ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

121

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021 ευρώ 3,5

Τα Μαθηματικά τον πρώτο αιώνα του Ελληνικού Κράτους

5 μετάλλια

25th JBMO

φιλοξενήθηκε από τη **Μολδαβία**
29 Ιουνίου-5 Ιουλίου 2021

VIRTUAL

2 μετάλλια

62th IMO

φιλοξενήθηκε από τη **Ρωσία**
18-24 Ιουλίου 2021

VIRTUAL

5 μετάλλια

38th BMO

φιλοξενήθηκε από την **Κύπρο**
6-10 Σεπτεμβρίου 2021

VIRTUAL

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 121 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2021 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
... να πούμε καλή αρχή στο ξεκίνημα,
με την αισιόδοξη και εύθυμη
ματιά της καθημερινότητας
και όπως λέει και ο "ποιητής" ...
... μια μέρα
χωρίς γέλιο
είναι μια
χαμένη μέρα ...

Charlie Chaplin (1889-1977)

... λένε ότι ο Ισαάκ Νεύτων
γέλασε μονάχα μια φορά στη ζωή του,
όταν τον ρώτησαν σε τι χρησιμεύει
η μελέτη της Γεωμετρίας του Ευκλείδη...

Allan Percy (1959 -)
δημοσιογράφος, συγγραφέας,
Καλιφόρνια ΗΠΑ

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά απρόοπτα, η επικαιρότητα, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο μακρινή ...

Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Σύνθεση βασισμένη στις Ολυμπιάδες και στα 200 Χρόνια από το 1821

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής: 5 Νοεμβρίου 2021

Ευκλείδης:
Αρχιμήδης:
} Θα υπάρξει έγκαιρη ανακοίνωση για τον χρόνο διεξαγωγής τους

$$2021 = 20^2+(2\cdot 20)^2+21$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Τα Μαθηματικά στα χρόνια της επανάστασης του '21

Γ. Λαγουδάκος

*Είχα την τύχη να παρακολουθήσω διαδικτυακά την ημερίδα με θέμα « **Τα Μαθηματικά και η Φυσική των Ελλήνων πριν και μετά την Επανάσταση του 21**» του **Ιδρύματος Ευγενίδου**. Ένα κομμάτι της ιστορίας της μαθηματικής παιδείας στην Ελλάδα, άγνωστο προς εμένα συζητήθηκε – αναλύθηκε. Αυτή ήταν η αφορμή και έψαξα και βρήκα βιβλία μαθηματικών εκείνης της μακρινής εποχής. Είναι καταπληκτικό το πόσες πρωτοπόρες διδακτικές ιδέες και μεθοδολογίες υπάρχουν στα κείμενα αυτά. Πως σπουδαίοι δάσκαλοι κατόρθωναν να μεταφέρουν την παλιά αλλά και την νέα γνώση, για την εποχή τους στους μαθητές τους. Η ενασχόληση μου με τα κείμενα αυτά με έκανε να εκτιμήσω και να αναρωτηθώ για το τι και πως διδάσκω εγώ τους μαθητές μου και να συνειδητοποιήσω το πόσα λίγα πράγματα ξέρω και πόσα ακόμα έχω να μάθω …*

Έτσι γράφτηκε το βιβλίο με τίτλο «**Τα μαθηματικά στα χρόνια της επανάστασης του 21**»[1]

Ας ξετυλίξουμε λοιπόν το κουβάρι της ιστορίας …

1. Οι (Μαθηματικοί) δάσκαλοι του γένους

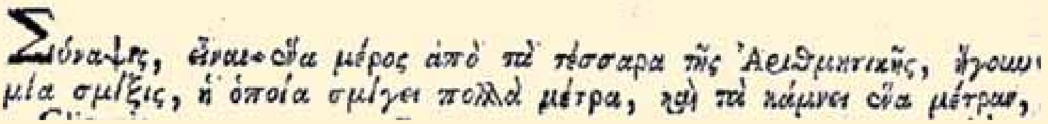
Δασκάλους του Γένους ονομάζουμε τους μορφωμένους Έλληνες που κατά την διάρκεια της Τουρκοκρατίας καλλιέργησαν με την διδασκαλία και τα κείμενα τους την ελληνική παιδεία. Οι πιο πολλοί ήταν ή έγιναν στην συνέχεια κληρικοί, σπούδασαν στις σχολές που υπήρχαν στον ευρύτερο ελλαδικό χώρο αλλά και στο εξωτερικό. Με την στήριξη κυρίως πλουσίων εμπόρων και της εκκλησίας τύπωσαν βιβλία και ίδρυσαν σχολεία δημιουργώντας ένα αξιόλογο σχολικό δίκτυο στο ευρύτερο ελλαδικό χώρο. Ήταν ουσιαστικά οι πρεσβευτές του Ευρωπαϊκού Διαφωτισμού που με τις ιδέες περί ισότητας και ελευθερίας δυνάμωσαν την επαναστατική διάθεση των υπόδουλων Ελλήνων. Η πνευματική αυτή δραστηριότητα που εκφράζεται μέσω αυτών των φωτισμένων δασκάλων λέγεται **Νεοελληνικός Διαφωτισμός**. Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε τους σημαντικότερους **μαθηματικούς δασκάλους του γένους**.

2. Εμμανουήλ Γλυζώνιος ή Γλυτζούνης (1540-1596)

Γεννήθηκε στη **Χίο** το 1540 και πέθανε στην **Βενετία** το 1596. Νεότατος πήγε στην Βενετία όπου ασχολήθηκε με την τυπογραφία. Άνθρωπος των γραμμάτων αλλά και του εμπορίου αποφάσισε να γράψει και να εκδώσει την «**λογαριαστική**». Ένα βιβλίο γραμμένο σε απλή γλώσσα που απευθυνόταν στους Έλληνες της διασποράς για να μάθουν πρακτική αριθμητική, αναγκαία για τις εμπορικές δραστηριότητες. Το γεγονός ότι ήταν γραμμένο απλά και κατανοητά το έκανε να χρησιμοποιηθεί και για σχολική χρήση.

Το βιβλίο εκδίδεται το 1568 και για τα επόμενα 250 χρόνια ήταν το πιο γνωστό βιβλίο αριθμητικής. Έχουν καταγραφεί 10 επανεκδόσεις. Το βιβλίο έμεινε γνωστό ως **Γλυζούνι ή Γλυτζούνι** παραφθορά του ονόματος του συγγραφέα και ξεκινά με την συμβολική γραφή των αριθμών στα Ελληνικά, στα Ιταλικά, και στα Τούρκικα.

Μετά αναφέρεται αναλυτικά στις τέσσερις πράξεις, **τη Σύναψη (πρόσθεση),**


Σύναψις, εἶναι ἕνα μέρος ἀπὸ τὰ τέσσαρα τῆς Ἀριθμητικῆς, ἤγουν μία σμῖξις, ἡ ὁποία σμίγει πολλὰ μέτρα, καὶ τὰ κάμνει ἕνα μέτρον,

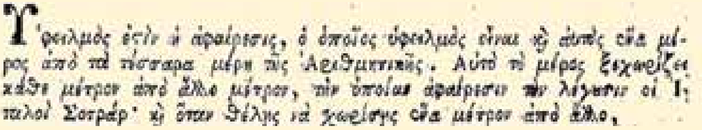
την **σμίξη** – άθροισμα – με την οποία σμίγουμε πολλά μέτρα και τα κάνουμε ένα.

---

[1] Μπορείτε να το **αναζητήσετε** και στην διεύθυνση: https://www.slideshare.net/ssuser96a7452/21-pdf-250231397 , όπου το συγκεκριμένο άρθρο, είναι μία περίληψη του.

δίνοντας και παραδείγματα – κάθετης πρόσθεσης με αναλυτικής οδηγίες εκτέλεσης της πράξης!

τον Υφειλμό (αφαίρεση)

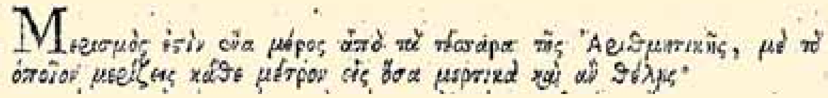

Ὑφειλμός ἐστὶν ἡ ἀφαίρεσις, ὁ ὁποῖος ὑφειλμός εἶναι καὶ αὐτὸς ἕνα μέρος ἀπὸ τὰ τέσσαρα μέρη τῆς Ἀριθμητικῆς. Αὐτὸ τὸ μέρος ξεχωρίζει κάθε μέτρον ἀπὸ ἄλλο μέτρον, τὴν ὁποίαν ἀφαίρεσιν τὴν λέγουσιν οἱ Ἰταλοὶ Σοτράρ· καὶ ὅταν θέλῃς νὰ χωρίσῃς ἕνα μέτρον ἀπὸ ἄλλο,

Τον Πολυπλασιασμό (πολλαπλασιασμό)

Είναι αξιοσημείωτη η αναφορά του ότι για να μάθει κάποιος να κάνει σωστά τους λογαριασμούς (που χρειάζονται πολλαπλασιασμοί) θα πρέπει να μάθει την προπαίδεια … για να μην κοπιάζει.

Δίνοντας την με τη μορφή πίνακα !

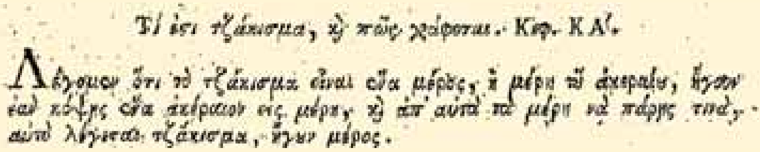
και τον Μερισμό (διαίρεση).


Μερισμός ἐστὶν ἕνα μέρος ἀπὸ τὰ τέσσαρα τῆς Ἀριθμητικῆς, μὲ τὸ ὁποῖον μερίζεις κάθε μέτρον εἰς ὅσα μερτικὰ καὶ ἂν θέλῃς·

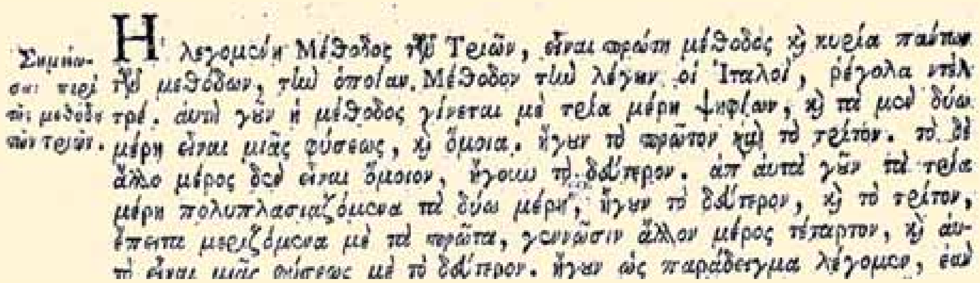
Έκπληξη θα προκαλέσουν στον σημερινό αναγνώστη οι ονομασίες που χρησιμοποιεί …

Στην αρχή όταν παραθέτει τα ψηφία κάνει λόγο και για το **μηδέν** το οποίο ονομάζει «**νούλα**».

Τα κλάσματα τα λέει «**τζακίσματα**» Παραθέτει πίνακα μοναδιαίων κλασμάτων την οποία την λέει «**στρώσις τω τζακισμάτων**». Την απλοποίηση των κλασμάτων την λέει «**σχισμόν**».


Τί ἐστι τζάκισμα, καὶ πῶς γράφεται. Κεφ. ΚΑ΄.
Λέγομεν ὅτι τὸ τζάκισμα εἶναι ἕνα μέρος, ἢ μέρη τοῦ ἀκεραίου, ἤγουν ἐὰν κόψῃς ἕνα ἀκέραιον εἰς μέρη, καὶ ἀπ᾽ αὐτὰ τὰ μέρη νὰ πάρῃς τινά, αὐτὸ λέγεται τζάκισμα, ἤγουν μέρος.

Αναφέρει την μέθοδο των τριών, λέγοντας χαρακτηριστικά …

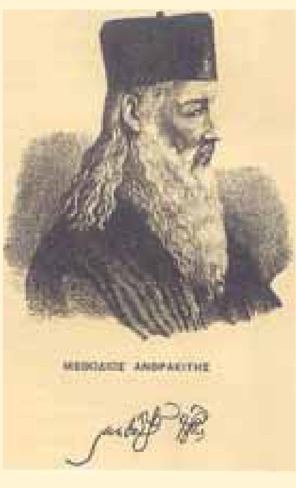

Σημείωσαι περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.
Ἡ λεγομένη Μέθοδος τῶν Τριῶν, εἶναι πρώτη μέθοδος καὶ κυρία πάντων τῶν μεθόδων, τὴν ὁποίαν Μέθοδον τὴν λέγουν οἱ Ἰταλοί, ρέγολα ντελ τρέ. αὐτὴ γοῦν ἡ μέθοδος γίνεται μὲ τρία μέρη ψηφίων, καὶ τὰ μὲν δύω μέρη εἶναι μιᾶς φύσεως, καὶ ὅμοια. ἤγουν τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον. τὸ δὲ ἄλλο μέρος δὲν εἶναι ὅμοιον, ἤγουν τὸ δεύτερον. ἀπ᾽ αὐτὰ γοῦν τὰ τρία μέρη πολυπλασιαζόμενα τὰ δύω μέρη, ἤγουν τὸ δεύτερον, καὶ τὸ τρίτον, ἔπειτα μεριζόμενα μὲ τὰ πρῶτα, γεννῶσιν ἄλλον μέρος τέταρτον, καὶ αὐτὸ εἶναι μιᾶς φύσεως μὲ τὸ δεύτερον. ἤγουν ὡς παράδειγμα λέγομεν, ἐὰν

Λύνει προβλήματα μερισμού που τα ονομάζει **αρχή των συντροφιών** , προβλήματα ποσοστών, που τα λύνει με την μέθοδο των τριών. Χαρακτηριστικά είναι τα προβλήματα περί του **κουμμερκίου** – τελωνειακού δασμού για τα εισαγόμενα είδη. Προβλήματα ανταλλαγής προιόντων , που τα λέει περί **αλλαξιών** …

Η **Ευκλείδεια παιδεία** του συγγραφέα φαίνεται στην παρουσίαση προβλήματος υπολογισμού ύψους ενός πύργου από την σκιά του.

3. Μεθόδιος Ανθρακίτης (1660 – 1736)

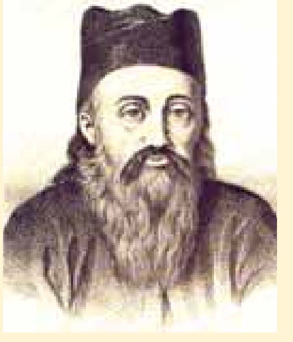
Έλληνας κληρικός, παιδαγωγός και μαθηματικός. Από τους πρώτους που δίδαξε τα «νεότερα» μαθηματικά στον Ελλαδικό χώρο. Καινοτόμησε διδάσκοντας στην δημώδη (δημοτική) και όχι την αρχαΐζουσα (καθαρεύουσα) ώστε να είναι κατανοητός στους μαθητές του. Γεννήθηκε στο χωριό Καμινιά (σημερινό **Ανθρακίτη**) στα Ζαγόρια των Ιωαννίνων. Σπούδασε στην **Γκιούμειο σχολή** στα Ιωάννινα. Συνέχισε τις σπουδές του στην Βενετία όπου παρακολούθησε μαθήματα φιλοσοφίας και μαθηματικών.



Σε ηλικία σαράντα οκτώ ετών έρχεται στην Καστοριά όπου διδάσκει στην εκκλησιαστική σχολή. Το 1710 αναλαμβάνει τη διεύθυνση της **σχολής Κυρίτζη** Καστοριάς. Εκεί διδάσκεται η φιλοσοφία κατά τα δυτικά πρότυπα και σύγχρονα μαθηματικά. Η σχολή λόγω του πρωτοποριακού για την εποχή προγράμματος σπουδών αποκτά φήμη και πλήθος μαθητών από όλα τα μέρη της Ελλάδος συρρέουν σε αυτήν. Μαθητές της σχολής ήταν ο **Ευγένιος Βούλγαρης** και ο **Μπαλάνος Βασιλόπουλος** μετέπειτα δάσκαλοι και αυτοί.

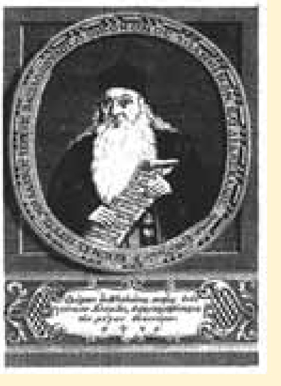
Από συντηρητικούς εκκλησιαστικούς κύκλους κατηγορήθηκε ως αιρετικός και ότι διδάσκει άχρηστα πράγματα. Έλεγαν ότι «… **τρίγωνα και τετράγωνα διδάσκει τους μαθητές του και την άλλην πολυάσχολον ματαιοπονίαν της Μαθηματικής** …»

Η σύνοδος του Πατριαρχείου της Κωνσταντινούπολης τον κάλεσε σε απολογία και αναγκάστηκε να εγκαταλείψει την Καστοριά. Το 1719 διδάσκει στην Σιάτιστα για δύο χρόνια. Τελικά λαμβάνεται η απόφαση να καούν όλα τα δοκίμιά του και το 1723 του απαγόρευσαν να διδάσκει. Αναγκάστηκε να αποκηρύξει το έργο του. Το 1725 αναλαμβάνει τη διεύθυνση της **Επιφανείου σχολής** μέχρι τον θάνατό του.



Μαθητής του Μεθόδιου Ανθρακίτη ήταν ο **Μπαλάνος Βασιλόπουλος** (1694-1760). Γόνος πλούσιας οικογένειας συντηρητικός στις απόψεις του. Έδινε έμφαση στη διδασκαλία της θεολογίας και των Αρχαίων Ελληνικών σε βάρος των θετικών μαθημάτων. Γι’ αυτό και δεν υποστήριξε τον δάσκαλό του. Για τους ίδιους λόγους ήρθε σε σύγκρουση και με τον Ευγένιο Βούλγαρη διευθυντή της Σχολής Μαρούτση. Διευθυντής από το 1723 ως τον θάνατό του της Σχολής Γκιούμα των Ιωαννίνων.

Έγραψε μαθηματικά βιβλία, λέγεται ότι κάποια στιγμή νόμισε ότι είχε λύσει το «**Δήλιον πρόβλημα**» . Επεξεργάστηκε γλωσσικώς το βιβλίο του δασκάλου του «**Οδός Αριθμητικής**».



Ο **Κοσμάς Μπαλάνος (1731 – 1808)** ήταν ένας από τους γιούς του Βασιλόπουλου. Δάσκαλος και συγγραφέας. Διαδέχθηκε τον πατέρα του στη διεύθυνση της Σχολής Γκιούμα το 1756 όπου και δίδαξε ως το 1799. Τον διαδέχθηκαν στην διεύθυνση της σχολής τα αδέλφια του Κωνσταντίνος και Αναστάσιος. Κύριο μαθηματικό έργο του η «**Έκθεσις συνοπτικής αριθμητικής, αλγέβρης και χρονολογίας**» που εκδόθηκε στη Βιέννη το 1798.

Η «**οδός μαθηματικής**» εκδόθηκε σε τρεις τόμους το 1749 στην Βενετία

Ο $1^{ος}$ τόμος χωρίζεται σε τρία μέρη

<u>Στο πρώτο μέρος</u> παρουσιάζονται οι όροι και οι προτάσεις των 13 βιβλίων των «**Στοιχείων**» του Ευκλείδη. <u>Στο δεύτερο μέρος</u> ερμηνεύει με αναλυτικό τρόπο όλα τα προηγούμενα, γράφει χαρακτηριστικά … «***Έκθεσις ακριβεστέρα των του Ευκλείδου Στοιχείων … σύντομος ερμηνεία των όρων και προτάσεων***». <u>Στο τρίτο μέρος</u> παρουσιάζει το έργο «**Σφαιρικά**» του Θεοδοσίου του Τριπολίτου.


ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

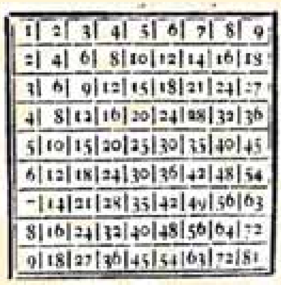
Ο $2^{ος}$ τόμος παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού σε αυτόν παρουσιάζονται θέματα όπως : Προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, προβλήματα υπολογισμού εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων. Στερεομετρία – βασικές έννοιες αλλά και προβλήματα κατασκευών και μετρήσεων. Θέματα εφαρμοσμένης γεωμετρίας!. Τριγωνομετρία, οπού παραθέτει και τριγωνομετρικό πίνακα. Λογαρίθμους όπου παραθέτει και λογαριθμικό πίνακα. Προβλήματα επίλυσης τριγώνων – ή όπως χαρακτηριστικά γράφει «**περί τριγώνων διαλύσεως**». Σφαιρική τριγωνομετρία και τέλος προβλήματα επίλυσης σφαιρικών τριγώνων – «**περί διαλύσεως σφαιρικών τριγώνων**».

Ο $3^{ος}$ τόμος περιλαμβάνει : Το βιβλίο «**η κατά Πρόκλου σφαίρα**», το βιβλίο «**Περί χρήσεως σφαιρών**» του Κωνσταντίνου Γορδάτου (1730), Αστρονομία, Γεωγραφία και Οπτική. Το βιβλίο περιέχει ακριβή σχήματα και περιλαμβάνει εκτός από θεωρητικά και πρακτικά θέματα. Θέτει ζητήματα περί μεγέθους και σχήματος γης. Κάνει αναφορά στο σύστημα του Πτολεμαίου και του Κοπέρνικου. Αναπτύσσει τεχνικές χαρτογράφησης.

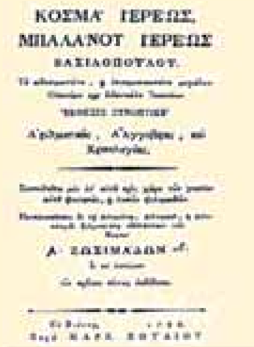
Η «Ἔκθεσις συνοπτική, ἀριθμητικῆς, ἄλγεβρας καὶ χρονολογίας» του **Μπαλάνου Βασιλόπουλου** εκδόθηκε στην Βιέννη το 1798.

Το βιβλίο αποτελείται από τρία μέρη …

Στο πρώτο μέρος – Αριθμητική, παραθέτει τις τέσσερις πράξεις κάνοντας ιδιαίτερη αναφορά στον λεγόμενο Πυθαγόρειο πίνακα, - προπαίδεια. Αλλά και την «***βάσανον της διαιρέσεως***». Ακολούθως αναφέρεται στην έννοια της αναλογίας και λύνει προβλήματα απλής και σύνθετης μεθόδου των τριών.



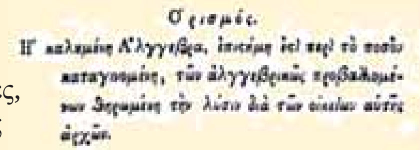
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
[illegible]	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81



ΚΟΣΜΑ ΙΕΡΕΩΣ,
ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΙΕΡΕΩΣ
ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ.

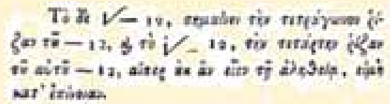
Στο δεύτερο μέρος – Άλγεβρα, ξεκινά ορίζοντας την Άλγεβρα !

Δίνει τις έννοιες ισότητα – μικρότερο – μεγαλύτερο με τους κατάλληλους συμβολισμούς. Ακολουθούν οι δυνάμεις και οι ρίζες, αναφέροντας ακόμα και την ρίζα αρνητικού αριθμού λέγοντας χαρακτηριστικά …



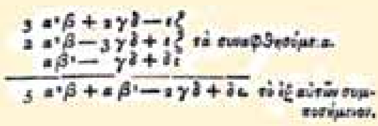
Ὁρισμός.

Ἡ καλουμένη Ἄλγγεβρα, ἐπιστήμη ἐστὶ περὶ τὸ ποσὸν καταγινομένη, τῶν ἀλγγεβρικῶς προβαλλομένων θεωρουμένη τὴν λύσιν διὰ τῶν οἰκείων αὐτῆς ἀρχῶν.



Τὸ δὲ $\sqrt{-12}$, σημαίνει τὴν τετράγωνον ῥίζαν τοῦ -12, [illegible]

Παρουσιάζει παραδείγματα πράξεων μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων και αναγωγής όμοιων όρων. Αναλύει την βασική θεωρία των κλασμάτων, παραθέτοντας πλήθος προβλημάτων αναλυτικά λυμένων.



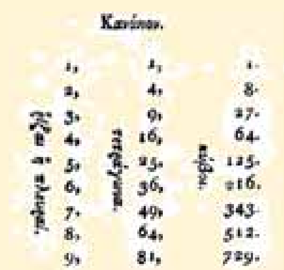
$$\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta + 2\gamma\delta - \epsilon\zeta \\ 2\alpha^2\beta - 3\gamma\delta + \epsilon\zeta \\ \alpha\beta^2 - \gamma\delta + \delta\epsilon \\ \hline 5\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 2\gamma\delta + \delta\epsilon \end{array}$$

τὰ συναφθησόμενα. τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον.

Στο επόμενο μέρος το βιβλίο ασχολείται «**περί αλγεβρικής αναλύσεως**» όπου ουσιαστικά προσπαθεί να διδάξει τον αναγνώστη στη χρήση μεταβλητών για την λύση προβλημάτων. Ομαδοποιώντας τα διάφορα προβλήματα με το διπλανό σχεδιάγραμμα …

Στη συνέχεια αναλύει μεθόδους εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας, παραθέτοντας αρχικά ως βασικό τυπολόγιο τα τετράγωνα και κύβους των αριθμών από 1 ως 9 …

Ασχολείται με προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Επιλύοντας πλήθος παραδειγμάτων. Δουλεύοντας ουσιαστικά με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου.



Κανόνες.

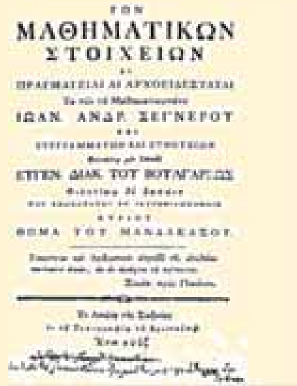
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Στο 3$^{\text{ο}}$ μέρος – «Χρονολογία» ασχολείται με την έννοια του χρόνου και τη μέτρησή του. Αναφέρει διάφορα ημερολόγια που υπήρξαν και καταλήγει στο Γρηγοριανό ημερολόγιο αναλύοντας τελικά μέθοδο εύρεσης της ημερομηνίας του Πάσχα.

4. Ευγένιος Βούλγαρης (1716 – 1806)

Κληρικός, παιδαγωγός, μεταφραστής, ιστορικός, θεολόγος, μαθηματικός, φυσικός, ποιητής. Θεωρείται από τους πρωτεργάτες του Ελληνικού Διαφωτισμού.

Γεννήθηκε στην Κέρκυρα. Στο διάστημα 1736 – 1738 βρίσκεται στα Ιωάννινα όπου διδάσκεται από τον **Μεθόδιο Ανθρακίτη**. Στη περίοδο 1738 – 1742 συνεχίζει τις σπουδές του στη Βενετία, όπου διδάσκει στην **Φλαγγίνειο Σχολή**. Το 1742 επιστρέφει στην Ελλάδα και διδάσκει στη **Μαρουτσαία σχολή** στα Ιωάννινα. Εκεί διδάσκει διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό καθώς και σύγχρονη φιλοσοφία. Λόγω των καινοτομιών που πρέσβευε ήρθε σε σύγκρουση με τον συντηρητικό διευθυντή της **σχολής Γκιούμα**, **Μπαλάνου Βασιλόπουλου**, με αποτέλεσμα το 1746 να φύγει από την πόλη. Αναλαμβάνει διευθυντής του **σχολείου της Κοζάνης** όπου μένει μέχρι το 1750. Στο διάστημα 1750 με 1753 διδάσκει και πάλι στη Μαρουτσαία σχολή και το 1753 αναχωρεί για την **Αθωνιάδα Ακαδημία**.


ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Διδάσκει λογική, φιλοσοφία, αριθμητική, γεωμετρία, φυσική, κοσμολογία, μεταφράζοντας για τις ανάγκες των μαθημάτων του Δυτικού στοχαστές. Αναγκάζεται και πάλι από συντηρητικούς κύκλους να παραιτηθεί. Μετά από σύντομη διαμονή στην Θεσσαλονίκη βρίσκεται ως δάσκαλος το 1759 στην **Μεγάλη του Γένους σχολή** στην Κωνσταντινούπολη. Μένει τρία χρόνια όπου και πάλι αναγκάζεται σε παραίτηση το 1762. Το 1763 πηγαίνει στο Βουκουρέστι και τελικά το 1764 βρίσκεται στη Λειψία όπου μένει οκτώ χρόνια. Στη Λειψία τυπώνονται τα περισσότερα έργα του. Ως φημισμένος διανοούμενος δέχεται πρόσκληση από την **αυτοκράτειρα Αικατερίνη** και το 1771 φθάνει στη Μόσχα. Το 1775 χειροτονείται ιερέας και τον επόμενο χρόνο γίνεται αρχιεπίσκοπος στην Ουκρανία. Αναγκάζεται σε παραίτηση και ασχολείται με τη συγγραφή και τις μεταφράσεις – αγαπημένες ασχολίες του. Το 1787 γίνεται μέλος της **Αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστημών της Ρωσίας**. Συγγράφει την έκκληση προς την αυτοκράτειρα για την απελευθέρωση των υπόδουλων Ελλήνων, συμβάλλοντας στην κήρυξη του Ρωσοτουρκικού πολέμου του 1787 – 1792. Το 1802 αποσύρεται στη μονή του Αγίου Αλεξάνδρου Νιέφσκι όπου το 1806 πεθαίνει σε ηλικία 90 ετών.

Συνέγραψε το βιβλίο «**Μαθηματικών Στοιχείων**». Το βιβλίο αποτελείται από τρία μέρη, βασικές αρχές αριθμητικής, γεωμετρία και τριγωνομετρία. Η ύλη που αναλύεται στο συγκεκριμένο βιβλίο είναι παρόμοια με αυτή που έχουμε ήδη παρουσιάσει σε άλλα βιβλία της εποχής. Για να μην επαναλαμβανόμαστε θα αναφερθούμε σε ορισμένα θέματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον όπως …

- **Εύρεση μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών …**

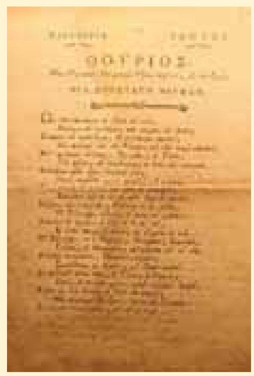

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

ΛΥΣΙΣ

Διαιρετέοι	Διαιρέται	Λείψανα
2145	182	143
182	143	39
143	39	26
39	26	13
26	13	0

Η παρουσίαση του θέματος γίνεται με την βοήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου όπως αυτός αναφέρεται στα «Στοιχεία» δηλαδή: «***αν α,β δύο φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με το β τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β είναι ίδιος με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,υ, δηλαδή (α,β)=(β,υ)***». Η διαδοχική εφαρμογή της πρότασης αυτής οδηγεί σε διαδοχικές ευκλείδειες διαιρέσεις και τελικά ο Μ.Κ.Δ των δύο αρχικών αριθμών είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο – **λείψανον** – των διαιρέσεων αυτών.

- **Το διωνυμικό ανάπτυγμα** … όπου ανακαλύπτεται η νέα γνώση με απλούστερα παραδείγματα – «**προκατασκευή**» και μετά … έρχεται η «**δείξις**», δηλαδή η απόδειξη … χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή! ... δίνοντας στην συνέχεια και παραδείγματα εφαρμογής του γενικού τύπου.



5. Ρήγας Βελεστινλής ή Ρήγας Φεραίος (1757 – 1798)

Γεννήθηκε το 1757 στο **Βελεστίνο**, (τις αρχαίες **Φερές)**, από εύπορη οικογένεια. Διδάχθηκε τα πρώτα του γράμματα από ιερέα στο Βελεστίνο και κατόπιν στη **Ζαγορά** και στα **Αμπελάκια**. Έγινε δάσκαλος στην κοινότητα Κισσού Πηλίου, αργότερα βρίσκεται στο Άγιο Όρος, φιλοξενούμενος του ηγουμένου της μονής Βατοπεδίου. Εκεί εμπλουτίζει τις γνώσεις του αφού είχε πρόσβαση στη **βιβλιοθήκη** της φημισμένης **Αθωνιάδας Σχολής**.

Ταξίδεψε στην **Κωνσταντινούπολη**, μετά από πρόσκληση του Πρέσβη της Ρωσίας για σπουδές, εκεί γνωρίζει τον Πρίγκιπα **Αλέξανδρο Υψηλάντη**. Στην Πόλη μαθαίνει Γαλλικά, Ιταλικά και Γερμανικά. Στην συνέχεια ακολουθεί τον Υψηλάντη στο Ιάσιο όταν αυτός γίνεται ηγεμόνας της Μολδοβλαχία. Τελικά γίνεται γραμματέας του ηγεμόνα της Βλαχίας **Νικόλαου Μαυρογένη** στο **Βουκουρέστι**.

Το 1790 βρίσκεται στην Βιέννη όπου συνεργάζεται με Έλληνες εμπόρους και σπουδαστές και τυπώνει με την βοήθεια των αδελφών **Πούλιου**, τυπογράφων από την Σιάτιστα της Μακεδονίας τον **«Θούριο».** Επαναστατική προκήρυξη για την απελευθέρωση και ενοποίηση

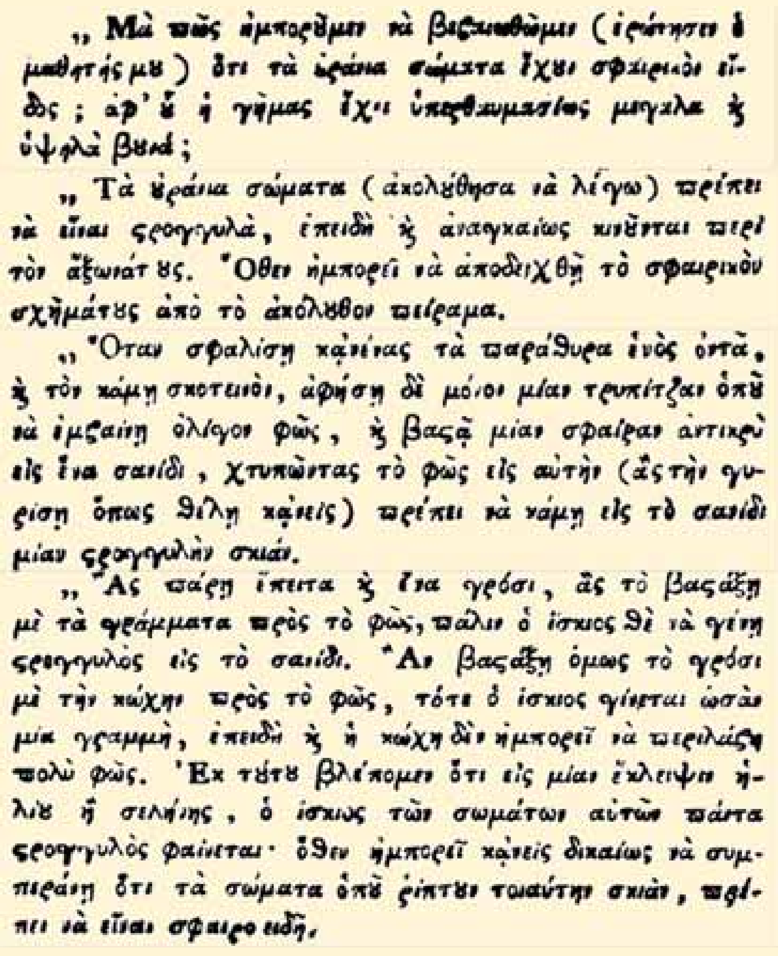
ολόκληρου του Βαλκανικού χώρου.
Εκδίδει επίσης «**Το Σύνταγμα της Ελληνικής Δημοκρατίας**», «**Τα Δίκαια του ανθρώπου**», καθώς και **το «Φυσικής απάνθισμα».** Επηρεασμένος από τον ευρωπαϊκό Διαφωτισμό, πίστεψε στην ανάγκη της επαφής των Ελλήνων με τις νέες ιδέες που σάρωναν την Ευρώπη και αυτό τον ώθησε στη συγγραφή ή μετάφραση βιβλίων σε δημώδη γλώσσα και τη σύνταξη της «**Χάρτας**», με την επιμέλεια του Αυστριακού λιθογράφου **Franz Muller** ενός μνημειώδους για την εποχή του χάρτη, διαστάσεων 2Χ2 μέτρων. Η επαναστατική δράση του έγινε αντιληπτή από την Αυστριακή αστυνομία και το 1798 συλλαμβάνεται έχοντας στην κατοχή του επαναστατικές προκηρύξεις. Ως Οθωμανός υπήκοος απελαύνεται μαζί με άλλους επτά συντρόφους του και παραδίδεται στους Τούρκους οι οποίοι τον φυλακίζουν στο **Βελιγράδι.** Εκεί βασανίζεται και τελικά στραγγαλίζεται και το σώμα του πετιέται στον Δούναβη.

Για τους στόχους του άρθρου θα κάνουμε μία ιδιαίτερη αναφορά στο έργο του Ρήγα «**Φυσικής απάνθισμα**». Το βιβλίο συνολικά έχει 180 σελίδες. Είναι ουσιαστικά μετάφραση ενός μεγάλου μέρους της «**Εγκυκλοπαίδειας**» των **Denis Diderot** (1713 – 1784) και **Jean Baptiste le Rond d’Alembert** (1717 – 1783). Με το έργο αυτό μεταφέρει την επιστημονική γνώση στην Τουρκοκρατούμενη Ελλάδα και καταπολεμά την δεισιδαιμονία και τις προλήψεις. Ένα σύγχρονο βιβλίο Φυσικής στα ελληνικά είναι κάτι το ριζοσπαστικό και καινοτόμο.

Όπως εξηγεί και ο ίδιος στην εισαγωγή του το ύφος του κειμένου είναι απλό και προσιτό διότι ο στόχος του είναι η εισαγωγή στις έννοιες της Φυσικής και η κατανόησή τους από τους μαθητές. Στα περισσότερα κεφάλαια συμμετέχουν δύο πρόσωπα, ο δάσκαλος και ο μαθητής. **Οι ερωτήσεις του μαθητή είναι εκείνες που προχωρούν την όλη εξέλιξη. Ο δάσκαλος ακολουθεί με υπομονή την σκέψη του μαθητή του και δίνει απαντήσεις στις ερωτήσεις με όσο το δυνατό πιο απλό τρόπο**. Με παραδείγματα και χωρίς εξειδικευμένη ορολογία πετυχαίνει να κάνει κατανοητές μια σειρά από έννοιες της σύγχρονης για την εποχή του Φυσικής.

Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα … από το Κεφάλαιο 5^{o} – Περί των ακολούθων τη γη – σελ.34

Πως γνωρίζουμε ότι οι πλανήτες είναι σφαίρες;



„ Μὰ πῶς ἠμποροῦμεν νὰ βεβαιωθῶμεν (ἐρώτησεν ὁ μαθητής μου) ὅτι τὰ οὐράνια σώματα ἔχουν σφαιρικὸν εἶδος; ἀφ᾽ οὗ ἡ γῆ μας ἔχει ὑπερθαυμασίως μεγάλα καὶ ὑψηλὰ βουνά;

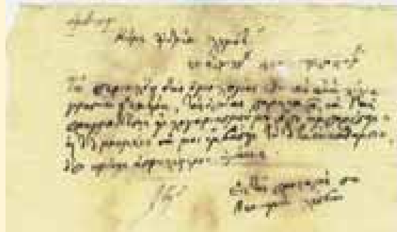
„ Τὰ οὐράνια σώματα (ἀκολούθησα νὰ λέγω) πρέπει νὰ εἶναι στρογγυλά, ἐπειδὴ καὶ ἀναγκαίως κινοῦνται περὶ τὸν ἄξονά τους. Ὅθεν ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ σφαιρικὸν σχήματους ἀπὸ τὸ ἀκόλουθον πείραμα.

„ Ὅταν σφαλίσῃ κανένας τὰ παράθυρα ἑνὸς ὀντᾶ, καὶ τὸν κάμῃ σκοτεινὸν, ἀφήσῃ δὲ μόνον μίαν τρυπίτζαν ὁποῦ νὰ ἐμβαίνῃ ὀλίγον φῶς, καὶ βαστᾷ μίαν σφαῖραν ἀντικρὺ εἰς ἕνα σανίδι, χτυπῶντας τὸ φῶς εἰς αὐτὴν (ἂς τὴν γυρίσῃ ὅπως θέλῃ κανεὶς) πρέπει νὰ κάμῃ εἰς τὸ σανίδι μίαν στρογγυλὴν σκιάν.

„ Ἂς πάρῃ ἔπειτα καὶ ἕνα γρόσι, ἂς τὸ βαστάξῃ μὲ τὰ γράμματα πρὸς τὸ φῶς, πάλιν ὁ ἴσκιος θὲ νὰ γένῃ στρογγυλὸς εἰς τὸ σανίδι. Ἂν βαστάξῃ ὅμως τὸ γρόσι μὲ τὴν κώχην πρὸς τὸ φῶς, τότε ὁ ἴσκιος γίνεται ὡσὰν μία γραμμὴ, ἐπειδὴ καὶ ἡ κώχη δὲν ἠμπορεῖ νὰ περιλάβῃ πολὺ φῶς. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εἰς μίαν ἔκλειψιν ἡλίου ἢ σελήνης, ὁ ἴσκιος τῶν σωμάτων αὐτῶν πάντα στρογγυλὸς φαίνεται· ὅθεν ἠμπορεῖ κανεὶς δικαίως νὰ συμπεράνῃ ὅτι τὰ σώματα ὁποῦ ῥίπτουν τοιαύτην σκιὰν, πρέπει νὰ εἶναι σφαιροειδῆ.

6. Βενιαμίν Λέσβιος (1759 ή 1762 – 1824)

Γεννήθηκε στο Μεγαλοχώρι Πλωμαρίου στη Λέσβο. Σε ηλικία δεκαεπτά ετών πήγε στο Άγιο όρος όπου χειροτονήθηκε μοναχός. Σπουδάζει στη σχολή του **Ιωάννη Οικονόμου** στο Άγιο όρος αλλά και στην Πάτμο και Χίο. Το 1789 επιστρέφει στο Άγιο Όρος και διδάσκει στις **Κυδωνιές** πλάι στον Ιωάννη Οικονόμου.



Χειρόγραφο του Βενιαμίν Λέσβιου.

Το 1790 πηγαίνει στο **Πανεπιστήμιο της Πίζας** και μετά στην Πολυτεχνική σχολή του Παρισιού. Παρακολουθεί μαθήματα από τον **A. Lavoisier**. Στο Παρίσι γνωρίζεται με τον **Κοραή** και αρθρογραφεί στον «**Λόγιο Ερμή**». Πηγαίνει για ένα χρόνο στην Αγγλία και έρχεται σε επαφή με τον Άγγλο αστρονόμο **William Herschel** στο Γκρίνουιτς.

Το 1799 επιστρέφει στις Κυδωνιές και διδάσκει. Η διδασκαλία του περιλαμβάνει μαθήματα φιλοσοφίας, φυσικομαθηματικών, αστρονομίας με παράλληλη διεξαγωγή πειραμάτων. Η σχολή αποκτά μεγάλη φήμη αλλά ο ίδιος κατηγορείται από την επίσημη εκκλησία ως άθεος, αφού υποστήριζε το ηλιοκεντρικό σύστημα αλλά και την ύπαρξη πλήθους άλλων ήλιων και πλανητών. Το 1803 καταδικάζεται ερήμην αλλά η πατριαρχική απόφαση δεν εκτελέστηκε μετά από τη μεσολάβηση επιφανών φίλων του. Συνεχίζει να διδάσκει στις Κυδωνιές μέχρι το 1812. Μετά αναχωρεί πρώτα στην Μυτιλήνη και μετά στην Κωνσταντινούπολη όπου εργάζεται ως οικοδιδάσκαλος στο σπίτι του γιατρού **Γεωργίου Δεσύλλα**. Απορρίπτει προτάσεις που είχε από διάφορα σχολεία και το 1817 πηγαίνει στην Βλαχία μετά από πρόσκληση του ηγεμόνα Ιωάννη Καρατζά για να αναδιοργανώσει την **Ακαδημία του Βουκουρεστίου**. Το 1818 αναγκάζεται να πάει στο Ιάσιο όπου εκεί μυείται στην Φιλική Εταιρεία. Το 1820 τον βρίσκει να διδάσκει στην **Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης.**

Με την έναρξη της επανάστασης συμμετέχει ενεργά σε αυτή. Υπήρξε μέλος της Πελοποννησιακής Γερουσίας , πήρε μέρος στην Α’ Εθνοσυνέλευση Επιδαύρου το 1821 αλλά και στην Β’ Εθνοσυνέλευση Άστρους το 1823 . Το 1824 πεθαίνει από τύφο στο Ναύπλιο.

Το συγγραφικό του έργο περιλαμβάνει Μαθηματικά, Φυσική, ηθική και Μεταφυσική. Τα περισσότερα είναι γραμμένα την περίοδο 1803-1812 όπου δίδασκε στις Κυδωνιές. Θεωρεί τα μαθηματικά ως την βασική επιστήμη πάνω στην οποία στη στηρίζεται η όποια φιλοσοφική σκέψη. Χρησιμοποιεί στην διδασκαλία του την δημώδη γλώσσα και εισάγει δικά του σημεία στίξης. Χρησιμοποιεί τα Αρχαία Ελληνικά για την απόδοση στα ελληνικά των νέων επιστημονικών όρων. Για τις επιλογές του αυτές επικρίθηκε και χαρακτηρίστηκε ως «**αγράμματος φιλόσοφος**».

Για τις ανάγκες τις διδασκαλίας των Μαθηματικών έγραψε δύο βιβλία, την Αριθμητική και την Γεωμετρία. Η Γεωμετρία είναι ουσιαστικά μία παράθεση όρων και θεωρημάτων από τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Το βιβλίο «**Στοιχεία αριθμητικής**» είναι γραμμένο απλά και κατανοητά. Καλύπτει ολόκληρο το εύρος της λεγόμενης πρακτικής αριθμητικής με πολλά λυμένα παραδείγματα. Τα προβλήματα είναι αυτά που θα συναντήσει κάποιος στην καθημερινότητά του. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιεί είναι παρόμοιος με αυτόν που υπάρχει και στα σημερινά βιβλία αριθμητικής Δημοτικού. Αναλύει τις τεχνικές εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων στους ακεραίους αλλά και στα κλάσματα και δεκαδικούς. Παρουσιάζει τεχνικές εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας.
Στο κεφάλαιο περί αναλογίας παρουσιάζει αρχικά την απλή μέθοδο των τριών και μετά την απλή «**αντιπεπονθυίας**» μεθόδου των τριών όταν πρόκειται για ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Αλλά και την σύνθετη μέθοδο των τριών με την βοήθεια παραδειγμάτων … Στη συνέχεια λύνει προβλήματα τόκων, προβλήματα «συντροφιάς», «μίξεως» κ.α.

7. Ιωάννης Καραντηνός (1784 – 1834)

Έλληνας μαθηματικός, γεννήθηκε στο Κάστρο της Κεφαλονιάς. Από μικρός κατετάγη στον στρατό της Επτανήσου Πολιτείας. Ως στρατιωτικός σπουδάζει στην Κέρκυρα στη σχολή Τενέδου όπου και παρακολουθεί μαθήματα μαθηματικών και φιλολογίας.

Το 1807 όταν τα Επτάνησα θα βρεθούν υπό Γαλλική κατοχή θα ιδρυθεί η **Ιόνιος Ακαδημία** όπου εκεί τα χρόνια 1808 με 1811 θα παρακολουθήσει μαθήματα μαθηματικών, φυσικής και μηχανικής. Γνωρίζεται με τον Γάλλο αξιωματικό του μηχανικού Charles Dupin , απόφοιτο της Ecole Polytechnique και μαθητή του **Monge** όπου τον εισάγει στην Γαλλική μαθηματική σχολή σκέψης.

Το 1812 διδάσκει ως υποδιδάσκαλος (βοηθός καθηγητού) στην **Σχολή Τενέδου** μαθηματικά και μηχανική «κατά το σύστημα του **Lacroix**» και το 1818 ονομάζεται καθηγητής. Το 1814 ιδρύεται η Ιόνιος Πολιτεία υπό την Βρετανική προστασία και ξεκινά η λειτουργία της **Ιόνιας Ακαδημίας** ως πανεπιστήμιο. Ο Καραντινός επιλέγεται να παρακολουθήσει μαθήματα ανώτερων μαθηματικών στην **Ecole Polytechnique**. Έτσι το 1820 παρακολουθεί μαθήματα των **Poisson**, **Biot** και **Cauchy** καθώς και μαθήματα αστρονομίας από τον **Metier**.

Από το 1823 ως το 1833 διδάσκει στην Ιόνιο Ακαδημία ως διδάκτωρ, μαθηματικά. Παράλληλα διδάσκει μαθηματικά και στο «**Εφηβείον**» στο Λύκειο δηλαδή της Κέρκυρας από όπου επιλέγονταν οι μελλοντικοί φοιτητές της Ακαδημίας.

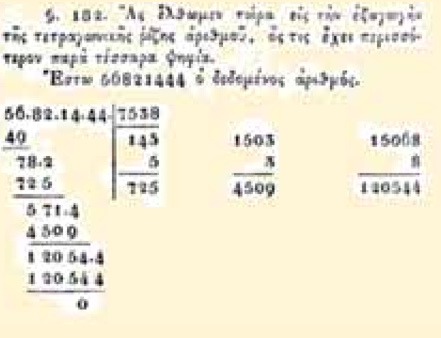
Δημοσιεύει μία σειρά συγγραμμάτων για τις ανάγκες τις διδασκαλίας των μαθηματικών, διαδίδοντας με τον τρόπο αυτό την Γαλλική μαθηματική σκέψη στον Ελλαδικό χώρο. Δημοσιεύει το 1828 εργασίες σχετικά με την τυποποίηση της ανάλυσης στο περιοδικό **Journal des Savants**. Εκτός των δικών του συγγραμμάτων μεταφράζει και εκδίδονται στα Ελληνικά με δική του επιμέλεια τα βιβλία : **Στοιχεία Αριθμητικής** (**Bourdon**, 1824), **Στοιχεία Γεωμετρίας** (**Legendre**, 1829), **Στοιχειώδεις πραγματεία του Διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού** (**Lacroix**, 1802), **Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων** (**Lagrange**, 1797).

Για το σκοπό της εργασίας θα παρουσιάσουμε έργα του που αποτελούν βιβλία της «**Σειράς Στοιχειώδους Μαθηματικής**» που εκδόθηκε το 1829 στην Κέρκυρα.

Την Αριθμητική του, όπου …

Στο 1ο μέρος παρουσιάζει τις τέσσερις πράξεις με αναλυτικά παραδείγματα και προβλήματα. Διαπραγματεύεται τα κλάσματα και τις πράξεις τους, αναλύει τους συμμιγείς αριθμούς. Εξηγεί τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών, επιλέγει παραδείγματα «***βάρους και νέων μέτρων***» εισάγοντας στην Ελληνική πραγματικότητα το νέο Διεθνές σύστημα μέτρων και σταθμών.

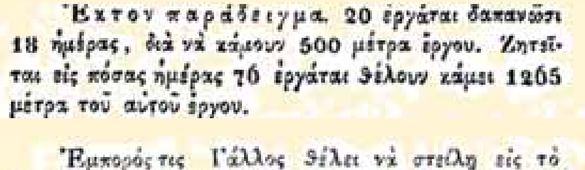
Στο 2ο μέρος εισάγει τον αναγνώστη στην άλγεβρα. Αναπτύσσει τη «**θεωρία των συστημάτων αρίθμησης**», παραθέτει τα βασικά θεωρήματα διαιρετότητας και τα κριτήρια διαιρετότητας. Παρουσιάζει την ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Διαπραγματεύεται τα περιοδικά δεκαδικά κλάσματα και τα συνεχή κλάσματα.


§. 182. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, ὅς τις ἔχει περισσότερον παρὰ τέσσαρα ψηφία.
Ἔστω 56821444 ὁ δεδομένος ἀριθμός.

56.82.14.44 | 7538
49 | 145 · 5 = 725 ; 1503 · 3 = 4509 ; 15068 · 8 = 120544
78.2
72 5
5 71.4
4 50 9
1 20 54.4
1 20 54 4
0

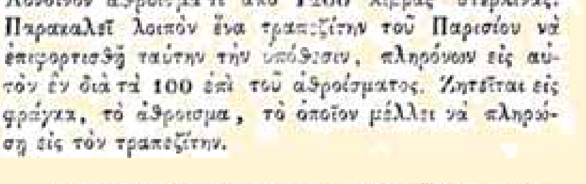
Στο 3ο μέρος

Διαπραγματεύεται τις δυνάμεις, τις ρίζες και παρουσιάζει αλγεβρικές τεχνικές υπολογισμού τετραγωνικής και κυβικής ρίζας.


Ἕκτον παράδειγμα. 20 ἐργάται δαπανῶσι 18 ἡμέρας, διὰ νὰ κάμουν 500 μέτρα ἔργου. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας 76 ἐργάται θέλουν κάμει 1265 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ἔργου.

Στο 4ο μέρος

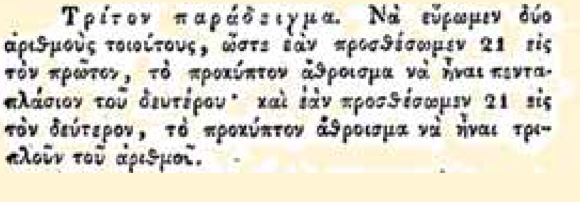
Εισάγει την έννοια του λόγου και της αναλογίας Εξηγεί την μέθοδο των τριών από την απλούστερη ως την συνθετότερη μορφή της, μέσω παραδειγμάτων. Λύνει προβλήματα τόκου και ανατοκισμού. Προβλήματα ισοτιμιών διαφόρων νομισμάτων.


Ἐμπορός τις Γάλλος θέλει νὰ στείλῃ εἰς τὸ Λουδῖνον ἄθροισμά τι ἀπὸ 1200 λίβρας στερλίνας. Παρακαλεῖ λοιπὸν ἕνα τραπεζίτην τοῦ Παρισίου νὰ ἐπιφορτισθῇ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, πληρόνων εἰς αὐτὸν ἓν διὰ τὰ 100 ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος. Ζητεῖται εἰς φράγκα, τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν τραπεζίτην.

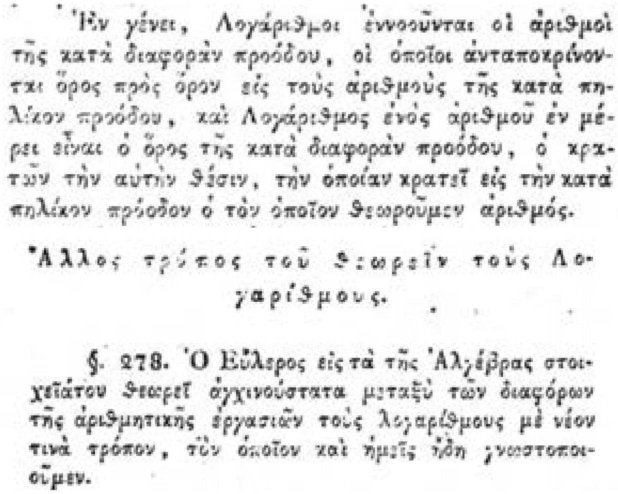
Πρωτότυπα είναι και τα προβλήματα που «***δύνανται να λυθούν με μόνην την βοήθεια συλλογισμού***»

Στο 5ο μέρος

Διαπραγματεύεται τις προόδους ,αποδεικνύει όλους τους σχετικούς τύπους.


Τρίτον παράδειγμα. Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε ἐὰν προσθέσωμεν 21 εἰς τὸν πρῶτον, τὸ προκύπτον ἄθροισμα νὰ ἦναι πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου· καὶ ἐὰν προσθέσωμεν 21 εἰς τὸν δεύτερον, τὸ προκύπτον ἄθροισμα νὰ ἦναι τριπλοῦν τοῦ ἀριθμοῦ.

Παρουσιάζει την έννοια του λογαρίθμου και αποδεικνύει τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Παραθέτει πίνακες λογαρίθμων και δίνει παραδείγματα πράξεων με την βοήθεια των λογαρίθμων.


Ἐν γένει, Λογάριθμοι ἐννοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται ὅρος πρὸς ὅρον εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, καὶ Λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐν μέρει εἶναι ὁ ὅρος τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, ὁ κρατῶν τὴν αὐτὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κρατεῖ εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον ὁ τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ἀριθμός.

Ἄλλος τρόπος τοῦ θεωρεῖν τοὺς Λογαρίθμους.

§. 278. Ὁ Εὔλερος εἰς τὰ τῆς Ἀλγέβρας στοιχειώτου θεωρεῖ ἀγχινούστατα μεταξὺ τῶν διαφόρων τῆς ἀριθμητικῆς ἐργασιῶν τοὺς λογαρίθμους μὲ νέον τινὰ τρόπον, τὸν ὁποῖον καὶ ἡμεῖς ἤδη γνωστοποιοῦμεν.

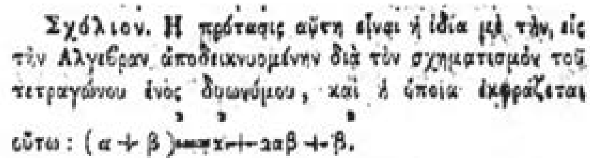
Στο τέλος εισάγει τον λογάριθμο ως λύση της εξίσωσης $\alpha^{\chi} = \theta$ δηλαδή $\chi = \log_{a}^{\theta}$.

Την Γεωμετρία του που αποτελεί μετάφραση της Γεωμετρίας του Γάλλου μαθηματικού **Legendre**.

Κατά την Ευκλείδεια παράδοση δίνει ορισμούς και αξιώματα και παραθέτει μία σειρά από θεωρήματα …
Στην συνέχεια δίνει μία σειρά από προβλήματα – κατασκευές …

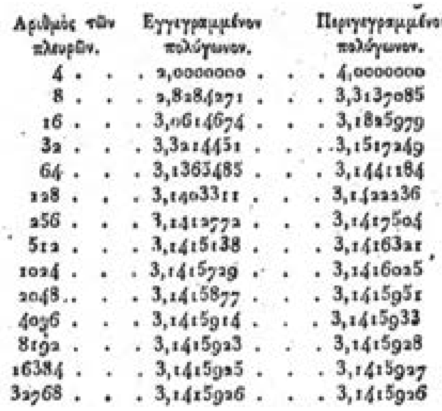

ΣΕΙΡΑΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ
ΚΕΡΚΥΡΑ

Στο επόμενο μέρος … ξεκινά με θεωρήματα εμβαδών επίπεδων σχημάτων, δίνει γεωμετρικές αποδείξεις των γνωστών ταυτοτήτων …


Σχόλιον. Η πρότασις αὕτη εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν εἰς τὴν Αλγέβραν ἀποδεικνυομένην διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διωνύμου, καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζεται οὕτω: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Αναφέρει το Πυθαγόρειο θεώρημα …, τις γενικεύσεις του … Διαπραγματεύεται τα όμοια τρίγωνα και σχετικά θεωρήματα και συνεχίζει με προβλήματα κατασκευών

Στη συνέχεια αναφέρεται στα κανονικά πολύγωνα παραθέτοντας σχετικά θεωρήματα, δίνει ιστορικά στοιχεία για τη μέτρηση του κύκλου, προσεγγίζοντας τον αριθμό π κατά την Αρχιμήδεια παράδοση.

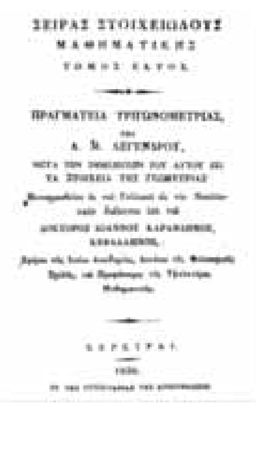


Αριθμὸς τῶν πλευρῶν.	Εγγεγραμμένου πολύγωνου.	Περιγεγραμμένου πολύγωνου.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

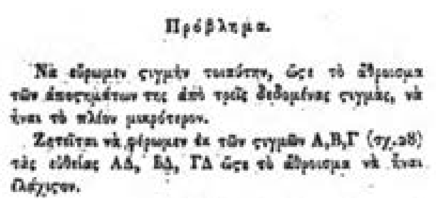
Παρεμβάλλεται ένα κεφάλαιο με προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων! και μετά εισάγει τον σπουδαστή στη στερεομετρία. Καταλήγει στην μελέτη των πολυέδρων … της σφαίρας … για να καταλήξει στα Πλατωνικά στερεά.

Πριν ολοκληρώσει το έργο του έρχεται η έκπληξη όπου αναφέρεται «**σε τρία στρογγυλά σχήματα !»,** αναφερόμενος στον κύλινδρο στον κώνο και στον «**κολοβό κώνο ή κορμός κώνου**». Αυτό το κάνει για να καταλήξει μέσω των θεωρημάτων και πορισμάτων που αναλύει στον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας,

Το επόμενο βιβλίο Γεωμετρίας το ονομάζει «**Ανάλυσις Γεωμετρικής**». Είναι μετάφραση μεγάλου μέρους του έργου “**Geometry – geometrical analysis and plane trigonometry” του John Leslie**. Παραθέτει μία σειρά από **προβλήματα κατασκευών** αντιμετωπίζοντας τα με την **αναλυτικο – συνθετική μέθοδο**.


ΣΕΙΡΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΚΕΡΚΥΡΑ

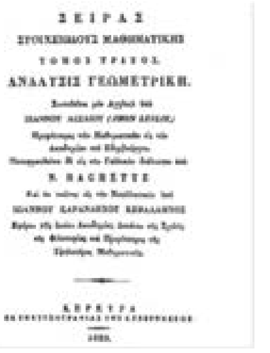
Αλλά και προβλήματα κίνησης – γεωμετρικών τόπων προβλήματα Απολλώνιων κατασκευών, ισοπεριμετρικά προβλήματα, αλλά και κλασικά προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων…


Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν στιγμὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων της ἀπὸ τρεῖς δεδομένας στιγμάς, νὰ ἦναι τὸ πλέον μικρότερον.

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν στιγμῶν Α,Β,Γ (σχ.28) τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ ὥστε τὸ ἄθροισμα νὰ ἦναι ἐλάχιστον.

Συνολικά παρατίθενται πάνω από εκατό ασκήσεις! Τι περισσότερες από τις οποίες θα τις έχουν συναντήσει στα μαθητικά χρόνια τους όσοι είναι μιας κάποιας ηλικίας (από εξήντα και πάνω), όταν τότε στο Λύκειο κάναμε Γεωμετρία …



Το τρίτο βιβλίο στο οποίο θα αναφερθούμε είναι … η «**Πραγματεία Τριγωνομετρίας**», μεγάλο μέρος της οποίας είναι μετάφραση του βιβλίου «***Éléments de géométrie***» του **Legendre.**

Αφού δώσει τους βασικούς ορισμούς … παραθέτει μία σειρά από τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους. Σ’ αυτό το σημείο αιφνιδιάζει αφού με εισαγωγή της φανταστικής μονάδας – με την γραφή $\sqrt{-1}$ καταλήγει σε τύπους όπως …

$$(\text{συν}A+\sqrt{-1}\,\text{ημ}A)^{\nu}=\text{συν}.\,\nu A+\sqrt{-1}\,\text{ημ}\,\nu A \quad (1)$$

Δίνοντας ουσιαστικά την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού χωρίς να αναφέρει τίποτε τέτοιο … και συνεχίζει … για να φθάσει μετά από αρκετούς υπολογισμούς και μετασχηματισμούς στους τύπους … ανάπτυγμα Taylor του ημιτόνου και συνημίτονου, με απώτερο σκοπό την δημιουργία τριγωνομετρικών πινάκων …

$$\text{συν}\chi = 1-\frac{\chi^2}{1.2}+\frac{\chi^4}{1.2.3.4}-\frac{\chi^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{κτλ.}$$

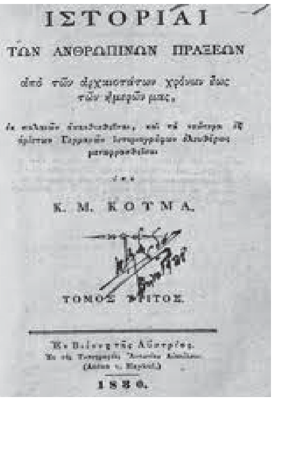
$$\text{ημ}\chi = \chi-\frac{\chi^3}{1.2.3}+\frac{\chi^5}{1.2.3.4.5}-\text{κτλ.}$$

Στο επόμενο μέρος ασχολείται με προβλήματα επίλυσης τριγώνων με χρήση τύπων τριγωνομετρίας. Λύνοντας παραδείγματα εξαντλώντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις τις οποίες ονομάζει «***περιστάσεις***». Στο τέλος αφού δώσει τύπους σφαιρικής τριγωνομετρίας ασχολείται και με θέματα επίλυσης σφαιρικών τριγώνων.

8. Κωνσταντίνος Κούμας (1777 – 1836)

Γεννήθηκε στη Λάρισα από οικογένεια εμπόρων. Το 1787 η οικογένεια φεύγει από την Λάρισα λόγω πανώλης και πηγαίνουν στον Τύρναβο όπου μαθαίνει τα πρώτα του γράμματα διαβάζοντας εκκλησιαστικά κείμενα. Διδάσκεται Αρχαία Ελληνικά, βασικές αρχές φιλοσοφίας, Μαθηματικά, Γεωμετρία και Φυσική. Επόμενος σταθμός η Κωνσταντινούπολη όπου γνωρίζει τον **Κωνσταντίνο Υψηλάντη** και μετά δάσκαλος στην Τσαριτσάνη όπου διδάσκει Ελληνικά στη δημώδη γλώσσα αλλά και μαθηματικά. Διδάσκεται Άλγεβρα από τον **Σπυρίδωνα Ασάνη** και από κοινού μεταφράζουν το «**Περί κωνικών τομών**» του Γάλλου αστρονόμου **Nicolas Louis de Lacaille.**

Το 1803 βρίσκεται στη Βιέννη μαζί με τον **Άνθιμο Γαζή** με τον οποίο συνεργάζεται για την έκδοση του «**Λεξικού Ελληνικής Γλώσσης**». Παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα και γράφεται στο πανεπιστήμιο της Βιέννης όπου σπουδάζει μαθηματικά, παράλληλα μαθαίνει Γερμανικά. Το 1808 αναλαμβάνει την διεύθυνση του **Φιλολογικού Γυμνασίου Σμύρνης**, όπου διδάσκει Μαθηματικά, Φυσική, Γεωγραφία. Οργανώνει το Χημείο της σχολής και συλλέγει πλήθος οργάνων αναγκαία για πειράματα Φυσικής. Η φήμη του μεγαλώνει και ο **Πατριάρχης Κύριλλος Ζ’** τον καλεί να αναλάβει την διεύθυνση της **Μεγάλης του Γένους Σχολής.** Το 1814 βρίσκεται διευθυντής της **Κουροτσεσμείου σχολής** στην Ξηροκρήνη (κοντά στην Κωνσταντινούπολη).



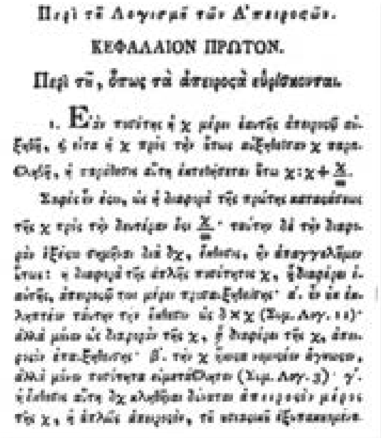
Το 1817 βρίσκεται και πάλι στην Βιέννη όπου ασχολείται με την έκδοση εκπαιδευτικών συγγραμμάτων αλλά και για περεταίρω επιμόρφωση. Το 1820 ανακηρύσσεται διδάκτορας Φιλοσοφίας και Καλών Τεχνών από το πανεπιστήμιο της Λειψίας, ενώ γίνεται επίτιμος μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας του Βερολίνου.

Γυρνώντας στην Σμύρνη του γίνεται πρόταση να αναλάβει την διεύθυνση της **Ευαγγελικής Σχολής**. Με την έναρξη της επανάστασης αναγκάζεται να διαφύγει στην Τεργέστη και από εκεί στην Βιέννη όπου συλλαμβάνεται ως επαναστάτης αλλά απελευθερώνεται μετά από λίγο. Στην Βιέννη ολοκληρώνει το «**Λεξικόν δια τους μελετώντας τα των παλαιών Ελλήνων συγγράμματα, κατά το Ελληνογερμανικόν του Ρεϊμέρου**» . Μετά συγγράφει το δωδεκάτομο έργο του «**Ιστορίαι των ανθρωπίνων πράξεων από των αρχαιοτάτων χρόνων έως των ημερών μας**». Πέθανε από χολέρα στην Τεργέστη το 1836 σε ηλικία 59 ετών.

Στο σημείωμα μας θα αναφερθούμε στην «**Σειράς Στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών**» που εκδόθηκε το 1807 στη Βιέννη. Πρόκειται για ένα σύνολο από οκτώ βιβλία που περιέχουν στοιχεία όλων των θετικών επιστημών.

Στο άρθρο αυτό επιλέγουμε να αναφερθούμε σε **θέματα Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού** όπως αυτά παρουσιάζονται στο 3ο και 4ο τόμο της Στοιχειώδους Σειράς των Μαθηματικών και Φυσικής του.


ΣΕΙΡΑΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ


Περὶ τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

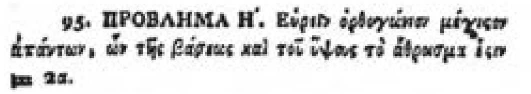
Περὶ τοῦ, ὅπως τὰ ἀπειροστὰ εὑρίσκονται.

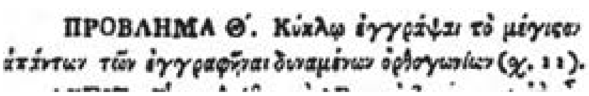
1. Ἐὰν ποσότης ἡ χ [illegible] $x : x + \frac{x}{m}$. [illegible]

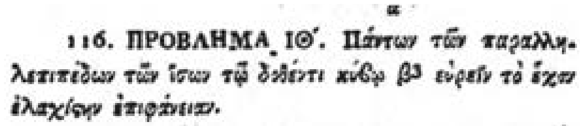
Στον 3ο τόμο …

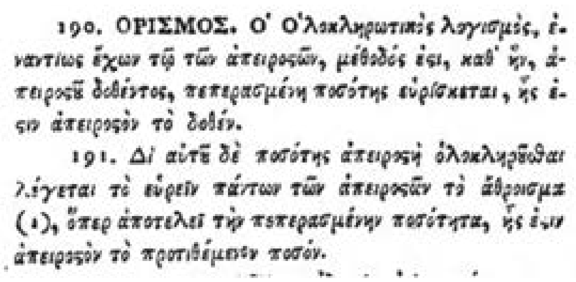
Δίνει τον ορισμό του απειροστού, δίνει τους κατάλληλους συμβολισμούς. Αναλύει τις ιδιότητες – πράξεις μεταξύ απειροστών. Αναφέρεται στο απειροστό κλάσματος, στο απειροστό σύνθεσης. Δίνει τον ορισμό του απειροστού δεύτερης – τρίτης τάξης κ.τ.λ., τεχνικές εύρεσης δεύτερης τάξης απειροστού. Απειροστά τριγωνομετρικών και λογαριθμικών ποσοτήτων, αλλά και των

$y = a^x$, $y = x^{\alpha}$ $/ a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

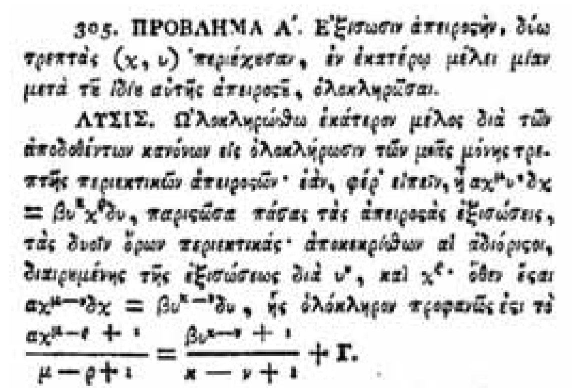

95. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Εὑρεῖν ὀρθογώνιον μέγιστον ἁπάντων, ὧν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τὸ ἄθροισμα ἴσον μὲ 2α.


ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Κύκλῳ ἐγγράψαι τὸ μέγιστον ἁπάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων ὀρθογωνίων (χ. 11).


116. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ΄. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἴσων τῷ δοθέντι κύβῳ β^3 εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.


190. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁ Ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς, ἐναντίως ἔχων τῷ τῶν ἀπειροστῶν, μέθοδός ἐστι, καθ᾽ ἣν, ἀπειροστοῦ δοθέντος, πεπερασμένη ποσότης εὑρίσκεται, ἧς ἐστιν ἀπειροστὸν τὸ δοθέν.

191. Δι᾽ αὐτοῦ δὲ ποσότης ἀπειροστὴ ὁλοκληροῦσθαι λέγεται τὸ εὑρεῖν πάντων τῶν ἀπειροστῶν τὸ ἄθροισμα (1), ὅπερ ἀποτελεῖ τὴν πεπερασμένην ποσότητα, ἧς ἐστιν ἀπειροστὸν τὸ προτιθέμενον ποσόν.


305. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐξίσωσιν ἀπειροστὴν, δύο τρεπτὰς (χ, υ) περιέχουσαν, ἐν ἑκατέρῳ μέλει μίαν μετὰ τοῦ ἰδίου αὐτῆς ἀπειροστοῦ, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ὁλοκληρώσθω ἑκάτερον μέλος διὰ τῶν ἀποδοθέντων κανόνων εἰς ὁλοκλήρωσιν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροστῶν· ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ $\alpha x^{\mu} \upsilon^{\nu} \partial x = \beta \upsilon^{\kappa} x^{\rho} \partial \upsilon$, παριστῶσα πάσας τὰς ἀπειροστὰς ἐξισώσεις, τὰς δυοῖν ὅρων περιεκτικάς· ἀποκεκρίσθων αἱ ἀδιόριστοι, διαιρεμένης τῆς ἐξισώσεως διὰ υ^{ν}, καὶ x^{ρ}· ὅθεν ἔσται $\alpha x^{\mu-\rho} \partial x = \beta \upsilon^{\kappa-\nu} \partial \upsilon$, ἧς ὁλόκληρον προφανῶς ἐστι τὸ

$$\frac{\alpha x^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \frac{\beta \upsilon^{\kappa-\nu+1}}{\kappa-\nu+1} + \Gamma.$$

Στον 4ο τόμο …

Ξεκινά με αναφορά περί ακροτάτων αναλύοντας ουσιαστικά θεμελιώδη θεωρήματα του διαφορικού λογισμού …

Λύνει θέματα μεγίστων – ελαχίστων, προβλήματα που τα συναντάμε στις μέρες μας στην ύλη των μαθηματικών της Γ’ Λυκείου.

Δίνει τον ορισμό του σημείου καμπής και αναλύει μεθόδους μελέτης κυρτότητας.

Δίνει τον ορισμό της ολοκλήρωσης – ως αντίστροφης διαδικασίας της εύρεσης των απειροστών.Αναπτύσσει τύπους ολοκλήρωσης. Δίνει με παραδείγματα βασικές ιδιότητες ολοκλήρωσης.

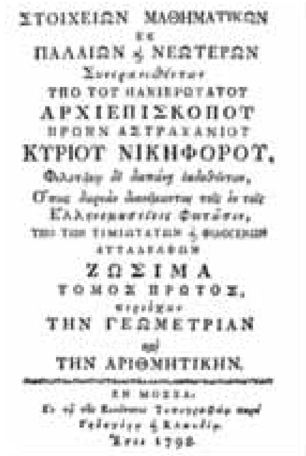
Στη συνέχεια ασχολείται με τον τετραγωνισμό επιφανειών (εύρεση εμβαδού), αλλά και εύρεσης και όγκων … «**περί των στερεών καταμετρήσεως**»

Στα επόμενα ασχολείται με την ολοκλήρωση παραστάσεων στα οποία υπάρχουν ημίτονα και συνημίτονα, καταλήγοντας σε τύπους. Αλλά δεν σταματάει εδώ, προχωρά και στην ολοκλήρωση υπερβολικών ημιτόνων και συνημιτόνων, καθώς και ολοκλήρωση λογαριθμικών και εκθετικών παραστάσεων με την βοήθεια σειρών.

Αφιερώνει ένα κεφάλαιο στην ανάλυση κλασμάτων σε άθροισμα απλούστερων και την ολοκλήρωσή τους. Παρουσιάζει ολοκληρώσεις με αλλαγή μεταβλητής τις οποίες λέει «**περί τινών μεταμορφώσεων ραδιουργουσών τας ολοκληρώσεις**» και τελικά παρουσιάζει μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων τις οποίες τις ονομάζει … «**Περί άπειρος ων εξισώσεων**»

9. Νικηφόρος Θεοτόκης

Γεννήθηκε το 1731 στην Κέρκυρα. Σπούδασε στα πανεπιστήμια της **Padova** και της **Bologna**. Επιστρέφοντας στην Ελλάδα χρίζεται ιερομόναχος και ανοίγει το 1758 στην Κέρκυρα το «**Κοινόν Φροντιστήριον**», όπου διδάσκονται Φιλοσοφία, Μαθηματικά, Φυσική, Ρητορική, Λογοτεχνία Ιταλική και Ελληνική. Ταξιδεύει στη Λειψία όπου εκδίδει το βιβλίο «**Φυσικά**» αλλά και στο Ιάσιο. Το 1776 προσκαλείται από τον Ευγένιο Βούλγαρη στην Ρωσία που το 1779 τον ορίζει ως διάδοχό του στον αρχιεπισκοπικό θρόνο της Ουκρανίας. Από το 1792 ως τον θάνατό του το 1800 μονάζει στη μονή του Αγίου Δανιήλ στην Μόσχα. Το μαθηματικό βιβλίο του είναι το «**Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθένων**», που εκδόθηκε στην Μόσχα το 1798-99.



ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ ϗ ΝΕΩΤΕΡΩΝ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ
ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ.
ΖΩΣΙΜΑ
ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ,
ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ
ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.
ΕΝ ΜΟΣΧᾼ.
Ἔτει 1798.

10. Ιώσηπος Μοισιόδοκας

Γεννήθηκε στην Βουλγαρία το 1725, το 1750 τον βρίσκουμε στη να σπουδάζει στην **Ευαγγελική Σχολή** της Σμύρνης. Το 1753 συνεχίζει τις σπουδές του στην **Αθωνιάδα Σχολή**, την εποχή που διευθυντής είναι ο **Ευγένιος Βούλγαρης**. Συμμαθητής του ήταν **ο Κοσμάς ο Αιτωλός**. Εκεί διδάσκεται φιλοσοφία. Διδάσκει στη Σίφνο το 1756 στο «**Κοινόν Παιδευτήριον του Αρχιπελάγους**». Το 1759 βρίσκεται ως ιεροδιάκονος στον ελληνικό ναό του Αγίου Γεωργίου στη Βενετία, όπου συγχρόνως σπουδάζει στην **Φιλοσοφική – Ιατρική σχολή της Padova**. Το 1765 βρίσκεται στην Μολδαβία ως διευθυντής στη «**Αυθεντική Σχολή του Ιάσιου**». Εκεί διδάσκονται νεότερα μαθηματικά, φυσική, γεωγραφία. Εισάγει παιδαγωγικές καινοτομίες που βρίσκουν όμως αντίδραση από το συντηρητικό κύκλο της περιοχής με αποτέλεσμα να παραιτηθεί το 1766. Στο επόμενο διάστημα στην περιοχή μαίνεται ο Ρωσοτουρκικός πόλεμος του 1768-1774 και ο ίδιος βρίσκεται στη Βλαχία όπου ασχολείται με τη μελέτη μαθηματικών και φυσικών κειμένων και συγγράφει. Ξαναγυρνά στο Ιάσιο όπου του ανατίθεται η διδασκαλία των θετικών επιστημών, τότε μεταφράζει την «**Μαθηματική Οδό**» του **Caille.** Το 1777 αναγκάζεται και πάλι σε παραίτηση. Τα επόμενα χρόνια θα διασχίσει σχεδόν ολόκληρη την ήπειρο. Θα πάει Τρανσυλβανία, στην Πέστη, στην Βενετία, στη Βιέννη και τέλος το 1781 στο Βουκουρέστι όπου διδάσκει στην Ακαδημία της πόλης. Στο τελευταίο διάστημα αποφεύγει να προκαλεί και συμβιβάζεται ως αναφορά τις μεθόδους διδασκαλίας του. Πεθαίνει στο Βουκουρέστι το 1800.

11. Κάτι σαν επίλογος …

Στον ευρύτερο χώρο των Βαλκανίων την περίοδο των αρχών του 19ου αιώνα παρατηρούμε μία προσπάθεια από μέρους των τοπικών αρχόντων αλλά και της εκκλησίας να λειτουργήσουν σχολεία. Στη διοίκηση του σχολείου συμμετείχε η εκκλησία, οι τοπικοί άρχοντες που με τη σειρά τους επέλεγαν διευθυντή, διδακτικό προσωπικό αλλά και τους υποτρόφους μαθητές. Ο διευθυντής ασκούσε και καθήκοντα δασκάλου του ανώτερου κύκλου σπουδών, ήταν υπεύθυνος για το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και το ωρολόγιο πρόγραμμα. Το υποτυπώδες εκπαιδευτικό σύστημα που δημιουργήθηκε περιλάμβανε τρεις βαθμίδες σπουδών τη στοιχειώδη ,τη μέση και την ανώτερη. Στην πρώτη βαθμίδα οι μαθητές εδιδάσκοντο κύρια γλώσσα από εκκλησιαστικά κείμενα και στοιχειώδη αριθμητική. Στην μέση εδιδάσκοντο γλωσσικά μαθήματα, μαθηματικά και αρχαία ελληνικά κείμενα. Η ανώτερη εκπαίδευση δεν υπήρχε

αυτοτελώς σαν τέτοια αλλά ως ανώτερος κύκλος σπουδών όπου οι μαθητές εδιδάσκοντο φιλοσοφία, θεολογία, και επιστημονικά μαθήματα. Η ιεραρχία μέσα στη σχολή ήταν ο Σχολάρχης, ο δάσκαλος και ο υποδιδάσκαλος. Οι τελευταίοι εκτελούσαν χρέη βοηθού και δίδασκαν στις μικρότερες τάξεις τα βασικά μαθήματα. Η απολαβές των δασκάλων ήταν μικρές. Κυρίως σε είδη πρώτης ανάγκης, ενώ αν υπήρχε τακτική χρηματοδότηση του σχολείου και κάποιος υποτυπώδης μισθός.

Όπως είδαμε και στις βιογραφίες των μαθηματικών δασκάλων που προηγήθηκαν υπήρχε τότε μία έντονη αντιπαράθεση ανάμεσα στους συντηρητικούς εκκλησιαστικούς κύκλους και τους κύκλους της φιλελεύθερης Δυτικότροπης διανόησης. Το πρώτο σημείο τριβής ήταν η γλώσσα διδασκαλίας. Τα μαθήματα θα γίνονταν στην δημώδη ή την αρχαΐζουσα; Το δεύτερο είχε να κάνει με το αν και με ποιο τρόπο θα διδάσκονται οι θετικές λεγόμενες επιστήμες. Στα ζητήματα αυτά η επίσημη εκκλησία έπαιξε τον ρόλο του διώκτη κάθε διαφορετικής φωνής. Σπουδαίοι δάσκαλοι αφορίστηκαν και διώχθηκαν, βιβλία αποσύρθηκαν, στην καλύτερη των περιπτώσεων και σε κάποιες περιπτώσεις κάηκαν ως αιρετικά.

Ήταν τόση η διάθεση για μόρφωση στον Ελλαδικό χώρο εκείνη την εποχή που πλήθος σχολείων άρχισαν να ξεφυτρώνουν. Πρώτα στα μεγάλα αστικά κέντρα και μετά στις μεγάλες πόλεις της περιφέρειας αλλά και στα νησιά. Ας αναφέρουμε τα πιο γνωστά …

Στην **Κωνσταντινούπολη** την Μεγάλη του Γένους Σχολή, την σχολή Τσιμπαλή, στην **Σμύρνη** την Ευαγγελική σχολή, το Φιλολογικό Γυμνάσιο, στις **Κυδωνιές** (Αϊβαλί) την Ακαδημία, στα **Ιωάννινα** την Μαρουτσαία σχολή, την σχολή Γκιούμα, την Καπλαναία σχολή, αργότερα την Ζωσιμαία σχολή, στην **Καστοριά** τη σχολή Κυρίτζη, και το Ελληνικό σχολείο, στα **Άγραφα** τη σχολή Καρπενησίου και τη σχολή Φουρνάς, στην **Αθήνα** το κοινό και δημόσιο σχολείο, το Επιστημονικό Γυμνάσιο, το Φροντιστήριο ελληνικών και κοινών μαθημάτων στην **Χίο** την μεγάλη σχολή της Χώρας, το Γυμνάσιο της Χίου και το Διδασκαλείο Μαστιχοχώρων, στην **Πάτμο** την Πατμιάδα σχολή, στη **Δημητσάνα** το Ελληνομουσείο, στο **Άγιο όρος** την Αθωνιάδα Ακαδημία, στο **Βουκουρέστι** την Ακαδημία, στο **Ιάσιο** την Ακαδημία του Ιασίου, την Αυθεντική σχολή, στις **Μηλιές** Πηλίου την κοινή του Γένους σχολή, και τη σχολή Μηλέων, στη **Σίφνο** τη σχολή Κάστρου, το Κοινό Παιδευτήριο Αρχιπελάγους, στην **Βυτίνα** την Ελληνική σχολή Βυτίνας, στη **Ζάτουνα** την Ελληνική σχολή Ζάτουνας, στα **Καλάβρυτα** τη σχολή Χαλκιανίκων, στη **Σάμο** την Πορφυρία σχολή, στη **Ρόδο** τη σχολή της Λίνδου, στο **Καστελόριζο** τη σχολή της Μεγίστης, στη **Λέσβο** τη σχολή Αγιάσου, τη σχολή Μυτιλήνης, τη σχολή Πλωμαρίου, τη σχολή Μανταμάδου, τη σχολή Μολύβου, στη **Κρήτη** τη σχολή Γωνιάς, τη σχολή Αγκαράθου, τη σχολή Ηρακλείου, στη **Κέρκυρα** την Ιόνιο Ακαδημία, το Εθνικό Γυμνάσιο, το Κοινό Φροντιστήριο, στη **Ζάκυνθο** το Κολλέγιο Ζακύνθου, το Γυμνάσιον Ζακύνθου, στη **Κεφαλληνία** το Λύκειο Αργοστολίου, στη **Λευκάδα** τη σχολή Καββαδία, τη δημόσια σχολή Λευκάδος, στα **Κύθηρα** τη Βιτσαμάνειο σχολή, την Ελληνική σχολή Κυθήρων, στη **Τραπεζούντα** το Φροντιστήριο Τραπεζούντας.

Τα περισσότερα από αυτά τα σχολεία κατά τα δεκαπέντε χρόνια της επανάστασης έκλεισαν και πολλά από αυτά καταστράφηκαν. Το υποτυπώδες σχολικό δίκτυο που με πολλούς αγώνες και θυσίες είχε στηθεί εξαφανίστηκε. Οι περισσότεροι δάσκαλοι ή πρωταγωνίστησαν στη επανάσταση ή αναγκάστηκαν να φύγουν για τη Δυτική Ευρώπη, Ρωσία ή στα Επτάνησα. Μετά την εγκαθίδρυση του ελεύθερου Ελληνικού κράτους ο πρώτος κυβερνήτης της Ελλάδος Ιωάννης Καποδίστριας ξεκίνησε το δικό του τιτάνιο έργο της δημιουργίας σχολικού δικτύου όλων των βαθμίδων …


Αθωνιάδα Ακαδημία

12. Βιβλιογραφία – αρθρογραφία - sites

1. Ιστοσελίδα: http://dlab.phs.uoa.gr/index.php του Εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Διαχείρισης Ιστορικών Αρχείων του τμήματος Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών

2. Συναντήσεις επιστήμης – Ίδρυμα Ευγενίδου – 30-3-2021 – διαδικτυακή ημερίδα με θέμα «Τα μαθηματικά και η Φυσική των Ελλήνων πριν και μετά την Επανάσταση του 1821» https://www.youtube.com/watch?v=WxsH_HzOEoU

3. Διπλωματική εργασία του Κωνσταντίνου Νάκου με θέμα «Ο Ευγένιος Βούλγαρης και η διδασκαλία των μαθηματικών κατά την οθωμανική περίοδο» - Α.Π.Θ. θεολογική σχολή.

4. Τα μαθηματικά στην Τουρκοκρατία. Ελληνική Μαθηματικά Εταιρεία – περιοδικό Ευκλείδης Γ τεύχος 40-41.

5. Διδακτικά εγχειρίδια της Τουρκοκρατίας . Η περίπτωση της Αριθμητικής του Εμμανουήλ Γλυζώνιου. Γ. Μπαραλής και Π. Χαβαράνης. 6^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης .

6. Όψεις της νεοελληνικής μαθηματικής παιδείας – Ν. Καστάνη – εκδόσεις μαθηματική βιβλιοθήκη Χ. Βαφειάδη.

7. Τα μαθηματικά στην Ελληνική σκέψη κατά την περίοδο της τουρκοκρατίας. Διδακτορική διατριβή – Τέρδημου Ε. Μαρία Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 1998. https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/9914

8. Τα μαθηματικά και ο νεοελληνικός διαφωτισμός επί τουρκοκρατίας – Λάμνης Στέλιος – εκδόσεις ΔΙΟΝ

9. Τα μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες στην Τουρκοκρατία. Καταγραφή και περιγραφή των διαστάσεων του ζητήματος. Εισήγηση του Ανδρέα Πούλου στο 12^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.

10. Τα μαθηματικά στην Ελλάδα από τον 15^{ο} έως τον 18^{ο} αιώνα – Μαρία Χάλκου – Εκδόσεις Μ. Χάλκου.

11. Η εισαγωγή των μαθηματικών στην νεοελληνική παιδεία – η άλγεβρα και ο απειροστικός λογισμός – Ν. Καστάνη – Διδακτορική διατριβή – Α.Π.Θ. – Μαθηματικό τμήμα – 2001. https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/22893#page/1/mode/2up

12. «Ιωάννης Καραντινός» – άρθρο στον Ευκλείδη Β’ (τεύχος 32 – 1999) της Χριστίνας Φίλη

13. Διδακτορική διατριβή Γεωργίου Ζούμπου – Ιόνιο Πανεπιστήμιο, τμήμα Ιστορίας. «Τα μαθηματικά στην Ιόνιο Ακαδημία (1824-1864)» – 2004 http://dide.ker.sch.gr/emekerkyra/books/THE%20MATHEMATICS%20IN%20THE%20IONIAN%20ACADEMY%20(1824-1864).pdf

62nd International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia
IMO 2021

62η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Ρωσία, 18-24 **Ιουλίου** 2021

Η **62η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα** διεξήχθη διαδικτυακά με Κέντρο την **Αγία Πετρούπολη** της **Ρωσίας στις 18-24 Ιουλίου 2021**, όπως αποφάσισε η Διεθνής Συμβουλευτική Επιτροπή (IMO Advisory Board). Με γνώμονα την ασφάλεια των συμμετεχόντων, κάθε ομάδα διαγωνίστηκε στη χώρα της σε ένα εξεταστικό κέντρο. Για τη διενέργεια του διαγωνισμού, πέραν από τα υγειονομικά πρωτόκολλα, εφαρμόσθηκαν ειδικά πρωτόκολλα που είχαν σκοπό να διασφαλίσουν το αδιάβλητο του διαγωνισμού και την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Διαμορφώθηκαν έτσι νέοι κανονισμοί ειδικά για τη διαδικτυακή **«εικονική» (virtual)** διοργάνωση. Σύμφωνα με αυτούς σε κάθε χώρα ήταν παρών, κατά τη διάρκεια του διαγωνισμού, Επίτροπος διορισμένος από τη Διοργανώτρια Αρχή, ο οποίος επιτηρούσε την όλη εξεταστική διαδικασία. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της εξέτασης η διαδικασία μεταδίδονταν με ζωντανή εικόνα στη Διοργανώτρια Αρχή, ενώ τα θέματα εστάλησαν σε όλες τις χώρες λίγο πριν την έναρξη του διαγωνισμού.

Οι Έλληνες μαθητές που συμμετείχαν στην 62η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα σε έναν ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό κατέκτησαν **δύο Χάλκινα Μετάλλια και μία Εύφημη Μνεία**. Συγκεκριμένα:

Εμμανουήλ Δημήτριος	**Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια «Η Ελληνική Παιδεία»**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Γεωργελές Γεώργιος	**2ο ΓΕΛ Ξάνθης**	**Εύφημη μνεία**
Φωτιάδης Πρόδρομος	**Μουσικό Λύκειο Δράμας**	**Συμμετοχή**
Δημουλιός Ιωάννης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Συμμετοχή**
Πετράκης Εμμανουήλ	**2ο ΓΕΛ Αγρινίου**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της Επιτροπής Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ **Ανάργυρος Φελλούρης**, υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος** και παρατηρητής ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1

Έστω $n \geq 100$ ένας ακέραιος. Ο Ιβάν γράφει τους αριθμούς $n, n+1, \ldots, 2n$ καθέναν σε διαφορετική κάρτα. Μετά ανακατεύει αυτές τις $n+1$ κάρτες και τις χωρίζει σε δύο στοίβες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον από τις δύο στοίβες περιέχει δύο κάρτες τέτοιες ώστε το άθροισμα των αριθμών τους να είναι τέλειο τετράγωνο. [Αυστραλία]

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε τρία τετράγωνα των οποίων οι κάρτες έχουν τους αριθμούς a, b, c με την ιδιότητα δύο από τα αθροίσματα $a+b, b+c, c+a$ να είναι τέλεια τετράγωνα.

Αν υποθέσουμε ότι $a<b<c$ και επιλέξουμε τρία διαδοχικά τέλεια τετράγωνα

$$a+b=(2\kappa-1)^2,\ c+a=(2\kappa)^2,\ b+c=(2\kappa+1)^2,$$

τότε προκύπτει ότι: $a=2k^2-4k,\ b=2k^2+1,\ c=2k^2+4k$.

Η τιμή του k πρέπει να είναι τέτοια ώστε $n\le 2k^2-4k$ και $2k^2+4k\le 2n \Leftrightarrow k^2+2k\le n\le 2k^2-4k$.

Οι τελευταίες ανισώσεις παίρνουν τη μορφή $k^2-2k-\frac{n}{2}\ge 0$ και $k^2+2k-n\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{n}{2}}+1\le k\le \sqrt{1+n}-1.$

Επειδή ο k είναι ακέραιος, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεταξύ των αριθμών $\sqrt{1+\frac{n}{2}}+1$ και $\sqrt{1+n}-1$. Για το λόγο αυτό αρκεί οι αριθμοί $\sqrt{1+\frac{n}{2}}+1$ και $\sqrt{1+n}-1$ να διαφέρουν τουλάχιστον κατά 1. Οι ενδιάμεσοι αυτοί αριθμοί θα είναι οι κατάλληλες τιμές για τον αριθμό k. Παρατηρούμε ότι η ανίσωση $\sqrt{1+n}-1-\left(\sqrt{1+\frac{n}{2}}+1\right)\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+n}-\sqrt{1+\frac{n}{2}}\ge 3$, αληθεύει για $n\ge 107$. Με ξεχωριστό έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει και για τις υπόλοιπες επτά τιμές του n από το 100 μέχρι και το 106. Επειδή δύο τουλάχιστον από τις τρεις κάρτες θα ανήκουν στη μία στοίβα, έπεται ότι η στοίβα αυτή θα περιέχει δύο κάρτες τέτοιες ώστε το άθροισμα των αριθμών τους να είναι τέλειο τετράγωνο.

Διαφορετικά, μετά τις ανισώσεις $k^2+2k\le n\le 2k^2-4k$ θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Ένα συγκεκριμένο k είναι κατάλληλο για τα n με την ιδιότητα

$$n\in\left[k^2+2k,\ 2k^2-4k+1\right]:=I_k.$$

Παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικά διαστήματα I_k και I_{k+1} έχουν κοινά στοιχεία όταν ισχύει η σχέση

$$(k+1)^2+2(k+1)\le 2k^2-4k+1 \Leftrightarrow k^2-8k-2\ge 0 \Leftrightarrow k>4+3\sqrt{2},$$

δηλαδή $k\ge 9$, αφού ο k είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, για $k\ge 9$ ισχύει ότι $I_9\cup I_{10}\cup\cdots=[99,+\infty)$, οπότε το ζητούμενο ισχύει για $n\ge 99$.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η ανισότητα $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}$

ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1,x_2,\dots,x_n$. **[Καναδάς]**

Λύση

Παρατηρούμε ότι με την αλλαγή μεταβλητών $x_i\to x_i+t,\ i=1,2,\dots,n$ το πρώτο μέλος της προς απόδειξη ανισότητας παραμένει αναλλοίωτο, ενώ το δεύτερο παίρνει τη μορφή

$$B(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j+2t|}.$$

Θεωρούμε T αρκετά μεγάλο έτσι ώστε οι τιμές $B(-T)$ και $B(T)$ να είναι και οι δύο μεγαλύτερες από την τιμή του πρώτου μέλους $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}$.

Τα σημεία $p_{i,j}=-\frac{x_i+x_j}{2},\ i,j=1,2,\dots,n,$ όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά, μαζί με τα σημεία $-T$ και T χωρίζουν την πραγματική ευθεία σε διαστήματα και σε δύο ημιευθείες έτσι ώστε σε καθένα από αυτά τα διαστήματα και τις δύο ημιευθείες η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{|\ell+2t|}$ είναι κοίλη, αφού είναι κοίλη και στα δύο διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{\ell}{2}\right]$ και $\left[-\dfrac{\ell}{2},+\infty\right)$. Έστω $[a,b]$ το διάστημα που περιέχει το 0. Επειδή η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{|\ell+2t|}$ είναι κοίλη έπεται ότι $B(0)\geq \min\{B(a),B(b)\}$ και, αφού $B(\pm T)>A$, είναι πλέον αρκετό να αποδείξουμε τις ανισότητες $B\left(-\dfrac{x_i+x_j}{2}\right)\geq A$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε την αρχική ανισότητα στην περίπτωση που με τον μετασχηματισμό $x_i\to X_i:=x_i+t,\ i=1,2,...,n$, δύο από τις μεταβλητές, έστω οι X_i, X_j, έχουν άθροισμα 0.

Αν $i=j$, δηλαδή $X_i=0$, για κάποιο i, τότε μπορούμε να αφαιρέσουμε το X_i με αποτέλεσμα τη μείωση και των δύο μελών της ανισότητας κατά $2\sum\limits_k |x_k|$.

Ομοίως, αν $X_i+X_j=0$, για διαφορετικά i και j μπορούμε να αφαιρέσουμε τα X_i, X_j με αποτέλεσμα τη μείωση και των δύο μελών της ανισότητας κατά

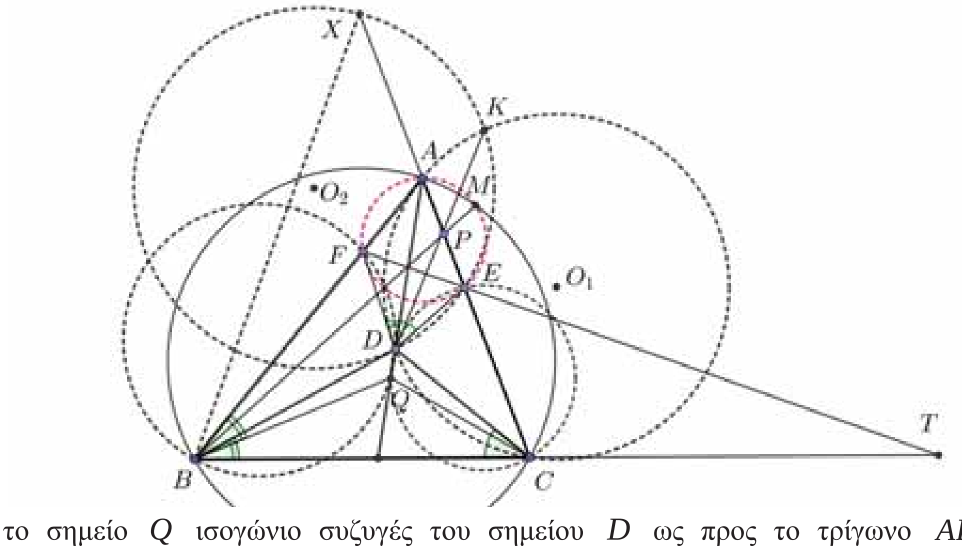
$$2\sqrt{2|x_i|}+2\sum_{k\neq i,j}^{n}\sqrt{|x_k+x_i|+|x_k+x_j|}.$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχει γίνει αναγωγή της προς απόδειξη ανισότητας σε μικρότερο n. Επειδή οι περιπτώσεις $n=0$ και $n=1$ είναι προφανείς η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Πρόβλημα 3

Έστω D ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABC με $AB>AC$ έτσι ώστε $D\hat{A}B=C\hat{A}D$. Το σημείο E του τμήματος AC ικανοποιεί την ισότητα $A\hat{D}E=E\hat{C}D$, το σημείο F του τμήματος AB ικανοποιεί την ισότητα $F\hat{D}A=D\hat{B}C$ και το σημείο X της ευθείας AC ικανοποιεί την ισότητα $CX=BX$. Έστω O_1 και O_2 τα περίκεντρα των τριγώνων ADC και EXD, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BC, EF και O_1O_2 περνούν από το ίδιο σημείο. [Ουκρανία]

Λύση



Θεωρούμε το σημείο Q ισογώνιο συζυγές του σημείου D ως προς το τρίγωνο ABC. Επειδή $D\hat{A}B=C\hat{A}D$ το σημείο Q βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο AD.

Τότε όμως, $Q\hat{B}A=D\hat{B}C=F\hat{D}A$, οπότε τα σημεία Q,D,F,B είναι ομοκυκλικά.

Ομοίως προκύπτει και ότι τα σημεία Q,D,F,C είναι ομοκυκλικά, οπότε έχουμε: $AF\cdot AB=AD\cdot AQ=AE\cdot AC$ με συνέπεια ότι και τα σημεία B,F,E,C είναι ομοκυκλικά. Αν T

είναι το σημείο τομής των ευθειών BC, FE θα αποδείξουμε ότι

$$DT^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE.$$

Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι $(DEF),(BDC)$ εφάπτονται μεταξύ τους, από τις ισότητες:

$$B\hat{D}F = A\hat{F}D - A\hat{B}D = \left(180^0 - F\hat{A}D - F\hat{D}A\right) - \left(A\hat{B}C - D\hat{B}C\right)$$

$$= 180^0 - F\hat{A}D - A\hat{B}C = 180^0 - D\hat{A}D - F\hat{E}A = F\hat{E}D + A\hat{D}E = F\hat{E}D + D\hat{B}C.$$

Επειδή τα σημεία B, F, E, C είναι ομοκυκλικά οι δυνάμεις του σημείου T ως προς τους κύκλους (BDC) και (EDF) είναι ίσες, οπότε ο ριζικός τους άξονας, δηλαδή η κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο D περνάει από το σημείο T , οπότε $DT^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE.$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η ευθεία TA τέμνει τον κύκλο (ABC) ξανά στο σημείο M. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BCEF$, $AMCB$ και τη σχέση $DT^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE$ έχουμε:

$$TM \cdot TA = TF \cdot TE,$$

οπότε και τα σημεία A, M, E, F είναι ομοκυκλικά.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό της αντιστροφής με κέντρο T και ακτίνα TD. Τότε το σημείο M απεικονίζεται στο σημείο A και το σημείο B απεικονίζεται στο σημείο C, οπότε ο κύκλος (MBD) απεικονίζεται στον κύκλο (ADC). Το κοινό τους σημείο D βρίσκεται στον κύκλο της αντιστροφής, οπότε το δεύτερο σημείο τομής τους, έστω K, επίσης θα ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής με συνέπεια την ισότητα $TK = TD$. Επομένως, το σημείο T και τα κέντρα των κύκλων (KDE), (ADC) ανήκουν στη μεσοκάθετη του KD.

Επειδή το κέντρο του κύκλου (ADC) είναι το O_1, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία D, K, E, X είναι ομοκυκλικά. Το κέντρο αυτού του κύκλου θα είναι το σημείο O_2.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι οι ευθείες BM, DK και AC είναι οι ριζικοί άξονες των κύκλων $(ABCM),(ACDK)$ και $(BMDK)$ ανά δύο, οπότε αυτές συντρέχουν σε σημείο, έστω P.

Επίσης το σημείο M ανήκει στον κύκλο (AEF), οπότε από τις παρακάτω ισότητες γωνιών (προσανατολισμένων)

$$\sphericalangle(EX, XB) = \sphericalangle(CX, XB) = \sphericalangle(XC, BC) + \sphericalangle(BC, BX) = 2\sphericalangle(AC, CB)$$

$$= \sphericalangle(AC, CB) + \sphericalangle(EF, FA) = \sphericalangle(AM, BM) + \sphericalangle(EM, MA) = \sphericalangle(EM, BM),$$

έπεται ότι τα σημεία M, E, X και B είναι ομοκυκλικά. Άρα έχουμε $PE \cdot PX = PM \cdot PB = PK \cdot PD$, οπότε τα σημεία E, K, D και X είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 4

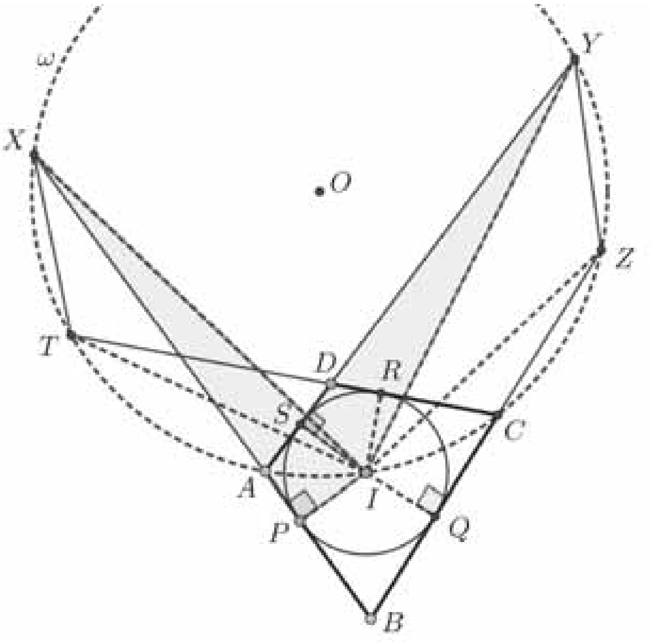
Έστω Γ ένας κύκλος με κέντρο Ι και ABCD ένα κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε καθένα από τα τμήματα AB, BC, CD και DA εφάπτεται του κύκλου Γ. Έστω ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AIC. Η προέκταση του τμήματος BA προς το μέρος του A τέμνει τον κύκλο ω στο σημείο X και η προέκταση του τμήματος BC προς το μέρος του C τέμνει τον κύκλο ω στο σημείο Z. Οι προεκτάσεις των τμημάτων AD και CD προς το μέρος του D τέμνουν τον κύκλο ω στα σημεία Y και T, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.}$$ **[Πολωνία]**

Λύση

Παρατηρούμε ότι το σημείο I είναι το σημείο τομής της εξωτερικής διχοτόμου CI του τριγώνου TCZ με τον περιγεγραμμένο κύκλο ω του τριγώνου TCZ, οπότε το I είναι το μέσο του τόξου TCZ και $IT = IZ$. Ομοίως, το I είναι το μέσο του τόξου YAX και $IX = IY$.

Έστω O του κέντρο του κύκλου ω. Τότε τα σημεία X και T είναι τα συμμετρικά των σημείων Y και Z ως προς την ευθεία IO, αντίστοιχα. Επομένως, $XT = YZ$.



Έστω ότι ο κύκλος Γ εφάπτεται των πλευρών AB, BC, CD και DA του τετραπλεύρου $ABCD$ στα σημεία P, Q, R και S, αντίστοιχα. Επειδή $IP = IS$ και $IX = IY$, τα ορθογώνια τρίγωνα IXP και IYS είναι ίσα. Ομοίως, είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα IRT και IQZ.

Επομένως, έχουμε: $XP = YS$ και $RT = QZ$.

Επειδή επιπλέον ισχύουν οι ισότητες των εφαπτόμενων τμημάτων $AS = AP, CQ = RC$ και $SD = DR$, έχουμε τελικά:

$$AD + DT + TX + XA = AS + SD + RT - DR + YZ + XP - AP$$

$$\overset{SA=AP,SD=DR}{=} RT + YZ + XP = RT + YZ + YS = QZ + YZ + YS. \qquad (1)$$

$$CD + DY + YZ + ZC = CR + RD + YS - SD + YZ + QZ - CQ$$

$$\overset{CR=CQ}{=} YS + YZ + QZ. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 5

Δύο σκίουροι, ο Μπάσυ και ο Τζάμπυ έχουν συλλέξει για το χειμώνα 2021 καρύδια. Ο Τζάμπυ αριθμεί τα καρύδια από το 1 μέχρι το 2021 και σκάβει 2001 μικρές τρύπες κυκλικά στο έδαφος γύρω από το αγαπημένο τους δένδρο. Το επόμενο πρωινό ο Τζάμπυ παρατηρεί ότι ο Μπάσυ είχε τοποθετήσει ένα καρύδι μέσα σε κάθε τρύπα, αλλά δεν είχε προσέξει την αρίθμηση. Δυσαρεστημένος ο Τζάμπυ αποφασίζει να αναδιατάξει τα καρύδια κάνοντας μία ακολουθία 2021 κινήσεων. Στη k-στη κίνηση, ο Τζάμπυ ανταλλάσσει τις θέσεις των δύο καρυδιών που είναι γειτονικά στο καρύδι με αριθμό k. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τιμή του k τέτοια ώστε, στην k-στη κίνηση, ο Τζάμπυ ανταλλάσσει κάποια καρύδια α και b τέτοια ώστε $\alpha < k < b$. [Ισπανία]

Λύση

Πρώτα θα δώσουμε μερικούς συμβολισμούς. Κάθε καρύδι a για το οποίο πριν την $k-$κίνηση ισχύει ότι $a < k$ θα ονομάζεται *χρησιμοποιημένο*, ενώ κάθε καρύδι b για το οποίο πριν την $k-$κίνηση ισχύει ότι

$b > k$ θα ονομάζεται *ενεργό*. Έτσι κατά την αρχή της διαδικασίας όλα τα καρύδια είναι ενεργά και σε κάθε κίνηση ένα μόνο καρύδι αλλάζει την κατάστασή του από ενεργό σε χρησιμοποιημένο.

Ας υποθέσουμε ότι ο σκίουρος στην $k-$κίνηση ανταλλάσσει δύο καρύδια $a,b<k$ ή δύο καρύδια $a,b>k$. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι το καρύδι k (και ο αριθμός k) είναι *μεγάλος*, ενώ διαφορετικά θα λέμε ότι είναι *μικρός*. Προφανώς ο αριθμός 1 είναι μικρός, ενώ ο αριθμός 2021 είναι μεγάλος.

Σε κάθε φάση της διαδικασίας τα χρησιμοποιημένα καρύδια χωρίζονται σε διάφορες ομάδες που αποτελούνται από ένα ή περισσότερα γειτονικά χρησιμοποιημένα καρύδια. Οι διαφορετικές ομάδες χωρίζονται από ενεργά καρύδια.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή για $1 \le k \le 2020$, ότι μετά την $k-$κίνηση όλες οι ομάδες χρησιμοποιημένων καρυδιών έχουν περιττό πλήθος στοιχείων.

Η περίπτωση με $k=1$ είναι προφανής. Στη συνέχεια θεωρούμε την τρέχουσα $k-$κίνηση, οπότε δύο περιπτώσεις είναι δυνατές.

***Περίπτωση 1**: Ο k είναι μικρός.*

Σε αυτή την περίπτωση και τα δύο γειτονικά καρύδια του k παραμένουν μεγαλύτερα του k, δηλαδή ενεργά, οπότε το καρύδι k σχηματίζει μόνο του μία διαφορετική ομάδα.

***Περίπτωση 2**: Ο k είναι μεγάλος.*

Σε αυτή την περίπτωση και τα δύο γειτονικά καρύδια του k είναι χρησιμοποιημένα, οπότε αυτά ανήκουν σε δύο διαφορετικές ομάδες, έστω με p και q στοιχεία, όπου p και q είναι περιττοί αριθμοί. Τώρα, όταν το k καρύδι γίνεται χρησιμοποιημένο, οι δύο ομάδες ενώνονται σε μία ομάδα με περιττό αριθμό $p+q+1$ στοιχείων.

Τέλος, μετά την 2020-κίνηση τα 2020 χρησιμοποιημένα καρύδια θα σχηματίζουν μερικές ομάδες με περιττό αριθμό στοιχείων. Όμως αυτά σχηματίζουν μία μόνο ομάδα με 2020 στοιχεία, το οποίο αντιφάσκει με το προηγούμενο συμπέρασμα.

Επομένως η υπόθεση μας δεν είναι αληθής, οπότε υπάρχει μία τιμή του k τέτοια ώστε, στην k-στη κίνηση, ο Τζάμπυ ανταλλάσσει κάποια καρύδια a και b τέτοια ώστε $a<k<b$.

Πρόβλημα 6

Έστω $\mathbf{m \ge 2}$ ένας ακέραιος, A ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων (όχι κατ' ανάγκη θετικών) και $\mathbf{B_1, B_2, ..., B_m}$ υποσύνολα του A. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\mathbf{k = 1, 2, ..., m}$ το άθροισμα των στοιχείων του $\mathbf{B_k}$ είναι $\mathbf{m^k}$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο A περιέχει τουλάχιστον $\mathbf{\frac{m}{2}}$ στοιχεία. [Αυστρία]

Λύση

Έστω $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο, υποθέτοντας ότι ισχύει $k=|A|<\frac{m}{2}$. Έστω $s_i := \sum_{a_j \in B_i} a_j$ το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου B_i για το οποίο δίνεται ότι $s_i = m^i$, $i=1,2,...,m$.

Θεωρούμε τώρα όλες τις m^m εκφράσεις της μορφής

$$f(c_1,c_2,...,c_m) := c_1 s_1 + c_2 s_2 + ... + c_m s_m,\ c_i \in \{0,1,2,...,m-1\}, \text{ για κάθε } i=1,2,...,m.$$

Σημειώνουμε ότι κάθε αριθμός $f(c_1,c_2,...,c_m)$ έχει τη μορφή

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k,\ \alpha_i \in \{0,1,...,m(m-1)\},$$

οπότε υπάρχουν το πολύ $(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$ διαφορετικές τιμές της παραπάνω έκφρασης που θεωρήσαμε. Επομένως δύο τουλάχιστον από αυτές συμπίπτουν. Επειδή $s_i = m^i$, $i=1,2,...,m$ αυτό αντιβαίνει με τη μοναδικότητα της αναπαράστασης των θετικών ακεραίων στο σύστημα αρίθμησης βάση το m.

38η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

6 - 10 **Σεπτεμβρίου** 2021

Η $38^{η}$ Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη διαδικτυακά από την Κύπρο από 6 μέχρι 10 Σεπτεμβρίου 2021, όπως αποφάσισε η Βαλκανική Συμβουλευτική Επιτροπή (BMO Advisory Board), με γνώμονα την ασφάλεια των συμμετεχόντων, ώστε κάθε ομάδα να διαγωνιστεί στη χώρα της σε ένα εξεταστικό κέντρο. Για τη διενέργεια του διαγωνισμού, πέραν από τα υγειονομικά πρωτόκολλα, εφαρμόσθηκαν ειδικά πρωτόκολλα με σκοπό να διασφαλίσουν το αδιάβλητο του διαγωνισμού και την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων και των μεταλλίων. Διαμορφώθηκαν έτσι νέοι κανονισμοί ειδικά για τη διαδικτυακή «εικονική» διοργάνωση, όπως είχε γίνει και την προηγούμενη χρονιά. Σύμφωνα με αυτούς κατά τη διάρκεια της εξέτασης η διαδικασία μεταδίδονταν με ζωντανή εικόνα στη διοργανώτρια χώρα, ενώ τα θέματα εστάλησαν σε όλες τις χώρες λίγο πριν την έναρξη του διαγωνισμού.

Οι Έλληνες μαθητές κατάφεραν να διακριθούν σε έναν ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό, κατακτώντας 2 αργυρά και 3 χάλκινα μετάλλια. Συγκεκριμένα:

Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια «Η Ελληνική Παιδεία»**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Φωτιάδης Πρόδρομος	**Μουσικό Λύκειο Δράμας**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Εμμανουήλ Δημήτριος	**Πρ. Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Δημουλιός Ιωάννης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Τζαχρήστας Γεώργιος	**2^o ΓΕΛ Ιωαννίνων**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Γεωργελές Γεώργιος	**2^o ΓΕΛ Ξάνθης**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ **Ανάργυρος Φελλούρης**, υπαρχηγός ο διδάκτωρ μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος** και παρατηρητής ο διδάκτωρ μαθηματικός **Αχιλλέας Συνεφακόπουλος**.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία προετοιμάζει και υποστηρίζει τις προσπάθειες αυτών των μαθητών πάντα σε εθελοντική βάση στο πλαίσιο των στόχων της που είναι η αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης στη χώρα μας.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους.

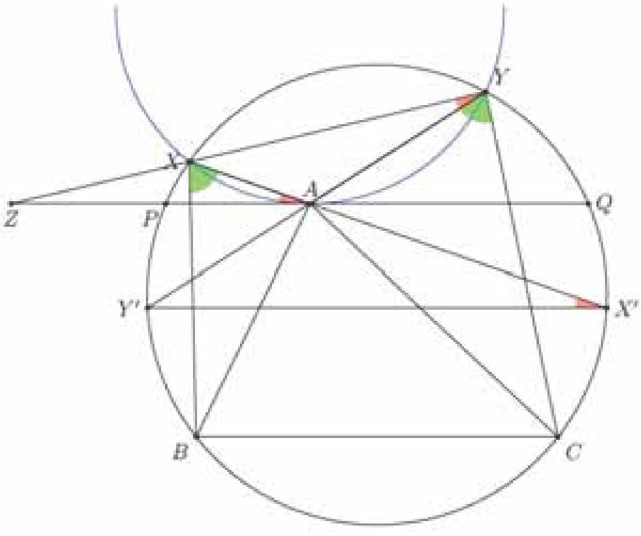
Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC$ και κύκλος ω που διέρχεται από τα B, C. Υποθέτουμε ότι το A βρίσκεται στο εσωτερικό του ω. Έστω X, Y σημεία πάνω στον ω τέτοια ώστε $\angle BXA = \angle AYC$. Υποθέτουμε ακόμη ότι το X βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της ευθείας AB από ότι το C, και ότι το Y βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της ευθείας AC από ότι το B. Να αποδείξετε ότι, καθώς μεταβάλλουμε τις θέσεις των X, Y πάνω στον ω, η ευθεία XY διέρχεται από ένα σταθερό σημείο. **[Ηνωμένο Βασίλειο]**

Λύση. Αν X', Y' είναι τα σημεία τομής του ω με τις XA, YA αντίστοιχα, τότε από την ισότητα των γωνιών $\angle BXA = \angle AYC$ παίρνουμε ότι $\overset{\frown}{Y'B} = \overset{\frown}{X'C}$, οπότε $Y'X' \parallel BC$. Θεωρούμε τώρα την ευθεία $\ell \parallel BC$ που περνάει από το A και τέμνει τον κύκλο στα P, Q και την ευθεία XY στο σημείο Z. Τότε

$$\angle XAP = \angle XX'Y' = \angle XYY' = \angle XYA$$

οπότε η ευθεία ℓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου XAY.

Επομένως $ZA^2 = ZX \cdot ZY = ZP \cdot ZQ$, επομένως το Z είναι σταθερό σημείο.



Πρόβλημα 2. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$\mathbf{f(x+f(x)+f(y))=2f(x)+y},$$

για κάθε $x,y\in(0,\infty)$. **[Ελλάδα, Σ. Μπραζιτίκος]**

Λύση. (1^{ος} τρόπος) Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι 1-1. Πράγματι, αν $x_1,x_2\in(0,\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε η αρχική, αν θέσουμε όπου x το 1 και όπου y τα x_1,x_2 αντίστοιχα, δίνει

$f(1+f(1)+f(x_1))=2f(1)+x_1$ και $f(1+f(1)+f(x_2))=2f(1)+x_2$, οπότε $x_1=x_2$.

Αν θέσουμε όπου y το x, τότε παίρνουμε:

$$f(x+2f(x))=x+2f(x) \qquad (1).$$

Αν τώρα θέσουμε στην αρχική όπου y το $x+y+f(x+2f(x))$ παίρνουμε λόγω της (1):

$$f(x+f(x)+f(x+y+f(x+2f(x))))=2f(x)+x+y+f(x+2f(x))=2f(x+2f(x))+y \quad (2)$$

Αν τώρα θέσουμε στην αρχική όπου x το $x+2f(x)$ παίρνουμε λόγω της (1):

$$f(2x+4f(x)+f(y))=2f(x+2f(x))+y \qquad (3)$$

Αφού τα δεύτερα μέλη των (2),(3) είναι ίσα, λόγω του 1-1 θα έχουμε:

$$x+f(x)+f(x+y+f(x+2f(x)))=2x+4f(x)+f(y),$$

οπότε λόγω της (1) έχουμε: $x+f(x)+f(2x+y+2f(x))=2x+4f(x)+f(y)$,

οπότε $f(2x+2f(x)+y)=x+3f(x)+f(y)$. Αν θέσουμε όπου y το $f(x)$ στην τελευταία παίρνουμε:

$$f(2x+3f(x))=x+3f(x)+f(f(x)). \qquad (4)$$

Αν όμως θέσουμε στην αρχική όπου y το $x+2f(x)$ παίρνουμε:

$$f(2x+3f(x))=x+4f(x) \qquad (5)$$

Από τις (4),(5) παίρνουμε ότι $f(f(x))=f(x)$ οπότε λόγω του 1-1 παίρνουμε $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος.

Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι 1-1 καθώς και ότι υπάρχει $m>0$ τέτοιο ώστε $(m,+\infty)\subseteq f(\mathbb{R}^+)$, δηλαδή η f λαμβάνει όλες τις θετικές τιμές που είναι μεγαλύτερες από έναν αριθμό $m>0$.

Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha)-\alpha=f(b)-b,\ (1)$ για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, b. Αν $\alpha=b$ τότε η (1) προφανώς ισχύει. Έστω , λοιπόν, ότι $\alpha\neq b$.

Θέτουμε $d=\alpha+f(\alpha)-b-f(b)$ και $k=2f(\alpha)-2f(b)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d=k$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $d\geq 0$.

Από την αρχική σχέση έχουμε $f(\alpha+f(\alpha)+f(y))=2f(\alpha)+y$ και $f(b+f(b)+f(y))=2f(b)+y$, οπότε $\quad f\left(\alpha+f(\alpha)+f(y)\right)-f\left(b+f(b)+f(y)\right)=2f(\alpha)-2f(b) \qquad (2).$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι υπάρχει $m>0$ τέτοιο ώστε $(m,+\infty)\subseteq f(\mathbb{R}^{+})$, η (2) δίνει

$$f\left(\alpha+f(\alpha)+y\right)-f\left(b+f(b)+y\right)=2f(\alpha)-2f(b),\ \text{για κάθε } y>m\ (3).$$

Θέτοντας στην (3) όπου y το $y-b-f(b)$ έχουμε

$$f\left(\alpha+f(\alpha)-b-f(b)+y\right)-f(y)=2f(\alpha)-2f(b),$$

για κάθε $y>\max\{m,b+f(b)\}$, δηλαδή $f(y+d)=f(y)+k,$ για κάθε

$$y>M=\max\{m,b+f(b)\}(4).$$

Θέτοντας στην αρχική όπου x το $x+d$ έχουμε για επαρκώς μεγάλες τιμές του x (ώστε να εφαρμόζεται η (4))

$$f\left(x+d+f(x+d)+f(y)\right)=2f(x+d)+y \ \text{ ή } \ f\left(x+f(x)+k+f(y)\right)+k=2f(x)+2k+y \ \text{ ή}$$

$$f\left(x+f(x)+k+f(y)\right)-k=2f(x)+y \ \text{ ή } \ f\left(x+f(x)+k-d+f(y)\right)=2f(x)+y \ (5).$$

Η (5) σε συνδυασμό με την αρχική δίνει $f\left(x+f(x)+k-d+f(y)\right)=f(x+f(x)+f(y))$

και αφού η f είναι 1-1 έχουμε ότι $d=k$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $f(\alpha)-\alpha=f(b)-b,$ για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,b.

Επομένως, η συνάρτηση $f(x)-x,\ x>0$ είναι σταθερή, οπότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x)=x+c,\ (6)$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x.

Αντικαθιστώντας την (6) στην αρχική, εύκολα έχουμε $c=0$.

Πρόβλημα 3. Έστω α, b και c θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(\alpha,b)+[\alpha,b]=2021^{c}.$$

Αν ο $|\alpha-b|$ είναι πρώτος αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $(\alpha+b)^2+4$ είναι σύνθετος.
(Εδώ, συμβολίζουμε με (α, b) τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των α και b, και με [α, b] το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α και b). [Σερβία]

Λύση. Έστω προς άτοπο ότι ο $(\alpha+b)^2+4$ είναι πρώτος και ότι b > α. Γράφουμε $p=b-\alpha$ και $q=(\alpha+b)^2+4$, με p, q πρώτους. Επειδή $(\alpha,b)\,|\,[\alpha,b]$, θα έχουμε ότι $(\alpha,b)\,|\,2021^{c}$. Όμως $(\alpha,b)\,|\,b-\alpha=p$, επομένως $(\alpha,b)\in\{1,43,47\}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $(\alpha,b)=1$, τότε αρχική γίνεται $\alpha b+1=2021^{c}$, και $q=(\alpha+b)^2+4=(\alpha-b)^2+4(\alpha b+1)=p^2+4\cdot 2021^{c}$. (1)

Είναι γνωστό ότι κάθε πρώτος της μορφής $4k+1$ γράφεται ως άθροισμα δύο τετραγώνων και αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική, οπότε από την (1), αν ο c είναι άρτιος, παίρνουμε ότι $p=2$. Τότε όμως ο q είναι άρτιος και μεγαλύτερος του 2, άτοπο.

Αν ο c είναι περιττός, τότε παίρνοντας modulo 3, έχουμε $q=p^2+4\cdot 2021^{c}\equiv p^2+1\cdot(-1)^{c}\equiv p^2-1 \pmod 3$.

Αν $p\neq 3$, τότε $p^2-1\equiv 0 \pmod 3$, άρα $3\,|\,q$, οπότε $q=3$, αδύνατο, αφού q > 3.

Αν $p=3$, τότε $b=\alpha+3$, οπότε $\alpha(\alpha+3)+1=2021^{c}\Rightarrow \alpha^2+3\alpha+1-2021^{c}=0$ και συμπληρώνοντας το τετράγωνο παίρνουμε ότι $(2\alpha+3)^2=4\cdot 2021^{c}+5$, οπότε το 5 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo 47.

Αυτό είναι αδύνατο καθώς από τον νόμο τετραγωνικής αντιστροφής έχουμε $\left(\frac{5}{47}\right)=\left(\frac{47}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1.$

- Αν $(\alpha,b)=43,$ τότε γράφουμε $\alpha=43x,\ b=43y$ και επειδή $p=43$ θα έχουμε $y=x+1$. Επιπλέον $[\alpha,b]=43x(x+1)$ οπότε η αρχική σχέση γίνεται $43x(x+1)+43=2021^{c}$ και συμπληρώνοντας το τετράγωνο παίρνουμε $(2x+1)^2=4\cdot 43^{c-1}\cdot 47-3$, δηλαδή το -3 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo 47. Αυτό είναι αδύνατο, καθώς από τον νόμο τετραγωνικής αντιστροφής έχουμε $\left(\frac{-3}{47}\right)=\left(\frac{-1}{47}\right)\left(\frac{3}{47}\right)=\left(\frac{3}{47}\right)=\left(\frac{47}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$

- Αν $(\alpha,b)=47$, τότε γράφουμε $\alpha=47s$, $b=47t$ και επειδή $p=47$ θα έχουμε $t=s+1$. Επιπλέον $[\alpha,b]=47s(s+1)$, οπότε η αρχική σχέση γίνεται $47s(s+1)+43=2021^c$.

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο παίρνουμε $(2s+1)^2=4\cdot 43^c\cdot 47^{c-1}-3$. Επομένως, αν $c>1$, το -3 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo 47, που όπως είδαμε πιο πάνω είναι άτοπο. Αν τώρα $c=1$, έχουμε $(2s+1)^2=169$, οπότε $s=6$. Τότε όμως $\alpha+b=47\cdot 6+47\cdot 7\equiv 47\cdot 13\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$. Αυτό δίνει ότι 5 |q, αδύνατο, αφού q>5 πρώτος. Σε κάθε περίπτωση, ο $(\alpha+b)^2+4$ είναι σύνθετος, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 4. Ο Άγγελος έχει μία αποθήκη, η οποία αρχικά περιέχει 100 στοίβες με 100 σκουπίδια στην καθεμιά. Κάθε πρωί, ο Άγγελος εκτελεί ακριβώς μία από τις ακόλουθες κινήσεις:
(α) Καθαρίζει όλα τα σκουπίδια από μία στοίβα.
(β) Καθαρίζει ένα σκουπίδι από κάθε στοίβα.
Κάθε βράδυ, όμως, ένα διαβολάκι εισβάλλει στην αποθήκη και εκτελεί ακριβώς μία από τις ακόλουθες κινήσεις:
(α) Προσθέτει ένα σκουπίδι σε κάθε στοίβα που δεν είναι άδεια.
(β) Δημιουργεί μία καινούρια στοίβα με ένα σκουπίδι.
Ποιο είναι το πρώτο πρωί κατά το οποίο ο Άγγελος μπορεί να εγγυηθεί ότι θα έχει καθαρίσει όλα τα σκουπίδια από την αποθήκη; [Ηνωμένο Βασίλειο]

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει από το πρωί της $199^{ης}$ ημέρας, αλλά όχι νωρίτερα. Αν έχουμε *n* στοίβες με τουλάχιστον δύο σκουπίδια και *m* στοίβες με ακριβώς ένα σκουπίδι τότε θα λέμε ότι βρισκόμαστε στη θέση (n,m) και ορίζουμε τιμή της θέσης αυτής να είναι

$$V=\begin{cases} n & \alpha\nu\ \ m=0\\ n+\dfrac{1}{2} & \alpha\nu\ \ m=1,\\ n+1 & \alpha\nu\ \ m\geq 2.\end{cases}$$

Η στρατηγική του Άγγελου είναι η ακόλουθη:
(i) Στη θέση $(0,m)$, αφαιρεί ένα σκουπίδι από κάθε στοίβα, οπότε φτάνει στο (0,0) και το παιχνίδι τελειώνει.
(ii) Από τη θέση $(n,0)$, όπου $n\geq 1$, αφαιρεί όλα τα σκουπίδια από μία στοίβα και πηγαίνει στη θέση $(n-1,0)$. Τότε, είτε το παιχνίδι τελειώνει, ή το διαβολάκι πάει το παιχνίδι σε μία από τις θέσεις $(n-1,0)$ ή (n–1,1). Σε κάθε περίπτωση η τιμή του V ελαττώνεται κατά τουλάχιστον 1/2.
(iii) Από τη θέση $(n,1)$, όπου $n\geq 1$, αφαιρεί όλα τα σκουπίδια από μία στοίβα που έχει τουλάχιστον δύο σκουπίδια και πηγαίνει στη θέση $(n-1,1)$. Τότε, το διαβολάκι πάει το παιχνίδι σε μία από τις θέσεις $(n,0)$ ή (n–1,2). Σε κάθε περίπτωση η τιμή του V ελαττώνεται κατά τουλάχιστον 1/2.
(iv) Από τη θέση (n,m), όπου $n\geq 1$, $m\geq 2$, αφαιρεί ένα σκουπίδι από κάθε στήλη για να πάει στη θέση (n–k, k), όπου k είναι το πλήθος από τις στοίβες με ακριβώς δύο σκουπίδια. Σε κάθε περίπτωση η τιμή του V μειώνεται κατά τουλάχιστον 1/2.
Επομένως, κάθε μέρα που το παιχνίδι δεν τελειώνει, η τιμή του V μειώνεται κατά τουλάχιστον 1/2. Αρχικά, η τιμή του V είναι 100, επομένως μετά από 198 ημέρες θα έχουμε ότι $V\leq 100-198\cdot\frac{1}{2}$, δηλαδή $V\leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι το παιχνίδι θα βρίσκεται σε θέση $(0,m)$ ή (1,0). Τότε ο Άγγελος μπορεί να σκουπίσει όλα τα σκουπίδια το πρωί της $199^{ης}$ ημέρας.
Τώρα δίνουμε μια στρατηγική για το διαβολάκι, η οποία εξασφαλίζει ότι στο τέλος κάθε μέρας, η ποσότητα V θα μειώνεται το πολύ 1/2 και στο τέλος κάθε μέρας θα έχουμε $m\leq 1$.
(i) Αν ο Άγγελος κινηθεί από τη θέση (n,0) στη θέση (n–1,0), τότε το διαβολάκι δημιουργεί μια νέα στοίβα με ένα σκουπίδι και έτσι φτάνουμε στη θέση (n–1, 1). Τότε το V μειώνεται κατά 1/2 και $m=1$.
(ii) Αν ο Άγγελος κινηθεί από τη θέση (n,0) στην (n–k,k), τότε το διαβολάκι προσθέτει ένα σκουπίδι σε κάθε στοίβα, οπότε οδηγούμαστε στη θέση (n,0). Τότε το V παραμένει σταθερό και $m=0\leq 1$.
(iii) Αν ο Άγγελος κινηθεί από το (n,1) στο (n–1,1) ή στο (n,0), τότε το διαβολάκι προσθέτει ένα σκουπίδι σε κάθε στοίβα για να φτάσουμε στη θέση (n,0). Τότε το V μειώνεται κατά 1/2 και $m=0\leq 1$.

(iv) Αν ο Άγγελος κινηθεί από το $(n,1)$ στο (n–k, k), τότε το διαβολάκι προσθέτει ένα σκουπίδι σε κάθε στοίβα και φτάνουμε στη θέση (n, 0). Τότε το V μειώνεται κατά 1/2 και $m = 0 \leq 1$.
Αφού με την παραπάνω στρατηγική έχουμε ότι $m \leq 1$ μετά το τέλος κάθε ημέρας, για να τελειώσει το παιχνίδι την επόμενη μέρα, πρέπει να έχουμε $(1,0)$ ή (0,1) και επομένως πρέπει να έχουμε $V \leq 1$.
Επιπλέον, στο τέλος της μέρας N έχουμε $V \geq 100 - N/2$, οπότε για να επιτύχουμε $V \leq 1$.
πρέπει να έχουμε $N \geq 198$ που είναι το ζητούμενο.
(Η επιμέλεια των λύσεων της BMO 2021 έγινε από τον **Σιλουανό Μπραζιτίκο**)

38η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) = \alpha\gamma+\beta\delta$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης: $A = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\alpha}$.

Λύση

Με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου και της δεδομένης ισότητας, λαμβάνουμε:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\delta}{\alpha}\right) \geq 2\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}+2\sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}} = \frac{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} = \frac{2(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} \geq 2\cdot\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}+2\sqrt{\beta\delta}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} = 8.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\gamma,\ \beta=\delta,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\delta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=\gamma,\ \beta=\delta.$ Τότε η δεδομένη ισότητα

παίρνει τη μορφή $\alpha^2+\beta^2 = 4\alpha\beta \overset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 2\pm\sqrt{3}.$

Επομένως η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 8 και μπορεί να την πάρει για παράδειγμα για

$$\alpha=\gamma=1 \text{ και } \beta=\delta=\frac{1}{2\pm\sqrt{3}} = 2\mp\sqrt{3}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο με $A\hat{B}\Gamma > 90^0$, $\Gamma\hat{\Delta}A > 90^0$ και $\Delta\hat{A}B = B\hat{\Gamma}\Delta$. Έστω Ε και Ζ τα συμμετρικά του Α ως προς τις ευθείες ΒΓ και ΓΔ, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα τμήματα ΑΕ και ΑΖ τέμνουν την ευθεία ΒΔ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΕΚ και ΔΖΛ εφάπτονται μεταξύ τους.

Λύση

1ος τρόπος. Αν υποθέσουμε ότι Μ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, τότε θα αποδείξουμε ότι τα τετράπλευρα ΜΒΚΕ και ΜΔΛΖ είναι εγγράψιμα και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους εφάπτονται στο Μ.

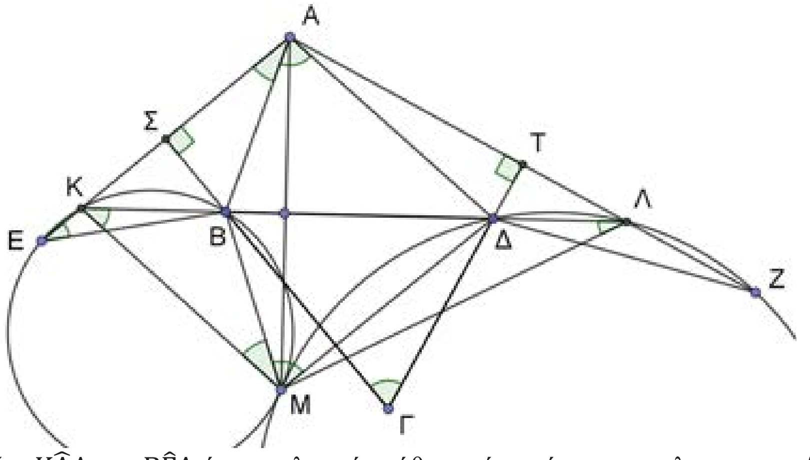
Λόγω συμμετρίας ως προς τη ΒΓ έχουμε $B\hat{E}K = B\hat{A}K$ και λόγω συμμετρίας ως προς την ΒΔ έχουμε $B\hat{A}K = B\hat{M}K$, οπότε θα είναι και , δηλαδή το τετράπλευρο ΜΒΚΕ είναι εγγράψιμο. Ομοίως προκύπτει και ότι το τετράπλευρο ΜΔΛΖ είναι εγγράψιμο.

Στη συνέχεια θεωρούμε τη γωνία «καμπής» $B\hat{M}\Delta$ των περιγεγραμμένων κύκλων των τετραπλεύρων ΜΒΚΕ και ΜΔΛΖ στο σημείο Μ και θα αποδείξουμε ότι:

$$B\hat{M}\Delta = M\hat{K}B + M\hat{\Lambda}\Delta, \qquad (1)$$

από την οποία εύκολα προκύπτει ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΕΚ και ΔΖΛ εφάπτονται μεταξύ τους, αφού υπάρχει ευθεία που περνάει από το Μ που σχηματίζει με τις χορδές ΜΒ και ΜΔ των δύο κύκλων γωνίες ίσες με τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες στα ελάσσονα τόξα ΜΒ και ΜΔ, αντίστοιχα. Πράγματι, επειδή $ΑΚ \perp ΒΓ$, $ΑΛ \perp ΓΔ$ και λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΒΔ, έχουμε:

$$M\hat{K}B + M\hat{Λ}Δ = 180^0 - K\hat{M}Λ = 180^0 - K\hat{A}Λ = B\hat{Γ}Δ \text{ (από το εγγράψιμο ΑΣΓΤ)}$$
$$= B\hat{A}Δ \text{ (από υπόθεση)} = B\hat{M}Δ.$$



$2^{ος}$ τρόπος. Οι γωνίες $K\hat{A}Λ$ και $B\hat{Γ}Δ$ έχουν πλευρές κάθετες άρα είναι παραπληρωματικές (αφού δεν είναι κια οι δύο οξείες). Θεωρούμε τον μετασχηματισμό της συμμετρίας Σ ως προς την πλευρά ΒΔ. Με Σ(Χ) θα συμβολίζουμε την εικόνα του σχήματος Χ (ή σημείου). Επειδή $K\hat{E}B = K\hat{A}B$ και $Δ\hat{Z}Λ = Δ\hat{A}Λ$, θα έχουμε ότι $Σ\big((BEK)\big) = (KAB)$ και $Σ\big((ΔZΛ)\big) = (ΛAΔ)$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτοί οι κύκλοι εφάπτονται στο σημείο Α. Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι

$$A\hat{K}B + A\hat{Λ}Δ = 180° - K\hat{A}Λ = B\hat{Γ}Δ = B\hat{A}Δ.$$

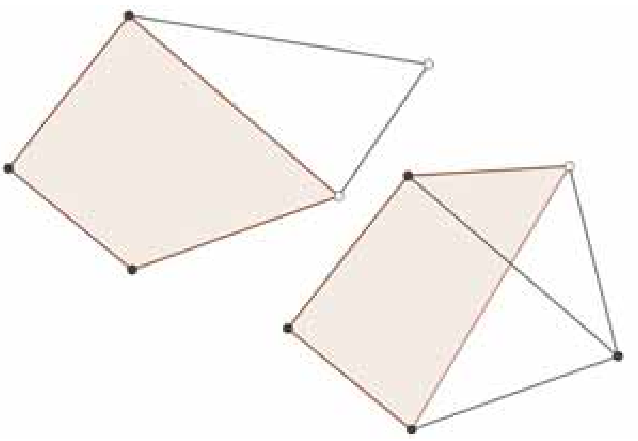
Επομένως, υπάρχει μία ημιευθεία ΑΡ στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}Δ$ ώστε $B\hat{A}P = A\hat{K}B$ και $Δ\hat{A}P = Δ\hat{Λ}A$, οπότε η ΑΡ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων (ΚΑΒ) και (ΛΑΔ).

Πρόβλημα 3

Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Οι κορυφές ενός κυρτού $(4k+1)$ −γωνου P χρωματίζονται με δύο χρώματα, άσπρο και μαύρο και κάθε χρώμα χρησιμοποιείται τουλάχιστον k φορές. Ένα κυρτό τετράπλευρο, που οι κορυφές του είναι και κορυφές του P, θα ονομάζεται *καλό,* εάν έχει τρεις κορυφές του ενός χρώματος και μία κορυφή του άλλου χρώματος. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν k *καλά* κυρτά τετράπλευρα που είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία στην περίμετρο και στο εσωτερικό τους.

Λύση

Θα κάνουμε επαγωγή ως προς k. Για $k=1$ έχουμε ένα κυρτό πεντάγωνο με τουλάχιστον μία μαύρη και τουλάχιστον μία άσπρη κορυφή. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι μαύρες κορυφές είναι περισσότερες από τις άσπρες. Επομένως οι μαύρες είναι τουλάχιστον τρεις. Αυτές οι 3 μαύρες μαζί με την (τουλάχιστον) μία άσπρη, δημιουργούν το ζητούμενο καλό τετράπλευρο.



Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι $k \geq 2$ και ότι ισχύει το ζητούμενο για το $k-1$. Συμβολίζουμε με b, w το πλήθος των μαύρων και άσπρων κορυφών αντίστοιχα. Τότε $b, w \geq k$ και $b + w = 4k + 1$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα μαύρα είναι περισσότερα. Τότε:

$$k \leq w \leq 2k \text{ και } 2k+1 \leq b \leq 3k+1.$$

Ισχυρισμός: Θα βρούμε 4 διαδοχικές κορυφές ώστε 3 από αυτές να είναι μαύρες και μία να είναι άσπρη. Ονομάζουμε τις κορυφές διαδοχικά ακολουθώντας φορά διαγραφής αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου $V_1, V_2, \dots, V_{4k+1}$, έτσι ώστε η V_{4k+1} να είναι άσπρη και θεωρούμε τις ακόλουθες τετράδες κορυφών: $(V_1, V_2, V_3, V_4), (V_5, V_6, V_7, V_8), \dots, (V_{4k-3}, V_{4k-2}, V_{4k-1}, V_{4k})$.

Σε αυτές τις τετράδες έχουμε $w-1$ άσπρες και b μαύρες κορυφές. Επειδή $b > w-1$, υπάρχει τουλάχιστον μία τετράδα, έστω $(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3})$ η οποία περιέχει περισσότερες μαύρες κορυφές απ' ότι άσπρες κορυφές. Αν είναι 3 μαύρες και μία άσπρη, τότε θα έχουμε το ζητούμενο στον ισχυρισμό. Αν τώρα όλες στην τετράδα είναι μαύρες, θεωρούμε την πρώτη άσπρη, έστω V_j μετά την V_{i+3}. Σίγουρα υπάρχει τέτοια αφού η V_{4k+1} είναι άσπρη, οπότε στη χειρότερη περίπτωση θα φτάσουμε σε αυτή. Τότε όμως οι $V_j, V_{j-1}, V_{j-2}, V_{j-3}$ ικανοποιούν τον ισχυρισμό.

Οι τέσσερεις αυτές κορυφές που εξασφαλίζουμε από τον ισχυρισμό δημιουργούν ένα *καλό* τετράπλευρο. Οι υπόλοιπες $4k-3 = 4(k-1)+1$ κορυφές σχηματίζουν ένα κυρτό πολύγωνο, στο οποίο υπάρχουν $b-3$ μαύρες και $w-1$ άσπρες κορυφές με $w-1 \geq k-1$ και $b-3 \geq (2k+1)-3 > k-1$,

οπότε με την επαγωγική υπόθεση για το $k-1$, έχουμε $k-1$ καλά τετράπλευρα.

Επομένως συνολικά έχουμε k καλά τετράπλευρα, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών και $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ το σύνολο των μη μηδενικών φυσικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $\mathbf{f}: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ οι οποίες ικανοποιούν και τις τρεις συνθήκες:

(α) $\mathbf{f(n) \neq 0}$, για ένα τουλάχιστον $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$,

(β) $\mathbf{f(xy) = f(x) + f(y)}$, για κάθε $\mathbf{x, y} \in \mathbb{N}^*$,

(γ) υπάρχουν άπειροι θετικοί φυσικοί αριθμοί n έτσι ώστε: $\mathbf{f(k) = f(n-k)}$, για όλα τα k με $\mathbf{0 < k < n}$.

Λύση

Για $y = 1$ η (ii) δίνει $f(x) = f(x) + f(1)$, οπότε $f(1) = 0$. Επιπλέον, αφού υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $f(n) \neq 0$, αυτό σημαίνει από την (ii) ότι υπάρχει ένας πρώτος διαιρέτης του r ώστε $f(r) \neq 0$. Θεωρούμε τον ελάχιστο τέτοιο πρώτο p_1 με $f(p_1) \neq 0$.

Θα ονομάζουμε *καλούς* όλους τους θετικούς ακεραίους n που ικανοποιούν το (iii). Παίρνουμε έναν καλό θετικό ακέραιο $N > p_1$.

Βήμα 1: Ο p_1 διαιρεί τον N. Παρατηρούμε ότι για κάθε αριθμό s μικρότερο του p_1, ισχύει ότι $f(s) = 0$, γιατί όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του s είναι μικρότεροι του p_1, οπότε όλοι έχουν τιμή 0.

Θεωρούμε τη διαίρεση του N με το p_1 και γράφουμε $N = p_1 q + r$ με $0 \leq r < p_1$. Αν $r \neq 0$, τότε σύμφωνα με την παρατήρηση θα έχουμε ότι $f(r) = 0$. Επειδή ο N είναι καλός, θα έχουμε

$$0 = f(r) = f(N-r) = f(p_1 q) = f(p_1) + f(q),$$

άτοπο αφού $f(p_1) \neq 0$. Έπεται ότι $p_1 \mid N$.

Βήμα 2: Αν d είναι ένας διαιρέτης του N, τότε ο d είναι καλός. Πράγματι, γράφουμε $N = dq$. Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots, d-1$, έχουμε ότι $qk < N$, οπότε, επειδή ο N είναι καλός,

$$f(q) + f(k) = f(qk) = f(N - qk) = f(dq - qk) = f\big(q(d-k)\big) = f(q) + f(d-k),$$

οπότε $f(k) = f(d-k)$, άρα ο d είναι καλός.

Βήμα 3: Για κάθε $c > 0$, ο p_1^c είναι καλός.

Από τα βήματα 1 και 2 συμπεραίνουμε ότι κάθε καλός αριθμός είναι της μορφής $N = p_1^a \cdot b$, όπου $b < p_1$. Επομένως για να ισχύει η (iii) για άπειρους N, θα πρέπει ο α να μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $c > 0$, ο p_1^c διαιρεί κάποιον καλό αριθμό, άρα είναι καλός.

Βήμα 4: Για κάθε πρώτο $q \neq p_1$ ισχύει $f(q) = 0$.

Εφαρμόζουμε το βήμα 3 για $c = q - 1$ και παίρνουμε ότι p_1^{q-1} είναι καλός. Επομένως

$$f\left(p_1^{q-1} - 1\right) = f(1) = 0.$$

Όμως, από το μικρό θεώρημα του Fermat έχουμε $q \mid p_1^{q-1} - 1$, οπότε έχουμε

$$f(q) \le f\left(p_1^{q-1} - 1\right) = 0 \text{, οπότε } f(q) = 0.$$

Βήμα 5: Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $f(n) = f(p_1) \cdot v_{p_1}(n)$.

Αν ο n δεν διαιρείται από τον p_1, τότε από βήμα 4, για κάθε $q \mid n$, θα έχουμε $f(q) = 0$, οπότε από το (ii) θα έχουμε:

$$f(n) = 0. \qquad (*)$$

Αν ο n διαιρείται από τον p_1, γράφουμε $n = p_1^{a_1} \cdot w$, όπου ο $a_1 = v_{p_1}(n)$ είναι η μέγιστη δύναμη του p_1 που διαιρεί τον n, άρα ο w δεν έχει παράγοντα τον p_1, οπότε από την (*) έχουμε $f(w) = 0$.

Τελικά από τη (ii) παίρνουμε $f(n) = f\left(p_1^{a_1} \cdot w\right) = f\left(p_1^{a_1}\right) + f(w) = a_1 f(p_1) = v_{p_1}(n) f(p_1)$.

Η επαλήθευση είναι άμεση, καθώς και η (iii) ισχύει για κάθε $n = p_1^m$, αφού

$$v_{p_1}(p_1^m - k) = v_{p_1}(k).$$

2ος τρόπος: Όπως στον πρώτο τρόπο παίρνουμε $f(1) = 0$ και θεωρούμε τον ελάχιστο πρώτο p_1 με $f(p_1) \neq 0$.

Θα ονομάζουμε *καλούς* όλους τους θετικούς ακεραίους n που ικανοποιούν το (iii). Παίρνουμε έναν καλό θετικό ακέραιο $N > p_1$.

Έστω N ένας καλός αριθμός. Εφαρμόζουμε την (ii) για $x = \binom{N-1}{k}$ και $y = k!$ και παίρνουμε

$$f\left(\binom{N-1}{k} \cdot k!\right) = f\left(\binom{N-1}{k}\right) + f(k!)$$

οπότε

$$f\big((N-1)(N-2)\dots(N-k)\big) = f\left(\binom{N-1}{k}\right) + f(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k) \overset{(ii)}{\Longrightarrow}$$

$$f(N-1) + f(N-2) + \dots + f(N-k) \ge f(1) + \dots + f(k). \qquad (1)$$

Όμως ο N είναι καλός άρα $f(N-k) = f(k)$, για κάθε k, άρα στην (1) πρέπει να ισχύει η ισότητα. Έπεται ότι $f\left(\binom{N-1}{k}\right) = 0$ για κάθε καλό αριθμό N και για κάθε k. Επομένως ο $\binom{N-1}{k}$ δεν διαιρείται από τον p_1 για κάθε $k = 1,2 \dots, N-2$. Έπεται ότι $N = p_1^{a_1} \cdot b$ με $b < p_1$. (2)

Αν και για κάποιον άλλο πρώτο p_2 ίσχυε $f(p_2) \neq 0$, τότε $N = p_2^{a_2} \cdot c$, με $c < p_2$. (3)

Οι (2) και (3) μπορεί να ισχύουν μόνο για πεπερασμένους N, άτοπο.

Επομένως για κάθε πρώτο $q \neq p_1$ ισχύει $f(q) = 0$ και ολοκληρώνουμε όπως στο Βήμα 5 του πρώτου τρόπου.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 120

Α64. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης: $\mathrm{E}(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha+\beta}{\left(4\alpha^2+3\right)\left(4\beta^2+3\right)}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

[Ρουμανία 2019]

Λύση

(1ος τρόπος). Θα αποδείξουμε ότι $\max\mathrm{E}(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{16}$ και ότι η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται για $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathrm{E}(\alpha,\beta) \le \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16(\alpha+\beta) \le \left(4\alpha^2+3\right)\left(4\beta^2+3\right) \Leftrightarrow (4\alpha\beta-1)^2 + 4(\alpha+\beta-1)^2 + 2(2\alpha-1)^2 + 2(2\beta-1)^2 \ge 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει όταν γίνουν ίσοι με μηδέν όλοι οι όροι του πρώτου μέλους, δηλαδή όταν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

(2ος τρόπος). Θα χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\alpha + \beta \le \frac{(1+\alpha+\beta)^2}{4} \text{ και } (4\alpha^2+3)(4\beta^2+3) = (4\alpha^2+1+2)(1+4\beta^2+2) \ge (2\alpha+2\beta+2)^2,$$

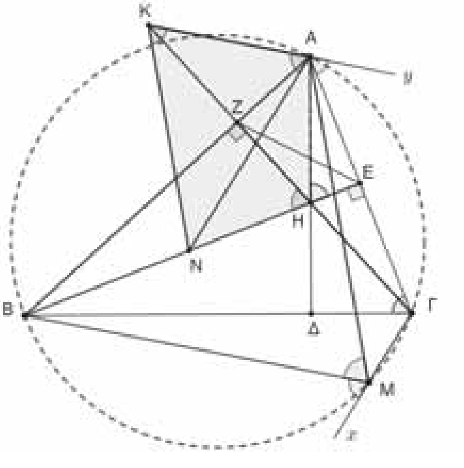
οι οποίες ισχύουν για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Η δεύτερη προκύπτει από κατάλληλη εφαρμογή της γνωστής ανισότητας Cauchy – Schwarz. Μέσω αυτών έχουμε:

$$\mathrm{E}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{(4\alpha^2+3)(4\beta^2+3)} \le \frac{(1+\alpha+\beta)^2}{4(4\alpha^2+3)(4\beta^2+3)} \le \frac{(1+\alpha+\beta)^2}{4(2+2\alpha+2\beta)^2} = \frac{1}{16}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha + \beta = 1$ και $2\alpha = 2\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Γ55. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθόκεντρο Η αυτού και έστω Μ τυχόν σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του $c(O,R)$. Η ευθεία που περνάει από το Α και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΒΜ τέμνει την ευθεία ΓΗ στο σημείο Κ και η ευθεία που περνάει από το Α και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΓΜ τέμνει την ευθεία ΒΗ στο Ν. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{KN} \parallel \mathrm{AM}$.

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι ένα ζευγάρι κατάλληλων γωνιών, για παράδειγμα, οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες $\mathrm{N\hat{K}A}$ και $\mathrm{M\hat{A}}y$, ότι είναι ίσες.

Παρατηρούμε ότι έχουμε τις παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\mathrm{K\hat{A}N} = \mathrm{B\hat{M}}x \text{ (οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές)}$$

$$\mathrm{B\hat{M}}x = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} \text{ (από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΜΓ)}$$

$$\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \mathrm{K\hat{H}N} \text{ (από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΖΗΕ).}$$

Επομένως, $\mathrm{K\hat{A}N} = \mathrm{K\hat{H}N}$, οπότε το τετράπλευρο ΑΚΝΗ είναι εγγράψιμο.
Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα ΑΚΝΗ και ΗΔΓΕ έπεται ότι:

$$\mathrm{N\hat{K}A} = \mathrm{A\hat{H}E} = \mathrm{B\hat{\Gamma}A} \qquad (1)$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\mathrm{B\hat{\Gamma}A} = \mathrm{B\hat{M}A}, \qquad (2)$$

ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Όμως από τις παράλληλες ΑΚ και ΒΜ έπεται ότι:

$$B\hat{M}A = M\hat{A}y \qquad (3)$$

Από τις (1) – (3) έπεται ότι $N\hat{K}A = M\hat{A}y$, οπότε $KN \parallel AM$.

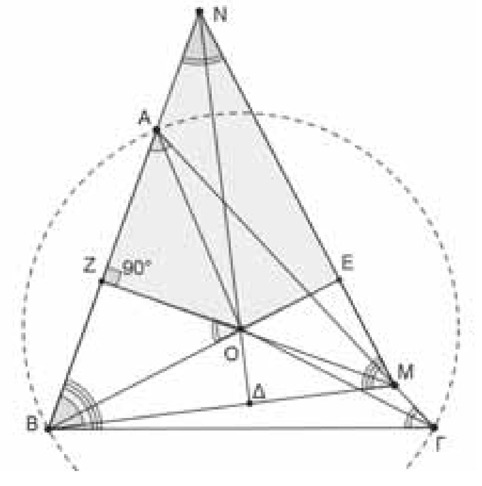
Γ56. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ο το περίκεντρό του. Επιλέγουμε σημείο Μ στην ημιευθεία ΑΓ έτσι ώστε το Γ να βρίσκεται μεταξύ των Α και Μ και σημείο Ν στην ημιευθεία ΒΑ έτσι ώστε το Α να βρίσκεται μεταξύ των Β και Ν. Αν τα τρίγωνα ΜΓΝ και ΑΒΓ είναι όμοια με αντίστοιχες κορυφές που προκύπτουν από τη δεδομένη διάταξη, να αποδείξετε ότι το σημείο Ο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΜΝ.

Λύση

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΜΝ και ΑΒΓ έπεται ότι $A\hat{B}M = B\hat{A}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ. Επομένως η ΜΟ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου ΒΜΝ.

Επειδή Ο είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ έπεται ότι: $B\hat{O}Z = B\hat{\Gamma}A$ και αφού από την υπόθεση $B\hat{\Gamma}A = M\hat{N}B$, έπεται ότι:

$$B\hat{O}Z = M\hat{N}B = ENZ\,. \qquad (1)$$



Από την (1) έπεται ότι το τετράπλευρο ΖΟΕΝ είναι εγγράψιμο, οπότε

$$O\hat{E}N + O\hat{Z}N = 180^0 \Rightarrow O\hat{E}N = 180^0 - O\hat{Z}N = 180^0 - 90^0 = 90^0\,.$$

Επομένως και το ΒΕ είναι ύψος του τριγώνου ΒΜΝ, οπότε το Ο είναι το ορθόκεντρο αυτού.

Ασκήσεις για λύση

Ν52. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν για τους οποίους ο αριθμός $\nu!+\nu+1$ είναι διαιρέτης του αριθμού $(\nu+1)!-\nu$.

Γ58. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ι το έκκεντρό του. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΙ και ΓΙ τέμνουν την ευθεία ΔΕ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Β, Γ είναι ομοκυκλικά και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου που τα περιέχει.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά

Το τονίσαμε και άλλοτε, ότι ο καλύτερος τρόπος για ν' απαντήσουμε στο ερώτημα "τί είναι τα Μαθηματικά", είναι να παρουσιάσουμε τις εφαρμογές τους. Μ' αυτή την έννοια δεχτήκαμε, με ικανοποίηση, την υπόδειξη του φίλου της στήλης Νίκου Ζερίτη. ο οποίος μας υπόδειξε να συστήσουμε στους αναγνώστες μας την μελέτη μιας ιατρικής εργασίας με τίτλο: «*Μαθηματικά μοντέλα δημιουργίας, ανάπτυξης και μετάστασης του καρκίνου*», τονίζοντάς μας, ότι είναι ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσουμε τί είναι τα Μαθηματικά. Το ερευνήσαμε το θέμα και το βρήκαμε, υπό τα στοιχεία:

«ΑΡΧΕΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΙΑΤΡΙΚΗΣ 2014, 31(3): 365-371[Μ. ΚΙΑΚΟΥ, Ν. ΧΟΛΗΣ, Ν. ΤΣΟΥΚΑΛΑΣ] Κλινική Παθολογικής Ογκολογίας 401 Γενικό Στρατιωτικό Νοσοκομείο Αθηνών, Αθήνα Mathematical models for tumor creation, development and metastasis»

α. σας παραθέτουμε μόνο ερεθίσματα από την εργασία αυτή:

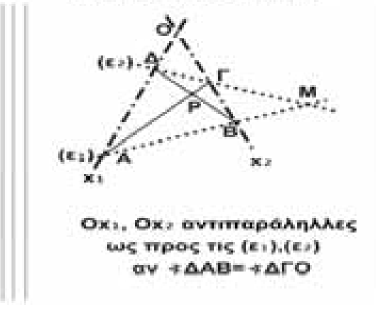
«Τα *μαθηματικά μοντέλα* της πληθυσμιακής οικολογίας εξετάζουν τους όγκους όχι ως μια μεμονωμένη συλλογή από μεταλλαγμένα κύτταρα, αλλά ως τμήμα μιας δυναμικής ανταγωνιστικής κοινωνίας καρκινικών και φυσιολογικών κυττάρων…….. Για τη μελέτη της διήθησης των κακοήθων όγκων αναπτύχθηκε ένα ***μαθηματικό μοντέλο*** βασιζόμενο σε **θερμοδυναμικούς παράγοντες.** Σε αυτό γίνεται εξομοίωση του πληθυσμού των κακοήθων κυττάρων, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, ……… Επίσης, *στη μοντελοποίηση* αυτή……...αναπτύχθηκε *ένας αλγόριθμος* για την κυτταρική διαίρεση, ………

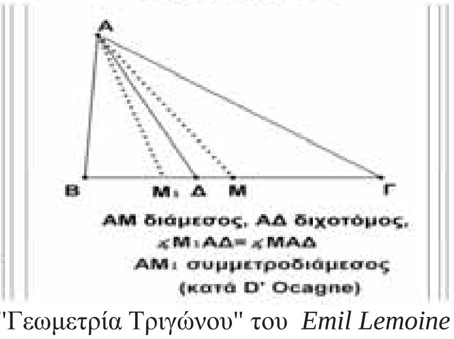
συμπεράσματα: Γεγονός είναι ότι οι μελέτες που αναφέρθηκαν και τα χρησιμοποιούμενα σε *αυτές μαθηματικά μοντέλα*, αντιμετωπίζοντας τους όγκους από διάφορες οπτικές γωνίες, έχουν επιτύχει να κωδικοποιήσουν με κάποιον υποτυπώδη, ακόμη, τρόπο την *καρκινική ανάπτυξη* και τη *μετάσταση*.

Η εν λόγω κωδικοποίηση δεν έχει βρει ακόμη πρακτική εφαρμογή, συνδράμει όμως τους ερευνητές να διεισδύουν στην παθογένεια της ογκογένεσης και της καρκινικής διασποράς και να γνωρίσουν σε βάθος την ενιαία παθολογική οντότητα της νεοπλασματικής νόσου χωρίς να τους απασχολούν θέματα εντόπισης. Φυσικά, γίνεται προσπάθεια να αποκτηθεί η σχετική γνώση, γιατί αναμένεται να λειτουργήσει καθοριστικά στην εξέλιξη της θεραπείας των όγκων. Εκτός του ότι θα αποκαλυφθεί πού παρακωλύεται η δράση των ήδη χρησιμοποιούμενων θεραπειών, ενδεχομένως η κατανόηση της παθοφυσιολογίας τους να δώσει την ευκαιρία για ανάπτυξη νέων καινοτόμων θεραπειών».

β. *Εμείς δίνουμε τα θερμά μας συγχαρητήριά στη συγκεκριμένη ερευνητική ομάδα του 401 Γενικού Στρατιωτικού Νοσοκομείου Αθηνών και υποσχόμαστε να δημοσιεύουμε, κατά καιρούς, αναφορές σε παρόμοιες εργασίες παραθέτοντας σχετικά ερεθίσματα.*

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου





Στο επόμενο τεύχος, έννοιες από την "Γεωμετρία Τριγώνου" του *Emil Lemoine*

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

τί είναι το "σημείο Feuerbach", στο τρίγωνο;

(*η απάντηση στο τέλος της στήλης*)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν την "Άλγεβρα" πολύ πριν τους Άραβες β΄μέρος

Προλεγόμενα. στο προηγούμενο τεύχος δημοσιεύσαμε, με τον ίδιο τίτλο, το πρώτο μέρος ενός σημειώματος του Γιάννη Χριστιανίδη, εδώ παραθέτουμε το β΄ μέρος. Σημειώνουμε ότι ο Γιάννης Χριστιανίδης είναι καθηγητής στο ΕΚΠΑ και οι δημοσιεύσεις του πάνω στην Ιστορία των Μαθηματικών αποτελούν, κάθε φορά, ένα επιστημονικό γεγονός.

β΄ μέρος

Η γλώσσα των Μαθηματικών τότε

«Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο Θέων σε ένα αστρονομικό πρόβλημα του Πτολεμαίου, όπου υπάρχει και ένα συνοδευτικό γεωμετρικό σχήμα, εκτός από τη γεωμετρική απόδειξη που κάθεται και (ξανα)κάνει, συνεχίζει και μεταφράζει τα δεδομένα και τα ζητούμενα μεγέθη στη γλώσσα που είχε εισαγάγει ο Διόφαντος, με τρόπο που να σχηματιστεί μια εξίσωση. Αλλά και αυτό είναι απλό να το παρουσιάζεις περιγραφικά αλλά όχι το ίδιο εύκολο να το αναγνωρίσεις αν δεν κατέχεις τη μαθηματική γλώσσα της εποχής εκείνης.

Μην ψάχνεις να βρεις κανέναν άγνωστο Χ ή τη στερεότυπη δράση που ξέρει και ο κάθε μαθητής σήμερα: χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, αλλάζω τα πρόσημα (δεν γινόταν λόγος τότε για αρνητικούς αριθμούς). Με δυο λόγια, δεν χρησιμοποιούσαν τον δικό μας συμβολισμό. Πρέπει λοιπόν κάποιος να κατέχει καλά τον Διόφαντο για να βγάλει νόημα και να εκτιμήσει την ανακάλυψη.

Αφού λοιπόν στην εργασία τους οι δύο ερευνητές αναλύσουν όλη την επίλυση του Θέωνος, ασχολούνται ιδιαίτερα με μια φράση αποφασιστικής σημασίας: «διά της των Διοφαντείων αριθμών αγωγής».

Σύμφωνα με τον κ. Χριστιανίδη, τη λέξη αριθμός οι αλγεβριστές εκείνη την εποχή τη χρησιμοποιούσαν με δύο έννοιες: απλά για να δηλώσουν το σύμβολο που αντιπροσώπευε την αντίστοιχη αριθμητική αξία, δηλαδή ο αριθμός ε (το 5 της εποχής εκείνης), αλλά υπήρχε και μια δεύτερη έννοια πιο τεχνική, π.χ. με το όνομα «1 Αριθμός» εννοούσαν αυτό που εμείς σήμερα λέμε «άγνωστος Χ». Επίσης ήταν γνωστοί και άλλοι τέτοιοι αλγεβρικοί αριθμοί, όπως «δύναμις», «κύβος», «δυναμοδύναμις»…

Ολοι αυτοί οι αριθμοί συγκροτούν μια γλώσσα, την τεχνική γλώσσα της άλγεβρας της εποχής εκείνης, στην οποία μετέφραζαν το κάθε πρόβλημα. Προϊόν αυτής της μετάφρασης ήταν η εξίσωση. Ετσι μια έκφραση όπως «2 αριθμοί και 3 μονάδες είναι ίσα με 10 μονάδες» είναι μια εξίσωση, σαν τη δική μας $2X + 3 = 10$. Αυτούς τους αριθμούς χαρακτηρίζει ο Θέων «Διοφαντείους αριθμούς». Στην ουσία ήταν τα αλγεβρικά εργαλεία της εποχής.

Επίσης αξιοπρόσεκτη είναι και η χρήση της λέξης «αγωγή». Εδώ φαίνεται ότι επρόκειτο για μια γνωστή και χρησιμοποιούμενη και από άλλους μέθοδο, κάτι ανάλογο με το δικό μας σημερινό «χρησιμοποίησα τη Μέθοδο των τριών για να το βρω».

Άρα βγάζουμε και το συμπέρασμα ότι στη διάρκεια των χρόνων που μεσολάβησαν από τον Διόφαντο ως τον Θέωνα αυτές οι αλγεβρικές μέθοδοι όχι μόνο απαθανατίστηκαν και δεν χάθηκαν, αλλά ήταν πλέον ένα μαθηματικό εργαλείο σε χρήση. Και με τη διάχυσή τους αυτή για αρκετούς αιώνες κίνησαν αργότερα την προσοχή των Αράβων μαθηματικών όπως ο Αλ Χουραΐζμι, οι οποίοι αναμφισβήτητα πήγαν και αυτοί τη γνώση λίγο παρακάτω.

Η ερευνητική ομάδα από το ΜΙΘΕ, προφανώς σε αναγνώριση της σημασίας της εργασίας αυτής, έχει προσκληθεί και θα παρουσιάσει τα σχετικά σε συνάντηση στο Παρίσι, αυτό θα επαναληφθεί στο Λονδίνο, μετά στο Ισραήλ και μάλλον θα υπάρξουν και άλλοι που θα ήθελαν να μάθουν για το πώς ο Διόφαντος μέσα από τα σχόλια του περιθωρίου και την παρατηρητικότητα κάποιων ξαναμπαίνει στην κεντρική σκηνή.

Ελληνες και Άραβες

Κλαύδιος Πτολεμαίος: έζησε περίπου από το 90 ως το 168 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια, έγραψε όλα τα έργα του στα ελληνικά και οι σύγχρονοί του παρ' όλο που λέγεται ότι καταγόταν από τη Νότια Αίγυπτο τον θεωρούσαν Ελληνα, αφού και το όνομά του ακόμη παρέπεμπε στον Έλληνα επίγονο και διάδοχο του Αλεξάνδρου στην Αίγυπτο. Ένα από τα γνωστότερα έργα του, για αιώνες σύγγραμμα αναφοράς για την Αστρονομία, ήταν η λεγόμενη «Μαθηματική Σύνταξη», αποτελούμενη από 13 βιβλία, που οι βυζαντινοί λόγιοι την ανέφεραν ως «Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξη» και όταν τη μετέφρασαν οι Άραβες έγινε πιο γνωστή, εξαιτίας και της πρότaξης του αραβικού άρθρου «Αλ», ως «Αλμαγέστη». Πέρα από τους αστρονομικούς πίνακες τους σχετικούς με την κίνηση των πλανητών και άλλων ουρανίων σωμάτων, ο Πτολεμαίος ασχολείται και με διάφορα άλλα προβλήματα που απαιτούν μαθηματικούς υπολογισμούς. Μόνο που σε πολλά σημεία δεν κάνει τον κόπο να παρουσιάσει αναλυτικές αποδείξεις θεωρώντας αυτές ως κάτι ευκολοαπόδεικτο.

***Θέων*:** ο Πτολεμαίος έδωσε την ευκαιρία σε έναν άλλο μαθηματικό, τον *Θέωνα*, διευθυντή στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας, που έζησε, κατά το Λεξικό του Σουίδα, την εποχή της αυτοκρατορίας του Θεοδοσίου Α' (379-395 μ.Χ.), πατέρα της δολοφονημένης από το πλήθος σπουδαίας γυναίκας μαθηματικού Υπατίας, να γράψει άλλα δεκατρία βιβλία γεμάτα με σχόλια αντίστοιχα το καθένα με αυτά του Πτολεμαίου. Τα σχόλια αυτά εκδόθηκαν για πρώτη φορά μαζί με τη «Μεγίστη» το 1538 στην κλασική έκδοση του Joachim Camerarius. Σε αυτά δηλαδή διευκρίνιζε, απεδείκνυε, συμπλήρωνε. Δυστυχώς έχουν χαθεί το ενδέκατο βιβλίο των σχολίων και τμήματα από το πέμπτο και από άλλα βιβλία. Έχουν εκδοθεί τα τέσσερα πρώτα το 1936-1943 από τον Rome, και εκείνος υπεδείκνυε στους επόμενους από αυτόν να κοιτάξουν με επιμέλεια και τα επόμενα, αλλά η υπόδειξή του αυτή για δεκαετίες αγνοήθηκε.

Διόφαντος: ο Θέων είναι φανερό από τα σχόλιά του ότι ήταν απόλυτα εξοικειωμένος με τα Μαθηματικά του Διόφαντου. Του Έλληνα μαθηματικού που έζησε στην Αλεξάνδρεια περί το 300 μ.Χ. και είναι γνωστό πως χρησιμοποιούσε «αλγεβρικές μεθόδους» για να λύνει διάφορα αριθμητικά προβλήματα. Αυτά του έδωσαν και το προσωνύμιο «πατέρας της Άλγεβρας», αλλά μιας Άλγεβρας περισσότερο πρακτικής από όσο τη γνωρίζουμε σήμερα, ευφυούς όμως και λειτουργικής για τις γνώσεις της εποχής.

Ο Μοχάμαντ Ιμπν Μουσά αλ Χουραΐζμι (περίπου 787-850 μ.Χ.) ήταν ένας Πέρσης μαθηματικός που έζησε στη Βαγδάτη, στο ανάκτορο του χαλίφη Αλ Μανσούρ. Εισήγαγε στα μαθηματικά τους ινδικούς αριθμούς και το θεσιακό δεκαδικό σύστημα, και το 820 εξέδωσε το πρώτο μεγάλο βιβλίο για την Άλγεβρα της εποχής, ενώ και η λέξη αλγόριθμος είναι παραφθορά του ονόματός του. Από εκείνη την 0εποχή αρχίζει και η μαθηματική επιστήμη να χρωματίζεται από την επαφή των Αράβων μαθηματικών με αυτήν (πηγή: tovima.gr)».

2ο θέμα: τα "περιοδικά" τζιτζίκια κι οι πρώτοι αριθμοί (του Σταύρου Ξενικουδάκη)

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Α.Β. Καπετανούδης μας έστειλε ένα σημείωμα, που το δανείστηκε από τον ειδικό ερευνητή Σταύρο Ξενικουδάκη (Πηγή:«Scientific American»). Στο σημείωμα αυτό απαντιέται και το ερώτημα: *ποια σχέση έχουν τα λεγόμενα "περιοδικά" τζιτζίκια κι οι πρώτοι αριθμοί.*

γνωριμία με τα "περιοδικά" τζιτζίκια

«Τα τζιτζίκια που εμφανίζονται μαζικά κάθε 17 ή 13 χρόνια, τα ονομάζουμε περιοδικά. Τα περιοδικά τζιτζίκια χρειάζονται περισσότερο χρόνο από οποιοδήποτε άλλο έντομο για να αναπτυχθούν από το αυγό έως το ενήλικο άτομο. Περνούν το μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους κάτω από το έδαφος τρεφόμενα και μεγαλώνοντας από τους χυμούς των ριζών των φυτών, ώστε να προβάλλουν ταυτόχρονα μια μέρα μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Η ταυτόχρονη εμφάνισή τους σε μεγάλους αριθμούς εξασφαλίζει ότι, ακόμα και μετά το χόρτασμα των θηρευτών τους, θα έχουν απομείνει πολλά τζιτζίκια για να ζευγαρώσουν και να αναπαραχθούν. Μελέτες δείχνουν ότι τα τζιτζίκια μετρούν το πέρασμα του χρόνου, ελέγχοντας τις εποχικές μεταβολές στους χυμούς των δέντρων με τους οποίους τρέφονται. Αλλά πώς θυμούνται πόσα χρόνια έχουν περάσει και τι πυροδοτεί την ταυτόχρονη άνοδό τους στην επιφάνεια παραμένει άγνωστο. Μέσα σε μια ώρα από την έξοδό τους από το έδαφος, το τζιτζίκι αποβάλλει το δέρμα της νύμφης και μπαίνει στη φάση της ενήλικης ζωής. Πλειάδα άλλων ειδών κάνει τσιμπούσι με τα τζιτζίκια όταν εμφανιστούν στην επιφάνεια, από τα πουλιά και τα ψάρια, έως τις αράχνες και τις γάτες. Επειδή αρχικά βγαίνουν περισσότερα αρσενικά τζιτζίκια, αυτά δέχονται το μεγαλύτερο βάρος της τροφικής φρενίτιδας των θηρευτών. Αυτή η αρσενική "θυσία" βοηθά την επιβίωση περισσότερων θηλυκών και των απογόνων τους. Τα τζιτζίκια που εμφανίζονται μαζικά κάθε 17 ή 13 χρόνια, υπάρχουν μόνο στις ανατολικές ΗΠΑ. Τα τζιτζίκια με 17ετή κύκλο ζουν στον βορρά και τα τζιτζίκια με 13ετή κύκλο στον νότο και στην κοιλάδα του Μισισιπή. Τα 17ετή είναι στην πραγματικότητα τρία διαφορετικά είδη τζιτζικιού.

Τα περιοδικά τζιτζίκια κι οι πρώτοι αριθμοί

Η ανάλυση DNA προσφέρει στοιχεία της εξελικτικής τους πορείας. Ο τελευταίος κοινός πρόγονος όλων των περιοδικών τζιτζικιών έζησε πριν από 3,9 εκατομμύρια χρόνια κατά το Πλειόκαινο. Ενας από τους κλάδους που δημιουργήθηκε τότε διαχωρίστηκε ξανά πριν από 1,5 εκατομμύριο χρόνια, κατά το Πλειστόκαινο. Από τα τρία διαφορετικά είδη προέκυψαν τελικά τα επτά είδη 13ετών και 17ετών περιοδικών τζιτζικιών που υπάρχουν σήμερα. Γιατί η προτίμηση στα 13 και 17 χρόνια παραμένει άγνωστο. Μια εικασία είναι ότι οι μεγάλης διάρκειας και αντίστοιχοι σε ***πρώτους αριθμούς*** κύκλοι ζωής (πρώτοι είναι οι θετικοί φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται μόνο με τη μονάδα και τον εαυτό τους), αυξάνει την πιθανότητα επιβίωσης μετακινώντας χρονικά την εμφάνισή τους, ώστε να μην συμπίπτει με πληθυσμιακές εξάρσεις των θηρευτών τους, που συμβαίνουν συχνότερα και σε αριθμό ετών που είναι ***σύνθετοι (μη πρώτοι) αριθμοί***.

Εξελικτικό πλεονέκτημα

Ερευνητές θεωρούν ότι τα περιοδικά τζιτζίκια προέκυψαν από τα μη περιοδικά, ανταλλάσσοντας την εμφάνιση στο έδαφος με βάση το μέγεθος, με την εμφάνιση με βάση την ηλικία και επεκτείνοντας παράλληλα την περίοδο ανάπτυξής τους. Οι αλλαγές στο κλίμα πριν από εκατομμύρια χρόνια ίσως συνέβαλαν σ' αυτό. Τα περιοδικά τζιτζίκια είναι ευαίσθητα στις αλλαγές της θερμοκρασίας, που καθορίζει το μήκος της περιόδου ανάπτυξής τους. Κατά το Πλειστόκαινο, οι ψυχρότερες θερμοκρασίες θα επιβράδυναν την ανάπτυξη των νεαρών τζιτζικιών, αλλά θα αύξησαν την ποικιλία χρόνων που τα ενήλικα τζιτζίκια έβγαιναν στην επιφάνεια, μειώνοντας τις πιθανότητες επιτυχούς ζευγαρώματος. Σε αυτές τις συνθήκες, η αλλαγή από τη στρατηγική εμφάνισης με βάση το μέγεθος, στην εμφάνιση με βάση την ηλικία, όταν όλα τα τζιτζίκια βγαίνουν πάνω συγχρονισμένα, θα αύξανε την πληθυσμιακή πυκνότητα των ενηλίκων, άρα και τις πιθανότητές τους να βρουν ταίρι και να αναπαραχθούν».

3ο θέμα. Τζερόλαμο Καρντάνο – Ο Βέβηλος Μαθηματικός (του Michael Brooks)

προλεγόμενα από την σημαντική ιστοσελίδα "Θαλής+Φίλοι", δανειστήκαμε μέρος μιας συνέντευξης του έγκυρου σχολιαστή Γιώργου Καρουζάκη, που πήρε από τον Michael Brooks. Ο M. Brooks ειδικεύεται στην κβαντική μηχανική και, τελευταία, έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο "Τζερόλαμο Καρντάνο - ο Βέβηλος Μαθηματικός | Από τους φανταστικούς αριθμούς στα κβάντα» (Εκδόσεις Τραυλός)". Ο συγγραφέας θεωρεί ότι το έργο του Τ. Καρντάνο συνδέεται με τις σύγχρονες αναζητήσεις της κβαντικής φυσικής.

«Η Αναγέννηση διατηρείται συχνά εξιδανικευμένα στη σκέψη μας, ως μία φωτεινή εποχή στην οποία η Τέχνη, η Επιστήμη, τα υψηλά ανθρωπιστικά ιδεώδη συνυπήρχαν αρμονικά και αναπτύσσονταν με γοργούς ρυθμούς. Το πέρασμα όμως από τις μεσαιωνικές αντιλήψεις στην πνευματική ακμή της αναγεννησιακής εποχής δεν ήταν τόσο ιδανικό όσο συνήθως το φανταζόμαστε……..

Μέσα από αυτό το ρεαλιστικό πρίσμα πλησιάζει την αναγεννησιακή εποχή αφηγούμενος με πρωτότυπο τρόπο τη ζωή ενός ξεχωριστού εκπροσώπου της, του Ιταλού πολυεπιστήμονα **Τζερόλαμο Καρντάνο** (1501-1576). Πρόκειται για τον πολυμαθή λόγιο, που εκτός από ονομαστός γιατρός, μαθηματικός, φιλόσοφος, βιολόγος και χημικός υπήρξε επίσης και αστρολόγος.

Η συνεισφορά του στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης είναι τεράστια. Κατάφερε να θεμελιώσει, εκτός των άλλων, τη Θεωρία των Πιθανοτήτων, διατυπώνοντας αυτό που ονομάζουμε σήμερα «νόμο των μεγάλων αριθμών» (*εκείνον που δείχνει ότι οι μεγάλοι αριθμοί επαναλήψεων μιας πιθανοκρατικής διαδικασίας παράγουν ένα προβλέψιμο αποτέλεσμα*), να κάνει την πρώτη συστηματική χρήση των αρνητικών και φανταστικών αριθμών, και να συγγράψει περισσότερα από 200 επιστημονικά έργα, με διασημότερο το περίφημο *Ars Magna* στο οποίο ασχολείται με τη μελέτη των αλγεβρικών εξισώσεων…

Για τον συγγραφέα, που ειδικεύεται στην κβαντική μηχανική, το έργο του λόγιου της Αναγέννησης συνδέεται με τις σύγχρονες αναζητήσεις της κβαντικής φυσικής. «Το ενδιαφέρον μου για τον Τζερόλαμο προκύπτει από το γεγονός ότι χρησιμοποίησε το κοφτερό μυαλό του για να φέρει στο φως τα μαθηματικά θεμέλια στα οποία στηρίζεται η κβαντική θεωρία, ο πιο επιτυχημένος οδηγός μας για το Σύμπαν. Αστρολογία και κβαντική φυσική να στροβιλίζονται μέσα σ 'ένα αναγεννησιακό κεφάλι- ποιος θα το σκεφτόταν;» γράφει στον πρόλογο του βιβλίου.

Κορυφαίο επίτευγμα του Καρντάνο ήταν η επινόηση της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού, κάτι που σήμερα ονομάζουμε φανταστικό αριθμό. Όπως επισημαίνεται στο βιβλίο, το συγκεκριμένο επίτευγμα είχε ως απότοκο την επινόηση των μιγαδικών αριθμών οι οποίοι εφαρμόζονται και στη μελέτη των φυσικών προβλημάτων της κβαντομηχανικής. Στην αρχή, αυτές οι επινοήσεις του Καρντάνο έμοιαζαν με αλλόκοτες μαθηματικές θεωρήσεις, στο πέρασμα του χρόνου αποδείχτηκαν όμως χρήσιμες στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συγκροτείται το Σύμπαν.

Κβαντικό ταξίδι

...Ο συγγραφέας χτίζει περίτεχνα, αλλά επιτυχημένα, τον μύθο της προσωπικής επικοινωνίας με τον ήρωά του. Επιχειρεί ένα είδος κβαντικού ταξιδιού στον χρόνο και επισκέπτεται τον Καρντάνο στο κελί της φυλακής του, όταν ο λόγιος, σε ηλικία 69 ετών, φυλακίστηκε επειδή επιχείρησε να μελετήσει το ωροσκόπιο του Ιησού Χριστού. Με ποιον τρόπο συναντιούνται ο Καρντάνο και ο σύγχρονος Βρετανός βιογράφος του;…

Ο Brooks μνημονεύει επίσης την αξία των επιτευγμάτων του Καρντάνο, το πόσο μπροστά βρισκόταν από την εποχή του, αφού, αναζητώντας, για παράδειγμα, τη δική του θεωρία αναφορικά με τη Γεωμετρία και την τοπολογία του Σύμπαντος, μίλησε, από τότε, για μία νέα απροσπέλαστη διάσταση την οποία εκείνος αποκαλούσε aevum …

Με αυτήν την ευκαιρία, ο συγγραφέας παρουσιάζει και σε εμάς–που είμαστε μάρτυρες της συνάντησής τους–την περιπέτεια της σύγχρονης επιστήμης αναφερόμενος διεξοδικά στις πιθανές ερμηνείες, στις διαφωνίες, στα φαινόμενα και στα πειράματα που συνδέονται με την κβαντική φυσική: την «ερμηνεία της Κοπεγχάγης», τη θεωρία πιλοτικών κυμάτων του **Λουί ντε Μπρολί** …»

4ο θέμα. «Το έργο του Ιάμβλιχου "Περί της κοινής Μαθηματικής επιστήμης"», Ευάγγελου Σπανδάγου

[Στη μνήμη του Βαγγέλη Σπανδάγου, πολυγραφότατου μαθηματικού και εκδότη, αναπαράγουμε ένα μικρό σημείωμά του με τίτλο: "Τα κεφάλαια του τρίτου λόγου".Ιάμβλιχος, *Ευάγγελου Σπανδάγου «Το έργο του Ιάμβλιχου "Περί της κοινής Μαθηματικής επιστήμης"», εκδόσεις "Αίθρα" (Αθήνα, 2012)*]

«Το παρόν έργο, όπως προαναφέραμε αποτελεί το 3ο κατά σειρά βιβλίο του έργου "Συναγωγή Πυθαγορείων δογμάτων". Το έργο "**Περί της κοινής Μαθηματικής επιστήμης**", το οποίο χαρακτηρίζεται ως το πρώτο στον κόσμο αμιγές βιβλίο Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, χωρίζεται σε 35 κεφάλαια στα οποία αναπτύσσονται οι ιδέες του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και ιδίως των Πυθαγορείων στα Μαθηματικά.

Η Νεοπλατωνική φιλοσοφία ήταν επηρεασμένη σε μεγάλο βαθμό από τη διδασκαλία των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι, όπως είναι γνωστό, έδιναν στις διάφορες μαθηματικές οντότητες (θετικούς ακέραιους αριθμούς, σχήματα, ισότητες, αναλογίες κ.ά.), συμβολισμούς μη μαθηματικών οντοτήτων (αρετές, θεϊκά όντα, πολιτιστικές σχέσεις κ.ά.). Τα Μαθηματικά για τους Πυθαγόρειους, και αργότερα για τους Νεολατωνιστές, δεν αποτελούν αυτοσκοπό αλλά μια οδό για άνοδο σε μορφές γνώσης υψηλού επιπέδου. Εξασφαλίζουν την άνοδο προς τη νοητή πραγματικότητα και προς διάφορες θεϊκές υποστάσεις.

Ο τίτλος του έργου "Περί της κοινής Μαθηματικής επιστήμης" επιδέχεται την επόμενη ερμηνεία: Λέγοντας "κοινή" **ο Ιάμβλιχος** εννοεί "γενική μαθηματική επιστήμη" η οποία περιλαμβάνει όλους τους τομείς και όλους τους κλάδους των Μαθηματικών (αριθμητική, γεωμετρία, αρμονική (μουσική) και σφαιρική (αστρονομία)).

Η γενική μαθηματική επιστήμη αποτελείται από το σύνολο των ορισμών, των αρχών και των θεωρημάτων που είναι κοινά σ΄ όλες τις επιμέρους μαθηματικές επιστήμες (δηλ. Γεωμετρία, Αριθμητική Αστρονομία και Μουσική).

Το αρχαίο κείμενο της εκδόσεως του J.B.C. Villoian, το οποίο υπήρχε στη συλλογή Anecdota Graeca (Βενετία 1782), είχε στην αρχή του αριθμημένες τις περιλήψεις, στην αρχαία ελληνική, των 35 κεφαλαίων του έργου. Πρόκειται όμως για προσθήκη μεταγενέστερου συγγραφέα. Η προσθήκη αυτή την οποία επισυνάπτουμε συνοδεύει όλες τις μεταγενέστερες εκδόσεις...»

<u>πρόσθετα βιογραφικά από "Βικιπαίδεια"</u>: Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ.) (Iamblichus Chalcidensis), ήταν Σύρος νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ο οποίος έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατεύθυνση που ακολούθησε η νεώτερη νεοπλατωνική φιλοσοφία. Ήταν επίσης ο βιογράφος του Πυθαγόρα και μυστικιστής, φιλόσοφος και μαθηματικός. Ο Ιάμβλιχος έζησε σε μια ταραγμένη εποχή, μια περίοδο μεγάλων ζυμώσεων, κατά την οποία ένας πολιτισμικός κύκλος πλησιάζει στο τέλος του κι ένας καινούργιος ανοίγει. Τη μεταβατική αυτή περίοδο εμφανίζεται το φιλοσοφικό ρεύμα των νεοπλατωνικών.

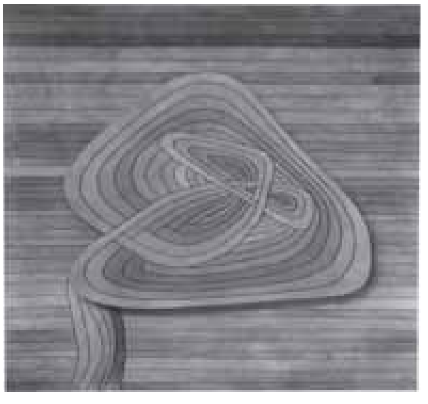
V. ειδήσεις – ειδησούλες

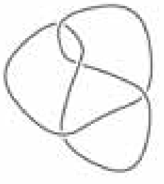
1. Από τον εκδότη Γιάννη Γεωργίου Κορφιάτη, λάβαμε ένα σημείωμα, με το οποίο μας γνωστοποιεί την έκδοση του βιβλίου με τίτλο "*Το κρυφό σημειωματάριο του Ντεκάρτ*", του ΑΜΙΡ ΑΞΕΛ.
Ο Ρενέ Ντεκάρτ (1596-1650), μια από τις σημαντικότερες μορφές της Δυτικής φιλοσοφίας και των Μαθηματικών (θυμηθείτε τις "καρτεσιανές συντεταγμένες"), είχε και μια μυστική πλευρά στη ζωή του. Υπήρξε μέλος της αδελφότητας των Ροδόσταυρων και διατηρούσε ένα μυστικό σημειωματάριο, χαμένο πλέον, όπου έγραφε τις σημειώσεις του σε κωδική γλώσσα. Μετά τον θάνατό του ο Λάιμπνιτς ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, πήγε στο Παρίσι σε αναζήτηση αυτού του σημειωματάριου. Τελικά το βρήκε. Είχε περάσει στην κατοχή του Κλοντ Κλερσλιέ…

2. Τα κατάφερε τελικά το ελικοπτεράκι «Ingenuity» της αποστολής «Perseverance» της NASA στον ΄Αρη και

σηκώθηκε από το έδαφος, μετά την αναβάθμιση του λογισμικού του με διορθωμένη έκδοση. Μάλιστα μέσα στη βδομάδα που πέρασε ανυψώθηκε δύο φορές, την πρώτη 3 μέτρα πάνω από το έδαφος, σε σταθερή αιώρηση, ενώ τη δεύτερη φορά σε ύψος 5 μέτρων κάνοντας και μια πλευρική κίνηση 2 μέτρων, επιστρέφοντας τελικά στην αρχική θέση. Είναι η πρώτη φορά που πραγματοποιείται ελεγχόμενη πτήση σε ατμόσφαιρα άλλου πλανήτη (τα αερόστατα των σοβιετικών αποστολών «Βέγκα» στην Αφροδίτη (1/3/1966), δεν είχαν κινητήρα και παρασύρονταν ελεύθερα από τα ρεύματα).

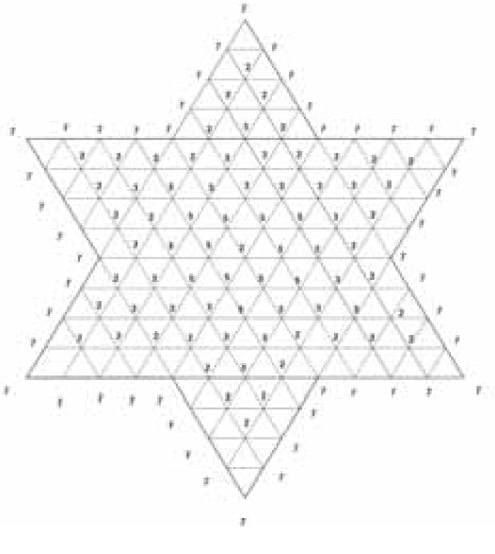
3. Από τον σημαντικό φίλο Τάκη Σπύρου (ομότιμος του ΕΚΠΑ), δανειζόμαστε έναν πίνακα του Paul Klee (κοίτα, σχήμα στα δεξιά της σελίδας). Το έργο είναι εμπνευσμένο από την "Μαθηματική Θεωρία των Κόμβων". Η θεωρία των κόμβων, είναι ένας κλάδος της Τοπολογίας που εξετάζει τους κόμβους και τους κρίκους. Η *Τοπολογία* δεν εξετάζει τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων, όπως το μήκος και τις γωνίες,

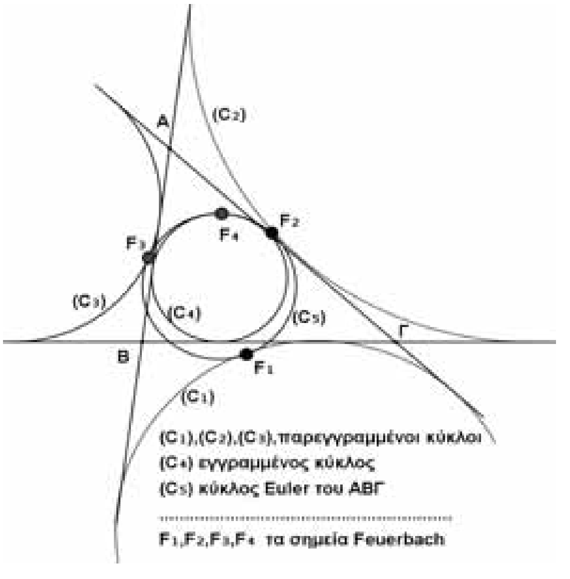




αλλά τις ιδιότητες οι οποίες μένουν αναλλοίωτες ως προς την αλλαγή καμπυλότητας, στρέψης και ως προς τις ελαστικές παραμορφώσεις.
Ο πιο απλός κόμβος είναι ο τετριμμένος. Ο αμέσως επόμενος είναι ο κόμβος Trefoil (κοίτα, μπλε σχήμα στα αριστερά της σελίδας). Οι εφαρμογές της σήμερα εκτείνονται από τη Στατιστική Μηχανική έως τη Χημεία και τη Μοριακή Βιολογία.

4. Από τον Σωτήρη Γκουντουβά δανειστήκαμε τον αριθμό των 121 ψηφίων:
77772772277777723277777722223322227723335333277235555327723525327723555532772333533327722223322227777777
232777777227727777. Είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος αποτελείται αποκλειστικά από όλους τους μονοψήφιους πρώτους αριθμούς και μπορεί να διαταχτεί με την μορφή αστεριού (κοίτα, κάτω αριστερά εικόνα).





VI. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

Η περιφέρεια των 9 σημείων (ή περιφέρεια Euler) τριγώνου, εφάπτεται στην εγγραμμένη και στις παρεγγραμμένες περιφέρειες του τριγώνου. Καθένα απ' αυτά τα σημεία επαφής, ονομάζεται "σημείο Feuerbach" του τριγώνου (κοίτα, πάνω δεξιά εικόνα).

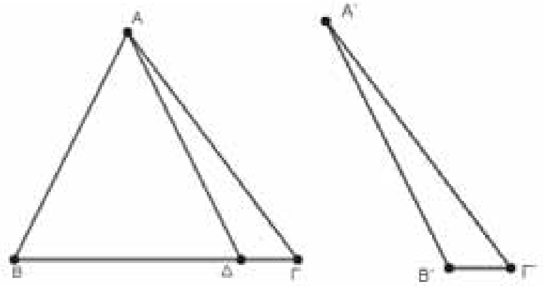
Τάξη: Α΄ — Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Τσιφάκης Χρήστος

Άσκηση 1η. Αν σε δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ ισχύει ότι $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Β}'$ είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Λύση:

- Αν ισχύει ότι $ΒΓ = Β'Γ'$ τότε τα τρίγωνα είναι ίσα και άρα $\hat{Β} = \hat{Β}'$.
- Υποθέτουμε ότι $ΒΓ \neq Β'Γ'$ και έστω ότι $ΒΓ > Β'Γ'$.

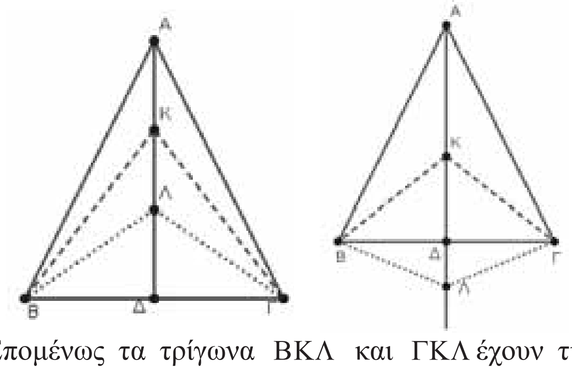


Στην πλευρά $ΒΓ$ παίρνουμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε $ΔΓ = Β'Γ'$. Τα τρίγωνα $Α'Β'Γ'$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν: $ΑΓ = Α'Γ'$, $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$ και $ΔΓ = Β'Γ'$. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $ΑΔ = Α'Β'$ και $Α\hat{Δ}Γ = \hat{Β}'$. Τότε το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές ($ΑΔ = ΑΒ$) και επομένως θα έχουμε: $\hat{Β} + \hat{Β}' = Α\hat{Δ}Β + Α\hat{Δ}Γ = 180^{o}$

Άσκηση 2η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$. Αν $Κ$ και $Λ$ είναι σημεία της διχοτόμου $ΑΔ$ να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΒΚΛ$ και $ΓΚΛ$ είναι ίσα.

Λύση:

Η διχοτόμος $ΑΔ$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$, δηλαδή μεσοκάθετος της $ΒΓ$. Άρα τα τρίγωνα $ΒΚΓ$ και $ΒΛΓ$ είναι ισοσκελή.

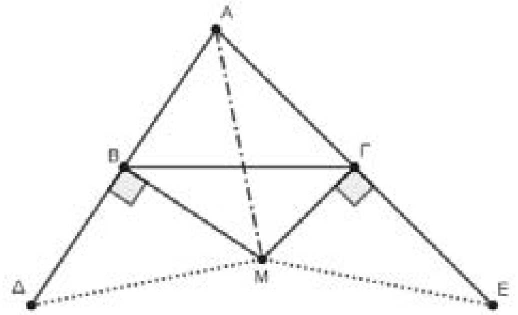


Επομένως τα τρίγωνα $ΒΚΛ$ και $ΓΚΛ$ έχουν τις τρεις πλευρές ίσες, άρα είναι ίσα.

Άσκηση 3η. Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ και στις προεκτάσεις των πλευρών του $ΑΒ$, $ΑΓ$ παίρνουμε τμήματα $ΒΔ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΑΓ$. Στα σημεία $Β$ και $Γ$ φέρνουμε κάθετες στις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΔΜΕ$ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Φέρνουμε την $ΑΜ$. Η $ΜΒ$ και η $ΜΓ$ αντίστοιχα είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΑΕ$,



Άρα $ΜΔ = ΑΜ = ΜΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΔΜΕ$ είναι ισοσκελές.

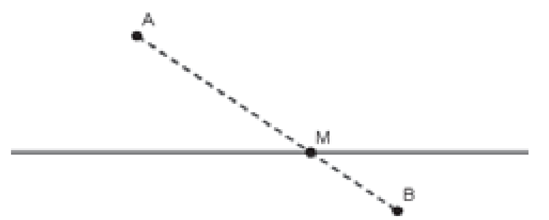
Άσκηση 4η. Δίνεται ευθεία $(ε)$ και σημεία $Α, Β$ εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση ενός σημείου $Μ$ της ευθείας $(ε)$ τέτοιο ώστε:

α) Το άθροισμα $ΜΑ + ΜΒ$ γίνεται ελάχιστο

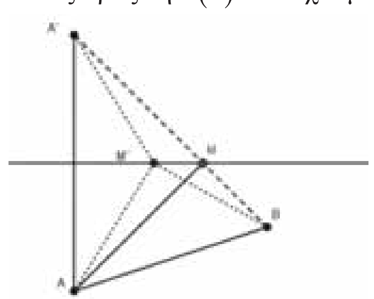
β) Η διαφορά $|ΜΑ - ΜΒ|$ γίνεται μέγιστη.

Λύση:

α) i) Αν τα σημεία $Α, Β$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $(ε)$, τότε το σημείο $Μ$ είναι το σημείο που το τμήμα $ΑΒ$ τέμνει την ευθεία $(ε)$

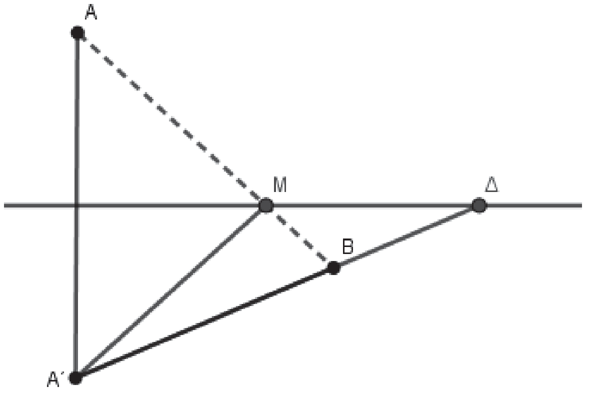


ii) Αν τα σημεία $Α, Β$ βρίσκονται πρός το ίδιο μέρος της ευθείας $(ε)$ τότε παίρνουμε $Α'$ το συμμετρικό του $Α$ ως προς την $(ε)$ και έχουμε:



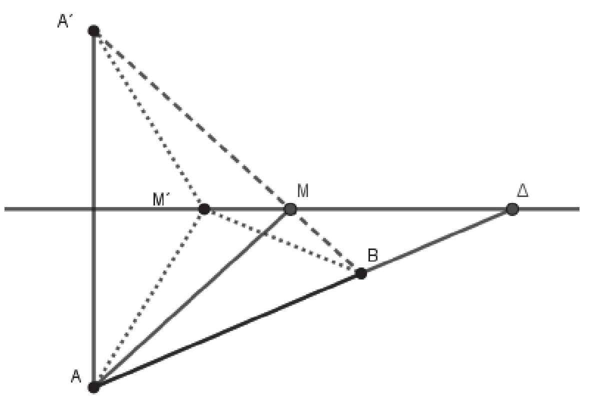
Αφού $Μ'Α = Μ'Α'$, το άθροισμα $Μ'Α + Μ'Β = Μ'Α' + Μ'Β$ και θα γίνεται ελάχιστο όταν το M' συμπέσει στο σημείο που η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ε), γιατί στο τρίγωνο $A'M'B$ έχουμε $A'B < A'M' + M'B$.

β) i) Αν τα σημεία A, B βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας (ε) τότε παίρνουμε το A' συμμετρικό



του A ως προς την (ε) και έχουμε ότι στο τρίγωνο $A'MB$ ισχύει $|MA' - MB| < AB$. Άρα για να γίνει η διαφορά $|MA - MB|$ μέγιστη πρέπει να γίνει ίση με AB, δηλαδή τα σημεία A, M, B να είναι συνευθειακά. Έτσι πρέπει το σημείο M πρέπει να ταυτίζεται με το σημείο Δ που η AB τέμνει την (ε).

ii) Αν τα σημεία A, B βρίσκονται πρός το ίδιο μέρος της ευθείας (ε), τότε από την τριγωνική ανισότητα στο AMB έχουμε: $|MA - MB| < AB$. Άρα για να γίνει η διαφορά $|MA - MB|$ μέγιστη πρέπει



τα σημεία A, M, B να είναι συνευθειακά. Δηλαδή το σημείο M πρέπει να ταυτίζεται με το σημείο Δ που η AB τέμνει την (ε).

Έφυγε από κοντά μας

† Τάσος Μπακάλης

Ιδιαίτερη θλίψη προκάλεσε στη μαθηματική οικογένεια η είδηση του θανάτου, ενός αξιόλογου συναδέλφου στις **18 Αυγούστου 2021** έφυγε από κοντά μας, ένα από τα πιο εκλεκτά και δραστήρια μέλη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, ο **Τάσος Μπακάλης**. Ο Τάσος Μπακάλης συμμετείχε ενεργά σε όλες τις δραστηριότητες της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Διετέλεσε αναπληρωτής Ταμίας του Διοικητικού Συμβουλίου της ΕΜΕ τη διετία 2011-2013, Ειδικός Γραμματέας του Διοικητικού Συμβουλίου τη διετία 2013-2015, μέλος του Διοικητικού Συμβουλίου τη διετία 2015-2017 και Πρόεδρος της Εξελεγκτικής Επιτροπής τη διετία 2017-2019.

Ενεργά παρών, στις Γενικές Συνελεύσεις της ΕΜΕ, τόσο ως μέλος του Προεδρείου, όσο και με ουσιαστικές παρεμβάσεις, σαν απλό μέλος.

Προσηνής, καλόκαρδος, καλόχαρος, χαμηλών τόνων, **άνθρωπος της ευθύνης** και του αποτελέσματος.

Βοηθούσε πάντα εκεί που έπρεπε με ιδιαίτερο και φιλικό χαρακτήρα. Άνθρωπος του κοινωνικού και ανθρωπιστικού έργου με **υψηλό αίσθημα** της αποστολής και της προσφοράς στον συνάνθρωπο. Ενεργός και δραστήριος, σε κάθε τι που, θα βοηθούσε τους νέους ανθρώπους.

Μέλος επί σειρά ετών της Συντακτικής Επιτροπής του Ευκλείδη Α, με πλούσια αρθρογραφία. Μέλος της επιτροπής της ΕΜΕ για την αναβάθμιση των περιοδικών εκδόσεων της ΕΜΕ Ευκλείδης Α και Ευκλείδης Β (2015-2017) και της επιτροπής για **την επικαιροποίηση της βιβλιοθήκης** της ΕΜΕ (2015-2017). Συμμετείχε στα περισσότερα Πανελλήνια Συνέδρια Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ ως μέλος της Οργανωτικής Επιτροπής, ως εισηγητής και ως απλός σύνεδρος.

Προσέφερε σημαντική βοήθεια στην πραγματοποίηση της **45ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας** που διοργανώθηκε στην Αθήνα και στους Δελφούς τον Ιούλιο του 2004, ως μέλος της Επιτροπής Διαγωνισμού.

Ήταν μέλος της Οργανωτικής Επιτροπής της 32ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας που διοργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία τον Μάιο του 2015 στην Αθήνα.

Με δικές του ενέργειες ο Δήμος Μοσχάτου παραχώρησε στην ΕΜΕ αποθηκευτικούς χώρους ώστε να στεγαστεί **το αρχείο εκδόσεων** της Εταιρείας.

Η απουσία του από την καθημερινότητα και τη ζωή της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας έχει αρχίσει να γίνεται αισθητή.

Το Δ.Σ. της **Ε.Μ.Ε.** και από αυτή τη θέση, εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του που τόσο αγαπούσε.

Τάξη: Α΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Στο παρακάτω άρθρο διαπραγματευόμαστε θέματα της άλγεβρας που στηρίζονται:
α) *Στις ταυτότητες και στη διάταξη πραγματικών αριθμών* ***β)*** *Στην απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού* ***γ)*** *Στις ρίζες πραγματικών αριθμών και* ***δ)*** *Σε μέρος των εξισώσεων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού.*

Θέμα 1ο: Θεωρούμε την παράσταση $A=(\alpha-1)^3+(\alpha+1)^3$ και το κλάσμα

$$B=\frac{2022^3+2024^3}{2(2024^2-1)}.$$

i. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α.

ii. Να απλοποιήσετε το κλάσμα Β.

iii. Να δείξετε ότι ο αριθμός $2025B$ μπορεί να τεθεί στη μορφή $2(2\kappa^2-\lambda)$, όπου κ,λ συγκεκριμένοι άρτιοι φυσικοί αριθμοί.

Λύση

i. $A=\left[(\alpha-1)+(\alpha+1)\right]\left[(\alpha-1)^2-(\alpha-1)(\alpha+1)+(\alpha+1)^2\right]=2\alpha\left[\alpha^2-2\alpha+1-\alpha^2+1+\alpha^2+2\alpha+1\right]=$
$=2\alpha(\alpha^2+3)$.

ii. $B=\dfrac{(2023-1)^3+(2023+1)^3}{2(2024-1)(2024+1)}$. Ο αριθμητής του κλάσματος Β είναι η τιμή της παράστασης Α για $\alpha=2023$. Άρα με βάση το ερώτημα i έχουμε:
$B=\dfrac{2\cdot 2023(2023^2+3)}{2\cdot 2023\cdot 2025}\Leftrightarrow B=\dfrac{2023^2+3}{2025}$.

iii. Έχουμε $2025\cdot B=2023^2+3=2023^2+1+2=$
$2023^2+2\cdot 2023+1-2\cdot 2023+2=(2023+1)^2-$
$-2(2023-1)=2024^2-2\cdot 2022=(2\cdot 1012)^2-$
$2\cdot 2022=4\cdot 1012^2-2\cdot 2022=2(2\cdot 1012^2-2022)$.
Άρα ο αριθμός 2025Β γράφεται στη μορφή $2(2\kappa^2-\lambda)$, όπου $\kappa=1012$ και $\lambda=2022$ άρτιοι φυσικοί αριθμοί.

Θέμα 2ο: Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α,β,γ έχουμε:

i. $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$, τότε να δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

ii. $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}=\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}$, τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K=\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma}-3\right)^2+\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}-4\right)^2+\left(\frac{\gamma+\alpha}{\beta}-5\right)^2.$$

iii. α,β,γ θετικοί με $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, τότε να δείξετε ότι $\alpha^3>\beta^3+\gamma^3$

Λύση

i. Είναι $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha+\beta=\alpha\beta\gamma-\gamma\Leftrightarrow$
$\alpha+\beta=\gamma(\alpha\beta-1)$. Όμοια $\beta+\gamma=\alpha(\beta\gamma-1)$ και $\alpha+\gamma=\beta(\alpha\gamma-1)$. Άρα

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=\frac{\gamma(\alpha\beta-1)}{\gamma}+\frac{\alpha(\beta\gamma-1)}{\alpha}+\frac{\beta(\alpha\gamma-1)}{\beta}+3=\alpha\beta-1+\beta\gamma-1+\alpha\gamma-1+3=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma.$$

ii. • Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε έχουμε:
$\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$ και $\gamma+\alpha=-\beta$, οπότε
$\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}=-1$, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}=-1$ και $\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}=-1$.
Άρα $K=(-1-3)^2+(-1-4)^2+(-1-5)^2=$
$16+25+36=77$.

• Αν $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, τότε από ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}=2.$$

Άρα $K=(2-3)^2+(2-4)^2+(2-5)^2=1+4+9=14$.

iii. Αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί τότε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha^2>\beta^2\Leftrightarrow\alpha>\beta\\ \text{και}\\ \alpha^2>\gamma^2\Leftrightarrow\alpha>\gamma\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha\beta^2>\beta^3\\ \text{και}\\ \alpha\gamma^2>\gamma^3\end{array}\right.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2>\beta^3+\gamma^3\Leftrightarrow\alpha(\beta^2+\gamma^2)>\beta^3+\gamma^3\Leftrightarrow$
$\alpha\cdot\alpha^2>\beta^3+\gamma^3\Leftrightarrow\alpha^3>\beta^3+\gamma^3$.

Θέμα 3ο: Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύουν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ (1) και $\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{3}$ (2). Να δείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma$.

Λύση

$(2)\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)^2=3\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=3\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2\Leftrightarrow$ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$ (3).

Είναι $\begin{cases}(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\(\beta-\gamma)^2=\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2\\(\gamma-\alpha)^2=\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=$
$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\overset{(1),(3)}{=}2-2=0$.

Άρα $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \quad\text{και}\\ \beta-\gamma=0\\ \quad\text{και}\\ \gamma-\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma.$$

Θέμα 4ο: Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y έχουμε $x\neq1$ και $xy+x=1$ (1), τότε:

α. Δείξτε ότι $y\neq0$.

β. Δίνεται το κλάσμα $K=\dfrac{x^3+3x^2-3x-y^3+3xy^2}{y^2x-y^3}$.

Δείξτε ότι για τις τιμές των x,y που ορίζεται το κλάσμα K είναι $K\geq0$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $x(3-y)\leq4x^2$ (2) και να εξετάσετε πότε ισχύει η (2) ως ισότητα.

Λύση

α. Αν υποθέσουμε ότι είναι $y=0$, τότε $(1)\Rightarrow x=1$. Άτοπο. Άρα είναι $y\neq0$.

β. Το κλάσμα K ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$y^2x-y^3\neq0\Leftrightarrow y^2(x-y)\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq0\ \text{που ισχύει}\\ \text{και}\\ x-y\neq0\Leftrightarrow x\neq y\end{cases}$$

Με βάση τον παραπάνω περιορισμό και την (1) έχουμε: $K=\dfrac{x^3-3x(1-x)+3xy^2-y^3}{y^2(x-y)}\overset{(1)}{=}$

$$\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{y^2(x-y)}=\frac{(x-y)^3}{y^2(x-y)}=\frac{(x-y)^2}{y^2}\Leftrightarrow$$

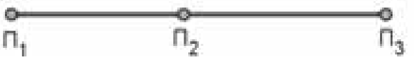
$$K=\left(\frac{x-y}{y}\right)^2\geq0.$$

γ. $(2)\Leftrightarrow3x-xy\leq4x^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}3x-(1-x)\leq4x^2\Leftrightarrow$ $4x^2-4x+1\geq0\Leftrightarrow(2x-1)^2\geq0$ που ισχύει.

Η (2) ισχύει ως ισότητα όταν η σχέση $(2x-1)^2\geq0$ ισχύει ως ισότητα, δηλαδή όταν $2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Για $x=\dfrac{1}{2}$ από την (1) παίρνουμε $y=1$. Συνεπώς η (2) ισχύει ως ισότητα όταν $x=\dfrac{1}{2}$ και $y=1$.

Θέμα 5ο: Έστω Π_1,Π_2,Π_3 τρείς πόλεις στην ίδια ευθεία όπως δείχνει το σχήμα



Η απόσταση των πόλεων Π_1, Π_2 είναι x km με $x\in Z$ και $0<x<5$. Επίσης η απόσταση των αριθμών x , 5 είναι μικρότερη του 2.

Η απόσταση των πόλεων Π_2, Π_3 είναι y km με $0<y\leq5$ και ισχύει: $y^3-(x+1)^3\geq4y(y-5)$ (1).

Να βρείτε την απόσταση των πόλεων Π_1,Π_3.

Λύση

Είναι $d(x,5)<2\Leftrightarrow|x-5|<2\overset{x-5<0}{\Leftrightarrow}-x+5<2\Leftrightarrow$ $x>3$ και επειδή $x<5$ έχουμε $3<x<5$ (2). Αφού $x\in Z$ $(2)\Rightarrow x=4$.

Για $x=4$ έχουμε $(1)\Leftrightarrow y^3-5^3\geq4y(y-5)\Leftrightarrow$

$(y-5)(y^2+5y+25)-4y(y-5)\geq0\Leftrightarrow$

$(y-5)(y^2+y+25)\geq0$ (3)

$$y^2+y+25=y^2+2\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+25=$$

$\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{99}{4}>0$. Άρα $(3)\Leftrightarrow y-5\geq0\Leftrightarrow$ $y\geq5$. Έχουμε επίσης $y\leq5$, οπότε $y=5$.

Άρα η απόσταση των πόλεων Π_1,Π_3 είναι 9 km.

Θέμα 6ο: Αν $x\in(-3,-1)$ και $|y-1|<3$, θεωρούμε την παράσταση $A=x-\dfrac{1}{2}y$.

α. Δείξτε ότι:

i. $-5<A<0$.

ii. Η παράσταση $B=\sqrt{|A|}\cdot\sqrt[4]{A^2}+|A+6|$ είναι σταθερή, δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x,y.

β. Αν B είναι η παράσταση του ερωτήματος α ii θεωρούμε το κλάσμα $K=\dfrac{1}{\sqrt[4]{B^4}+6^{\frac{1}{3}}+2-B}$.

Να γράψετε το K με ρητό παρονομαστή.

Λύση

Έχουμε $x\in(-3,-1)\Leftrightarrow -3<x<-1$ και $|y-1|<3\Leftrightarrow -3<y-1<3\Leftrightarrow -2<y<4$.

α. i. $\left\{\begin{array}{c} -3<x<-1 \\ \text{και} \\ -2<y<4\Leftrightarrow 1>-\dfrac{1}{2}y>-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3<x<-1 \\ \text{και} \\ -2<-\dfrac{1}{2}y<1 \end{array}\right.$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$-5<x-\dfrac{1}{2}y<0\Leftrightarrow -5<A<0$.

ii. $-5<A<0\Leftrightarrow 1<A+6<6\Rightarrow A+6>0$.

Από τις ιδιότητες των ριζών έχουμε $\sqrt[4]{A^2}=\sqrt{|A|}$. Έτσι η παράσταση Β γράφεται:

$B=\sqrt{|A|}\cdot\sqrt{|A|}+A+6=\left(\sqrt{|A|}\right)^2+A+6=$

$|A|+A+6\overset{(i)}{=}-A+A+6\Leftrightarrow B=6$.

β. $K=\dfrac{1}{|B|+\sqrt[3]{6}+2-B}=\dfrac{1}{6+\sqrt[3]{6}+2-6}\Leftrightarrow$

$K=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}+2}$. Θα εμφανίσουμε στον παρονομαστή την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, όπου $\alpha=\sqrt[3]{6}$ και $\beta=2$ με στόχο να δημιουργήσουμε τη δύναμη $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3=6$. Αυτό που έχουμε στον παρονομαστή είναι το $\alpha+\beta$, οπότε για να παρουσιάσουμε την παραπάνω ταυτότητα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος K με την παράσταση $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$, η οποία λέγεται συζυγής παράσταση του παρονομαστή.

$K=\dfrac{\left(\sqrt[3]{6}\right)^2-2\sqrt[3]{6}+4}{\left(\sqrt[3]{6}+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{6}\right)^2-2\sqrt[3]{6}+4\right]}=$

$\dfrac{\left(\sqrt[3]{6}\right)^2-2\sqrt[3]{6}+4}{\left(\sqrt[3]{6}\right)^3+2^3}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{6}\right)^2-2\sqrt[3]{6}+4}{6+8}\Leftrightarrow K=\dfrac{\left(\sqrt[3]{6}-1\right)^2+3}{14}$.

Θέμα 7ο: α. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geq\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{3}.$$

β. Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\kappa\geq 0$, να δείξετε ότι

$$|\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3\kappa}.$$

Λύση

α. Είναι $(|\alpha|-|\beta|)^2+(|\beta|-|\gamma|)^2+(|\gamma|-|\alpha|)^2\geq 0\Leftrightarrow$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2|\alpha||\beta|-2|\beta||\gamma|-2|\gamma||\alpha|\geq 0\Leftrightarrow$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geq 2|\alpha||\beta|+2|\beta||\gamma|+2|\gamma||\alpha|\Leftrightarrow$

$3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2\geq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2|\alpha||\beta|+2|\beta||\gamma|+$

$2|\gamma||\alpha|\Leftrightarrow 3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2\geq(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)^2\Leftrightarrow$

$\dfrac{3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2}{9}\geq\dfrac{(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)^2}{9}\Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}\geq\left(\dfrac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{3}\right)^2\Leftrightarrow$

$\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geq\sqrt{\left(\dfrac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$

$\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geq\dfrac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{3}$.

β. Με βάση το ερώτημα α έχουμε:

$\sqrt{\dfrac{\kappa}{3}}\geq\dfrac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{3}\Leftrightarrow|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq 3\sqrt{\dfrac{\kappa}{3}}\Leftrightarrow$

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq\sqrt{3\kappa}$.

Όμως ισχύει $|\alpha+\beta+\gamma|\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq\sqrt{3\kappa}\Rightarrow$

$|\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3\kappa}$.

Θέμα 8ο: α. i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ να δείξετε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$ **(Ταυτότητα Euler).**

ii. Αν A,B,Γ μη αρνητικοί αριθμοί να δείξετε ότι: $\dfrac{A+B+\Gamma}{3}\geq\sqrt[3]{A\cdot B\cdot\Gamma}$ (1) (2^{η} ανισότητα Cauchy ή ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου και τη παριστάνουμε AM-GM).

β. Αν κ,λ,μ θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι:

$$\kappa^2\lambda+\lambda^2\mu+\mu^2\kappa\geq 3\kappa\lambda\mu\ \ (2).$$

Λύση

α. i. $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=\cdots=$

$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)=\cdots=$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$.

ii. Αν οι α,β,γ είναι μη αρνητικοί τότε $\alpha+\beta+\gamma\geq 0$ και από την ταυτότητα του Euler (ερώτημα i) παίρνουμε:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\geq 0\Leftrightarrow \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\geq\alpha\beta\gamma$ (3).

Αντικαθιστούμε στην (3) το α με $\sqrt[3]{A}$, το β με $\sqrt[3]{B}$ και το γ με $\sqrt[3]{\Gamma}$ και παίρνουμε:

$\frac{A+B+\Gamma}{3}\geq\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}\cdot\sqrt[3]{\Gamma}\Leftrightarrow\frac{A+B+\Gamma}{3}\geq\sqrt[3]{A\cdot B\cdot\Gamma}$

(Το “=” ισχύει όταν $A=B=\Gamma$).

β. $(2)\overset{\kappa\lambda\mu>0}{\Leftrightarrow}\frac{\kappa^2\lambda}{\kappa\lambda\mu}+\frac{\lambda^2\mu}{\kappa\lambda\mu}+\frac{\mu^2\kappa}{\kappa\lambda\mu}\geq 3\Leftrightarrow$

$\frac{\kappa}{\mu}+\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{\mu}{\lambda}\geq 3$ (4). Αρκεί να αποδειχθεί η (4).

Αφού $\frac{\kappa}{\mu},\frac{\lambda}{\kappa},\frac{\mu}{\lambda}$ θετικοί αριθμοί, από την ανισότητα Cauchy (ερώτημα ii) έχουμε:

$\frac{\frac{\kappa}{\mu}+\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{\mu}{\lambda}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{\kappa}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\kappa}\cdot\frac{\mu}{\kappa}}\Leftrightarrow\frac{\frac{\kappa}{\mu}+\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{\mu}{\lambda}}{3}\geq 1\Leftrightarrow$

$\frac{\kappa}{\mu}+\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{\mu}{\lambda}\geq 3$.

Σημείωση: Η ανισότητα AM-GM γενικεύεται ως εξής: Αν $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu$ μη αρνητικοί αριθμοί τότε ισχύει: $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$.

Ως ισότητα ισχύει όταν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu$.

Θέμα 9ο: Θεωρούμε την εξίσωση $|\alpha+3|x=|\alpha|x+3(x+\alpha)$ (1) με άγνωστο το x και $\alpha\in\mathbb{R}$. Για το α ισχύει:

$2\sqrt{(\alpha+3)^2}-\sqrt[3]{\alpha^2}=2(\alpha+2)$ (2). Αν η (1) είναι αδύνατη, να βρείτε τις τιμές του α.

Λύση

$(1)\Leftrightarrow|\alpha+3|x=|\alpha|x+3x+3\alpha\Leftrightarrow$

$(|\alpha+3|-|\alpha|-3)x=3\alpha$ (3).

Η (1) είναι αδύνατη, όταν η (3) είναι αδύνατη. Αυτό γίνεται αν και μόνο αν

$\begin{cases}|\alpha+3|-|\alpha|-3=0\Leftrightarrow|\alpha+3|=|\alpha|+3\\ \text{και}\\ \alpha\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}3\alpha\geq 0\\ \text{και}\\ \alpha\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha>0$. Άρα η (1) είναι αδύνατη αν και μόνο αν $\alpha>0$. $(2)\Leftrightarrow 2|\alpha+3|-\sqrt[3]{\alpha^2}=2\alpha+4\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$

$2\alpha+6-\sqrt[3]{\alpha^2}=2\alpha+4\Leftrightarrow\sqrt[3]{\alpha^2}=2\Leftrightarrow\alpha^{\frac{2}{3}}=2\Leftrightarrow$

$\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3=8\Leftrightarrow\alpha^2=8\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=2\sqrt{2}$

Σημείωση: Η ιδιότητα $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ ισχύει ως ισότητα όταν $\alpha\cdot\beta\geq 0$.

Θέμα 10ο: α. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με α,β,γ μη μηδενικοί ρητοί. Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\kappa+\sqrt{\lambda}$ με $\kappa\in\mathbb{Q}-\{0\}$ και λ θετικός ρητός που δεν γίνεται τετράγωνο ρητού (άρρητος), τότε και ο αριθμός $\kappa-\sqrt{\lambda}$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\beta-1)x+\gamma+2=0$ (1) με $\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$. Αν ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές των β,γ.

Λύση

α. Ο $\kappa+\sqrt{\lambda}$ είναι ρίζα της εξίσωσης αν και μόνο αν $\alpha\left(\kappa+\sqrt{\lambda}\right)^2+\beta\left(\kappa+\sqrt{\lambda}\right)+\gamma=0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$

$\alpha\kappa^2+\lambda\alpha+\beta\kappa+\gamma+(2\alpha\kappa+\beta)\sqrt{\lambda}=0$ (2).

Αν υποθέσουμε ότι $2\alpha\kappa+\beta\neq 0$, τότε από την (2) έχουμε $\sqrt{\lambda}=-\frac{\alpha\kappa^2+\lambda\alpha+\beta\kappa+\gamma}{2\alpha\kappa+\beta}\in\mathbb{Q}$, δηλαδή ο $\sqrt{\lambda}$ είναι ρητός. Άτοπο γιατί ο $\sqrt{\lambda}$ είναι άρρητος. Άρα πρέπει $2\alpha\kappa+\beta=0$ (3) και από την (2) παίρνουμε $\alpha\kappa^2+\lambda\alpha+\beta\kappa+\gamma=0$ (4).

$\alpha\left(\kappa-\sqrt{\lambda}\right)^2+\beta\left(\kappa-\sqrt{\lambda}\right)+\gamma=\cdots=$

$\alpha\kappa^2+\lambda\alpha+\beta\kappa+\gamma-(2\alpha\kappa+\beta)\sqrt{\lambda}\overset{(3),(4)}{=}0$, δηλαδή και ο $\kappa-\sqrt{\lambda}$ είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

β. Σύμφωνα με το ερώτημα α, όταν ο $2+\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) τότε και ο $2-\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=\beta-1\Leftrightarrow\beta=5$ και

$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\gamma+2 \Leftrightarrow 1=\gamma+2 \Leftrightarrow \gamma=-1$.

Θέμα 11ο: Θεωρούμε την εξίσωση

$\mathbf{x^2+(\kappa-1)\sqrt{|\kappa-1|}x+\frac{1}{32}=0}$ **(1), $\kappa \in R$ (1), και δεχόμαστε ότι έχει διπλή ρίζα.**

α. Να βρείτε τις τιμές του κ.

β. Αν $\kappa=\frac{1}{2}$ και ρ ρίζα της εξίσωσης (1), τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό $A=\sqrt{\rho\sqrt{2}\sqrt[3]{2^2}}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left|x-20\sqrt{2}\cdot\rho\right|=6-|3-3x| \quad (2).$$

Λύση

α. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν

$\Delta=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2|\kappa-1|-\frac{1}{8}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\kappa-1|^2|\kappa-1|-\frac{1}{8}=0 \Leftrightarrow |\kappa-1|^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\kappa-1|=\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow |\kappa-1|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa-1=-\frac{1}{2}$ ή

$\kappa-1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa=\frac{1}{2}$ ή $\kappa=\frac{3}{2}$.

β. i. Αφού $\kappa=\frac{1}{2}$ με βάση το ερώτημα α, το ρ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).

Άρα $\rho=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{(\kappa-1)\sqrt{|\kappa-1|}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} \Leftrightarrow$

$\rho=\frac{1}{4\sqrt{2}}$. $A=\sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt[3]{2^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}=$

$\frac{1}{2}\sqrt[6]{2^2} \Leftrightarrow A=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

ii. $20\sqrt{2}\cdot\rho=20\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=5$.

Η εξίσωση (2) γράφεται:

$|x-5|=6-|3(1-x)| \Leftrightarrow |x-5|=6-3|x-1| \Leftrightarrow$

$|x-5|+3|x-1|=6$ (3).

Για να λύσουμε την (3) θα τη γράψουμε χωρίς απόλυτα. Για το σκοπό αυτό θα φτιάξουμε ένα πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις που έχουμε μέσα στα απόλυτα. Αν $x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$, οπότε $x-5<0$ για $x<5$. Αν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, οπότε $x-1<0$ για $x<1$ Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$

– Αν $x\leq 1$, τότε $x-5<0$ και $x-1\leq 0$ οπότε: $(2)\Leftrightarrow -x+5-3(x-1)=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-3x+8=6 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Δεκτή.

– Αν $1<x\leq 5$, τότε $x-5\leq 0$ και $x-1>0$ οπότε:

$-x+5+3(x-1)=6 \Leftrightarrow$

$-x+3x+2=6 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$. Δεκτή.

– Αν $x>5$, τότε $x-5>0$ και $x-1>0$ οπότε:

$(2) \Leftrightarrow x-5+3x-3=6 \Leftrightarrow 4x=14 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$.

Απορρίπτεται.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x=\frac{1}{2}$, $x=2$.

Θέμα 12ο: Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha\neq 0$. Αν οι εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις ρ_1,ρ_2, να δείξετε ότι:

$$|\rho_1|<\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{|\alpha|} \quad \text{και} \quad |\rho_2|<\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{|\alpha|}.$$

Λύση

Έστω ότι είναι $|\rho_1|\leq|\rho_2|$.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $|\rho_2|<\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{|\alpha|} \Leftrightarrow$

$|\rho_2|<1+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| \Leftrightarrow |\rho_2|<1+|\rho_1+\rho_2|+|\rho_1\rho_2|$ (1)

Είναι $\big||\rho_1|-|\rho_2|\big|\leq|\rho_1+\rho_2| \Leftrightarrow |\rho_2|-|\rho_1|\leq|\rho_1+\rho_2|$ (2).

Αν δείξουμε ότι: $|\rho_2|<1+|\rho_2|-|\rho_1|+|\rho_1||\rho_2| \Leftrightarrow$ $0<1-|\rho_1|+|\rho_1||\rho_2|$ (3) λόγω της (2) θα ισχύει και η (1). $|\rho_1|\leq|\rho_2| \Leftrightarrow |\rho_1|^2\leq|\rho_1||\rho_2|$ (4).

Παρατηρούμε ότι:

$1-|\rho_1|+|\rho_1|^2=|\rho_1|^2-2\left(\frac{1}{2}|\rho_1|\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(\rho_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \Leftrightarrow$

$1-|\rho_1|+|\rho_1|^2>0 \overset{(4)}{\Rightarrow} 1-|\rho_1|+|\rho_1||\rho_2|>0$

(γιατί στη θέση του $|\rho_1|^2$ βάλαμε παράσταση μεγαλύτερη ή ίση του $|\rho_1|^2$ από την (4)).

Άρα ισχύει η (1).

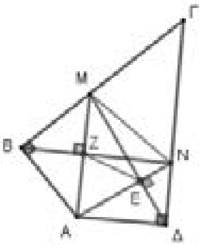
Τάξη: Β΄

Μετρικές Σχέσεις – Εμβαδά.

Γιώργος Α. Κουσινιώρης – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε.** Ηλείας

Άσκηση 1. **Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = ΑΔ$ και $Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Δ}Γ = 90°$. Αν Μ είναι σημείο της ΒΓ και Ν σημείο της ΓΔ τέτοια, ώστε $ΑΝ \perp ΔΜ$ να δείξετε ότι $ΑΜ \perp ΒΝ$.**

Λύση: Φέρνουμε τη $ΒΖ \perp ΑΜ$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία $Β, Ζ$ και $Ν$ είναι συνευθειακά.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΝ$ είναι

$$ΑΔ^2 = ΑΕ \cdot ΑΝ \quad \textbf{(1)}$$

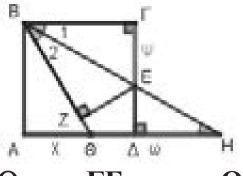
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΜ$ είναι $ΑΒ^2 = ΑΖ \cdot ΑΜ$ και επειδή $ΑΒ = ΑΔ$ είναι $ΑΔ^2 = ΑΖ \cdot ΑΜ$ **(2).** Από τις (1) και (2) έχουμε $ΑΕ \cdot ΑΝ = ΑΖ \cdot ΑΜ$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $ΕΖΜΝ$ είναι εγγράψιμο.

Επομένως $Μ\hat{Ζ}Ν = Μ\hat{Ε}Ν = 90°$ ως γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται η $ΜΝ$ από τις απέναντι κορυφές Ε και Ζ του εγγράψιμου τετράπλευρου $ΕΖΜΝ$.

Συνεπώς $Β\hat{Ζ}Ν = Β\hat{Ζ}Μ + Μ\hat{Ζ}Ν = 90° + 90° = 180°$ οπότε τα σημεία Β, Ζ, Ν είναι συνευθειακά και επομένως $ΑΜ \perp ΒΝ$.

Άσκηση 2.

Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α και το τετράπλευρο ΒΓΕΖ έχει $ΒΓ = ΒΖ$ και



ΕΓ=ΕΖ. Αν $ΑΘ = x$, ΓΕ=ψ και ΘΗ=ω να δείξετε ότι ω=x+ψ.

Λύση: Τα τρίγωνα ΒΖΕ και ΒΓΕ είναι όμοια ($\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$, $\hat{Β}_1 = \hat{Η}$) οπότε $\dfrac{ΕΓ}{ΒΓ} = \dfrac{ΕΔ}{ΗΔ}$ **(1).**

Είναι $ΕΓ = ψ$, $ΕΔ = α - ψ$ και $ΗΔ = ΘΗ - ΘΔ = ω - (α - x) = ω + x - α$, οπότε η (1) γίνεται $\dfrac{ψ}{α} = \dfrac{α-ψ}{ω+x-α} \Leftrightarrow ψ(ω + x - α) = α(α - ψ)$

$\Leftrightarrow$

$ψω + ψx - ψα = α^2 - ψα \Leftrightarrow ψ(ω + x) = α^2$ **(2).**

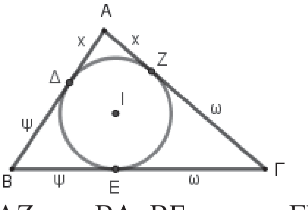
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΘ έχουμε:

$$ΑΒ^2 = ΒΘ^2 - ΑΘ^2 \Leftrightarrow α^2 = ΒΘ^2 - x^2 \quad \textbf{(3)}$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΒΓΕ και ΒΖΕ (κριτήριο Π-Π-Π) έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$ οπότε το τρίγωνο ΘΗΒ είναι ισοσκελές ($\hat{Η} = \hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$) και συνεπώς $ΒΘ = ΘΗ = ω$. **(4)** Η (2) λόγω των (3) και (4) γίνεται $ψ(ω+x) = ω^2 - x^2 \Leftrightarrow ψ(ω+x) = (ω-x)\cdot(ω+x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ψ = ω - x$ και τελικά $ω = x+ψ$.

Άσκηση 3. ***Μια ενδιαφέρουσα πρόταση:*** **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ=α, ΑΓ=β και ΑΒ=γ. Να υπολογίσετε συναρτήσει των α,β,γ τα μήκη των τμημάτων στα οποία χωρίζουν τις πλευρές του τριγώνου τα σημεία επαφής τους με τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση: Ως γνωστόν τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο από σημείο εκτός του κύκλου είναι ίσα.



Αν είναι ΑΔ=ΑΖ = x, ΒΔ=ΒΕ = ψ και ΓΕ=ΓΖ = ω, τότε είναι $ψ + ω = α$ **(1)**, $x+ω=β$ **(2)**, $x + ψ = γ$ **(3).** Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) έχουμε: $2x + 2ψ + 2 = α + β + γ$ και αν ονομάσουμε $α + β + γ = 2τ$ τότε είναι: $x + ψ + ω = τ$ **(4).**

Αφαιρώντας από την (4) την (1) έχουμε: $x = τ - α$. αφαιρώντας από την (4) τη (2) έχουμε: $ψ = τ - β$, και όμοια έχουμε: $ω = τ - γ$.

Άσκηση 4. **Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ=6cm και ΑΓ=8cm. Αν ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα, Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Δ$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΙ.**

Λύση: Έστω Ζ, Η και Θ τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ με τις πλευρές ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως και ρ η ακτίνα του. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow ΒΓ = 10cm$.

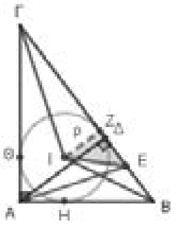
Είναι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow 6^2 = 10 \cdot ΒΔ \Leftrightarrow ΒΔ = \dfrac{36}{10} \Leftrightarrow$ $ΒΔ = 3,6\,cm$, οπότε $ΓΔ = ΒΓ - ΒΔ = 6,4\,cm$.

Είναι $ΑΒ^2 = ΓΔ \cdot ΒΔ = 6,4 \cdot 3,6 = 23,04$ οπότε $ΑΒ = \sqrt{23,04} \Leftrightarrow ΑΒ = 4,8\,cm$.

Από το θεώρημα της διχοτόμου έχουμε $\dfrac{BE}{\Delta E}=\dfrac{AB}{A\Delta}$

$\Leftrightarrow \dfrac{BE}{BE+\Delta E}=\dfrac{AB}{AB+A\Delta} \Leftrightarrow \dfrac{BE}{B\Delta}=\dfrac{AB}{AB+A\Delta} \Leftrightarrow$

$\dfrac{BE}{3,6}=\dfrac{6}{6+4,8} \Leftrightarrow BE=\dfrac{21,6}{10,8} \Leftrightarrow BE=2\text{cm}$.



Είναι $AH=A\Theta=x$, $BH=BZ=\psi$ και $\Gamma Z=\Gamma\Theta=\omega$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον εγγεγραμμένο κύκλο από τα σημεία Α, Β και Γ αντιστοίχως. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ενδιαφέρουσα πρόταση (Άσκηση 3) έχουμε:

$$\tau=\frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}=\frac{6+8+10}{2}=12.$$

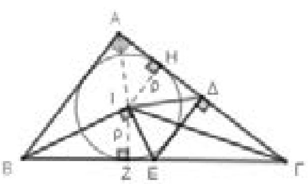
Οπότε είναι: $\psi=\tau-\beta=4\text{cm}$ οπότε $BZ=4\text{cm}$. Επομένως $ZE=BZ-BE=2\text{cm}$. Για το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ έχουμε: $(AB\Gamma)=\tau\cdot\rho \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=\tau\cdot\rho$ ή

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=12\cdot\rho \Leftrightarrow \rho=2\text{cm} \text{ ή } ZI=2\text{cm}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΙΕ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $EI^2=ZE^2+ZI^2=2^2+2^2=8$ ή $EI=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ cm.

Άσκηση 5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ=6cm και ΑΓ=8cm. Αν Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, η κάθετη στη διχοτόμο ΒΙ στο σημείο Ι τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε και η κάθετη από το Ε στην πλευρά ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

Λύση: Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=6^2+8^2=100$ ή $B\Gamma=10\text{cm}$.



Η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται από τον τύπο του εμβαδού του τριγώνου $E=\tau\cdot\rho$ ή $\rho=\dfrac{E}{\tau}$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Η ημιπερίμετρος του ΑΒΓ είναι $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\dfrac{10+8+6}{2}=12\text{cm}$. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E=\dfrac{1}{2}\beta\gamma$ *(γιατί;)* ή $E=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24\text{cm}^2$.

Άρα η ακτίνα ρ είναι $\rho=\dfrac{E}{\tau}=\dfrac{24}{12}=2\text{cm}$.

Με τη χρήση της ενδιαφέρουσας πρότασης (Άσκηση 3) είναι $BZ=\tau-\rho=4\text{cm}$.

Τα τρίγωνα ΖΙΒ και ΖΕΙ είναι όμοια *(γιατί;)* οπότε είναι

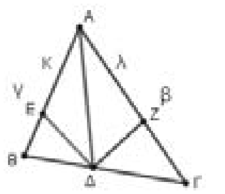
$\dfrac{BZ}{ZI}=\dfrac{ZI}{EZ} \Leftrightarrow \dfrac{BZ}{\rho}=\dfrac{\rho}{EZ} \Leftrightarrow \dfrac{4}{2}=\dfrac{2}{EZ} \Leftrightarrow EZ=1\text{cm}$. Συνεπώς είναι $BE=BZ+ZE=5=\dfrac{B\Gamma}{2}$, που σημαίνει ότι το Ε είναι το μέσο της ΒΓ. Επειδή $\Delta E\perp A\Gamma$ και $AB\perp A\Gamma$ είναι $\Delta E//AB\Delta$ οπότε το Δ είναι μέσο της ΑΓ και επομένως είναι $A\Delta=\dfrac{A\Gamma}{2}=4\text{cm}$.

Πάλι με τη χρήση της ενδιαφέρουσας πρότασης είναι $AH=\tau-\alpha=2=\dfrac{A\Delta}{2}$, οπότε το Η είναι μέσο της ΑΔ, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΙΑΔ έχει το ΙΗ διάμεσο και ύψος άρα είναι ισοσκελές με $AI=\Delta I$ και επειδή $I\widehat{A}\Delta=\dfrac{\widehat{A}}{2}=45°$ είναι και ορθογώνιο με υποτείνουσα $A\Delta=4\text{cm}$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΙΑΔ έχουμε

$$AI^2+\Delta I^2=A\Delta^2 \Leftrightarrow 2\Delta I^2=4^2 \Leftrightarrow \Delta I=2\sqrt{2}.$$

Άσκηση 6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΔ και τις διχοτόμους ΔΕ και ΔΖ των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ αντιστοίχως. Αν είναι $AE=\kappa$ και $AZ=\lambda$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\lambda}.$$



Λύση: Στο τρίγωνο ΑΔΒ από το θεώρημα της διχοτόμου έχουμε:

$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{A\Delta}{B\Delta}$ **(1).**

Όμοια στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\dfrac{\Gamma Z}{AZ}=\dfrac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$ **(2).**

Οι (1) και (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν $\dfrac{AE}{BE}\cdot\dfrac{\Gamma Z}{AZ}=\dfrac{A\Delta}{B\Delta}\cdot\dfrac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{BE}\cdot\dfrac{\Gamma Z}{AZ}=\dfrac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$ **(3).**

Από το θεώρημα της διχοτόμου στο ΑΒΓ έχουμε $\dfrac{\Gamma\Delta}{B\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{AB}$ οπότε η (3) γίνεται

$\dfrac{AE}{BE}\cdot\dfrac{\Gamma Z}{AZ}=\dfrac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{\gamma-\kappa}\cdot\dfrac{\beta-\lambda}{\lambda}=\dfrac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\kappa(\beta-\lambda)}{(\gamma-\kappa)\lambda}=\dfrac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow$

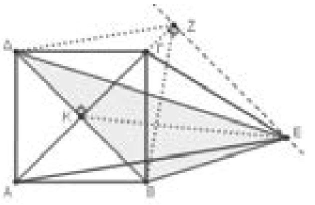
$\gamma\kappa(\beta-\lambda)=(\gamma-\kappa)\lambda\beta \Leftrightarrow \gamma\kappa\beta-\gamma\kappa\lambda=\lambda\beta\gamma-\kappa\lambda\beta \Leftrightarrow$

$\gamma\kappa\beta+\kappa\lambda\beta=\lambda\beta\gamma+\gamma\kappa\lambda$ και διαιρώντας τα μέλη με $\beta\gamma\kappa\lambda\neq 0$ έχουμε $\dfrac{\gamma\kappa\beta+\kappa\lambda\beta}{\beta\gamma\kappa\lambda}=\dfrac{\lambda\beta\gamma+\gamma\kappa\lambda}{\beta\gamma\kappa\lambda} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\gamma\kappa\beta}{\beta\gamma\kappa\lambda}+\dfrac{\kappa\lambda\beta}{\beta\gamma\kappa\lambda}=\dfrac{\lambda\beta\gamma}{\beta\gamma\kappa\lambda}+\dfrac{\gamma\kappa\lambda}{\beta\gamma\kappa\lambda} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\kappa}+\dfrac{1}{\beta}$.

Άσκηση 7. **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = 5$ και $ΓΕ = 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ.**

Λύση: Από το Ε φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ΒΔ που τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΔΖ είναι ισεμβαδικά γιατί έχουν κοινή βάση τη ΒΔ και τις κορυφές τους σε ευθεία παράλληλη στη βάση αυτή.



Επομένως έχουμε $(ΒΔΕ)=(ΒΔΖ)=\frac{1}{2}ΒΔ\cdot ΚΖ$. **(1)**

Είναι $ΕΖ \perp ΑΓ$ (*γιατί;*) και Κ το μέσο της ΔΒ, οπότε το τμήμα ΚΖ είναι η προβολή της διαμέσου ΕΚ του τριγώνου ΑΕΓ πάνω στην ΑΓ.

Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΕΓ έχουμε $ΑΕ^2 - ΓΕ^2 = 2ΑΓ\cdot ΚΖ$ και επειδή

$ΑΓ = ΒΔ$ είναι $ΑΕ^2 - ΓΕ^2 = 2ΒΔ\cdot ΚΖ \Leftrightarrow$

$$ΒΔ\cdot ΚΖ=\frac{ΑΕ^2-ΓΕ^2}{2} = \frac{5^2-3^2}{2} \Leftrightarrow ΒΔ\cdot ΚΖ = 8.$$

Επομένως, λόγω της (1), το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ είναι $(ΒΔΕ)=\frac{1}{2}ΒΔ\cdot ΚΖ=\frac{1}{2}\cdot 8 = 4$ τμ.

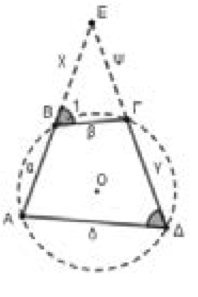
Άσκηση 8. **Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ με πλευρές $ΑΒ = α = 2$, $ΒΓ = β = 1{,}5$, $ΓΔ = γ = 2{,}4$ και $ΑΔ = δ = 3$. Οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $ΒΕ = x$ και $ΓΕ = ψ$.**

Λύση: Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΔΑ είναι όμοια γιατί έχουν την $\hat{Ε}$ κοινή και $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}$, αφού στο εγγράψιμο τετράπλευρο η κάθε εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντί της εσωτερική, οπότε έχουμε:

$$\frac{ΕΒ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΑ}=\frac{ΒΓ}{ΑΔ} \Leftrightarrow \frac{x}{ψ+γ}=\frac{ψ}{x+α}=\frac{β}{δ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{ψ+2{,}4}=\frac{ψ}{x+2}=\frac{1{,}5}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{ψ+2{,}4}=\frac{ψ}{x+2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{ψ+2{,}4}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{ψ}{x+2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} 2x = ψ + 2{,}4 \\ 2ψ = x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ψ = 2x - 2{,}4 \\ x - 2ψ = -2 \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος στη δεύτερη έχουμε:

$$x - 2(2x-2{,}4) = -2 \Leftrightarrow x - 4x + 4{,}8 = -2x \Leftrightarrow$$

$$-3x = -2 - 4{,}8 \Leftrightarrow -3x = -6{,}8 \Leftrightarrow x = \frac{6{,}8}{3} \simeq 2{,}26.$$

Από την εξίσωση $ψ = 2x - 2{,}4$ έχουμε

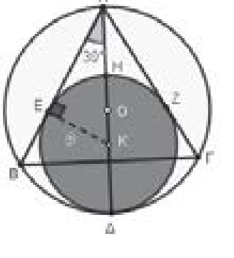
$$ψ = 2\cdot\frac{6{,}8}{3} - 2{,}4 = \frac{6{,}4}{3} = 2{,}13.$$

Άσκηση 9. **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O,R).**

α) Να κατασκευάσετε τον κύκλο C που εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και στο τόξο ΒΓ.

β) Να βρείτε το λόγο του εμβαδού του κύκλου C προς το εμβαδόν του μηνίσκου που σχηματίζει ο κύκλος αυτός με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση: α) Για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο κύκλο αρκεί να εντοπίσουμε το κέντρο του Κ και την ακτίνα του ρ. Επειδή ο κύκλος C εφάπτεται στις πλευρές της γωνίας Α το κέντρο του θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας Α. Η διχοτόμος της γωνίας Α όμως, επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, συμπίπτει με τη διάμεσό του οπότε περιέχει και το περίκεντρο Ο του τριγώνου. Επομένως τα σημεία Α, Ο, Κ και το σημείο Δ *(το Δ γιατί;)* της επαφής των δύο κύκλων είναι συνευθειακά. Αν Ε είναι το σημείο επαφής του κύκλου C με την πλευρά ΑΒ τότε το τρίγωνο ΕΑΚ είναι ορθογώνιο με οξεία γωνία $\hat{Α} = 30°$, οπότε είναι $ΚΕ = \frac{ΑΚ}{2}$ ή $ΑΚ = 2ΚΕ = 2ρ$. Επομένως, επειδή είναι $ΚΔ = ΑΔ - ΑΚ$, έχουμε $ρ = 2R - 2ρ \Leftrightarrow ρ = \frac{2R}{3}$, οπότε $ΑΚ = 2ρ = \frac{4}{3}R$. Συνεπώς ο κύκλος C είναι κατασκευάσιμος, αφού γνωρίζουμε το κέντρο του Κ και την ακτίνα του $ρ = \frac{2}{3}R$.



β) Αν $Ε_κ$ και $Ε_μ$ είναι αντίστοιχως το εμβαδόν του κύκλου C και του μηνίσκου έχουμε:

$$Ε_κ = πρ^2 = π\left(\frac{2}{3}R\right)^2 \Leftrightarrow Ε_κ = \frac{4}{9}πR^2 \text{ και}$$

$$Ε_μ = Ε_{(O,R)} - Ε_κ = πR^2 - \frac{4}{9}πR^2 \text{ ή } Ε_μ = \frac{5}{9}πR^2.$$

Επομένως είναι $\frac{Ε_κ}{Ε_μ} = \frac{\frac{4}{9}πR^2}{\frac{5}{9}πR^2}$ ή $\frac{Ε_κ}{Ε_μ} = \frac{4}{5}$.

Πηγές: *www.gogeometry.com/problem/index.html*

Τάξη: Β΄

Μετρικές Σχέσεις

Καρδαμίτσης Σπύρος

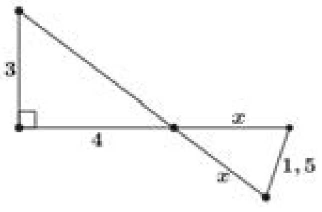
Οι Πυθαγόρειοι: *Στον **Κρότωνα** της Κάτω Ιταλίας τον **6^{ο} π.χ.** αιώνα ο Πυθαγόρας από την Σάμο ιδρύει την σχολή του. Στη βάση της φιλοσοφίας της σχολής των Πυθαγορείων υπάρχουν δύο αρχές το **άπειρον** και το **πέρας**, απ' αυτές τις αρχές προκύπτει το «**εν**» και από το εν προκύπτουν οι ακέραιοι αριθμοί με τους οποίους εκφράζεται ο κόσμος. Οι Πυθαγόρειοι με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα ορίζουν τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς και οδηγούνται στην ανακάλυψη των ασύμμετρων αριθμών.*

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Άσκηση1η.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος του. Αν ΑΒ = 3, ΑΓ = 5 και ΒΓ = 6, τότε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ είναι:

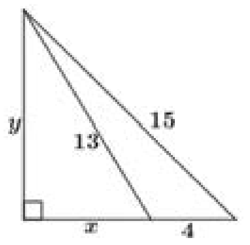
Α. 10,2 **Β.** 18,85 **Γ.** 11,25 **Δ.** 11,5 **Ε.** 12

Άσκηση 2η.Με βάση τα δεδομένα του σχήματος το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος x είναι:



Α. $\dfrac{15}{2\sqrt{10}}$ **Β.** 3 **Γ.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **Δ.** $\sqrt{10}$ **Ε.** 4

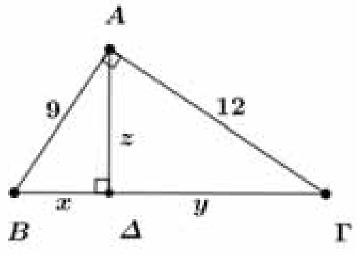
Άσκηση 3η. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί δύο ορθογώνια τρίγωνα το ένα εσωτερικότου άλλου. Ο λόγος $\dfrac{x}{y}$ είναι:



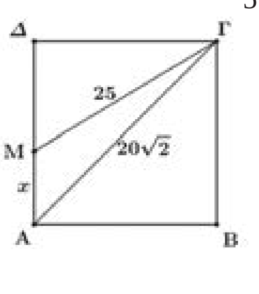
Α. $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **Β.** $\dfrac{5}{12}$ **Γ.** $\dfrac{13}{15}$ **Δ.** $\sqrt{\dfrac{13}{15}}$ **Ε.** $\dfrac{5}{13}$

Άσκηση 4η.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΔ είναι το ύψος του. Το άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων $x+y+z$ είναι:



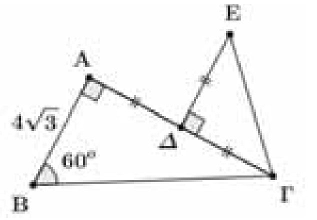
Α. 36 **Β.** 42 **Γ.** $\dfrac{111}{5}$ **Δ.** $\dfrac{114}{5}$ **Ε.** $\dfrac{82}{5}$



Άσκηση 5η. Στο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $ΑΓ=20\sqrt{2}$ και $ΜΓ=25$. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΜ = x είναι:

Α. $5\sqrt{5}$ **Β.** $5\sqrt{3}$ **Γ.** $5\sqrt{2}$ **Δ.** $4\sqrt{2}$ **Ε.** 5

Άσκηση 6η. Στο σχήμα τα δύο τρίγωναείναι ορθογώνια, η γωνία Β είναι 60^{o} και ΑΔ = ΔΓ = ΔΕ. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΕΓ είναι



Α. $6\sqrt{2}$ **Β.** $4\sqrt{2}$ **Γ.** $5\sqrt{3}$ **Δ.** 4 **Ε.** $5\sqrt{2}$

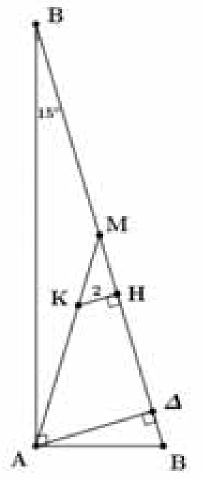
Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 7η. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^{o}$) με γωνία $\hat{Β}=15^{o}$. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και σημειώνουμε με Κ το κέντρο βάρος του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε την ΚΗ κάθετη στην υποτείνουσα ΒΓ καθώς και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ. Αν είναι ΚΗ = 2, τότε

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 4 ΑΔ

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ\cdot ΚΜ = ΚΗ\cdot ΑΜ$

γ) Να υπολογίσετε το μήκος ΒΓ της υποτείνουσας του τριγώνου ΑΒΓ.

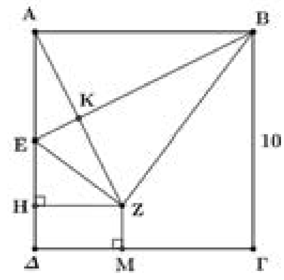


Λύση.

α) Είναι η ΑΜ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, συνεπώς $ΑΜ=\dfrac{ΒΓ}{2}=ΜΒ$. Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές, τότε $Μ\hat{Α}Β=15^{o}$ και $Α\hat{Μ}Β=30^{o}$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΜΒ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ είναι

$$ΑΔ=\frac{ΑΜ}{2}=\frac{ΒΓ/2}{2}=\frac{ΒΓ}{4},\ \text{άρα}\ ΒΓ=4ΑΔ.$$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΚΜΗ είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $Κ\hat{Μ}Η$ κοινή, συνεπώς είναι όμοια, τότε ισχύει: $\frac{ΑΔ}{ΚΗ}=\frac{ΜΔ}{ΜΗ}=\frac{ΑΜ}{ΚΜ}$, από τους λόγους αυτούς προκύπτει $ΑΔ\cdot ΚΜ = ΚΗ\cdot ΑΜ$.



γ) Επειδή είναι το Κ βαρύκεντρο του τριγώνου είναι: $ΚΜ=\frac{1}{3}ΑΜ$.

Από το β ερώτημα προκύπτει:

$ΑΔ\cdot\frac{1}{3}\cdot ΑΜ = ΚΗ\cdot ΑΜ \Rightarrow ΑΔ = 3ΚΗ = 3\cdot 2 = 6$, τότε

$ΒΓ = 4\cdot ΑΔ = 24$

Άσκηση 8η. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10, Ε είναι το μέσο της ΑΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ΕΒ, η ΑΗ τέμνει την ΕΒ στο σημείο Κ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $ΕΒ = 5\sqrt{5}$

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΚ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΖ

δ) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΖΗ και ΖΜ του σημείου Ζ από τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ του τετραγώνου ΑΒΓΔ

Λύση. α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο στο Α με ΑΒ=10 και ΑΕ=5, αφού το Ε είναι το μέσο της ΑΔ, επομένως $ΕΒ^2 = ΑΕ^2 + ΑΒ^2 = 5^2 + 10^2 = 125 = 25\cdot 5$, άρα $ΕΒ = \sqrt{25\cdot 5} = 5\sqrt{5}$

β) Επειδή το σημείο Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ΕΖ η ΑΖ είναι κάθετη στην ΕΒ και η γωνία $Α\hat{Ε}Κ$ είναι ορθή, επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΚ είναι ορθογώνια και είναι $Ε\hat{Α}Κ = Α\hat{Β}Ε$ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες) συνεπώς είναι όμοια.

γ) Από την ομοιότητα των παραπάνω τριγώνων έχουμε:

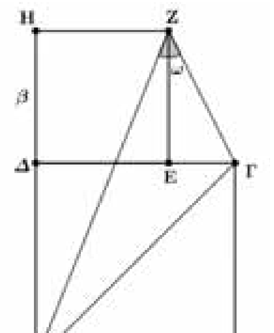
$$\frac{ΑΕ}{ΕΚ}=\frac{ΕΒ}{ΑΕ}=\frac{ΑΒ}{ΑΚ}\Rightarrow\frac{5}{ΕΚ}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\frac{10}{ΑΚ}\Rightarrow ΑΚ=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

τότε $ΑΖ = 2\cdot ΑΚ = 2\cdot\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$

δ) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΗΖ είναι όμοια (ορθογώνια και έχουν τις γωνίες $Η\hat{Α}Ζ$ και $Α\hat{Β}Ε$ ίσες) τότε: $\frac{ΑΒ}{ΑΗ}=\frac{ΕΒ}{ΑΖ}\Rightarrow\frac{10}{ΑΗ}=\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Rightarrow ΑΗ = 8$.

Τέλος $ΖΜ = ΗΔ = ΑΔ - ΑΗ = 10 - 8 = 2$

Άσκηση 9η. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ με πλευρές α και β αντίστοιχα με α>β, που έχουν λόγο $\frac{α}{β}=\sqrt{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου είναι διπλάσια από την πλευρά του τετραγώνου ΔΕΖΗ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΖΓ ως συνάρτηση της πλευράς β του μικρού τετραγώνου.

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ = \hat{ω}$.

Λύση. α) Είναι $\frac{α}{β}=\sqrt{2}\Rightarrow α=\sqrt{2}β$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι: $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = α^2 + α^2 =$

$2α^2 = 2(\sqrt{2}β)^2 = 2\cdot 2β^2 = 4β^2$, άρα $ΑΓ = \sqrt{4β^2} = 2β$ δηλαδή η διαγώνιος ΑΓ είναι διπλάσια από την πλευρά του ΔΕΖΗ.

β) Είναι $ΖΕ = β$ και $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = α - β$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = β^2 + (α-β)^2 =$

$β^2 + α^2 - 2αβ + β^2 = β^2 + (β\sqrt{2})^2 - 2β\sqrt{2}β + β^2 =$

$= 2β^2 + 2β^2 - 2\sqrt{2}β^2 = 4β^2 - 2\sqrt{2}β^2 =$

$= 2(2-\sqrt{2})β^2$, επομένως $ΖΓ = β\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ έχουμε:

$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = (α+β)^2 + β^2 =$

$α^2 + 2αβ + 2β^2 = (β\sqrt{2})^2 + 2β\sqrt{2}β + 2β^2$

$= 4β^2 + 2\sqrt{2}β^2 = 2(2+\sqrt{2})β$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2\cdot ΑΖ\cdot ΖΓ\cdot συνω \Rightarrow$

$4β^2 = 4β^2 + 2β^2\sqrt{2} + 4β^2 - 2β^2\sqrt{2} -$

$-2\sqrt{2β^2(2+\sqrt{2})}\cdot\sqrt{2β^2(2-\sqrt{2})}\cdot συνω \Rightarrow$

$2\sqrt{2β^2(2+\sqrt{2})}\cdot\sqrt{2β^2(2-\sqrt{2})}\cdot συνω = 4β^2 \Rightarrow$

$2β\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\cdot β\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\cdot συνω = 4β^2 \Rightarrow$

$2β^2\sqrt{2(2+\sqrt{2})2(2-\sqrt{2})}\cdot συνω = 4β^2 \Rightarrow$

$2β^2 2\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}\cdot συνω = 4β^2 \Rightarrow$.

$\sqrt{2}\cdot συνω = 1 \Rightarrow συνω = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\hat{ω} = 45^o$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής: **Δ – Α – Β – Γ – Ε – Α**

Τριγωνομετρία και μελέτη συναρτήσεων

Μαρία Σίσκου - Παναγιώτης Χριστόπουλος

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)-3$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει περίοδο $T=6\pi$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα μιας περιόδου, δηλαδή στο $[0,T]$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-5$

δ) Να βρείτε τον τύπο της h δεδομένου ότι

$$h(x)=f(3x-3\pi)$$

Λύση:

α) $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x,\ T=\frac{2\pi}{\omega}$

$f(x)=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{3}x\right),\ T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}\Rightarrow T=6\pi$

β) Η μονοτονία θα μελετηθεί στα διαστήματα $\left[0,\frac{T}{2}\right]$, $\left[\frac{T}{2},T\right]$, δηλαδή στα $[0,3\pi]$ και $[3\pi,6\pi]$.

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$	1	0	-1	0	1
$2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$	2	0	-2	0	2
f(x)	-1 ↘	-3 ↘	-5	↗ -3	↗ -1
	Τ.Μ		Τ.Ε		Τ.Μ

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{T}{2}\right]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{T}{2},T\right]$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$-1\le\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}\le1\Leftrightarrow-2\le2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}\le2\Leftrightarrow$

$-5\le2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}-3\le-1$ και $f(0)=f(6\pi)=-1$, $f(3\pi)=-5$. Άρα $f\min=f(3\pi)-5$ και $f\max=f(0)=-1=f(6\pi)$

γ) $f(x)=-5\Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}-3=-5\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}=-1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow\frac{x}{3}=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$x=6\kappa\pi\pm3\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

δ) $h(x)=f(3x-3\pi)=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x-3\pi}{3}\right)-3=$

$=2\sigma\upsilon\nu(x-\pi)-3=2\sigma\upsilon\nu(\pi-x)-3$

$=-2\sigma\upsilon\nu x-3$

Άσκηση 2.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x$$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της f.

β) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

γ) Αν $g(x)=|x-f(x)|$ να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

Λύση:

α) Πρέπει $\varepsilon\varphi x\neq0$ και $\eta\mu x\neq0$

$\sigma\upsilon\nu x\neq0$ και $\eta\mu x\neq0\Leftrightarrow$

$x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ και $x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα $A_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

β) $f(x)=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x=$

$\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x=$

$\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x=\left(\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x=$

$=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$

Άρα $f(x)=1$, σταθερή συνάρτηση.

γ) $g(x)=|x-1|$, $\Pi.O=\mathbb{R}$

- Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,1]$
  με $x_1,x_2\le 1\Rightarrow x_1-1<x_2-1\le 0\Rightarrow$
  $|x_1-1|>|x_2-1|\ge 0\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$
  Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$
- Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$
  με $1<x_1<x_2\Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1\Rightarrow$
  $0<|x_1-1|<|x_2-1|\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.
- Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $g(1)=0$.
- **Παρατήρηση:** Η g είναι η μετατόπιση της $h(x)=|x|$ κατά μια μονάδα δεξιά. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
  Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.
  Ολικό ελάχιστο είναι το $A(1,0)$.

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση
$$\mathbf{f(x)=-3συν^2x-4|ημx|+4,\ x\in[0,\pi]}$$

α) Να δείξετε ότι
$$\mathbf{f(x)=-3ημ^2x-4|ημx|+1}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$.

Λύση:

α) $f(x)=-3συν^2x-4|ημx|+4,\ x\in[0,\pi]$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $ημx\ge 0$, άρα

$f(x)=-3συν^2x+3-4|ημx|+1\Leftrightarrow$

$f(x)=3(1-συν^2x)-4|ημx|+1\Leftrightarrow$

$f(x)=3ημ^2x-4|ημx|+1$

β) $f(x)=0\Leftrightarrow 3ημ^2x-4|ημx|+1=0\Leftrightarrow$

Θέτω $|ημx|=y,\ 0\le y\le 1$ και έχουμε

$$3y^2-4y+1=0\quad \Delta=4,\ y_{1,2}=\begin{cases}-\frac{1}{3}\\ 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$|ημx|=-\frac{1}{3}$ απορρίπτεται ή $|ημx|=1\Leftrightarrow$

$ημx=1$ ή $ημx=-1\Leftrightarrow$

$ημx=ημ\frac{\pi}{2}$ ή $ημx=-ημ\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$

$x=κ\pi+\frac{\pi}{2},\ κ\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 4.

Να λύσετε την εξίσωση
$$\mathbf{(συνx+ημx)(συνx-ημx)=5ημx+3}$$

Λύση:

$(συνx+ημx)(συνx-ημx)=5ημx+3\Leftrightarrow$

$συν^2x-ημ^2x=5ημx+3\Leftrightarrow$

$1-ημ^2x-ημ^2x-5ημx-3=0\Leftrightarrow$

$2ημ^2x+5ημx+2=0$

Θέτω $ημx=ω$ οπότε $2ω^2+5ω+2=0$

$$\Delta=9,\ ω_{1,2}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -2\end{cases}\ \text{και έχουμε}$$

$ημx=-\frac{1}{2}$ ή $ημx=-2$ απορρίπτεται $\Leftrightarrow$

$ημx=ημ\left(-\frac{5}{6}\right)\Leftrightarrow x=2κ\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $x=2κ\pi+\frac{7\pi}{6},\ κ\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 5.

Να δείξετε ότι
$$\mathbf{(εφx-ημx)^2+(συνx-1)^2=\left(\frac{1}{συνx}-1\right)^2}$$

Λύση: 1^{ος} τρόπος

$(εφx-ημx)^2+(συνx-1)^2=\left(\frac{1}{συνx}-1\right)^2\Leftrightarrow$

$εφ^2x-2εφxημx+ημ^2x+συν^2x-2συνx+1=$

$=\frac{1}{συν^2x}-\frac{2}{συνx}+1\Leftrightarrow\frac{ημ^2x}{συν^2x}-2\frac{ημ^2x}{συνx}+1-2συνx+1=$

$=\frac{1}{συν^2x}-\frac{2}{συνx}+1\Leftrightarrow ημ^2x-2ημ^2xσυνx+συν^2x-2συν^3x=$

$=1-2συνx\Leftrightarrow -2συνx(ημ^2x+συν^2x)=-2συνx\Leftrightarrow$

0=0 ισχύει.

2^{ος} τρόπος

$(εφx-ημx)^2+(συνx-1)^2=$

$\left(\frac{ημx}{συνx}-ημx\right)^2+(συνx-1)^2=$

$\left(\frac{ημx(1-συνx)}{συνx}\right)^2+(συνx-1)^2=$

$ημ^2x\frac{(1-συνx)^2}{συν^2x}+(1-συνx)^2=$

$(1-συνx)^2\frac{ημ^2x+συν^2x}{συν^2x}=\frac{(1-συνx)^2}{συν^2x}=$

$\left(\frac{1-συνx}{συνx}\right)^2=\left(\frac{1}{συνx}-1\right)^2$, (ο.ε.δ.)

Άσκηση 6.

Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(6\pi+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(6\pi-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu\left(13\pi+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(8\pi-\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)}$$

Λύση:

- $\sigma\upsilon\nu\left(6\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\varphi\left(6\pi-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(-\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=$
  $=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\theta$
- $\eta\mu\left(13\pi+\theta\right)=\eta\mu\left(12\pi+\pi+\theta\right)=$
  $=\eta\mu\left(\pi+\theta\right)=-\eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\left(8\pi-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=$
  $=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\theta$

Συνεπώς $A=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\left(-\varepsilon\varphi\theta\right)\left(-\eta\mu\theta\right)}{\left(-\eta\mu\theta\right)\sigma\upsilon\nu\theta\varepsilon\varphi\theta}\Leftrightarrow A=-1$

Άσκηση 7.

α) Αν για τη γωνία x ισχύει

$$3\sigma\upsilon\nu^2x-7\eta\mu x-5=0 \quad \text{και} \quad \pi<x<\frac{3\pi}{2}$$

να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$B=6\eta\mu\left(7\pi+x\right)-3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)$$

Λύση:

α) $3\sigma\upsilon\nu^2x-7\eta\mu x-5=0\Leftrightarrow$

$3\left(1-\eta\mu^2x\right)-7\eta\mu-5=0\Leftrightarrow$

$-3\eta\mu^2x-7\eta\mu x-2=0$

Θέτω $\omega=\eta\mu x$, με $|\omega|\le 1$

$3\omega^2+7\omega+2=0,\ \Delta=25\Leftrightarrow$

$$\omega_{1,2}=\begin{cases}-\frac{1}{3} & \text{δεκτή}\\ -2 & \text{απορρίπτεται}\end{cases}$$

Άρα $\eta\mu x=-\frac{1}{3}$.

$\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2x=1-\frac{1}{9}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{8}{9},\ \pi<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ενώ $\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{2}}{4},\sigma\varphi x=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Από τη δεδομένη αρχική σχέση έχουμε:

$$3\sigma\upsilon\nu^2x-7\eta\mu x-5=0\overset{\eta\mu x=-\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow}3\sigma\upsilon\nu^2x=5-\frac{7}{3}\Leftrightarrow$$

$$3\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{8}{9}\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- $B=6\eta\mu\left(7\pi+x\right)-3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)$
- $\eta\mu\left(7\pi+x\right)=\eta\mu\left(6\pi+\pi+x\right)=\eta\mu\left(\pi+x\right)=$
  $=-\eta\mu x=\frac{1}{3}$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x=-\frac{1}{3}$
- $\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)=-\varepsilon\varphi x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Άρα $B=6\frac{1}{3}-3\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\Leftrightarrow$

$B=2+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow B=3-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ασκήσεις για λύση:

1) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(-10\right)-\sqrt{3}\eta\mu\left(\pi-10\right)}{\eta\mu 340}$$

2) Να αποδείξετε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του x

$$\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2\left(120+x\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(120-x\right)$$

3) Αν $x+y=45$ να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\varepsilon\varphi x\right)\left(1+\varepsilon\varphi x\right)=2$$

4) Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=3\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)+4$$

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της στο διάστημα μιας περιόδου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=7\,f$

5) Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\eta\mu^2x+\left|2-2\sigma\upsilon\nu^2x\right|+3$$

α) Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

Τάξη: Β΄

Συντεταγμένες στο επίπεδο
εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

… για τα παιδιά που ονειρεύονται,
για τα παιδιά που προσπαθούν…

Η. Αυγέρης – Μ. Γεωργίου – Λ. Μοναστηρίδου – Χ. Τσιφάκης

Άσκηση 1η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-5,7)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$.

i) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=3\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$ καθώς και την γωνία που σχηματίζει αυτό με τον άξονα $x'x$.

ii) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(-16,23)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και στη συνέχεια να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{v}_1//\vec{\alpha}$ και $\vec{v}_2//\vec{\beta}$.

Λύση.

i) $\vec{u}=3\vec{\alpha}+6\vec{\beta}=3(-5,7)+6(2,-3)=(-3,3)$. Ο συντελεστής διεύθυνσής του είναι $\lambda_{\vec{u}}=\frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}=\frac{3}{-3}=-1$, άρα $\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=135^o$.

ii) Έστω ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in R$ τέτοιοι ώστε $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, οπότε $(-16,23)=\kappa(-5,7)+\lambda(2,-3)=$ $=(-5\kappa+2\lambda,7\kappa-3\lambda)$ δηλαδή καταλήγουμε στο σύστημα $\left.\begin{array}{l}-5\kappa+2\lambda=-16\\ 7\kappa-3\lambda=23\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\kappa=2\\ \lambda=-3\end{array}$.

Άρα $\vec{v}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Έστω $\vec{v}_1//\vec{\alpha}$ και $\vec{v}_2//\vec{\beta}$ οι δύο συνιστώσες, τότε έχουμε $\vec{v}_1=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{v}_2=\nu\vec{\beta}$ οπότε $\vec{v}=\mu\vec{\alpha}+\nu\vec{\beta}$ και λόγω μοναδικότητας του γραμμικού συνδυασμού προκύπτει ότι $\mu=2$ και $\nu=-3$. Άρα $\vec{v}_1=2\vec{\alpha}=(-10,14)$ και $\vec{v}_2=-3\vec{\beta}=(-6,9)$.

Άσκηση 2η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=6$, $|\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 8$.

Να αποδείξετε ότι: i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8$ ii) $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$

Λύση.

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=6+2=8$.

Άρα έχουμε: $\left.\begin{array}{l}|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq 8\\ |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 8\end{array}\right\}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8$.

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=8\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=64\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=64\Leftrightarrow 36+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4=64\Leftrightarrow$

$2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=24\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα και αφού $|\vec{\alpha}|=3|\vec{\beta}|$ έχουμε ότι $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$.

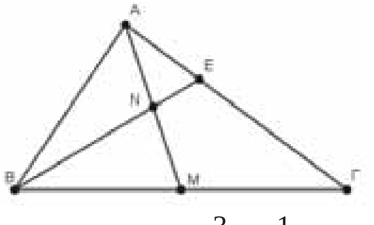
Άσκηση 3η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\gamma}$. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και έστω Ν το μέσον της. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\overrightarrow{\Gamma E}=2\overrightarrow{EA}$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BN}$ και $\overrightarrow{NE}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

ii) Να δείξετε ότι τα σημεία Β,Ν,Ε είναι συνευθειακά και ότι ΒΝ = 3ΝΕ.

Λύση.

i) Αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ έχουμε: $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}$. Όμοια το Ν είναι μέσο του ΑΜ, άρα $\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AM}}{2}=\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{4}$.



Έχουμε $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\vec{\beta}+\frac{1}{4}\vec{\gamma}$,

$\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{\gamma}-\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{4}=-\frac{1}{4}\vec{\beta}+\frac{1}{12}\vec{\gamma}$, γιατί

$\overrightarrow{\Gamma E}=2\overrightarrow{EA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{\gamma}$.

ii) $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\vec{\beta}+\frac{1}{4}\vec{\gamma}=3\left(-\frac{1}{4}\vec{\beta}+\frac{1}{12}\vec{\gamma}\right)=3\overrightarrow{NE}$.

Άρα τα σημεία Β, Ν, Ε είναι συνευθειακά και $|\overrightarrow{BN}|=3|\overrightarrow{NE}|$, άρα ΒΝ = 3ΝΕ.

Άσκηση 4η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}=\lambda$. i) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\gamma}$

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ συναρτήσει του λ.

Λύση.

i) Έχουμε ότι $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}=\lambda\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=2\lambda,|\vec{\beta}|=\lambda,|\vec{\gamma}|=3\lambda$.

$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$, άρα

$|2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=|-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}|=\lambda=4\lambda-3\lambda=\left||2\vec{\alpha}|-|\vec{\gamma}|\right|$, γιατί

$|2\vec{\alpha}|=2|\vec{\alpha}|=4\lambda$ και $|\vec{\gamma}|=3\lambda$, οπότε $(2\vec{\alpha})\nearrow\swarrow\vec{\gamma}$

άρα $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\gamma}$.

ii) $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}$. Άρα

$(\vec{\beta}+\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=-2\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=-2|\vec{\alpha}|^2=-8\lambda^2$

$(\vec{\beta}+\vec{\gamma})^2=(-2\vec{\alpha})^2\Leftrightarrow\vec{\beta}^2+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow$

$2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=4|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2-|\vec{\gamma}|^2=6\lambda^2\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=3\lambda^2$. Άρα

η παράσταση $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-5\lambda^2$.

Άσκηση 5η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{u}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ τότε:

i) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι μη μηδενικά.

ii) Εάν επιπλέον γνωρίζετε ότι $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=4$ να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Λύση.

i) Έστω ότι $\vec{u}=\vec{0}$ τότε $4\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}$ δηλαδή το $\vec{\beta}\nearrow\swarrow\vec{\alpha}$ οπότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi$, άτοπο. Άρα $\vec{u}\neq\vec{0}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\vec{v}\neq\vec{0}$.

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=4\cdot\frac{1}{2}=2$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(4\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})=8|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=-12$

.

$|\vec{u}|^2=(4\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=16|\vec{\alpha}|^2+8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=$

$16+16+16=48$. Άρα $|\vec{u}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Όμοια

$|\vec{v}|^2=(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=12$, άρα $|\vec{v}|=2\sqrt{3}$. Έχουμε

$\text{συν}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-12}{4\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

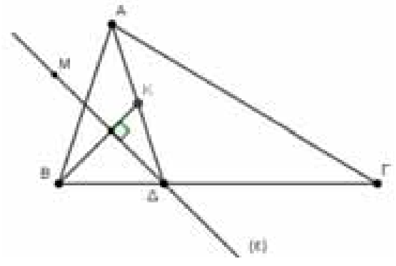
οπότε $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{2\pi}{3}$.

Άσκηση 6η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ ώστε $\vec{\text{ΒΔ}}=\frac{1}{3}\vec{\text{ΒΓ}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ του επιπέδου του τριγώνου, τα οποία ικανοποιούν την σχέση $\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΓ}}+3\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΑ}}=0$ κινούνται πάνω σε μία ευθεία.

Λύση.

$\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΓ}}+3\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΑ}}=0\Leftrightarrow\vec{\text{ΔΜ}}\cdot(\vec{\text{ΒΓ}}+3\vec{\text{ΒΑ}})=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\text{ΔΜ}}\cdot(3\vec{\text{ΒΔ}}+3\vec{\text{ΒΑ}})=0\Leftrightarrow 3\vec{\text{ΔΜ}}\cdot(\vec{\text{ΒΔ}}+\vec{\text{ΒΑ}})=0$



Εάν θεωρήσουμε Κ το μέσον της ΑΔ, τότε έχουμε $3\vec{\text{ΔΜ}}\cdot(\vec{\text{ΒΔ}}+\vec{\text{ΒΑ}})=0\Leftrightarrow 3\vec{\text{ΔΜ}}\cdot(2\vec{\text{ΒΚ}})=0\Leftrightarrow$

$6(\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΚ}})=0\Leftrightarrow\vec{\text{ΔΜ}}\cdot\vec{\text{ΒΚ}}=0\Leftrightarrow\vec{\text{ΔΜ}}\perp\vec{\text{ΒΚ}}$.

Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Μ διαγράφουν μία ευθεία κάθετη στην διάμεσο ΒΚ του τριγώνου ΑΒΔ που φέρνουμε από το σημείο Δ.

Άσκηση 7η. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Δίνεται επίσης το τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{\text{ΑΒ}}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\text{ΑΓ}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\text{ΒΓ}}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

ii) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\text{Β}}$ του τριγώνου.

iii) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

Λύση.

i) $\vec{\text{ΒΓ}}=\vec{\text{ΑΓ}}-\vec{\text{ΑΒ}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$

ii) Γνωρίζουμε ότι $\text{συν}\hat{\text{Β}}=\frac{\vec{\text{ΒΓ}}\cdot\vec{\text{ΒΑ}}}{|\vec{\text{ΒΓ}}|\cdot|\vec{\text{ΒΑ}}|}$.

$\vec{\text{ΒΓ}}\cdot\vec{\text{ΒΑ}}=(-\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})=$

$-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\alpha}^2+3\vec{\beta}^2-6\vec{\beta}\vec{\alpha}=2|\vec{\alpha}|^2+3|\vec{\beta}|^2=5$

γιατί $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

$|\vec{\text{ΒΓ}}|^2=|-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2=(-\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2=$

$\vec{\alpha}^2-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=1+9=10$, άρα $|\vec{\text{ΒΓ}}|=\sqrt{10}$ και

$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \left|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right|^2 = \left(\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}^2 = 5$,

οπότε $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{5}$. Επομένως: $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} =$

$= \dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}$.

iii) Αφού το Μ είναι το μέσο της ΒΓ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2} = \frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\alpha}+2\vec{\beta}}{2} = \frac{1}{2}\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right).$$

Άρα $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\dfrac{1}{2}\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right|^2 = \dfrac{1}{4}\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 =$

$\dfrac{1}{4}\left(9\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2\right) = \dfrac{1}{4}\cdot 10 = \dfrac{5}{2}$. Άρα $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Άσκηση 8η. Δίνονται τα σημεία $A\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$, $B(-2,2)$ και $M\left(\alpha,\dfrac{\alpha+6}{2}\right)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Μ είναι συνευθειακά για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Αν $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB}$, να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει $\left|\overrightarrow{OM}\right| < \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων.

Λύση.

i) Έχουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \left(-2+1, 2-\dfrac{5}{2}\right) = \left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ και

$\overrightarrow{BM} = \left(\alpha+2, \dfrac{\alpha+6}{2}-2\right) = (\alpha+2)\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Άρα $\overrightarrow{BM} = -(\alpha+2)\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}//\overrightarrow{AB}$ και αφού έχουν κοινό σημείο το Β έπεται ότι τα σημεία Α,Β,Μ είναι συνευθειακά.

ii) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BM} = -(\alpha+2)\overrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Leftrightarrow -(\alpha+2) = 3 \Leftrightarrow \alpha = -5$.

iii) Έστω ότι ισχύει

$\left|\overrightarrow{OM}\right| < \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \left(\dfrac{\alpha+6}{2}\right)^2} < \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \dfrac{(\alpha+6)^2}{4} < \dfrac{36}{5} \Leftrightarrow 25\alpha^2 + 60\alpha + 36 < 0 \Leftrightarrow$

$(5\alpha+6)^2 < 0$, άτοπο.

Άσκηση 9η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και την διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{\Delta B} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}^2}\cdot\vec{\alpha}$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta M}$

iii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{A}$

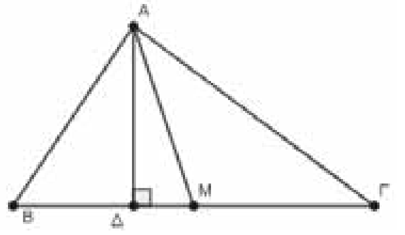
iv) $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ **v)** $\left|\beta^2 - \gamma^2\right| = 2\alpha\cdot M\Delta$

Λύση.

i) Ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Delta}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{A\Delta} = 0$ και αφού $\overrightarrow{\Delta B}//\vec{\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B} = \lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}\right) = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{A\Delta} + \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta B} =$

$= \vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\alpha}\right) = \lambda\vec{\alpha}^2 = \lambda\left|\vec{\alpha}\right|^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}$.



Άρα $\overrightarrow{\Delta B} = \lambda\cdot\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}^2}\cdot\vec{\alpha}$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta M}\right) = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{A\Delta} + \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta M} = \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta M}$.

iii) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$. Άρα

$\left|\vec{\alpha}\right|^2 = \vec{\alpha}^2 = \left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)^2 = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 - 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} =$

$\left|\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\gamma}\right|^2 - 2\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|\vec{\gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{A}$. Άρα

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{A}$ (νόμος συνημιτόνων)

iv) Ισχύει ότι: $\vec{\beta} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M\Gamma} = \vec{\mu}_\alpha + \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}$

και $\vec{\gamma} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{\mu}_\alpha - \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}$. Άρα

$\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\mu}_\alpha + \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}\right)^2 + \left(\vec{\mu}_\alpha - \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}\right)^2 = 2\vec{\mu}_\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}^2$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ (1ο Θεώρημα Διαμέσων)

v) $\vec{\beta}^2 - \vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\mu}_\alpha + \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}\right)^2 - \left(\vec{\mu}_\alpha - \dfrac{1}{2}\vec{\alpha}\right)^2 =$

$= 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\mu}_\alpha \overset{(ii)}{=} 2\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta M}$.

Άρα $\left|\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\gamma}\right|^2 = 2\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta M} = \pm 2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta M}\right|$ ΄και τελικά

$\left|\beta^2 - \gamma^2\right| = 2\alpha\cdot\Delta M$. (2ο Θεώρημα Διαμέσων)

Τάξη: Γ΄

Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια

Θανάσης Χριστόπουλος

Άσκηση 1η

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(e^x+1)-x$

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1–1

ii. Να βρείτε την μονοτονία της f

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iv. Να βρείτε την f^{-1}

Λύση: i. Η συνάρτηση f γράφεται

$$f(x)=\ln(e^x+1)-\ln e^x=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\ln\left(1+e^{-x_1}\right)=\ln\left(1+e^{-x_2}\right)\Rightarrow$$

$1+e^{-x_1}=1+e^{e^{-x_2}}\Rightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι συνάρτηση 1–1 και επομένως αντιστρέφεται.

ii. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Rightarrow 1+e^{-x_1}>1+e^{-x_2}$$

$$\Rightarrow\ln\left(1+e^{-x_1}\right)>\ln\left(1+e^{-x_2}\right)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)\overset{u=1+e^{-x}}{=}\lim_{u\to1}1nu=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)\overset{u=1+e^{-x}}{=}\lim_{u\to+\infty}1nu=+\infty$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0,+\infty)$

iv. Για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln(1+e^{-x})\Leftrightarrow 1+e^{-x}=e^y\Leftrightarrow$$

$$e^{-x}=e^y-1>0\Leftrightarrow -x=\ln(e^y-1)\Leftrightarrow x=-\ln(e^y-1).$$

Δηλαδή, $f^{-1}(y)=-\ln(e^y-1)$, $y\in(0,+\infty)$, οπότε $f^{-1}(x)=-\ln(e^x-1)$, $x\in(0,+\infty)$

Άσκηση 2η

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+f(x)+x=2022$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, είναι το $\mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

iv. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

v. Να βρείτε το $f(2022)$.

Λύση: i. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη ισχύει:

$$f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$2022-x_1=2022-x_2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι συνάρτηση 1–1 και επομένως αντιστρέφεται.

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x, x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνάρτηση 1-1 ως γνησίως αύξουσα, αφού (...)

Έστω ότι υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε $f(x)\neq\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε

$$g(f(x))\neq g(\kappa)\Rightarrow f^3(x)+f(x)\neq\kappa^3+\kappa\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$2022-x\neq\kappa^3+\kappa\Rightarrow x\neq 2022-\kappa^3-\kappa$, **άτοπο.**

Αφού $\kappa\in\mathbb{R}$, τότε $(2022-\kappa^3-\kappa)\in\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $x=2022-\kappa^3-\kappa$.

Επομένως $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

iii. Για $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και από την (1) έχουμε:

$$y^3+y+f^{-1}(y)=2022\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2022-y^3-y, y\in\mathbb{R}$$

Άρα $f^{-1}(x)=2022-x^3-x, x\in\mathbb{R}$

iv. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $x_1^3<x_2^3\Rightarrow -x_1^3>-x_2^3$ επίσης $-x_1>-x_2$, οπότε $-x_1^3-x_1>-x_2^3-x_2\Rightarrow$

$$2022-x_1^3-x_1>2022-x_2^3-x_2\Rightarrow f^{-1}(x_1)>f^{-1}(x_2)$$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(f(x_1))<f^{-1}(f(x_2))\overset{f^{-1}\downarrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Σημείωση: Μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και με απαγωγή σε άτοπο.

v. $f(2022)=\kappa\Leftrightarrow f^{-1}(\kappa)=2022$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2022-\kappa^3-\kappa=2022\Leftrightarrow\kappa^3+\kappa=0$$

$\Leftrightarrow\kappa(\kappa^2+1)=0\Leftrightarrow\kappa=0$. Οπότε $f(2022)=0$.

Άσκηση 3η

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [0,1] με $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{3})$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x+\frac{1}{3})-f(x), x\in[0,\frac{2}{3}]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\frac{2}{3}]$ ως διαφορά συνεχών, αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

$$\text{Για } x=0,\ g(0)=f(\tfrac{1}{3})-f(0)$$
$$\text{Για } x=\frac{1}{3},\ g(\tfrac{1}{3})=f(\tfrac{2}{3})-f(\tfrac{1}{3})$$
$$\text{Για } x=\frac{2}{3},\ g(\tfrac{2}{3})=f(1)-f(\tfrac{2}{3})$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$g(0)+g(\frac{1}{3})+g(\frac{2}{3})=0$. (1)

Έστω ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$, τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{2}{3}\right]$, θα διατηρεί πρόσημο σε αυτό. Δηλαδή, $g(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$, που είναι **άτοπο**, λόγω της (1). Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)$.

Άσκηση 4η

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x$, όπου α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα μικρότερη του $\sqrt[3]{\alpha+\beta}$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha\eta\mu x-\beta\sigma\upsilon\nu x, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\sqrt[3]{\alpha+\beta}\right]$, ως πράξεις συνεχών και $f(0)=-\beta<0$, ενώ

$f(\sqrt[3]{\alpha+\beta})=\alpha+\beta-\alpha\eta\mu(\sqrt[3]{\alpha+\beta})-\beta\sigma\upsilon\nu(\sqrt[3]{\alpha+\beta})=$

$\alpha[1-\eta\mu(\sqrt[3]{\alpha+\beta})]+\beta[1-\sigma\upsilon\nu(\sqrt[3]{\alpha+\beta})]>0$, οπότε

$f(0)\cdot f(\sqrt[3]{\alpha+\beta})<0$. Επομένως από το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\sqrt[3]{\alpha+\beta})$. Οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^3=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα μικρότερη του $\sqrt[3]{\alpha+\beta}$.

Σχόλιο: Είναι $1-\eta\mu\sqrt[3]{\alpha+\beta}\geq 0$ και $1-\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{\alpha+\beta}\geq 0$, αλλά δεν μπορούν ταυτόχρονα να είναι μηδέν, αφού δεν μπορούν ταυτόχρονα τα $\eta\mu\sqrt[3]{\alpha+\beta}$ και $\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{\alpha+\beta}$ να είναι ίσα με 1.

Άσκηση 5η **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$ και για την οποία ισχύει:**

$$\left|f(x)-\frac{\eta\mu 3x}{x}\right|\leq x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^* \quad (1).$$

Να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0=0$.

Λύση: Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ από την (1) έχουμε:

$-x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}+\frac{\eta\mu 3x}{x}\leq f(x)\leq x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}+\frac{\eta\mu 3x}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(-x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}+\frac{\eta\mu 3x}{x})=\lim\limits_{x\to 0}(x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}+\frac{\eta\mu 3x}{x})=0+3=3^*$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ θα είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$. (*)Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει: $|x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}|=|x^2||\eta\mu^2\frac{1}{x}|\leq|x^2|=x^2$. Άρα, $-x^2\leq x^2\eta\mu^2\frac{1}{x}\leq x^2$ και $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0=\lim\limits_{x\to 0}(x^2)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\eta\mu^2\frac{1}{x})=0$, επίσης

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\eta\mu 3x}{x})=\lim_{x\to 0}(3\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x})\overset{u=3x}{=}3\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$$

Άσκηση 6η

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)-\lambda f^2(x)+f(x)=x+\sigma\upsilon\nu(x+2)$ (1) για κάθε $x\in[0,1]$, με $|\lambda|<2$. Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Λύση: Για x=0 η ισότητα (1) γίνεται

$f^3(0)-\lambda f^2(0)+f(0)=\sigma\upsilon\nu 2\Leftrightarrow$

$f(0)[f^2(0)-\lambda f(0)+1]=\sigma\upsilon\nu 2$ (2). Είναι

$f^2(0)-\lambda f(0)+1>0$, ως τριώνυμο με α=1>0 και $\Delta=\lambda^2-4<0$, αφού $|\lambda|<2$, δηλαδή $\lambda^2<4$.

Επίσης $\frac{\pi}{2}<2<\pi$, οπότε συν2<0.

Άρα από την ισότητα (2) προκύπτει ότι $f(0)<0$.

Για x=1 η ισότητα (1) γίνεται

$f^3(1)-\lambda f^2(1)+f(1)=1+\sigma\upsilon\nu 3\Leftrightarrow$

$f(1)[f^2(1)-\lambda f(1)+1]=1+\sigma\upsilon\nu 3$ (3). Είναι

$f^2(1)-\lambda f(1)+1>0$, ως τριώνυμο με α=1>0 και Δ<0. Επίσης $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, οπότε $-1<\sigma\upsilon\nu 3<0$, δηλαδή 1+συν3>0.

Από την ισότητα (3) προκύπτει ότι $f(1)>0$. Δηλαδή, $f(0)\cdot f(1)<0$ και f συνεχής στο [0,1]. Άρα από το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Τάξη: Γ΄

Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια

Γιάννης Λουριδάς

Γενικό θέμα στο 1ο κεφάλαιο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ell n\left(\frac{2-x}{x}\right),\ x\in(0,2)$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1}.

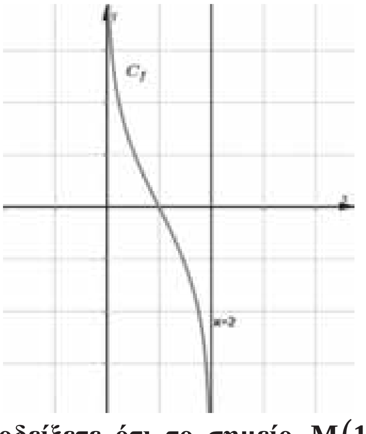
β. β_1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0, η οποία βρί-σκεται στο διάστημα $(0,1)$.

β_2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=2-x, x\in\mathbb{R}$ και $f_2(x)=xe^x, x\in\mathbb{R}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f^{-1}(x)-x\right)<1$

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ell n\left(f^{-1}(x)\right)\right)$

ε. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $|f|$ και f^{-1}.



στ. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(1,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f. Ποιο σημείο είναι κέντρο συμμετρίας της $C_{f^{-1}}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ζ. Αν $A(x,f(x)), x\in(0,1)$, τότε:

ζ_1. Να βρείτε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ΟΒΑΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Β, Γ οι προβολές του Α στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}E(x)$.

(Δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ell nx)=0$)

ζ_2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,x_0)$, όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (β_1), στο οποίο το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται.

(Όταν διδαχθεί η παράγωγος)

η. Αν $0<5\alpha<1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3f(x)=4f(2\alpha)-f(5\alpha)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha,2\alpha)$

θ. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $g:(0,2)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$g^2(x)=f^2(x) \text{ για κάθε } x\in(0,2)$$

ι. Αν $g(x)=-f(x), x\in(0,2)$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[\rho,x_0]$, όπου ρ η θέση μεγίστου στο ερώτημα (ζ_2) και x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (β_1), τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi)\cdot\left(g(x_1)+g(x_2)\right)=2g(x_1)\cdot g(x_2),$$

όπου $x_1,x_2\in[\rho,x_0]$.

Απαντήσεις

α. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,2)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \ell n\left(\frac{2-x_1}{x_1}\right)=\ell n\left(\frac{2-x_2}{x_2}\right)\overset{\ell n 1-1}{\Rightarrow}$$

$$\frac{2-x_1}{x_1}=\frac{2-x_2}{x_2}\Rightarrow(2-x_1)x_2=x_1(2-x_2)\Rightarrow$$

$$2x_2-x_1x_2=2x_1-x_1x_2\Rightarrow 2x_2=2x_1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα, η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Για $x\in(0,2)$ έχουμε :

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ell n\left(\frac{2-x}{x}\right)\Leftrightarrow e^y=\frac{2-x}{x}\Leftrightarrow$$

$$xe^y=2-x\Leftrightarrow\left(e^y+1\right)x=2\Leftrightarrow x=\frac{2}{e^y+1},\ y\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 < \frac{2}{e^y+1} < 2$, δηλαδή $\frac{2}{e^y+1} \in A_f$. Οπότε $f(A) = \mathbb{R}$ και

$f^{-1}(y) = \frac{2}{e^y+1}$, $y \in \mathbb{R}$. Άρα $f^{-1}(x) = \frac{2}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. β₁. Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^{-1}(x) - x, x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, $h(x) = \frac{2}{e^x+1} - x, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e^{x_1}+1} > \frac{1}{e^{x_2}+1} \Rightarrow \frac{2}{e^{x_1}+1} > \frac{2}{e^{x_2}+1} \text{ και } -x_1 > -x_2.$$

Άρα, $\frac{2}{e^{x_1}+1} - x_1 > \frac{2}{e^{x_2}+1} - x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$

Σημείωση: Στο κεφάλαιο των παραγώγων τη μονοτονία μιας συνάρτησης θα την βρίσκουμε από το πρόσημο της παραγώγου της.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \ldots = -\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1] \subset \mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $h(0) \cdot h(1) < 0$,

αφού $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = \frac{2}{e+1} - 1 < 0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$, οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωση $f^{-1}(x) = x$, έχουν μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$, η οποία είναι και μοναδική στο $\mathbb{R}$, διότι η h είναι συνάρτηση 1-1 στο $\mathbb{R}$ ως γνησίως φθίνουσα.

Άρα, η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

Σημείωση: Από την μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει ότι η $C_{f^{-1}}$ και η ευθεία $y = x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β₂. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$, δηλαδή η εξίσωση $2 - x = xe^x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Για $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Για $x \in (0,2)$ έχουμε :

$$2 - x = xe^x \Leftrightarrow 0 < \frac{2-x}{x} = e^x \Leftrightarrow \ell n\left(\frac{2-x}{x}\right) = \ell ne^x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \overset{(\beta_1)}{\Leftrightarrow} x = x_0,$$

η οποία είναι δεκτή.

Δηλαδή, η εξίσωση $2 - x = xe^x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x = x_0$.

Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 και f_2 έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $K(x_0, 2 - x_0)$, όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (β₁).

γ. Η ανίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x) - x) < 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f^{-1}(f^{-1}(x) - x) < 1 \Leftrightarrow f^{-1}(f^{-1}(x) - x) < f^{-1}(0)$$

$$\overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) - x > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \overset{(\beta_1)}{=} h(x_0) \underset{(\beta_1)}{\overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow}} x < x_0$$

όπου $h(x) = f^{-1}(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα από το ερώτημα (β₁).

Άρα, $x \in (-\infty, x_0)$.

δ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = \frac{2}{0+1} = 2$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1) = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \ell n\left(f^{-1}(x)\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \ell n\frac{2}{e^x+1}\right) \overset{\text{ΜΟΡΦΗ } (+\infty)+(-\infty)}{=}$$

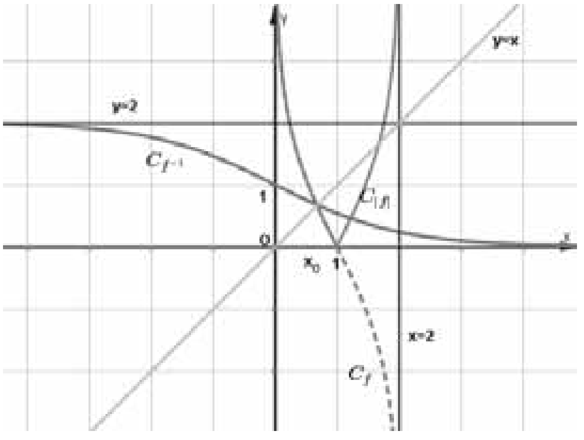
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ell ne^x + \ell n\frac{2}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ell n\frac{2e^x}{e^x+1} =$$

$\lim\limits_{u\to2} \ell nu = \ell n2$, όπου $u = \frac{2e^x}{e^x+1}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} \overset{:e^x}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ στο διάστημα $(0,1]$ συμπίπτει με την C_f, αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0,1]$, ενώ στο διάστημα

$(1,2)$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα x΄x, αφού $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$, τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,1)$ και την ευθεία $y=x$ στο σημείο (x_0,x_0), λόγω του ερωτήματος (β1).

Σημείωση: Η C_f έχει δύο **κατακόρυφες ασύμπτωτες**, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x=2$. Η $C_{f^{-1}}$ έχει δύο **οριζόντιες ασύμπτωτες**, τον άξονα x΄x και την ευθεία $y=2$, οι οποίες είναι οι συμμετρικές των ασυμπτώτων της C_f ως προς την ευθεία $y=x$.

στ. Για κάθε $x\in[0,1)$ ισχύει ότι τα $1-x, 1+x$ ανήκουν στο $A_f=(0,2)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1-x)+f(1+x)=0$ για κάθε $x\in[0,1)$.

Για κάθε $x\in[0,1)$ έχουμε:

$$f(1-x)+f(1+x)=\ell n\left(\frac{2-(1-x)}{1-x}\right)+\ell n\left(\frac{2-(1+x)}{1+x}\right)=$$

$$\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right)=\ell n1=0$$

Άρα, το σημείο $M(1,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f.

Σημείωση: Για τη συμμετρία της C_f ως προς το σημείο $M(1,0)$, θα αρκούσε να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(x)+f(2-x)=0$ για κάθε $x\in(0,2)$

Το σημείο $N(0,1)$, που είναι το συμμετρικό του $M(1,0)$ ως προς την ευθεία $y=x$, είναι κέντρο συμμετρίας της $C_{f^{-1}}$, αφού η $C_{f^{-1}}$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$.

Σημείωση: Για τη συμμετρία της $C_{f^{-1}}$, ως προς το σημείο $N(0,1)$, θα αρκούσε να αποδείξουμε ότι ισχύει $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ζ. Αν $A(x,f(x))$, $x\in(0,1)$, τότε:

ζ1. $B(x,0)$, $\Gamma(0,f(x))$ με $x\in(0,1)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΒΑΓ είναι

$$E(x)=(OB)\cdot(O\Gamma)=|x||f(x)|=xf(x)$$

$$=x\ell n\left(\frac{2-x}{x}\right), x\in(0,1),$$

αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

$$\lim_{x\to0^+}E(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x\ell n\left(\frac{2-x}{x}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ell n(2-x)-x\ell nx\right)=0,$$

διότι $\lim_{x\to0^+}\left(x\ell n(2-x)\right)=0\cdot\ell n2=0$, και

$\lim_{x\to0^+}(x\ell nx)=0$, από υπόθεση.

Σημείωση: Εύρεση του ορίου $\lim_{x\to0^+}(x\ell nx)$ με τη βοήθεια του κανόνα De L΄ Hospital

(2ο κεφάλαιο)

$$\lim_{x\to0^+}(x\ell nx)\overset{\text{ΜΟΡΦΗ } 0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\right)\underset{\text{DL΄H}}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ }\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

ζ2. (Όταν διδαχθεί η παράγωγος)

Υπόδειξη: Είναι:

$$E'(x)=\ldots=\ell n\left(\frac{2-x}{x}\right)-\frac{2}{2-x},\ x\in(0,1) \text{ και}$$

$$E''(x)=\ldots=-\frac{4}{x(2-x)^2},\ x\in(0,1).$$

Η E' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, αφού $E''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε

$E'(\Delta)=(E'(x_0),+\infty)$, όπου $\Delta=(0,x_0)\subset(0,1)$,

με $E'(x_0)=\ldots\overset{(\beta_1)}{=}-\dfrac{x_0^{\,2}-2x_0+2}{2-x_0}<0$

Άρα η E' έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (0, x_0) \subset (0,1)$. Είναι $E'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\rho)$, $E'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho, x_0)$ και $E(x)$ συνεχής στο ρ, οπότε η $E(x)$ για $x = \rho$ παρουσιάζει μέγιστο.

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, x_0)$, όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (β_1), στο οποίο το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται.

η. 1ος τρόπος: (θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, 2\alpha] \subset (0,2)$, αφού $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$,

οπότε $f(\alpha) > f(2\alpha)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$f(2\alpha) < \dfrac{4f(2\alpha) - f(5\alpha)}{3} < f(\alpha)$. Έχουμε:

$$f(2\alpha) < \frac{4f(2\alpha) - f(5\alpha)}{3} \Leftrightarrow 3f(2\alpha) < 4f(2\alpha) - f(5\alpha)$$

$$\Leftrightarrow f(5\alpha) < f(2\alpha) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 5\alpha > 2\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$$, που ισχύει.

$$\frac{4f(2\alpha) - f(5\alpha)}{3} < f(\alpha) \Leftrightarrow 4f(2\alpha) - f(5\alpha) < 3f(\alpha)$$

$\Leftrightarrow 3f(\alpha) + f(5\alpha) > 4f(2\alpha)$, η οποία αληθεύει για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$ (ανισότητα Jensen).

Στο 2ο κεφάλαιο μπορούμε να την αποδείξουμε με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής. Τώρα θα την αποδείξουμε αλγεβρικά.

Για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$ έχουμε:

$$3f(\alpha) + f(5\alpha) > 4f(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3\ell n\frac{2-\alpha}{\alpha} + \ell n\frac{2-5\alpha}{5\alpha} > 4\ell n\frac{2-2\alpha}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \ell n\left(\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)^3 \cdot \frac{2-5\alpha}{5\alpha}\right) > \ell n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)^3 \cdot \frac{2-5\alpha}{5\alpha} > \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow (2-\alpha)^3 \cdot (2-5\alpha) > 5(1-\alpha)^4 \Leftrightarrow \ldots$$

$\Leftrightarrow -12\alpha^3 + 42\alpha^2 - 44\alpha + 11 > 0$ που ισχύει, διότι

$$0 < \alpha < \frac{1}{5} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow 2{,}1 < -12\alpha^3 + 42\alpha^2 - 44\alpha + 11 < 12{,}68$$

Άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$, το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η f είναι 1-1, ως γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, 2\alpha) \subset (0,2)$, τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = \frac{4f(2\alpha) - f(5\alpha)}{3}.$$

Επομένως, η εξίσωση $3f(x) = 4f(2\alpha) - f(5\alpha)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$.

2ος τρόπος: (Υπόδειξη)

Με θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 3f(x) - 4f(2\alpha) + f(5\alpha)$$

στο κλειστό διάστημα $[\alpha, 2\alpha] \subset (0,2)$.

Σημείωση: Αλγεβρική προσέγγιση της εξίσωσης

$$3f(x) = 4f(2\alpha) - f(5\alpha) \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{5(1-\alpha)^4}{(2-5\alpha)\alpha^3}}}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η λύση αυτή ανήκει στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$

θ. Η συνάρτηση $g: (0,2) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$g^2(x) = f^2(x) \text{ για κάθε } x \in (0,2) \qquad (1)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $(0,2)$ και έχει μοναδική ρίζα σε αυτό το 1. Οπότε η συνάρτηση g διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ έχουμε :

$$g^2(x) = f^2(x) \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)} = \sqrt{f^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow |g(x)| = |f(x)| \qquad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,2)$, από την (2) έχουμε:

$g(x) = |f(x)|$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,2)$ και $g(1) = f(1) = 0$, οπότε

$g(x) = |f(x)|$ για κάθε $x \in (0,2)$.

Δηλαδή, $g(x)=\begin{cases}\ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right), x\in(0,1]\\ -\ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right), x\in(1,2)\end{cases}$

- Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$, από την (2) έχουμε:

$g(x)=-|f(x)|$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$ και $g(1)=f(1)=0$, οπότε

$g(x)=-|f(x)|$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Δηλαδή, $g(x)=\begin{cases}-\ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right), x\in(0,1]\\ \ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right), x\in(1,2)\end{cases}$

- Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(1,2)$, από την (2) έχουμε:

  $g(x)=\begin{cases}-|f(x)|, x\in(0,1)\\ |f(x)|, x\in(1,2)\end{cases}$ και $g(1)=f(1)=0$,

  οπότε $g(x)=\begin{cases}-|f(x)|, x\in(0,1]\\ |f(x)|, x\in(1,2)\end{cases}$. Δηλαδή,

  $g(x)=-f(x)=-\ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,2)$.

- Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$, από την (2) έχουμε:

  $g(x)=\begin{cases}|f(x)|, x\in(0,1)\\ -|f(x)|, x\in(1,2)\end{cases}$ και $g(1)=f(1)=0$,

  οπότε $g(x)=\begin{cases}|f(x)|, x\in(0,1]\\ -|f(x)|, x\in(1,2)\end{cases}$. Δηλαδή,

  $g(x)=f(x)=\ell n\left(\dfrac{2-x}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,2)$.

  Επομένως, υπάρχουν τέσσερις συνεχείς συναρτήσεις $g:(0,2)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

  $$g^2(x)=f^2(x) \text{ για κάθε } x\in(0,2).$$

ι. $g(x)=-f(x), x\in(0,2)$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\Delta=[\rho,x_0]\subset(0,2)$ οπότε $g(\Delta)=[g(\rho),g(x_0)]$,

όπου $g(x_0)<0$, αφού $x_0\in(0,1)$ και $g(1)=-f(1)=0$.

Για $x_1,x_2\in\Delta=[\rho,x_0]$ έχουμε:

$$g(\xi)\cdot(g(x_1)+g(x_2))=2g(x_1)\cdot g(x_2)\Leftrightarrow$$

$$g(\xi)=\frac{2g(x_1)\cdot g(x_2)}{g(x_1)+g(x_2)}\Leftrightarrow$$

$$g(\xi)=\frac{2}{\dfrac{1}{g(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_2)}} \quad \text{(αρμονικός μέσος).}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{2}{\dfrac{1}{g(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_2)}}\in g(\Delta)$$

Είναι $x_1\in\Delta=[\rho,x_0]$, οπότε

$$g(\rho)\le g(x_1)\le g(x_0)<0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{g(x_0)}\le\frac{1}{g(x_1)}\le\frac{1}{g(\rho)}<0$$

Είναι $x_2\in\Delta=[\rho,x_0]$, οπότε

$$g(\rho)\le g(x_2)\le g(x_0)<0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{g(x_0)}\le\frac{1}{g(x_2)}\le\frac{1}{g(\rho)}<0$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{2}{g(x_0)}\le\frac{1}{g(x_1)}+\frac{1}{g(x_2)}\le\frac{2}{g(\rho)}<0$$

$$\Rightarrow g(\rho)\le\frac{2}{\dfrac{1}{g(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_2)}}\le g(x_0).$$

Δηλαδή, $\dfrac{2}{\dfrac{1}{g(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_2)}}\in g(\Delta)$.

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\Delta=[\rho,x_0]$, το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η g είναι συνάρτηση 1-1, ως γνησίως αύξουσα σε αυτό, τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi)=\frac{2}{\dfrac{1}{g(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_2)}}$$

$$\Leftrightarrow g(\xi)\cdot(g(x_1)+g(x_2))=2g(x_1)\cdot g(x_2)$$

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 360 (ΤΕΥΧΟΣ 117)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+3\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)$$

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ Τσόπελας Γιάννης – Αμαλιάδα και Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{\beta\gamma}{\alpha}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{\gamma\alpha}{\beta}(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

Για την απόδειξη αυτής, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}(\alpha+\beta)+\frac{\beta\gamma}{\alpha}(\beta+\gamma)+\frac{\gamma\alpha}{\beta}(\alpha+\gamma)+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geq$$
$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+4\alpha\beta+4\beta\gamma+4\gamma\alpha$$

Για την απόδειξή της, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}(\alpha+\beta)+\frac{\beta\gamma}{\alpha}(\beta+\gamma)+\frac{\gamma\alpha}{\beta}(\alpha+\gamma)\geq 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2,$$

ή, αρκεί

$$\alpha^2\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\beta^2\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\gamma^2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\geq 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2$$

η οποία ισχύει, αφού απορρέει από την προφανή

$$\alpha^2\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}-2\right)+\beta^2\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}-2\right)+\gamma^2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\geq 0$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι: Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο, Ντόρβας Νίκος – Αθήνα, Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη.

ΑΣΚΗΣΗ 361 (ΤΕΥΧΟΣ 117)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\leq\sqrt{3}\frac{R}{2\rho}$$

όπου R και ρ οι αντίστοιχες ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή

ΛΥΣΗ (Ντόρβας Νίκος - Αθήνα)

Από την γνωστή σχέση

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\rho}{\tau-\alpha}$$

και τις κυκλικές της, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\rho}{\tau-\alpha}+\frac{\rho}{\tau-\beta}+\frac{\rho}{\tau-\gamma}$$

$$=\frac{\rho}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}[(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)+(\tau-\alpha)(\tau-\beta)]$$

$$\leq\frac{\rho}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\frac{1}{3}[(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\tau\rho^2}[(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)+(\tau-\gamma)]^2$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\tau\rho}[3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)]^2=\frac{1}{3\rho}\tau\leq\frac{1}{3\rho}\frac{3\sqrt{3}\rho}{2}=\sqrt{3}\frac{R}{2\rho}$$

όπου στο τελικό στάδιο της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\tau\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (Mitrinovic)

Επισήμανση

Ο κ. Λαγογιάννης που πρότεινε το πρόβλημα επισημαίνει ότι ουσιαστικά αποτελεί βελτίωση της ανισότητας που βρίσκεται στο δεξιό μέλος της

$$\sqrt{3}\leq\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\leq\sqrt{3}\left(\frac{R}{2\rho}\right)^2$$

που προτάθηκε στο τεύχος 106.

Σημείωμα σύνταξης

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν Μ είναι τυχαίο σημείο στο επίπεδο ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει η γνωστή σχέση Leibnitz:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2=3MG^2+\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

Επιπλέον, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{4}{3}\left(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2\right)$ και λόγω της γνωστής σχέσης που συνδέει την απόσταση του G από τις κορυφές του τριγώνου, αν θεωρήσουμε ότι το Μ ταυτίζεται με το περίκεντρο Ο, παίρνουμε:

$$R^2+R^2+R^2=GA^2+GB^2+G\Gamma^2+3OG^2$$
$$\geq\frac{4}{9}\left(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2\right)$$

οπότε $\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2\leq\frac{27}{4}R^2$, (1)

και: $4\left(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2\right)=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$$\geq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

και λόγω της (1) καταλήγουμε στην

$$\alpha+\beta+\gamma\le 3\sqrt{3}R$$

που γράφεται $\tau\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$ και είναι η ανισότητα Mitrinovic.

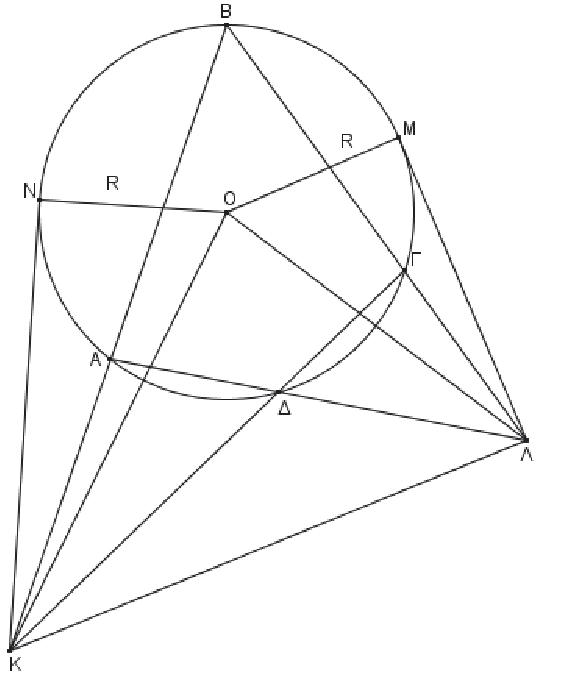
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι: Αποστολόπουλος Γεώργιος - Μεσολόγγι, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο, Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα, Ντόρβας Νίκος – Αθήνα, Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα, Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Τσόπελας Γιάννης - Αμαλιάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 362 (ΤΕΥΧΟΣ 118)

Τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Οι προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΓΔ και ΒΓ, ΑΔ τέμνονται στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}R^2\cdot \varepsilon\varphi K\hat{O}\Lambda$$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι



ΛΥΣΗ (Καρτσακλής Αγρίνιο)

Θεωρούμε τις εφαπτόμενες ΚΝ και ΛΜ , οπότε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΝΟ και ΛΜΟ έχουμε: $KN^2=KO^2-ON^2$ και $\Lambda M^2=\Lambda O^2-OM^2$ οπότε

$$KO^2-NO^2+\Lambda O^2-MO^2=K\Lambda^2\Rightarrow K\Lambda^2=KO^2+\Lambda O^2-2NO^2$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΚΟΛ έχουμε: $K\Lambda^2=KO^2+\Lambda O^2-2\cdot KO\cdot \Lambda O\sigma\upsilon\nu K\hat{O}\Lambda$, (1)

Επίσης $(KO\Lambda)=\dfrac{1}{2}KO\cdot O\Lambda\cdot\eta\mu K\hat{O}\Lambda$

Όμως,

$K\Lambda^2=KO^2+\Lambda O^2-2\cdot KO\cdot\Lambda O=KO^2+\Lambda O^2-2\cdot R^2$, (2)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$2KO\cdot\Lambda O\sigma\upsilon\nu K\hat{O}\Lambda=2R^2\Rightarrow KO\cdot\Lambda O\sigma\upsilon\nu K\hat{O}\Lambda=R^2$$

$$\Rightarrow KO\cdot\Lambda O=\frac{R^2}{\sigma\upsilon\nu K\hat{O}\Lambda}$$

Επομένως,

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\left(R^2\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu K\hat{O}\Lambda}\right)\cdot\eta\mu K\hat{O}\Lambda=\frac{1}{2}R^2\cdot\varepsilon\varphi K\hat{O}\Lambda$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος.

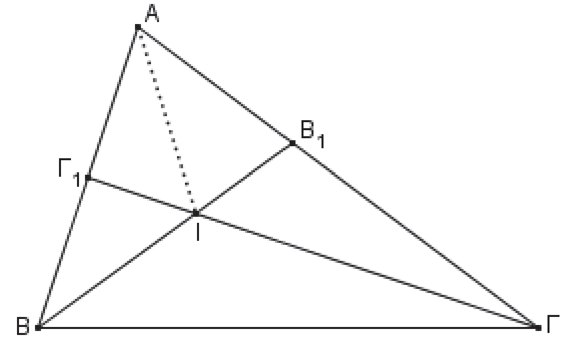
ΑΣΚΗΣΗ 363 (ΤΕΥΧΟΣ 118)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις διχοτόμους του BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ που τέμνονται στο Ι. Να αποδείξετε ότι

$$B_1I\cdot\Gamma_1I<\frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4}<BI\cdot\Gamma I$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι)



Αν BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ γνωστό ότι

$$AB_1=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\ \text{και}\ A\Gamma_1=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Από το θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ABB_1 έχουμε:

$$\frac{B_1I}{IB}=\frac{AB_1}{AB}\Rightarrow\frac{B_1I}{IB}=\frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}}{\gamma}\Rightarrow\frac{B_1I}{IB}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\Rightarrow\frac{IB}{B_1I}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

$$\Rightarrow\frac{IB+B_1I}{BI}=\frac{\alpha+\gamma+\beta}{\beta}\Rightarrow\frac{BB_1}{BI}=\frac{\alpha+\gamma+\beta}{\beta}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1I}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$$

οπότε $$\frac{BB_1\cdot ΓΓ_1}{B_1I\cdot Γ_1I}=\frac{(α+β+γ)^2}{βγ}$$

Από την προφανή ανισότητα
$$α^2+2α(β+γ)+(β-γ)^2\ge 0$$
παίρνουμε $α^2+2α(β+γ)+(β-γ)^2+4βγ\ge 4βγ$

οπότε $α^2+β^2+γ^2+2αβ+2βγ+2γα>4βγ$.

Άρα, $(α+β+γ)^2>4βγ\Rightarrow \frac{(α+β+γ)^2}{βγ}>4$

και τελικά $\frac{BB_1\cdot ΓΓ_1}{B_1I\cdot Γ_1I}>4$, (1)

Επίσης, έχουμε:
$$\frac{B_1I}{IB}=\frac{β}{α+γ}\Rightarrow\frac{B_1I+IB}{IB}=\frac{α+β+γ}{α+γ}\Rightarrow\frac{BB_1}{IB}=\frac{α+β+γ}{α+γ}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι: $\frac{ΓΓ_1}{ΓI}=\frac{α+β+γ}{α+β}$

οπότε: $\frac{BB_1\cdot ΓΓ_1}{BI\cdot ΓI}=\frac{(α+β+γ)^2}{(α+β)(α+γ)}$

Θα αποδείξουμε ότι: $\frac{(α+β+γ)^2}{(α+β)(α+γ)}<4$.

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο τις γνωστές ανισότητες $|β-γ|<α, |γ-α|<β, |α-β|<γ$

και προσθέσουμε τα εξαγόμενα, παίρνουμε:
$$α^2+β^2+γ^2<2(αβ+βγ+γα)$$
$$\Rightarrow α^2+β^2+γ^2+2(αβ+βγ+γα)<4(αβ+βγ+γα)$$
$$\Rightarrow (α+β+γ)^2<4(αβ+βγ+γα)<4(α+β)(α+γ)$$

αφού $α^2>0$. Άρα, $\frac{BB_1\cdot ΓΓ_1}{BI\cdot ΓI}<4$, (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι
$$B_1I\cdot Γ_1I<\frac{BB_1\cdot ΓΓ_1}{4}<BI\cdot ΓI$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι: Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα Τσόπελας Γιάννης - Αμαλιάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 364 (ΤΕΥΧΟΣ 118)

Έστω α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε να ισχύει $αδ-βγ=1$. Να αποδείξετε ότι:
$$α^2+β^2+γ^2+δ^2+αγ+βδ\ge\sqrt{3}$$

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

ΛΥΣΗ Κυριατζής Χρήστος - Αγ. Βαρβάρα

Από την ταυτότητα του Lagrange έχουμε:
$$(αδ-βγ)^2+(αγ+βδ)^2=(α^2+β^2)(γ^2+δ^2)$$
$$\Rightarrow (αγ+βδ)^2+1=(α^2+β^2)(γ^2+δ^2)$$

Αν εφαρμόσουμε στο άθροισμα τετραγώνων που υπάρχει στο πρώτο μέλος της αποδεικτέας την ανισότητα αριθμητικού- γεωμετρικού μέσου, έχουμε:
$$α^2+β^2+γ^2+δ^2+αγ+βδ\ge 2\sqrt{(α^2+β^2)(γ^2+δ^2)}+αγ+βδ$$

Αν θέσουμε $αγ+βδ=κ$

τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$2\sqrt{1+κ^2}+κ\ge\sqrt{3}$$

και επειδή τα μέλη της είναι θετικά, αρκεί
$$\left(2\sqrt{1+κ^2}+κ\right)^2\ge\left(\sqrt{3}\right)^2$$

ή αρκεί , $4κ^2+κ^2+1+4κ\sqrt{1+κ^2}+\ge 0$ που ισχύει αφού απορρέει από την προφανή
$$\left(2κ+\sqrt{κ^2+1}\right)^2\ge 0$$

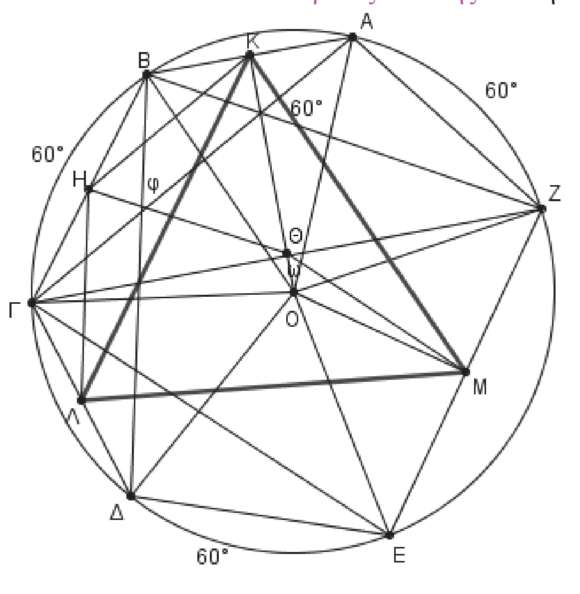
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι: Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο, Τσόπελας Γιάννης - Αμαλιάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 365 (ΤΕΥΧΟΣ 118)

Θεωρούμε κύκλο και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάνω σ' αυτόν, ώστε $\widehat{ΒΓ}=\widehat{ΔΕ}=\widehat{ΖΑ}=60^o$

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των χορδών ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Λουριδάς Γιάννης – Αθήνα



ΛΥΣΗ Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο

Έστω Η το μέσο της χορδής ΒΓ. Από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΖ, αν Θ είναι το σημείο τομής της ΟΚ με την ΓΖ, η ΟΘ είναι η μεσοκάθετη στα τμήματα ΑΒ, ΖΓ, οπότε το Θ είναι το μέσο του ΓΖ.

Επίσης ισχύουν: $ΗΚ || ΓΑ$ και $ΗΚ = \frac{ΓΑ}{2}$, (1)

και $ΗΘ || ΒΖ$ οπότε $ΗΘ = \frac{ΒΖ}{2}$, (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $ΗΚ = ΗΘ$. Επιπλέον, $ΚΗΘ = 60^{\circ}$, οπότε το τρίγωνο ΚΗΘ είναι ισόπλευρο, άρα $ΘΚ = ΗΚ$ (3)

Ακόμα $ΜΘ || ΕΓ$, $ΜΘ = \frac{ΕΖ}{2}$ και $ΛΗ || ΔΒ$, $ΛΗ = \frac{ΔΒ}{2}$

και εφόσον $ΕΓ = ΔΒ$ (από το ισοσκελές τραπέζιο ΒΓΔΕ) έχουμε: $ΜΘ = ΛΗ$, (4)

Οι γωνίες $Β\hat{Γ}Α, Γ\hat{Β}Δ, Ζ\hat{Γ}Ε$ αντιστοιχούν σε τόξα που έχουν άθροισμα 180° οπότε το άθροισμά τους είναι ίσο με 90°. Όμως είναι:

$$Β\hat{Γ}Α + Γ\hat{Β}Δ = φ \quad Ζ\hat{Γ}Ε = Ζ\hat{Θ}Μ = 90^{\circ} - ω$$

οπότε: $φ + 90^{\circ} - ω = 90^{\circ} \Rightarrow φ = ω$, (5)

Από τις (3), (4), (5) συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΜΘΚ και ΛΗΚ είναι ίσα, οπότε

$$ΚΜ = ΚΛ \text{ και } Μ\hat{Κ}Θ = Λ\hat{Κ}Η, (6).$$

Επίσης, από την (3) έπεται ότι $Η\hat{Κ}Θ = 60^{\circ}$, άρα

$$Λ\hat{Κ}Η + Λ\hat{Κ}Θ = Μ\hat{Κ}Θ + Λ\hat{Κ}Θ = Λ\hat{Κ}Μ = 60^{\circ}.$$

Έχουμε λοιπόν $ΚΜ = ΚΛ$ και $Λ\hat{Κ}Μ = 60^{\circ}$ οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Εκτός από την παραπάνω λύση ο συνάδελφος μας έστειλε και 4 ακόμα λύσεις του ίδιου προβλήματος.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο και Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα.

Σημείωμα σύνταξης

Παρακάτω παρουσιάζουμε μια ακόμα προσέγγιση του παραπάνω κλασικού προβλήματος, βασισμένη σε ένα από τα συμπεράσματα του Θ. Steiner.

Το Θεώρημα Steiner

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του, τα ισόπλευρα τρίγωνα $ΒΓΑ_1$, $ΓΑΒ_1$ και $ΑΒΓ_1$ Τότε:

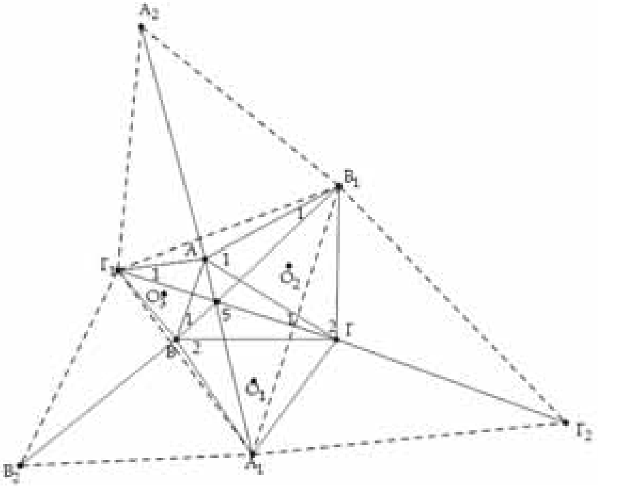
i. Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$ και $ΓΓ_1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο S (**σημείο του Steiner**).

ii. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των ισοπλεύρων τριγώνων διέρχονται από το S.

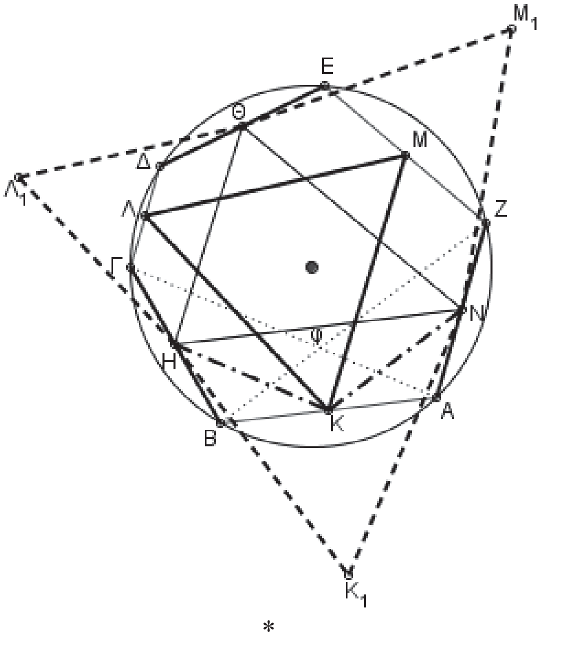
iii. $SA + SB + SΓ = ΑΑ_1 = ΒΒ_1 = ΓΓ_1$

iv. Αν η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 120° τότε το σημείο S του Steiner είναι εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Με την προϋπόθεση αυτή το S βλέπει και τις τρεις πλευρές του τριγώνου με γωνία 120°.

v. Τα κέντρα O_1, O_2, O_3 των ισοπλεύρων τριγώνων είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.



Αν κατασκευάσουμε προς το εξωτερικό μέρος του τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ τα ισόπλευρα τρίγωνα $Α_2Β_1Γ_1$, $Β_2Α_1Γ_1$ και $Γ_2Α_1Β_1$, τότε τα μέσα των τμημάτων $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$ είναι οι κορυφές Α, Β, Γ του αρχικού τριγώνου.



*

Μια λύση βασισμένη στην πρόταση (v) είναι η εξής:

ΛΥΣΗ

Έστω Θ, Η, Ν τα μέσα των ίσων χορδών ΒΓ, ΔΕ, ΖΑ. Στο εξωτερικό του τριγώνου ΘΗΝ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα

$$HK_1N,\ NM_1\Theta,\ \Theta\Lambda_1H$$

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι τα κέντρα αυτών των ισοπλεύρων τριγώνων.

Οι χορδές ΒΖ και ΑΓ είναι ίσες διότι αντιστοιχούν σε ίσα τόξα του κύκλου, οπότε

$$\frac{A\Gamma}{2}=\frac{BZ}{2}\Rightarrow KH=KN$$

Επιπλέον, η γωνία φ των χορδών ΑΓ και ΒΖ είναι

$$\varphi=\frac{360^{\circ}-120^{\circ}}{2}=120^{\circ}$$

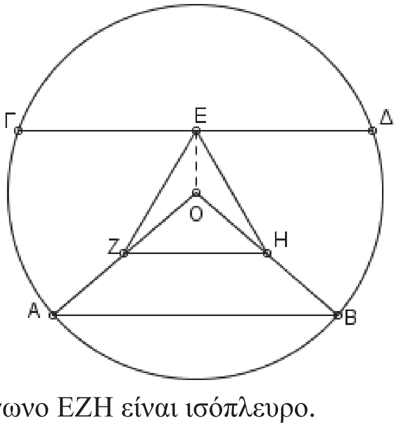
Επομένως, το τρίγωνο ΚΗΝ είναι ισοσκελές με καθεμιά από τις γωνίες της βάσης του να είναι ίση με 30°. Άρα, οι ΗΚ και ΝΚ είναι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης του ισοπλεύρου τριγώνου K_1HN, οπότε το Κ είναι το κέντρο (βάρους) του τριγώνου αυτού. Ομοίως τα Λ, Μ είναι τα κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων $\Lambda_1H\Theta$ και M_1EZ.

Εύκολα πλέον από του Θ. του Steiner προκύπτει ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

- Μια ακόμα λύση μπορούμε να πάρουμε αν χρησιμοποιήσουμε ως βοηθητική την παρακάτω άσκηση.

Άσκηση

Στο σχήμα οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι μεταξύ τους παράλληλες και καθένα από τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}, \overset{\frown}{B\Delta}$ είναι 60°. Τα σημεία Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΓΔ, ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.



- Ο Prasolov παρουσιάζει μια λύση του προβλήματος βασισμένη στο μετασχηματισμό της στροφής.

Πηγές:

1. Γ. Ντάνη: Γεωμετρία
2. Μ. & Π. Γεωργιακάκη: 1000 Λυμένα Θέματα Γεωμετρίας
3. Χ. Στεργίου: Γεωμετρία για Διαγωνισμούς (τόμος Ι)
4. V. Prasolov: Problems in plane and solid Geometry

Προτεινόμενα Θέματα

377. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ ισχύει

$$\frac{2\upsilon_{\alpha}}{\beta+\gamma-\alpha}\leq 1+\sqrt{2}$$

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

378. Έστω $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ διαφορετικοί μεταξύ τους, ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$

Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια.

379. Να κατασκευάσετε κυρτό τετράπλευρο, όταν δίνονται οι πλευρές και το εμβαδόν του.

Το θέμα προτείνουν ο συνάδελφος Τσιλιακός Λευτέρης και ο τοπογράφος Τσαλίκης Μανώλης – Αθήνα.

380. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Από το Μ φέρουμε την ΜΝ κάθετη στη ΒΓ. Η κάθετη από το Α στην ΒΝ τέμνει την ΒΝ στο Θ και την ΜΝ στο Κ. Να αποδείξετε ότι $MK=KN$

Φρουντζής Βασίλης – Αγρίνιο.

381. Αν οι αριθμοί x, y, z περιέχονται στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ να αποδείξετε ότι

$$2\leq\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\leq 3$$

Παπαδόπουλος Δήμος, Έδεσα.

Σημείωμα σύνταξης

Η στήλη αισθάνεται την ανάγκη να απολογηθεί στο συνάδελφο Παπαδόπουλο Δήμο αφού, εξαιτίας και του μη ηλεκτρονικού τρόπου επικοινωνίας σε περίοδο παρατεταμένης καραντίνας, το όνομά του δεν αναφέρθηκε στους λύτες των θεμάτων 352, 353, 355, 357, 358.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Lifting the Exponent Lemma* (LTE)

Μανώλης Πετράκης (μαθητής Λυκείου - **Αγρίνιο**)

Αν ανατρέξουμε στα θέματα των ολυμπιακών διαγωνισμών διαφόρων χωρών θα δούμε ότι εμφανίζονται αρκετά **συχνά προβλήματα** που αναφέρονται σε δυνάμεις ακεραίων, όπως τα:

1. **Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους ισχύει $n^2 \mid 2^n+1$.** **(I.M.O. 1990)**
2. **Να βρείτε τον πρώτο p και τους θετικούς ακέραιους x,y όταν $p^x - y^p = 1$.** **(Τσεχοσλοβακία 1996)**
3. **Αν x,y,p,n,k θετικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε ο n είναι περιττός, ο p είναι περιττός πρώτος και $x^n + y^n = p^k$, δείξτε ότι ο n είναι δύναμη του p.** **(Ρωσία 1996)**
4. **Αν ο n είναι θετικός ακέραιος και ο $3^n - 2^n$ δύναμη πρώτου, δείξτε ότι ο n είναι δύναμη πρώτου.(Βουλγαρία 1997)**
5. **Υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε να έχει ακριβώς 2000 διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες και ο 2^n+1 να διαιρείται με τον n;** **(I.M.O. 2000)**
6. **Δείξτε ότι ο αριθμός n^7+7 δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου για κάθε ακέραιο n.** **(ΗΠΑ 2008)**
7. **Αν ο $p \neq 3$ είναι πρώτος, $p \mid \alpha + b$ και $p^2 \mid \alpha^3 + b^3$, δείξτε ότι $p \mid \alpha^2 + b^2$ ή $p^3 \mid \alpha^3 + b^3$.(Ρουμανία 2008)**
8. **Να λυθεί στους μη αρνητικούς ακέραιους η εξίσωση $2^x + 3^y = z^2$.** **(B.M.O 2009)**
9. **Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς p και τους θετικούς ακέραιους x,y έτσι, ώστε οι αριθμοί $x^{p-1}+y$ και $y^{p-1}+x$ να είναι δυνάμεις του p.** **(I.M.O Shortlist 2014)**
10. **Ο n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ο $149^n - 2^n$ διαιρείται από τον $3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$. Ποιο είναι το πλήθος των θετικών διαιρετών του n;** **(Η.Π.Α 2020)**

Οι λύσεις των παραπάνω προβλημάτων, καθώς και παρομοίων τους σε διάφορα περιοδικά και βιβλία που αναφέρονται σε μαθηματικές ολυμπιάδες είναι συνήθως μακροσκελείς και περίπλοκες. Μπορούμε όμως να δώσουμε λύσεις, **σύντομες** και **κομψές**, στηριζόμενοι στο “Lifting the exponent lemma”, για τη διατύπωση του οποίου απαιτείται ο ορισμός:

Με $u_p(x)$ συμβολίζουμε τον εκθέτη της μεγαλύτερης δύναμης του πρώτου p, που διαιρεί τον ακέραιο x.

π.χ. $u_2(72)=3$, διότι $72=2^3\cdot 3^2$, $u_3(405)=4$, διότι $405=3^4\cdot 5$, $u_{11}(968)=2$, διότι $968=11^2\cdot 2^3$

Από τον προηγούμενο ορισμό έπονται οι απλές προτάσεις:

1) $u_p(xy)=u_p(x)+u_p(y)$.

2) $u_p(x+y)\geq \min\{u_p(x),u_p(y)\}$.

3) Αν για τους ακέραιους x,y, τον θετικό ακέραιο n και τον πρώτο p ισχύουν:
- $(p,n)=(p,x)=(p,y)=1$
- $p \mid x-y$, τότε $u_p(x^n-y^n)=u_p(x-y)$.

4) Αν για τους ακέραιους x,y, τον περιττό θετικό ακέραιο n και τον πρώτο p ισχύουν:
- $(p,n)=(p,x)=(p,y)=1$
- $p \mid x+y$, τότε $u_p(x^n+y^n)=u_p(x+y)$.

Και τώρα το Lifting the exponent lemma (LTE):

Αν p πρώτος, σχετικά πρώτος προς τους ακέραιους x,y τότε:

- **αν $p\neq 2$, $p \mid x-y$ και n θετικός ακέραιος ισχύει: $u_p(x^n-y^n)=u_p(x-y)+u_p(n)$**
- **αν $p\neq 2$, $p \mid x-y$ και n περιττός θετικός ακέραιος ισχύει: $u_p(x^n-y^n)=u_p(x-y)+u_p(n)$**
- **αν p=2 και $4 \mid x-y$ και n θετικός ακέραιος ισχύει: $u_2(x^n-y^n)=u_2(x-y)+u_2(n)$**
- **αν p=2 και $2 \mid x-y$ και n άρτιος θετικός ακέραιος ισχύει: $u_2(x^n-y^n)=u_2(x-y)+u_2(x+y)+u_2(n)-1$.**

Ακολουθούν οι **λύσεις** των **προβλημάτων** που έχουμε αναφέρει στην αρχή.

1. Λύση: Αν n=1 ή n=3 ισχύει. Θα δείξουμε ότι αυτές είναι οι μόνες λύσεις.
Υποθέτουμε ότι n>1 και $p \mid n$ ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του. Είναι $p\neq 2$ διότι, αν p=2 τότε $2 \mid p \mid n \mid 2^n+1$ άτοπο. Ακόμη $p \mid 2^n+1 \Rightarrow p \mid (2^n+1)(2^n-1)=2^{n+1}-1$ και $p \mid 2^{p-1}-1$ από το μικρό θεώρημα του Fermat. Έτσι $p \mid 2^{(2n,p-1)}-1=2^2-1=3 \Rightarrow p=3$ (1) (Ο Μ.Κ.Δ των 2n και p-1 είναι το 2,

---
* Το λήμμα της **άρσης** του εκθέτη

διότι ο p είναι ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n, άρα $(n,p-1)=1\overset{p\neq 2}{\Rightarrow}(2n,p-1)=2$).
Τώρα από το LTE είναι $n^2\,|\,2^n+1\Rightarrow u_3(u^2)\le u_3(2^n+1)\Rightarrow 2u_3(n)\le u_3(3)+u_3(n)\Leftrightarrow u_3(n)\le 1\ (2)$.

Από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε $u_3(n)=1$. Έστω $q\,|\,\frac{n}{3}$ ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του. Γνωρίζουμε ήδη ότι $q\neq 2,3$. Άρα, όπως προηγουμένως, $q\,|\,2^{(2n,q-1)}-1\,|\,2^6-1=63\Rightarrow q=7$. Αλλά $2^n+1\not\equiv 0(\bmod 7)$ για κάθε θετικό ακέραιο n, άτοπο.

2. Λύση: Είναι $y^p+1=p^x$.

1η περίπτωση: y=1. Η αρχική γράφεται $p^x=2\Rightarrow(x,y,p)=(1,1,2)$.

2η περίπτωση: $p\neq 2$ και $y\ge 2$. Ο p είναι περιττός, άρα $y+1\,|\,y^p+1=p^x\Rightarrow p\,|\,y+1$. Επομένως $p\le y+1\Leftrightarrow p(y+1)\le(y+1)^2\ (1)$. Επομένως από το LTE είναι:

$u_p(y^p+1)=u_p(p^x)\Rightarrow u_p(y+1)+u_p(p)=u_p(x)\Leftrightarrow u_p(p(y+1))=u_p(x)\Rightarrow p(y+1)=p^x\Leftrightarrow p(y+1)=y^p+1\ (2)$.

Αλλά $y^p+1\ge(y+1)^2\Leftrightarrow y^p\ge y^2+2y\Leftrightarrow y^{p-1}\ge y+2\Leftrightarrow y^{p-2}(y-1)\ge 2$, που ισχύει, διότι $y\ge 2$ και $p\ge 3$ με το = όταν y=2 και p=3. Αν y=2, p=3, τότε από την αρχική παίρνουμε $x=2\Rightarrow(x,y,p)=(2,2,3)$. Σε κάθε άλλη περίπτωση λόγω της (1) είναι: $y^p+1>(y+1)^2\ge p(y+1)$ αδύνατο, λόγω της (2).

3η περίπτωση: p=2 και $y\ge 2$. Είναι $y^2+1=2^x$.

• Αν x=1 τότε $y=1<2$. • Αν $x\ge 2$ τότε $y^2+1\equiv 0(\bmod 4)\Leftrightarrow y^2\equiv 3(\bmod 4)$ αδύνατο για κάθε $y\in\mathbb{N}$.

3. Λύση: Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x\ge y$. Ακόμη $x\neq 1$, διότι αν ήταν $x=y=1$, τότε $p^k=2\Rightarrow p=2$ αδύνατο.

1η περίπτωση: (x+y)=1. O n είναι περιττός, άρα $x+y\,|\,x^n+y^n=p^k$, άρα $x+y=p^m$. Τώρα από το LTE είναι $u_p(x^n+y^n)=u_p(p^k)\Rightarrow u_p(x+y)+u_p(n)=k\Rightarrow u_p(p^m)+u_p(n)=k\Rightarrow u_p(n)+m=k$.

Άρα $x^n+y^n=(x+y)p^{u_p(n)}$. Είναι $p^{u_p(n)}\,|\,n$. Αν $p\neq u_p(n)$, τότε $p\ge 2u_p(n)$. Επομένως:

$x^n<x^n+y^n=(x+y)p^{u_p(n)}<\frac{n}{2}(x+y)\le nx$. Άρα $xn>x^n\Leftrightarrow n>x^{n-1}$. Αλλά $x^{n-1}>2^{n-1}>n$ για κάθε $n\ge 3$.

Καταλήγουμε έτσι σε αντίφαση. Επομένως $n=p^{u_p(n)}$.

2η περίπτωση: (x,y)=α και $x=\alpha x_1$, $y=\alpha y_1$ με $(x_1,y_1)=1$. Η αρχική γράφεται $\alpha^n(x_1^n+y_1^n)=p^k$. Άρα $\alpha=p^b$ και $p^{bn}(x_1^n+y_1^n)=p^k\Leftrightarrow x_1^n+y_1^n=p^{k-bn}$, άρα όπως πριν $n=p^{u_p(n)}$.

4. Λύση: Έστω ότι ο n είναι σύνθετος. Υποθέτουμε ότι n=αb, όπου $\alpha,b\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

Τότε $3^\alpha-2^\alpha\,|\,(3^\alpha)^b-(2^\alpha)^b=3^{\alpha b}-2^{\alpha b}=3^n-2^n=p^c$ όπου ο p είναι πρώτος και ο c θετικός ακέραιος.

Άρα $3^\alpha-2^\alpha\,|\,p^c$. Όμως $3^\alpha-2^\alpha\neq 1\Rightarrow 3^\alpha-2^\alpha=p^d$, με $d\in\mathbb{N}^*$ και d<c. Επομένως

$(3^\alpha)^b-(2^\alpha)^b=p^c\Rightarrow u_p\left[(3^\alpha)^b-(2^\alpha)^b\right]=u_p(p^c)\overset{LTE}{\Rightarrow}u_p(3^\alpha-2^\alpha)+u_p(b)=c\Leftrightarrow u_p(p^d)+u_p(b)=c\Leftrightarrow c=d+u_p(b)$

Άρα $3^n-2^n=p^{d+u_p(b)}$. Αλλά $3^n-2^n=(3^\alpha)^b-(2^\alpha)^b>(3^\alpha-2^\alpha)^b=p^{bd}$.

Η ανισότητα ισχύει, διότι $(2^\alpha)^b+(3^\alpha-2^\alpha)^b>\left[(2^\alpha)+(3^\alpha-2^\alpha)\right]^b=(3^\alpha)^b$.

Επομένως $p^{d+u_p(b)}>p^{bd}\Leftrightarrow d+u_p(b)>bd$. Αλλά $d+u_p(b)<d+b-1<bd\Rightarrow d+u_p(b)<bd$, άτοπο.
Άρα ο n είναι πρώτος.

5. Λύση: Από το LTE είναι $3^m\,|\,2^{3^m}+1$, διότι $m=u_3(3^m)\le u_3(2^{3^m}+1)=u_3(3)+u_3(3^m)=m+1$. Αν ο $2^{3^m}+1$ είχε 1999 διαφορετικούς ανά δύο πρώτους διαιρέτες, μεγαλύτερους του 3 (έστω τους $p_1,p_2,\dots,p_{1999}$), τότε $n=3^m p_1p_2\cdots p_{1999}\,|\,2^{3^m}+1\,|\,2^{3^m p_1p_2\cdots p_{1999}}+1=2^n+1$, ο οποίος ικανοποιεί την υπόθεση.

Αρκεί να βρούμε m τέτοιο, ώστε ο $2^{3^n}+1$ να έχει τουλάχιστον 2000 διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες (συμπεριλαμβανομένου και του 3). Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Zsigmondy σύμφωνα με το οποίο ο α^n+b^n έχει έναν τουλάχιστον διαφορετικό διαιρέτη από τον α^k+b^k για κάθε k<n (Εξαίρεση: 2^3+1^3). Λόγω του θ. Zsigmondy, ο $2^{3^{k+1}}$ έχει τουλάχιστον έναν διαφορετικό διαιρέτη από τον 2^{3^k}. Όμως $2^{3^k}+1\,|\left(2^{3^k}\right)^3+1=2^{3^{k+1}}+1$. Άρα ο $2^{3^{k+1}}$ έχει τουλάχιστον έναν παραπάνω πρώτο διαιρέτη από τον 2^{3^k}.

Εφαρμόζοντάς το διαδοχικά για k=1,2,3,…,2000 βρίσκουμε ότι ο $2^{3^{2000}}$ έχει τουλάχιστον 2000 πρώτους διαιρέτες, από όπου έπεται το ζητούμενο.

6. Λύση: Λήμμα: Αν $p\equiv 3(\bmod 4)$ πρώτος και $p\,|\,x^2+y^2$ τότε $p\,|\,x$ και $p\,|\,y$.

Απόδειξη Έστω ότι $p\nmid x,y$. Είναι $x^2+y^2\equiv 0(\bmod p)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2\equiv -1(\bmod p)\Rightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2\equiv 1(\bmod p)$. Από το μικρό θεώρημα του Fermat είναι $\left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$. Ας είναι $p=4k+3$ τότε $\left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}=\left(\frac{x}{y}\right)^{4\kappa+2}=\left(\frac{x}{y}\right)^{4\kappa}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\equiv 1\cdot(-1)\equiv -1(\bmod p)$ άτοπο. Άρα $p\,|\,x,y$.

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα. Υποθέτουμε ότι $n^2+7=x^2$. Από το μικρό θεώρημα του Fermat παίρνουμε $n^7+7\equiv n^7\equiv n(\bmod 7)$. Αλλά $x^2\equiv 0,1,2,4(\bmod 7)\Leftrightarrow n\equiv 0,1,2,4(\bmod 4)\Leftrightarrow n+2\equiv 2,3,4,6(\bmod 6)\Rightarrow 7\nmid n+2$ (1)

Αν ο x είναι περιττός τότε $x^2\equiv 1(\bmod 4)\Leftrightarrow n^7+7\equiv 1(\bmod 4)\Leftrightarrow n^7\equiv 2(\bmod 4)$ αδύνατο. Άρα υποχρεωτικά ο x είναι άρτιος. Θέτουμε x=2α. Επομένως $n^7+7=4\alpha^2\Rightarrow n^7+7\equiv 0(\bmod 4)\Leftrightarrow n^7\equiv 1(\bmod 4)$. Όμως $n^7=n\left(n^3\right)^2\equiv n(\bmod 4)$, άρα $n\equiv 1(\bmod 4)$ $(2)\Leftrightarrow n+2\equiv 3(\bmod 4)$. Επομένως ο n+2 έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη τέτοιο, ώστε $p\equiv 3(\bmod 4)$. Η αρχική γράφεται ισοδύναμα $n^7+2^7=4\alpha^2+11^2$. Τώρα από το LTE είναι $u_p\left(n^7+2^7\right)=u_p\left(4\alpha^2+11^2\right)\Rightarrow u_p(n+2)+u_p(7)=u_p\left(4\alpha^2+11^2\right)\overset{(1)}{\Rightarrow}u_p(n+2)=u_p\left(4\alpha^2+11^2\right)$ όπου $p\equiv 3(\bmod 4)$. Λόγω του λήμματος $p\,|\,11\Rightarrow p=11$ και $p=11\,|\,4\alpha^2\Rightarrow 4\alpha^2=4\cdot 11^{2b}c^2$.

Αλλά $u_p\left(4\alpha^2+11^2\right)=u_{11}\left(4\cdot 11^{2b}c^2+11^2\right)=2+u_{11}\left(\left(2\cdot 11^{b-1}c\right)^2+1\right)$.

Είναι $y^2\equiv 0,1,3,4,9(\bmod 11)\Rightarrow y^2+1\equiv 1,2,4,5,10(\bmod 11)\Rightarrow 11\nmid\left(2\cdot 11^{b-1}c\right)^2+1$.

Επομένως $u_{11}(n+2)\equiv u_{11}\left(4\alpha^2+11\right)=2\Rightarrow \nu+2=11^2k$ με $11\nmid k$ και ο k υποχρεωτικά δεν έχει κανένα πρώτο διαιρέτη q τέτοιο, ώστε $p\equiv 3(\bmod 4)$. Αλλά λόγω της (2) είναι $n\equiv 1(\bmod 4)\Leftrightarrow 11^2k-2\equiv 1(\bmod 4)\Leftrightarrow 121k\equiv 3(\bmod 4)\Leftrightarrow k\equiv 3(\bmod 4)$. Άρα ο k έχει τουλάχιστον 1 πρώτο διαιρέτη q τέτοιο, ώστε $q\equiv 3(\bmod 4)$, άτοπο.

7. Λύση: Αν $p\,|\,\alpha$ τότε $p\,|\,b$ διότι $p\,|\,\alpha+b$. Άρα $p^3\,|\,\alpha^3$ και $p^3\,|\,b^3$. Επομένως $p^3\,|\,\alpha^3+b^3$.

Αν $p\nmid\alpha$ τότε $p\nmid b$ διότι $p\,|\,\alpha+b$. Άρα από το LTE είναι $u_p\left(\alpha^3+b^3\right)=u_p(\alpha+b)+u_p(3)\overset{p\neq 3}{=}u_p(\alpha+b)$.

Όμως $p^2\,|\,\alpha^3+b^3\Rightarrow p^2\,|\,\alpha+b$.

8. Λύση: Αν x=0 τότε $1+3^{\nu}=z^2\Leftrightarrow 3^y=(z+1)(z-1)$.Οι μοναδικές δυνάμεις του 3, που διαφέρουν κατά 2 είναι οι 1,3, επομένως $z=2\Rightarrow(x,y,z)=(0,1,2)$. Αν y=0 τότε $2^x+1=z^2\Leftrightarrow 2^x=(z+1)(z-1)$. Οι μοναδικές δυνάμεις του 2 που διαφέρουν κατά 2 είναι οι 2,4 επομένως z=3⇒(x,y,z)=(3,0,3).

• Αν z=0 η εξίσωση είναι αδύνατη. • Αν xyz>0 τότε $2^x+3^y=z^2\Rightarrow 2^x\equiv z^2\equiv 0,1(\bmod 3)\Rightarrow 2^x\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow x=2\alpha$.

Ακόμη $x\geq 2\Rightarrow 3^y\equiv 2^x+3^y\equiv z^2\equiv 0,1(\bmod 4)\Rightarrow 3^y\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow y=2b$ όπου $\alpha,b\in\mathbb{N}$

Άρα $2^{2\alpha}+3^{2b}=z^2\Leftrightarrow 3^{2b}=\left(z-2^{\alpha}\right)\left(z+2^{\alpha}\right)$. Αν $3\,|\,z-2^{\alpha}$ και $3\,|\,z+2^{\alpha}$ τότε: $3\,|\left(z+2^{\alpha}\right)-\left(z-2^{\alpha}\right)=2^{\alpha+1}$ άτοπο. Άρα υποχρεωτικά $z-2^{\alpha}=1\Leftrightarrow z=2^{\alpha}+1$ και $3^{2b-1}=2^{\alpha+1}$.

Τώρα από το LTE είναι $u_2\left(2^{\alpha+1}\right)=u_2\left(3^{2b}-1\right)\Rightarrow \alpha+1=u_2(2)+u_2(4)+u_2(2b)-1\Leftrightarrow u_2(2b)=\alpha-1$.

Επομένως $2b\geq 2^{\alpha-1}>\alpha+1$ για $\alpha\geq 4$. Άρα $3^{2b}-1>2^{\alpha+1}$ για α≥4.

- Αν α=1 τότε $3^{2b}=5$ αδύνατο. • Αν α=2 τότε b=1, από όπου παίρνουμε τη λύση $(x,y,z)=(4,2,5)$.
- Αν α=3 τότε $3^{2b}=17$ αδύνατο. Επομένως $(x,y,z)=(0,1,2),(3,0,3),(4,2,5)$.

9. Λύση: Αν p=2 τότε ο x+y είναι δύναμη του 2. Αν $p\geq 3$ τότε διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $p\nmid x,y$.

Κατ' αρχάς από το μικρό θεώρημα του Fermat είναι:

$x^{p-1}+y\equiv 0(\bmod p)\Leftrightarrow y\equiv -1(\bmod p)$ (1) Ομοίως $x\equiv -1(\bmod p)$. Υποθέτουμε ότι x>y

$$x>y\Rightarrow x^{p-1}+y>y^{p-1}+x\Rightarrow y^{p-1}+x\mid x^{p-1}+y\Rightarrow y^{p-1}+x\mid\left[x-\left(y^{p-1}+x\right)\right]^{p-1}+y=\left(-y^{p-1}\right)^{p-1}+y=$$

$$=y^{(p-1)^2}+y^{p-1}+x\mid y\left(y^{p(p-2)}+1\right)\Rightarrow y^{p-1}+x\mid y^{p(p-2)}+1$$

Έτσι με χρήση του LTE είναι: $u_p\left(y^{p-1}+x\right)\leq u_p\left(y^{p(p-2)}+1\right)\Rightarrow u_p\left(y^{p-1}+x\right)\leq u_p(y+1)+u_p\left[p(p-2)\right]$

$$\Rightarrow u_p\left(y^{p-1}+x\right)\leq u_p(y+1)+u_p(p)=u_p\left[p(p+1)\right]\Rightarrow y^{p-1}+x\mid p(y+1)(2)\Rightarrow p(y+1)\geq y^{p-1}+x>y^{p-1}+y\quad(3)$$

Ακόμη λόγω της (1) είναι $y\geq p-1\Leftrightarrow y+1\geq p\Leftrightarrow (y+1)^2\geq (y+1)$.

Όμως για $p\geq 5$ είναι $y^{p-1}+y\geq y^4+y\geq (y+1)^2\Leftrightarrow y^4>y^2+y+1\Leftrightarrow (y+1)\left(y^3-y-1\right)>0$, που ισχύει

για $y\geq p-1\geq 2$. Άρα $y^{p-1}+y>(y+1)^2\geq p(y+1)$ (4).

Για να μην καταλήξουμε σε αντίφαση, λόγω των (3),(4), πρέπει p=3 επομένως λόγω της (3):

$y^2+x\mid 3(y+1)\Rightarrow 3(y+1)\geq y^2+x\geq y^2+y=y(y+1)\Rightarrow y\leq 3$.

- Αν y=3, τότε $9+x\mid 12\Rightarrow x=3$, αδύνατο, διότι x>y.
- Αν y=2, τότε $4+x\mid 9\Rightarrow x=5\Rightarrow (x,y,p)=(5,2,3)$, οι οποίοι επαληθεύουν την υπόθεση.
- Αν y=1,τότε ο x^2+1 είναι δύναμη του 3. Αδύνατο διότι $x^2\equiv 0,1(\bmod 3)\Rightarrow x^2+1\equiv 1,2(\bmod 3)$.

2η περίπτωση: $p\mid x,y$. Ας είναι $x=p^{\alpha}k$ και $y=p^{b}m$ με $\alpha\geq b$ και $p\nmid x,y$.

Είναι $x^{p-1}+y=p^{\alpha(p-1)}k^{p-1}+p^{b}m=p^{b}\left[p^{\alpha(p-1)-b}k^{p-1}+m\right]$, το οποίο δεν είναι δύναμη του p, από όπου καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως $(x,y,p)=\left(k,2^{n}-k,2\right),(5,2,3),(2,5,3)$.

10. Λύση: Είναι $3\mid 149-2=147$ και λόγω της υπόθεσης $3^3\mid 149^n-2^n\Rightarrow u_3\left(3^3\right)\leq u_3\left(149^n-2^n\right)$.

Τώρα από το LTE είναι $3\leq u_3(147)+u_3(n)\Leftrightarrow u_3(n)\geq 2\Rightarrow n=3^2k_1$ (1) με $k_1\in\mathbb{N}^*$.

Με όμοιο τρόπο 7 | 149–2=147 και $7^7\mid 149^n-2^n\Rightarrow 7\leq u_7(147)+u_7(n)\Leftrightarrow u_7(n)\geq 5$.

Επομένως $n=7^5k_2$ (2) με $k_2\in\mathbb{N}^*$. Είναι $5\mid 149^n-2^n\Leftrightarrow 149^n\equiv 2^n(\bmod 5)\Leftrightarrow (-1)^n\equiv 2^n(\bmod 5)$.

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις, όπου $n=4k_3+1$ με $i\in\{0,1,2,3\}$ και βρίσκουμε ότι

$5\mid 149^n-2^n\Leftrightarrow n=4k_3=2^2k_3$ (3) με $k_3\in\mathbb{N}^*$. Από τη σχέση (3) παίρνουμε

$$5\mid 149^n-2^n=\left(149^4\right)^{k_3}-\left(2^4\right)^{k_3}\Rightarrow 5\leq u_5\left(149^4-2^4\right)+u_5(k_3)\Leftrightarrow 5\leq u_5\left(149^2+2^2\right)+u_5(149+2)+u_5(149-2)+u_5(k_3)\Leftrightarrow$$

$4\leq u_5(k_3)\Rightarrow k_3=5^4k_4\overset{(3)}{\Rightarrow} n=5^4\cdot 2^2k_4$ (4). Από τις σχέσεις (1),(2),(4) παίρνουμε ότι $n=2^2\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7^5k$ με $\kappa\in\mathbb{N}^*$. Άρα ο μικρότερος n για τον οποίο $3^3\cdot 5^5\cdot 7^7\mid 149^n-2^n$ είναι ο $n=2^2\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7^5$.

Βιβλιογραφία:

- *Santiago Cuellar, Jose Alejandro Samper, A nice and tricky lemma (lifting the exponent), Mathematical Reflections 3 – 2007.*
- *Evan Chen, Orders Modulo Prime, 2015*
- *Pavardi, A. H. (2011). Lifting The Exponent Lemma (LTE). Retrieved July 11,2020, from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.221.5543*
- *Justin Stevens, Olympiad Number Theory Through Challenging Problems, Third Edition*
- *Alexander Remorov, Exponents and Primes*
- *Problems in Elementary Number Theory, Volume 2, No1 Spring 2009 pen@problem-solving.be.*

Μέγιστο εμβαδό Κυρτών Τετραπλεύρων με δοσμένα μήκη πλευρών

Θ. Κάκουλλος, Β. Νεστορίδης και Ν. Παπαδάτος

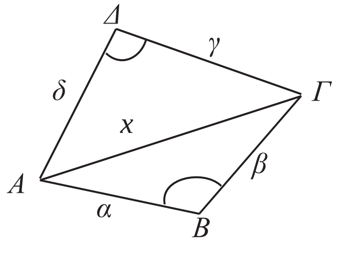
1. Ύπαρξη κυρτού εγγράψιμου τετραπλεύρου με δοσμένα μήκη πλευρών.

Ας θεωρήσουμε τα σημεία A,B,Γ και Δ και τα μήκη $(AB)=\alpha>0$, $(B\Gamma)=\beta>0$, $(\Gamma\Delta)=\gamma>0$ και $(\Delta A)=\delta>0$. Τότε, επειδή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία είναι ο συντομότερος δρόμος που τα συνδέει βρίσκουμε $\alpha\le\beta+\gamma+\delta$, $\beta\le\gamma+\delta+\alpha$, $\gamma\le\delta+\alpha+\beta$ και $\delta\le\alpha+\beta+\gamma$. Αν κάποια από τις προηγούμενες σχέσεις ισχύει σαν ισότητα, τότε τα σημεία A,B,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Έτσι λοιπόν έχουμε αποδείξει το ακόλουθο.

Πρόταση 1. Έστω A,B,Γ,Δ τέσσερα σημεία, ανά δύο διαφορετικά που δεν είναι συνευθειακά. Τότε τα μήκη $(AB)=\alpha>0$, $(B\Gamma)=\beta>0$, $(\Gamma\Delta)=\gamma>0$ και $(\Delta A)=\delta>0$ έχουν την ιδιότητα καθ' ένα τους να είναι γνήσια μικρότερο από το άθροισμα των υπολοίπων τριών.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο και μάλιστα το ακόλουθο ισχυρότερο.

Πρόταση 2. Έστω γνήσια θετικά μήκη α,β,γ και δ που έχουν την ιδιότητα $\alpha<\beta+\gamma+\delta$, $\beta<\gamma+\delta+\alpha$, $\gamma<\delta+\alpha+\beta$ και $\delta<\alpha+\beta+\gamma$. Τότε υπάρχει κυρτό εγγράψιμο σε κύκλο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $(AB)=\alpha$, $(B\Gamma)=\beta$, $(\Gamma\Delta)=\gamma$ και $(\Delta A)=\delta$.



Σχήμα 1

Απόδειξη. Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα αρκεί $\widehat{AB\Gamma}=180^\circ-\widehat{\Gamma\Delta A}$. Ονομάζουμε $\widehat{AB\Gamma}=\varphi$ και $(A\Gamma)=x$. Τότε από τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta A$ έχουμε

$$x^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\varphi \quad \text{και} \qquad (1)$$

$$x^2=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\,\text{συν}(180^\circ-\varphi)=\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta\,\text{συν}\varphi. \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) απαλείφουμε το x και βρίσκουμε $\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2=2(\alpha\beta+\gamma\delta)\text{συν}\varphi$. Αλλά $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ οπότε $2(\alpha\beta+\gamma\delta)>0$ και βρίσκουμε

$$\text{συν}\varphi=\frac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)} \text{ και}$$

$$x^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\varphi=\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{\alpha\beta+\gamma\delta}=\frac{(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}=y_0.$$

Ισχυρισμός 3: $\left|\dfrac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}\right|<1$, οπότε υπάρχει $\varphi\in(0^o,180^o)$ με $\text{συν}\varphi=\dfrac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 3. Η αποδεικτέα είναι ισοδύναμη προς την $[2(\alpha\beta+\gamma\delta)]^2-(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)^2>0$. Κάνοντας ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων τις διαφορές τετραγώνων, το πρώτο μέλος παίρνει την μορφή $(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$ που είναι γνήσια θετικό, διότι από την υπόθεση ισχύει $\alpha<\beta+\gamma+\delta$, $\beta<\gamma+\delta+\alpha$, $\gamma<\delta+\alpha+\beta$ και $\delta<\alpha+\beta+\gamma$.

Ισχυρισμός 4: Ο αριθμός $y_0=\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{\alpha\beta+\gamma\delta}$ είναι γνήσια θετικός οπότε υπάρχει μήκος $x>0$ ώστε $x^2=\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{\alpha\beta+\gamma\delta}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 4. Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 3 έχουμε

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}=\text{συν}\varphi\in(-1,1).$$

Άρα $\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{\alpha\beta+\gamma\delta}=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\varphi>\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$,

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\alpha>0$ και $\beta>0$ και ότι $\text{συν}\varphi<1$. Έτσι ο Ισχυρισμός 4 αληθεύει. Επίσης αυτό είναι άμεσο διότι $y_0=\dfrac{(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}$ και $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$.

Ισχυρισμός 5: Τα μήκη α,β,x αποτελούν πλευρές τριγώνου. Ομοίως τα μήκη x,γ,δ.

Απόδειξη Ισχυρισμού 5. Αρκεί να δείξουμε $|\alpha-\beta|<x<\alpha+\beta$ και $|\gamma-\delta|<x<\gamma+\delta$. Ισοδύναμα έχουμε να δείξουμε:

$$(\alpha-\beta)^2<x^2<(\alpha+\beta)^2 \quad \text{και} \quad (\gamma-\delta)^2<x^2<(\gamma+\delta)^2.$$

Όμως $x^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\varphi$ και $x^2=\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta\,\text{συν}\varphi$ με $-1<\text{συν}\varphi<1$. Εύκολα καταλήγουμε $x^2<\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$, $x^2>\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$ και $x^2<\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2$, $x^2>\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta=(\gamma-\delta)^2$, όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\alpha,\beta,\gamma,\delta,x>0$. Έτσι αποδείχθηκε ο Ισχυρισμός 5.

Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Κατασκευάζουμε πρώτα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB)=\alpha>0$, $(B\Gamma)=\beta>0$ και $(\Gamma A)=x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$, το οποίο είναι δυνατό σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 5. Ακόμη θεωρούμε την ευθεία ΓA που χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Στο ένα ημιεπίπεδο βρίσκεται το σημείο B. Στο άλλο ημιεπίπεδο παίρνουμε σημείο Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\gamma$ και $(\Delta A)=\delta$. Τέτοιο σημείο υπάρχει σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 5.

Από τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta A$ βρίσκουμε $x^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\widehat{AB\Gamma}$ και $x^2=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\,\text{συν}\widehat{\Gamma\Delta A}$. Αλλά

$$x^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{2\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Άρα
$$\text{συν}\widehat{AB\Gamma}=\frac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Ακόμη
$$x^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{2\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$$

$$=\frac{1}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}\bullet[2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+2\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)]$$

$$=\frac{2\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2)+2\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}=\frac{2\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2)+2\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)+2\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2)-2\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$$

$=\gamma^2+\delta^2-\dfrac{2\gamma\delta(\gamma^2-\alpha^2+\delta^2-\beta^2)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$.

Αλλά $x^2=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\,\text{συν}\widehat{\varGamma\varDelta A}$ και αφού $\gamma,\delta>0$ καταλήγουμε

$$\text{συν}\widehat{\varGamma\varDelta A}=\frac{\gamma^2-\alpha^2+\delta^2-\beta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}=-\text{συν}\widehat{AB\varGamma}.$$

Αλλά $\widehat{AB\varGamma},\widehat{\varGamma\varDelta A}\in(0^\circ,180^\circ)$. Άρα $\widehat{\varGamma\varDelta A}=180^\circ-\widehat{AB\varGamma}$. Συνεπώς το $AB\varGamma\varDelta$ είναι κυρτό εγγράψιμο τετράπλευρο.

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη της Πρότασης 2.

Παρατήρηση: Η προηγούμενη απόδειξη δίνει εύκολα το ακόλουθο.

Θεώρημα: Έστω τετράπλευρο $AB\varGamma\varDelta$ με $(AB)=\alpha>0$, $(B\varGamma)=\beta>0$, $(\varGamma\varDelta)=\gamma>0$, $(\varDelta A)=\delta>0$, όπου $\alpha<\beta+\gamma+\delta$, $\beta<\alpha+\gamma+\delta$, $\gamma<\alpha+\beta+\delta$ και $\delta<\alpha+\beta+\gamma$. Το $AB\varGamma\varDelta$ είναι είναι κυρτό εγγράψιμο αν και μόνο αν τα σημεία B και $\varDelta$ κείνται εκατέρωθεν της ευθείας $A\varGamma$ και $(A\varGamma)^2=\dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}$.

Σχόλιο. Καθαρά **γεωμετρική** κατασκευή κυρτού εγγράψιμου τετραπλεύρου με γνωστά μήκη πλευρών μπορεί να βρει κανείς στο μεγάλο βιβλίο του Κανέλλου. Ακόμη είναι γνωστό ότι το εγγράψιμο $AB\varGamma\varDelta$ έχει το μέγιστο εμβαδό απ’ όλα τα (κυρτά) τετράπλευρα $A'B'\varGamma'\varDelta'$ με $(A'\varDelta')=\alpha$, $(B'\varGamma')=\beta$, $(\varGamma'\varDelta')=\gamma$, $(\varDelta'A')=\delta$ όταν τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι γνωστά γνήσια θετικά μήκη, το καθένα μικρότερο του αθροίσματος των υπολοίπων τριών. Αυτό αποδείχθηκε από τον Blascke και πρόσφατα από τους Πάρι Πάμφιλο και Ανδρέα Βαρβεράκη ανεξάρτητα.

Θα το επαληθεύσουμε και εμείς παρακάτω. Πρώτα όμως θα το επαληθεύσουμε στην ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$. Αν ω είναι μια γωνία του παραλληλογράμμου, τότε το εμβαδόν ισούται με $E=\alpha\beta\,\text{ημ}\omega$ και προφανώς μεγιστοποιείται όταν $\omega=90^\circ$, δηλαδή στο ορθογώνιο, που εύκολα βλέπουμε ότι είναι εγγράψιμο.

2. Το μέγιστο εμβαδόν τετραπλεύρων με δοσμένα μήκη πλευρών υλοποιείται όταν το τετράπλευρο είναι κυρτό εγγράψιμο.

Υποθέτουμε, όπως προηγουμένως, ότι τα μήκη $(AB)=\alpha$, $(B\varGamma)=\beta$, $(\varGamma\varDelta)=\gamma$, $(\varDelta A)=\delta$ δίδονται και ικανοποιούν

$$0<\alpha<\beta+\gamma+\delta,\quad 0<\beta<\alpha+\gamma+\delta,\quad 0<\gamma<\alpha+\beta+\delta,\quad 0<\delta<\alpha+\beta+\gamma. \qquad (1)$$

Θα απαντήσουμε στο εξής πρόβλημα:

Ποια κυρτά τετράπλευρα έχουν μέγιστο εμβαδόν;

2.1. Το εμβαδόν ως συνάρτηση της διαγωνίου $(A\varGamma)$.

Φέρνοντας την διαγώνιο $A\varGamma$ με μήκος $x=(A\varGamma)$ έχουμε (βλ. Σχήμα 1)

$$E(x)=\text{Εμβ}(AB\varGamma)+\text{Εμβ}(A\varGamma\varDelta)=\frac{1}{4}\sqrt{P_1(x^2)}+\frac{1}{4}\sqrt{P_2(x^2)}$$

όπου

$$P_1(y)=(y-(\beta-\alpha)^2)((\alpha+\beta)^2-y)$$
$$P_2(y)=(y-(\delta-\gamma)^2)((\delta+\gamma)^2-y).$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδόν τριγώνου με μήκη πλευρών α,β,γ:

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος, δηλ.

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)}\,.$$

Επομένως,

$$\text{Εμβ}(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}\sqrt{P_1(x^2)}\,,\quad \text{Εμβ}(ΑΓΔ)=\frac{1}{4}\sqrt{P_2(x^2)}\,.$$

Φυσικά, λόγω της τριγωγικής ανισότητας, ισχύει

$$|\alpha-\beta|<x<\alpha+\beta \quad \text{και} \quad |\delta-\gamma|<x<(\gamma+\delta)$$

(οπότε $P_1(x^2)>0$, $P_2(x^2)>0$). Οι ανισότητες γράφονται

$$(\beta-\alpha)^2<x^2<(\alpha+\beta)^2 \quad \text{και} \quad (\delta-\gamma)^2<x^2<(\delta+\gamma)^2$$

και αυτές συναληθεύουν στο διάστημα

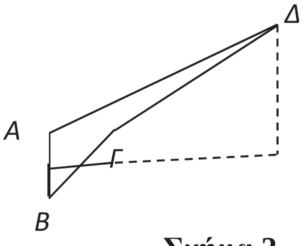
$$x^2=y\in(\max[(\beta-\alpha)^2,\ (\delta-\gamma)^2]),\ \min[(\alpha+\beta)^2,(\gamma+\delta)^2]).$$

Επομένως, θεωρούμε την συνάρτηση εμβαδού

$$f(y)=\frac{1}{4}\sqrt{P_1(y)}+\frac{1}{4}\sqrt{P_2(y)}\,,\quad y\in[y_{\min},y_{\max}]$$

όπου $y_{\min}=\max[(\beta-\alpha)^2,(\delta-\gamma)^2]<y_{\max}=\min[(\alpha+\beta)^2,(\gamma+\delta)^2]$.
(Εδώ επιτρέπουμε και τις ακραίες τιμές $y=y_{\min}$ ή $y_{\max}$, ώστε να μπορούμε να βρούμε τα μέγιστα/ελάχιστα της *f*, αφού η *f* είναι συνεχής.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την $f(y)$, $y\in[y_{\min},y_{\max}]$, σημειώνοντας ότι το *ΑΒΓΔ* δεν είναι πάντα κυρτό. Για παράδειγμα, τα σημεία $A(0,0),B(0,-1),\Gamma(1,0)$ και $\Delta(3,1)$ σχηματίζουν **μη κυρτό** τετράπλευρο με $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=\sqrt{5}$ και $\delta=\sqrt{10}$ [σημειώνεται ότι $\sqrt{10}<1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $y_{\min}=(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2=15-2\sqrt{50}$ και $y=1\in(y_{\min},y_{\max})$, $y_{\max}=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$].



Σχήμα 2

Άρα η δυσκολία της πλήρους μελέτης της $f(y)$ έγκειται στο γεγονός ότι πρέπει επιπροσθέτως να καθορίσουμε για ποιες τιμές του $y\in[y_{\min},y_{\max}]$ οδηγούμαστε σε κυρτό τετράπλευρο.

Ας ξεχάσουμε προς στιγμήν αυτές τις παρατηρήσεις, και ας μελετήσουμε την μονοτονία της $f(y)$ στο διάστημα $[y_{\min},y_{\max}]$.

Θεώρημα 1. Η *f* είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[y_{\min},y_0]$, γνήσια φθίνουσα στο $[y_0,y_{\max}]$, όπου

$$y_0=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}\,.$$

Μάλιστα, ισχύει ότι $y_{\min}<y_0<y_{\max}$ και

$$f(y_0)=\max_y f(y)=\frac{1}{4}\sqrt{M_0}=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)} \qquad (\tau=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/2)$$

Όπου $\boldsymbol{M_0 = (\alpha + \beta + \gamma - \delta)(\alpha + \beta + \delta - \gamma)(\alpha + \gamma + \delta - \beta)(\beta + \gamma + \delta - \alpha)}$.

[Συνεπώς έχουμε «τύπο του Ήρωνα» για το μέγιστο εμβαδόν. Αυτός ο τύπος καλείται τύπος Brahmagupta]

Απόδειξη: Η *f* είναι προφανώς συνεχής στο κλειστό $[y_{\min}, y_{\max}]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(y_{\min}, y_{\max})$, με παράγωγο $f'(y) = \frac{1}{8}\left(\frac{P_1'(y)}{\sqrt{P_1(y)}} + \frac{P_2'(y)}{\sqrt{P_2(y)}}\right)$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$.

Αν ονομάσουμε $\lambda = \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$ την κοινή τιμή, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$y_{\min} < \lambda < y_{\max}.$$

Πράγματι, $\lambda > (\beta - \alpha)^2$ και $\lambda > (\gamma - \delta)^2$ ενώ $\lambda < (\alpha + \beta)^2$ και $\lambda < (\gamma + \delta)^2$.

Επομένως, η παράγωγος $f'(y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda - y}{\sqrt{P_1(y)}} + \frac{\lambda - y}{\sqrt{P_2(y)}}\right)$, $y_{\min} < y < y_{\max}$

είναι θετική στο $(y_{\min}, \lambda)$ και αρνητική στο $(\lambda, y_{\max})$. Το μοναδικό σημείο μεγίστου της *f* είναι το $y_0 = \lambda$, αφού

$$y_0 = \frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\gamma + \beta\delta)}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\lambda \cdot (\gamma\delta + \alpha\beta)}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \lambda.$$

(β) $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + \delta^2$.

Ισχυρισμός. $\alpha^2 + \beta^2 < y_{\max}$, $\gamma^2 + \delta^2 > y_{\min}$.

Απόδειξη: $\alpha^2 + \beta^2 < (\alpha + \beta)^2$ προφανώς, και $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + \delta^2 < (\gamma + \delta)^2$. Άρα $\alpha^2 + \beta^2 < y_{\max}$. Όμοια, $\gamma^2 + \delta^2 > (\delta - \gamma)^2$ και $\gamma^2 + \delta^2 > \alpha^2 + \beta^2 > (\beta - \alpha)^2$. Επομένως στην περίπτωση (β) υπάρχουν 4 δυνατότητες:

$$y_{\min} < \alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + \delta^2 < y_{\max}, \text{ ή } y_{\min} < \alpha^2 + \beta^2 < y_{\max} \le \gamma^2 + \delta^2,$$
$$\text{ή } \alpha^2 + \beta^2 \le y_{\min} < \gamma^2 + \delta^2 < y_{\max}, \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 \le y_{\min} < y_{\max} \le \gamma^2 + \delta^2.$$

Ας ονομάσουμε $\varDelta$ το ανοικτό διάστημα $(y_{\min}, y_{\max})$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$f'(y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - y}{\sqrt{P_1(y)}} + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - y}{\sqrt{P_2(y)}}\right), \quad y \in \varDelta.$$

Η παράγωγος αυτή είναι προφανώς > 0 όταν $y \in (-\infty, \alpha^2 + \beta^2] \cap \varDelta$ και < 0 στο $[\gamma^2 + \delta^2, +\infty) \cap \varDelta$.

Έστω τώρα $y \in (\alpha^2 + \beta^2, \gamma^2 + \delta^2) \cap \varDelta$. Τότε ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - y < 0$, $\gamma^2 + \delta^2 - y > 0$.

Συνεπώς, $f'(y) > 0 \Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2 - y)\sqrt{P_1} > (y - \alpha^2 - \beta^2)\sqrt{P_2}$ και επειδή όλες οι ποσότητες είναι θετικές, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο την προηγούμενη ανισότητα, παίρνοντας

$$f'(y) > 0 \Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2 - y)^2 P_1(y) - (y - \alpha^2 - \beta^2)^2 P_2(y) > 0.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$(\gamma^2 + \delta^2 - y)^2 P_1(y) - (y - \alpha^2 - \beta^2)^2 P_2(y) = -16(\gamma\delta + \alpha\beta)(y - y_0)\left[(\gamma\delta - \alpha\beta)y - (\beta\delta - \alpha\gamma)(\beta\gamma - \alpha\delta)\right]$$

όπου $y_0 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}$.

Καθώς $y \in (\alpha^2+\beta^2, \gamma^2+\delta^2)$, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η τελευταία αγκύλη είναι θετική. Πράγματι, μία (γραμμική) συνάρτηση της μορφής $h(y) = Ay + B$, $y \in (y_1, y_2)$ είναι θετική όταν $Ay_1 + B > 0$ και $Ay_2 + B > 0$. Στην περίπτωσή μας έχουμε $(y_1 = \alpha^2+\beta^2, y_2 = \gamma^2+\delta^2)$ και $(\gamma\delta-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2)-(\beta\gamma-\alpha\delta)(\beta\delta-\alpha\gamma) = \alpha\beta(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2) > 0$

Και $(\gamma\delta-\alpha\beta)(\gamma^2+\delta^2)-(\beta\gamma-\alpha\delta)(\beta\delta-\alpha\gamma) = \gamma\delta(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2) > 0$.

Τελικά βλέπουμε ότι το πρόσημο της $f'(y)$ στο $(\alpha^2+\beta^2, \gamma^2+\delta^2) \cap \varDelta$ ταυτίζεται με το πρόσημο της $-16(y-y_0)$, άρα $f'(y) < 0$ για $y > y_0$, $f'(y) > 0$ για $y < y_0$.

Το συμπέρασμα έπεται.

(γ) Περίπτωση $\alpha^2+\beta^2 > \gamma^2+\delta^2$. Δουλεύουμε ομοίως με την μόνη διαφορά ότι εργαζόμαστε στο $(\gamma^2+\delta^2, \alpha^2+\beta^2) \cap \varDelta$.

Σε κάθε περίπτωση [(α), (β) ή (γ)] το y_0 δίνεται από τον τύπο

$$y_0 = \frac{(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}$$

και είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $y_{\min} < y_0 < y_{\max}$.

Ακριβέστερα, στην περίπτωση (β), $\alpha^2+\beta^2 < \gamma^2+\delta^2$, ισχύει $y_0 > (\beta-\alpha)^2$, $y_0 > (\delta-\gamma)^2$, $y_0 > \alpha^2+\beta^2$ και $y_0 < (\beta+\alpha)^2$, $y_0 < (\gamma+\delta)^2$, $y_0 < \delta^2+\gamma^2$, δηλ. $y_0 \in (\alpha^2+\beta^2, \gamma^2+\delta^2) \cap \varDelta$.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση (γ), $\alpha^2+\beta^2 > \gamma^2+\delta^2$, ισχύει

$$y_0 > (\beta-\alpha)^2,\ y_0 > (\delta-\gamma)^2,\ y_0 > \gamma^2+\delta^2,$$

$$y_0 < (\alpha+\beta)^2,\ y_0 < (\gamma+\delta)^2,\ y_0 < \alpha^2+\beta^2.$$

Ας δούμε αναλυτικά την περίπτωση (β)

$$y_0 - (\alpha^2+\beta^2) = \frac{\alpha\delta}{\alpha\beta+\gamma\delta}(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2) > 0 \quad \text{από υπόθεση (β)}$$

$$y_0 - (\beta-\alpha)^2 > 0 \ \text{προφανές, αφού } (\beta-\alpha)^2 < \alpha^2+\beta^2$$

$$y_0 - (\delta-\gamma)^2 = \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta+\gamma\delta}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma) > 0$$

$$(\alpha+\beta)^2 - y_0 = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\gamma\delta}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma) > 0$$

$$\gamma^2+\delta^2 - y_0 = \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta+\gamma\delta}(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2) > 0 \quad \text{από υπόθεση (β)}$$

και $(\gamma+\delta)^2 - y_0 > 0$ προφανές από το προηγούμενο, αφού $(\gamma+\delta)^2 > \gamma^2+\delta^2$.

Τέλος, με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε

$$\max_y f(y) = f(y_0) = \frac{1}{4}\sqrt{M_0} \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Παρατηρούμε ότι το y_0 που βρήκαμε είναι το x^2 στον ισχυρισμό 4 της Πρότασης 2. Άρα το τετράπλευρο *ΑΒΓΔ* είναι εγγράψιμο και κυρτό. Επομένως το εμβαδόν μεγιστοποιείται στα εγγράψιμα κυρτά τετράπλευρα !

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό κυρτού τετραπλεύρου με δοσμένα μήκη πλευρών. Ίσως αυτό αποτελέσει θέμα άλλου άρθρου.

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στον Νεύτωνα άρεσαν οι γρίφοι και τα μαθηματικά αινίγματα.
Στο σχολείο ήταν ονειροπόλος και αφηρημένος. Μεγάλωσε με τον παππού και την γιαγιά του. Με το έργο του "principia" εισήγαγε τα μαθηματικά στη φυσική και επινόησε το Διαφορικό Λογισμό.

Οι σκίουροι

Ένας σκίουρος με το μικρό σκιουράκι μπήκαν 3 φορές στην αποθήκη του κυρ Βαγγέλη και πήραν ισάριθμες ποσότητες από στραγάλια και φουντούκια. Όταν είναι έτοιμα να αρχίσουν το ροκάνισμα βλέπουν τον κυρ Βαγγέλη να πλησιάζει με το μπαστούνι του. Υπολογίζουν ότι για να τους φτάσει θα περάσουν $2\frac{1}{4}$ λεπτά. Άρχισαν να τρώνε με λαιμαργία, ο σκίουρος τρώει 10 φουντούκια στο λεπτό, τα τρώει όλα στα 2/3 αυτού του χρόνου και βοηθά το σκιουράκι να φάει τα στραγάλια, πρόλαβαν να φύγουν στο παρά πέντε. Ο σκίουρος καταναλώνει τα στραγάλια 2 φορές πιο γρήγορα από ότι τα φουντούκια. Με πόση ταχύτητα το σκιουράκι τρώει τα στραγάλια;

Τα μαλλιά της δασκάλας

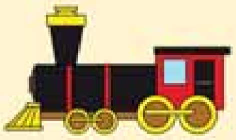
Μια μέρα συναντήθηκαν στο δρόμο τρείς κοπέλες η Εμι **Μαύρου** ιατρός, η Νίνα **Κόκκινου** δασκάλα και η Σοφία **Λευκού** ηθοποιός, όλες φορούσαν τα κόκκινα καπέλα τους. Μια από τις κοπέλες είπε: Εγώ έχω μαύρα μαλλιά, μια από σας έχει άσπρα και η άλλη κόκκινα, όμως σε καμία το όνομα δεν ταιριάζει με το χρώμα των μαλλιών της. Αμέσως όλες έβγαλαν το καπέλο τους και η Σοφία απάντησε : Πολύ σωστά. **Ερώτηση**: Τι χρώμα έχουν τα μαλλιά της δασκάλας;

Οι αδελφές

Πόσο χρόνων είστε δεσποινίδες; ρώτησαν την Μαίρη και την Εύα. Η Μαίρη απάντησε: Σε 9 χρόνια θα είμαι 3 φορές μεγαλύτερη από ότι ήμουν πριν 9 χρόνια. Ενώ η αδελφή της η Εύα είπε: Αν 3πλασιάσετε την ηλικία που θα έχω σε 3 χρόνια και από αυτό αφαιρέσετε το 3πλάσιο της ηλικίας που είχα πριν 3 χρόνια τόσων χρόνων είμαι. Είναι δίδυμες;

Τα δώρα

Ο θείος για το Πάσχα είπε να κάνει δώρα μόνο στα μικρά ανίψια, τρενάκι στα αγόρια, κούκλες στα κορίτσια. Τα μέτρησε και όλα τα ανίψια είναι 16. Όμως τα 4/9 των αγοριών είναι μεγάλα και δεν θα τους δώσει δώρο αλλά χρήματα. Πόσα τρενάκια και πόσες κούκλες θα αγοράσει;



Τέλεια τετράγωνα

Ποιος ακέραιος αριθμός όταν προστεθεί είτε στο 7 είτε στο 24 δίνει άθροισμα που είναι τέλειο τετράγωνο;

Οι πίτες

Ο Πέτρος θέλει να δουλέψει σε μια ψησταριά, ο υπεύθυνος του καταστήματος για να τον προσλάβει του έθεσε τον εξής γρίφο: πρέπει να ψήσεις τρεις πίτες αλλά η ψησταριά χωράει μόνο δύο. Η κάθε πίτα θέλει δύο λεπτά από κάθε πλευρά για να ψηθεί. Μπορείς να τις ψήσεις σε έξι λεπτά;

Ο Λαγός και η Αλεπού

Ο Λαγός και η Αλεπού αν τρέξουν σε μια κούρσα 100 μέτρων μόλις τερματίσει ο Λαγός η Αλεπού θα βρίσκεται στα 90 μέτρα. Αν ο Λαγός ξεκινήσει 10 μέτρα ποιο πίσω από την Αλεπού θα τερματίσουν ταυτόχρονα;

Το ζύγισμα

Έχουμε 5 ίδια μπουκάλια νερό αλλά έχουν διαφορετικό βάρος. Πώς θα βρούμε το μπουκάλι που έχει βάρος 1000 gr με τρία μόνο ζυγίσματα, αν ξέρουμε ότι τα βάρη είναι: 1000gr,1001gr,1002gr,1004gr,1007gr;

Οι αριθμοί 2 και 3

Έχουμε ότι $-6 = -6$ ή $4- 10 = 9 – 15$ ή $4 – 2.2.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} = 9- 2.3.\frac{5}{2} + \frac{25}{4}$ ή $(2- \frac{5}{2})^2 = (3- \frac{5}{2})^2$ ή $2-\frac{5}{2} =$

$= 3- \frac{5}{2}$ ή $\boxed{2 = 3}$!!! Σωστά;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 120

Τα διαστημόπλοια: Οι εκτοξεύσεις των διαστημοπλοίων γίνονται κοντά στον ισημερινό για να είναι μικρότερο το βάρος τους. Φεύγουν ανατολικά για να προστίθεται στην ταχύτητά τους η ταχύτητα των 1670 km/h περιστροφής της Γης, ώστε να αποκτήσουν ευκολότερα την ταχύτητα διαφυγής από την έλξη της Γης..

Οι Ανεξεταστέοι: Οι ανεξεταστέοι είναι 50. Στα μαθήματα μετράμε 36+35+40+42=153 αν όλοι είχαν από 3 θα ήταν 3x50=150. Άρα 153-150 =3 τουλάχιστον έχουν μείνει και στα 4 μαθήματα.

Το πληκτρολόγιο: Η θέση των γραμμάτων στο πληκτρολόγιο των Η/Υ είναι ίδια με αυτή που είχαν παλιά οι γραφομηχανές. Η θέση τους αυτή εξυπηρετούσε το «τυφλό σύστημα» γραφής QWERTY. Η συχνότητα που επαναλαμβάνεται στα κείμενα π.χ. το **Α** είναι μεγαλύτερη από αυτή του **Ξ**. Έτσι έπρεπε το **Α** να πατηθεί με το μικρό δάκτυλο του αριστερού χεριού και το **Ξ** με το δείκτη του δεξιού, αντίθετα δηλαδή από την ευκολία λειτουργίας των δακτύλων για να μην μπερδεύονται οι μοχλοί των πλήκτρων. Παρέμεινε αυτή η σειρά γιατί οι δακτυλογράφοι συνέχισαν να εργάζονται με το ίδιο «τυφλό σύστημα» στους Η/Υ.

Μαμά και κόρη: Ποτέ. Μόνο το δεξί θα πατά ταυτόχρονα ανά 4 βήματα της μαμάς και 6 της κόρης.

ΜΑΜΑ	Δ 1^o Α 2^o Δ 3^o Α 4^o Δ
ΚΟΡΗ	Δ 1^oΑ 2^o Δ 3^o Α 4^o Δ 5^o Α 6^o Δ

Το δέντρο: Αν Χ είναι το ύψος του δέντρου τότε $X^2 =(X-2)^2 +6^2$ δηλαδή Χ=10

Το βαρέλι: Ένα βαρέλι = 159 λίτρα, κάθε μέρα σε όλη τη Γη καταναλώνουμε 80-90 εκατομμύρια βαρέλια πετρελαίου. Το Brent είναι ελαφρύ μείγμα (38 API) με λίγο θείο, του Opec είναι βαρύ (22 API). Τα βαρέλια δημιουργήθηκαν για πρώτη φορά πριν 1500 χρόνια και αντικατέστησαν τους εύθραυστους αμφορείς. Έτσι το εμπόριο και η μεταφορά αγαθών, κρασί, ψάρια παστά, τυρί, φρούτα, αλάτι, παστά κρέατα, και άλλα αγαθά γινόταν με βαρέλια.

Ο Μαραθώνιος: α) δεύτερος β) ο δεύτερος είναι ο προ τελευταίος γ) στους δύο που έφτασαν στην κορδέλα ο προ τελευταίος είναι πρώτος.

Τα Μαθηματικά τον πρώτο αιώνα του Ελληνικού Κράτους

Παναγιώτης Χριστόπουλος

Με την ίδρυση του κράτους η πρώτη φροντίδα του κυβερνήτη **Ιωάννη Καποδίστρια** ήταν να μορφώσει τα αναλφάβητα Ελληνόπουλα. Με ποιους όμως δασκάλους και σε ποια σχολεία;
Όλα θα γίνουν με τους λίγους Έλληνες που γνώριζαν γραφή και ανάγνωση με την έξυπνη μέθοδο που εφάρμοσε του **αλληλοδιδακτικού σχολείου**. Καθένας που γνώριζε ή μάθαινε γράμματα δίδασκε τους άλλους. Κατασκεύασε νέα σχολεία, ίδρυσε την εκκλησιαστική σχολή στον Πόρο, σχολεία ήταν και το ορφανοτροφείο που δημιούργησε στην Αίγινα, τα στρατόπεδα, οι χώροι των εκκλησιών και κάθε άλλος χώρος. Η ίδρυση του πανεπιστημίου θα γινόταν όταν θα είχε απόφοιτους της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έδειξε ενδιαφέρον για τη γεωργία, βασική πηγή πλούτου της Ελλάδας και ίδρυσε τη Γεωργική σχολή της Τίρυνθας και ενθάρρυνε την **καλλιέργεια της πατάτας**. Ακόμα ίδρυσε στην Αίγινα το πρώτο αρχαιολογικό μουσείο.

Παράλληλα φρόντισε να οργανώσει το κράτος για να **δημιουργήσει δασκάλους και καθηγητές**. Τα σχέδιά του όμως δεν πρόλαβε να τα ολοκληρώσει αφού του αφαίρεσαν την ζωή οι δολοφόνοι. Η δολοφονία του ήταν μια καταδίκη της Ελλάδας σε πολυετείς περιπέτειες. Για την ανώτατη εκπαίδευση **το** 1837, Ιδρύθηκε με βασιλικό διάταγμα του Όθωνα το Πανεπιστήμιο Αθηνών και λειτούργησε από 3 Μάη του ίδιου χρόνου. Το Πανεπιστήμιο Αθηνών είναι **το πρώτο** ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα της Ελλάδας, **το πρώτο** της Βαλκανικής Χερσονήσου και της Ανατολικής Μεσογείου.


Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

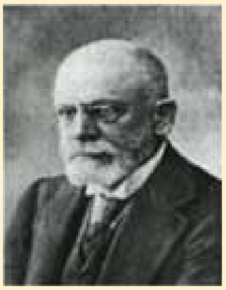
Ονομαζόταν «Πανεπιστήμιον του Όθωνος» μέχρι το 1862 που μετονομάστηκε σε «Εθνικό Πανεπιστήμιο» και λειτουργούσαν οι σχολές: Νομική, Θεολογία, Ιατρική και Φιλοσοφική. Το 1837 το Μαθηματικό τμήμα ανήκε στη Φιλοσοφική σχολή. Αυτό ήταν φυσιολογικό για την εποχή και την κρατούσα εσωτερική κατάσταση του τότε ελληνικού κράτους. Η οργάνωση Πανεπιστημίου έγινε κατά τα Γερμανικά πρότυπα, σύμφωνα με τα οποία οι νεοσύστατες φυσικές επιστήμες και η διδασκαλία τους αποτελούσαν μέρος των γενικότερων φιλοσοφικών σπουδών. Άλλωστε και στον ευρύτερο ευρωπαϊκό χώρο οι φυσικές επιστήμες, ως κατά βάση θεωρητικός λόγος για τη φύση, δεν είχαν εντελώς αποκολληθεί από το φιλοσοφικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν. Ο κύριος σκοπός της Φιλοσοφικής Σχολής ήταν η στελέχωση της μέσης εκπαίδευσης. Το Μαθηματικό έγινε ανεξάρτητο τμήμα **το** 1904. Το πρώτο έτος λειτουργίας του είχε 33 καθηγητές και 52 φοιτητές αλλά και 75 ακροατές. Αρχικά στεγάστηκε στην Πλάκα και τέλος του 1841 στο σημερινό κεντρικό κτήριο της Πανεπιστημίου που σχεδίασε ο Δανός αρχιτέκτονας Χανς Κρίστιαν Χάνσεν. Το 1911 για να κληρονομήσει την τεράστια περιουσία του Δόμπολη, διχοτομήθηκε, στο **Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο όπως ήθελε ο Ι. Δόμπολης** (στο οποίο ανήκαν οι θεωρητικές σχολές) και το **Εθνικό Πανεπιστήμιο** (στο οποίο ανήκαν οι θετικές σχολές). Τα δύο νομικά πρόσωπα συγχωνεύθηκαν ξανά το 1932 με το σημερινό του όνομα **Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών**. Στο Οθώνειο Πανεπιστήμιο τα πρώτα χρόνια δίδαξαν καθηγητές της διασποράς. Οι δύο πρώτοι Καθηγητές που διορίσθηκαν το 1837 στην τότε Φιλοσοφική Σχολή σε Έδρες Μαθηματικών ήταν ο **Κωνσταντίνος Νέγρης** (1804-1880), απόφοιτος της πολυτεχνικής σχολής των Παρισίων, από το 1837 έως το 1845, και ο **Γεώργιος Βούρης** (1802-1860), απόφοιτος του πανεπιστημίου της Βιέννης. από το 1837 έως το 1855. Ο Βούρης έγραψε την πεντάτομη «Σειρά των Μαθηματικών» και εκτός των άλλων δίδαξε Αστρονομία από το 1844 έως το 1855. Ο Βούρης με ενέργειές του παρακίνησε τον τότε Γενικό Πρόξενο της Ελλάδας στη Βιέννη, βαρόνο **Γεώργιο Σίνα** να χρηματοδοτήσει την ίδρυση του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών, που τελικά δημιουργήθηκε δίπλα στην Πνύκα το 1846. Έγινε εκεί που πριν 2200 χρόνια ο Μέτωνας είχε το Αστεροσκοπείο του. Ο Μέτων σε αυτόν τον ιερό τόπο πραγματοποίησε τις παρατηρήσεις του και επινόησε το 432 π.Χ. τον σεληνιακό κύκλο ή 19ετή Ηλιακό κύκλο, εφεύρεση πολύ σπουδαία τότε για τους Αθηναίους. Πρώτος Διευθυντής του Αστεροσκοπείου Αθηνών ήταν ο Γ. Βούρης, που εγκαινίασε την επιστημονική δράση του Ιδρύματος με τον καθορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων του.

Άλλοι Μαθηματικοί-Αστρονόμοι, που διετέλεσαν Καθηγητές, ήταν οι: **Ιωάννης Παπαδάκης** (1825-1876) και **Δημήτριος Κοκκίδης** (1840-1896). Από τους Έλληνες Μαθηματικούς της εποχής, ο πρώτος που έτυχε διεθνούς αναγνώρισης ήταν ο **Νικόλαος Χ. Νικολαΐδης** (1826-1889). Ο Νικολαΐδης ήταν αξιωματικός του μηχανικού, σπούδασε στο Πανεπιστήμιο των Παρισίων, όπου και ανακηρύχθηκε διδάκτορας. Διετέλεσε τακτικός Καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών το διάστημα 1871-1881. Έλαβε δε μέρος στην Κρητική Επανάσταση του 1866, ως επικεφαλής σώματος εθελοντών. Ο Νικολαΐδης ασχολήθηκε κυρίως με θέματα Διαφορικής Γεωμετρίας και οι εργασίες του αναφέρονται από ευρωπαίους Μαθηματικούς της εποχής. Πρώτος διδάκτορας του Μαθηματικού Τμήματος της Φιλοσοφικής Σχολής το 1850 ήταν ο **Βασίλειος Λάκων** (1830 – 1900) από την Κέα. Ο Λάκων πήγε στο Παρίσι 1851-54 και όταν επέστρεψε δίδαξε σε σχολεία και στο πανεπιστήμιο, το 1880-1881 ήταν Πρύτανης του Ιδρύματος και βοηθός καθηγητής στο Αστεροσκοπείο. Μεθοδικός και πρωτοπόρος, το 1895-97 δίδαξε μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Τα διδακτικά βιβλία του Λάκωνα, ευανάγνωστα και μεθοδικά. Στην ίδια γενιά ανήκει και ο Καθηγητής των Μαθηματικών το 1872 στο Πανεπιστήμιο **Αθανάσιος Κυζηκινός** (1822-1894).

Ν. Χ. Νικολαΐδης (1826-1889)

Η **πραγματική άνθηση των Μαθηματικών** στο Ελληνικό Πανεπιστήμιο μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται με την **επόμενη γενιά Καθηγητών**, η οποία βέβαια στηρίχθηκε και στα γερά θεμέλια που έθεσαν οι Καθηγητές τους. Οι καθηγητές αυτοί είναι: ο **Ιωάννης Ν. Χατζιδάκις** (1844-1921) και ο **Στέφανος Κυπάρισσος** (1857-1917) οι οποίοι διορίστηκαν το 1884 καθηγητές των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Έγραψαν βιβλία και δημοσίευσαν εργασίες που έχουν θεμελιώδη χαρακτήρα και αποτέλεσαν τη βάση της Ανώτατης Μαθηματικής Εκπαίδευσης κατά το τέλος του 19ου αιώνα. Ο **Στέφανος Κυπάρισσος** γεννήθηκε στην **Κέα το** 1857, φοίτησε στο Γυμνάσιο της Σύρου και στη συνέχεια στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών. Σε ηλικία 20 ετών, ανακηρύχτηκε διδάκτωρ της φιλοσοφίας των Μαθηματικών. Πήγε για μεταπτυχιακές σπουδές στο Παρίσι, κοντά σε σπουδαίους Γάλλους μαθηματικούς. Το 1881 ανακοινώνει εργασίες του στη Γεωμετρία, Άλγεβρα και Ολοκληρωτικό Λογισμό και την εργασία «**περί της γεωμετρίας των σφαιρών**» στην Ακαδημία Επιστημών στο Παρίσι. Ο Γερμανός μαθηματικός **Τόμας Κλάϊν** δημοσίευσε εργασίες του Κυπάρισσου για την «ανάπτυξη της Γεωμετρίας των κύκλων στον χώρο» και την «απεικόνιση της γραμμικής Γεωμετρίας σ' ένα 4διάστατο χώρο». Στα έργα του υπάρχει η ομορφιά και η αρμονία των τύπων και των μεθόδων. Αναδείχτηκε σε κορυφαίο μαθηματικό του 19ου αιώνα. Έγινε καθηγητής του Πανεπιστημίου, του Πολυτεχνείου, και καθηγητής του πανεπιστημίου Παρισίων. Οι εκπαιδευτικοί ανέθεσαν στον Κυπάρισσο και την προεδρία του συλλόγου τους ο οποίος με το κύρος του πέτυχε την μονιμότητά τους το 1905 (το 1911 έγινε και για τους Υπαλλήλους του Δημοσίου). Τον **Κυπάρισσο** τίμησε **το** 2014, η Ακαδημία Αθηνών.

Εκατό χρόνια από την Ελληνική Επανάσταση του 1821 στις αρχές του 20^{ου} αιώνα η Ελλάδα αγωνίζεται ακόμα για να απελευθερώσει τα εδάφη της. Το 1918 πλησιάζει η λήξη του Α΄ Παγκόσμιου πολέμου, έχει προηγηθεί η Ρωσική Επανάσταση και η μικρή Ελλάδα της Πελοποννήσου και της Στερεάς, μόλις έχει απελευθερώσει μερικά ακόμα εδάφη της (Ήπειρο, Κρήτη, νησιά του Αιγαίου, Μακεδονία) και κάνει **αγώνες** για **συνταγματικές ελευθερίες**. Ο πρωθυπουργός **Ελευθέριος Βενιζέλος** κάνει προσπάθειες για τον εκσυγχρονισμό της εκπαίδευσης. Στις θετικές επιστήμες η θεωρία της **σχετικότητας του Αϊνστάιν** έχει αναστατώσει τα Πανεπιστήμια. Ο φίλος και δάσκαλος του Αϊνστάιν **Κων/νος Καραθεοδωρή**, παίρνει τη θέση καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου, και αποδεχόμενος πρόταση του **Ελευθέριου Βενιζέλου** φροντίζει για την ίδρυση πανεπιστημίου στη Σμύρνη. Τότε οι μαθηματικοί στην Ελλάδα είναι μια δυο εκατοντάδες όλοι-όλοι και μάλιστα μόνο άνδρες που εργάζονται στην Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Το 1904, στο πρώην **Οθώνειο** Πανεπιστήμιο που από το 1862 λεγόταν Εθνικό, διαχωρίστηκε η σχολή των Τεχνών σε Τεχνών και Επιστημών. Σε αυτή των επιστημών ήταν και το μαθηματικό τμήμα.



Στ. Κυπάρισσος (1857-1917)

Το 1911 έγινε δεκτή η διαθήκη του Εθνικού Ευεργέτη **Δόμπολη** και χωρίστηκε στο **Εθνικό** με τις θετικές σχολές και το **Καποδιστριακό** με τις θεωρητικές μέχρι το 1932 που συγχωνεύτηκαν.

Το 1925 ιδρύθηκε κατά την πρόταση του **Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή** το Πανεπιστήμιο

Θεσσαλονίκης, το οποίο το 1954 ονομάστηκε Αριστοτέλειο. Η πρότασή του **Καραθεοδωρή** ήταν για εκπαιδευτικό κέντρο του Ελληνισμού στην Κωνσταντινούπολη ή τη Σμύρνη. Ιδρύθηκε στην Κωνσταντινούπολη αλλά δεν πρόλαβε να λειτουργήσει, χάθηκε η ιδέα της Μεγάλης Ελλάδας το 1922 και έτσι έγινε το πανεπιστήμιο της Θεσσαλονίκης. Ιδιαίτερα σημαντική, αν και βραχεία, ήταν η παρουσία του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή (1873-1950) στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, ως τακτικού Καθηγητή της Μαθηματικής Ανάλυσης κατά το διάστημα 1922-1923. Ο Καραθεοδωρή ήταν Μαθηματικός του απόδημου Ελληνισμού και είχε αρχικά προσκληθεί από τον Ελευθέριο Βενιζέλο για να οργανώσει το Πανεπιστήμιο της Σμύρνης. Ήταν φίλος και συνεργάτης του Αϊνστάιν, ήταν ο άνθρωπος που ο Αϊνστάιν εμπιστευόταν στις μαθηματικές του γνώσεις, για την επίλυση των μαθηματικών εξισώσεων της θεωρίας της σχετικότητας. Ο **Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή** ήταν από τις **σημαντικότερες παγκοσμίως μαθηματικές** μορφές του 20ου αιώνα. Αναγορεύτηκε μέλος σε πολλές Ακαδημίες Επιστημών όπως των Αθηνών, του Βερολίνου, της Γοττίγγης, του Μονάχου, της Μπολόνιας και της Παπικής Ακαδημίας του Βατικανού. Μεγάλο ατύχημα ήταν για την εξέλιξη της Μαθηματικής Επιστήμης στην Ελλάδα, που **κάποια συμφέροντα δεν επέτρεψαν** τότε την μονιμότερη **παραμονή του Καραθεοδωρή** στην Ελλάδα. Πάντως ο Καραθεοδωρή συνέχισε να προσφέρει τις υπηρεσίες του στην Ελλάδα και ήταν ο βασικός συντάκτης του Νόμου 5343/1932, με τον οποίο λειτούργησαν τα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα της χώρας μας για μια πεντηκονταετία.

Κ. Καραθεοδωρή (1873-1950)

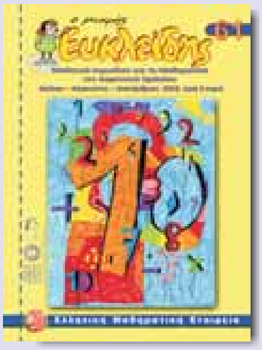
Σε εκείνα τα χρόνια σημαντικός ήταν και ο ρόλος της Ιονίου Ακαδημίας και του διακεκριμένου επιστήμονα και πρώτου πρύτανη της Ακαδημίας **Ιωάννη Καραντινού** (1824-32), ο οποίος, διαπιστώνοντας την ισχυρή θέση της Γαλλίας στα Μαθηματικά, δημιούργησε με τις μεταφράσεις του, την αναγέννηση των επιστημών στην Ελλάδα.

Οι δυσκολίες τα πρώτα χρόνια ήταν πολλές. Υπήρχε **πολιτική** αστάθεια, **δεν υπήρχαν βιβλία** (χρησιμοποιούσαν μεταφράσεις από Γαλλικά ή Γερμανικά βιβλία), τα μαθήματα ήταν πολλά (μαθηματικά, φυσική, χημεία, Γεωλογία, Ζωολογία, Αστρονομία, Μεταφυσική, Ιστορία, φιλοσοφία, Ελληνική και Λατινική Φιλολογία, κ.ά.) και οι φοιτητές ελάχιστοι. Οι πιο πολλοί φοιτητές προτιμούσαν κατά σειρά τη Νομική, τη Θεολογία, την Ιατρική. Το Πανεπιστήμιο έπρεπε να βγάλει καθηγητές να διδάξουν στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά έπρεπε να βρει και τους φοιτητές που θα μπορούσαν να συνεχίσουν τις σπουδές τους στα ξένα Πανεπιστήμια (Γαλλίας ή Γερμανίας) για να καλύψουν στη συνέχεια τις ανάγκες του Πανεπιστημίου Αθηνών. **Το** 1918 μια μόνο σχολή μαθηματικών υπήρχε, αυτή στο Πανεπιστήμιο της Αθήνας που **είχε μόλις** 29 **φοιτητές**. Η Βιομηχανική Επανάσταση αναγκάζει τους εργαζόμενους σε όλο τον κόσμο να αμυνθούν και ξεκινούν τα συνδικαλιστικά κινήματα. Μάλιστα οι συνδικαλιστικές ελευθερίες θα κατοχυρωθούν για πρώτη φορά στο σύνταγμα της Βαϊμάρης το 1919. Μέσα σε αυτό το κλίμα οι μαθηματικοί της Ελλάδας αποφασίζουν να ιδρύσουν την **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία**. Την πρωτοβουλία για την ίδρυση είχαν ο **Στέφανος Κυπάρισσος**, **ο Ιωάννης Χατζηδάκης και ο Δημήτρης Αιγινήτης**. Σκοπός της κίνησης αυτής δεν είναι μόνο να γίνει ένα επιστημονικό σωματείο αλλά και μια κλαδική συνδικαλιστική οργάνωση. Στις 15-4-1918 εκλέγεται το πρώτο Δ. Σ. με πρόεδρο τον **Νικόλαο Χατζηδάκη** και γραμματέα το **Νείλο Σακελαρίου** (στο 11μελές συμβούλιο είναι οι **Παναγιώτης Ζερβός**, **Γεράσιμος Ρεμούνδος κ.ά**). Τα μέλη του συμβουλίου είναι από το Πανεπιστήμιο, τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και την Εμπορική σχολή. Οι ομιλίες τους σε εκείνη τη συνέλευση αναφέρονται: στην **ενίσχυση της διδασκαλίας** των Μαθηματικών και στην απαλλαγή της διδασκαλίας από περιττές έννοιες που κουράζουν τους μαθητές. Τα επόμενα χρόνια θα είναι δύσκολα για την Ελλάδα. Η Μαθηματική Εταιρεία θα αποτελέσει για τους μαθηματικούς το επιστημονικό καφενείο, ένα τόπο συνάντησης και ανταλλαγής απόψεων. Θα ξεπεράσουν έτσι τις δυσκολίες της μικρασιατικής καταστροφής του 1922, την οικονομική κρίση του 1929, τις δύσκολες μέρες της κυβέρνησης Μεταξά το 1936, το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, τον εμφύλιο που ακολούθησε και την δικτατορία του 1967.

Με τη μεταπολίτευση, η ΕΜΕ έπαιξε **πρωταγωνιστικό ρόλο** στα Μαθηματικά της εκπαίδευσης με εκδόσεις, διαγωνισμούς και συνέδρια και έτυχε πολλών διακρίσεων. Το 2018 τιμήθηκε με το **χρυσό μετάλλιο της Ακαδημίας Αθηνών**.

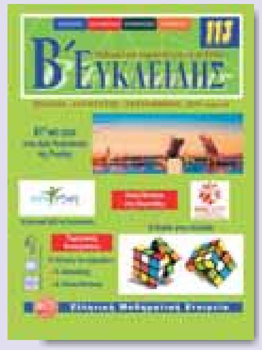
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



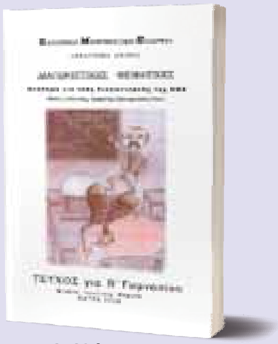
Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί

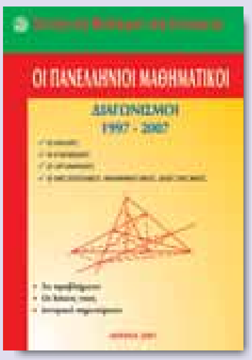


Τιμή βιβλίου: 12€

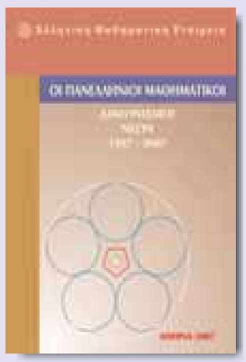
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες



Τιμή βιβλίου: 30€

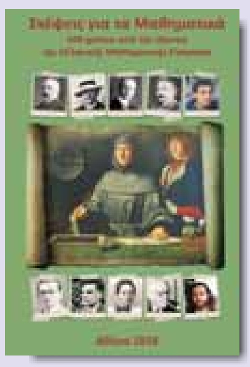


Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr