέρας απομένουν συνολικά 220 γραμμάρια μέλι, να βρείτε πόσες εργάτριες και πόσους κηφήνες έχει η κυψέλη.

ΛΥΣΗ:

Έστω x ο αριθμός των εργατριών στην κυψέλη.
Τότε ο αριθμός των κηφήνων θα είναι $125-x$ (αφού υπάρχει και μια βασίλισσα).
Οι εργάτριες παράγουν συνολικά $5x$ γραμμάρια μέλι την ημέρα.
Η βασίλισσα τρώει 20 γραμμάρια μέλι την ημέρα.
Οι κηφήνες τρώνε συνολικά $2(125-x)$ γραμμάρια μέλι την ημέρα.

Αν από τα συνολικά γραμμάρια που παράγονται από τις εργάτριες, αφαιρέσουμε αυτά που τρώνε οι κηφήνες και η βασίλισσα, θα πρέπει να μείνουν 220 γραμμάρια. Έτσι με τα παραπάνω δεδομένα φτιάχνουμε την εξίσωση $5x-2(125-x)-20=220$.

Λύνοντας έχουμε:

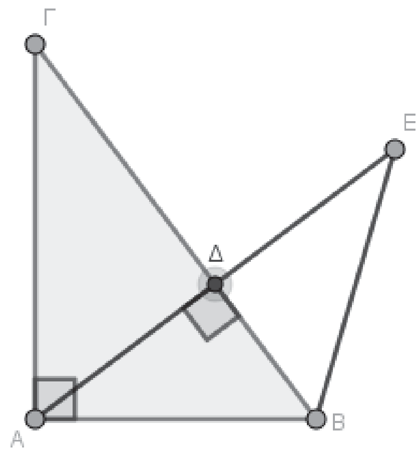
$$5x-2(125-x)-20=220 \quad ή \quad 5x-250+2x-20=220 \quad ή$$

$$5x+2x=220+250+20 \quad ή \quad 7x=490 \quad ή \quad x=70$$

Άρα υπάρχουν 70 εργάτριες και 125-70=55 κηφήνες στην κυψέλη.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ με ΑΒ=6 cmκαι ΑΓ= 8 cm.
Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ.
α) Να υπολογίσετε την ΓΒ και στην συνέχεια το ύψος ΑΔ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΕ.



ΛΥΣΗ

α) Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$\Gamma B^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε:

$\Gamma B^2 = 6^2 + 8^2$ ή $\Gamma B^2 = 100$ ή $\Gamma B = 10$

Για να βρούμε το ύψος ΑΔ, θα το κάνουμε μέσω του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. Το εμβαδό του ΑΒΓ είναι: $E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24cm^2$.

Επίσης:

$E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$, οπότε $24 = \frac{10 \cdot A\Delta}{2}$ ή $24 = 5 \cdot A\Delta$ ή $A\Delta = 4,8cm$

β) Το εμβαδό του ΑΒΕ είναι: $E = \frac{AE \cdot \Delta B}{2}$.

Ισχύει ότι $AE = 2 \cdot A\Delta = 9,6cm$. Για να βρούμε το τμήμα ΔΒ, θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ:

$\Delta B^2 = AB^2 - A\Delta^2$, οπότε:

$\Delta B^2 = 6^2 - 4,8^2$ ή $\Delta B^2 = 36 - 23,04$ ή $\Delta B^2 = 12,96$ ή $\Delta B = 3,6$

Τελικά έχουμε: $E = \frac{AE \cdot \Delta B}{2} = \frac{9,6 \cdot 3,6}{2} = 17,28cm^2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Στο παρακάτω σχήμα είναι $A\Gamma = 6cm$, $B\Gamma = 8cm$, το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma} = 74^o$ και Ο είναι το κέντρο του κύκλου.

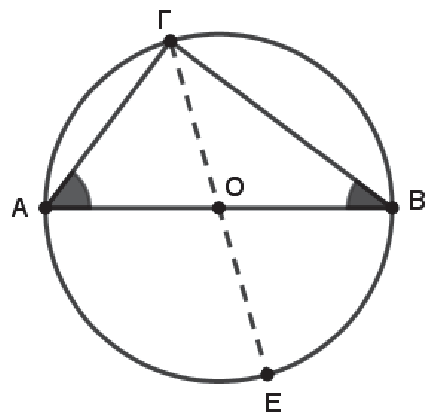
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε την γωνία $A\hat{O}E$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5cm$.

δ) Να βρείτε το μήκος του κύκλου.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου.



ΛΥΣΗ

α) $\hat{\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$ και $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{74^o}{2} = 37^o$.

Ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$, δηλαδή $\hat{A} + 37^o + 90^o = 180^o$, οπότε $\hat{A} = 53^o$

β) $A\hat{O}E = B\hat{O}\Gamma = \overset{\frown}{B\Gamma} = 180^o - \overset{\frown}{A\Gamma} = 180^o - 74^o = 106^o$

γ) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$. .

Δηλαδή $AB^2 = 6^2 + 8^2$ ή $AB^2 = 100$. Επομένως $AB = 10$. Άρα $\rho = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$

δ) $L = 2\pi\rho = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

ε) $E = \pi\rho^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η ευθεία ε_1 με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \mu$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του μ ώστε το σημείο $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Για την τιμή του μ που βρήκατε παραπάνω, να εξετάσετε αν το σημείο $\mathrm{B}(4,0)$ ανήκει στην ίδια γραφική παράσταση.

γ) Μια άλλη ευθεία, ε_2 είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο. Να βρείτε την εξίσωση της ε_2.

δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.

ε) Στο παραπάνω σχήμα να γραμμοσκιάσετε το τρίγωνο ΟΑΒ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

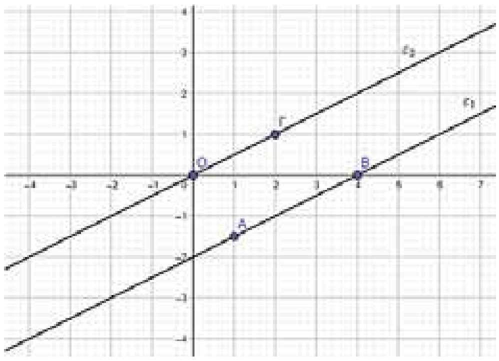
ΛΥΣΗ

α) Για να διέρχεται η ευθεία από το σημείο $A\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ θα πρέπει για $x=1$ να είναι $y=-\frac{3}{2}$.

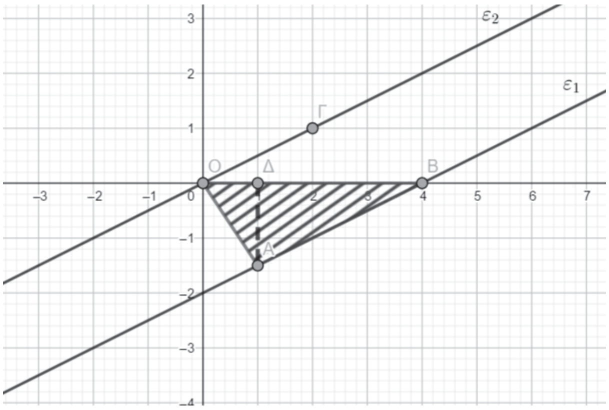
$-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1+\mu$ ή $\mu=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{2}=-2$. Άρα $\mu=-2$. Η εξίσωση της ε_1 είναι $y=\frac{1}{2}x-2$.

β) Αν $x=4$ τότε πράγματι $y=\frac{1}{2}\cdot 4-2=2-2=0$ που είναι η τεταγμένη του σημείου Β. Άρα το σημείο Β ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας ε_1.

γ) Εφόσον η ε_2 περνάει από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y=\alpha x$. Επιπλέον είναι παράλληλη στην ε_1, άρα θα έχουν την ίδια κλίση δηλαδή $y=\frac{1}{2}x$.



δ) Για την ε_1 γνωρίζουμε δύο σημεία, τα Α και Β, τα οποία αρκούν για να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
Για την ε_2 γνωρίζουμε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Χρειαζόμαστε τουλάχιστον άλλο ένα σημείο. Π.χ. για $x=2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση $y=\frac{1}{2}x$, παίρνουμε $y=1$. Το σημείο Γ(2,1) είναι σημείο της ε_2.



ε) Το ύψος του τριγώνου ΑΔ είναι η απόσταση του σημείου Α από τον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι ίση με την απόλυτη τιμή της τεταγμένης του σημείου Α.
Εμβαδόν τριγώνου ΟΑΒ:

$$E=\frac{OB\cdot A\Delta}{2}=\frac{4\cdot\frac{3}{2}}{2}=3.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένας υπάλληλος τηλεφωνικών πωλήσεων έχει μηνιαίο μισθό 800 ευρώ και παίρνει επιπλέον 4% της συνολικής αξίας των πωλήσεων που πραγματοποιεί σε ένα μήνα για πωλήσεις μέχρι 30000 ευρώ.

α) Αν σε ένα μήνα ο υπάλληλος πέτυχε πωλήσεις αξίας x ευρώ, να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές του υπαλλήλου y ως συνάρτηση της αξίας των πωλήσεων x.

β) Αν σε ένα μήνα ο υπάλληλος πέτυχε πωλήσεις αξίας 3000 ευρώ, να βρεθεί ο μισθός του υπαλλήλου για το μήνα αυτό.

γ) Πόση είναι η αξία των πωλήσεων που πρέπει να πετύχει ο υπάλληλος σε ένα μήνα, αν θέλει ο μισθός του κατά το μήνα αυτό να φτάσει τα 1000 ευρώ;

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει μήνας κατά τον οποίον ο συνολικός μισθός του υπαλλήλου να αντιστοιχεί στο 2% των πωλήσεων του μήνα αυτού.

ε) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του y με το x.

ΛΥΣΗ

α) Ο υπάλληλος λαμβάνει κάθε μήνα μισθό 800 ευρώ και επιπλέον αν έχει πετύχει πωλήσεις αξίας x ευρώ θα λάβει το 4% αυτού του ποσού x. Άρα οι συνολικές του αποδοχές σε ένα μήνα θα είναι $y = 800 + \frac{4}{100}x$ ή, ισοδύναμα, $y = 800 + 0,04x$.

β) Για $x = 3000$, αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης παίρνουμε:

$$y = 800 + 0,04 \cdot 3000 = 800 + 120 = 920 \text{ ευρώ}.$$

γ) Αν ο υπάλληλος θέλει να λάβει μισθό 1000 ευρώ σε ένα μήνα, δηλαδή $y = 1000$, τότε αντικαθιστώντας και πάλι στον τύπο της συνάρτησης παίρνουμε:

$1000 = 800 + 0,04x$ ή $0,04x = 200$ ή $x = 5000$.

Άρα ο υπάλληλος κάποιο μήνα πρέπει να πετύχει πωλήσεις αξίας 5000 ευρώ ώστε ο μισθός του το μήνα αυτό να είναι 1000 ευρώ.

δ) Αν υπάρχει μήνας κατά τον οποίο ο μισθός του y να αντιστοιχεί στο 2% των πωλήσεων x του μήνα αυτού τότε θα πρέπει $y = \frac{2}{100}x$, δηλαδή $y = 0,02x$.

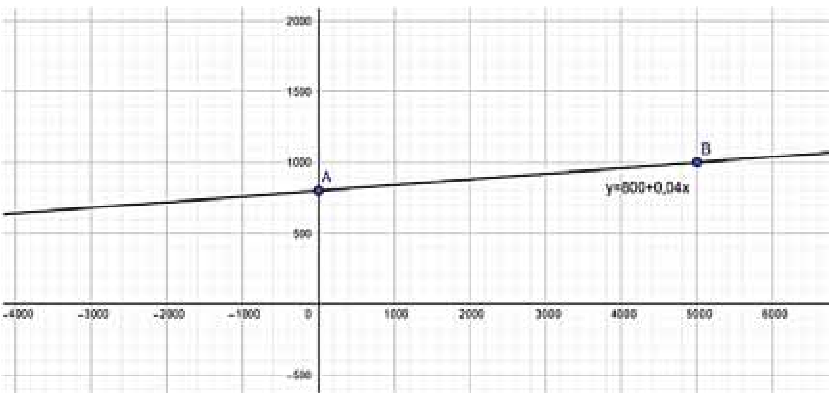
Αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης παίρνουμε:

$$0,02x = 800 + 0,04x \quad \text{ή} \quad 0,02x - 0,04x = 800 \quad \text{ή} \quad 0,02x = 800 \quad \text{ή} \quad x = 40000$$

Όμως οι πωλήσεις δεν μπορούν να υπερβαίνουν τα 30000 ευρώ.

Άρα δεν υπάρχει μήνας που ο συνολικός μισθός του υπαλλήλου να αντιστοιχεί στο 2% των πωλήσεων.

ε) Η συνάρτηση έχει μορφή $y = 800 + 0,04x$, που σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(0,800)$ του άξονα $y'y$.



Χρειαζόμαστε άλλο ένα σημείο. Μπορούμε π.χ. να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία από το ερώτημα (Γ) όπου για $x = 5000$ γνωρίζουμε ότι $y = 1000$ δηλαδή η ευθεία περνάει και από το σημείο $B(5000,1000)$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18}$, $\Lambda = \dfrac{-\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{27} - \sqrt{48}}$ και

$$M = \left(\sqrt{27} - \sqrt{63}\right)\left(\sqrt{12} + \sqrt{28}\right)$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων K, Λ και M.

β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος K cm και η υποτείνουσα έχει μήκος Λcm. Να βρείτε το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς.

γ) Αν η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίση με Mcm και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του, να βρείτε:

i. τις διαστάσεις του παραλληλογράμμου

ii. το εμβαδόν του παραλληλογράμμου

iii. το μήκος της διαγωνίου του παραλληλογράμμου

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τη βασική ιδιότητα $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ αναλύουμε τις υπόρριζες ποσότητες σε γινόμενο δύο αριθμών.

$$K = 2\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2 \cdot 16} - 2\sqrt{2 \cdot 25} + \sqrt{2 \cdot 9} = 8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Lambda = \frac{-\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{27} - \sqrt{48}} = \frac{-\sqrt{3 \cdot 25} + \sqrt{3 \cdot 4}}{\sqrt{3 \cdot 9} - \sqrt{3 \cdot 16}} = \frac{-5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 3$$

$$M = \left(\sqrt{27} + \sqrt{63}\right)\left(\sqrt{28} - \sqrt{12}\right) = \left(\sqrt{3 \cdot 9} + \sqrt{7 \cdot 9}\right)\left(\sqrt{7 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 4}\right) = \left(3\sqrt{3} + 3\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right) =$$

$$6\sqrt{3}\sqrt{7} - 6\sqrt{3}^2 + 6\sqrt{7}^2 - 6\sqrt{3}\sqrt{7} = -18 + 42 = 24$$

β) Έστω x το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε: $\sqrt{2}^2 + x^2 = 3^2$, οπότε $x^2 = 9 - 2$ ή $x^2 = 7$ ή $x = \sqrt{7}$

Άρα η άλλη κάθετη πλευρά έχει μήκος $\sqrt{7}cm$.

γ) i. Έστω μ το μήκος του παραλληλογράμμου και π το πλάτος του. Γνωρίζουμε ότι η περίμετρός του είναι ίση με Μ, δηλαδή με 24cm. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση $2\mu + 2\pi = 24$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους δηλαδή $\mu = 2\pi$

Άρα $2\mu + 2\pi = 24$ ή $2 \cdot 2\pi + 2\pi = 24$ ή $6\pi = 24$ ή $\pi = 4$.

Συνεπώς το παραλληλόγραμμο έχει πλάτος 4cm και μήκος 8cm.

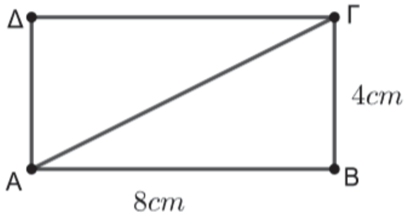
ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \mu \cdot \pi = 8 \cdot 4 = 32cm^2$

iii. Αν δ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμου, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\delta^2 = \mu^2 + \pi^2$$

$$\delta^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

$$\delta = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}cm$$



Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Παρατηρήστε προσεκτικά τις παρακάτω 4 ισότητες.

1	$3^2 + 4^2 = 5^2$
2	$5^2 + 12^2 = 13^2$
3	$7^2 + 24^2 = 25^2$
4	$9^2 + 40^2 = 41^2$
5	
6	
7	

Βρείτε έναν ή περισσότερους κανόνες με τους οποίους δημιουργούνται αυτές οι ισότητες και γράψτε την ισότητα που θα πρέπει να τοποθετηθεί στην $7^η$ σειρά ώστε να ισχύουν οι κανόνες που έχετε εντοπίσει.

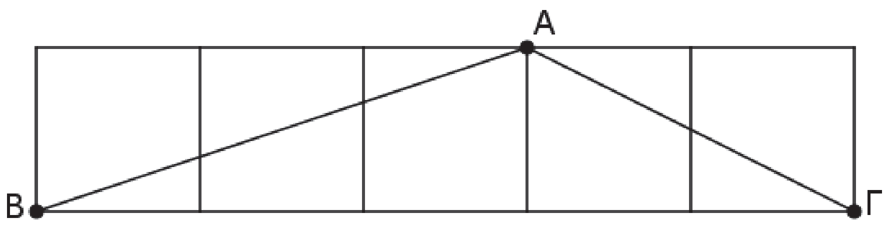
2) Διαθέτουμε 2009 αβγά και τα συσκευάζουμε σε θήκες της ίδιας χωρητικότητας. Στο τέλος περισσεύουν 7 αβγά. Πόσα αυγά χωράει η κάθε θήκη αν γνωρίσουμε ότι ο αριθμός των θηκών είναι μεγαλύτερος του 200 αλλά μικρότερος του 300;

3) Θεωρούμε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β που έχουν την ιδιότητα α+β=10.

Θεωρούμε τώρα την παράσταση $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση αυτή, για τις διάφορες τιμές των α και β;

Υπόδειξη: Θεωρήστε δεδομένη της παρακάτω πρόταση:
«Από όλα τα ζεύγη αριθμών που έχουν το ίδιο άθροισμα μεγαλύτερο γινόμενο έχει το ζεύγος στο οποίο οι δυο αριθμοί είναι ίσοι». Για παράδειγμα από όλα τα ζεύγη αριθμών με άθροισμα 12 το ζεύγος (6, 6) δίνει το μεγαλύτερο γινόμενο, δηλαδή 36.

4) Στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν 5 τετράγωνα και ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α βρίσκεται στην κορυφή ενός τετραγώνου από τα 5, ενώ οι κορυφές Β και Γ βρίσκονται σε ακραίες κορυφές των ακραίων τετραγώνων.

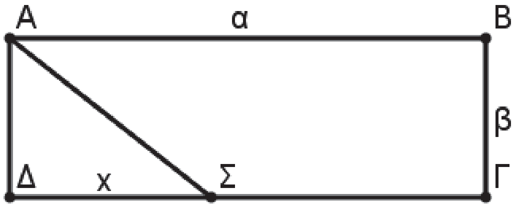


Να περιγράψετε μία διαδικασία (αλγόριθμο) με την οποία θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, με την μέγιστη δυνατή προσέγγιση, χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων.

5) Σε έναν Μαθηματικό διαγωνισμό ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών που πέρασαν ήταν 15 ενώ ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών που δεν πέρασαν ήταν 9. Αν ο συνολικός μέσος όρος στο διαγωνισμό αυτόν ήταν 13 ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που πέρασαν στο διαγωνισμό;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 115

1) Έστω α, β το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου και x η απόσταση του σημείου Σ από το Δ.



Τότε θα ισχύει (ΑΒΓΣ)=3(ΑΔΣ) δηλαδή

$$\frac{\alpha+(\alpha\text{-}x)}{2}\cdot\beta=3\cdot\frac{x\cdot\beta}{2}$$

από όπου προκύπτει ότι $x=\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή το Σ θα πρέπει να τοποθετηθεί στο μέσον του τμήματος ΓΔ.

2) Επειδή το άθροισμα των τριών πρώτων είναι άρτιος αριθμός αυτό σημαίνει ότι ένας από αυτούς είναι άρτιος και οι άλλοι δύο περιττοί. Από αυτό προκύπτει ότι ο ένας από αυτούς είναι ο 2 και οι δύο άλλοι έχουν άθροισμα 38. Οι δύο πρώτοι αριθμοί που έχουν άθροισμα 38 είναι ο 7 και ο 31 των οποίων η διαφορά είναι 24.

3) Αν x η αρχική αξία του εμπορεύματος τότε το κέρδος από την πρώτη πώληση ήταν $\frac{x}{3}\cdot 0{,}15$ από την δεύτερη πώληση το κέρδος ήταν $\frac{x}{4}\cdot 0{,}20$ και από την τελευταία πώληση το κέρδος ήταν $\frac{5x}{12}\cdot 0{,}24$ σε ευρώ. Από τα παραπάνω ισχύει $\frac{x}{3}\cdot 0{,}15+\frac{x}{4}\cdot 0{,}20+\frac{5x}{12}\cdot 0{,}24=3.200$ από όπου προκύπτει ότι x=16.000€.

4) Ο αριθμός 75 αναλύεται σε γινόμενο ως εξής 1×3×5×5. Αυτό σημαίνει ότι ο τετραψήφιος αριθμός αποτελείται από τα ψηφία 1, 3, 5, 5 σε κάποια σειρά την οποία δεν μπορούμε να γνωρίζουμε. Το άθροισμα των ψηφίων είναι 1+3+5+5=14.

5) Απάντηση: Αρχικά παρατηρούμε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής διαιρούνται με 3 άρα

$$\frac{2121212121210}{1121212121211}=\frac{3\times 707070707070}{3\times 373737373737}.$$

Τώρα είναι φανερό ότι ο αριθμητής διαιρείται με 70 και ο παρονομαστής διαιρείται με 37 οπότε το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{70\times 10101010101}{37\times 10101010101}=\frac{70}{37}$$

Επαναληπτικά Θέματα
Γ΄ Γυμνασίου

Συλλογική Εργασία Καθηγητών του Τμήματος Μαθηματικών
του Pierce-Αμερικανικού Κολλεγίου Ελλάδος

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A(x)=\frac{(x^2-x-6)^2-(7x+14)(x-3)^2}{(x^2-3x-10)^2+(2x-10)(x+2)^2} \text{ και } B(x)=\frac{(3x^2-2x+3)^2-4(x-3)^2}{16(x+2)^2-(x^2-4x-9)^2}.$$

i. Να απλοποιήσε B(x)=1ε τις π P(x-1) αρας Q(x)= -x^2+3x-1 τάσεις και να αποδείξετε ότι

$$A(x)=\frac{x-3}{x+2} \text{ και } B(x)=\frac{3(3x^2-4x+9)}{-x^2+8x+17}.$$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $A(x^2)=A(-x)$. iii. Να λύσετε την εξίσωση

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : ii. $x=0$ ή $x=-1$ **iii.** x=1 (διπλή λύση)

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=3x^2-4x$ και

i. Να βρεθούν τα πολυώνυμα και Q(-x).

ii Να λυθεί η εξίσωση P(x-1)+2Q(-x)=-59.

iii. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{P(x-1)-2x-22}{P(x)-x^2+4x-50}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: i. $P(x-1)=3x^2-10x+7$ και $Q(-x)=-x^2-3x-1$

ii. $x=8$ (διπλή λύση) **iii.** $\frac{3(x+1)}{2(x+5)}$

3. i. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$$A=(\sqrt{2}-1)^2-(2\sqrt{2}-1)\cdot(1+2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+(1-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{6}+2)$$

$$B=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\eta\mu 60^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 30^\circ\cdot\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 120^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 135^\circ}$$

ii. Να βρείτε τους αριθμούς x, ψ με x< 0 ,όταν x + ψ = Α και x·ψ = Β

iii. Αν για την γωνία φ ισχύει: $90^0<\varphi<180^0$ και $\eta\mu\varphi=-\frac{x}{\psi}$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνφ και εφφ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : i. $A=1$.,και $B=-6$ **ii.** $(x,y)=(-2,3)$ δεκτή ή $(x,y)=(2,-3)$ απορ.

iii. $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}$ απορρίπτεται ή $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ δεκτή και $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ δεκτή

4. i. Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ αν η εξίσωση: $x^2+\left(\kappa-\frac{\lambda}{2}\right)x-(3\kappa+\lambda)=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1.
ii. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=30^0$, $AB=\lambda^4$, ΑΔ ύψος, ΓΔ = 4λ+κ.
Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ, τη γωνία Γ και την πλευρά ΑΓ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : i. $\kappa=0$ και $\lambda=2$ **ii.** ΑΔ =8 και $\hat{\Gamma}=45^0$ και ΑΓ=$8\sqrt{2}$

5. i. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ όταν :

$$\kappa=(\sigma\upsilon\nu150^0-\sigma\upsilon\nu30^0)^2+(\eta\mu135^0-\eta\mu45^0)^2 \text{ και } \lambda=(2\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-2)^2$$

ii. Να δείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{\lambda}{10},\frac{\kappa}{4}\right)$ είναι σημείο τομής των ευθειών

(ε_1) 4x - 4ψ - 5 =0 και (ε_2) x + 4ψ -5 = 0

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : i. $\kappa=3$ και $\lambda=20$ **ii.** με αντικατάσταση του $A\left(2,\frac{3}{4}\right)$

6. Έχουμε τα πολυώνυμα:

$$P(x)=x^4-5x^2+4,\ Q(x)=x^3+3x^2+2x \text{ και } R(x)=x^3-7x+6$$

i. Να αποδείξετε ότι:

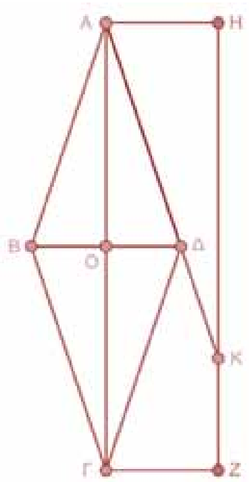
$$(x-3)^3(x+1)-15(x-1)^2+8(x-1)(x^2-2)-2(7x-15)=P(x)$$

ii. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης P(x) = 0 είναι λύση της εξίσωσης Q(x) = 0 και το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης Q(x) = 0 είναι λύση της εξίσωσης R(x) = 0.
iii. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\frac{P(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: i. πράξεις **ii.** άθροισμα λύσεων της P(x) = 0 είναι ίσο με 0 και άθροισμα λύσεων της εξίσωσης Q(x) = 0 είναι ίσο με –3.

7. Θεωρούμε ρόμβο ΑΒΓΔ, με διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ και Ο το σημείο τομής τους, έτσι ώστε ΒΔ = 4. Στη διαγώνιο ΑΓ σχηματίζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΓΖΗ, με ΑΗ = 3.
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα.
ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΗΚ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.
iii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(B O\Gamma)}{(AHK)}$.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ :
ii. $\lambda=\frac{2}{3}$ **iii.** $\frac{4}{9}$

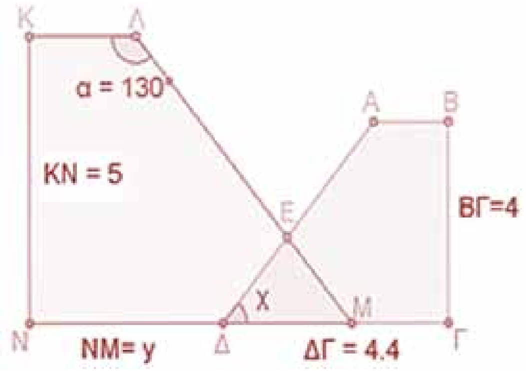
8. **Τα ορθογώνια τραπέζια ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ του διπλανού σχήματος είναι όμοια.**

i. **Να υπολογιστούν οι τιμές των x και y.**

ii. **Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ΑΕΜ.**

iii. **Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $(ΚΛΜΝ)=17,5cm^2$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ.**

(Δίνεται ότι: $ημ80^\circ=0,985$, $συν80^\circ=0,174$ **και** $εφ80^\circ=5,671$**)**



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ :

i. $x=50^\circ$ και $y=5,5cm$

ii. $ημAEM=0,985$ και $συνAEM=-0,174$ και $εφAEM=-5,671$

iii. $AB=1,2cm$

9. **Δίνονται οι παραστάσεις $A(x)=(5x-2)^2+2(2-5x)(x-3)+(3-x)^2$ και $B(x)=4(2-x)^2-9(2x-1)^2$.**

i. **Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραπάνω παραστάσεις.**

ii. **Να λυθεί η εξίσωση $A(x)=2B(x)$.**

Λύση :

i. $A(x)=(5x-2)^2+2(2-5x)(x-3)+(3-x)^2=$

$=(5x-2)^2-2(5x-2)(x-3)+(x-3)^2=$

$=[(5x-2)-(x-3)]^2=$

$=(5x-2-x+3)^2=$

$=(4x+1)^2$

Επιπλέον $B(x)=4(2-x)^2-9(2x-1)^2=$

$=[2(2-x)]^2-[3(2x-1)]^2=[2(2-x)-3(2x-1)]\cdot[2(2-x)+3(2x-1)]=$

$=(4-2x-6x+3)\cdot(4-2x+6x-3)=(-8x+7)\cdot(4x+1)$

ii. $A(x)=2\cdot B(x)\Leftrightarrow(4x+1)^2=2(-8x+7)\cdot(4x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(4x+1)^2-2(-8x+7)\cdot(4x+1)=0\Leftrightarrow(4x+1)\cdot(4x+1+16x-14)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(4x+1)\cdot(20x-13)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$ ή $x=\frac{13}{20}$

10. **Έχουμε την ευθεία $-3x+2y+6=0$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄xστο σημείο Α(α, 0) και τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, β). Έχουμε επίσης τα πολυώνυμα: $P(x)=-κx^2+λx+2$ και $Q(x)=κx^2+2λx+3$ και γνωρίζουμε ότι το P(x) έχει ρίζα το α και το Q(x) έχει ρίζα το β.**

i. **Να βρείτε τους αριθμούς α και β.**

ii. **Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.**

iii. Να λύσετε τις εξισώσειςP(x)= 0 και Q(x) = 0.

iv. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\mathbf{A = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$

Λύση:

i. Η ευθεία 3x – 2y + 6 = 0 τέμνει τον άξονα x΄xστο σημείο με y = 0, επομένως για y = 0 η εξίσωση γίνεται: $-3x + 2\cdot 0 + 6 = 0$

$$-3x + 6 = 0$$
$$-3x = -6$$
$$x = 2.$$

Επομένως το σημείο που τέμνει τον άξονα x΄x είναι το A(2, 0). Δηλαδή: α = 2.

Η ευθεία 3x – 2y + 6 = 0 τέμνει τον άξονα y΄yστο σημείο με x = 0, επομένως για x = 0 η εξίσωση γίνεται: $-3\cdot 0 + 2\cdot y + 6 = 0$

$$2\cdot y = -6$$
$$y = -3\ .$$

Επομένως το σημείο που τέμνει τον άξονα y΄y είναι το B(2, -3). Δηλαδή: β = -3.

ii. Δηλαδή το $P(x) = -\kappa x^2 + \lambda x + 2$ έχει ρίζα το 2, άρα: $P(2) = 0$

Έχουμε: $-\kappa\cdot(2)^2 + \lambda\cdot 2 + 2 = 0$

$$-4\kappa + 2\lambda + 2 = 0$$
$$-2\kappa + \lambda + 1 = 0 \qquad \text{(διαιρούμε με 2)}$$
$$-2\kappa + \lambda = -1$$

Το $Q(x) = \kappa x^2 + 2\lambda x + 3$ έχει ρίζα το -3, άρα: $Q(-3) = 0$

Έχουμε: $\kappa\cdot(-3)^2 + 2\lambda\cdot(-3) + 3 = 0$

$$9\kappa - 6\lambda + 3 = 0$$
$$3\kappa - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \text{(διαιρούμε με 3)}$$
$$3\kappa - 2\lambda = -1$$

Προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} -2\kappa + \lambda = -1 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases}$

το οποίο θα λύσουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Έχουμε: $\begin{cases} -2\kappa + \lambda = -1 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases}$

πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με το 2:

$\begin{cases} -4\kappa + 2\lambda = -2 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases}$ και προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει:

$-\kappa + 0 = -3$, άρα $\kappa = 3$. Αντικαθιστούμε το $\kappa = 3$ στην πρώτη εξίσωση του αρχικού συστήματος και έχουμε: $-2\cdot 3 + \lambda = -1$

$-6 + \lambda = -1$, επομένως: $\lambda = 5$.

Επομένως για κ = 3 και λ = 5 τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) γίνονται: $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$ και $Q(x) = 3x^2 + 10x + 3$.

iii. Έχουμε τις εξισώσεις: $-3x^2 + 5x + 2 = 0$ και $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

Θα λύσουμε τις εξισώσεις με τη χρήση των τύπων.

Έχουμε:

$$-3x^2+5x+2=0 \qquad\qquad \Delta=5^2-4\cdot(-3)\cdot 2=25+24=49>0$$

Επομένως έχουμε δύο ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\cdot(-3)}=\frac{-5\pm 7}{-6}$$

Δηλαδή: $x_1=\frac{-5+7}{-6}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_2=\frac{-5-7}{-6}=\frac{-12}{-6}=2$

Η δεύτερη εξίσωση: $3x^2+10x+3=0$

$$\Delta=10^2-4\cdot 3\cdot 3=100-36=64>0$$

Επομένως έχουμε δύο ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2\cdot 3}=\frac{-10\pm 8}{6}$$

Δηλαδή: $x_1=\frac{-10+8}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_2\frac{-10-8}{6}=\frac{-18}{6}=-3$

iv. Θέλουμε να απλοποιήσουμε την παράσταση:

$$A=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Επομένως πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τα πολυώνυμα:

$$P(x)=-3x^2+5x+2 \text{ και } Q(x)=3x^2+10x+3.$$

Από τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε βρει ότι οι ρίζες του P(x) είναι οι αριθμοί: $x_1=-\frac{1}{3}$ και $x_2=2$.

Επομένως έχουμε: $P(x)=-3x^2+5x+2=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)$

Οι ρίζες του Q(x) είναι οι αριθμοί: $x_1=-\frac{1}{3}$ και $x_2=-3$.

Επομένως έχουμε: $Q(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)$

Άρα η παράσταση A γίνεται: $A=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)}=\frac{-(x-2)}{x+3}=\frac{-x+2}{x+3}$

11. Έχουμε ένα ορθογώνιο του οποίου το μήκος είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερο από το διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 3 μονάδες και υποδιπλασιάσουμε το μήκος του, προκύπτει ένα ορθογώνιο που έχει το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό. Να βρείτε τις διαστάσεις και το εμβαδόν των δύο ορθογωνίων.

Λύση:

Αν ονομάσουμε xτο πλάτος του αρχικού ορθογωνίου, τότε το μήκος του είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερο από το διπλάσιο του πλάτους του, είναι δηλαδή ίσο με 2x + 2.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε = πλάτος· μήκος, επομένως: $E = x\cdot(2x+2) = 2x^2+2x$

Στη συνέχεια αυξάνουμε το πλάτος του κατά 3 μονάδες, άρα γίνεται x + 3 και υποδιπλασιάζουμε το μήκος του, το οποίο γίνεται (2x + 2) :2 = x + 1.

Επομένως το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδόν:

$$E=(x+3)(x+1)=x^2+x+3x+3=x^2+4x+3$$

Τα δύο ορθογώνια όμως, έχουν το ίδιο εμβαδόν, άρα:

$$2x^2+2x=x^2+4x+3$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$2x^2+2x=x^2+4x+3$$
$$2x^2+2x-x^2-4x-3=0$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x^2-3x+x-3=0$$
$$x^2+x-3x-3=0$$
$$x(x+1)-3(x+1)=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$

$x+1=0$ ή $x-3=0$ Άρα έχουμε: $x=-1$ ή $x=3$ Είναι και οι δύο τιμές του x δεκτές;

Προφανώς η τιμή x = -1 απορρίπτεται διότι το πλάτος xδεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

Αν x = 3, τότε το αρχικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις: Πλάτος = 3μον. και Μήκος = 8μον.

Επομένως το εμβαδόν του είναι Ε = 24 τ. μον.

Το δεύτερο ορθογώνιο έχει διαστάσεις: Πλάτος = 6μον. και Μήκος = 4 μον.

Επομένως το εμβαδόν του είναι Ε = 24 τ. μον.

12. i. Αν η ευθεία (ε) : x+y·συνφ = 1, $0^0<\varphi<90^0$ διέρχεται από το σημείο Α(0,2) να δείξετε ότι φ=60^0.

ii. Αν το ημω με $0^0<\omega<90^0$ είναι λύση της εξίσωσης $2x^2+5x-3=0$ να δείξετε ότι $\omega=30^0$.

iii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\eta\mu^2\omega+\eta\mu^2\varphi}{(\eta\mu\varphi-\eta\mu\omega)(\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu\omega)}$.

Λύση:

i. Για $x=0$ και $y=2$ έχουμε $2\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=1$ άρα $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{1}{2}$ και αφού $0^0<\varphi<90^0$ τελικά $\varphi=60^\circ$.

ii. Για την εξίσωση $2x^2+5x-3=0$ έχουμε ότι:

$$\Delta=49 \text{ άρα } x_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x_2=\frac{-5-7}{4}=-3.$$

Επομένως, $\eta\mu\omega=-3$ που είναι αδύνατη ή $\eta\mu\omega=\dfrac{1}{2}$ από την οποία προκύπτει ότι $\omega=30^\circ$ αφού $0^0<\omega<90^0$.

iii. Με αντικατάσταση στη σχέση έχουμε :

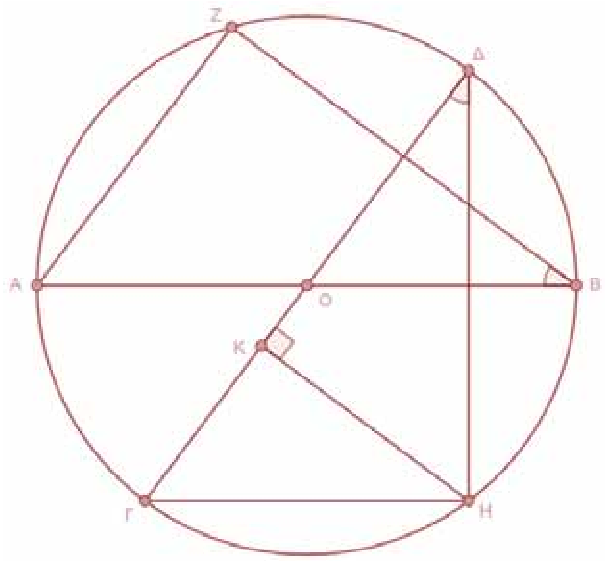
$$A=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=\frac{4}{2}=2$$

13. **Σε κύκλο $(O, 5cm)$ φέρουμε τις διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Στα άκρα τους Β και Δ σχηματίζουμε τις ίσες γωνίες $A\hat{B}Z$ και $\Gamma\hat{\Delta}H$, όπου Ζ και Η αντίστοιχα είναι τα σημεία τομής των πλευρών των γωνιών με τον κύκλο.Από το σημείο Η φέρουμε κάθετη προς την ΓΔ, έστω την ΗΚ.**

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΗ είναι ίσα και να γράψετε τις ισότητες των αντίστοιχων στοιχείων τους.

ii. Αν ΓΗ = 6cm, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΖ.

iii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΚΗΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΗΚ.



Λύση:

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΗ:

- $A\hat{Z}B = \Gamma\hat{H}\Delta = 90^\circ$, αφού οι γωνίες $A\hat{Z}B$ και $\Gamma\hat{H}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες σε κύκλο και βαίνουν σε ημικύκλιο,
- $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}H$, από υπόθεση,
- ΑΒ = ΓΔ, ως διάμετροι του κύκλου.

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση), τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, και επομένως έχουν και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους αντίστοιχα ίσα.

Οπότε, ΑΖ = ΓΗ, ΒΖ = ΔΗ και $B\hat{A}Z = H\hat{\Gamma}\Delta$.

ii. Αφού το τρίγωνο ΗΓΔ είναι ορθογώνιο, θα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\Gamma H^2 + \Delta H^2 = \Gamma\Delta^2 \Rightarrow 6^2 + \Delta H^2 = 10^2 \Rightarrow \Delta H^2 = 100 - 36 \Rightarrow \Delta H^2 = 64 \Rightarrow \Delta H = 8cm.$$

Όμως, ΒΖ = ΔΗ, οπότε ΒΖ = 8cm.

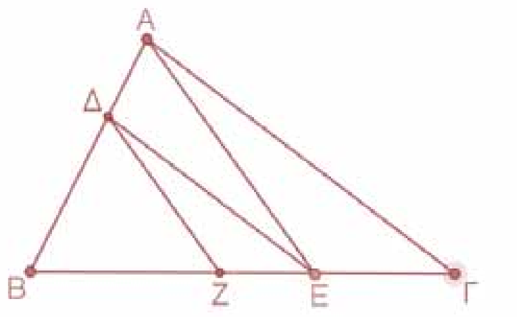
iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΚΗΓ:

- $A\hat{Z}B = \Gamma\hat{H}\Delta = 90^\circ$, από ερώτημα (α) και από κατασκευή,
- $B\hat{A}Z = K\hat{\Gamma}H$, από ερώτημα (α).
-

Άρα, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.
Ο λόγος ομοιότητας τους θα είναι:

$$\lambda = \frac{AB}{\Gamma H} = \frac{AZ}{K\Gamma} = \frac{BZ}{HK}, \text{ οπότε: } \frac{AB}{\Gamma H} = \frac{BZ}{HK} \Leftrightarrow \frac{10}{6} = \frac{8}{HK} \Leftrightarrow HK = \frac{6\cdot 8}{10} = \frac{48}{10} \Leftrightarrow HK = \frac{24}{5}.$$

14. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στην ΑΓ η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Στη συνέχεια από το Δ φέρουμε παράλληλη στην ΑΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Ζ.



i. Να δείξετε ότι $ΒΕ^2 = ΒΖ \cdot ΒΓ$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΔΒΖ και ΑΒΕ.

iii. Αν γνωρίζουμε ότι $(ΑΒΕ) = 4,5cm^2$, να δείξετε ότι:

$$(ΔΒΖ) = ημ^2 5^\circ + ημ^2 95^\circ + συν^2 175^\circ + συν^2 85^\circ .$$

Λύση:

i. Αφού ΔΖ//ΑΕ με εφαρμογή του Θεωρήματος Θαλή στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε :

$$\frac{ΒΕ}{ΒΖ} = \frac{ΒΑ}{ΒΔ} \text{ (σχέση 1).}$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ με ΔΕ//ΑΓ έχουμε:

$$\frac{ΒΑ}{ΒΔ} = \frac{ΒΓ}{ΒΕ} \text{(σχέση 2).}$$

Από σχέσεις 1 και 2 έχουμε

$$\frac{ΒΕ}{ΒΖ} = \frac{ΒΓ}{ΒΕ} \Leftrightarrow ΒΕ^2 = ΒΖ \cdot ΒΓ$$

ii. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΑΒΕ έχουν:

- $\hat{Β} = \hat{Β}$ (κοινή γωνία)
- $Β\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Α}Ε$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των ΔΖ//ΑΕ που τέμνονται από ΑΒ)

Άρα, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.
Ο λόγος ομοιότητας τους θα είναι:

$$λ = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{\frac{2}{3}ΑΒ}{ΑΒ} = \frac{2}{3} \text{ και ο λόγος των περιμέτρων θα είναι ίσος με } \frac{Π_{ΔΒΖ}}{Π_{ΑΒΕ}} = \frac{2}{3}.$$

iii. $$\frac{(ΒΔΖ)}{(ΑΒΕ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(ΒΔΖ)}{4,5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 9 \cdot (ΒΔΖ) = 18 \Leftrightarrow (ΒΔΖ) = 2cm^2$$

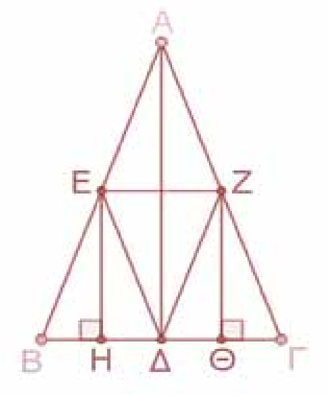
Έχουμε ότι :

$$ημ^2 5^\circ + ημ^2 95^\circ + συν^2 175^\circ + συν^2 85^\circ = ημ^2 5^\circ + ημ^2\left(180^\circ - 85^\circ\right) + συν^2\left(180^\circ - 5^\circ\right) + συν^2 85^\circ =$$

$$ημ^2 5^\circ + ημ^2 85^\circ + \left(-συν 5^\circ\right)^2 + συν^2 85^\circ = ημ^2 5^\circ + συν^2 5^\circ + ημ^2 85^\circ + συν^2 85^\circ = 1 + 1 = 2$$

άρα, $\frac{(ΒΔΖ)}{(ΑΒΕ)} = ημ^2 5^\circ + ημ^2 95^\circ + συν^2 175^\circ + συν^2 85^\circ$.

15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ.
Θεωρούμε Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις αποστάσεις ΕΗ και ΖΘ των μέσων από τη βάση ΒΓ.



i. **Να δείξετε ότι ΒΘ=ΗΓ.**
ii. **Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές.**
iii. **Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΕΗΒ και ΑΔΒ είναι όμοια και στη συνέχεια να βρείτε το λόγο των εμβαδών τους $\dfrac{(ΕΗΒ)}{(ΑΔΒ)}$.**

Λύση:

i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΒ και ΖΘΓ. Αυτά έχουν:

- ΕΒ=ΖΓ (ως μισά ίσων πλευρών)
- $\hat{B} = \hat{Γ}$ (ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου)

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια αντίστοιχη πλευρά και μια αντίστοιχη οξεία γωνία ίση οπότε είναι ίσα.
Έτσι θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα δηλαδή ΒΗ=ΘΓ, ΕΗ=ΖΘ και ΒΕΗ=ΘΖΓ.

Οπότε, ΒΘ=ΒΗ+ΗΘ=ΘΓ+ΗΘ=ΗΓ.

ii. Γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος που καταλήγει στη βάση ισοσκελούς είναι και διάμεσος, άρα ΒΔ=ΔΓ. Αφού ΒΗ=ΘΓ από ερώτημα i τελικά ΗΔ=ΔΘ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΔ και ΖΘΔ.

Αυτά έχουν:

- ΗΔ=ΔΘ (αποδείχθηκε παραπάνω)
- ΕΗ=ΖΘ (ερώτημα i)

Τα τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε ΔΕ=ΔΖ δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές.

iii. Η διχοτόμος που καταλήγει στη βάση ισοσκελούς είναι και ύψος. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΒ και ΑΔΒ έχουν:

- $\hat{B} = \hat{B}$ (κοινή γωνία)
- $\hat{H} = \hat{Δ}\ (=90^\circ)$

Άρα, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.
Ο λόγος ομοιότητας τους θα είναι:

$$λ = \frac{ΕΒ}{ΑΒ} = \frac{ΕΒ}{2ΕΒ} = \frac{1}{2},\ άρα\ \frac{(ΕΗΒ)}{(ΑΔΒ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Να υπολογίστε το αποτέλεσμα της αριθμητικής παράστασης:

$$\Pi=(2^2+4^2+6^2+8^2+\ \dots\ +100^2)-(1^2+3^2+5^2+7^2\ +\dots\ +99^2)$$

2) Ο μη μηδενικός πραγματικός αριθμός x είναι διαφορετικός του 3 και ικανοποιεί της σχέση:

$$x^2-\frac{15}{x}=4\,.$$

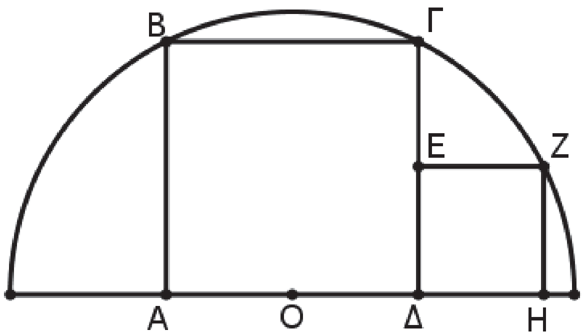
Υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$$

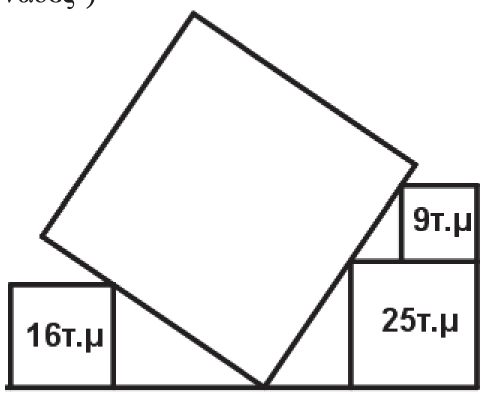
3) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: x^2-3x+1=0 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$x^6-18x^3.$$

4) Σε ένα ημικύκλιο με κέντρο Ο εγγράφουμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα τετράγωνο ΔΕΖΗ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Να αποδείξετε ότι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι διπλάσια από την πλευρά του μικρού.



5) Στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν 4 τετράγωνα για τα οποία γνωρίζουμε το εμβαδόν των τριών. Πόσο απέχουν τα τετράγωνα με εμβαδά 16τ.μ και 25τ.μ αντίστοιχα; (τ.μ είναι τα αρχικά των λέξεων ¨τετραγωνικές μονάδες¨)

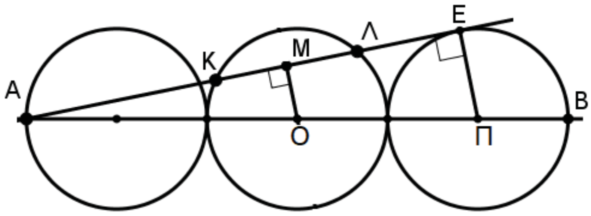


Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 115

1) Φέρνουμε από τα κέντρα των δύο κύκλων κάθετες προς την εφαπτομένη.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΟ και ΑΕΠ είναι όμοια και επομένως $\frac{ΑΠ}{ΠΕ}=\frac{ΑΟ}{ΟΜ}$ αλλά $\frac{ΑΠ}{ΠΕ}=\frac{6}{1}$

άρα και $\frac{ΑΟ}{ΟΜ}=\frac{6}{1}$ που σημαίνει ότι $ΟΜ=\frac{1}{6}\cdot 3ρ=\frac{1}{2}ρ$.



Αν φέρουμε την ΟΚ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΚ ισχύει ΟΚ=ρ και $ΟΜ=\frac{ρ}{2}$.
Με Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε το

$$ΜΚ=\frac{\sqrt{3}}{2}ρ \text{ άρα } ΚΛ=\sqrt{3}\cdot ρ$$

2) Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον αριθμητή και τον παρονομαστή σε κάθε κλάσμα είναι 2000. Αυτό μας οδηγεί να δοκιμάσουμε για λύση τον αριθμό 2000 και προκύπτει ότι πράγματι είναι λύση. Επειδή η εξίσωση είναι πρώτου βαθμού άρα θα έχει μοναδική λύση τον αριθμό 2000.

3) Το κλάσμα $\frac{(ν+2)^2}{ν-3}$ γ ράφεται $\frac{(ν+2)^2}{ν-3}=\frac{ν(ν-3)+7ν+4}{ν-3}=ν+\frac{7ν+4}{ν-3}=ν+\frac{7(ν-3)+25}{ν-3}=ν+7+\frac{25}{ν-3}$

Παρατήρηση: Ο στόχος ήταν να δημιουργήσουμε μία ποσότητα στην οποία να έχουμε εξάγει τις ακέραιες παραστάσεις από το κλάσμα, οπότε η διερεύνηση θα περιοριστεί μόνο στην ποσότητα $\frac{25}{ν-3}$. Εδώ τώρα θα πρέπει ο ν-3 να είναι διαιρέτης του 25, δηλαδή 1 ή 5 ή 25 άρα ο ν θα πρέπει να πάρει την τιμή 4 ή την τιμή 8 ή την 28.

4) Σε ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς, η περίμετρος είναι ίση με 8 μονάδες μήκους. Να βρεθεί το εμβαδόν του.
Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι οι α, β, γ τότε α+β+γ=8. Καθώς οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι και κάθε πλευρά θα πρέπει να είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων προκύπτει ότι η μοναδική δυνατότητα είναι δύο πλευρές να έχουν μήκος 3 και η άλλη 2 (μονάδες μήκους). Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση 2.
Αν φέρουμε το ύψος από την κορυφή δημιουργείται ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά 1 και υποτείνουσα 3 άρα η άλλη κάθετη πλευρά (το ύψος του) θα είναι ίσο με $\sqrt{3^2-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.
Με βάση τα προηγούμενα το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι ίσο με $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

5) Παρατηρούμε ότι φαίνεται να ισχύει πως τα τετράγωνα των περιττών αριθμών όταν διαιρούνται με 8 αφήνουν υπόλοιπο 1.
Πράγματι $(2ν+1)^2=4ν^2+4ν+1=4ν(ν+1)+1$. Επειδή το γινόμενο ν(ν+1) είναι ζυγός άρα θα έχει τη μορφή 2κ και τελικά το τετράγωνο του περιττού 2ν+1 παίρνει τη μορφή $4\cdot 2κ+1=8κ+1$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 115

Α62. Έστω α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=\sqrt{3}\alpha\beta,\quad \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=\sqrt{3}\alpha\gamma.$$

Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{\beta}{\gamma}$.

Χογκ Κογκ, 2002

Λύση

Με πρόσθεση κατά μέλη και αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων, λαμβάνουμε:

$$2\alpha^2=\sqrt{3}\alpha\left(\beta+\gamma\right)\overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow}2\alpha=\sqrt{3}\left(\beta+\gamma\right) \qquad (1)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων, λαμβάνουμε:

$$2\left(\beta^2-\gamma^2\right)=\sqrt{3}\alpha\left(\beta-\gamma\right)\Rightarrow 2\left(\beta+\gamma\right)\left(\beta-\gamma\right)=\sqrt{3}\alpha\left(\beta-\gamma\right). \qquad (2)$$

Αν $\beta\neq\gamma$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$2\left(\beta+\gamma\right)=\sqrt{3}\alpha \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) έχουμε: $\beta+\gamma=\dfrac{\sqrt{3}\alpha}{2}=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}}\Rightarrow 3=4$, άτοπο.

Άρα είναι $\beta=\gamma$, οπότε: $\dfrac{\beta}{\gamma}=1$.

Ν39. Να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο ν στον οποίο, αν επισυνάψουμε δεξιά του οποιοδήποτε ψηφίο $\mu>0$, τότε ο ακέραιος που προκύπτει διαιρείται με το μ.

Ουκρανία, 2014

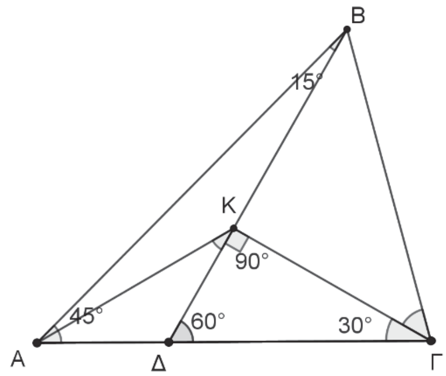
Λύση

Μετά την επισύναψη του ψηφίου $\mu>0$, ο αριθμός παίρνει τη μορφή $\overline{\nu\mu}=10\nu+\mu$. Ζητάμε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε ο ακέραιος $\overline{\nu\mu}=10\nu+\mu$ να διαιρείται με οποιοδήποτε θετικό ψηφίο μ. Παρατηρούμε ότι:

$$\mu\,|\,10\nu+\mu,\ \text{για κάθε ψηφίο } \mu>0\Leftrightarrow \mu\,|\,10\nu,\ \text{για κάθε ψηφίο } \mu>0.$$

Επειδή ο ακέραιος 10ν διαιρείται με τους διαιρέτες του 10, δηλαδή τους $1,2$ και 5, αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του ν που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός 10ν να διαιρείται και με τους ακέραιους 4, 7 και 9, αφού τότε θα διαιρείται και με τους 3, 6 και 8.

Επομένως, αφού οι 4, 7 και 9 είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο η ελάχιστη τιμή του ν είναι $4\cdot 7\cdot 9=252$.



Γ43. Τα σημεία Α, Δ και Γ με τη διάταξη που δίνεται είναι συνευθειακά, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = 2\cdot A\Delta$. Θεωρούμε σημείο Β έτσι ώστε $\Gamma\hat{A}B = 45^0$ και $\Gamma\hat{\Delta}B = 60^0$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$.

Ουκρανία, 2014

Λύση

Επειδή η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΑΔ, έχουμε:

$$A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma - B\hat{A}\Delta = 60^0 - 45^0 = 15^0.$$

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $\Gamma\Delta = 2\cdot A\Delta$ φέρουμε από το σημείο Γ κάθετη, έστω ΓΚ, προς την ευθεία ΒΔ. Τότε το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{\Gamma}K = 30^0$, οπότε:

$$\Delta K = \frac{\Delta\Gamma}{2} = A\Delta \ .$$

Άρα το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισοσκελές με $A\hat{K}\Delta = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

Όμως η γωνία $A\hat{K}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΒ, οπότε

$$K\hat{A}B = A\hat{K}\Delta - A\hat{B}K = 30^0 - 15^0 = 15^0,$$

οπότε και το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με $KA = KB$.
Επιπλέον, και το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές, γιατί

$$K\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma - B\hat{A}K = 45^0 - 15^0 = 30^0 = K\hat{\Gamma}A.$$

Άρα έχουμε: $K\Gamma = KA = KB$, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Επομένως έχουμε: $B\hat{\Gamma}K = 45^0$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}K + K\hat{\Gamma}\Delta = 45^0 + 30^0 = 75^0$.

Ασκήσεις για λύση

Α63. Αν α,β,γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\beta,\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\gamma,\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\gamma,$$

είναι θετικός.

Γ44. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση των πλευρών ΑΓ και ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι: $A\Delta = \Gamma E$.

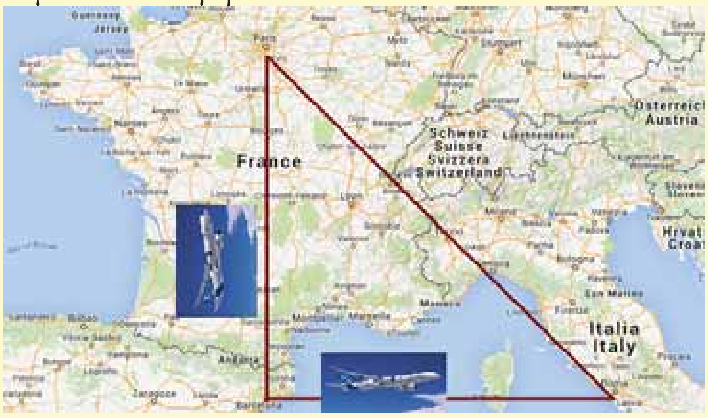
Ν40. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους οι ακέραιοι $12n - 119$ και $75n - 539$ είναι τέλεια τετράγωνα.

ΤΑΞΙΔΕΥΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Χρήστος Ζαφειρόπουλος

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε τα παρακάτω προβλήματα της Φυσικής (ή μήπως των Μαθηματικών;) Ας αποφασίσετε εσείς σε ποια επιστήμη ανήκουν τα παρακάτω δύο προβλήματα.

Ας «πετάξουμε» νοερά με τον Πυθαγόρα:

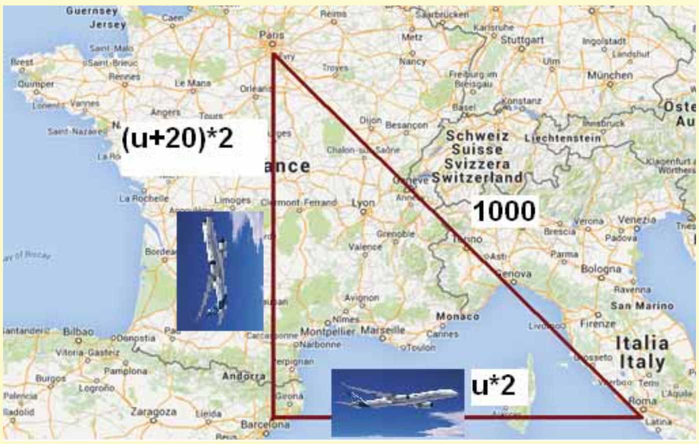


Δύο αεροπλάνα αναχωρούν ταυτόχρονα από την Βαρκελώνη (το νοτιοδυτικό σημείο του ορθογωνίου τριγώνου στον χάρτη). Τα δύο αεροπλάνα θεωρούμε ότι ταξιδεύουν με σταθερή ταχύτητα. Το πρώτο κάνει την διαδρομή Βαρκελώνη – Ρώμη, ενώ το δεύτερο την διαδρομή Βαρκελώνη – Παρίσι με ταχύτητα 20 Km/h μεγαλύτερη από το πρώτο. Και οι δύο πτήσεις διαρκούν 2 ώρες η καθεμία. Γνωρίζοντας ότι η απόσταση Παρίσι – Ρώμη είναι περίπου 1000 Km, θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κάθε αεροπλάνου.

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι:

$$Ταχύτητα\ του\ αερποπλάνου = \frac{Απόσταση\ που\ διήνυσε}{Χρόνο\ που\ χρειάστηκε}$$

Λύση



Έστω u Km/h η ταχύτητα του πρώτου αεροπλάνου το οποίο κάνει την διαδρομή Βαρκελώνη – Ρώμη.

Επομένως, από την σχέση της Φυσικής, πολλαπλασιάζοντας χιαστή την ταχύτητα με τον χρόνο (2 ώρες) έχουμε ότι η απόσταση της Βαρκελώνης από την Ρώμη ισούται με 2u Km. Δηλαδή:

$$u = \frac{Απόσταση \text{ Βαρκελώνης − Ρώμης}}{2} \Leftrightarrow Απόσταση \text{ Βαρκελώνης − Ρώμης} = 2u$$

Εφόσον u Km/h η ταχύτητα του πρώτου αεροπλάνου, άρα η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου είναι u+20 Km/h.

Εφόσον η διαδρομή πραγματοποιείται στον ίδιο χρόνο, από την σχέση της Φυσικής, πολλαπλασιάζοντας χιαστί την ταχύτητα με τον χρόνο (2 ώρες) έχουμε ότι η απόσταση Βαρκελώνη – Παρίσι ισούται με $2 \cdot (u + 20)$ Km. Δηλαδή:

$$u + 20 = \frac{Απόσταση\ Βαρκελώνης - Παρίσι}{2} \Leftrightarrow Απόσταση\ Βαρκελώνης - Παρίσι = 2(\mathrm{u} + 20)$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις πόλεις σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Σύμφωνα με το **Πυθαγόρειο Θεώρημα** ισχύει ότι:

(Απόσταση_Βαρκελώνης_Ρώμης)^2 + (Απόσταση_Βαρκελώνης_Παρίσι)^2 =

(Απόσταση_Παρίσι_Ρώμης)^2⇒

$$(2u)^2 + [2 \cdot (u + 20)]^2 = 1000^2 \Rightarrow 4u^2 + 4(u + 20)^2 = 1000^2 \Rightarrow$$

$$4u^2 + 4(u^2 + 40u + 400) = 1000^2 \Rightarrow 4u^2 + 4u^2 + 160u + 1600 = 1000^2 \Rightarrow$$

$$4u^2 + 4u^2 + 160u + 1600 - 1000000 = 0 \Rightarrow 8u^2 + 160u - 998400 = 0$$

$$\Rightarrow 8(u^2 + 20u - 124800) = 0 \Rightarrow u^2 + 20u - 124800 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-124800) = 400 + 499200 = 499600$$

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{499600}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 707}{2} =$$

$= \frac{-20+707}{2} = \frac{687}{2} = 343$ *(η αρνητική ρίζα προφανώς απορρίπτεται).*

Επομένως, το πρώτο αεροπλάνο έχει ταχύτητα 343 Km/h ενώ το δεύτερο 343+20 = 363 Km/h.

- Ας «πλεύσουμε» τώρα με τον Πυθαγόρα:

Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από το Παλέρμο (το νοτιοανατολικό σημείο του ορθογωνίου τριγώνου του παρακάτω χάρτη). Τα δύο πλοία θεωρούμε ότι ταξιδεύουν με σταθερή ταχύτητα. Το πρώτο κάνει την διαδρομή Παλέρμο – Νάπολη, ενώ το δεύτερο την διαδρομή Παλέρμο – Κάλιαρι με ταχύτητα 10 Ναυτικά Μίλια ανά ώρα μεγαλύτερη από το πρώτο. Και οι δύο πλεύσεις διαρκούν 4 ώρες η καθεμία. Γνωρίζοντας ότι η απόσταση Νάπολη – Κάλιαρι είναι 256 Ναυτικά μίλια, θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κάθε πλοίου.

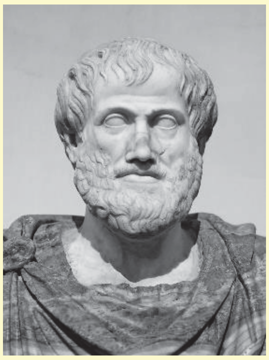
- Ξέρουμε ότι: 1 Ναυτικό μίλι = 1852 Μέτρα.
- Οι τρεις πόλεις σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
- Από την φυσική γνωρίζουμε ότι: $Ταχύτητα\ του\ πλοίου = \frac{Απόσταση\ που\ διήνυσε}{Χρόνο\ πλεύσης}$

Καλή σας «πλεύση».

Κλασική λογική - ασαφής λογική. Παραδείγματα.

Επιμέλεια: **Χρήστος Ζιώγας** – Μαθηματικός MSc

Ο Αριστοτέλης πρώτος ανέπτυξε συστηματικά - με αρχές και κανόνες - την επιστήμη της λογικής (γνωστής ως **κλασικής**), η οποία έγινε ευρέως αποδεκτή στα μαθηματικά και στην επιστήμη μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα. Τότε άρχισε σταδιακά η "μετεξέλιξή της" – ονομάστηκε συμβολική ή τυπική ή μαθηματική λογική, η οποία δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια μαθηματικοποίηση των κανόνων (δηλαδή γραμμένων με συμβολικό τρόπο αντί για φυσική γλώσσα) της λογικής, όπως αυτοί πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Αριστοτέλη.



Αριστοτέλης (384 - 322 π.Χ.).
θεωρείται ο πατέρας της λογικής.

Η λογική ασχολείται με τη μελέτη διαδικασιών και κανόνων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από υποθέσεις σε συμπεράσματα.

Η διαδικασία με την οποία ο νους καταστρώνει ένα επιχείρημα λέγεται **συλλογισμός**. *Παράδειγμα ορθού συλλογισμού*:

- Κανένα τρίγωνο δεν είναι τετράπλευρο.
  Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο.
  Άρα, κανένας ρόμβος δεν είναι τρίγωνο.

Παρά τις κριτικές και αμφισβητήσεις που δέχτηκε η κλασική λογική, εξακολουθεί να χρησιμοποιείται και σήμερα σε όλους τους τομείς των θετικών επιστημών και της φιλοσοφίας. Βέβαια έχει αδυναμίες, αφού για παράδειγμα είναι αδύνατο να μοντελοποιήσουμε τις προτάσεις μιας φυσικής γλώσσας με αυτή. Αυτό ώθησε τους επιστήμονες στην εισαγωγή νέων λογικών, όπως της **ασαφούς** λογικής που είναι η προσπάθεια τους να μελετήσουν και να κατανοήσουν τη δομή της φυσικής γλώσσας του ανθρώπου και να την μαθηματικοποιήσουν σε συμβολικό επίπεδο.

Ό,τι έχει σχέση με την κλασική λογική είναι συνυφασμένο με το 0 ή το 1. Πράγματι, ***μια πρόταση στην κλασική λογική μπορεί να έχει μόνο δύο τιμές, 0 (αν η πρόταση είναι ψευδής) ή 1 (αν η πρόταση είναι αληθής).*** Μια τέτοια λογική λέγεται δίτιμη. Αληθή χαρακτηρίζεται κάθε πρόταση, η οποία περιγράφει μια πραγματική κατάσταση, ενώ ψευδή κάθε πρόταση, η οποία περιγράφει μια μη υπαρκτή κατάσταση.

Παραδείγματα:

- Ο αριθμός 1022 είναι φυσικός αριθμός. Αληθής (τιμή 1)
- Το 100 είναι μικρότερο του 10. Ψευδής (τιμή 0)
- Ο αριθμός -1 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 + 1=0$. Ψευδής (τιμή 0)
- Ο αριθμός $\sqrt{64}$ ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Αληθής (τιμή 1)
- Ο Βόλος είναι πρωτεύουσα του Νομού Μαγνησίας. Αληθής (τιμή 1)
- Η Πάρνηθα είναι μία μεγάλη λίμνη. Ψευδής (τιμή 0)

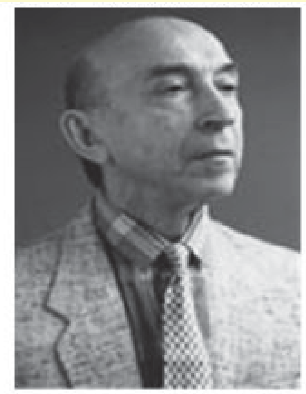
Όμως στην καθημερινή επικοινωνία των ανθρώπων χρησιμοποιούνται αρκετές φορές ασαφείς εκφράσεις, όπως:

- Η θερμοκρασία είναι **κοντά** στους 20^0 C.
- Πίνω ένα **γλυκό** καφέ **νωρίς** κάθε πρωί.
- Κατοικώ **δίπλα** στον Βόλο.

- Ο μισθός του Νίκου **πλησιάζει** τα 1000 €.

Στις παραπάνω εκφράσεις ***υπάρχει ασάφεια, δηλαδή απροσδιοριστία ή ανακρί-βεια***, γιατί μπορεί να έχουμε και άλλες τιμές μεταξύ 0 και 1, μεταξύ του συμβαίνει ή δεν συμβαίνει. Για παράδειγμα, ο γλυκός καφές μπορεί για κάποιον να περιέχει δύο κουταλιές ζάχαρη, για κάποιον άλλο τρεις κουταλιές κ.ο.κ. Νωρίς κάθε πρωί για κάποιον μπορεί να σημαίνει στις 7 π.μ., για κάποιον άλλο στις 7.30 π.μ., κ.ο.κ. Είναι δυνατό λοιπόν να βρούμε πολλές διαφορετικές εκδοχές – πρακτικά άπειρες.

Επομένως υπήρξε η ανάγκη για ανάπτυξη μιας λογικής με περισσότερες από δύο τιμές σε μια πρόταση. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε μία επέκταση της κλασικής λογικής. Μία τέτοια λογική λέγεται πλειότιμη. «**Τ' είναι θεός; τί μη θεός; και τί τ' ανάμεσό τους;**» αναρωτιόνταν στο ποίημά του Ελένη ο Γιώργος Σεφέρης το 1955. ***Διαρκής λοιπόν η αναζήτηση του ενδιάμεσου των ακραίων καταστάσεων, των αποχρώσεων του γκρι ανάμεσα στο μαύρο και το άσπρο***.


Όλα είναι θέμα βαθμού" τονίζει ο ***Zadeh***

Το 1965, **ο Zadeh - μαθηματικός και μηχανικός** – έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας των ασαφών συνόλων, ανοίγοντας παράλληλα το δρόμο και για τις πρακτικές εφαρμογές της ασαφούς λογικής. Το ασαφές σύνολο είναι ένας μηχανισμός με τον οποίο αποδίδουμε τον βαθμό (από το 1 έως το 0) στον οποίο κάποιο αντικείμενο έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Έτσι μια πρόταση που δεν είναι αληθής δεν σημαίνει αναγκαία ότι είναι ψευδής, αλλά μπορεί να είναι μερικά αληθής και μερικά ψευδής – όπως π.χ. ένα μισογεμάτο ποτήρι. Έχουμε λοιπόν βαθμό συμμετοχής 1 αν το ποτήρι είναι γεμάτο με νερό.

Επίσης, για παράδειγμα, αποδίδουμε βαθμό συμμετοχής 0.8 αν το νερό βρίσκεται αρκετά πάνω από τη μέση του ποτηριού, βαθμό συμμετοχής 0.6 αν βρίσκεται λίγο πιο πάνω από τη μέση, βαθμό συμμετοχής 0.9 αν βρίσκεται πολύ κοντά στην κορυφή του ποτηριού κ.ο.κ. Τέλος έχουμε βαθμό συμμετοχής 0 αν το ποτήρι δεν έχει καθόλου νερό. Η έννοια της ***σταδιακής*** ή ***βαθμιαίας μετάβασης*** από την κατάσταση της *συμμετοχής* ενός στοιχείου σε ένα σύνολο, στην κατάσταση της *μη συμμετοχής* είναι το **κύριο χαρακτηριστικό** των ασαφών συνόλων.

1^{o} παράδειγμα ασαφούς συνόλου. Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο A={φυσικοί αριθμοί κοντά στο *9*}.

Καταρχήν σκεφτόμαστε - ***με βάση την γνώση και την εμπειρία που έχουμε*** - ποιοι φυσικοί αριθμοί περιβάλλουν τον αριθμό 9. Έτσι καταλήγουμε στο σύνολο X={6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} στο οποίο περιλαμβάνονται οι αριθμοί πέριξ του 9.

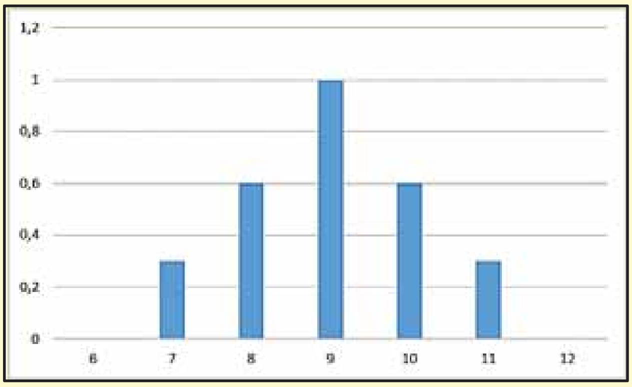
Έπειτα αντιστοιχούμε βαθμό συμμετοχής από 1 έως 0 σε κάθε στοιχείο του X:

- **1** στο φυσικό αριθμό *9*
- **0.6** στους φυσικούς αριθμούς *8* και 10
- **0.3** στους φυσικούς αριθμούς *7* και *11*
- **0** στους φυσικούς αριθμούς 6 και *12*

Επομένως, έχουμε το ασαφές σύνολο: $A = \frac{1{,}0}{9} + \frac{0{,}6}{8} + \frac{0{,}6}{10} + \frac{0{,}3}{7} + \frac{0{,}3}{11} + \frac{0{,}0}{6} + \frac{0{,}0}{12}.$

Με αυτό τον τρόπο έχει καθιερωθεί να γράφονται τα ασαφή σύνολα. Το + και το κλάσμα δεν έχουν κανένα μαθηματικό νόημα. **Σε κάθε στοιχείο** (στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε κάθε αριθμό) **του συνόλου αντιστοιχούμε ένα βαθμό συμμετοχής**.

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη συμμετοχή κάθε στοιχείου του Χ στο ασαφές σύνολο Α.



Παρατηρήσεις:

i. Από το Χ απουσιάζουν οι αριθμοί π.χ. 3 και 14, γιατί δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι κατέχουν την ιδιότητα «*αριθμοί κοντά στο 9*» και συνεπώς ο βαθμός συμμετοχής τους είναι 0.

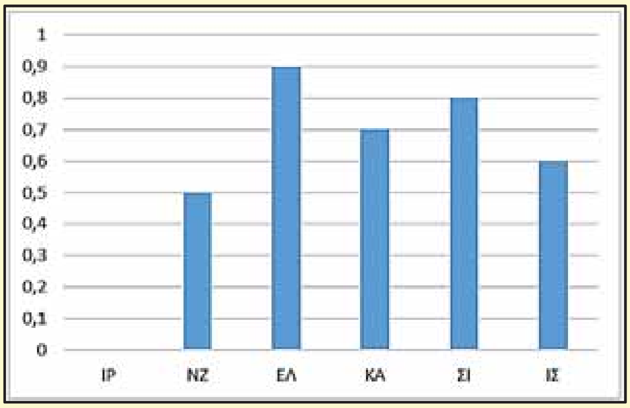
ii. Αν ***η φύση του προβλήματος*** επιβάλλει να έχουμε το σύνολο Χ= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 17, 18, 19, 20} τότε οι βαθμοί συμμετοχής θα είναι διαφορετικοί, εκτός από το βαθμό 1 στον αριθμό 9 που είναι ίδιος.

2^{o} παράδειγμα ασαφούς συνόλου. Έστω το σύνολο Y={ΣΙ, ΕΛ, ΙΡ, ΚΑ, ΙΣ, ΝΖ} το οποίο παριστάνει τις χώρες Σιγκαπούρη, Ελβετία, Ιράκ, Καναδάς, Ισπανία και Νέα Ζηλανδία αντίστοιχα. Θέλουμε να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο Β= {καλύτερες χώρες στον κόσμο για να ζει κανείς και να εργάζεται}.

Με βάση τα αποτελέσματα των δημοσκοπήσεων, οι προτιμήσεις του κοινού δια-μορφώνουν το ακόλουθο ασαφές σύνολο: $B=\frac{0,9}{ΕΛ}+\frac{0,8}{ΣΙ}+\frac{0,7}{ΚΑ}+\frac{0,6}{ΙΣ}+\frac{0,5}{ΝΖ}+\frac{0,0}{ΙΡ}$

Παρατήρηση: Το σύνολο Υ αποτελείται από μη διατεταγμένα στοιχεία, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια σχέση διάταξης μεταξύ των στοιχείων και συνεπώς παρατίθενται σε τυχαία σειρά.

Το παρκάτω γράφημα απεικονίζει τη συμμετοχή κάθε χώρας στο ασαφές σύνολο Β.



Η ασαφής λογική[1] (fuzzy logic) αποτελεί σήμερα μια αναγνωρισμένη επιστημονική θεωρία, κυρίως πρακτικού χαρακτήρα, με προσανατολισμό στην επίλυση ή τουλάχιστον στην επίτευξη καλύτερων λύσεων από αυτές των υπόλοιπων επιστημών, ικανή για την αντιμετώπιση προβλημάτων με υψηλό βαθμό αβεβαιότητας. Έχει άμεσες βιομηχανικές εφαρμογές που συνεισέφεραν στην ανθρώπινη εξέλιξη και πρόοδο.

Είναι χαρακτηριστικό ότι σε αναπτυγμένες τεχνολογικά χώρες όπως η Ιαπωνία, ***οι μαθητές***

[1] Σχετικό αρχείο: https://christosziogas.mysch.gr/wp-content/uploads/2020/01/ΑΣΑΦΕΙΣ-ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ-ΚΑΙ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.pdf

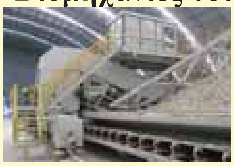
από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου διδάσκονται τις αρχές της ασαφούς θεωρίας συνόλων.

Που χρησιμοποιείται η ασαφής λογική;

- ✓ **Μετρό.**

Το ασαφές σύστημα ελέγχου περιλαμβάνει δύο βασικά τμήματα: τον ελεγκτή σταθερής ταχύτητας, ο οποίος ξεκινά το τρένο και το κρατά σε σταθερή ταχύτητα κάτω από ένα όριο ασφαλείας, και τον ελεγκτή αυτόματης πέδησης, ο οποίος ελέγχει την ταχύτητα του τρένου έτσι ώστε να σταματήσει σε ένα προκαθορισμένο σημείο. Με αυτό τον τρόπο έχουμε έως και 70% λιγότερα σφάλματα στην επιτάχυνση και την πέδηση σε σχέση με τους ανθρώπινους χειριστές.

- ✓ **Βιολογικός καθαρισμός** νερού, **τριφασικοί** κινητήρες, **Ρομποτικοί** βραχίονες.
- ✓ **Οικονομική** επιστήμη, **οικολογία**, **στατιστική**, **ψυχολογία**, **κοινωνιολογία**.
- ✓ **Ιατρικές** εφαρμογές, **γενετική** επιστήμη.
- ✓ **Βιομηχανίες τσιμέντου.**



Χρησιμοποιείται αυτόματος ασαφής ελεγκτής στην ανάμιξη των υλικών και την κατεργασία τους.

- ✓ **Πλυντήρια ρούχων.**

Αισθητήρες ανιχνεύουν το χρώμα και το είδος της βρωμιάς των ρούχων, όπως επίσης και τον όγκο της πλύσης. Στη συνέχεια ένα ασαφές σύστημα χρησιμοποιεί ασαφείς κανόνες για την αυτόματη επιλογή του κατάλληλου κύκλου πλύσης.

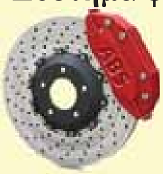
- ✓ **Συσκευές κλιματισμού.**

Με χρήση ασαφών κανόνων η θερμοκρασία αλλάζει αυτόματα σύμφωνα με τις περιβαλλοντολογικές συνθήκες και τις προτιμήσεις του χρήστη.

- ✓ **Μηχανές λήψης εικόνας και βίντεο.**

Ασαφής ελεγκτής ελέγχει την καλύτερη εστίαση και σταθεροποίηση της εικόνας.

- ✓ **Σύστημα φρένων** ABS,.



Αυτόματα **κιβώτια ταχυτήτων**, **ελεγκτές ταξιδιού** σε αυτοκίνητα Χρησιμοποιούνται ασαφή συστήματα πέδησης και μετάδοσης κίνησης.

- ✓ **Ανελκυστήρες.** Ασαφής ελεγκτής συμβάλει στην βέλτιστη ενεργειακή απόδοση.
- ✓ **Δορυφορικά** συστήματα επικοινωνιών, **τοπογραφικά** χαρτογράφησης.
- ✓ **Πυρηνική** φυσική, **διαστημική** τεχνολογία.
- ✓ Κατανομή καυσίμου ανάλογα με την πορεία πτήσης σε δεξαμενές **πολεμικών αεροσκαφών.**

Επίσης χρησιμοποιείται και σε πολλές άλλες εφαρμογές, ιδιαίτερα πάνω στον έλεγχο συστημάτων. Να τονισθεί ότι η ασαφής λογική και ειδικότερα τα ***ασαφή συστήματα*** (τα οποία αποτελούν υλοποίηση των ασαφών συνόλων) είναι ένας από τους τρεις πυλώνες της ***υπολογιστικής νοημοσύνης***, η οποία με τη σειρά της υπάγεται στο ευρύ πεδίο της τεχνητής νοημοσύνης.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΑΣ ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Με μια ματιά

- **Στον κύκλο όλα αθροίζονται σε 9**

Ένας κύκλος: $360^o=3+6+0=9$
Μισός κύκλος: $180^o=1+8+0=9$
Ένα τέταρτο του κύκλου: $90^o=9+0=9$
Ένα όγδοο του κύκλου: $45^o=4+5=9$
Ένα δέκατο έκτο του κύκλου: $22{,}5^o=2+2+5=9$
Ένα τριακοστό δεύτερο του κύκλου: $11{,}25^o=1+1+2+5=9$
Ένα εξηκοστό τέταρτο του κύκλου: $5{,}625^o=5+6+2+5=18=1+8=9$
Ένα εκατόν εικοστό όγδοο του κύκλου: $2{,}8125^o=2+8+1+2+5=18=1+8=9$
Ένα διακοσιοστό πεντηκοστό έκτο του κύκλου: $1{,}40625^o=1+4+0+6+2+5=18=1+8=9$
…………… κοκ ……………

ΓΡΙΦΟΙ

Αίνιγμα

- **Μήπως ξέρετε ποια μηχανή ενώ δουλεύει ασταμάτητα δεν θέλει καύσιμα; ούτε ρυπαίνει το περιβάλλον;**
- **Μήπως ξέρετε τι είναι εκείνο που πηγαίνει πάντα μπροστά και δεν γυρνάει ποτέ πίσω;**

Τα χωριά

Πάνω σε ένα χάρτη ένα χωριό Β είναι 4 εκατοστά ανατολικά του χωριού Α. Το χωριό Γ είναι 7 εκατοστά στα νότια του χωριού Β. Το χωριό Δ είναι 4 εκατοστά ανατολικά του Γ και το χωριό Ε είναι 10 εκατοστά βόρεια του Δ. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των χωριών Β και Ε αν η κλίμακα του χάρτη είναι 1:120000

Η εκδρομή

Τα χρήματα που είχε ο Γιάννης και η Ελένη όταν έφυγαν από το σπίτι είχαν λόγο 13/17. Ο Γιάννης έδωσε όλα τα χρήματά του στην Ελένη για να πληρώσει τη συμμετοχή τους σε μια εκδρομή στον Όλυμπο. Όταν επέστρεψε η Ελένη είπε ότι πλήρωσε 200€ για τα δύο εισιτήρια και της έμειναν μόνο 10€. Ο Γιάννης επέμενε ότι έπρεπε να έχει 20€ και ότι έχασε 10€. Έχει δίκιο Γιάννης;

Το Ρύζι

Την εποχή της κρίσης μοίρασαν 100 κιλά ρύζι σε άπορες οικογένειες που είχαν συνολικά 100 άτομα κατά τρόπο, ώστε κάθε άνδρας να λάβει 3 κιλά, κάθε γυναίκα 2 κιλά και κάθε παιδί 1 κιλό. Από όλα τα άτομα το 1/5 ήταν οι γυναίκες πόσα ήταν τα παιδιά;

Ο Γυμναστής

Ο καθηγητής της Γυμναστικής στη δοκιμή για την παρέλαση διαπίστωσε ότι τα παιδιά μπορεί να τα βάλει σε τετράδες ή εξάδες χωρίς κανένα πρόβλημα. Όμως πήρε την εντολή ότι για την παρέλαση πρέπει να γίνουν πεντάδες. Αφού έγιναν οι πεντάδες ένας μαθητής που περίσσευε μπήκε ομαδάρχης. Πόσα παιδιά έχει το τμήμα της παρέλασης;

Το γινόμενο ΑΒΓ
Το γινόμενο του 3ψήφιου ΑΒΓ επί το 2ψήφιο ΔΕ είναι ο αριθμός 7632. Ποιοι είναι οι αριθμοί; (τα Α,Β,Γ,Δ,Ε και 7632 είναι όλα διαφορετικά ψηφία και όλα τα ψηφία από 1 μέχρι 9)

Οι μικρότεροι
Πόσο ο μικρότερος ακέραιος τριψήφιος αριθμός υπερβαίνει τον μικρότερο ακέραιο διψήφιο αριθμό ;

Οι μεγαλύτεροι
Πόσο ό μεγαλύτερος ακέραιος εξαψήφιος αριθμός υπερβαίνει τον μεγαλύτερο ακέραιο τριψήφιο αριθμό ;

Ο 6ψήφιος
Ξέρετε 6ψήφιους αριθμούς που να διαιρούνται με 7, 11, 13, 1001;

Παίξτε με το ημερολόγιο
Μαντέψτε από το ημερολόγιο μια ημερομηνία που σκέφτηκε ο φίλος σας αρκεί να σας πει το άθροισμα των 8 αριθμών που είναι γύρο από αυτήν (δεν έχει σχέση ο μήνας και το έτος).

Μάης 2020

Δευ	Τρι	Τετ	Πέμ	Παρ	Σάβ	Κυρ
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	**13**	**14**	**15**	16	17
18	19	**20**	**21**	**22**	23	24
25	26	**27**	**28**	**29**	30	31

Απαντήσεις στους Γρίφους τ.115

Ο 3 και ο άλλος
Αν χ είναι ο αριθμός μετά από όλες τις πράξεις με το 3 θα έχουμε τον χ–6 και αφού αυτό είναι τα 2/3 του χ άρα το 6 είναι το 1/3 δηλαδή ο αριθμός είναι ο χ=18.

Ο Εθνικός Ύμνος
Όποιο αποτέλεσμα και αν έχετε οι λέξεις έχουν σύνολο εννέα γράμματα και ένατη λέξη στον Εθνικό Ύμνο είναι η λέξη «**τρομερή**» .

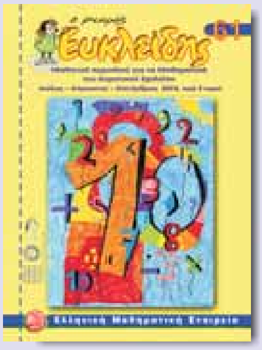
Ο τετραψήφιος
Αφού ο αριθμός επί 4 δίνει τετραψήφιο άρα το πρώτο ψηφίο του είναι ή 1 ή 2. Το 1 αποκλείεται διότι επί 4 γίνεται άρτιος και δεν θα ήταν στον αντίστροφο. Έτσι ο πρώτος είναι ο 2 και ο τέταρτος το 8. Όμως 4x(1000x2 + 100β + 10γ + 8) = 1000x8 + 100γ + 10β+2 ή 400β + 40γ+ 30= = 100γ + 10β ή 1 + 13β = 2γ πρέπει 2γ<20 άρα β=1 και γ=7.
Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 2178 x 4 = 8712.

Ο διψήφιος
Αν α είναι το ψηφίο των δεκάδων τού ζητουμένου αριθμού και β το ψηφίο των μονάδων, έχουμε: 10α+β = 7 (α + β), από όπου α = 2β. θέτοντας κατά σειρά β = 1, 2, 3 και 4, βρίσκουμε αντιστοίχως α = 2, 4, 6 και 8. 0ι ζητούμενοι επομένως αριθμοί είναι 21,42,63 και 84, που πράγματι όλοι ικανοποιούν απαιτήσεις του προβλήματος.

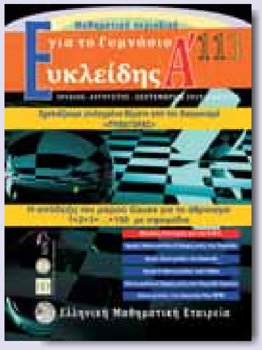
Αγορά πολλών αντικειμένων
Αν χ είναι ό αριθμός των αντικειμένων των 2 €, ψ των 1 € και ω των 0,50 €, έχουμε προφανώς: 100 € = 2χ + ψ + 0,50 ω επίσης χ + ψ + ω = 100, δηλ. ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις **άγνωστους**, που πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί.
Θέτοντας την τιμή του χ από την δεύτερη εξίσωση χ = 100 – ψ – ω στην πρώτη εξίσωση, βρίσκουμε ψ = 100-1,50ω.
Η τιμή, πού μπορεί να δοθεί στο ω, είναι ω = 40, οπότε ψ = 40 και χ = 20.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



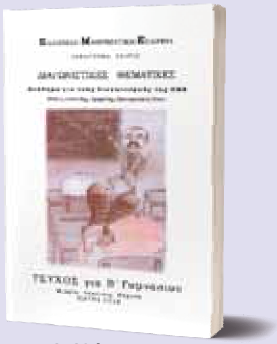
Τιμή τεύχους: 3€



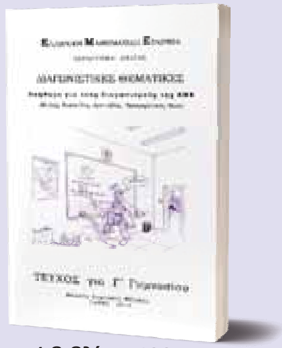
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί



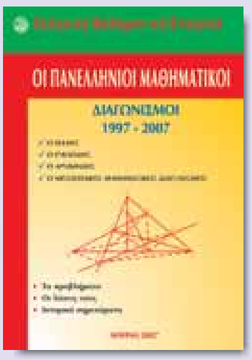
Τιμή βιβλίου: 12€



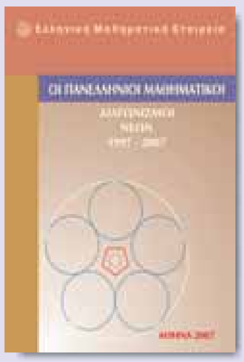
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

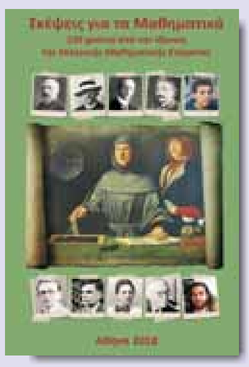


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr