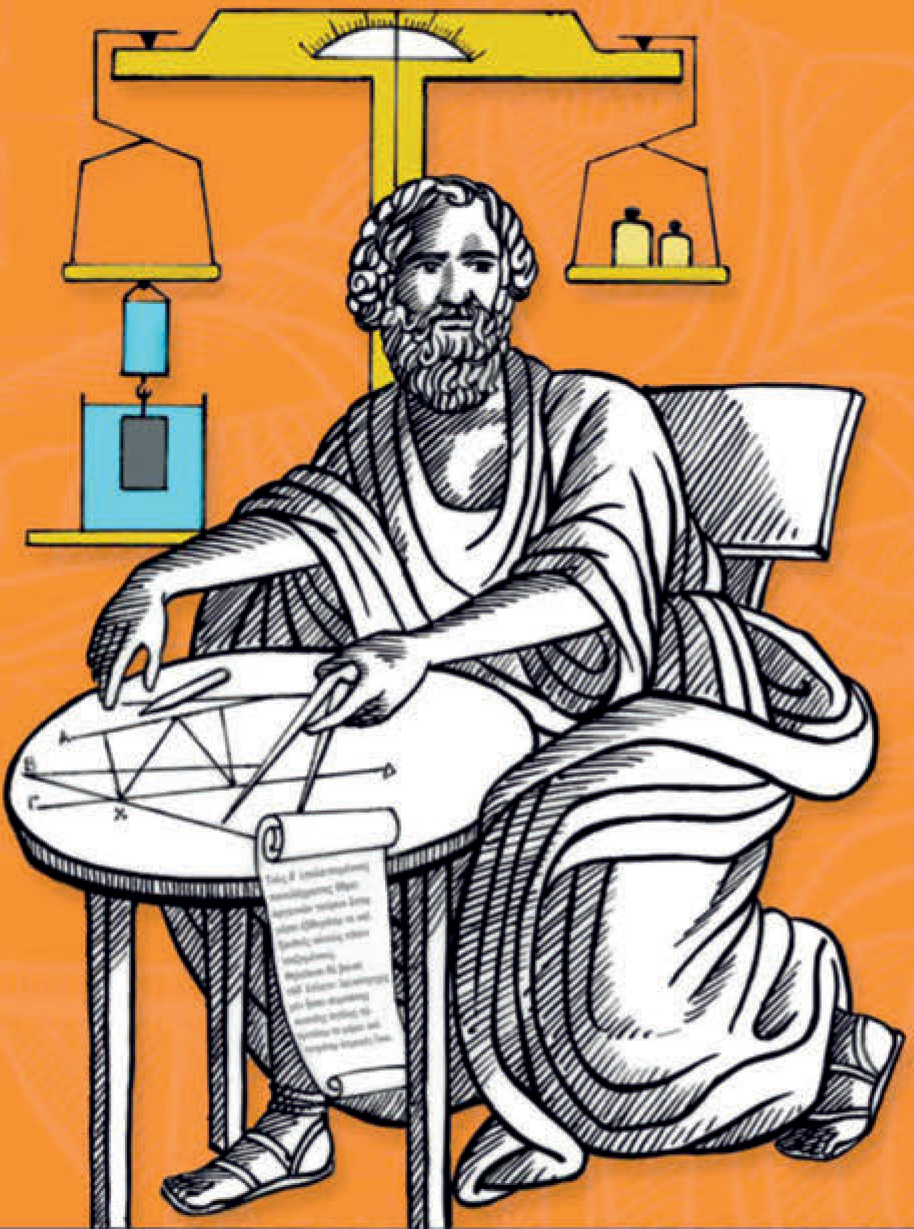
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δημήτριος Αργυράκης Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής Σταματούλα Τσικοπούλου Μιχαήλ Χρυσοβέργης



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Μαθηματικά

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Δημήτριος Αργυράκης**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Παναγιώτης Βουργάνας**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Κωνσταντίνος Μεντής**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Σταματούλα Τσικοπούλου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Μιχαήλ Χρυσοβέργης,** *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
ΚΡΙΤΕΣ - ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Εμμανουήλ Μανατάκης**, *Επίκουρος καθηγητής Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών* **Μιχαήλ Σαλίχος**, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών* **Νικόλαος Παπαευστρατίου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Νικόλαος Μαρουλάκης**, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ευγενία Βελάγκου**, *Φιλόλογος*
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Δημήτριος Κοντογιάννης**, *Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Παναγιώτης Γράββαλος**, *Ζωγράφος*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση — ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ — ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ — ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πρόλογος

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου, έχει σκοπό να βοηθήσει εσένα το μαθητή της Γ′ Γυμνασίου, να κατανοήσεις και να εμπεδώσεις τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και να αποκτήσεις τις αναγκαίες δεξιότητες που περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα της τάξης σου.
Η ύλη του βιβλίου είναι οργανωμένη σε δύο μέρη. Το Α′ Μέρος περιλαμβάνει 5 Κεφάλαια που αναφέρονται στην Άλγεβρα, ενώ το Β′ Μέρος περιλαμβάνει 2 Κεφάλαια που αναφέρονται στη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Κάθε Κεφάλαιο χωρίζεται σε ενότητες μαθημάτων.

Σε κάθε ενότητα περιλαμβάνονται:
1. Οι κύριοι στόχοι. Στην αρχή κάθε ενότητας αναγράφονται οι κύριοι στόχοι της, όπως διατυπώνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, ώστε να ξέρεις πού σε οδηγεί ο καθηγητής σου.

2. Η δραστηριότητα. Οι δραστηριότητες είναι μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, όσο το δυνατόν πιο κοντά στα ενδιαφέροντά σου, που οδηγούν στην αναγκαιότητα της εισαγωγής των εννοιών που θα διδαχθείς ή στην επανάληψη και διεύρυνση άλλων που έχεις ήδη διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Με κατάλληλα ερωτήματα γίνεται προσπάθεια να επικεντρωθεί η προσοχή σου σε ορισμένες ενέργειες που θα σου δώσουν την ευκαιρία να αναπτύξεις πρωτοβουλία, να διατυπώσεις τις ιδέες και απόψεις σου και να τις ανταλλάξεις με τους συμμαθητές σου.

3. Το κυρίως μάθημα. Περιλαμβάνει γνώσεις που πρέπει να αποκτήσεις, να συγκρατήσεις και να μπορείς να εφαρμόζεις, όπως ορισμούς και ιδιότητες, που θα σου επιτρέψουν να επιλύεις προβλήματα και να διατυπώνεις συλλογισμούς. Σε πολλές περιπτώσεις περιλαμβάνει αποδείξεις βασικών προτάσεων.

4. Παραδείγματα - Εφαρμογές. Πρόκειται για ένα σύνολο λυμένων ασκήσεων και προβλημάτων, που σκοπεύουν να σου δώσουν τη δυνατότητα να μάθεις πώς να αντιμετωπίζεις ανάλογες ασκήσεις, να διαπιστώσεις την ευρύτητα των εφαρμογών που έχουν τα Μαθηματικά, να αποκτήσεις νέες εμπειρίες στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και να διευρύνεις το πεδίο των γνώσεών σου.

5. Ερωτήσεις κατανόησης. Είναι απλά ερωτήματα ή σύντομα προβλήματα τα οποία πρέπει να μπορείς να απαντήσεις, μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος.

Πρόλογος

6. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε για τη συλλογή και την ταξινόμηση των προτεινόμενων ασκήσεων και προβλημάτων. Από τις πιο απλές ασκήσεις ως τα πιο σύνθετα προβλήματα, έγινε προσπάθεια να αναδειχθεί η χρησιμότητά τους σε κάθε τομέα εφαρμογής τους, (Φυσική - Χημεία - Οικονομία κ.τ.λ.) που ενδείκνυται για την ηλικία και τις γνώσεις σου, αλλά και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Σε ορισμένες ενότητες περιλαμβάνονται συμπληρωματικά:
- **Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών** και **Δραστηριότητες** που στοχεύουν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον σου ώστε να συνεισφέρουν στην κατανόηση των εννοιών και των μαθηματικών προβλημάτων στα οποία αναφέρονται.
- **Διαθεματικά σχέδια εργασίας.** Πρόκειται για δραστηριότητες οι οποίες θα αποτελέσουν θέματα για ομαδική έρευνα και συνεργασία.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν:
- **Γενικές Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα** και μια σύντομη **Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση** με τις βασικότερες γνώσεις που αποτελούν τον πυρήνα του κεφαλαίου.

Το βιβλίο κλείνει με:
Απαντήσεις - Υποδείξεις των ασκήσεων και **Ευρετήριο όρων.**

Πιστεύουμε ότι το βιβλίο αυτό ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της σύγχρονης παιδαγωγικής και ότι οι γνώσεις που θα αποκτήσεις από αυτό θα σε βοηθήσουν στα επόμενα βήματά σου. Για να επιτευχθούν οι στόχοι του βιβλίου αυτού εκτός από τη δική σου προσπάθεια, χρειάζεται και η αρμονική συνεργασία με τον καθηγητή σου.

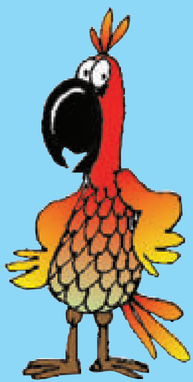
Οι συγγραφείς

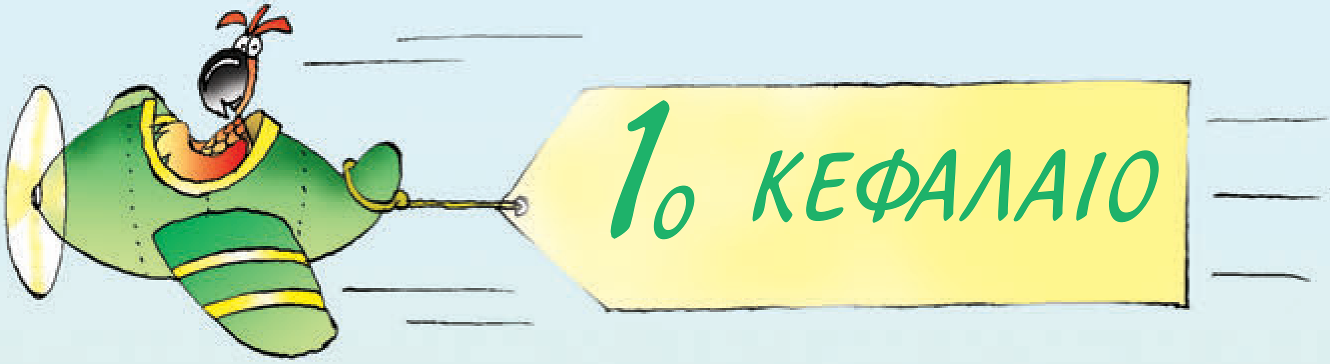
Περιεχόμενα

Α′ ΜΕΡΟΣ • ΑΛΓΕΒΡΑ

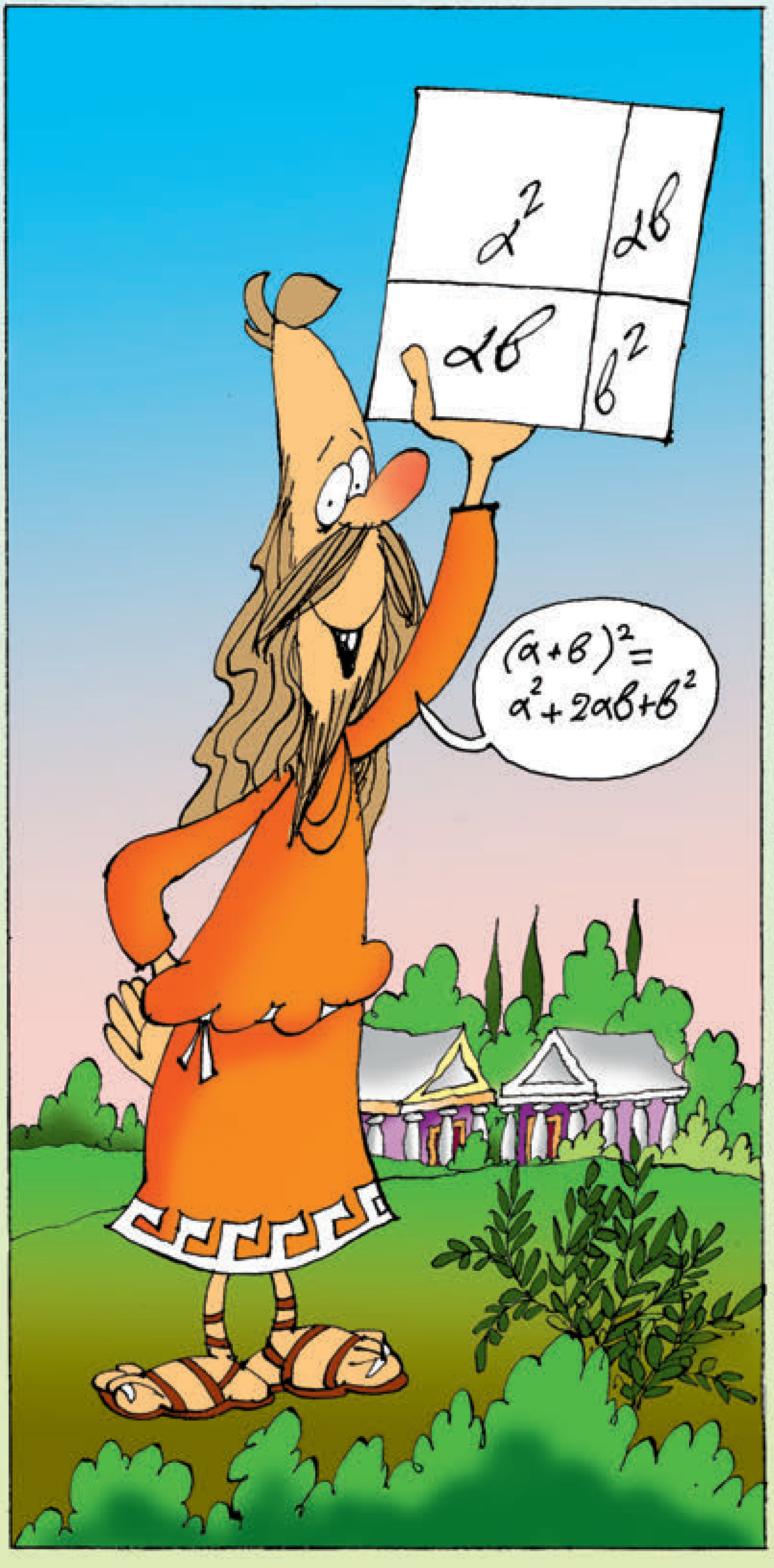
Περιεχόμενα


Α΄ ΜΕΡΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ



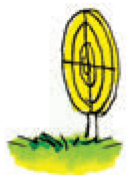


ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

✔ *Θυμάμαι τους πραγματικούς αριθμούς, τις τεχνικές και τις βασικές ιδιότητες των πράξεών τους.*
✔ *Εμπεδώνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.*
✔ *Γνωρίζω τις ιδιότητες των ριζών και μαθαίνω να τις χρησιμοποιώ.*



Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

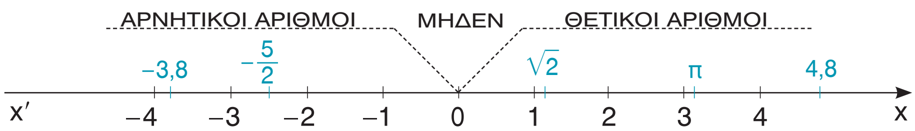
Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε στις προηγούμενες τάξεις.
Π.χ. $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}$, 7,34, $\sqrt{2}$, 3, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sqrt{4}$, –0,5, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...
Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

$\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2} = \frac{-5}{2}$, $7{,}34 = \frac{734}{100}$,
$3 = \frac{3}{1}$, $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$, $-0{,}5 = \frac{-5}{10}$.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

$\sqrt{2}$, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...



Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μ' ένα σημείο πάνω σ' έναν άξονα.

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.
Για παράδειγμα: $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|0| = 0$, $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Πρόσθεση

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο άθροισμα αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

$+7 + 5 = +12$
$-7 - 5 = -12$

- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$+5-7=-2$
$-5+7=+2$

Πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε πρόσημο +

$(+5)\cdot(+7)=+35$
$(-5)\cdot(-7)=+35$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε πρόσημο –

$(+5)\cdot(-7)=-35$
$(-5)\cdot(+7)=-35$

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιαμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\quad \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι:

- $\alpha\cdot 0=0$.
- Αν $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$.
- Αν $\alpha\cdot\beta\neq 0$, τότε $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

$-3\,,\ 3$
$\frac{4}{5}\,,\ \frac{5}{4}$

Αφαίρεση – Διαίρεση

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$5-7=5+(-7)=-2$
$5-(-7)=5+(+7)=12$

$$\boxed{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$$

- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($\alpha:\beta$, ή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta\neq 0$), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$-5:15=-5\cdot\frac{1}{15}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}$

$$\boxed{\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$

Λύση

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3-\left(-\frac{1}{6}\right)=$

$=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3+\frac{1}{6}=\frac{27}{6}+\frac{2}{6}-\frac{18}{6}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$

β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}}=-\frac{15}{10}=-\frac{3}{2}$

2 Αν $\alpha+\beta=-3$ και $\gamma+\delta=-5$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A=-(\gamma-2\alpha)+2\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)$.

Λύση

$A=-(\gamma-2\alpha)+2\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)=$

$=-\gamma+2\alpha+2\beta-\delta=$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$=2\alpha+2\beta-\gamma-\delta=$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

$=2(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)=$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$=2(-3)-(-5)=$

$=-6+5=$

$=-1$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας «x» στην κατάλληλη θέση.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\overline{3}$	$-0,8$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-3+7=$ ..... β) $-6+6=$ ..... γ) $-2-9=$ .....

δ) $(-2)\cdot\frac{1}{3}=$ ..... ε) $0\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=$ ..... στ) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=$ .....

ζ) $(-6):\left(-\frac{12}{5}\right)=$ ..... η) $\left(-\frac{8}{5}\right):(+4)=$ ..... θ) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(+\frac{4}{3}\right)=$ .....

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(-3 \cdot 2 - 5)x = ...$ β) $-3(2 - 5x) = ...$ γ) $-3(2 - 5)x = ...$

δ) $-2(x \cdots .....) = ... + 6$ ε) $(3 + x)(2 + y) = ...$ στ) $4(... + ...) = 12x + 8$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:

α) είναι ομόσημοι β) έχουν ίσες απόλυτες τιμές
γ) έχουν γινόμενο μηδέν δ) έχουν γινόμενο τη μονάδα. ☐

ii) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:

α) είναι ετερόσημοι β) έχουν άθροισμα μηδέν
γ) έχουν ίσες απόλυτες τιμές δ) έχουν γινόμενο τη μονάδα. ☐

5 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι. ☐
β) Το άθροισμα δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. ☐
γ) Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός. ☐
δ) Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2 + 3 \cdot 4 - 12 : (-4) + 1$ β) $2 + 3 \cdot (4 - 12) : (-4 + 1)$

γ) $-3 \cdot (-2) - 5 + 4 : (-2) - 6$ δ) $-8 : (-3 + 5) - 4 \cdot (-2 + 6)$

2 Τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων σχηματίζουν το έτος που έγινε ένα γεγονός στη χώρα μας με παγκόσμιο ενδιαφέρον.

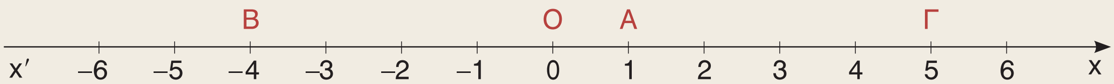
$-(5 - 4) - (+2) + (-6 + 4) - (-7) = \square$

$4 - (-2 + 6 - 3) + (-9 + 6) = \square$

$14 + (-6 + 5 - 3) - (-4 - 1) \cdot (-2) = \square$

$(-3) \cdot (-2) + 4 - (+5) - (-1) : (-1) = \square$

3 Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από τη θέση Ο, κινήθηκε πάνω στον άξονα x′x προς τα αριστερά στη θέση Β και στη συνέχεια προς τα δεξιά στη θέση Γ. Αν είναι ΟΑ = 5 km, τότε να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσε το αυτοκίνητο και πόσο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση.



4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right)$ β) $-\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$

γ) $-5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$ δ) $\left(1 - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$

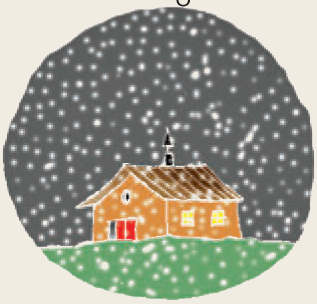
5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2 \cdot \left(3 - \frac{1}{4}\right)}$ γ) $-7 + \dfrac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}}$

6 Οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης το πρώτο δεκαήμερο του έτους ήταν:

1, –3, 0, 2, 1, –2, –5, 0, –3, –1.

Να βρείτε τη μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης το δεκαήμερο αυτό.



7 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (+ ή –).

α) 12 ... 5 ... 20 = –3 β) –8 ... 9 ... 1 = 0

γ) $\frac{5}{4}$ ... $\frac{3}{4}$ ... $\frac{10}{4}$ = 3 δ) –0,35 ... 6,15 ... 8,50 = 2

8 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $8 - (α - β) + (α - 5 - β) = 3$

β) $2 - (α + β - γ) - (4 + γ - β) - (-2 - α) = 0$

γ) $-2 \cdot (α - 3) + α \cdot (-7 + 9) - 3 \cdot (+2) = 0$

9 Αν $x + y = -5$ και $ω + φ = -7$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$Α = 4 - (x - ω) - (y - φ)$ $Β = -(-5 - x + φ) + (-8 + y) - (ω - 4)$

10 Αν α, β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 56 και γ, δ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 32, να υπολογίσετε την παράσταση $Α = α - (9 - 2γ) - (15 - β - 2δ)$.

11 Να τοποθετήσετε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς

–7, –6, –5, –3, 1, 2, 4, 5, 9

σε ένα τετράγωνο, ώστε τα τρία αθροίσματα να είναι ίσα μεταξύ τους.

$\square + \square + \square = \square$

$\square + \square + \square = \square$

$\square + \square + \square = \square$

Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλαδή $\quad \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
$(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu$	$(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{(-2)^2 \cdot (-3)^3}{(3 \cdot 2^2)^2}$ $\qquad$ β) $x^2 \cdot (x \cdot y^2)^3 : (x^2 \cdot y^3)^2$

Λύση

α) $\dfrac{(-2)^2 \cdot (-3)^3}{(3 \cdot 2^2)^2} = \dfrac{2^2 \cdot (-3^3)}{3^2 \cdot (2^2)^2} = \dfrac{-2^2 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^4} = -\dfrac{3}{2^2} = -\dfrac{3}{4}$

β) $x^2(xy^2)^3 : (x^2y^3)^2 = \dfrac{x^2(xy^2)^3}{(x^2y^3)^2} = \dfrac{x^2x^3(y^2)^3}{(x^2)^2(y^3)^2} = \dfrac{x^5y^6}{x^4y^6} = x$

2 Αν $\quad x^3 \cdot y^2 = -3$, να υπολογιστεί η παράσταση $A = x^2 \cdot (x^2 \cdot y^3)^2 \cdot (x^{-1})^{-3}$.

Λύση

$A = x^2 \cdot (x^2 \cdot y^3)^2 \cdot (x^{-1})^{-3} = x^2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot x^3 = x^2 \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot y^6 = x^9 \cdot y^6 =$

$= (x^3 \cdot y^2)^3 = (-3)^3 = -27.$

3 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A = (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6 \qquad B = (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3)$

Λύση

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

$$\begin{aligned} A &= (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 - 25 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 50 : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 10 - 6 = \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= (2 \cdot 5 - 9) + 2 \cdot (8 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= 10 - 9 + 2 \cdot 4 - 12 : (-3) = \\ &= 1 + 8 + 4 = \\ &= 9 + 4 = \\ &= 13 \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Για κάθε αριθμό α ισχύει $α + α + α + α = α^4$. ☐

β) Για κάθε αριθμό α ισχύει $α \cdot α \cdot α \cdot α = α^4$. ☐

γ) Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι. ☐

δ) Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι. ☐

ε) Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3α)^2 = 9α^2$. ☐

στ) Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός. ☐

ζ) Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (= ή ≠).

α) $(-1)^6 \ldots 1$ β) $3^{-2} \ldots 9$ γ) $-4^2 \ldots -16$ δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \ldots \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \ldots \frac{1}{-25}$ στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \ldots 0$ ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \ldots \frac{1}{32}$ η) $(7 + 2)^2 \ldots 7^2 + 2^2$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ είναι:

α) $-\frac{4}{9}$ β) $-\frac{9}{4}$ γ) $\frac{9}{4}$ δ) $\frac{4}{9}$ ☐

ii) Η τιμή της παράστασης $[(-2)^0]^3$ είναι:

α) -2^3 β) -6 γ) 2^3 δ) 1 ☐

iii) Η τιμή της παράστασης $2^3 + 3^2$ είναι:

α) 5^5 β) 17 γ) 5^6 δ) 6^5 ☐

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
α.	$(2^4)^{-1}$	1.	$\frac{1}{4}$
β.	$(2^{-5})^2 \cdot 2^{10}$	2.	-2^4
γ.	$(-2)^{-2}$	3.	4
δ.	$(2^4 : 2^3) \cdot 2^2$	4.	2^3
		5.	2^{-4}
		6.	1

α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

α) $2^{-5} \cdot 2^8$ β) $3^4 : 3^{-2}$ γ) $2^3 \cdot 5^3$ δ) $(5^{-2})^{-4}$

ε) $3^{-2} \cdot (-3)^4$ στ) $\frac{(-6)^6}{2^6}$ ζ) $4^2 : 3^4$ η) $27 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5}$

2 Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

α) $(2^{-2})^3 \cdot 2^8$ β) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$ γ) $(0{,}75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ δ) $36^3 : (-12)^3$

ε) $(2{,}5)^4 \cdot (-4)^4$ στ) $4^{12} : 2^{20}$ ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14}$ η) $(0{,}01)^3 \cdot 10^5$

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x^2)^3 \cdot 5x^4$ β) $(xy^3)^2 \cdot x^3y$ γ) $(-2x)^2 \cdot (-2x^2)$

δ) $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 : x^2$ ε) $(-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2$ στ) $\frac{3}{-2}x^3 : \left(-\frac{3}{2}x\right)^2$

4 Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$Α = 3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8 \cdot (2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2$ $Β = (-4)^2 : 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

$Γ = (2{,}5)^2 \cdot (1{,}25)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-8)^3$ $Δ = (25^7 \cdot 8^4) : (5^7 \cdot 40^4)$

5 Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του;

Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Π.χ. $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.

Όμως και $(-5)^2 = 25$, οπότε έχουμε $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

Γενικά, για κάθε **πραγματικό αριθμό x** ισχύει:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \qquad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \qquad \sqrt{7^2} = 7$$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$, δηλαδή $(\sqrt{9})^2 = 9$. Γενικά

$$\boxed{\textbf{Αν } x \geq 0, \textbf{ τότε } (\sqrt{x})^2 = x}$$

Ιδιότητες των ριζών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (= ή ≠)

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{100} \ \ldots \ \sqrt{4 \cdot 100}$ και $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} \ \ldots \ \sqrt{\dfrac{4}{100}}$

2. Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης να συμπληρώσετε και τα παρακάτω κενά:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \ \ldots \ \sqrt{2 \cdot 5}$ και $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \ \ldots \ \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Για τους αριθμούς 4 και 100 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν:

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{4 \cdot 100} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{4}{100}}$$

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης μπορούμε να καταλήξουμε σε ανάλογες ισότητες και για τους αριθμούς 2 και 5. Όσα όμως παραδείγματα κι αν εξετάσουμε, δεν αρκούν για να μας πείσουν, ότι οι σχέσεις αυτές είναι αληθείς για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς. Μόνο μια απόδειξη μπορεί να μας πείσει.

Γενικά Για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους. $\quad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους. $\quad \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ με $\beta > 0$

Για να αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους της ξεχωριστά.

- $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha\beta$
- $(\sqrt{\alpha\beta})^2 = \alpha\beta$

Παρατηρούμε, ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο αβ, οπότε είναι ίσοι.

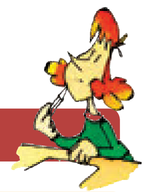
$$\text{Άρα} \quad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τη δεύτερη ισότητα.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$, ενώ $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ δηλαδή $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$.

Γενικά:

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ και γενικά για μη αρνητικούς αριθμούς α, β ότι ισχύει $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

Λύση

Επειδή $20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ έχουμε $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Ομοίως έχουμε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

➤ *Ο αριθμός 20 μπορεί να αναλυθεί και με άλλον τρόπο σε γινόμενο παραγόντων π.χ. $20 = 2 \cdot 10$, αλλά τότε κανένας παράγοντάς του δεν είναι τετράγωνο ενός θετικού ακέραιου αριθμού.*

2 Να αποδειχθεί ότι:

α) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{24} = 6\sqrt{2}$ γ) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 2\sqrt{2}$

Λύση

α) Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:
$3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 + 2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{3 \cdot 24} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

γ) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

3 Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{5}{\sqrt{3}}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

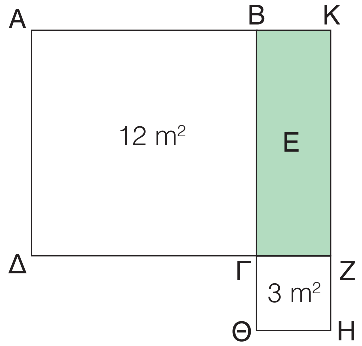
Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

4 Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΓΖΗΘ έχουν εμβαδόν 12 m² και 3 m² αντιστοίχως. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ και το μήκος του τμήματος ΒΘ.

Λύση



Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $ΒΓ^2 = 12$ m², οπότε η πλευρά του είναι $ΒΓ = \sqrt{12}$ m.
Το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΖΗΘ είναι $ΓΖ^2 = 3$ m², οπότε η πλευρά του είναι $ΓΖ = \sqrt{3}$ m. Επομένως
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ είναι:
$Ε = ΒΓ \cdot ΓΖ = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ m².
Το μήκος του τμήματος ΒΘ είναι:
$ΒΘ = ΒΓ + ΓΘ = ΒΓ + ΓΖ = \sqrt{12} + \sqrt{3} =$
$\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ .....   β) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ .....   γ) $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} =$ .....
δ) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} =$ .....   ε) $\sqrt{18} : \sqrt{2} =$ .....   στ) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ .....

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{25}$	
β. $\sqrt{-25}$	1. -5
γ. $-\sqrt{25}$	
δ. $\sqrt{5^2}$	2. δεν ορίζεται
ε. $\sqrt{(-5)^2}$	
στ. $\sqrt{-5^2}$	3. 5

α	β	γ	δ	ε	στ

3 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

α	β	$\sqrt{α}$	$\sqrt{β}$
4	1		
9	16		
64	36		

Άθροισμα

$\sqrt{α+β}$	$\sqrt{α}+\sqrt{β}$

Γινόμενο

$\sqrt{αβ}$	$\sqrt{α} \cdot \sqrt{β}$

Πηλίκο

$\sqrt{\frac{α}{β}}$	$\frac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}}$

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ☐

β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ☐

γ) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ☐

δ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ☐

ε) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{1}{2} - 1$ ☐

στ) Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$. ☐

ζ) Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$. ☐

5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50 m^2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$ m;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

β) $5\sqrt{7} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{12}{7}}$

δ) $\sqrt{\frac{14}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{7}} + \sqrt{\frac{21}{2}}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}$

2 Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = -10\sqrt{2}$

β) $\sqrt{27} - \sqrt{20} + \sqrt{12} - \sqrt{5} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{18} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{48} + \dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$

δ) $\sqrt{3,6}\cdot\sqrt{4,9} - \sqrt{0,8}\cdot\sqrt{0,2} = 3,8$

3 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{12+\sqrt{16}}$

β) $\sqrt{86+2\sqrt{52-\sqrt{9}}}$

γ) $\sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις περιμέτρους και τα εμβαδά των ορθογωνίων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ και ΚΛΜΝ. Ποιο από τα ορθογώνια έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

	μήκος	πλάτος	περίμετρος	εμβαδόν
ΑΒΓΔ	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		
ΕΖΗΘ	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$		
ΚΛΜΝ	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$		

5 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)$ β) $\sqrt{6}\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)$

γ) $\left(\sqrt{75}+\sqrt{45}-\sqrt{300}\right):\sqrt{15}$ δ) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$

6 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ δ) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

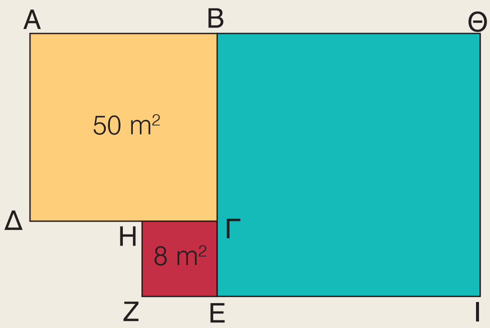
7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{5}+x=3\sqrt{5}-x$ β) $\sqrt{6}\,x=\sqrt{24}$

γ) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{32}$ δ) $3\sqrt{3}-x=\sqrt{27}$

8 Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=2$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισότητα να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

9 Αν τα τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΓΕΖΗ έχουν εμβαδόν 50 m^2 και 8 m^2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΘΙΕ είναι 98 m^2.

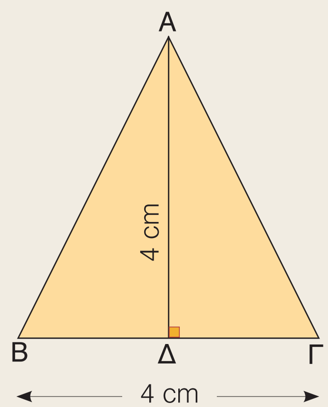


10 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 6 cm ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 1 cm. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 3ΔΕ.

11 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το ύψος ΑΔ = 4 cm και η πλευρά ΒΓ = 4 cm.

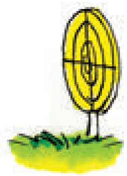
α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $4+4\sqrt{5}$ cm.

β) Στην προηγούμενη ερώτηση 4 μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις:
$4+\sqrt{20}$, $4+2\sqrt{20}$, $8\sqrt{5}$, $2(2+\sqrt{20})$.
Ποιες από αυτές είναι σωστές;



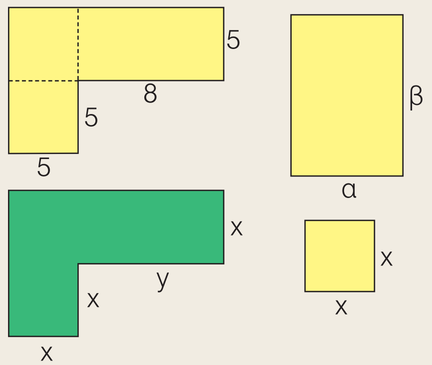
1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

- ✔ *Μαθαίνω τι είναι αλγεβρική παράσταση και πώς βρίσκεται η αριθμητική τιμή της.*
- ✔ *Διακρίνω αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο και προσδιορίζω το βαθμό του.*
- ✔ *Μαθαίνω να κάνω πράξεις με μονώνυμα.*



Α Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



1. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν των κίτρινων σχημάτων.

2. Στο πράσινο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός καταστήματος που πρόκειται να στρωθεί με πλακάκια. Να εξηγήσετε γιατί τα πλακάκια που θα χρειαστούν έχουν συνολικό εμβαδόν $2x^2 + xy$. Αν $x = 5$ και $y = 8$, ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν τους;

Αλγεβρικές παραστάσεις

Πολλές φορές για να λύσουμε ένα πρόβλημα, καταλήγουμε σε εκφράσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και γι' αυτό ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις.**

$6 \cdot 5 + 2 \cdot 8, \quad 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8$

Υπάρχουν όμως και προβλήματα στα οποία καταλήγουμε σε εκφράσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές. Οι εκφράσεις αυτές λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

$4x, \quad 2\alpha + 2\beta, \quad x^2, \quad \alpha\beta,$

$\frac{2x}{y^3}, \quad 2x^2 + xy$

Ειδικότερα, μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι θετικοί ακέραιοι.

$2x + 3x^2, \quad \frac{1}{2}\alpha + \beta^2, \quad \frac{4}{3}\pi R^3$

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Για παράδειγμα, η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2x^2 + xy$ για $x = 5$ και $y = 8$, είναι $2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8 = 90$.

Μονώνυμα

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.

$4x, \quad x^2, \quad \frac{2}{3}\alpha\beta, \quad \sqrt{2}x^4y^2\omega^3$

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του υψωμένων στους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

Μονώνυμο

$2x^3y$

συντελεστής *κύριο μέρος*

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή. Ιδιαίτερα, εφόσον π.χ. $x^1=x$, εάν δεν εμφανίζεται εκθέτης σε μία μεταβλητή ο βαθμός του μονώνυμου ως προς τη μεταβλητή αυτή ισούται με 1. **Βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Το μονώνυμο $2x^3y$ είναι:
3ου βαθμού ως προς x
1ου βαθμού ως προς y
4ου βαθμού ως προς x και y

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**.

Για παράδειγμα τα μονώνυμα $\frac{2}{5}x^3y\omega^2$, $-5x^3y\omega^2$, $x^3y\omega^2$, είναι όμοια.

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**.

Για παράδειγμα τα μονώνυμα $2x^3y$ και $-2x^3y$ είναι αντίθετα.

Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι σταθερό μονώνυμο μηδενικού βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων

α) $-3x^2y^3$, για $x = -2$ και $y = -1$ β) $2\alpha^2 - 3\beta + 6$ για $\alpha = -3$ και $\beta = 8$.

Λύση

α) Η αριθμητική τιμή της παράστασης $-3x^2y^3$ για $x = -2$ και $y = -1$ είναι:
$-3 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)^3 = -3 \cdot (+4) \cdot (-1) = 12.$

β) Η αριθμητική τιμή της παράστασης $2\alpha^2 - 3\beta + 6$ για $\alpha = -3$ και $\beta = 8$ είναι:
$2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot 8 + 6 = 2 \cdot (+9) - 24 + 6 = 18 - 24 + 6 = 0.$

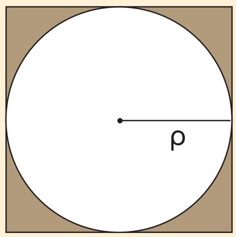
2 Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός ενήλικα, ύψους υ (σε cm) δίνεται από τον τύπο $B = κ\left(υ - 100 + \frac{t}{10}\right)$, όπου t είναι η ηλικία του (σε έτη) και κ μια σταθερά (για τον άνδρα κ = 0,9 και για τη γυναίκα κ = 0,8). Να βρεθεί ποιο είναι το ιδανικό βάρος για έναν άνδρα και μια γυναίκα, από τους οποίους ο καθένας είναι 30 ετών και έχει ύψος 1,77 m.

Λύση

Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός άνδρα ηλικίας 30 ετών και ύψους 1,77 m = 177 cm, είναι $B = 0{,}9 \cdot \left(177 - 100 + \frac{30}{10}\right) = 0{,}9 \cdot (177 - 100 + 3) = 0{,}9 \cdot 80 = 72$ κιλά.

Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) μιας γυναίκας ηλικίας 30 ετών και ύψους 1,77 m = 177 cm, είναι $B = 0{,}8 \cdot \left(177 - 100 + \frac{30}{10}\right) = 0{,}8 \cdot (177 - 100 + 3) = 0{,}8 \cdot 80 = 64$ κιλά.

3 Να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους, το οποίο περιέχεται μεταξύ του τετραγώνου και του κύκλου. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του, το κύριο μέρος του και ο βαθμός του.
Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του με προσέγγιση για ρ = 10.



Λύση

Το τετράγωνο έχει πλευρά 2ρ, οπότε το εμβαδόν του είναι $(2ρ)^2 = 4ρ^2$. Επειδή το εμβαδόν του κύκλου είναι $πρ^2$, το χρωματισμένο μέρος έχει εμβαδόν $4ρ^2 - πρ^2$. Με την επιμεριστική ιδιότητα η παράσταση $4ρ^2 - πρ^2$ γράφεται

$$4ρ^2 - πρ^2 = (4 - π)ρ^2$$

Άρα είναι μονώνυμο δευτέρου βαθμού με συντελεστή 4 – π και κύριο μέρος $ρ^2$.
Η αριθμητική τιμή του για ρ = 10 cm, με προσέγγιση, είναι

$$(4 - 3{,}14) \cdot 10^2 = 0{,}86 \cdot 100 = 86 \text{ cm}^2.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

α) $-3x^2y$ β) $3 + x^2y$ γ) $\frac{x^3y}{ω^2}$ δ) $2x^2yω^3$ ε) $(3 - \sqrt{2})αβ^3$ στ) $\frac{2}{3}αβγ^3$

2 Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια:

α) $6x^2y^2$ β) $-\frac{3}{5}xy^3$ γ) $-x^3yω$ δ) $-5y^3x$ ε) $\frac{ωyx^3}{4}$ στ) $\frac{5}{2}y^2x^2$

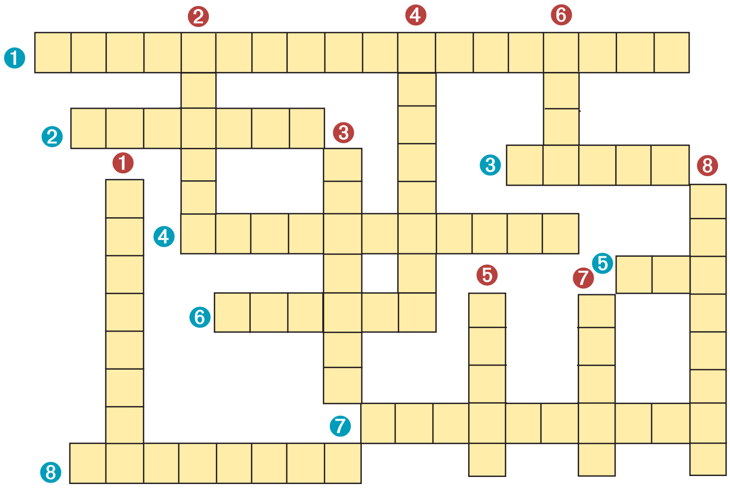
ζ) $\frac{xy^3}{7}$ η) $-x^2y^2$ θ) $yx^3ω$ ι) $\sqrt{2}xy^3$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς x και y
$5xy^4$					
$-xy^2$					
$\frac{1}{7}x^2y^5$					
$-\sqrt{3}x^4$					

4 Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{1}{3}$ και κύριο μέρος $xy^2\omega^3$. Να βρείτε το ίσο του και το αντίθετο μονώνυμό του.

5 Να λύσετε το σταυρόλεξο.



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1. Έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές συνδεόμενες με τα σύμβολα των πράξεων (δύο λέξεις).
2. Είναι τα μονώνυμα 8, –5, 0, 3.
3. Είναι ο βαθμός του μονωνύμου $3x^2\omega$ ως προς y.
4. Στο μονώνυμο $-2x^2y$ είναι το –2.
5. Είναι τα μονώνυμα $-\frac{6}{2}x^3y$, $-3x^3y$.
6. Ο συντελεστής του μονωνύμου xy.
7. Είναι το $xy\omega^2$ στο μονώνυμο $4xy\omega^2$ (δύο λέξεις).
8. Η απλούστερη αλγεβρική παράσταση.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το μονώνυμο αυτό δεν έχει βαθμό.
2. Στο μονώνυμο $7x^4y\omega^5$ ως προς x είναι 4.
3. Παράσταση που μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
4. Είναι τα μονώνυμα $5xy^2$, $-\sqrt{25}xy^2$.
5. Είναι τα μονώνυμα $4\alpha^2\beta^5$, $-\alpha^2\beta^5$.
6. Η .... του μονωνύμου $-2x^2y$ για $x = 2$ και $y = -1$ είναι 8.
7. Είναι ο βαθμός των σταθερών μονωνύμων 6, –3, 7.
8. Η πράξη αυτή δε σημειώνεται μεταξύ των μεταβλητών ενός μονωνύμου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

α) $-2xy^3 + x^2y - 4$ για $x = -2$ και $y = 1$

β) $\frac{2}{3}x\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^3$ για $x = 3$ και $\omega = -2$

2 Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{5}{7}$ και μεταβλητές α, β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς α και β είναι 5.

3 Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο $3x^{\nu}y^2$

α) να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x

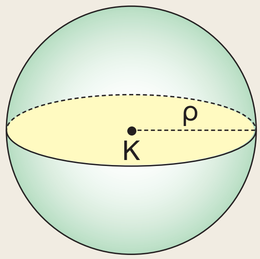
β) να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y

γ) να έχει αριθμητική τιμή 48, για $x = 2$ και $y = -1$.

4 Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ν, ώστε τα μονώνυμα $4x^3y^{\nu}$, $\lambda x^{\kappa}y^2$ να είναι:

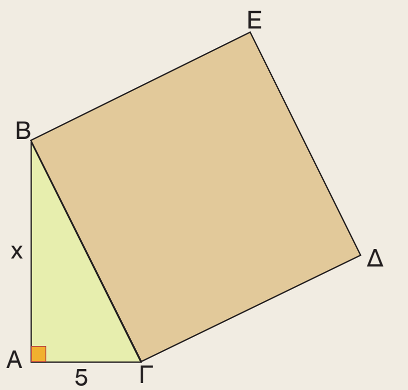
α) όμοια β) ίσα γ) αντίθετα

5 Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν το εμβαδόν και τον όγκο μιας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ. Να προσδιορίσετε το συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου, όταν ρ = 10;



6 Μια ομάδα καλαθοσφαίρισης έδωσε 9 αγώνες. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που εκφράζει τους βαθμούς που συγκέντρωσε, αν σε κάθε νίκη παίρνει 2 βαθμούς και σε κάθε ήττα 1 βαθμό.

7 Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ. Ποιο είναι το εμβαδόν, όταν x = 12;



Β Πράξεις με μονώνυμα

Οι μεταβλητές ενός μονωνύμου αντιπροσωπεύουν αριθμούς και γι' αυτό στις πράξεις που γίνονται μεταξύ μονωνύμων ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν και στους αριθμούς.

Πρόσθεση μονωνύμων

Ένα άθροισμα ομοίων μονωνύμων π.χ. $-5x^3 + 2x^3$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται

$$-5x^3 + 2x^3 = (-5 + 2)x^3 = -3x^3$$

Παρατηρούμε ότι:

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα, έχουμε $-12x^2y - 3x^2y = -15x^2y$.
Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια, όπως τα $3x$ και $5y$, τότε το άθροισμά τους $3x + 5y$ δεν είναι μονώνυμο.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Ένα γινόμενο μονωνύμων π.χ. $(-2x)(3x^2y)$ με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων γράφεται

$$(-2x)(3x^2y) = (-2)x \cdot 3x^2y = (-2) \cdot 3(xx^2)y = -6x^3y.$$

Παρατηρούμε ότι:

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:
- **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών τους και
- **κύριο μέρος** το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα έχουμε $(-3x^4y^3\omega)\left(\frac{2}{5}x\omega^3\right) = -\frac{6}{5}x^5y^3\omega^4$.

Διαίρεση μονωνύμων

Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται όπως και η διαίρεση αριθμών.
Για παράδειγμα,

$$(-12x^4y\omega^2) : (4x^2y\omega) = \frac{-12x^4y\omega^2}{4x^2y\omega} = -\frac{12}{4} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{\omega^2}{\omega} = -3x^2\omega.$$

Ομοίως έχουμε: $(7xy^4) : (-x^3y) = \frac{7xy^4}{-x^3y} = -\frac{7y^3}{x^2}$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο παράδειγμα το πηλίκο των μονωνύμων είναι μονώνυμο, ενώ στο δεύτερο παράδειγμα δεν είναι μονώνυμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-7\alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + 4\alpha x^2$ β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)$ γ) $\left(\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right):\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^3\right)$

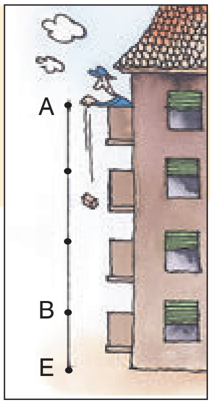
Λύση

α) $-7\alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + 4\alpha x^2 = \left(-7 - \frac{1}{2} + 4\right)\alpha x^2 = \left(-\frac{14}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2}\right)\alpha x^2 = -\frac{7}{2}\alpha x^2$

β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right) = \frac{2}{12}x^4y^4 = \frac{1}{6}x^4y^4$

γ) $\left(\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right):\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^3\right) = \frac{3\alpha^3\beta}{4}:\left(-\frac{\alpha\beta^3}{2}\right) = \frac{3\alpha^3\beta}{4}\cdot\left(-\frac{2}{\alpha\beta^3}\right) = -\frac{6\alpha^3\beta}{4\alpha\beta^3} = -\frac{3\alpha^2}{2\beta^2}$

2 Από το σημείο Α αφήνουμε ένα σώμα να πέσει στο έδαφος. Αν ο χρόνος t σε sec που μεσολαβεί μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι διπλάσιος του χρόνου που θα έκανε, αν το αφήναμε να πέσει από το σημείο Β, να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει την απόσταση ΑΒ.



Λύση

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι η απόσταση ΑΕ δίνεται από τον τύπο $ΑΕ = \frac{1}{2}gt^2$, όπου $g = 10$ m/sec^2 περίπου. Άρα $ΑΕ = 5t^2$.

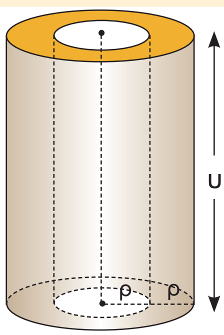
Αν αφήναμε το σώμα να πέσει από το σημείο Β, τότε θα έφτανε στο έδαφος σε χρόνο $\frac{t}{2}$ sec και θα ήταν

$$ΒΕ = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{t^2}{4} = \frac{5}{4}t^2.$$

Η απόσταση ΑΒ είναι $ΑΒ = ΑΕ - ΒΕ = 5t^2 - \frac{5}{4}t^2 = \frac{20}{4}t^2 - \frac{5}{4}t^2 = \frac{15}{4}t^2$.

3 Μια τσιμεντένια κυλινδρική κολώνα, που έχει ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ, ενισχύεται περιμετρικά με τσιμέντο και αποκτά ακτίνα βάσης διπλάσια της αρχικής. Ο μηχανικός ισχυρίζεται ότι το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο τριπλάσιο του αρχικού όγκου της κολώνας. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Λύση



Ο αρχικός όγκος της κολώνας ήταν $V_1 = \pi\rho^2\upsilon$.

Μετά την ενίσχυση της κολώνας, ο συνολικός όγκος της έγινε $V_2 = \pi(2\rho)^2\upsilon = \pi(4\rho^2)\upsilon = 4\pi\rho^2\upsilon$. Άρα το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο $V_2 - V_1 = 4\pi\rho^2\upsilon - \pi\rho^2\upsilon = 3\pi\rho^2\upsilon$, που είναι πράγματι τριπλάσιος του αρχικού όγκου $\pi\rho^2\upsilon$ της κολώνας. Επομένως ο ισχυρισμός του μηχανικού είναι σωστός.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

β) Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

γ) Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

δ) Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-5x^2 + 2x^2 = \ldots\ldots\ldots$ β) $-5x^2 \cdot 2x^3 = \ldots\ldots\ldots$ γ) $3x - 2y + 2x = \ldots\ldots\ldots$

δ) $4x^2y - yx^2 = \ldots\ldots\ldots$ ε) $2xy \cdot y^2 = \ldots\ldots\ldots$ στ) $6x^3y : 3xy = \ldots\ldots\ldots$

ζ) $5x^4\omega^3\ (\ldots..) = -10x^6\omega^4$ η) $\dfrac{-12x^3y}{\ldots\ldots\ldots} = \dfrac{4x^2}{y}$ θ) $3x^2y - \ldots.. = -4x^2y$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-7x^2y + 4x^2y$ β) $4\alpha x^2 - 6\alpha x^2 + \alpha x^2$ γ) $6x^3 - \dfrac{9}{2}x^3$

δ) $0,25\alpha\beta - 0,35\alpha\beta + 0,5\alpha\beta$ ε) $\dfrac{2}{5}xy^2\omega^4 - 1,2xy^2\omega^4$ στ) $-3\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^2$

2 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $-3x \cdot 5x^2$ β) $6x^2 \cdot \dfrac{3}{4}x^3$ γ) $2xy^3 \cdot (-3x^2y)$ δ) $-3x^2y \cdot (-2xy^4\omega)$

ε) $-\dfrac{1}{3}\alpha\beta^3 \cdot 4\alpha\beta^3$ στ) $\dfrac{4}{3}x^3\alpha^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}x\alpha^3\right)$ ζ) $\left(-\dfrac{2}{5}xy^3\right) \cdot (-3x^2\omega) \cdot \left(-\dfrac{5}{6}y\omega^3\right)$

3 Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

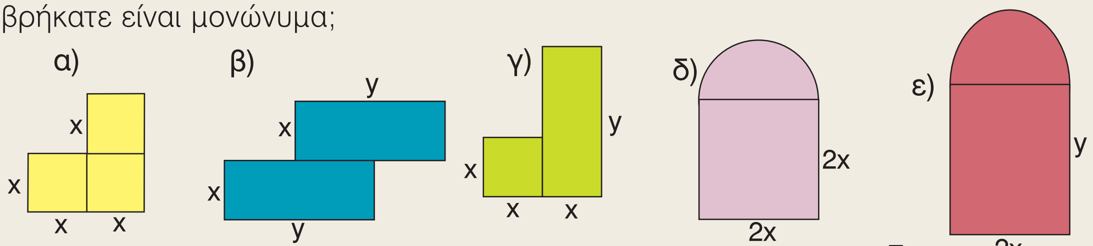
α) $12\alpha^3 : (-3\alpha)$ β) $8x^2y : (2xy^2)$ γ) $\left(-\dfrac{1}{3}\alpha^3\beta^5\right) : \left(\dfrac{6}{5}\alpha^2\beta^2\right)$

δ) $(0,84x^2\omega^5) : (-0,12x\omega^3)$ ε) $(-x^3\alpha^4\omega) : \left(-\dfrac{1}{4}x^2\alpha\right)$ στ) $(0,5\alpha^3\beta^7) : \left(-\dfrac{7}{10}\alpha^2\beta^2\right)$

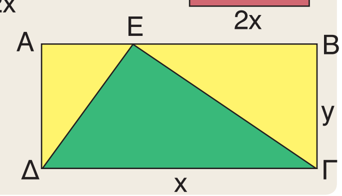
4 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left(-\dfrac{1}{3}x^2y\right)^2 \cdot (6xy^3)$ β) $(-2x^2y^3)^3 : (-8x^3y^4)$ γ) $(-2xy^4\omega^3)^2 \cdot (-x^2y)^3$

5 Να βρείτε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων. Ποιες από τις εκφράσεις που βρήκατε είναι μονώνυμα;

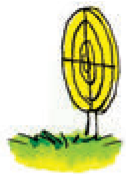


6 Να συγκρίνετε το εμβαδόν του πράσινου τριγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των κίτρινων τριγώνων.



1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

- ✔ *Μαθαίνω τι είναι πολυώνυμο, ποιος είναι ο βαθμός ενός πολυωνύμου και διακρίνω αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα.*
- ✔ *Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ πολυώνυμα.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γράψετε τρία όμοια μονώνυμα με δύο μεταβλητές και να βρείτε το άθροισμά τους.
2. Να γράψετε τρία μονώνυμα με δύο μεταβλητές που δεν είναι όμοια. Μπορείτε τώρα να βρείτε ένα μονώνυμο ίσο με το άθροισμά τους;
3. Να βρείτε το βαθμό κάθε μονωνύμου της προηγούμενης ερώτησης, ως προς κάθε μεταβλητή και ως προς τις δύο μεταβλητές.

Πολυώνυμα

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, ότι το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**. π.χ.

$$3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.

> Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ έχει τρεις όρους που είναι τα μονώνυμα $3x^2y$, $2xy^4$, $-5x^3y^3$.

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται
- διώνυμο, αν έχει δύο όρους
- τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους.

$$3\alpha^2 - 2\beta$$
$$2x^2 - 3x + 4$$

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

> Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ είναι
> 3ου βαθμού ως προς x,
> 4ου βαθμού ως προς y,
> 6ου βαθμού ως προς x και y.

Δεχόμαστε ότι κάθε μονώνυμο είναι και πολυώνυμο. Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

Το πολυώνυμο $-3x + 2x^2 + 5$ έχει μία μεταβλητή την x και για συντομία συμβολίζεται P(x) ή Q(x) ή A(x) κ.τ.λ.

Το πολυώνυμο $P(x) = -3x + 2x^2 + 5$ είναι δευτέρου βαθμού και μπορούμε να το γράψουμε έτσι, ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον επόμενό του.

Δηλαδή, $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Τότε, λέμε, ότι γράφουμε το πολυώνυμο **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x**.

Η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου P(x) για $x = 5$, συμβολίζεται με P(5) και είναι:

$$P(5) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5 = 50 - 15 + 5 = 40.$$

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

Τα πολυώνυμα $3x^2 - 5x + 1$ και $\alpha x^2 + \beta x + 1$ είναι ίσα, αν $\alpha = 3$ και $\beta = -5$.

Αναγωγή ομοίων όρων

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

$2\alpha^2 - 3\beta + 4\alpha^2 - 5\beta =$

$2\alpha^2 + 4\alpha^2 - 3\beta - 5\beta = 6\alpha^2 - 8\beta$

Η αρχική αλγεβρική παράσταση, που είχε τέσσερις όρους, συμπτύχθηκε σε μία άλλη με δύο όρους.

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ και $B(x) = 2x^3 - x^2 + x$ έχουν άθροισμα ή διαφορά που βρίσκουμε ως εξής:

$A(x) + B(x) = (3x^3 - 2x^2 - 7x - 5) + (2x^3 - x^2 + x) =$ (Απαλείφουμε τις παρενθέσεις)

$= 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 + 2x^3 - x^2 + x =$ (Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

$= 5x^3 - 3x^2 - 6x - 5.$

Ομοίως, έχουμε:

$A(x) - B(x) = (3x^3 - 2x^2 - 7x - 5) - (2x^3 - x^2 + x) =$

$= 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 - 2x^3 + x^2 - x =$

$= x^3 - x^2 - 8x - 5.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + \alpha x^3 - 5$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.

β) Αν το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο $Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ποιες είναι οι τιμές των α, β, γ, δ;

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + αx^3 - 5$, κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x γράφεται $P(x) = αx^3 + 4x^2 - 8x - 5$. Το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού, αν $α \neq 0$ και δευτέρου βαθμού, αν $α = 0$.

β) Τα πολυώνυμα $P(x) = αx^3 + 4x^2 - 8x - 5$ και $Q(x) = βx^2 + γx + δ$ είναι ίσα, αν $α = 0$, $β = 4$, $γ = -8$ και $δ = -5$.

2 **Μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει ημερησίως 500 € για μισθούς υπαλλήλων, 10 € για τα υλικά που απαιτεί κάθε πουκάμισο (ύφασμα, κλωστές, ...) και $\frac{1}{10}x^2$ € για τα υπόλοιπα έξοδά της (μεταφορικά, ηλεκτρικό ρεύμα ...). Πόσα ξοδεύει ημερησίως για την κατασκευή x πουκαμίσων; Ποια θα είναι τα έξοδα της βιοτεχνίας, αν κατασκευάσει 50 πουκάμισα;**

Λύση

Τα έξοδα των υλικών για την κατασκευή ενός πουκάμισου είναι 10 €, οπότε για τα x πουκάμισα τα έξοδα των υλικών θα είναι $10x$ €. Το συνολικό ποσό σε €, που ξοδεύει ημερησίως η βιοτεχνία είναι $P(x) = \frac{1}{10}x^2 + 10x + 500$

Για την κατασκευή 50 πουκάμισων τα έξοδα είναι:

$P(50) = \frac{1}{10}50^2 + 10 \cdot 50 + 500 = \frac{1}{10}2500 + 500 + 500 = 1250$ €

3 **Αν $P(x) = x^2 - 3x + 4$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(-x)$.**

Λύση

Το πολυώνυμο $P(2x)$ προκύπτει, αν στο $P(x)$ θέσουμε, όπου x το $2x$, οπότε έχουμε:
$P(2x) = (2x)^2 - 3(2x) + 4 = 4x^2 - 6x + 4$
Το πολυώνυμο $P(-x)$ προκύπτει, αν στο $P(x)$ θέσουμε, όπου x το $-x$, οπότε έχουμε:
$P(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 4 = x^2 + 3x + 4$. Άρα:

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(2x) - P(-x) = (4x^2 - 6x + 4) - (x^2 + 3x + 4) = \\ &= 4x^2 - 6x + 4 - x^2 - 3x - 4 = 3x^2 - 9x \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;

α) $4x^3 - 5x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ β) $3x^4 - 7x^2 - 12$

γ) $\sqrt{2}\,x^2y - 5xy + y^2 + \frac{1}{3}$ δ) $x^3 + 2x^2y - \sqrt{x}\,y^2 + 3y^3$

2 Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;

α) $7 - 3x - 2x^2$ β) $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10$

γ) $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6$ δ) $2xy - 3y + 9$

3 Ένας μαθητής θέλοντας να υπολογίσει το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων $4x^3 - 8x^2 + x + 7$ και $x^3 - 6x + 2$ έγραψε

Άθροισμα

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & -\,8x^2 & +\,x & +\,7 \\ + & x^3 & & -\,6x & +\,2 \\ \hline & 5x^3 & -\,8x^2 & -\,5x & +\,9 \end{array}$$

Διαφορά

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & -\,8x^2 & +\,x & +\,7 \\ + & -x^3 & & +\,6x & -\,2 \\ \hline & 3x^3 & -\,8x^2 & +\,7x & +\,5 \end{array}$$

Είναι σωστός ο τρόπος που εφάρμοσε; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2 + 5x + 7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2 + 4x - 5$ είναι το:

α) $6x^2 + x - 2$ β) $10x^2 + 9x + 2$ γ) $6x^2 - x - 12$ δ) $-6x^2 + x + 12$.

5 Τα πολυώνυμα Α(x), Β(x) και Γ(x) έχουν βαθμούς 2, 3 και 2 αντιστοίχως.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου $Α(x) + Β(x)$.

β) Αν το πολυώνυμο $Α(x) + Γ(x)$ δεν είναι το μηδενικό, τι βαθμό μπορεί να έχει;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

α) $P(x) = 3x - 5x^2 + x^4 + 10 + 2x^3$ β) $Q(x) = -6x + 2x^3 + 1$

γ) $A(x) = -3x^2 + 7 + 2x^3 + 7x$ δ) $B(x) = x - x^4 - 5$

2 Δίνεται το πολυώνυμο $Α = -2xy^2 + y^3 + 2x^3 - xy^2$.

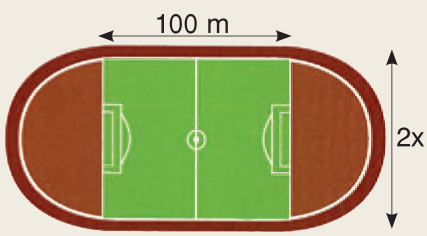
α) Να βρείτε την αριθμητική του τιμή για $x = 2$ και $y = -1$.

β) Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y;

3 Αν $P(x) = 2x^2 + 2x - 9$, να αποδείξετε ότι:

α) $P(-3) = P(2)$ β) $3P(1) + P(3) = 0$

4 Η επιφάνεια ενός σταδίου αποτελείται από δύο ημικυκλικούς δίσκους και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει μήκος 100 μέτρα και πλάτος 2x μέτρα.



α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του, αν το πλάτος του είναι ίσο με 60 μέτρα.

5 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x^2 - x) - (x^3 - 5x^2 + x - 1)$ β) $-3x^2y - (2xy - yx^2) + (3xy - y^3)$

γ) $(2\alpha^2 - 3\alpha\beta) - (\beta^2 + 4\alpha\beta) - (\alpha^2 + \beta^2)$ δ) $2\omega^2 - \left[4\omega - 3 - (\omega^2 + 5\omega)\right]$

ε) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) - \left(\frac{1}{6}x + x^2 - \frac{1}{3}\right)$ στ) $(0{,}4x^3 + 2{,}3x^2) + (3{,}6x^3 - 0{,}3x^2 + 4)$

6 Αν $A(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$, $B(x) = -3x^3 + 5x - 2$ και $\Gamma(x) = 4x^2 - 3x + 8$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $A(x) - B(x)$ β) $A(x) + \Gamma(x)$ γ) $\Gamma(x) - \left[A(x) + B(x)\right]$

7 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $(\cdots \ldots\ldots - 4x \cdots \ldots\ldots) + (x^2 \cdots \ldots\ldots + 4) = -6x^2 - 8x + 7$

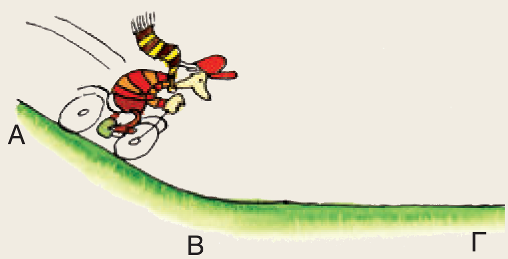
β) $(-x^3 \cdots \ldots\ldots + 8) - (\cdots \ldots\ldots + x^2 \cdots \ldots\ldots) = x^3 - x^2 + 5x + 9$

8 Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό. (Τα τρία πολυώνυμα οριζοντίως, καθέτως και διαγωνίως έχουν το ίδιο άθροισμα).

$2x^2+2x-3$	$7x^2+3x-4$	
$9x^2-3x+2$		
$4x^2+4x-5$		

9 Αν $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x)$ και $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

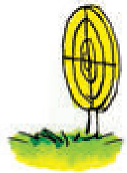
10 Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από το σημείο Α και σε χρόνο t sec κατεβαίνει το δρόμο ΑΒ με επιτάχυνση $\alpha = 2$ m/sec^2. Όταν φτάσει στο σημείο Β, συνεχίζει να κινείται στο δρόμο ΒΓ για 10 sec με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε την παράσταση που εκφράζει την απόσταση που διήνυσε ο ποδηλάτης. Ποια απόσταση διήνυσε ο ποδηλάτης, αν t = 5 sec;



1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω:

- ✔ *Μονώνυμο με πολυώνυμο*
- ✔ *Πολυώνυμο με πολυώνυμο*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γράψετε το γινόμενο $\alpha(\beta + \gamma)$ σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα και με ανάλογο τρόπο να βρείτε την παράσταση $3x^2(2x^3 + 6x)$.

2. Να γράψετε το γινόμενο $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα και με ανάλογο τρόπο να βρείτε την παράσταση $(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5)$.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

Την αλγεβρική παράσταση $3x^2(2x^3 + 6x)$ που είναι γινόμενο του μονωνύμου $3x^2$ με το πολυώνυμο $2x^3 + 6x$, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, μπορούμε να τη γράψουμε

$$3x^2(2x^3 + 6x) = 3x^2 \cdot 2x^3 + 3x^2 \cdot 6x = 6x^5 + 18x^3$$

Διαπιστώνουμε ότι:

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

Την αλγεβρική παράσταση $(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5)$ που είναι γινόμενο του πολυωνύμου $3x^2y + 2y$ με το πολυώνυμο $2x^2 + 5$, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, μπορούμε να τη γράψουμε

$$\begin{aligned}(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5) &= 3x^2y \cdot 2x^2 + 3x^2y \cdot 5 + 2y \cdot 2x^2 + 2y \cdot 5 = \\ &= 6x^4y + 15x^2y + 4x^2y + 10y = 6x^4y + 19x^2y + 10y\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι:

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή δύο πολυωνύμων, λέμε ότι αναπτύσσουμε τα γινόμενα αυτά και το αποτέλεσμα ονομάζεται **ανάπτυγμα του γινομένου.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-\frac{2}{3}x^2y\left(x - \frac{1}{3}y - 3\right)$ β) $(2x^2 - 5x + 6)(x - 2)$

γ) $4x(-2x^2 + 3x - 1) - 3x^2(-2x + 5)$ δ) $-2x^2(x + 4)(x - 1)$

Λύση

α) $-\frac{2}{3}x^2y\left(x - \frac{1}{3}y - 3\right) = -\frac{2}{3}x^3y + \frac{2}{9}x^2y^2 + 2x^2y$

β) $(2x^2 - 5x + 6)(x - 2) = 2x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 10x + 6x - 12 = 2x^3 - 9x^2 + 16x - 12$

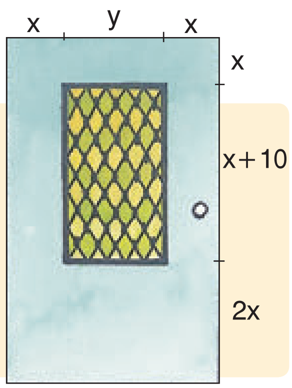
γ) $4x(-2x^2 + 3x - 1) - 3x^2(-2x + 5) = -8x^3 + 12x^2 - 4x + 6x^3 - 15x^2 = -2x^3 - 3x^2 - 4x$

δ) $-2x^2(x + 4)(x - 1) = -2x^2(x^2 - x + 4x - 4) = -2x^2(x^2 + 3x - 4) = -2x^4 - 6x^3 + 8x^2$

➤ *Ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων μπορεί να γίνει όπως και ο πολλαπλασιασμός των αριθμών. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός του (β) ερωτήματος $(2x^2 - 5x + 6)(x - 2)$ γίνεται και ως εξής:*

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & & 2x^2 & -\ 5x & +\ 6 \\
 & & & x & -\ 2 \\
\hline
-2\cdot(2x^2 - 5x + 6) \rightarrow & & -4x^2 & +\ 10x & -\ 12 \\
x\cdot(2x^2 - 5x + 6) \rightarrow + & 2x^3 & -\ 5x^2 & +\ 6x & \\
\hline
 & 2x^3 & -\ 9x^2 & +\ 16x & -\ 12
\end{array}
$$

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μιας πόρτας, που είναι κατασκευασμένη από αλουμίνιο. Αν ένα μέρος της πόρτας είναι διακοσμητικό τζάμι, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καλυφθεί με αλουμίνιο για την κατασκευή της πρόσοψης της πόρτας.



Λύση

Η πόρτα έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις $2x + y$ και $4x + 10$, οπότε έχει εμβαδόν $(2x + y)(4x + 10)$.

Το διακοσμητικό τζάμι έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις y και $x + 10$, οπότε έχει εμβαδόν $y(x + 10)$.

Επομένως, το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καλυφθεί με αλουμίνιο για την κατασκευή της πρόσοψης της πόρτας είναι:

$$
\begin{aligned}
(2x + y)(4x + 10) - y(x + 10) &= 8x^2 + 20x + 4xy + 10y - xy - 10y = \\
&= 8x^2 + 20x + 3xy
\end{aligned}
$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x(x + 1)$	1. $x^2 - x$
β. $(x + 1)(x - 1)$	2. $x^2 + 1$
γ. $x(x - 1)$	3. $x^2 + 2x + 1$
δ. $(x + 1)(1 + x)$	4. $x^2 + 2x + 3$
ε. $(x + 1)(x + 2)$	5. $x^2 + x$
	6. $x^2 + 3x + 2$
	7. $x^2 - 1$

α	β	γ	δ	ε

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο P(x) · Q(x) έχει βαθμό 6. ☐

β) Αν το πολυώνυμο P(x) · Q(x) έχει βαθμό 7 και το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 4. ☐

3 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

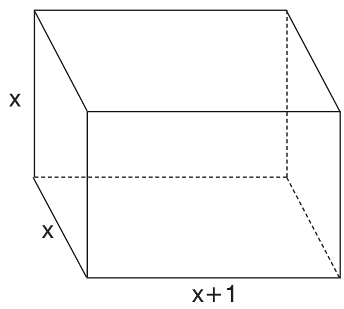
α) $x(2x + ...) = ... + 4x$

β) $3x^2(..... - 2) = 3x^3y - .....$

γ) $(x + 5)(..... + 3) = 2x^2 + ... + 10x + ...$

δ) $(x^2 + y)(x - .....) = ... - x^2y^2 + ... - y^3$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



i) Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

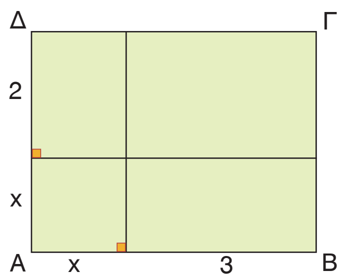
α) $3x + 1$ β) $x^3 + 1$ γ) $x^3 + x^2$ δ) $x^3 + x$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

α) $6x^2 + 4x + 1$ β) $4x^2 + 6x$

γ) $6x^2 + 4x + 2$ δ) $6x^2 + 4x$

5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές του να γράψουν την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και οι μαθητές του έδωσαν τις εξής απαντήσεις:



α) $(x + 2)(x + 3)$ β) $2x \cdot 3x$

γ) $x^2 + 6$ δ) $x^2 + 5x + 6$

Ποιές απ' αυτές είναι σωστές;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-3x^2y(-5x+2y)$ β) $4x(2x^2-x+2)-8x$

γ) $-5x(2x-3)-3x(2-3x)$ δ) $2xy(x^2-3y^2)-4x(x^2y-2y^3)$

2 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2\alpha-3\beta)(-4\alpha+2\beta)$ β) $(x^2-2x+4)(x+2)-8$

γ) $3x^2(-2x+3)(5-x)$ δ) $(4-3x)(5-2x)-6x(x-4)$

ε) $(2x^2-3x-4)(-3x^2+x)$ στ) $(3x^2-2xy-5y^2)(4y-x)$

3 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3x-2)(x^2-x)(4x-3)$ β) $-2x(x^2-x+1)(x-2)-(x-1)(2x-3)(x+2)$

γ) $(-2x+y)(x^2-3xy)-(3x-y)(4x+y)(-2x-3y)$

4 Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $(x^2-4x+4)(x^2+4x+4)-x^2(x^2-8)-16=0$

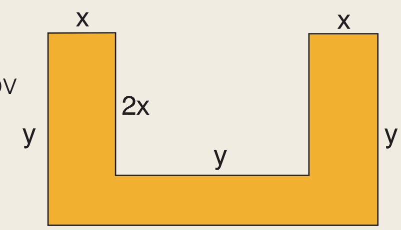
β) $(3\alpha+8\beta)(\beta-\alpha)-(\alpha+2\beta)(\beta-3\alpha)=6\beta^2$

5 Αν $P(x)=-2x^2+5x-3$ και $Q(x)=4x-5$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $P(x)\cdot Q(x)$ β) $P(x)\cdot\left[-3Q(x)+11x-12\right]$ γ) $\left[P(x)-2\right]\cdot\left[Q(x)+3\right]$

6 Αν $P(x)=3x(-2x+4)(x-1)$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

7 Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



8 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με πλάτος x μέτρα και με μήκος μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 5 μέτρα. Αν το μήκος ελαττωθεί κατά 3 μέτρα και το πλάτος ελαττωθεί κατά 1 μέτρο, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου θα μειωθεί κατά $4x+2$ τετραγωνικά μέτρα.

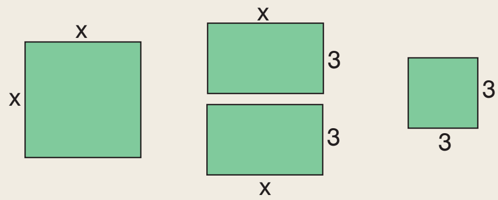
1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- ✔ *Θυμάμαι ποια ισότητα λέγεται ταυτότητα.*
- ✔ *Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες.*
- ✔ *Μαθαίνω να αποδεικνύω μια απλή ταυτότητα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποιες από τις ισότητες $3x = 12$, $x + y = 7$, $4α = 3α + α$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$, αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους;

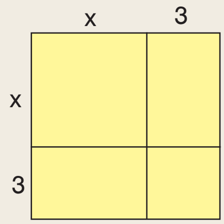
2. α) Να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων.



β) Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου;

i) $x^2 + 9$ ii) $(x + 3)^2$

iii) $x^2 + 6x$ iv) $6x + 9$



γ) Να συγκρίνετε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων με το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου.

Υπάρχουν ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και αληθεύουν για ορισμένες τιμές των μεταβλητών τους. Για παράδειγμα, η ισότητα $3x = 12$, αληθεύει για $x = 4$ και δεν αληθεύει για καμιά άλλη τιμή του x. Ομοίως, η ισότητα $x + y = 7$, αληθεύει για $x = 1$ και $y = 6$, ή για $x = 3$ και $y = 4$, ενώ δεν αληθεύει για $x = 4$ και $y = 5$.

Υπάρχουν όμως και ισότητες, που αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους όπως για παράδειγμα οι ισότητες: $α + β = β + α$, $4α = 3α + α$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$. Οι ισότητες αυτές λέγονται **ταυτότητες**.

Γενικά

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ταυτότητες υπάρχουν πολλές, ορισμένες από αυτές τις συναντάμε πολύ συχνά και γι' αυτό αξίζει να τις θυμόμαστε. **Αξιοσημείωτες ταυτότητες** είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος

Αν την παράσταση $(α + β)^2$ τη γράψουμε $(α + β)(α + β)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, έχουμε:

$$\begin{aligned}(α + β)^2 &= (α + β)(α + β) = \\ &= α^2 + αβ + βα + β^2 = \\ &= α^2 + 2αβ + β^2\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2}$

Το δεύτερο μέρος της προηγούμενης ισότητας λέγεται **ανάπτυγμα** του $(α + β)^2$.

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y + 4)^2$ προκύπτει, αν στην προηγούμενη ταυτότητα αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$$(y + 4)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16.$$

Η προηγούμενη ταυτότητα, όπως και όλες οι επόμενες, χρησιμοποιούνται και όταν τα α, β είναι οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$(α \quad + \quad β)^2 \quad = \quad α^2 \quad + \quad 2αβ \quad + \quad β^2$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η ταυτότητα
$(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$
για θετικούς αριθμούς α και β μπορεί να ερμηνευθεί και γεωμετρικά. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α + β, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$Ε = (α + β)^2$ *(1)*

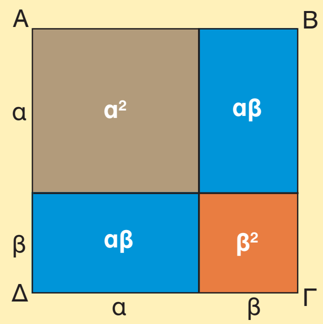
Το εμβαδόν όμως του τετραγώνου ΑΒΓΔ προκύπτει ακόμη κι αν προσθέσουμε τα εμβαδά των σχημάτων που το αποτελούν. Δηλαδή

$Ε = α^2 + αβ + αβ + β^2$ ή

$Ε = α^2 + 2αβ + β^2$ *(2)*

Από τις ισότητες *(1)* και *(2)* διαπιστώνουμε ότι

$(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$.



β) Τετράγωνο διαφοράς

Αν την παράσταση $(α – β)^2$ τη γράψουμε $(α – β)(α – β)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, τότε μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(α – β)^2 = α^2 – 2αβ + β^2}$$

Πράγματι έχουμε:

$(α – β)^2 = (α – β)(α – β) = α^2 – αβ – βα + β^2 = α^2 – 2αβ + β^2$

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y – 4)^2$ προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$$(y – 4)^2 = y^2 – 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 – 8y + 16$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(3x – 4y)^2$ έχουμε:

$$(3x – 4y)^2 = (3x)^2 – 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 = 9x^2 – 24xy + 16y^2$$

$$(α \quad – \quad β)^2 \quad = \quad α^2 \quad – \quad 2αβ \quad + \quad β^2$$

γ) Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

Αν την παράσταση $(α+β)^3$ τη γράψουμε $(α+β)(α+β)^2$ και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό του $α+β$ με το ανάπτυγμα του $(α+β)^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(α+β)^3 &= (α+β)(α+β)^2 = \\ &= (α+β)(α^2+2αβ+β^2) = \\ &= α^3+2α^2β+αβ^2+α^2β+2αβ^2+β^3 = \\ &= α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(α+β)^3 = α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3}$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(α-β)^3 = α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3}$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες ταυτότητες έχουμε:

- $(x+2)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3 = x^3+6x^2+12x+8$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 5+3\cdot(2x)\cdot 5^2-5^3 = 8x^3-60x^2+150x-125.$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Αν βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου $(α+β)(α-β)$ έχουμε:

$(α+β)(α-β) = α^2-\cancel{αβ}+\cancel{βα}-β^2 = α^2-β^2$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(α+β)(α-β) = α^2-β^2}$

Η προηγούμενη ταυτότητα χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε γρήγορα το γινόμενο αθροίσματος δύο παραστάσεων επί τη διαφορά τους. Για παράδειγμα, έχουμε:

- $(x+2)(x-2) = x^2-2^2 = x^2-4$
- $(3α+2β)(3α-2β) = (3α)^2-(2β)^2 = 9α^2-4β^2$

ε) Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

Η παράσταση $(α-β)(α^2+αβ+β^2)$ γράφεται:

$(α-β)(α^2+αβ+β^2) = α^3+\cancel{α^2β}+\cancel{αβ^2}-\cancel{βα^2}-\cancel{αβ^2}-β^3 = α^3-β^3$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(α-β)(α^2+αβ+β^2) = α^3-β^3}$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(α+β)(α^2-αβ+β^2) = α^3+β^3}$$

Οι προηγούμενες ταυτότητες χρησιμοποιούνται για να βρίσκουμε γρήγορα γινόμενα παραστάσεων που έχουν τις αντίστοιχες μορφές. Για παράδειγμα έχουμε:

- $(x-2)(x^2+2x+4) = (x-2)(x^2+2x+2^2) = x^3-2^3 = x^3-8$
- $(x+3)(x^2-3x+9) = (x+3)(x^2-3x+3^2) = x^3+3^3 = x^3+27$

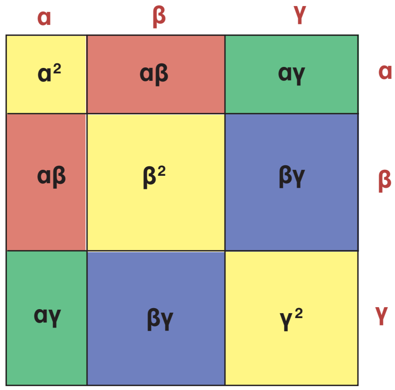
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(α + β + γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$.
β) Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $(3x + 2y + 4)^2$.

Λύση

α) $(α + β + γ)^2 = (α + β + γ)(α + β + γ) =$
$= α^2 + αβ + αγ + βα + β^2 + βγ + γα + γβ + γ^2 =$
$= α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$.

β) Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα, το ανάπτυγμα του $(3x + 2y + 4)^2$ είναι:
$(3x + 2y + 4)^2 =$
$= (3x)^2 + (2y)^2 + 4^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot 4 + 2 \cdot 3x \cdot 4 =$
$= 9x^2 + 4y^2 + 16 + 12xy + 16y + 24x$.



$(α+β+γ)^2 = α^2+β^2+γ^2+2αβ+2βγ+2γα$

2 α) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες
$α^2 + β^2 = (α + β)^2 - 2αβ$ και $α^3 + β^3 = (α + β)^3 - 3αβ(α + β)$.
β) Αν $x + \frac{2}{x} = 3$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων $x^2 + \frac{4}{x^2}$ και $x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Λύση

α) Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος κάθε ταυτότητας και έχουμε:
$(α + β)^2 - 2αβ = α^2 + 2αβ + β^2 - 2αβ = α^2 + β^2$
$(α + β)^3 - 3αβ(α + β) = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3 - 3α^2β - 3αβ^2 = α^3 + β^3$.

β) Η παράσταση $x^2 + \frac{4}{x^2}$ γράφεται $x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$ και σύμφωνα με την ταυτότητα

$α^2 + β^2 = (α + β)^2 - 2αβ$ έχουμε:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

Η παράσταση $x^3 + \frac{8}{x^3}$ γράφεται $x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3$ και σύμφωνα με την ταυτότητα

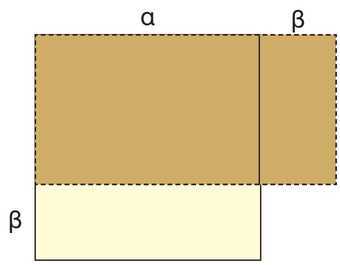
$α^3 + β^3 = (α + β)^3 - 3αβ(α + β)$ έχουμε:

$$x^3 + \frac{8}{x^3} = x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{2}{x} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$$

3 Σε ένα οικόπεδο που έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α, αν μειωθεί η μία διάστασή του κατά β και ταυτόχρονα η άλλη διάστασή του αυξηθεί κατά β, πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδόν του;

Λύση

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $α^2$. Αν αλλάξουν οι πλευρές του, τότε το οικόπεδο θα γίνει ορθογώνιο με διαστάσεις $α - β$ και $α + β$, οπότε θα έχει εμβαδόν $(α - β)(α + β) = α^2 - β^2$. Δηλαδή, το εμβαδόν από το $α^2$ θα γίνει $α^2 - β^2$, που σημαίνει ότι θα μειωθεί κατά $β^2$.



4 **Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.**

Λύση

Για να μετατραπεί ο παρονομαστής σε ρητό αριθμό πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $3 + \sqrt{5}$, γιατί $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$. Επομένως

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

5 **α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(ν - 1)(ν + 1) + 1 = ν^2$.**
β) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) $(ν - 1)(ν + 1) + 1 = (ν^2 - 1^2) + 1 = ν^2 - 1 + 1 = ν^2$.

β) Αν $ν = 2008$, τότε $ν - 1 = 2007$ και $ν + 1 = 2009$.
Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε:
$2007 \cdot 2009 + 1 = (ν - 1)(ν + 1) + 1 = ν^2 = 2008^2$.
Άρα, ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι το τετράγωνο του ακεραίου 2008.

➤ *Ορισμένοι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονται πιο σύντομα με τη βοήθεια των ταυτοτήτων π.χ.*
$99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$
$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10609$

6 **Να γίνουν οι πράξεις:**
α) $(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$ β) $(x - 2y)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Λύση

α) $$\begin{aligned}(2x-3)^2 - 2(3x-1)(3x+1) &= \left[(2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2\right] - 2\left[(3x)^2 - 1^2\right] = \\ &= (4x^2 - 12x + 9) - 2(9x^2 - 1) = \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 18x^2 + 2 = -14x^2 - 12x + 11\end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned}(x-2y)^3 - (x-y)(x^2+xy+y^2) &= \left[x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot (2y)^2 - (2y)^3\right] - (x^3 - y^3) = \\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 - x^3 + y^3 = \\ &= -6x^2y + 12xy^2 - 7y^3\end{aligned}$$

7 Να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$ (Ταυτότητα Lagrange).

Λύση

Το 1ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$$

Το 2ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 &= (\alpha x)^2 + 2(\alpha x)(\beta y) + (\beta y)^2 + (\alpha y)^2 - 2(\alpha y)(\beta x) + (\beta x)^2 = \\ &= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2 = \\ &= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2\end{aligned}$$

Άρα $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα για να αποδείξουμε μία ταυτότητα Α = Β, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

- *Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε στο άλλο (παραδείγματα 1, 2, 5) ή*
- *– Κάνουμε τις πράξεις στο 1ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μία ισότητα Α = Γ.*
  – Κάνουμε τις πράξεις στο 2ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μια ισότητα Β = Γ.

  Αφού Α = Γ και Β = Γ συμπεραίνουμε ότι Α = Β (παράδειγμα 7).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

α) $0x = 0$ β) $x + y = 0$ γ) $\alpha^2\alpha = \alpha^3$ δ) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ε) $\alpha\beta = 0$

2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(x + \alpha)^2$ είναι:

α) $x^2 + \alpha^2$ β) $x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$ γ) $x^2 + x\alpha + \alpha^2$ δ) $x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(2\alpha + 1)^2$ είναι:

α) $2\alpha^2 + 4\alpha + 1$ β) $4\alpha^2 + 1$ γ) $4\alpha^2 + 4\alpha + 1$ δ) $4\alpha^2 + 2\alpha + 1$ ☐

iii) Το ανάπτυγμα του $(y - 2)^2$ είναι:

α) $y^2 - 2y + 4$ β) $y^2 - 4$ γ) $y^2 - 4y + 4$ δ) $y^2 + 4y + 4$ ☐

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(x - y)^2 = x^2 - 2x(-y) + (-y)^2$ ☐

β) $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ☐

γ) $(5\omega + 4)^2 = 25\omega^2 + 16$ ☐

δ) $(3x - y)^2 = 3x^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2$ ☐

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(x + 1)^3$ είναι:

α) $x^3 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1^3$ β) $x^3 + 1^3$

γ) $x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$ δ) $x^3 + x^2 \cdot 1 + x \cdot 1^2 + 1^3$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(\beta - 2)^3$ είναι:

α) $\beta^3 - 3 \cdot \beta \cdot 2 + 2^3$ β) $\beta^3 - 2^3$

γ) $\beta^3 - \beta^2 \cdot 2 + \beta \cdot 2^2 - 2^3$ δ) $\beta^3 - 3 \cdot \beta^2 \cdot 2 + 3 \cdot \beta \cdot 2^2 - 2^3$ ☐

5 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ ☐

β) $(2x + 3)^3 = 2x^3 + 3 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3$ ☐

γ) $(3x - 1)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 1 + 3(3x) \cdot 1^2 + 1^3$ ☐

δ) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ ☐

6 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(y - 3)(y + 3)$ είναι:

α) $y^2 - 3$ β) $9 - y^2$ γ) $y^2 - 9$ δ) $3 - y^2$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(y + x)(x - y)$ είναι:

α) $y^2 - x^2$ β) $x^2 - y^2$ γ) $(x - y)^2$ δ) $x^2 + y^2$ ☐

iii) Το ανάπτυγμα του $(\omega - 2\alpha)(\omega + 2\alpha)$ είναι:

α) $\omega^2 - 2\alpha^2$ β) $\omega^2 + 4\alpha^2$ γ) $4\alpha^2 - \omega^2$ δ) $\omega^2 - 4\alpha^2$ ☐

iv) Το ανάπτυγμα του $(5 - x)(5^2 + 5x + x^2)$ είναι:

α) $5^3 + x^3$ β) $x^3 - 5^3$ γ) $5^3 - x^3$ δ) $25 - x^3$ ☐

v) Το ανάπτυγμα του $(x + 2\alpha)(x^2 - 2\alpha x + 4\alpha^2)$ είναι:

α) $x^3 + 2\alpha^3$ β) $x^3 - (2\alpha)^3$ γ) $x^3 - 2\alpha^3$ δ) $x^3 + 8\alpha^3$ ☐

7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(x + y)(y - x)$	1. $x^2 - 2xy + y^2$
β. $(x + y)^2$	2. $x^3 - y^3$
γ. $(y - x)^2$	3. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
δ. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	4. $y^2 - x^2$
ε. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	5. $x^2 + 2xy + y^2$
στ. $(x - y)^3$	6. $x^2 - y^2$
	7. $x^3 + y^3$
	8. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

α	β	γ	δ	ε	στ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+2)^2$ β) $(y+5)^2$ γ) $(2\omega+1)^2$ δ) $(\kappa+2\lambda)^2$
ε) $(3y+2\beta)^2$ στ) $(x^2+1)^2$ ζ) $(y^2+y)^2$ η) $(2x^2+3x)^2$
θ) $(x+\sqrt{2})^2$ ι) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega+\frac{4}{\omega}\right)^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(3\omega-1)^2$ δ) $(2\kappa-\lambda)^2$
ε) $(3y-2\beta)^2$ στ) $(x^2-2)^2$ ζ) $(y^2-y)^2$ η) $(2x^2-5x)^2$
θ) $(x-\sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2$

3 Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(\sqrt{3}+1)^2$ β) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2$ γ) $(\sqrt{2}-3)^2$ δ) $(1-\sqrt{7})^2$

4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x \;\cdots\; .....)^2 = ... + ... + 9$ β) $(\;.....\;\cdots\;4)^2 = y^2 - .....\;\cdots\;.....$
γ) $(.....-.....)^2 = 16x^2 \cdots 8x\alpha \cdots .....$ δ) $(.....\;\cdots\;2\omega)^2 = ... - 4x^2\omega \cdots .....$

5 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+1)^3$ β) $(y+4)^3$ γ) $(2\alpha+1)^3$ δ) $(3\alpha+2\beta)^3$
ε) $(x^2+3)^3$ στ) $(y^2+y)^3$ ζ) $(x-2)^3$ η) $(y-5)^3$
θ) $(3\alpha-1)^3$ ι) $(2x-3y)^3$ ια) $(y^2-2)^3$ ιβ) $(\omega^2-2\omega)^3$

6 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-1)(x+1)$ β) $(y-2)(y+2)$ γ) $(3-\omega)(3+\omega)$
δ) $(x+4)(4-x)$ ε) $(x-y)(-x-y)$ στ) $(-x+y)(-x-y)$
ζ) $(2x+7y)(2x-7y)$ η) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ θ) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

7 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^2 + (3x+1)^2 - 10(x-1)(x+1)$ είναι σταθερό.

8 α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4) = \alpha^8-\beta^8$.
β) Να υπολογίσετε το γινόμενο: $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$.

9 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ β) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ γ) $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ δ) $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

10 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)(x^2+3x+9)$ β) $(y+2)(y^2-2y+4)$

γ) $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)$ δ) $(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$

11 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x-4)^2+(2x+5)^2$ β) $(x^2-1)^2-(x^2-3)(x^2+3)$

γ) $(x+y)^2-(x-2y)(x+2y)+(2x-y)^2$ δ) $(3x-4)^2+(3x+4)^2-2(3x-4)(3x+4)$

ε) $(2\alpha+1)^3+(2\alpha-1)^3$ στ) $(\alpha+2)^3-(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$

ζ) $(\alpha^2+\alpha)^3-(\alpha^2-\alpha)^3$ η) $(4\alpha-1)^3-\alpha(8\alpha+1)(8\alpha-1)$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x-2y)^2-(2x-y)^2+3x^2=3y^2$

β) $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)-(3\alpha-\beta)^2=\alpha^2+4\beta^2$

γ) $(x-1)(x+1)^3-2x(x-1)(x+1)=x^4-1$

δ) $(\alpha^2+\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2$

ε) $(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2=\alpha^2+(2\alpha-5)^2$

στ) $(2x^2+2x)^2+(2x+1)^2=(2x^2+2x+1)^2$

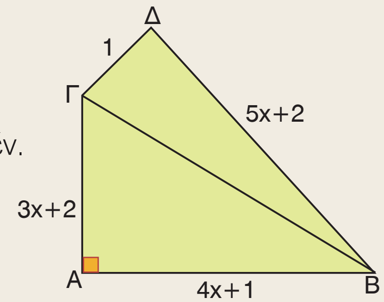
13 Αν $x=3+\sqrt{5}$ και $y=3-\sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy β) x^2-y^2 γ) x^2+y^2 δ) x^3+y^3

14 α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha+\dfrac{5}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\dfrac{5}{\alpha}\right)^2=20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x=\left(2005+\dfrac{1}{401}\right)^2-\left(2005-\dfrac{1}{401}\right)^2$

15 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

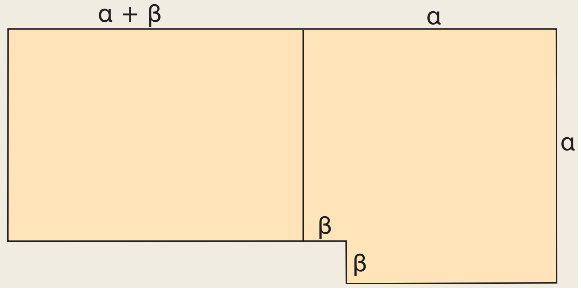


16
- Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν.
- Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.
- Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.
- Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.
- Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.
- Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

17 α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-(\beta-\gamma)^2}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

18 Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο παιδιά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο από τα παιδιά αδικήθηκε;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Το τρίγωνο του Πασκάλ
και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α + β

1	$(\alpha+\beta)^0=$	1
1 1	$(\alpha+\beta)^1=$	$1\alpha + 1\beta$
1 2 1	$(\alpha+\beta)^2=$	$1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$
1 3 3 1	$(\alpha+\beta)^3=$	$1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$
1 4 6 4 1	$(\alpha+\beta)^4=$	$1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$
1 □ □ □ □ 1	$(\alpha+\beta)^5=$	.... + ... + ... + ... + ... + ...
1 □ □ □ □ □ 1	$(\alpha+\beta)^6=$	....

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος α + β.

1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Πασκάλ**. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.
   Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;

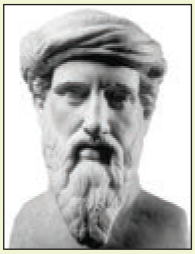
2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + \beta)^5$ και $(\alpha + \beta)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του α και του β σε κάθε ανάπτυγμα.

3. Να βρείτε και το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^6$, αν γνωρίζετε ότι και τα αναπτύγματα των δυνάμεων της διαφοράς α – β προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +.
   π.χ. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$, $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

4. Μπορείτε να βρείτε ποιες άλλες ιδιότητες κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου Πασκάλ;

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πυθαγόρειες τριάδες



Πυθαγόρας

Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς;

Μια τριάδα **θετικών ακεραίων** αριθμών α, β, γ, για την οποία ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες;

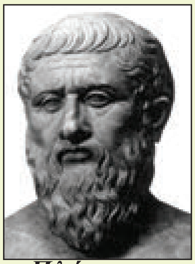
Ο **Πυθαγόρας** (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2+1}{2}, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ περιττός } (\mu = 3, 5, 7, \ldots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πυθαγόρα.



Πλάτωνας

Ο **Πλάτωνας** (5ος – 4ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2}{4}+1, \quad \frac{\mu^2}{4}-1, \quad \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ } \textbf{άρτιος} \text{ } (\mu = 4, 6, 8, \ldots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πλάτωνα.

Ευκλείδης

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) στηριζόμενος σε μία ταυτότητα την οποία γνώριζε και ο **Ευκλείδης**, έδωσε μια γενικότερη λύση στο πρόβλημα κατασκευής Πυθαγορείων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς (άρτιους ή περιττούς). Ανακάλυψε ότι ο αριθμοί της μορφής $\lambda^2+\mu^2$, $\lambda^2-\mu^2$, $2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Διόφαντου.

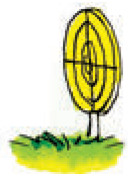
ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Η έννοια της απόδειξης

- Διερεύνηση του ρόλου της απόδειξης στην καθημερινή ζωή (δικαστήριο, εμπορικές συναλλαγές κ.τ.λ.)
- Η απόδειξη στα Μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο κ.τ.λ.).

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

✔ *Μαθαίνω να μετατρέπω μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο παραγόντων*

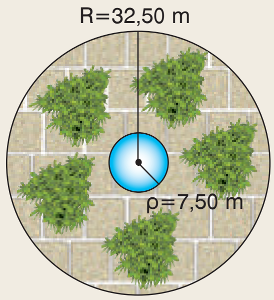


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $7{,}32 \cdot 25 + 7{,}32 \cdot 75$ β) $347 \cdot \frac{7}{6} - 347 \cdot \frac{1}{6}$

2. Σε μια κυκλική πλατεία ακτίνας $R = 32{,}50$ m κατασκευάστηκε ένα κυκλικό συντριβάνι ακτίνας $\rho = 7{,}50$ m.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλατείας που απέμεινε μετά την κατασκευή του συντριβανιού.



Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος, μιας εξίσωσης, μιας ανίσωσης ή για την απλοποίηση ενός κλάσματος, είναι χρήσιμο να μετατραπεί μία παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi\rho^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - \rho^2)$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $(R + \rho)(R - \rho) = R^2 - \rho^2$, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi(R + \rho)(R - \rho)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα η παράσταση $\pi R^2 - \pi\rho^2$ πήρε τελικά τη μορφή $\pi(R + \rho)(R - \rho)$. Κανένας από τους παράγοντες $(R+\rho)$, $(R - \rho)$ δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο μη σταθερών πολυωνύμων. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παράσταση αυτή έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στη συνέχεια, θα δούμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης.

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\boxed{3\alpha + 3\beta - 3\gamma} \overset{\text{παραγοντοποιούμε}}{\underset{\text{αναπτύσσουμε}}{=}} \boxed{3(\alpha + \beta - \gamma)}$$

Για παράδειγμα, σε όλους τους όρους της παράστασης $3\alpha + 3\beta - 3\gamma$ υπάρχει κοινός παράγοντας το 3, οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3\alpha + 3\beta - 3\gamma = 3(\alpha + \beta - \gamma).$$

Ομοίως η παράσταση $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha$, γράφεται $2\alpha \cdot \alpha - 2\alpha \cdot \beta + 2\alpha \cdot 1$, οπότε σε όλους τους όρους της υπάρχει κοινός παράγοντας το 2α.

Άρα, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha = 2\alpha(\alpha - \beta + 1).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι «βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2α».

Κάθε όρος μέσα στην παρένθεση είναι το πηλίκο της διαίρεσης των αντίστοιχων όρων της παράστασης με τον κοινό παράγοντα:

$$(2\alpha^2) : (2\alpha) = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$$

$$(2\alpha\beta) : (2\alpha) = \frac{2\alpha\beta}{2\alpha} = \beta$$

$$(2\alpha) : (2\alpha) = \frac{2\alpha}{2\alpha} = 1$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$ β) $\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega)$ γ) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

Λύση

α) Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $6xy$, οπότε έχουμε:

$$12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2 = 6xy \cdot 2x - 6xy \cdot 5y + 6xy \cdot xy = 6xy(2x - 5y + xy)$$

β) Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $\alpha(\omega - x)$ και $3\beta(x - \omega)$. Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον $\omega - x$, τον δεύτερο όρο της τον γράφουμε $-3\beta(\omega - x)$, οπότε έχουμε:

$$\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega) = \alpha(\omega - x) - 3\beta(\omega - x) = (\omega - x)(\alpha - 3\beta)$$

γ) Αν από τον δεύτερο όρο της παράστασης βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2, τότε δημιουργούμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$, οπότε έχουμε:

$$3(2x - 1) + x(4x - 2) = 3(2x - 1) + 2x(2x - 1) = (2x - 1)(3 + 2x)$$

β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Στην παράσταση $\alpha x + \alpha y + 2x + 2y$, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το α και από τους δύο τελευταίους το 2, τότε σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον $x + y$. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\underbrace{ax + ay} + \underbrace{2x + 2y} = a(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(a + 2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές **ομάδες**. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$ax + ay + 2x + 2y = x(a + 2) + y(a + 2) = (a + 2)(x + y)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$ β) $αβ - 3α - 3β + 9$ γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2$

Λύση

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

β) $αβ - 3α - 3β + 9 = α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 =$
$= 3x(x + y) + 2y(x + y) =$
$= (x + y)(3x + 2y)$.

Μερικές παραστάσεις παραγοντοποιούνται κατά ομάδες, αν **διασπάσουμε** κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους π.χ. $5xy = 3xy + 2xy$

γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας $(α + β)(α - β) = α^2 - β^2$, τότε γράφεται και ως εξής:

$$\boldsymbol{α^2 - β^2 = (α + β)(α - β)}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων, π.χ. $α^2 - 9 = α^2 - 3^2 = (α + 3)(α - 3)$.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $4β^2 - 25$ β) $(3x - 1)^2 - 81$ γ) $α^2 - 7$.

Λύση

α) $4β^2 - 25 = (2β)^2 - 5^2 = (2β + 5)(2β - 5)$

β) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 =$
$= (3x - 1 + 9)(3x - 1 - 9) =$
$= (3x + 8)(3x - 10)$

γ) $α^2 - 7 = α^2 - (\sqrt{7})^2 = (α - \sqrt{7})(α + \sqrt{7})$

Για να σχηματίσουμε διαφορά τετραγώνων εκφράζουμε κάθε όρο ως τετράγωνο μιας παράστασης.

δ) Διαφορά – άθροισμα κύβων

Οι ταυτότητες $(α - β)(α^2 + αβ + β^2) = α^3 - β^3$ και $(α + β)(α^2 - αβ + β^2) = α^3 + β^3$ γράφονται και ως εξής:

$$α^3 - β^3 = (α - β)(α^2 + αβ + β^2) \qquad α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 - αβ + β^2)$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα κύβων, π.χ.

$$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2) = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y + 3)(y^2 - y \cdot 3 + 3^2) = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $x^3 - 27$ β) $x^3 + 64$ γ) $8α^3 - β^3$

Λύση

α) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) =$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - x \cdot 4 + 4^2) =$
$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

Για να σχηματίσουμε διαφορά ή άθροισμα κύβων εκφράζουμε κάθε όρο ως κύβο μιας παράστασης.

γ) $8α^3 - β^3 = (2α)^3 - β^3 = (2α - β)\left[(2α)^2 + 2α \cdot β + β^2\right] = (2α - β)(4α^2 + 2αβ + β^2)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ και $(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$ γράφονται και ως εξής:

$$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2 \qquad α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου **(τέλειο τετράγωνο)**, π.χ.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων, αφού $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ και $(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $4α^2 + 12α + 9$ β) $α^2 - 10αβ + 25β^2$ γ) $-4y^2 + 4y - 1$

Λύση

α) $4α^2 + 12α + 9 = (2α)^2 + 2 \cdot 2α \cdot 3 + 3^2 = (2α + 3)^2$

β) $\alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot 5\beta + (5\beta)^2 =$
$= (\alpha - 5\beta)^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1 = -(4y^2 - 4y + 1) =$
$= -\left[(2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 1 + 1^2\right] =$
$= -(2y-1)^2$

Γράφουμε κάθε παράσταση ως ανάπτυγμα τετραγώνου της μορφής
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Το ανάπτυγμα του γινομένου $(x + \alpha)(x + \beta)$ είναι το τριώνυμο $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, αφού

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Επομένως, ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$
παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $\boxed{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)}$

Για παράδειγμα, για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 8x + 12$ αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 (σταθερός όρος) και άθροισμα 8 (συντελεστής του x). Υπάρχουν πολλά ζευγάρια αριθμών που έχουν γινόμενο 12 (π.χ. $1\cdot 12$, $2\cdot 6$, $3\cdot 4$ κ.τ.λ.). Όμως, μόνο το ζευγάρι 2 και 6 έχει άθροισμα 8. Άρα έχουμε:

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + (6 + 2)x + 6\cdot 2 = (x + 6)(x + 2)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:
α) $x^2 - 8x + 12$ β) $x^2 + 5x - 6$ γ) $-3y^2 + 12y - 9$

Λύση

α) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 8x + 12$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 και άθροισμα -8. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι το -2 και το -6.
Άρα έχουμε $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$

$$x^2 \overset{(-2)+(-6)}{\overset{\uparrow}{-8}}x + \underset{(-2)\cdot(-6)}{\underset{\downarrow}{12}} = (x-2)(x-6)$$

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 5x - 6$, αναζητούμε δύο ετερόσημους αριθμούς, που έχουν γινόμενο -6 και άθροισμα 5.
Οι αριθμοί αυτοί είναι το 6 και το -1, οπότε έχουμε $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$.

γ) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $-3y^2 + 12y - 9$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το -3, ώστε ο συντελεστής του y^2 να γίνει 1, οπότε έχουμε

$$-3y^2 + 12y - 9 = -3(y^2 - 4y + 3)$$

Για την παραγοντοποίηση του τριωνύμου $y^2 - 4y + 3$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 3 και άθροισμα -4. Οι αριθμοί αυτοί είναι το -3 και το -1, οπότε έχουμε $-3y^2 + 12y - 9 = -3(y^2 - 4y + 3) = -3(y - 3)(y - 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $3x^2 - 18x$.

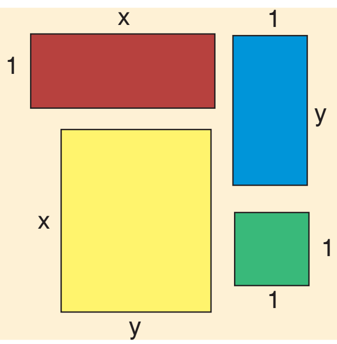
β) Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 = 18x$.

Λύση

α) Η παράσταση $3x^2 - 18x$ παραγοντοποιείται ως εξής: $3x^2 - 18x = 3x(x - 6)$.

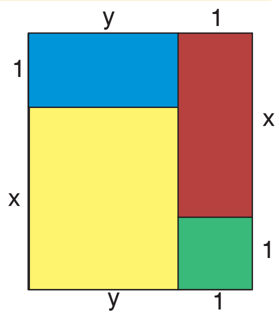
β) Η εξίσωση $3x^2 = 18x$ γράφεται $3x^2 - 18x = 0$ και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $3x(x - 6) = 0$. Το γινόμενο $3x(x - 6)$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $3x = 0$ ή $x - 6 = 0$, δηλαδή $x = 0$ ή $x = 6$.

2



Αν τοποθετήσουμε κατάλληλα τα τέσσερα σχήματα, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο.
Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση



Το ορθογώνιο που θα σχηματιστεί θα έχει εμβαδόν Ε, ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων, δηλαδή, $Ε = x \cdot 1 + y \cdot 1 + xy + 1 \cdot 1 = x + y + xy + 1$.

Όμως, $x + y + xy + 1 = (x + xy) + (y + 1) =$

$= x(1 + y) + (1 + y) = (1 + y)(x + 1)$.

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $1 + y$ και $1 + x$.

3 Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης:

α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55$ β) $2005^2 - 1995^2$ γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 435^2$.

Λύση

α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55 = 786(45 + 55) = 786 \cdot 100 = 78600$

β) $2005^2 - 1995^2 = (2005 - 1995)(2005 + 1995) = 10 \cdot 4000 = 40000$

γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 435^2 = 565(499 + 66) - 435^2 = 565^2 - 435^2 =$
$(565 - 435)(565 + 435) = 130 \cdot 1000 = 130000$

4 Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $3x^2y - 12y^3$ β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x$ γ) $x^4 - 16y^4$

δ) $16α^3β - 54β$ ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2$ στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x$

Λύση

α) $3x^2y - 12y^3 = 3y(x^2 - 4y^2) = 3y\left[x^2 - (2y)^2\right] = 3y(x - 2y)(x + 2y)$

β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x = 5x(xy + 2x + y + 2) = 5x\left[y(x + 1) + 2(x + 1)\right] =$
$= 5x(x + 1)(y + 2)$

γ) $x^4 - 16y^4 = (x^2)^2 - (4y^2)^2 = (x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2) = (x^2 + 4y^2)\left[x^2 - (2y)^2\right] =$
$= (x^2 + 4y^2)(x - 2y)(x + 2y)$

δ) $16α^3β - 54β = 2β(8α^3 - 27) = 2β\left[(2α)^3 - 3^3\right] = 2β(2α - 3)(4α^2 + 6α + 9)$

ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - y^2 = (x - 2)^2 - y^2 = (x - 2 + y)(x - 2 - y)$.

στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5)$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 5$ παραγοντοποιείται, εφόσον υπάρχουν αριθμοί με γινόμενο -5 και άθροισμα 4, που είναι οι 5 και -1.
Άρα, $3x^3 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5) = 3x(x + 5)(x - 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

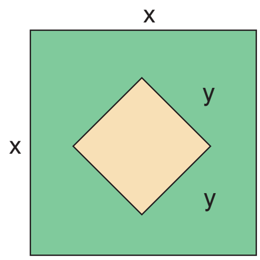
1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;
α) $2(x - y)(x + y)$ β) $2 + (x - y)(x + y)$ γ) $4(α - β)^2$ δ) $4 + (α - β)^2$
ε) $(x + 2y)x - y$ στ) $(x + 2y)(x - y)$ ζ) $(α + β)(α + 3β)$
η) $(α + β)(α + 3β) + 1$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.
α) $8x + 16 = 8(.............)$ β) $3αy - y^2 = y(.............)$
γ) $6x^2 + 12x = ...(x + 2)$ δ) $-4x^2 + 8x = -4x(.............)$
ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(.............)$ στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(.............)$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:
α) $3x^2(x + 1)$ β) $(x + 3)(3x^2 - 1)$ γ) $(x + 1)(3x^2 + 1)$ δ) $x(3x^2 + x + 1)$.

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
α) $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ ☐ β) $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ ☐
γ) $112^2 - 12^2 = 100 \cdot 124$ ☐ δ) $4y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$ ☐
ε) $4x^2 - α^2 = (2x - α)(2x + α)$ ☐ στ) $α^2 - (β - 1)^2 = (α + β - 1)(α - β - 1)$ ☐

5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x - y)(x + y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.
α) $α^3 - 2^3 = (α - 2)(...............................)$
β) $α^3 + 3^3 = (α + 3)(...............................)$
γ) $(2x)^3 - 1 = (2x - 1)(...............................)$
δ) $1 + (5y)^3 = (1 + 5y)(...............................)$

7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 - 5x + 25)$ ☐

β) $8 + α^3 = (2 + α)(2^2 - 2α + α^2)$ ☐

γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)(3y^2 - 3y + 1)$ ☐

δ) $1 - (2β)^3 = (1 - 2β)(1 + 2β + 4β^2)$ ☐

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (.............)^2$ β) $4α^2 - 4α + 1 = (.............)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (.............)^2$ δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (.............)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $πα^2 + 2πα + π$, με $α > 0$, έχει ακτίνα

α) $α + 2$ β) $α^2 + 1$ γ) $α + 1$ δ) $π(α + 1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2 + (α + β)x + αβ$	$αβ$	$α + β$	$α$	$β$	$(x + α)(x + β)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + (α + 2)x + 2α = (x + ...) \cdot (x + ...)$

β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + ...) \cdot (x + ...)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3α + 6β$ β) $2x - 8$ γ) $8ω^2 + 6ω$

δ) $-9x^2 - 6x$ ε) $8α^2β + 4αβ^2$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $α^2β + αβ^2 - αβ$ η) $2α^3 - 4α^2 + 6α^2β$ θ) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{18}\,y + \sqrt{8}\,y^2$

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x(α - β) + y(α - β)$ β) $α(x + y) + β(x + y)$ γ) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2)$

δ) $α^2(α - 2) - 3(2 - α)$ ε) $4x(x - 1) - x + 1$ στ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$

3 i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + x$ β) $2y^2 - 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega)$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + x = 0$ β) $2y^2 = 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$ γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$ θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$

5 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$ β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$ γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

6 α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

7 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$ β) $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$

8 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 9$ β) $16x^2 - 1$ γ) $\alpha^2 - 9\beta^2$

δ) $\alpha^2\beta^2 - 4$ ε) $36\omega^2 - (\omega + 5)^2$ στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$

ζ) $x^2 - \frac{1}{16}$ η) $x^2 - 3$ θ) $x^2 - 2y^2$

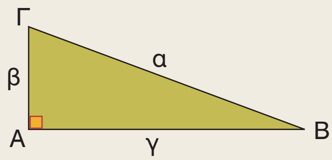
9 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2 - 32$ β) $28 - 7y^2$ γ) $2x^3 - 2x$ δ) $5\alpha x^2 - 80\alpha$ ε) $2(x - 1)^2 - 8$

10 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την πλευρά γ, όταν:

α) $\alpha = 53$, $\beta = 28$ β) $\alpha = 0{,}37$, $\beta = 0{,}12$

γ) $\alpha = 26\lambda$, $\beta = 10\lambda$



11 Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 49 = 0$ β) $9x^3 - 4x = 0$ γ) $x(x + 1)^2 = 4x$ δ) $(x + 2)^3 = x + 2$

12 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 - 27$ β) $y^3 + 8$ γ) $\omega^3 + 64$ δ) $8x^3 - 1$ ε) $27y^3 + 1$

13 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^3 - 24$ β) $16\alpha^4 + 2\alpha$ γ) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho^3$ δ) $\alpha^4\beta + \alpha\beta^4$

14 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $x^3 - \ldots\ldots = (x - 3)(\ldots\ldots + \ldots\ldots + 9)$ β) $\ldots\ldots + y^3 = (2x + y)(4x^2 - \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

γ) $\alpha^3 - \ldots\ldots = (\alpha - 2\beta)(\ldots\ldots + \ldots\ldots + 4\beta^2)$ δ) $\alpha^3 + \ldots\ldots = (\alpha + 5\beta)(\ldots\ldots - \ldots\ldots + 25\beta^2)$

15 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 2x + 1$ β) $y^2 + 4y + 4$ γ) $\omega^2 - 6\omega + 9$ δ) $\alpha^2 + 10\alpha + 25$

ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$ στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$ ζ) $4y^2 - 12y + 9$ η) $16x^2 + 8xy + y^2$

θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2$ ι) $(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1$ ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$ ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

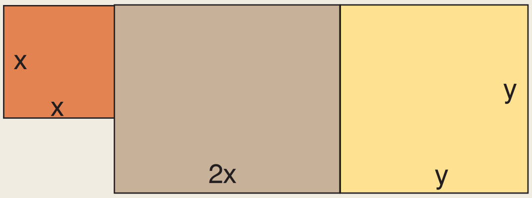
16 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^2 + 24x + 48$ β) $-y^2 + 4y - 4$ γ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$ δ) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

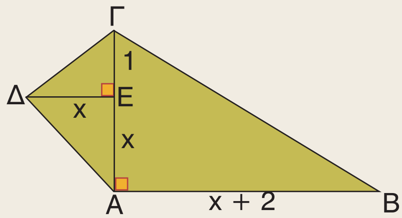
17 Να βρείτε:

α) Ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

β) Την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



18 Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



19 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 3x + 2$ β) $y^2 - 4y + 3$ γ) $\omega^2 + 5\omega + 6$ δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5$

ε) $x^2 - 7x + 12$ στ) $y^2 - y - 12$ ζ) $\omega^2 - 9\omega + 18$ η) $\alpha^2 + 3\alpha - 10$

20 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$ β) $x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta$ γ) $x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$

21 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\omega^2 + 10\omega + 8$ β) $3\alpha^2 - 12\alpha - 15$ γ) $\alpha x^2 - 7\alpha x + 6\alpha$

22 Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821$ β) $801^2 + 199 \cdot 801$ γ) $998^2 - 4$

δ) $999 \cdot 1001 + 1$ ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1$ στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9$

23 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

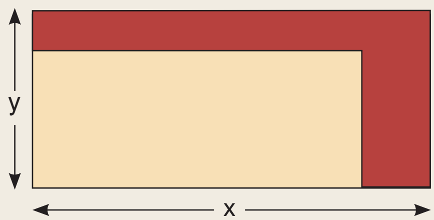
α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$ β) $x^4 - 1 + x^3 - x$ γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$ ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$ στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$

ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$ η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$ θ) $2(x-1)(x^2-4) - 5(x-1)(x-2)^2$

ι) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$ ια) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ ιβ) $(x^2+9)(\alpha^2+4) - (\alpha x+6)^2$

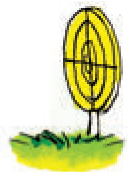
24 Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x, y μειώθηκαν, επειδή έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος των διπλανών δρόμων. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι $xy - x - 2y + 2$, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε διάστασής του.



1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

✔ *Μαθαίνω να βρίσκω το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με το πολυώνυμο δ(x).*

✔ *Μαθαίνω να γράφω την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του Δ(x) με το δ(x).*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Αν τοποθετήσουμε σε μια αίθουσα 325 καθίσματα σε σειρές και κάθε σειρά περιέχει 19 καθίσματα, πόσες σειρές θα σχηματίσουμε και πόσα καθίσματα θα περισσέψουν; Να γράψετε την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Να βρείτε το πολυώνυμο $Δ(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 – x$, δίνει πηλίκο $π(x) = 2x^2 – 3x – 1$ και υπόλοιπο $υ(x) = 7x – 4$.

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς **Δ** (διαιρετέος) και **δ** (διαιρέτης) με $δ \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση **Δ : δ**, τότε βρίσκουμε δύο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς **π** (πηλίκο) και **υ** (υπόλοιπο), για τους οποίους ισχύει:

$$\boldsymbol{Δ = δπ + υ \quad με \quad υ < δ}$$

Αν $υ = 0$, είναι $\boldsymbol{Δ = δ \cdot π}$ και τότε λέμε ότι έχουμε **τέλεια διαίρεση**.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμα ότι ο δ **διαιρεί** το Δ ή ότι ο δ είναι **παράγοντας** του Δ.

Για παράδειγμα, αν $Δ = 325$ και $δ = 19$, τότε με τη διαίρεση $325 : 19$, βρίσκουμε τους αριθμούς $π = 17$ και $υ = 2$, για τους οποίους ισχύει

$$325 = 19 \cdot 17 + 2 \quad με \quad 2 < 19$$

$$\begin{array}{r|l} 325 & 19 \\ \cline{2-2} -19 & 17 \\ \cline{1-1} 135 & \\ -133 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα **Δ(x)** (διαιρετέος) και **δ(x)** (διαιρέτης) με $δ(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση **Δ(x) : δ(x)**, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων **π(x)** (πηλίκο) και **υ(x)** (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

$$\boldsymbol{Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)} \quad \text{(Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)}$$

όπου το $υ(x)$ ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $δ(x)$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφεται η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $Δ(x) = 2x^2 – 5x^3 + 2x^4 – 4 + 8x$ με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 – x$.

Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του x.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \hline & \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο $2x^4$ του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη $\left(\frac{2x^4}{x^2}=2x^2\right)$ Το αποτέλεσμα $2x^2$ είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $2x^2$, που είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη x^2-x και το γινόμενο $2x^2(x^2-x)=2x^4-2x^3$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Για να γίνουν ευκολότερα οι πράξεις, αλλάζουμε τα πρόσημα και αντί για αφαίρεση κάνουμε πρόσθεση και έτσι βρίσκουμε το **πρώτο μερικό υπόλοιπο**

$$υ_1=-3x^3+2x^2+8x-4.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2 \\ \hline -3x^3+2x^2+8x-4 & \end{array}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τον πρώτο όρο $-3x^3$ του υπολοίπου $υ_1$ με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη $\left(-\frac{3x^3}{x^2}=-3x\right)$. Το αποτέλεσμα $-3x$ είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x \\ \hline -3x^3+2x^2+8x-4 & \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $-3x$, που είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη x^2-x και το γινόμενο $-3x(x^2-x)=-3x^3+3x^2$ το αφαιρούμε από το υπόλοιπο $υ_1$ και βρίσκουμε το **δεύτερο μερικό υπόλοιπο** $υ_2=-x^2+8x-4$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x \\ \hline -3x^3+2x^2+8x-4 & \\ 3x^3-3x^2 & \\ \hline -x^2+8x-4 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε τη διαίρεση με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε υπόλοιπο που να είναι ίσο με μηδέν **(τέλεια διαίρεση)** ή να έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη x^2-x **(ατελής διαίρεση)**, οπότε η διαίρεση δεν μπορεί να συνεχιστεί.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x-1 \\ \hline -3x^3+2x^2+8x-4 & \\ 3x^3-3x^2 & \\ \hline -x^2+8x-4 & \\ x^2-x & \\ \hline 7x-4 & \end{array}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 = (x^2-x) \cdot (2x^2-3x-1) + (7x-4)$$

(Διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των βαθμών διαιρέτη και πηλίκου είναι ίσο με το βαθμό του διαιρετέου.

Ομοίως η διαίρεση $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) : (2x^2 + 3x - 1)$, γίνεται ως εξής:

> Από το διαιρετέο λείπει ο όρος 2ου βαθμού, οπότε, όταν τον γράφουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του, συνήθως τον συμπληρώνουμε με το μηδενικό μονώνυμο ή αφήνουμε τη θέση του κενή για να γίνει ευκολότερα η αναγωγή ομοίων όρων.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +8x^3 & & +17x & -5 & 2x^2+3x-1 \\
\cline{6-6}
-8x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & 4x^2-2x+5 \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +4x^2 & +17x & -5 & \\
 & +4x^3 & +6x^2 & -2x & & \\
\cline{2-5}
 & & 10x^2 & +15x & -5 & \\
 & & -10x^2 & -15x & +5 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Στην τελευταία διαίρεση, όπου το υπόλοιπο είναι μηδέν, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$
\begin{array}{ccccc}
8x^4 + 8x^3 + 17x - 5 & = & (2x^2 + 3x - 1) & \cdot & (4x^2 - 2x + 5) \\
(\text{Διαιρετέος}) & = & (\text{διαιρέτης}) & \cdot & (\text{πηλίκο})
\end{array}
$$

Τα πολυώνυμα $\delta = 2x^2 + 3x - 1$ και $\pi = 4x^2 - 2x + 5$ λέγονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του πολυωνύμου $\Delta = 8x^4 + 8x^3 + 17x - 5$.

Γενικά

Ένα πολυώνυμο **δ** είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου **Δ**, αν η διαίρεση **Δ : δ** είναι τέλεια, δηλαδή αν υπάρχει πολυώνυμο **π**, τέτοιο ώστε να ισχύει **Δ = δ · π**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να γίνει η διαίρεση $(4x^4 + 3x^2 - 1) : (2x - 1)$.
β) Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$.

Λύση

α)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +3x^2 & & -1 & 2x-1 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3+x^2+2x+1 \\
\cline{1-5}
 & 2x^3 & +3x^2 & & -1 & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 4x^2 & & -1 & \\
 & & -4x^2 & +2x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -1 & \\
 & & & -2x & +1 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

β) Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, έχουμε:
$4x^4+3x^2-1=(2x-1)(2x^3+x^2+2x+1)$.
Παρατηρούμε ότι το πηλίκο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
& 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = \\
= \; & x^2(2x + 1) + (2x + 1) = \\
= \; & (2x + 1)(x^2 + 1).
\end{aligned}
$$

Επομένως, το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:
$4x^4 + 3x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1)$.

2 Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $\delta = 3x + 2\alpha$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $\Delta = 3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3$.

Λύση

Το πολυώνυμο δ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου Δ, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης Δ : δ είναι μηδέν. Κάνουμε τη διαίρεση Δ : δ.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -\,4\alpha x^2 & -\,\alpha^2 x & +\,2\alpha^3 & 3x + 2\alpha \\
\cline{5-5}
-3x^3 & -\,2\alpha x^2 & & & x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\
\cline{1-4}
 & -\,6\alpha x^2 & -\,\alpha^2 x & +\,2\alpha^3 & \\
 & 6\alpha x^2 & +\,4\alpha^2 x & & \\
\cline{2-4}
 & & +\,3\alpha^2 x & +\,2\alpha^3 & \\
 & & -\,3\alpha^2 x & -\,2\alpha^3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3 =$

$= (3x + 2\alpha)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$, που σημαίνει ότι το πολυώνυμο $3x + 2\alpha$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου

$3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $4x + 7$ είναι πολυώνυμο:

α) 1ου βαθμού β) 2ου βαθμού γ) 3ου βαθμού δ) σταθερό.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x^2 - 4x + 9$ δεν μπορεί να είναι:

α) 5 β) $3x - 2$ γ) $x^2 + 3$ δ) $4x$.

iii) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $2x^2 + x + 5$ δίνει πηλίκο $x^4 + x - 2$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι:

α) 4 β) 6 γ) 8 δ) οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	
7		2
	6	3

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Το πηλίκο της διαίρεσης του $(2x + 1)(x + 3)$ με το $2x + 1$ είναι το $x + 3$. ☐

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x + 6$ είναι το $x^2 + 2$. ☐

γ) Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού με ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού. ☐

δ) Το $x - 4$ είναι παράγοντας του $x^2 - 16$. ☐

ε) Το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 + 1) : (x + 1)$ είναι το $x^2 - x + 1$. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$ β) $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$

γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$ δ) $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$ στ) $(9x^4 - x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - x + 1)$

ζ) $(8x^4 - 6x^2 - 9) : (2x^2 - 3)$ η) $(3x^5 - 2x^3 - 4) : (3x^2 - 1)$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να είναι οι διαιρέσεις σωστές.

α)
$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + \ldots + \ldots & \ldots + 2 \\ \cline{2-2} -6x^2 - \ldots & 2x + \ldots \\ \cline{1-1} 18x + \ldots & \\ -18x - \ldots & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

β)
$$\begin{array}{r|l} \ldots + \ldots + 2x + 20 & x + \ldots \\ \cline{2-2} \ldots - 6x^2 & 2x^2 + \ldots - \ldots \\ \cline{1-1} 4x^2 + \ldots + 20 & \\ \ldots - \ldots & \\ \cline{1-1} -10x + \ldots & \\ \ldots + \ldots & \\ \cline{1-1} \ldots & \end{array}$$

3 Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 3$ και υπόλοιπο $3x + 2$;

4 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι διαιρέτης του πολυώνυμου $P(x)$, όταν:

α) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$ και $Q(x) = 2x - 3$

β) $P(x) = 2x^4 - x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = x^2 + x - 1$.

5 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9) : (x^2 - 9)$

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$.

6 α) Να αποδείξετε ότι ο $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

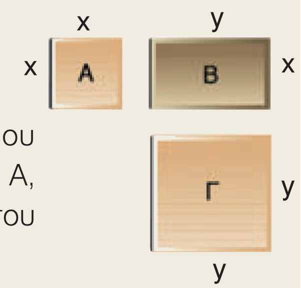
7 Ένας μαθητής ήθελε να παραγοντοποιήσει την παράσταση $α^3 + β^3$ και θυμήθηκε ότι αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας είναι ο $α + β$. Επειδή είχε ξεχάσει τον άλλο παράγοντα, πώς θα μπορούσε να τον βρει;

8 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

α) $P(x) : (x^3 + 2)$ β) $P(x) : (x^2 - 5)$

9 Να κάνετε τη διαίρεση $(6x^3 + α) : (x - 1)$ και να βρείτε την τιμή του α, για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.

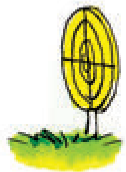
10 Αν ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2x^3 - x^2 - 4x + 3$ είναι ο $(x - 1)^2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.



11 Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου, χρησιμοποιήσαμε 45 πλακάκια τύπου Α, 56 πλακάκια τύπου Β και 16 πλακάκια τύπου Γ. Αν το πλάτος του δωματίου είναι $5x + 4y$, ποιο είναι το μήκος του;

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

✔ *Μαθαίνω να βρίσκω:*
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 24, 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

2. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ.
των μονωνύμων $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ και
των πολυωνύμων $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$.

Σε προηγούμενη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. θετικών ακεραίων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 12, 24 και 300, αν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, γράφονται:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Άρα,
Ε.Κ.Π.$(12, 24, 300) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$ (Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη).
Μ.Κ.Δ.$(12, 24, 300) = 2^2 \cdot 3 = 12$ (Γινόμενο κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη).

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων. Δηλαδή:

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Στο εξής θα περιοριστούμε σε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις με θετικούς ακέραιους συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, ως αριθμητικό παράγοντα του Ε.Κ.Π., θα θεωρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων και ως αριθμητικό παράγοντα του Μ.Κ.Δ. θα θεωρούμε το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.

Για παράδειγμα,

– τα μονώνυμα $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ έχουν

Ε.Κ.Π. $= 600x^4y^3\omega$ *και Μ.Κ.Δ.* $= 12x^2y$ ενώ

– τα πολυώνυμα $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$ έχουν

Ε.Κ.Π. $= 18(x-y)^2(x+y)$ *και Μ.Κ.Δ.* $= 3(x-y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων $6x^3y\omega$, $9x^2y\omega^2$, $3xy^4$.

Λύση

Οι συντελεστές 6, 9, 3 έχουν Ε.Κ.Π. = 18 και Μ.Κ.Δ. = 3, άρα τα μονώνυμα έχουν Ε.Κ.Π. $= 18x^3y^4\omega^2$ και Μ.Κ.Δ. $= 3xy$.

2 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων:
$A = 12x^2 - 12$, $B = 18x^2 - 36x + 18$ και $\Gamma = 9x^2 - 9x$.

Λύση

- *Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων.*
- *Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων.*
- *Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων.*

$A = 12x^2 - 12 = 12(x^2-1) = 12(x-1)(x+1)$

$B = 18x^2 - 36x + 18 = 18(x^2 - 2x + 1) = 18(x-1)^2$

$\Gamma = 9x^2 - 9x = 9x(x-1)$

Οι αριθμητικοί παράγοντες 12, 18, 9 έχουν Ε.Κ.Π. = 36 και Μ.Κ.Δ. = 3.

Τα πολυώνυμα Α, Β, Γ έχουν Ε.Κ.Π. $= 36x(x-1)^2(x+1)$ και Μ.Κ.Δ. $= 3(x-1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Ε.Κ.Π. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^4(x+2)^2$, $x(x+2)^3$	1. $6x^2(x+2)^2$
β. $x^3(x+2)$, $x(x+2)^3$	2. $x^3(x+2)^3$
γ. $6x^2(x+2)$, $2x(x+2)^2$	3. $6x^2(x+2)$
	4. $x^4(x+2)^3$

α	β	γ

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, γράφοντας σε κάθε κενό το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων Α, Β.

Β \ Α	$4x^3$	$2x(x-1)$	$9(x-1)^2$
$6x^2$			
$x^2(x-1)$			
$8x^5$			

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Μ.Κ.Δ. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β
α. $6x^3(x+1)^2$,	$3x(x+1)^3$	1. $6x^2(x+1)^2$
β. $2x^2(x+1)^3$,	$3x^4(x+1)^2$	2. $3x(x+1)^2$
γ. $3x^2(x+1)$,	$6x^3(x+1)^2$	3. $3x^2(x+1)$
		4. $x^2(x+1)^2$

α	β	γ

4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων Α, Β.

Β \ Α	$3x^2$	$x^4(x-2)^2$	$6(x-2)^3$
$6x(x-2)^2$			
$2x^3(x-2)$			
$3x^3(x-2)^3$			

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15\alpha xy^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

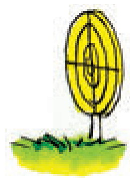
α) $6(x^2-y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$

β) $\alpha^2-3\alpha+2$, α^2-4, $\alpha^3-4\alpha$

γ) $\alpha^3-\alpha^2$, $(\alpha^2-\alpha)(\alpha^2-1)$, $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha$

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- ✔ *Γνωρίζω ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται ρητή και πότε ορίζεται.*
- ✔ *Μαθαίνω να απλοποιώ ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $\dfrac{x^3+4}{x-1}$ για $x = 0$;

Μπορείτε να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 1$;

2. Ποιο από τα παρακάτω κλάσματα απλοποιείται;

$$\frac{6\cdot 2+7}{3\cdot 2},\quad \frac{6\cdot 2\cdot 7}{3+2},\quad \frac{6\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 2}$$

3. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις απλοποιείται;

$$\frac{6x+y}{3x},\quad \frac{6xy}{3+x},\quad \frac{6xy}{3x}$$

Μια αλγεβρική παράσταση $\left(\text{π.χ. } \dfrac{x^3+4}{x-1},\ \dfrac{xyω}{x+y},\ \dfrac{2}{x^2+4}\right)$ που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.
Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.
Για παράδειγμα, η παράσταση $\dfrac{x^3+4}{x-1}$ ορίζεται, αν $x \neq 1$.
Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Έτσι, η παράσταση $\dfrac{6x+y}{3x}$ δεν απλοποιείται, ενώ η παράσταση $\dfrac{6xy}{3x}$ απλοποιείται, γιατί οι όροι της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα το 3x. Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον κοινό παράγοντα, έχουμε $\dfrac{6xy}{3x} = \dfrac{6xy : 3x}{3x : 3x} = \dfrac{2y}{1} = 2y$

Η προηγούμενη απλοποίηση γίνεται συντομότερα, αν διαγράψουμε τον κοινό παράγοντα, οπότε έχουμε $\dfrac{6xy}{3x} = \dfrac{\cancel{3x}\cdot 2y}{\cancel{3x}} = 2y$

Αν όμως σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να την απλοποιήσουμε εργαζόμαστε ως εξής:

- **Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της** και
- **διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.**

Για παράδειγμα, η παράσταση $\dfrac{5x-10}{x^2-4}$ απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{5x-10}{x^2-4}=\frac{5(x-2)}{x^2-2^2}=\frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{5}{x+2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Για ποιες τιμές των μεταβλητών τους ορίζονται οι παραστάσεις;

α) $\dfrac{x^2+7x+2}{x}$ β) $\dfrac{x^2+6}{x+2}$ γ) $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Λύση

α) Η παράσταση $\dfrac{x^2+7x+2}{x}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή για $x \neq 0$.

β) Ομοίως η παράσταση $\dfrac{x^2+6}{x+2}$ ορίζεται, αν $x+2 \neq 0$, δηλαδή για $x \neq -2$.

γ) Η παράσταση $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ ορίζεται, αν οι μεταβλητές x, y παίρνουν τιμές, τέτοιες ώστε $x-y \neq 0$, δηλαδή για $x \neq y$.

2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ β) $\dfrac{3x^2-3}{6x^2-6x}$ γ) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3}$

Λύση

α) Στην παράσταση $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ και οι δύο όροι της είναι γινόμενα, οπότε έχουμε

$$\frac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}=\frac{3x^2\omega^2}{2y^2}$$

β) Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και έχουμε

$$\frac{3x^2-3}{6x^2-6x}=\frac{3(x^2-1)}{6x(x-1)}=\frac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{6x\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{2x}$$

γ) Ομοίως έχουμε $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3}=\dfrac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{1}{x}$	1. $x \neq 1$
β. $\frac{x-1}{x+1}$	2. $x \neq 0$ και $x \neq 1$
γ. $\frac{x}{x^2-1}$	3. $x \neq -1$
δ. $\frac{2(x-1)}{x-1}$	4. $x \neq 1$ και $x \neq -1$
ε. $\frac{3}{x^2+1}$	5. οποιοσδήποτε αριθμός
	6. $x \neq 0$

α	β	γ	δ	ε

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\dfrac{x^{\cancel{2}}+1}{\cancel{x}} = x+1$ ☐

β) $\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = x+1$ ☐

γ) $\dfrac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x+1)}} = \dfrac{x+2}{4}$ ☐

δ) $\dfrac{x+2\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x+1)}} = \dfrac{x+2}{4}$ ☐

ε) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$ ☐

στ) $\dfrac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-y}} = x+y$ ☐

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $\dfrac{7x}{x(............)} = \dfrac{7}{x-2}$

β) $\dfrac{(α+β)(............)}{(α-β)(............)} = 1$

γ) $\dfrac{x(x+1)}{............} = x$

δ) $\dfrac{x(x+1)}{............} = x+1$

ε) $\dfrac{............}{2(α+β)^2} = \dfrac{1}{α+β}$

στ) $\dfrac{3(x+2)}{............} = \dfrac{3}{x+2}$

4 Ένας μαθητής για να βρει τις τιμές της μεταβλητής x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\dfrac{x}{x(x-4)}$, έγραψε $\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-4)} = \dfrac{1}{x-4}$ και απάντησε ότι η παράσταση ορίζεται όταν $x \neq 4$. Είναι σωστή η απάντησή του;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{1}{x-4}$ β) $\dfrac{y+3}{2y-5}$ γ) $\dfrac{\omega-2}{(\omega+1)^2}$ δ) $\dfrac{6x+1}{x(x-3)}$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{4x}{6x}$ β) $\dfrac{3y^2}{12y}$ γ) $\dfrac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$ δ) $\dfrac{5\alpha^2\beta\gamma^3}{10\alpha\beta^2\gamma}$

ε) $\dfrac{x+4}{4+x}$ στ) $\dfrac{y-1}{1-y}$ ζ) $\dfrac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$ η) $\dfrac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{6x}{2x^2+4x}$ β) $\dfrac{3y-9}{y^2-3y}$ γ) $\dfrac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega}$ δ) $\dfrac{5\alpha^2-20}{(\alpha-2)^2}$

ε) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ στ) $\dfrac{y^2-1}{y^2+2y+1}$ ζ) $\dfrac{6x^2+3x\omega}{4x^2-\omega^2}$ η) $\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$ β) $\dfrac{y^2-5y+4}{y^2-6y+8}$ γ) $\dfrac{\omega^3-2\omega^2+\omega}{\omega^3-\omega}$

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x(x-1)+4(x-1)}{x^2+2x-3}$ β) $\dfrac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$

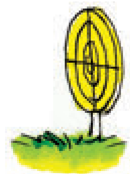
γ) $\dfrac{(2\omega+1)^2-(\omega+2)^2}{\omega^4-1}$ δ) $\dfrac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2-4(\alpha+1)}{\alpha^3+\alpha^2}$

6 Ένας λαμπαδηδρόμος κατά τα τελευταία μέτρα της διαδρομής του διήνυσε την απόσταση ΑΒ με σταθερή ταχύτητα 5 m/sec. Φτάνοντας στο σημείο Β ένας άλλος λαμπαδηδρόμος ξεκινώντας από το σημείο Β διήνυσε την απόσταση ΒΓ με σταθερή επιτάχυνση 4 m/sec^2. Αν ο χρόνος που κινήθηκε κάθε αθλητής ήταν t sec να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα με την οποία διανύθηκε η απόσταση ΑΓ ήταν $t+\dfrac{5}{2}$ m/sec

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

✔ *Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ ρητές παραστάσεις.*

✔ *Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ ρητές παραστάσεις.*



Α Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $4 \cdot \frac{3}{5}$, $\quad \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, $\quad \frac{2}{5} : \frac{4}{7}$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$2x \cdot \frac{3xy}{5\omega}$, $\quad \frac{3x^2}{2\alpha\beta} \cdot \frac{2\alpha^2\beta}{9xy}$, $\quad \frac{9x}{y+1} : \frac{3x^2}{5y+5}$

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$$

Με τον ίδιο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα, $\quad 3x \cdot \frac{5x^2}{2y} = \frac{3x \cdot 5x^2}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$ και

$$\frac{x^2-1}{3x+3} \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{(x^2-1) \cdot 2x}{(3x+3)(x-1)} = \frac{2x\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}} = \frac{2x}{3}$$

Όπως βλέπουμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μετά τις πράξεις εκτελούμε και τις δυνατές απλοποιήσεις.

Διαίρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}$$

Με τον ίδιο τρόπο διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\frac{x}{x+1} : \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{x(x^2-1)}{(x+1) \cdot 2x^2} = \frac{\cancel{x}(x-1)\cancel{(x+1)}}{2x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{2x}$$

Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, ως γνωστόν, εκφράζει το πηλίκο $\dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta}$ που είναι ίσο με $\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma}$ και επομένως ισχύει

$$\boxed{\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

Μνημονικός κανόνας

$$\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Για παράδειγμα, $\dfrac{\frac{2\alpha^2}{x}}{\frac{4\alpha}{x^2}} = \dfrac{2\alpha^2x^2}{4\alpha x} = \dfrac{\alpha x}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν τα γινόμενα: α) $(5x^2 + 5x) \cdot \dfrac{3x}{2x + 2}$ β) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

Λύση

α) $(5x^2 + 5x) \cdot \dfrac{3x}{2x + 2} = \dfrac{(5x^2 + 5x)3x}{2x + 2} = \dfrac{5x\cancel{(x + 1)}3x}{2\cancel{(x + 1)}} = \dfrac{15x^2}{2}$

β) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \dfrac{x^2+2x}{x - 1} = \dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+2x)}{(3x + 6)(x - 1)} = \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}x\cancel{(x + 2)}}{3\cancel{(x + 2)}\cancel{(x - 1)}} = \dfrac{(x-1)x}{3} = \dfrac{x^2 - x}{3}$

2 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} : \dfrac{x^3 - \alpha^3}{x^2}$ β) $\dfrac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}}$

Λύση

α) $\dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} : \dfrac{x^3 - \alpha^3}{x^2} = \dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} \cdot \dfrac{x^2}{x^3 - \alpha^3} = \dfrac{(x^2 - \alpha^2)x^2}{x(x^3 - \alpha^3)} = \dfrac{\cancel{(x - \alpha)}(x + \alpha)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cancel{(x - \alpha)}(x^2 + x\alpha + \alpha^2)} =$

$= \dfrac{(x + \alpha)x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2} = \dfrac{x^2 + \alpha x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$

β) $\dfrac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}} = \dfrac{\alpha(\alpha^2 - x^2)}{\alpha^2(2\alpha + 2x)} = \dfrac{\cancel{\alpha}(\alpha - x)\cancel{(\alpha + x)}}{2\alpha^{\cancel{2}}\cancel{(\alpha + x)}} = \dfrac{\alpha - x}{2\alpha}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$ ☐ β) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$ ☐

γ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$ ☐ δ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$ ☐

ε) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y}$ ☐ στ) $\frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{\alpha x - 2}{x^2}$ ☐

ζ) $\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \cdot \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = 0$ ☐ η) $\frac{\alpha}{\beta+2} : \frac{\alpha}{\beta+2} = 1$ ☐

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3x \cdot \frac{\dots\dots}{y} = \frac{6x^2}{y}$ β) $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1}{y^2}$ γ) $\frac{4x}{y} : \frac{\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$

δ) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$ ε) $\frac{x+2}{x-1} : \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$ στ) $\frac{x}{y} : \frac{x+2}{\dots\dots} = \frac{x}{x+2}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$ β) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$ γ) $12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$

δ) $\frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2}$ ε) $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$ στ) $\left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $8x : \frac{6}{x}$ β) $\frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$ γ) $\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) : 3\alpha^2$ δ) $\left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)$

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$ β) $\frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y}$ γ) $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$

δ) $\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha}$ ε) $\frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$ στ) $\frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15}$ β) $\frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y}$ γ) $\left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2)$

δ) $\frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta}$ ε) $\frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y}$ στ) $\frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2}\right) : \frac{8x-8}{x+2}$ β) $\frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right)$ γ) $\left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1}\right) \cdot \frac{x+2}{x+3}$

Β Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{7}{9} + \frac{19}{9} - \frac{11}{9}$, $\quad \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$.

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$\frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2}$, $\quad \frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{6\alpha\beta} - \frac{1}{3\beta}$.

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$$

Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε ή αφαιρούμε και ρητές παραστάσεις που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2} = \frac{3x+(2x-1)-(7+x)}{x-2} =$$

$$= \frac{3x+2x-1-7-x}{x-2} = \frac{4x-8}{x-2} = \frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4$$

Αν όμως οι ρητές παραστάσεις δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και τις μετατρέπουμε σε ρητές παραστάσεις με τον ίδιο παρονομαστή, όπως και στα αριθμητικά κλάσματα.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{2}{3x^2-3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x-3}$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$3x^2 - 3x = 3x(x-1)$ και $3x - 3 = 3(x-1)$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Ε.Κ.Π. $= 6x(x-1)$

- Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$\frac{2}{3x^2-3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x-3} = \frac{\overset{2}{2}}{3x(x-1)} + \frac{\overset{x-1}{5}}{6x} - \frac{\overset{2x}{2}}{3(x-1)} =$$

- Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$= \frac{4+5(x-1)-4x}{6x(x-1)} = \frac{4+5x-5-4x}{6x(x-1)} = \frac{\cancel{x-1}}{6x\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{6x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\dfrac{9x+6}{x^2-1}-\dfrac{15}{2x-2}$ β) $\dfrac{4}{x^2-\alpha^2}-\dfrac{2}{x^2-\alpha x}-\dfrac{1}{x^2+\alpha x}$

Λύση

α) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ και $2x-2=2(x-1)$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $2(x-1)(x+1)$. Άρα

$$\frac{9x+6}{x^2-1}-\frac{15}{2x-2}=\overset{2}{\frac{9x+6}{(x-1)(x+1)}}-\overset{x+1}{\frac{15}{2(x-1)}}=\frac{2(9x+6)-15(x+1)}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{18x+12-15x-15}{2(x-1)(x+1)}=\frac{3x-3}{2(x-1)(x+1)}=\frac{3\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{3}{2(x+1)}$$

β) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

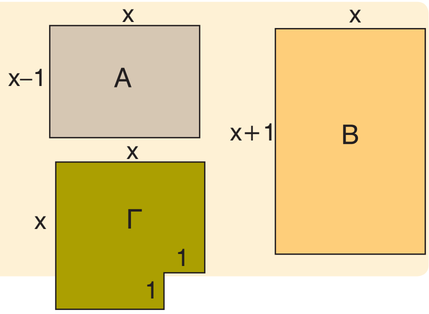
$x^2-\alpha^2=(x-\alpha)(x+\alpha)$, $x^2-\alpha x=x(x-\alpha)$, $x^2+\alpha x=x(x+\alpha)$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x-\alpha)(x+\alpha)$. Άρα

$$\frac{4}{x^2-\alpha^2}-\frac{2}{x^2-\alpha x}-\frac{1}{x^2+\alpha x}=\overset{x}{\frac{4}{(x-\alpha)(x+\alpha)}}-\overset{x+\alpha}{\frac{2}{x(x-\alpha)}}-\overset{x-\alpha}{\frac{1}{x(x+\alpha)}}=$$

$$=\frac{4x-2(x+\alpha)-(x-\alpha)}{x(x-\alpha)(x+\alpha)}=\frac{4x-2x-2\alpha-x+\alpha}{x(x-\alpha)(x+\alpha)}=\frac{\cancel{x-\alpha}}{x\cancel{(x-\alpha)}(x+\alpha)}=\frac{1}{x(x+\alpha)}$$

2 **Πούλησε κάποιος τα οικόπεδα Α και Β και από το καθένα εισέπραξε 50.000 ευρώ. Αν με τα χρήματα αυτά αγόρασε το διαμέρισμα Γ, να αποδειχθεί ότι κάθε m² του διαμερίσματος στοιχίζει όσο ένα m² του οικοπέδου Α και ένα m² του οικοπέδου Β. (Οι διαστάσεις δίνονται σε m).**



Λύση

Από κάθε οικόπεδο εισέπραξε 50000 ευρώ, οπότε για την αγορά του διαμερίσματος έδωσε 100000 ευρώ. Το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι $x(x-1)$ m², του οικοπέδου Β είναι $x(x+1)$ m² και του διαμερίσματος Γ είναι (x^2-1) m². Κάθε m² του οικοπέδου Α στοιχίζει $\dfrac{50000}{x(x-1)}$ ευρώ, του οικοπέδου Β στοιχίζει $\dfrac{50000}{x(x+1)}$ ευρώ και του διαμερίσματος Γ στοιχίζει $\dfrac{100000}{x^2-1}$ ευρώ. Άρα έχουμε:

$$\overset{x+1}{\frac{50000}{x(x-1)}}+\overset{x-1}{\frac{50000}{x(x+1)}}=\frac{50000(x+1)+50000(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{100000x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{100000}{x^2-1}$$

Δηλαδή, κάθε m² του διαμερίσματος Γ στοιχίζει όσο ένα m² του οικοπέδου Α και ένα m² του οικοπέδου Β.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$ ☐ β) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{x+y}$ ☐

γ) $\dfrac{α+4}{α} - \dfrac{4}{α} = 1$ ☐ δ) $\dfrac{α+β}{α-β} + \dfrac{α+β}{β-α} = 0$ ☐

ε) $1 + \dfrac{x}{ω} = \dfrac{1+x}{ω}$ ☐ στ) $\dfrac{α}{x} - \dfrac{α+2}{x} = \dfrac{2}{x}$ ☐

2 Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε μία από τις δύο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό;

α) $\dfrac{α}{α-β} + \dfrac{β}{β-α} = \dfrac{α}{α-β} - \dfrac{β}{α-β} = \dfrac{α-β}{α-β} = 1$

β) $\dfrac{3x+2}{x+1} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{3x+2-2x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} = 1$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\dfrac{x}{x+6} - \ldots\ldots\ldots = 0$ β) $\dfrac{x}{x+6} + \ldots\ldots\ldots = 1$ γ) $\ldots\ldots\ldots + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x}{x+1}$

δ) $\ldots\ldots\ldots - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{1}{x+2}$ ε) $\dfrac{2x-1}{x} + \ldots\ldots\ldots = 2$ στ) $\dfrac{3x+8}{x} - \ldots\ldots\ldots = 3$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ β) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x}$ γ) $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y}$ δ) $\dfrac{1}{ω^2} - \dfrac{2}{ω^2+1}$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2x}{2x-6} - \dfrac{3}{x-3}$ β) $\dfrac{y-6}{y^2+2y} - \dfrac{4}{y+2}$ γ) $\dfrac{3ω+6}{ω^2-4} - \dfrac{4}{2ω-4}$

δ) $\dfrac{1}{2x+12} + \dfrac{x}{36-x^2}$ ε) $\dfrac{9x}{x^2-xω} + \dfrac{3ω}{ω^2-xω}$ στ) $\dfrac{α+7}{α^2+4α+3} - \dfrac{3}{α+1}$

3 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ β) $\dfrac{y-2+\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{y}}$ γ) $\dfrac{ω+1+\dfrac{1}{ω}}{1-\dfrac{1}{ω^3}}$ δ) $\dfrac{\dfrac{1}{α}-\dfrac{1}{β}}{\dfrac{β}{α}-\dfrac{α}{β}}$

4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-2x}$ β) $\dfrac{3}{x+2y} - \dfrac{2}{x-2y} + \dfrac{2x+16y}{x^2-4y^2}$

γ) $\dfrac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \dfrac{2}{y-2} + \dfrac{3}{y-3}$ δ) $\dfrac{x^2}{x-y} + \dfrac{y^2}{x+y} - \dfrac{2xy^2}{x^2-y^2}$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\left(\dfrac{x+3}{2x+1} - \dfrac{x}{2x-1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4x-3}\right)$ β) $\left[\dfrac{x+3}{x^2-1} + \dfrac{x-3}{(x-1)^2}\right] : \dfrac{x^2-3}{(x-1)^2}$

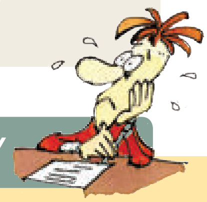
γ) $\left(1 - \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)$ δ) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} - 1\right) : \left(\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

6 α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^3-y^3}{x-y} + xy = (x+y)^2$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{56^3-44^3}{12} + 56 \cdot 44$.

7 α) Αν $A = \dfrac{2x}{x^2+1}$ και $B = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1, $\dfrac{200}{10001}$, $\dfrac{9999}{10001}$ αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = \alpha^3 - (1+\alpha)^{-2} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0,$$ αν είναι $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ και $\beta = 3$.

(Διαγωνισμός «Θαλής» Ε.Μ.Ε. 2002).

2 Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta + 3\gamma)^{2\nu+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2\nu+1} = 0$ β) $(x - y - \omega)^{2\nu} - (y + \omega - x)^{2\nu} = 0$

3 Αν ισχύει $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A = \dfrac{4x^2 - 6xy + y^2}{x^2 + y^2}$ $B = \dfrac{2x^3 - 2xy^2 + 3y^3}{x^2y + y^3}$

4 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(1-x) = P(x)$.

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

5 α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$. (Ταυτότητα Euler).

β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3$.

6 Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$ β) $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) = 40$

7 Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

α) $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$ β) $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2$

8 α) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 2x - 3$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

9 Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

10 α) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi$. Να βρείτε την ακτίνα του.

β) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες $4x$ και $4x^2 - 1$.

11 α) Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος.

β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.

γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

12 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^6 - 1) : (x - 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5 + 1) : (x + 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{15} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

13 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(x - 1)x} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}$.

β) Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4, ..., 2008 και να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2007 \cdot 2008} = \frac{2007}{2008}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΜΟΝΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- **Αλγεβρική Παράσταση** είναι μια έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές π.χ. $2x^2 - 3xy + 4$
- **Αριθμητική Τιμή** μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.
- **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.
  π.χ. $-3x^2y$ (-3 *συντελεστής*, x^2y *κύριο μέρος του μονώνυμου*).
- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, π.χ. $-3x^2y$, $7x^2y$, $-x^2y$

Πράξεις με μονώνυμα

– η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** μονωνύμων έχει σαν αποτέλεσμα μονώνυμο, εφόσον αυτά είναι όμοια.

Άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

π.χ. $2x^2y + 3x^2y - x^2y = 4x^2y$

Αναγωγή ομοίων όρων λέγεται η αντικατάσταση των ομοίων μονωνύμων με το άθροισμά τους. π.χ. $6x^2 + 2x - 4x^2 + 3x = 2x^2 + 5x$

– ο **Πολλαπλασιασμός** και η **Διαίρεση** μονωνύμων γίνονται είτε τα μονώνυμα είναι όμοια είτε όχι.

Γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους, με εκθέτη καθεμιάς το άθροισμα των εκθετών τους. π.χ. $(3x^2y)\cdot(-2xy^3) = -6x^3y^4$

Πηλίκο δύο μονωνύμων είναι η αλγεβρική παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη διαίρεσή τους.

π.χ. $(-12x^4y):(3x^2y) = \dfrac{-12x^4y}{3x^2y} = -4x^2$

- **Πολυώνυμο** λέγεται το άθροισμα μονωνύμων, που δύο τουλάχιστον από αυτά δεν είναι όμοια, π.χ. $3x^2y - 5xy + 2$ (Τα μονώνυμα $3x^2y$, $5xy$, 2 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου). Δεχόμαστε ακόμα ότι κάθε μονώνυμο είναι και πολυώνυμο.

Πράξεις με πολυώνυμα

– **Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε** πολυώνυμα βγάζουμε τις παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

– **Για να πολλαπλασιάσουμε**

α) **μονώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου, προσθέτουμε τα εξαγόμενα και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β) **πολυώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου, προσθέτουμε τα εξαγόμενα και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

– Αν έχουμε δύο πολυώνυμα **Δ**(x) και **δ**(x) με δ(x) ≠ 0 και κάνουμε τη διαίρεση **Δ**(x) : **δ**(x), τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων **π**(x) και **υ**(x) για τα οποία ισχύει: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ *(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)* όπου το υ(x) ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x). Αν **υ(x) = 0**, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και τα δ(x) και π(x) λέγονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του Δ(x).

Β. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- Οι ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και οι οποίες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους ονομάζονται **ταυτότητες.**
  Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Διαφορά κύβων	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Άθροισμα κύβων	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

Γ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- **Παραγοντοποίηση** είναι ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση γίνεται σε παράσταση που υπάρχει:

Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους	$\alpha x + \beta x = x(\alpha + \beta)$
Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παράστασης	$\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y =$ $= \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (\alpha + \beta)(x + y)$
Διαφορά τετραγώνων	$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
Άθροισμα – Διαφορά κύβων	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
Ανάπτυγμα τετραγώνου	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

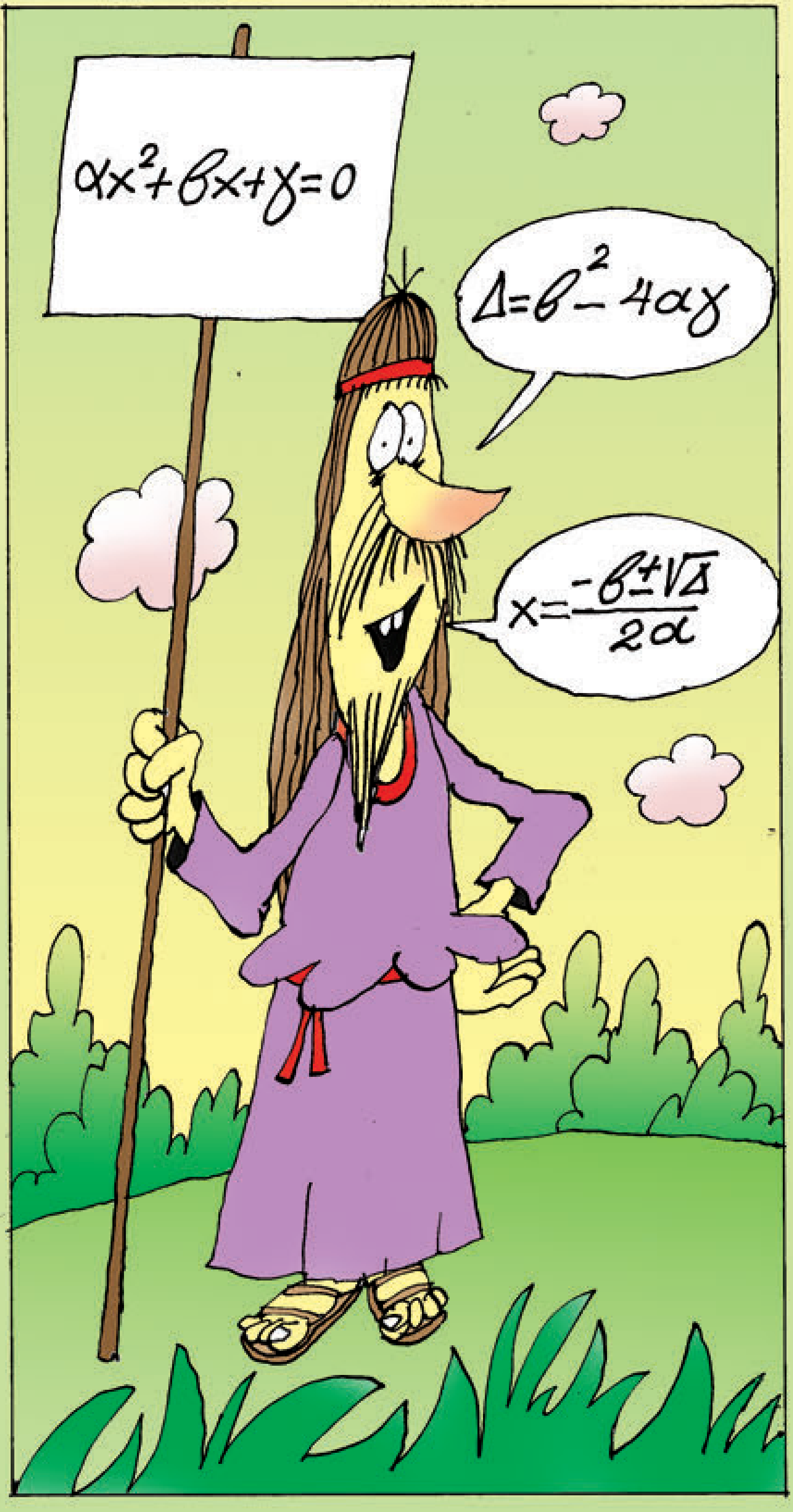
Δ. ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα, λέγετα **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση.**

$$\text{π.χ. } \frac{2x^2 - 5}{x + 4}$$

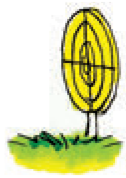
Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Για να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και διαγράφουμε τον κοινό παράγοντα. Οι πράξεις με τις ρητές παραστάσεις γίνονται όπως και οι πράξεις των αριθμητικών κλασμάτων.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ



2.1 Η εξίσωση αx + β = 0

- ✔ *Θυμάμαι πώς λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.*
- ✔ *Αναγνωρίζω αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

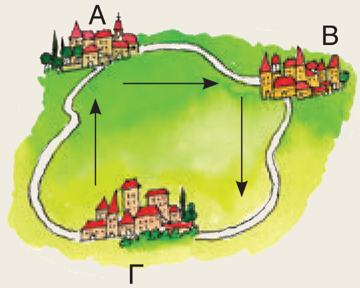
Ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το χωριό Α και αφού επισκεφθεί διαδοχικά τα χωριά Β και Γ, επιστρέφει στο χωριό Α. Η διαδρομή ΒΓ είναι 1 km μεγαλύτερη από την ΑΒ και η ΓΑ είναι 1 km μεγαλύτερη από τη ΒΓ.

Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο απέχουν τα χωριά μεταξύ τους ανά δύο, αν γνωρίζετε ότι η συνολική απόσταση που διήνυσε ο ταχυδρόμος ήταν:

α) 15 km;

β) το τριπλάσιο της πρώτης διαδρομής;

γ) το τριπλάσιο της δεύτερης διαδρομής;



Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις, όπως $3x = 12$, $-4y + 11 = 0$, κ.τ.λ. Στις εξισώσεις αυτές υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1. Σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο (πρωτοβάθμια εξίσωση)**.

Η εξίσωση $3x = 12$, της οποίας ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός επαληθεύεται για **μία μόνο** τιμή του αγνώστου, την $x = 4$. Ο αριθμός 4, που επαληθεύει την εξίσωση $3x = 12$, ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

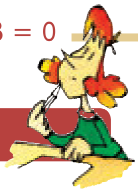
Υπάρχουν όμως και εξισώσεις, όπως οι $0x = -3$ ή $0x = 0$, στις οποίες ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν.

Η εξίσωση $0x = -3$ δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x, αφού το γινόμενο 0x είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με –3. Μια τέτοια εξίσωση, που δεν έχει λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Η εξίσωση όμως, $0x = 0$ επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του x και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν **$\alpha \neq 0$**, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν **$\alpha = 0$**, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και
  - αν **$\beta \neq 0$**, δεν έχει λύση (**αδύνατη**), ενώ
  - αν **$\beta = 0$**, κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταυτότητα ή αόριστη**).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$

Λύση

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.
- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$$
$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{6} = 6 \cdot x + 6 \cdot 1$$
$$3(x-1) - (2x+1) = 6x + 6$$
$$3x - 3 - 2x - 1 = 6x + 6$$
$$3x - 2x - 6x = 6 + 3 + 1$$
$$-5x = 10$$
$$\frac{-5x}{-5} = \frac{10}{-5}$$
$$x = -2$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -2$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$ β) $2(x - 1) - x = x - 2$

Λύση

α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$
$$3x + 6 - 3 = 3x + 5$$
$$3x - 3x = 5 - 6 + 3$$
$$0x = 2$$
Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x, οπότε είναι **αδύνατη**.

β) $2(x - 1) - x = x - 2$
$$2x - 2 - x = x - 2$$
$$2x - x - x = 2 - 2$$
$$0x = 0$$
Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του x, οπότε είναι **ταυτότητα**.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β. $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ. $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ. $5x = 0$	

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 2$ έχει λύση την $x = 6$. ☐

β) Η εξίσωση $4x = 0$ είναι αδύνατη. ☐

γ) Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό. ☐

δ) Η εξίσωση $0x = 6$ έχει λύση την $x = 6$. ☐

ε) Η εξίσωση $5(x + 1) = 5x + 5$ είναι ταυτότητα. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

γ) $5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$

δ) $(2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$

β) $\frac{y+5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$

γ) $\frac{2(\omega-1)}{3} - \frac{\omega+1}{2} = \frac{\omega-5}{6}$

δ) $0,2(3x - 4) - 5(x - 0,4) = 0,4(1 - 10x)$

3 Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

4 Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του κι εκείνος απάντησε: «*Αν είχα όσα έχω και τα μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό*». Μπορεί, άραγε, με τα χρήματα αυτά να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 65 €;

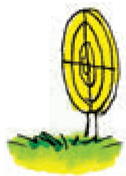
5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών είπε στους μαθητές του:
- Σκεφτείτε έναν αριθμό και διπλασιάστε τον.
- Στο αποτέλεσμα να προσθέσετε τον αριθμό 10.
- Το άθροισμα που βρήκατε να το διαιρέσετε με το 2 και από το πηλίκο να αφαιρέσετε τον αριθμό που σκεφτήκατε αρχικά.
- Κάθε μαθητής πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα από ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά.

Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό του καθηγητή;

6 Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

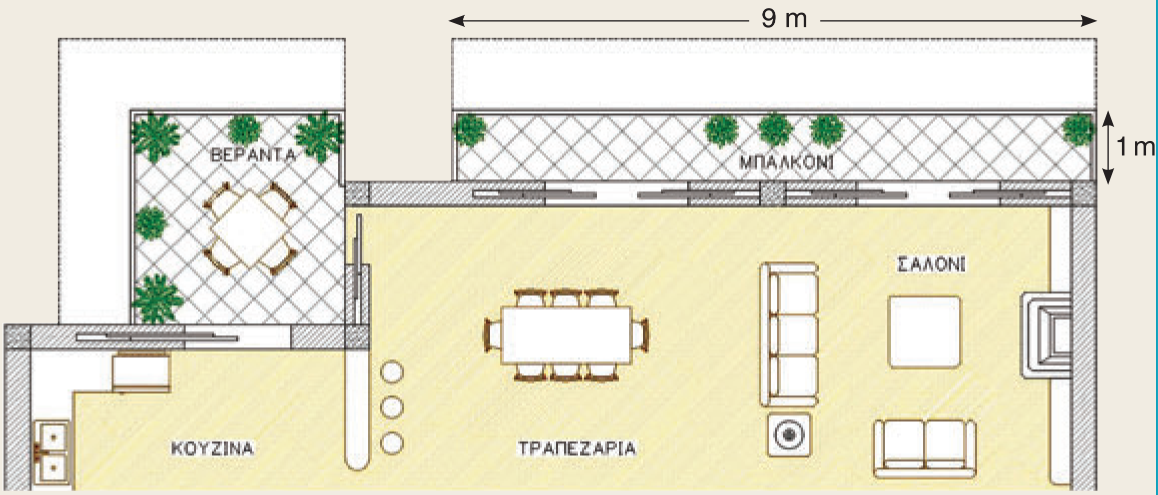
- ✔ *Λύνω εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.*
- ✔ *Βρίσκω το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζω τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.*
- ✔ *Μετατρέπω ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψή της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.



Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό. Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2.

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9,$

$x^2 - 3x = 0,$

$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.
Σύμφωνα και με τα προηγούμενα παραδείγματα δεχόμαστε ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x} + \gamma = 0 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού λέγεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης.

Α Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Το γινόμενο $x(x - 3)$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = 0$ ή $x = 3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:

- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 - 3^2 &= 0 \\ (x-3)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός αριθμός, η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{\alpha}$ και $x = -\sqrt{\alpha}$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \quad ή \quad x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \quad ή \quad x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2=0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
- Το $(3x - 1)^2$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$3x - 1 = 0 \quad ή \quad x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α′ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β′ μέλος τον σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
  $$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
  $$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \sqrt{289} \quad ή \quad 2x + 15 = -\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = 17 \quad ή \quad 2x + 15 = -17$$
$$2x = 2 \quad ή \quad 2x = -32$$
$$x = 1 \quad ή \quad x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 75 = 0$ γ) $2x^2 + 8 = 0$

Λύση

α)
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 7x \\ 2x^2 - 7x &= 0 \\ x(2x-7) &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } 2x - 7 &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x = \sqrt{25} \text{ ή } x &= -\sqrt{25} \\ x = 5 \quad \text{ ή } x &= -5 \end{aligned}$$

γ)
$$\begin{aligned} 2x^2 + 8 &= 0 \\ 2x^2 &= -8 \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

2 Να λυθεί η εξίσωση $x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) = 0$

Λύση

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$.
- Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$\begin{aligned} x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) &= 0 \\ (2x-1)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (2x-1)(x-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$2x - 1 = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ή $x = 3$ (διπλή λύση)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐

β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-2)(x+1) = 0$ είναι $x = 2$ και $x = -1$. ☐

δ) Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$. ☐

ε) Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση. ☐

στ) Η εξίσωση $(x-2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 2$. ☐

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου βαθμού. ☐

β) Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x+2)$ είναι 2ου βαθμού. ☐

γ) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι

i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda = 2$ ☐

ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda \neq 2$. ☐

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-4)(x+1)=0$ β) $y(y+5)=0$ γ) $(3-\omega)(2\omega+1)=0$

δ) $7x(x-7)=0$ ε) $3y\left(\frac{y}{3}-2\right)=0$ στ) $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1)=0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2=7x$ β) $-y^2=9y$ γ) $2\omega^2-72=0$

δ) $-2t^2-18=0$ ε) $-0{,}2\varphi^2+3{,}2=0$ στ) $\frac{z^2}{6}-0{,}5z=0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-1)^2-1=0$ β) $3(x+2)^2=12$ γ) $(x+1)^2=2x$

δ) $\frac{(x-9)^2}{3}=27$ ε) $(3x-1)^2-4x^2=0$ στ) $(x+\sqrt{3})^2-3=0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x+1)^2=5(3x+1)$ β) $0{,}5(1-y)^2=18$ γ) $(2\omega^2+1)(\omega^2-16)=0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-4)=-4$ β) $y^2+y-12=0$ γ) $\omega^2-2\omega-15=0$

δ) $2t^2-7t+6=0$ ε) $3\varphi^2+1=4\varphi$ στ) $5z^2-3z-8=0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

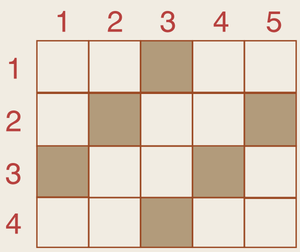
α) $25x^2+10x+1=0$ β) $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$

γ) $\omega^2+2006\omega-2007=0$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ β) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$

8



Οριζόντια:

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2=12x$
   – Ρίζα της εξίσωσης $x^2+225=30x$
2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x+4)+8(x+4)=0$
3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2-10x+9=0$
4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2=25$
   – Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2=32x$

Κάθετα:

1. Ρίζα της εξίσωσης $x^2-20x+100=0$
2. Το ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης $x(x-15)=x-15$
3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x-5)^2-(x-5)=0$
4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2-144=0$
5. Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x-12)+2007(x-12)=0$

Β Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$αx^2 + βx + γ = 0$

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.

$4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$

- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.

$4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$

- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2αx + β)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2αx + β$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$

$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$

$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Δ > 0$, τότε έχουμε:

  $2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$

  $2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$

  $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$

  Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \dfrac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \dfrac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$

- Αν $Δ = 0$, τότε έχουμε:

  $(2αx + β)^2 = 0$

  $2αx + β = 0$

  $2αx = -β$

  $x = -\dfrac{β}{2α}$

  Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, τη $x = -\dfrac{β}{2α}$

- Αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (**αδύνατη**).

  Η παράσταση $β^2 - 4αγ$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boldsymbol{Δ = β^2 - 4αγ}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$.

- Αν $Δ > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν $Δ = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\dfrac{β}{2α}$
- Αν $Δ < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm 1}{4}$,

δηλαδή είναι $x = \dfrac{-5+1}{4} = -1$ ή $x = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $\alpha = 6$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $\alpha = -16$, $\beta = 8$, $\gamma = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-16)} = \dfrac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x-1)^2 = 2x$ β) $\dfrac{x(x+3)}{3} - \dfrac{x-6}{6} = \dfrac{1}{2}$

Λύση

α)

$$9x^2 - (5x-1)^2 = 2x$$
$$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$$
$$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$$
$$-16x^2 + 8x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{4} \text{ (διπλή λύση)}$$

(Παράδειγμα 1γ)

β)

$$\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$$
$$6 \cdot \frac{x(x+3)}{3} - 6 \cdot \frac{x-6}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$
$$2x(x+3) - (x-6) = 3$$
$$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$$
$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{3}{2}$$

(Παράδειγμα 1α)

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = -8$, $\gamma = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 4}{4}$,

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

β) $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2\left[x(x-3) - (x-3)\right] =$
$= 2(x-3)(x-1)$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής: $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ *(παράδειγμα 1α)*.

Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x - (-1)]\left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ *(παράδειγμα 1γ)*.

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\Delta > 0$	**1.** Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	**2.** Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta \geq 0$	**3.** Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	**4.** Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση. ☐

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση. ☐

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$. ☐

3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$ γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$αx^2 + βx + γ = 0$	α	β	γ
$x(x-1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x+2)$				
$(x-1)^2 = 2(x^2 - x)$				

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$ β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$ γ) $-2ω^2 + ω + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$ ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$ η) $x^2 - 4x = 5$ θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 7x = 0$ β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1$ β) $(y+2)^2 + (y-1)^2 = 5(2y+3)$

γ) $(2ω - 3)^2 - (ω - 2)^2 = 2ω^2 - 11$ δ) $φ(8 - φ) - (3φ + 1)(φ + 2) = 1$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 1}{3} - \dfrac{x+3}{5} = x - 2$ β) $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{6y+1}{4} = \dfrac{y-2}{6} - 2$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t+2) = 0{,}7(t-2)$ δ) $\dfrac{ω}{2}(\sqrt{3}ω - 7) = -\sqrt{3}$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$ β) $3y^2 - 8y + 5$ γ) $-2ω^2 + 5ω - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$ ε) $9y^2 + 12y + 4$ στ) $-ω^2 + 10ω - 25$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

α) $αx^2 - x + 1 - α = 0$ β) $αx^2 + (α + β)x + β = 0$

8 Δίνεται η εξίσωση $(α + γ)x^2 - 2βx + (α - γ) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

«Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».

Τον γραφέα της πλάκας δεν τον απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια η ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι’ αυτό προσθέτει μήκος με επιφάνεια).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$.

Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

- Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).
- Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.
- Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;

- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

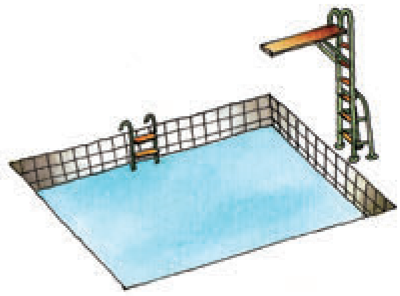
(*) Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α′, Αθήνα 1997.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Πρόβλημα 1ο

Το εμβαδόν μια κολυμβητικής πισίνας είναι 400 m^2. Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m.



Λύση

Αν η μία διάσταση της πισίνας είναι x, τότε η άλλη θα είναι 41 – x, αφού το άθροισμά τους είναι 41 m. Επειδή το εμβαδόν της πισίνας είναι 400 m^2, έχουμε την εξίσωση

$x(41 - x) = 400 \quad$ ή $\quad 41x - x^2 = 400 \quad$ ή $\quad x^2 - 41x + 400 = 0$.

Στην εξίσωση αυτή είναι $\alpha = 1$, $\beta = -41$, $\gamma = 400$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 1681 - 1600 = 81 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{41 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \dfrac{41 \pm 9}{2}$,

δηλαδή είναι $x = 25$ ή $x = 16$.

Αν $x = 25$, τότε $41 - x = 41 - 25 = 16$, ενώ αν $x = 16$, τότε $41 - x = 41 - 16 = 25$.

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις οι διαστάσεις της πισίνας είναι 25 m και 16 m.

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Λύση

Αν η βιοτεχνία πουλήσει x πουκάμισα, θα εισπράξει 60x €, οπότε θα κερδίσει $60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right)$ €.

Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3500 € έχουμε την εξίσωση

$$60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right) = 3500 \quad \text{ή}$$

$$60x - \frac{1}{10}x^2 - 20x - 500 = 3500$$

$$600x - x^2 - 200x - 5000 = 35000$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40000 = 160000 - 160000 = 0.$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{400}{2 \cdot 1} = 200.$

Επομένως, για να κερδίσει η βιοτεχνία 3500 €, πρέπει να πουλήσει 200 πουκάμισα.

Πρόβλημα 3ο

Από ένα ακίνητο αερόστατο που βρίσκεται σε ύψος h αφήνεται να πέσει ένας σάκος με άμμο για να ελαφρύνει. Ταυτόχρονα, το αερόστατο αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα άνω με σταθερή επιτάχυνση 0,5 m/sec^2. Τη στιγμή που ο σάκος φτάνει στο έδαφος, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 84 m. Να βρεθεί πόσο διήρκησε η πτώση του σάκου.

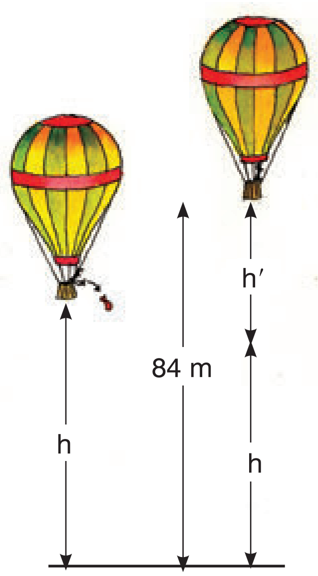
Σημείωση:
Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι:

- *Αν ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h m, τότε θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t sec, όπου* $h = \frac{1}{2}gt^2$ *και* $g = 10$ m/sec^2 *περίπου.*
- *Αν ένα σώμα αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α, τότε σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα* $s = \frac{1}{2}\alpha t^2$.

Λύση

Αν η πτώση του σάκου διήρκησε t sec, τότε στο χρόνο αυτό ο σάκος διήνυσε απόσταση
$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10t^2 = 5t^2$, αφού $g = 10$ m/sec^2.

Στον ίδιο χρόνο το αερόστατο ανέβηκε κατά ύψος
$h' = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^2$, αφού $\alpha = 0{,}5$ m/sec^2.

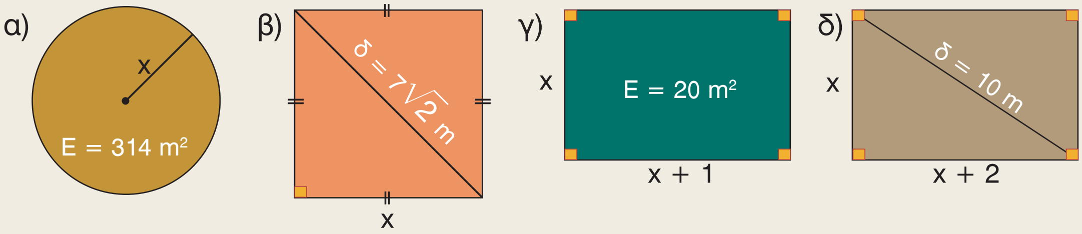


Επειδή $h + h' = 84$, έχουμε την εξίσωση
$5t^2 + \frac{1}{4}t^2 = 84$ ή $20t^2 + t^2 = 336$ ή $21t^2 = 336$

ή $t^2 = 16$, οπότε $t = 4$ ή $t = -4$.
Επειδή το t παριστάνει χρόνο, πρέπει $t > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια της πτώσης του σώματος ήταν $t = 4$ sec.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



2 Να βρείτε έναν θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:
α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.
β) Το γινόμενό του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.
γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

3 Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του. (1 λίτρο = $1 dm^3$)

4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2. Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

5 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

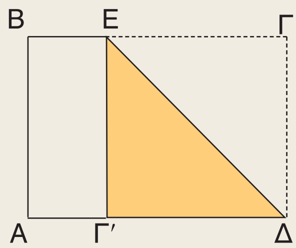
6 Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «*Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικρυστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506*». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

7 Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

8 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x.

9 Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε:
«Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό».
Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

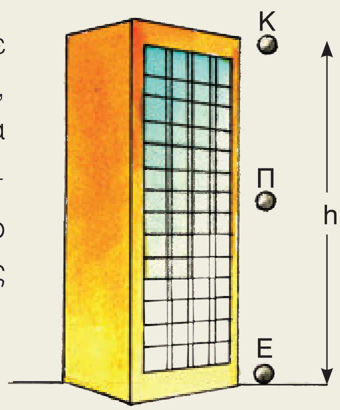
10 Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα $\frac{3}{8}$ του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό συντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το συντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του συντριβανιού.

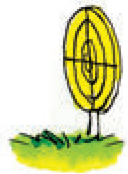
12 Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν 251,2 m^2 λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

13 Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησής του διήνυσε μια απόσταση ΠΕ ίση με τα $\frac{5}{9}$ του ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε πόσο χρόνο διήρκησε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10$ m/sec^2).



2.4 Κλασματικές εξισώσεις

✔ *Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4}+\frac{4}{3}=\frac{x+8}{12}$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x+2$, x, x^2+2x και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x}=\frac{x+8}{x^2+2x}.$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση.

$$\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x+8}{6},$$

$$\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x}=\frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.
Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση $\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x}=\frac{x+8}{x^2+2x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x}=\frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x+2 \neq 0$
δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$x(x+2)\frac{x}{x+2}+x(x+2)\frac{4}{x}=x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

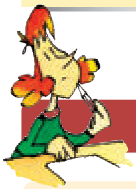
$x^2 + 4(x + 2) = x + 8$

$x^2 + 4x + 8 = x + 8$ ή $x^2 + 3x = 0$ ή

$x(x + 3) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x = -3$.

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{8}{x} = 1$ β) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x^2 - 2x}$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} - x(x+1) \cdot \frac{8}{x} = x(x+1) \cdot 1$$

$x^2 - 8(x + 1) = x(x + 1)$ ή $x^2 - 8x - 8 = x^2 + x$ ή $-9x = 8$ ή $x = -\dfrac{8}{9}$

(ικανοποιεί τους περιορισμούς). Άρα η εξίσωση έχει λύση τη $x = -\dfrac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$ (1).

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - 2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x-2)\frac{1}{x-2} - x(x-2)\frac{1}{x} = x(x-2)\frac{2}{x(x-2)}$$

$x - (x - 2) = 2$ ή $x - x = 2 - 2$ ή $0x = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2 **Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;**

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή $(x+1)$ km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x+1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση $\frac{42}{x} = \frac{42}{x+1} + \frac{1}{10}$ (1).

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $10x(x+1) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$10x(x+1)\cdot\frac{42}{x} = 10x(x+1)\cdot\frac{42}{x+1} + 10x(x+1)\cdot\frac{1}{10}$$

$420(x+1) = 420x + x(x+1)$ ή $420x + 420 = 420x + x^2 + x$ ή $x^2 + x - 420 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot1\cdot(-420) = 1681 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2\cdot1} = \frac{-1 \pm 41}{2}$,

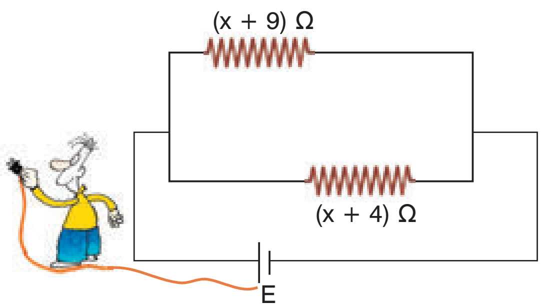
δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

3 **Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.**

Σημείωση: *Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1, R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται από τον τύπο* $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Λύση



Αν η ολική αντίσταση είναι x Ω, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι $(x+4)$ Ω και $(x+9)$ Ω.

Άρα ισχύει $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$ (1)

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x+4)(x+9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x+4)(x+9)\cdot\frac{1}{x+4} + x(x+4)(x+9)\cdot\frac{1}{x+9} = x(x+4)(x+9)\cdot\frac{1}{x}$$

$x(x+9) + x(x+4) = (x+4)(x+9)$ ή $x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36$ ή $x^2 = 36$ ή $x = \pm\sqrt{36}$. Άρα $x = 6$ ή $x = -6$.

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6 Ω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$. ☐

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$. ☐

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$, τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$. ☐

δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της. ☐

2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;

α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$ γ) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$

3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό

α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$ γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ) $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$ ε) $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$ στ) $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$ β) $\frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$ γ) $\frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega + 2} = \frac{6}{\omega^2}$

δ) $\frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1$ ε) $\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$ στ) $\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$ β) $\frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$

γ) $\frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$ δ) $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0$ β) $\frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$

γ) $\frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$ δ) $1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$ β) $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$

6 Να λύσετε τους τύπους:

α) $p = \frac{m}{V}$ ως προς V β) $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ως προς R

γ) $R = \rho\frac{\ell}{S}$ ως προς S δ) $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ ως προς T_1

ε) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R στ) $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ως προς α

ζ) $\frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ως προς u_α^2 η) $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ως προς λ

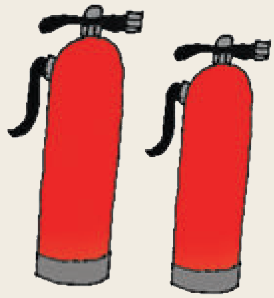
7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;

9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm^3 ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm^3 μικρότερη.

11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας αν καθένας από αυτούς συσκευάζει τον ίδιο αριθμό προϊόντων.

12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

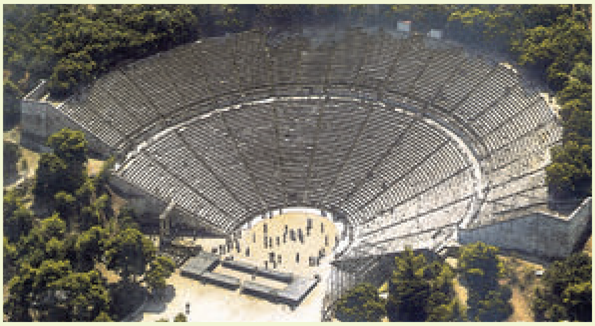
Η χρυσή τομή

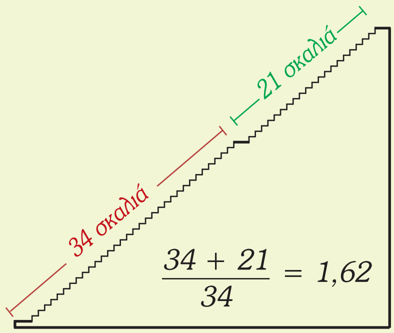
Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\frac{34+21}{34}$ *και* $\frac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;
Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;
Το προβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΤ και ΤΒ, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».





β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ *(1).*

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ.

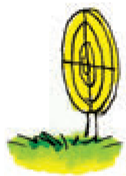
δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ *είναι ίσος με* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618...$

*Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.*
*Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ, λέγεται **«χρυσό ορθογώνιο»** και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$

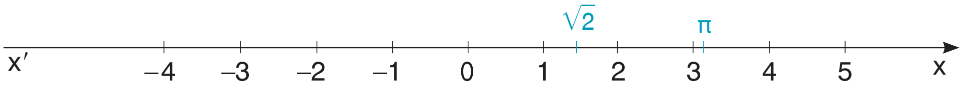
2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

- ✔ *Θυμάμαι πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.*
- ✔ *Μαθαίνω να αποδεικνύω και να χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της διάταξης.*
- ✔ *Θυμάμαι πώς λύνονται οι ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.*



A Διάταξη πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο ενός άξονα. Αν στον άξονα έχουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα π.χ. $-2 > -4$, $\quad -3 < 2$, $\quad \pi > \sqrt{2}$.



Δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί που έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα είναι **διατεταγμένοι**, οπότε μπορούμε να τους συγκρίνουμε.
Επομένως:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Πώς όμως θα συγκρίνουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα;
Αν πάρουμε δύο αριθμούς. π.χ. τους 5 και 3, για τους οποίους ισχύει $5 > 3$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν θετικό αριθμό, αφού $5 - 3 = 2 > 0$.

Ομοίως, οι αριθμοί -2 και -4, για τους οποίους ισχύει $-2 > -4$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν θετικό αριθμό, αφού $(-2) - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0$.

Αντίθετα, οι αριθμοί 3 και 5 ή -4 και -2, για τους οποίους ισχύει $3 < 5$ και $-4 < -2$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν αρνητικό αριθμό, αφού $3 - 5 = -2 < 0$ και $(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2 < 0$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ ενώ **Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$**

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

Β Ιδιότητες της διάταξης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, –2, 4, –5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3
2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν
   i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3
   ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2
   iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό –2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

Ο ορισμός της διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται και για την απόδειξη των ιδιοτήτων της διάταξης. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

α) **Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 + 3 > 4 + 3$ και $8 - 3 > 4 - 3$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:
  $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.
  Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

β) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot 2 > 4 \cdot 2$ και $\frac{8}{2} > \frac{4}{2}$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1).
  Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

γ) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ και $\frac{8}{-2} < \frac{4}{-2}$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma < 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma < \beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}}$

δ) **Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2$ και $7 > 4$, οπότε $3 + 7 > 2 + 4$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma > \beta + \delta}$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η **μεταβατική ιδιότητα**:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\beta > \gamma}$ τότε $\boldsymbol{\alpha > \gamma}$

Π.χ. είναι $3 > 1$ και $1 > -2{,}5$ οπότε $3 > -2{,}5$.

ε) **Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2 > 0$ και $7 > 4 > 0$, οπότε $3 \cdot 7 > 2 \cdot 4$. Γενικά ισχύει:

Αν **α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί** με $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma > \beta\delta}$

Απόδειξη

Είναι $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (1)
Είναι $\gamma > \delta$ και $\beta > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $\beta\gamma > \beta\delta$ (2)
Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Παρατηρήσεις:

1) Υπενθυμίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2) Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Γ Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

	$x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. = 4 > 0, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, *ιδιότητα β*).	$4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x+1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$
Απαλείφουμε τους παρονομαστές.	$4x - 2(3x+1) > 3$
Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.	$4x - 6x - 2 > 3$
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, *ιδιότητα α*).	$4x - 6x > 3 + 2$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.	$-2x > 5$
	$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι –2 < 0 και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, *ιδιότητα γ*).	$x < -\frac{5}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $\alpha > 4$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;**
α) $-3\alpha + 2 < -10$ β) $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$ γ) $-2(\alpha + 2) < -12$

Λύση

α) $\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με –3)
$-3\alpha < -12$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 2)
$-3\alpha + 2 < -12 + 2$
$-3\alpha + 2 < -10$

β) $\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με $\frac{5}{4}$)

$$\frac{5}{4} \cdot \alpha > \frac{5}{4} \cdot 4$$

$$\frac{5\alpha}{4} > 5$$ (αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της ανίσωσης το 1)

$$\frac{5\alpha}{4} - 1 > 5 - 1, \text{ οπότε } \frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$$

γ) $\alpha > 4$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανίσωσης το 2)

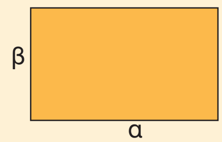
$$\alpha + 2 > 4 + 2$$

$$\alpha + 2 > 6$$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το –2)

$$-2(\alpha + 2) < -2 \cdot 6$$

$$-2(\alpha + 2) < -12$$

2 **Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν**
$4 \leq \alpha \leq 6$ και $2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5$.
Ποιες τιμές μπορεί να πάρει
α) η περίμετρος του ορθογωνίου; β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2\beta$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των ανισοτήτων $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ με το 2, οπότε έχουμε $\begin{cases} 8 \leq 2\alpha \leq 12 \\ 5 \leq 2\beta \leq 9 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και έχουμε
$8 + 5 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 12 + 9$ ή $13 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 21$ ή $13 \leq \Pi \leq 21$.
Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι από 13 έως και 21.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\beta$. Οι ανισότητες $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $4 \cdot 2{,}5 \leq \alpha\beta \leq 6 \cdot 4{,}5$ ή $10 \leq \alpha\beta \leq 27$ ή $10 \leq E \leq 27$.
Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι από 10 έως και 27.

3 **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδειχτεί ότι ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ ή $(x - y)^2 \geq 0$.
Η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.
Η ισότητα ισχύει όταν $(x - y)^2 = 0$, οπότε $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$.

4 Οι μαθητές μιας τάξης προκειμένου να πάνε μια εκδρομή ζήτησαν προσφορά από δύο πρακτορεία.

– Το πρώτο πρακτορείο ζήτησε 15 ευρώ για κάθε μαθητή και εφόσον οι μαθητές ήταν πάνω από 25, τότε στο συνολικό ποσό θα έκανε έκπτωση 10%.
– Το δεύτερο πρακτορείο ζήτησε 12 ευρώ για κάθε μαθητή και 45 ευρώ για τα διάφορα έξοδα (διόδια, ναύλα φεριμπότ κ.τ.λ.).

Αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην εκδρομή είναι περισσότεροι από 25, ποιο πρακτορείο έκανε την καλύτερη προσφορά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι μαθητές που τελικά συμμετέχουν στην εκδρομή είναι x, όπου $x > 25$.

Στο πρώτο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $15x - \frac{10}{100}15x = 15x - \frac{3}{2}x$ ευρώ,

ενώ στο δεύτερο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $12x + 45$ ευρώ.

Για να είναι καλύτερη η προσφορά του πρώτου πρακτορείου, πρέπει να ισχύει

$$15x - \frac{3}{2}x < 12x + 45 \ \text{ ή } \ 30x - 3x - 24x < 90 \ \text{ ή } \ 3x < 90 \ \text{ ή } \ x < 30.$$

Επομένως αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 25 και λιγότεροι από 30, τότε την καλύτερη προσφορά έκανε το πρώτο πρακτορείο, ενώ αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 30, την καλύτερη προσφορά έκανε το δεύτερο πρακτορείο.

Αν οι μαθητές είναι 30, τότε οι προσφορές των δύο πρακτορείων είναι ίδιες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$. ☐
β) Αν $α > β$, τότε $-α < -β$. ☐
γ) Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$. ☐
δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$. ☐
ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$. ☐
στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$. ☐
ζ) Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$. ☐
η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $α > 3$, τότε $α - 3 \ldots 0$

β) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε $α \ldots γ$

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}$ ... 0 δ) Αν $\gamma < 0$ και $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$, τότε α ... β

ε) Αν $\alpha \neq 0$, τότε α^2 ... 0 στ) Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$, τότε $\alpha + \beta$ ... 0

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;
α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $\alpha > 12$ και $\beta > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;
α) $\alpha + \beta > 15$ β) $\alpha - \beta > 9$ γ) $\alpha\beta > 36$ δ) $\frac{\alpha}{\beta} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αρκεί να ισχύει $\alpha\delta = \beta\gamma$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$, αρκεί να αποδείξει ότι $\alpha\delta > \beta\gamma$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν ισχύει $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha > 5\beta$.

2 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > -6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;
α) $-5x - 30 < 0$ β) $3x + 18 > 0$ γ) $2(x + 4) > -4$

3 Αν $2 < \alpha < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί
α) $\alpha - 2$ β) $2\alpha - 5$ γ) $1 - 3\alpha$

4 Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι
α) $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$ β) $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$ γ) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ δ) $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

5 Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:
α) $3 < x + y < 8$ β) $4 < 2x + y < 11$ γ) $-4 < x - y < 1$

6 Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:
α) $xy > 6$ β) $(x - 2)(y - 3) > 0$ γ) $(x + 2)y > 12$

7 Αν α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.

8 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $α > 1$, τότε $α^2 > α$ β) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > 2x^2$

9 Αν $α > β$ και α, β ομόσημοι, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{1}{α} < \frac{1}{β}$.

10 Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 3)(y - 2) < 0$ β) $xy + 6 < 2x + 3y$

11 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + 1 \geq 2x$ β) $(x + y)^2 \geq 4xy$ γ) $x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα.

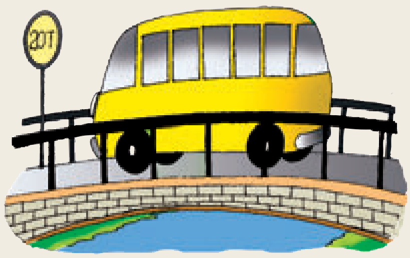
12 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$ β) Αν $x < 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \leq -2$

13 Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 114 και 135 και ο οποίος, όταν διαιρεθεί με το 15, δίνει υπόλοιπο 6.

14 Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 € και μιας μπλούζας από 22 έως 25 €. Αν κάποιος θέλει ν' αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες, τότε μεταξύ ποιων ποσών θα κυμαίνονται τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει;

15 Μ' ένα πούλμαν ταξιδεύουν 51 άτομα (ο οδηγός και 50 επιβάτες). Αν το βάρος κάθε ατόμου κυμαίνεται μεταξύ 60 kg και 100 kg, οι αποσκευές κάθε επιβάτη ζυγίζουν από 4 kg έως και 15 kg και το πούλμαν έχει απόβαρο 13,25 t, τότε να εκτιμήσετε το συνολικό βάρος του πούλμαν. Είναι δυνατόν το πούλμαν να διασχίσει μια γέφυρα επαρχιακού δρόμου που το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος διέλευσης είναι 20 t;



16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $11 - 3x < 7x + 1$ β) $2x - 9 > 5x + 6$ γ) $4(3x - 5) > 3(4x + 5)$

δ) $\frac{3 - 4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6 - x}{2}$ ε) $\frac{2x + 1}{6} - x < \frac{3 - 2x}{3}$ στ) $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x + 4}{6}$

17 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x - 1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$

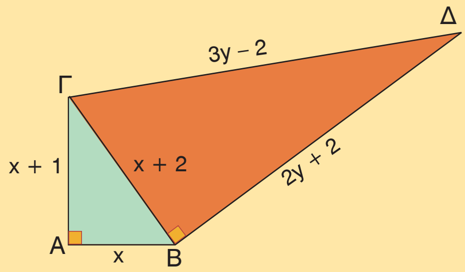
18 Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x, ώστε $\frac{x}{x + 1} < \frac{31}{40}$ και $\frac{x + 1}{x + 2} > \frac{31}{40}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$ β) $\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1.$

2 Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y.



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

α) $\dfrac{x}{x-\alpha} + \dfrac{2x}{x+\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ β) $\dfrac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \dfrac{1}{x^2+\alpha x} = \dfrac{6x}{x^2-\alpha^2}$

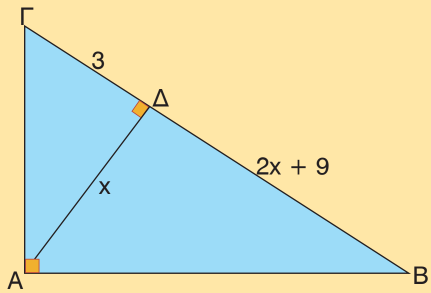
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda-5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2.

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = x, ΒΔ = 2x + 9 και ΓΔ = 3, να υπολογίσετε τον αριθμό x.



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1+\alpha)(1+\beta)$ και $1+\alpha+\beta$.

11 α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{\nu(\nu+2)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \frac{2}{\nu(\nu+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

14 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

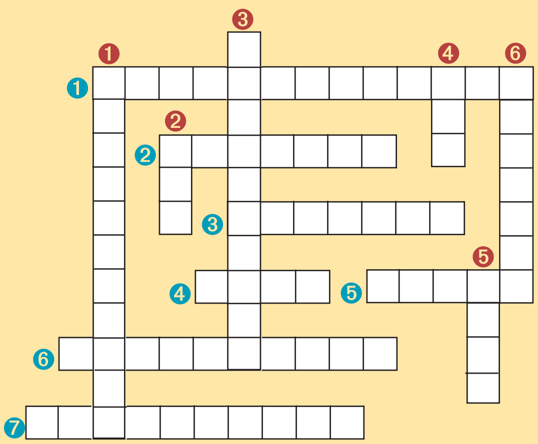
15 Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

16 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$. (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995**).

17 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη; (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001**).

18 – Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-19}{2001} + \frac{x-17}{2003} + \frac{x-15}{2005} + \frac{x-13}{2007} = 4$.
– Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται.
Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι* $\frac{x-19}{2001} = \frac{x-2020+2001}{2001} = \frac{x-2020}{2001} + 1$, *κ.τ.λ.*

19 Να λύσετε το σταυρόλεξο



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι .... της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x - 1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με .... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ
1. Το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ έχει .... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει .... λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$, π.χ. *$3x + 18 = 0$*
- **Λύση** ή **ρίζα** μιας εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει. Π.χ. ο αριθμός *$x = -6$* είναι λύση της εξίσωσης *$3x + 18 = 0$*, αφού *$3 \cdot (-6) + 18 = 0$.*
- **Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$**

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$			Παραδείγματα
$\alpha \neq 0$		έχει μοναδική λύση την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$	*$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\dfrac{3}{4}$*
$\alpha = 0$	$\beta \neq 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	*$0x = 2$ (αδύνατη)*
	$\beta = 0$	έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)	*$0x = 0$ (ταυτότητα)*

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, π.χ. *$2x^2 - 5x + 3 = 0$ με $\alpha = 2$, $\beta = -5$ και $\gamma = 3$*
- **Η εξίσωση $x^2 = \alpha$**

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$		Παραδείγματα
$\alpha > 0$	έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{\alpha}$ και $x = -\sqrt{\alpha}$	*$x^2 = 2$ άρα $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$*
$\alpha < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	*$x^2 = -4$ (αδύνατη)*
$\alpha = 0$	έχει μία λύση τη $x = 0$ (διπλή)	*$x^2 = 0$ άρα $x = 0$ (διπλή λύση)*

- **Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$**

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$	
	$\Delta > 0$	έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
	$\Delta = 0$	έχει μία διπλή λύση, τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
	$\Delta < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)

- **Παραγοντοποίηση τριωνύμου:**
  Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Κλασματική εξίσωση** ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.
- Ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρονομαστή μιας κλασματικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση (ή ρίζα) της.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Ορισμός διάταξης:
Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta$
Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε $\alpha < \beta$
Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta$

Ιδιότητες της διάταξης

- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ (Μεταβατική ιδιότητα)
- Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

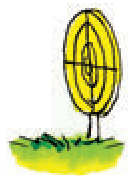
Παρατηρήσεις:
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.
- Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$.
- Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πώς παριστάνεται γραφικά.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y, βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y.

β) Ποια από τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (–2, 7), (2, 2) (3, 0), (3, 5) επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε.

δ) Πάνω στην ευθεία ε να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση $αx + βy = γ$

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και η οποία είναι της μορφής $αx + βy = γ$.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x + y = 6$ είναι της μορφής αυτής, με $α = 2$, $β = 1$ και $γ = 6$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ και $y = 4$ η εξίσωση $2x + y = 6$ επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 1 + 4 = 6$, ενώ για $x = 3$ και $y = 5$ δεν επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 6$.

Το ζεύγος των αριθμών (1, 4) που επαληθεύει την εξίσωση $2x + y = 6$, λέμε ότι είναι μία **λύση** της.

Γενικά

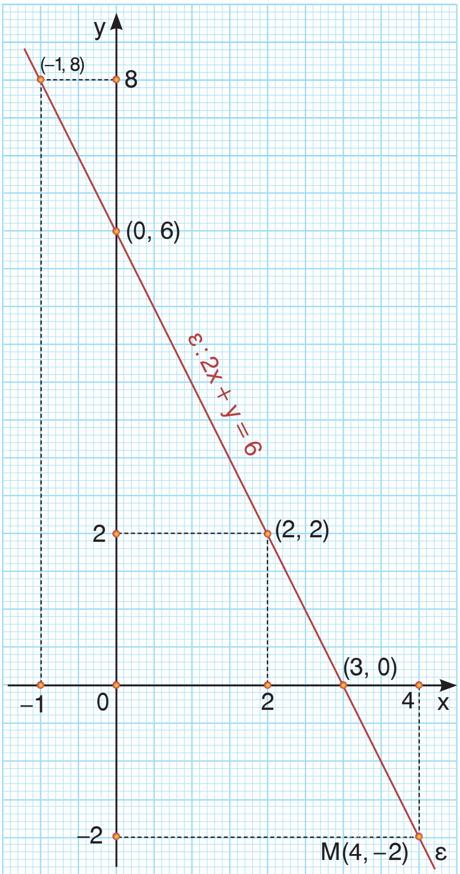
Λύση μιας εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Η εξίσωση όμως $2x + y = 6$ δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος (1, 4), αλλά έχει **άπειρες λύσεις**. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.
Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6$, οπότε $y = 2$.
Για $x = 3$ έχουμε $2 \cdot 3 + y = 6$, οπότε $y = 0$ κ.τ.λ.

x	–1	0	2	3
y	8	6	2	0

Άρα τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), ... είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 6$.



Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης $2x + y = 6$, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ε.

Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, π.χ. το Μ(4, –2), παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $2x + y = 6$, αφού $2 \cdot 4 + (-2) = 6$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας ε έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $2x + y = 6$ παριστάνει την ευθεία ε και συμβολίζεται ε: $2x + y = 6$.

Γενικά

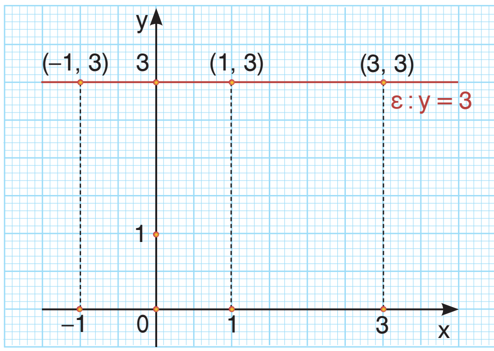
- **Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.**
- **Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.**

Ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση y = k.

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση *$0x + 2y = 6$*, που είναι της μορφής $αx + βy = γ$ με $α = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη (–1, 3), (1, 3), (3, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

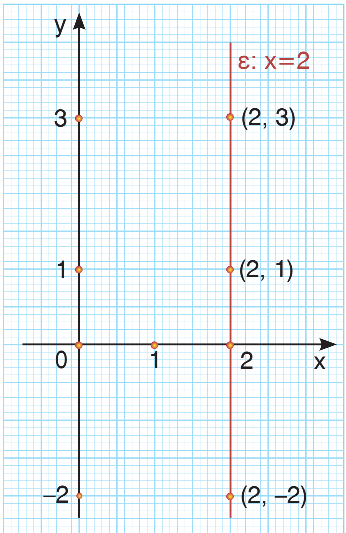


Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x που τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, 3). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 3$.

Γενικά

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x′x και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, k), ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x′x

Η εξίσωση x = k



Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $3x + 0y = 6$, που είναι της μορφής $αx + βy = γ$ με $β = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του y έχουμε $x = 2$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη (2, –2), (2, 1), (2, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση $3x + 0y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη $x = 2$ και τεταγμένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (2, 0).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $x = 2$.

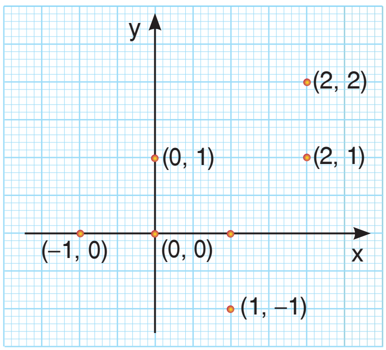
Γενικά

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y′y και τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (k, 0), ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y′y

Η εξίσωση αx + βy = γ με α = β = 0

- Η εξίσωση $0x + 0y = 7$ δεν παριστάνει ευθεία, αφού κανένα ζεύγος αριθμών (x, y) δεν είναι λύση της (**αδύνατη εξίσωση**).

- Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y). Για παράδειγμα, τα ζεύγη (–1, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 2), κ.τ.λ. είναι λύσεις της (**αόριστη εξίσωση**). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα η εξίσωση $0x + 0y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Εξισώσεις, όπως οι $2x + y = 6$, $0x + 2y = 6$, $3x + 0y = 6$, $0x + 0y = 7$, $0x + 0y = 0$, ονομάζονται **γραμμικές εξισώσεις** με δύο αγνώστους x, y. Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μόνο οι τρεις πρώτες παριστάνουν ευθεία. Στις εξισώσεις αυτές ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των x,y είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Γενικά

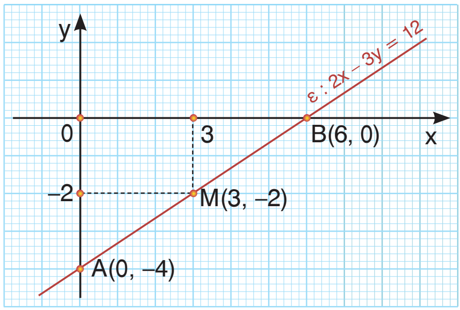
Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ και παριστάνει ευθεία όταν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να σχεδιαστεί η ευθεία ε : $2x - 3y = 12$.
β) Ένα σημείο Μ έχει τεταγμένη –2. Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο ν' ανήκει στην ευθεία ε;

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ε : $2x - 3y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-3y = 12$, οπότε $y = -4$.
Για $y = 0$ έχουμε $2x = 12$, οπότε $x = 6$.
Άρα η εξίσωση $2x - 3y = 12$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(0, –4) και Β(6, 0).



β) Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε, αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αφού το σημείο Μ έχει τεταγμένη $y = -2$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει $2x - 3(-2) = 12$ ή $2x + 6 = 12$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.

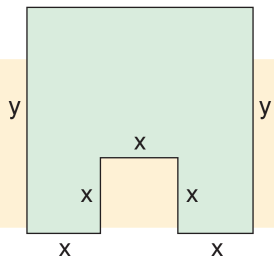
Άρα η τετμημένη του Μ είναι $x = 3$.

2 Αν η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), τότε να προσδιοριστεί η τιμή του α και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της ε με τους άξονες.

Λύση

Η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση $αx - y = 1$. Άρα έχουμε $2α - 5 = 1$ ή $2α = 6$ ή $α = 3$. Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση $3x - y = 1$.
Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, –1).
Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

3 Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι 40 m.
α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα x, y.
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, ποια είναι η μέγιστη τιμή του x;



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος είναι $5x + y + 3x + y$, άρα ισχύει
$$5x + y + 3x + y = 40 \text{ ή } 8x + 2y = 40 \text{ ή } 4x + y = 20 \quad (1).$$
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, τότε η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 10 και πάνω, δηλαδή ισχύει $y \geq 10$. Από την ισότητα (1) έχουμε $y = 20 - 4x$, οπότε πρέπει $20 - 4x \geq 10$ ή $-4x \geq 10 - 20$ ή $-4x \geq -10$ ή $x \leq 2{,}5$. Άρα η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 2,5 και κάτω, οπότε η μέγιστη τιμή της είναι 2,5 m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

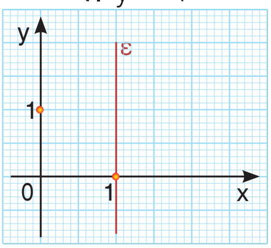
1 Ποια από τα ζεύγη (3, 2), (1, 5), (0, 6), (–3, 10), (–2, 8) είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

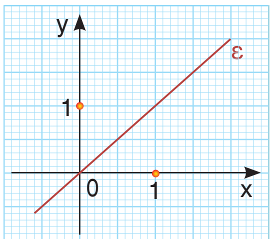
α) Το σημείο (3, –2) ανήκει στην ευθεία ε : $3x - y = 7$. ☐
β) Η ευθεία ε : $5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (–2, 0). ☐
γ) Η ευθεία ε : $2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ☐
δ) Η ευθεία ε : $3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, 3). ☐

3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

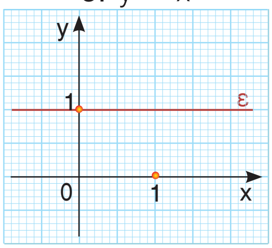
1. $y = 1$ **2.** $x = -1$ **3.** $y = x$ **4.** $x = 1$



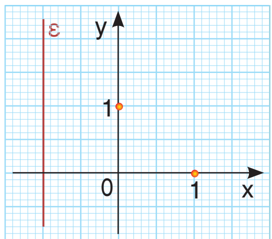
(σχήμα α)



(σχήμα β)



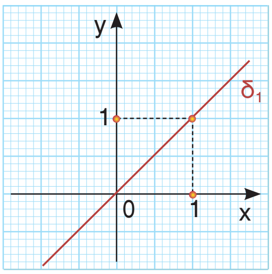
(σχήμα γ)

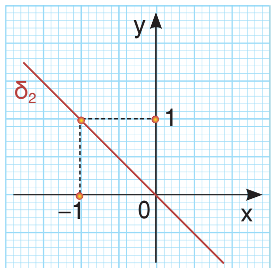


(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

4 Οι ευθείες δ_1, δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





i) Η εξίσωση της δ_1 είναι: α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$
ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι: α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –3) και είναι παράλληλη στον άξονα x′x έχει εξίσωση:
α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –2) και είναι παράλληλη στον άξονα y′y έχει εξίσωση:
α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$ β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10$ γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20$
Τι παρατηρείτε;

2 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 2y = 8 - 2\lambda$.
α) Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

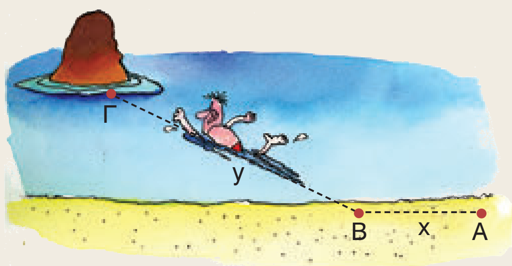
3 Αν η ευθεία $\varepsilon : 4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, τότε:
α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

4 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x = -4$, $\varepsilon_2 : 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο;
$\zeta_1 : 2x - y = 6$, $\zeta_2 : 3x + y = 10$ και $\zeta_3 : -5x + 3y = 16$

5 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
$x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

6 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
α) παράλληλη στον άξονα $x'x$ β) παράλληλη στον άξονα $y'y$.
Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύμπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:

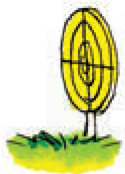


α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x, y.
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύμπησε;

8 Σ' ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x, y. Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατόν να έχει ο ξενώνας.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

✔ *Μαθαίνω τι λέγεται γραμμικό σύστημα και πώς επιλύεται γραφικά.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.

2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y,

π.χ. $x + y = 5$ και $2x + y = 8$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y**.

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών (3, 2) επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, αφού $\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος (3, 2) είναι **λύση** του συστήματος.

Γενικά

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y; Δηλαδή πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζεύγος (x, y) που να είναι λύση του;

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

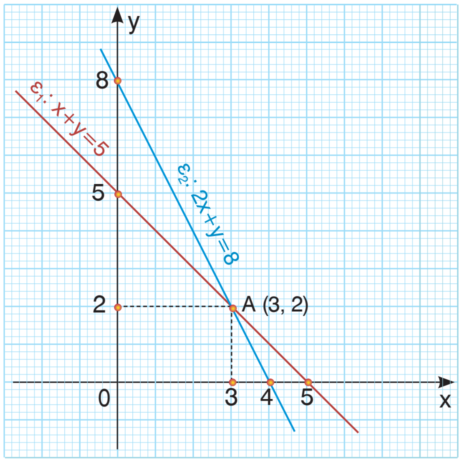
Σύστημα με μοναδική λύση

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος π.χ. του $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $\varepsilon_1:\ x + y = 5$ και

$\varepsilon_2 : 2x + y = 8$,

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα **τέμνονται** στο σημείο Α. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (3, 2) του **κοινού σημείου** Α των ευθειών αυτών.



Επειδή το σημείο Α(3, 2) ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως ε_1, ε_2 δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (3, 2) είναι η **μοναδική** λύση του συστήματος.

Αδύνατο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

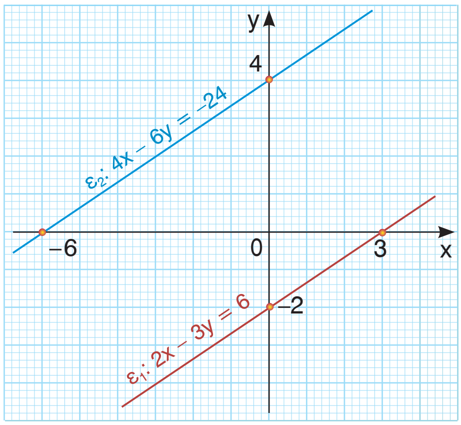
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 2x - 3y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 4x - 6y = -24$,

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα είναι **παράλληλες**. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα **δεν έχει λύση**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

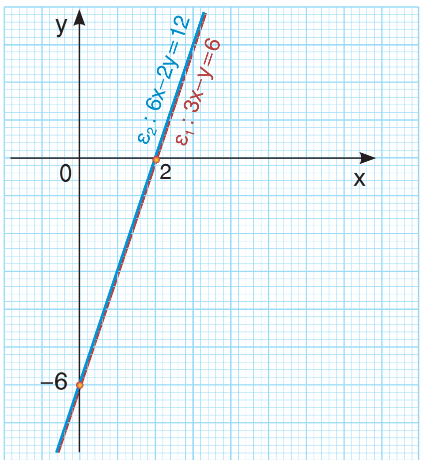
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

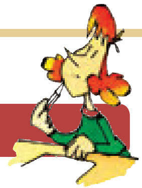
σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 3x - y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12$,

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα, **συμπίπτουν (ταυτίζονται)**. Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.



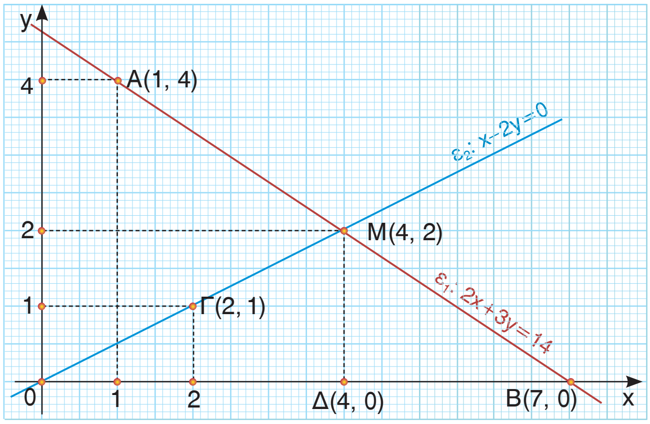


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 14$, $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ και ο άξονας $x'x$.

Λύση



α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1: 2x + 3y = 14$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 1$ έχουμε $2 + 3y = 14$ ή $3y = 12$, οπότε $y = 4$.
Για $x = 7$ έχουμε $2 \cdot 7 + 3y = 14$ ή $3y = 0$, οπότε $y = 0$.
Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α(1, 4) και Β(7, 0).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-2y = 0$, οπότε $y = 0$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 - 2y = 0$ ή $-2y = -2$, οπότε $y = 1$.
Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Γ(2, 1).
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Μ(4, 2), οπότε το σύστημα (Σ) έχει μία λύση την $(x, y) = (4, 2)$.

β) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 και ο άξονας $x'x$ είναι το ΟΜΒ, το οποίο έχει βάση ΟΒ = 7 και ύψος ΜΔ = 2.
Άρα το εμβαδόν του είναι $E = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7$ τετραγωνικές μονάδες.

2 **Να σχεδιάσετε τις ευθείες: $\varepsilon_1: x - y = 0$, $\varepsilon_2: x + y = 0$, $\varepsilon_3: -x + y = -3$.**
Πόσες λύσεις έχει καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

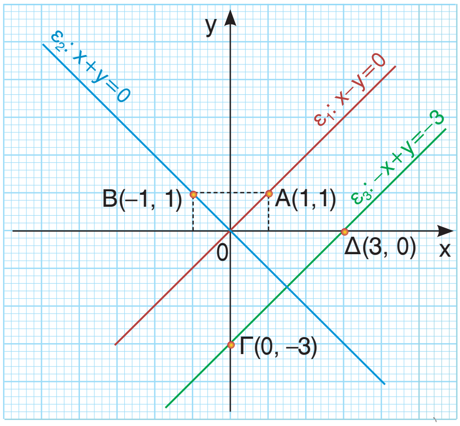
$(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $(\Sigma_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = -3 \end{cases}$

Λύση

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1: x - y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Α(1, 1).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x + y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = -1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Β(–1, 1).

Σχεδιάζουμε και την ευθεία $\varepsilon_3 : -x + y = -3$. Για $x = 0$ έχουμε $y = -3$ και για $y = 0$ έχουμε $x = 3$. Άρα η ευθεία ε_3 διέρχεται από τα σημεία Γ(0, –3) και Δ(3, 0).

Το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση την (0, 0), αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Ο(0, 0), ενώ το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες ε_1 και ε_3 είναι παράλληλες.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

α) Α(–3, 2) β) Β(1, –1) γ) Γ(1, –4) δ) Δ(2, –3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

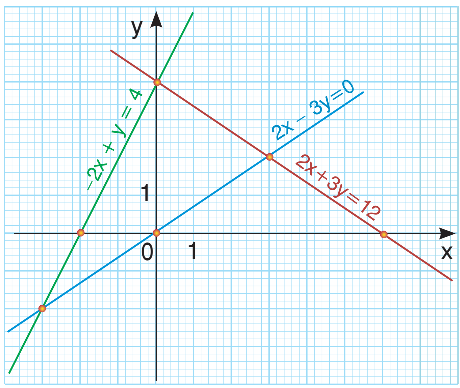
Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται.	**1.** Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες.	**2.** Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες ε_1, ε_2 συμπίπτουν.	**3.** Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

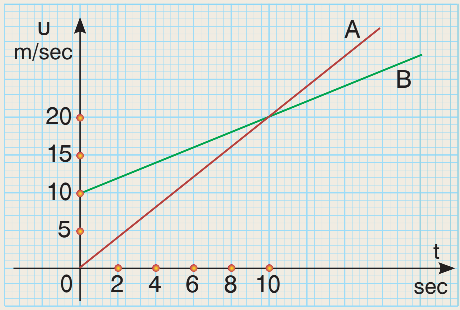
2 Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

3 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε:

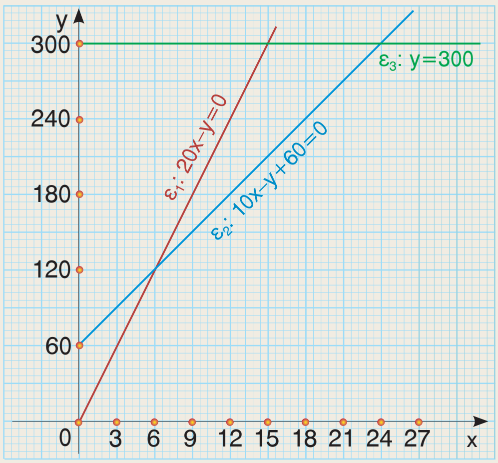
α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;



4 Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες:

– Να πληρώνει 20 € για καθε αγώνα που παρακολουθεί.
– Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €.
– Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί.



Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση παριστάνεται με σημεία μιας από τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3.

α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μια από τις τρεις ευθείες.

β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ένας φίλαθλος, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση;

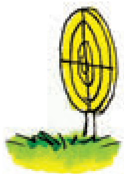
γ) Αν ο φίλαθλος παρακολούθησε τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα;

δ) Αν παρακολούθησε μόνο 15 αγώνες και δεν είχε επιλέξει την πιο συμφέρουσα περίπτωση, πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση για τον φίλαθλο, εάν αυτός γνωρίζει εκ των προτέρων πόσους αγώνες θα παρακολουθήσει;

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

- ✔ *Μαθαίνω να λύνω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο:*
  α) της αντικατάστασης   β) των αντιθέτων συντελεστών
- ✔ *Μαθαίνω να λύνω προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1 βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.
Η αλγεβρική όμως επίλυσή του, όπως θα δούμε σ' αυτή την παράγραφο, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να **καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο**. Δύο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$
$$20 + 2y = 44$$
$$2y = 44 - 20$$
$$2y = 24 \quad \text{άρα} \quad y = 12$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$
$$x = 8$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8$, $y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$

Για επαλήθευση, αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 8$ και $y = 12$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (8, 12) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 8 + 12 = 20 \\ 8 + 3 \cdot 12 = 44. \end{cases}$
Στην ίδια λύση θα καταλήγαμε και αν λύναμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y.

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ οι συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.
Έτσι έχουμε:

$$3x + 5x = 12 + 4 \text{ ή } 8x = 16, \text{ οπότε } x = 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \text{ ή } 2y = 6 \text{ ή } y = 3.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το –2 και της δεύτερης με το 3, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \text{ ή } \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$-\cancel{6x} - 10y + \cancel{6x} + 21y = -2 + 24$$
$$11y = 22, \text{ οπότε } y = 2$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού $y = 2$, η εξίσωση $3x + 5y = 1$ γράφεται:

$$3x + 5 \cdot 2 = 17 \text{ ή } 3x + 10 = 1$$
$$3x = -9 \text{ ή } x = -3$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -3$, $y = 2$, δηλαδή το ζεύγος

$$(x, y) = (-3, 2)$$

Για επαλήθευση αντικαθιστούμε τις τιμές $x = -3$ και $y = 2$ στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (–3, 2) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1 \\ 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 8 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.

Λύση

Αν ω, φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε $\omega + \varphi = 180^\circ$. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και $\omega = 3\varphi + 12^\circ$. Για να βρούμε τις γωνίες ω, φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\varphi + 12^\circ + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\varphi + \varphi = 180^\circ - 12^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 4\varphi = 168^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 3 \cdot 42^\circ + 12^\circ \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 138^\circ \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι $\omega = 138^\circ$ και $\varphi = 42^\circ$.

2 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Λύση

Αντικαθιστούμε το $x + 2y$ με 4 στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 4 + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 7 - 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

3 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{2} - \dfrac{x + y}{8} = 1 \\[2mm] \dfrac{2x - 1}{5} + \dfrac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{3x - y}{2} - 8 \cdot \dfrac{x + y}{8} = 8 \cdot 1 \\[2mm] 10 \cdot \dfrac{2x - 1}{5} + 10 \cdot \dfrac{y - 3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4(3x - y) - (x + y) = 8 \\ 2(2x - 1) + 5(y - 3) = 20 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y - 15 = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $11x + 4x = 8 + 37$ ή $15x = 45$ ή $x = 3$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$4 \cdot 3 + 5y = 37 \quad ή \quad 12 + 5y = 37 \quad ή \quad 5y = 25 \quad ή \quad y = 5.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση $x + y = 126$ *(1)*.

Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$ *(2)*.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ 0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90 \end{cases} \begin{array}{|l} \\ \cdot(-2) \end{array} \quad ή \quad \begin{cases} x + y = 126 \\ -x - 2y = -180 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $y - 2y = 126 - 180$ ή $-y = -54$ ή $y = 54$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $y = 54$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$x + 54 = 126 \quad ή \quad x = 126 - 54 \quad ή \quad x = 72.$$

Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

α) (2, 4) **β)** (7, –1) **γ)** (6, 2) **δ)** (5, 1)

2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:

α) την πρώτη εξίσωση ως προς x; **β)** την πρώτη εξίσωση ως προς y;

γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x; **δ)** τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;

α) $3x = -1$ **β)** $2x = -9$ **γ)** $5x = -10$ **δ)** $5x = 10$

4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{|l} ..... \\ ..... \end{array}$ $\qquad$ $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \begin{array}{|l} ..... \\ ..... \end{array}$

5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

α) $\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\qquad$ $(\Sigma_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x - y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

2 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

3 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{4} = 3 \\ \dfrac{3x - y}{2} = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} - y = 1 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{2} + \dfrac{2y + 1}{3} = 3 \\ \dfrac{x + 4}{3} - \dfrac{y - 6}{2} = 4 \end{cases}$

4 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x(y + 4) = y(x - 6) - 15 + 3x \\ (x - 1)(x + 2y) = (x + y)^2 - y(y + 1) \end{cases}$

5 Να λύσετε τα συστήματα:

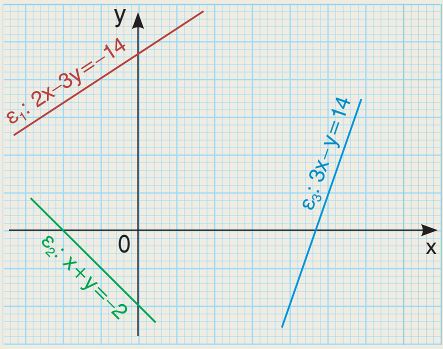
α) $\begin{cases} 1{,}3\alpha - 0{,}8\beta = 2{,}1 \\ 0{,}9\alpha + 0{,}4\beta = 0{,}5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{\omega}{4} - 0{,}2\varphi = 1{,}5 \\ 3\omega + 1{,}4\varphi = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2{,}5x + 3{,}2y = -1{,}8 \\ 1{,}6x - 2{,}4y = -5{,}6 \end{cases}$

6 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega} - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-6}{\omega} + \dfrac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$

7 Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 5y = 10$ και $\varepsilon_2 : x - y = 1$.

8 Οι ευθείες:
$\varepsilon_1 : 2x - 3y = -14$
$\varepsilon_2 : x + y = -2$
$\varepsilon_3 : 3x - y = 14$
τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης. Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους;



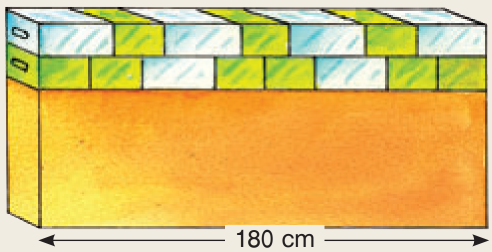
9 Αν $3 + 3 + 3 + ... + 3 + 5 + 5 + 5 + ... + 5 = 410$ και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

10 Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α, β.

11 Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(–3, –2). Να βρείτε τις τιμές των α, β.

12 Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς –1 και 3.

13 Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



14 Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και 5 κιλών. Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος.

15 Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

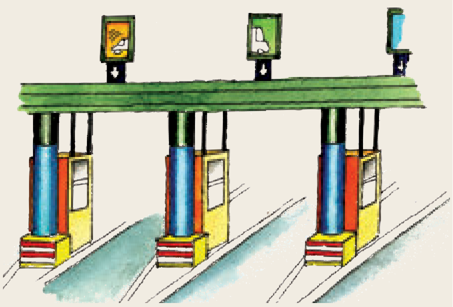
16 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα τους απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

17 Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά ένας σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

18 Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

19 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $υ = υ_0 - αt$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;

20 Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.



21 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$, όπου k πραγματικός αριθμός.

2 Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2 : x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο Α(2, 1), να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ.

3 Αν τα συστήματα $(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$, και $(\Sigma_2): \begin{cases} 2x + \alpha y = \beta \\ 3x - \beta y = \alpha \end{cases}$
έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς α, β.

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y όταν:
α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$ **β)** $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

5 Να λύσετε τα συστήματα:
α) $\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} (3x - 4y)(x + 2y) = 8 \\ \dfrac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$

6 Να βρείτε δύο αριθμούς, που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, τότε θα προκύψει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15.

7 Αν η εξίσωση $(2\lambda - \kappa - 3)x = \kappa - \lambda + 1$ είναι αόριστη, να βρείτε τους αριθμούς κ, λ.

8 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm. Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά 72π cm^2, να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

9 Να βρείτε τις ηλικίες δύο αδελφών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 5 χρόνια, ενώ μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα έχουν λόγο $\frac{4}{3}$.

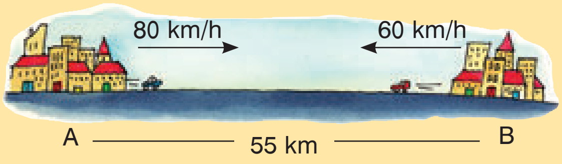
10 Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α′ θέσης κοστίζει 18 € και της Β′ θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

11 Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, τότε θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος.

12 Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός;

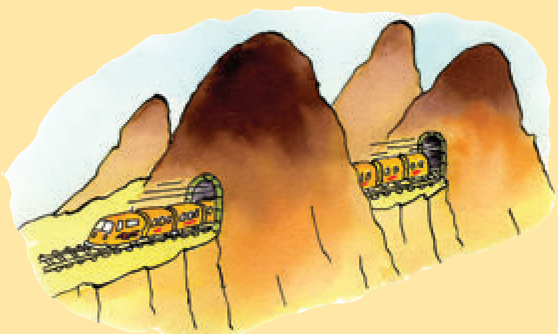
13 Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

14 Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



15 Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

16 Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ' αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.



17 Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω, τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1. Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2.

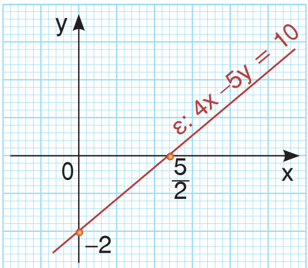
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

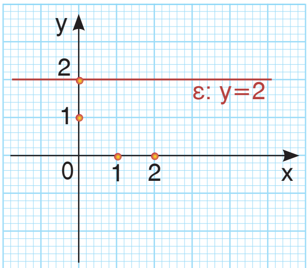
- **Γραμμική** εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$, π.χ. $3x + 2y = 7$.

- **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
  Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (1, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.

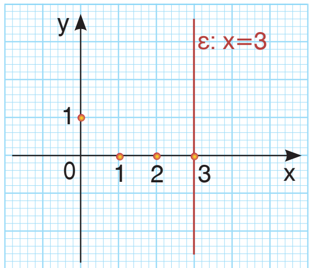
- Η γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία ε, αν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.



Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.



Αν $\alpha=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $y=\kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή τον άξονα $x'x$.



Αν $\beta=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $x=\kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ ή τον άξονα $y'y$.

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο Μ(3, 4) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : ax - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot a - 4 = 0$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο Μ(0, –2) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

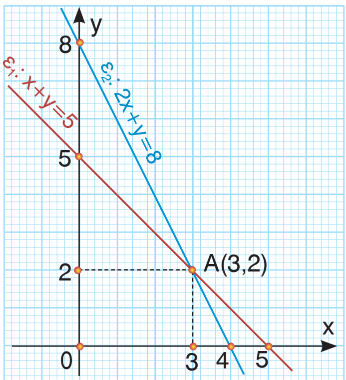
- **Λύση** του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (2, –1) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases} , \quad \text{αφού} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$$

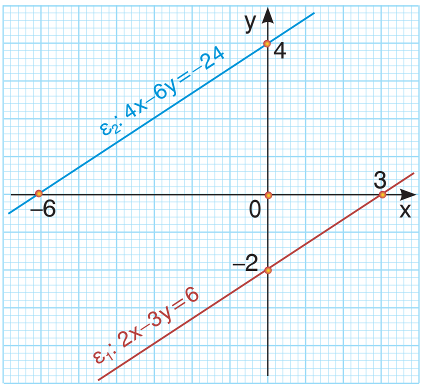
- Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

α) Γραφικά

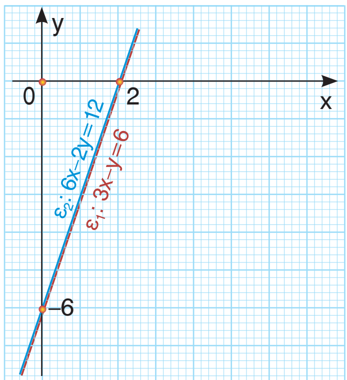
Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.



Αν οι ε_1, ε_2 **τέμνονται** σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους. Π.χ.
το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση τη (x, y) = (3, 2).



Αν οι ε_1, ε_2 είναι **παράλληλες** τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αν οι ε_1, ε_2 **ταυτίζονται**, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

β) Αλγεβρικά

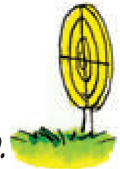
Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντιθέτων συντελεστών προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους του συστήματος και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$

- ✔ *Θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.*
- ✔ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$.*
- ✔ *Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ από τη γραφική της παράσταση.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
– Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι y = ...

2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;

3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

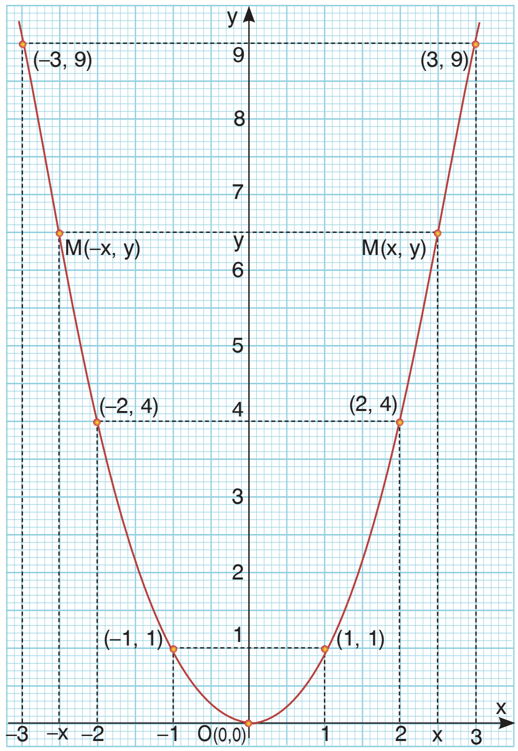
Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ' ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x′x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.

– Η συνάρτηση $y = x^2$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

– Για $x = –3$ ή $x = 3$ έχουμε $y = 9$ και τα σημεία (–3, 9) και (3, 9) της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y. Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y′y.

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α < 0$

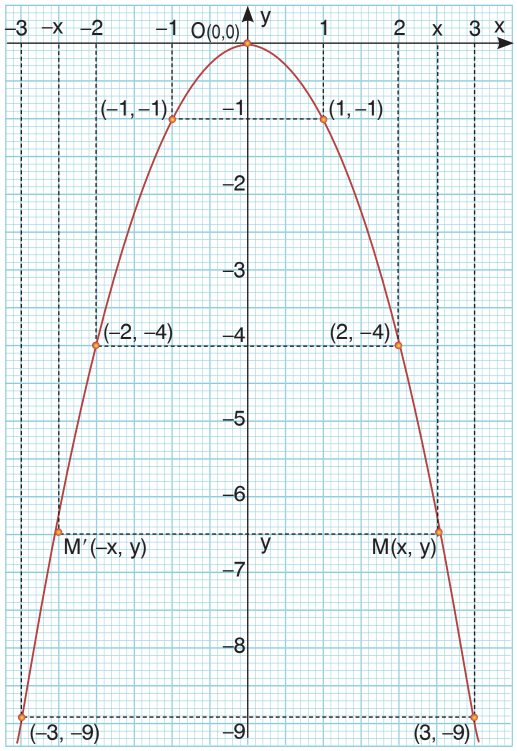
Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = –x^2$, η οποία είναι επίσης μια παραβολή.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x′x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.

– Η συνάρτηση $y = –x^2$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

– Σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = –x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y′y.

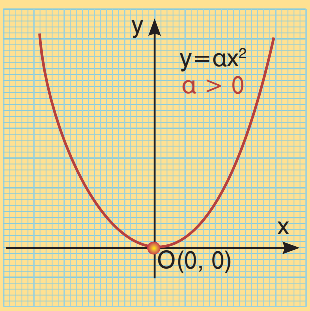


Γενικά

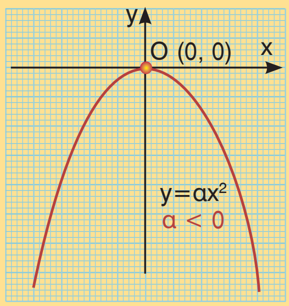
Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$.

- Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.

- Αν $α > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x′x και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

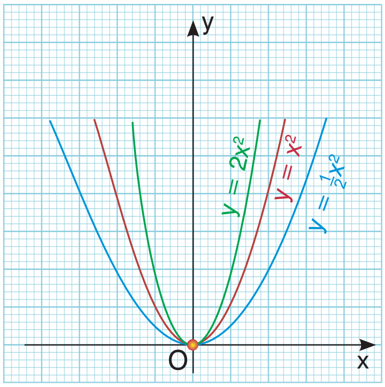


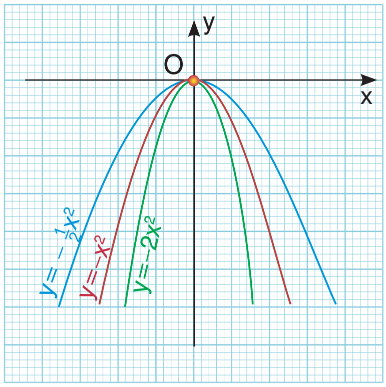
- Αν $α < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x′x και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.



Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = αx^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α. Παρατηρούμε ότι:

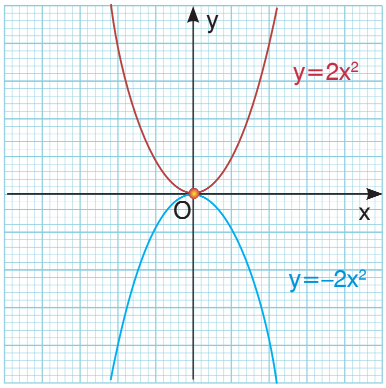
α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = αx^2$ ως προς τον άξονα $x'x$, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμά» της.
Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».





β) Αν σχεδιάσουμε τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, τότε παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

Γενικά:
Οι παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$ είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η παραβολή $y = αx^2$ να διέρχεται από το σημείο Α $(-1, 3)$.**

Λύση

Για να διέρχεται η παραβολή $y = αx^2$ από το σημείο $Α(-1, 3)$, πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = αx^2$.
Άρα, για $x = -1$ και $y = 3$, έχουμε $3 = α\,(-1)^2$, οπότε $α = 3$.

2 **Να σχεδιαστεί η παραβολή $y = -2x^2$ όταν $-2 \leq x \leq 2$ και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή y. Ποια σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη $-\frac{9}{2}$;**

Λύση

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2x^2$.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–2	0	–2	–8

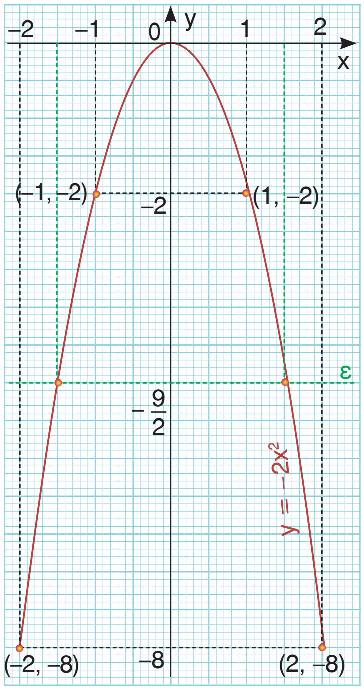
Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του x, από το -2 έως και το 2 ($-2 \leq x \leq 2$) οι αντίστοιχες τιμές του y είναι από το -8 έως και το 0 ($-8 \leq y \leq 0$).
Άρα, η μέγιστη τιμή του y είναι το 0, όταν $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή του y είναι το -8, όταν $x = -2$ ή $x = 2$.

Για $y = -\frac{9}{2}$ έχουμε:

$-\frac{9}{2} = -2x^2$ ή $x^2 = \frac{9}{4}$, οπότε $x = \pm\frac{3}{2}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι τα κοινά σημεία της ευθείας $ε : y = -\frac{9}{2}$ και της παραβολής $y = -2x^2$.

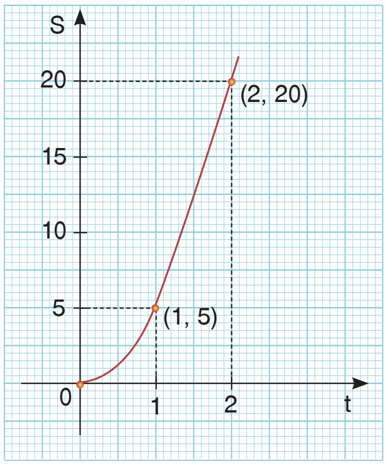


3 **Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S, που δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2}gt^2$ ($g \approx 10m/sec^2$). Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.**

Λύση

Το διάστημα S για $g = 10\ m/sec^2$ δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5t^2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S = 5t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία (1, 5), (2, 20) κ.τ.λ.
Ο χρόνος όμως δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε το διάγραμμα του διαστήματος - χρόνου είναι το τμήμα της προηγούμενης παραβολής που βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή $y = -2x^2$;

α) Α(–1, 2) **β)** Β(2, –8) **γ)** $Γ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **δ)** Δ(–2, 8)

2 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;

α) $y = -4x^2$ β) $y = 4x^2$ γ) $y = (-4x)^2$ δ) $y = -(4x)^2$.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η παραβολή $y = 6x^2$ έχει κορυφή το σημείο Ο(0, 0).

β) Ο άξονας x′x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = x^2$.

γ) Οι παραβολές $y = 8x^2$ και $y = -8x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y′y.

δ) Η συνάρτηση $y = 3x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = 0$.

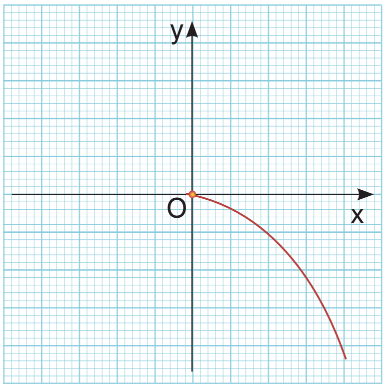
ε) Η συνάρτηση $y = -2x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή την $y = 0$.

στ) Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(–1, 2), τότε θα διέρχεται και από το σημείο Λ(1, 2).

4 Στο διπλανό σύστημα αξόνων έχουμε σχεδιάσει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -\frac{1}{4}x^2$.

α) Να ολοκληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{4}x^2$.

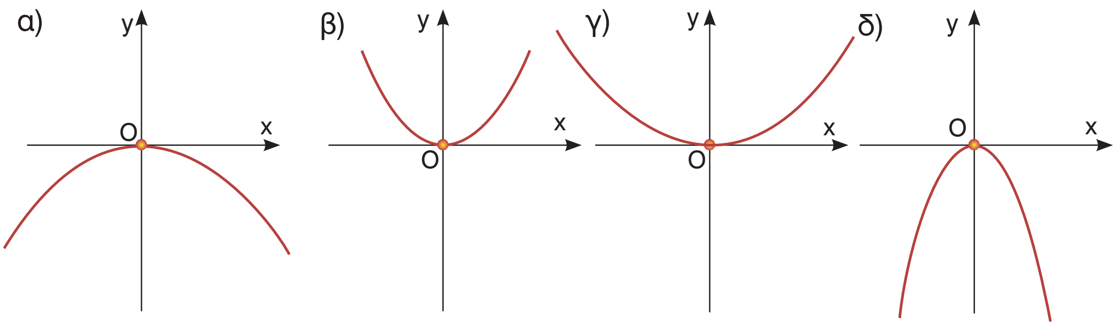


5 Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(2, –4), τότε:

α) $α = 2$ β) $α = -1$ γ) $α = -4$ δ) $α = \frac{1}{8}$

6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ 2) $y = -3x^2$ 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$ 4) $y = x^2$



α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

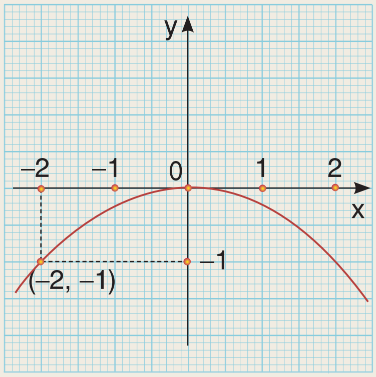
1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = 2x^2$ β) $y = -2x^2$ γ) $y = -\frac{3}{4}x^2$ δ) $y = \frac{2}{3}x^2$

2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α) $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ και $y = 3x^2$ β) $y = \frac{3}{2}x^2$ και $y = -\frac{3}{2}x^2$

3 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.
Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x′x και να γράψετε την εξίσωσή της.



4 Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -4x^2$ που έχουν τεταγμένη –9.

5 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η παραβολή $y = (λ + 2)x^2$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6 Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{λ}x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(2, λ), να βρείτε την τιμή του αριθμού λ.

7 Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ και έχει μάζα m δίνεται από τον τύπο $E_K = \frac{1}{2}mυ^2$.

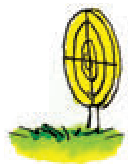
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - ενέργειας για τρία σώματα που έχουν μάζες 1, 2 και 4 αντιστοίχως.

β) Αν τα σώματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια $E_K = 2$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

γ) Αν τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα $υ = \frac{3}{2}$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε, ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια.

4.2 Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

✔ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ και σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη του πίνακα:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y							

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την παραβολή $y = x^2$.

3. Να αποτυπώσετε την παραβολή $y = x^2$ σ' ένα διαφανές χαρτί και να το μετακινήσετε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $(2, -1)$ και ο άξονας συμμετρίας της να συμπέσει με την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.
Είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ παραβολή;

Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = -x^2$, που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και οι συναρτήσεις $y = 3x^2 - 1$, $y = -2x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x + 3$ κ.τ.λ., ονομάζονται τετραγωνικές συναρτήσεις.

Γενικά

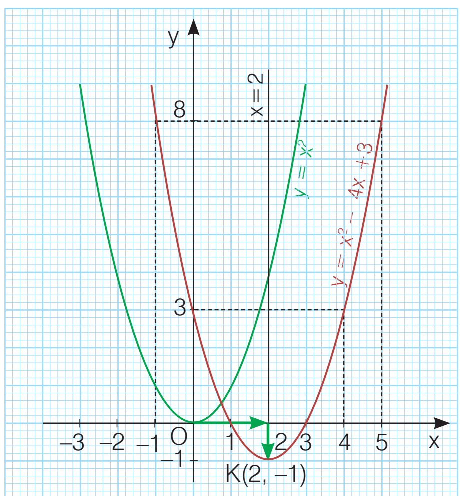
Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

Αν έχουμε μία τετραγωνική συνάρτηση, όπως την $y = x^2 - 4x + 3$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$, την αποτυπώνουμε σ' ένα διαφανές χαρτί και τη μετακινούμε οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Διαπιστώνουμε ότι η παραβολή αυτή συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$.



Άρα η γραφική παράσταση της $y = x^2 - 4x + 3$ είναι επίσης παραβολή, με κορυφή το σημείο Κ(2, –1) και άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.

Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $Κ\left(-\dfrac{β}{2α}, -\dfrac{Δ}{4α}\right)$, όπου $Δ = β^2 - 4αγ$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\dfrac{β}{2α}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα από τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση διαπιστώσαμε ότι η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, –1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

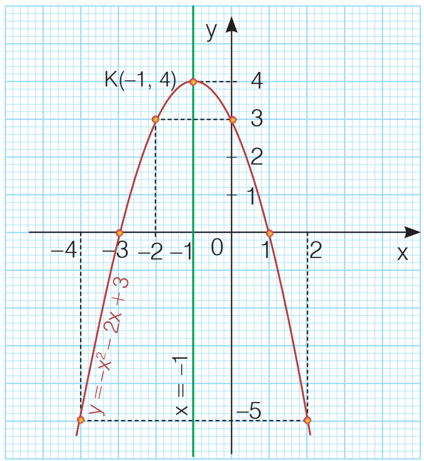
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από την προηγούμενη πρόταση, αφού

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{και} \quad -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -1.$$

Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 - 2x + 3$ είναι η παραβολή $y = -x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, έχει κορυφή το σημείο Κ(–1, 4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$, αφού

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1 \quad \text{και}$$

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}{4 \cdot (-1)} = 4.$$



Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ και $y = -x^2 - 2x + 3$, που σχεδιάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρούμε ακόμη ότι:

– Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x + 3$ που έχει $α > 0$ και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, –1) παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -1$, όταν $x = 2$.

– Η συνάρτηση $y = -x^2 - 2x + 3$ που έχει $α < 0$ και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(–1, 4) παίρνει μέγιστη τιμή $y = 4$, όταν $x = -1$.

Γενικά

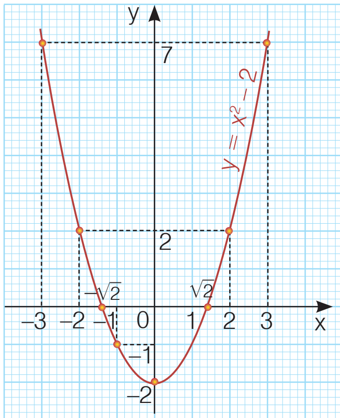
- Αν $α > 0$, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\dfrac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\dfrac{β}{2α}$
- Αν $α < 0$, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = -\dfrac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\dfrac{β}{2α}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2$ και να βρεθούν τα κοινά της σημεία με τον άξονα x′x.

Λύση

Η συνάρτηση $y = x^2 - 2$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = 0$ και $γ = -2$, οπότε έχουμε $-\dfrac{β}{2α} = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0$ και $-\dfrac{Δ}{4α} = -\dfrac{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = -2$.



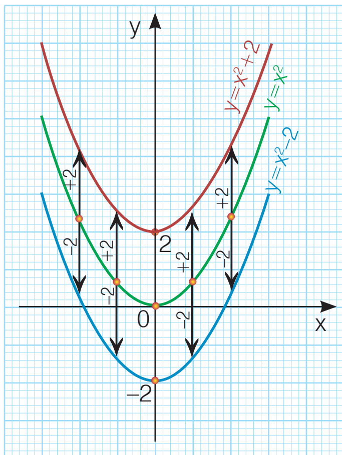
Άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(0, –2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$, δηλαδή τον άξονα y′y.
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	2	–1	–2	–1	2	7

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 - 2$ με τον άξονα x′x θέτουμε $y = 0$ (τα σημεία του άξονα x′x έχουν τεταγμένη 0) και έχουμε $x^2 - 2 = 0$ ή $x^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Άρα, τα κοινά σημεία της παραβολής και του άξονα x′x είναι τα $Α(-\sqrt{2}, 0)$ και $Β(\sqrt{2}, 0)$.

Παρατήρηση

Η παραβολή $y = x^2 - 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, –2), μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).



Ομοίως, η παραβολή $y = x^2 + 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, 2) μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα πάνω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).

2 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (x - 2)^2$ και να βρεθεί το κοινό της σημείο με τον άξονα y′y.

Λύση

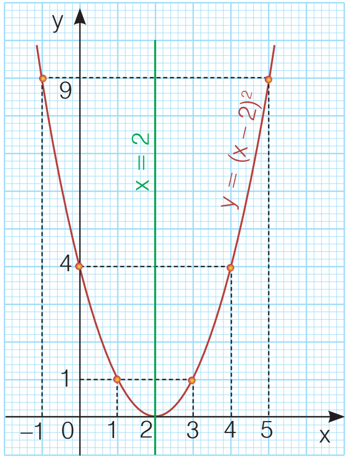
Η συνάρτηση $y = (x-2)^2$ γράφεται $y = x^2 - 4x + 4$ και είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = -4$ και $γ = 4$, οπότε έχουμε:

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 0.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, 0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9

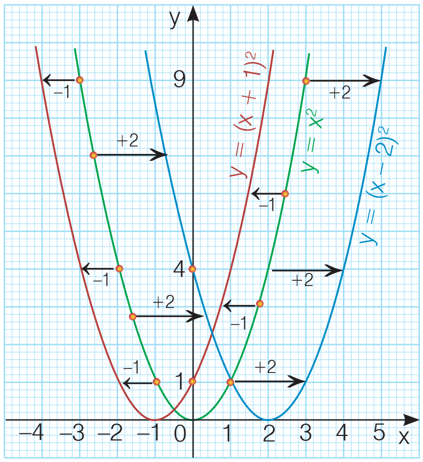


Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής $y = (x-2)^2$ με τον άξονα y′y, θέτουμε $x = 0$ (τα σημεία του άξονα y′y έχουν τετμημένη 0), οπότε έχουμε $y = (0-2)^2 = 4$. Άρα, το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y′y είναι Α(0, 4).

Παρατήρηση:

Η παραβολή $y = (x-2)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).

Ομοίως, η παραβολή $y = (x+1)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(–1, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).



3 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x$ και να προσδιοριστούν οι τιμές του x για τις οποίες είναι $y < 0$.

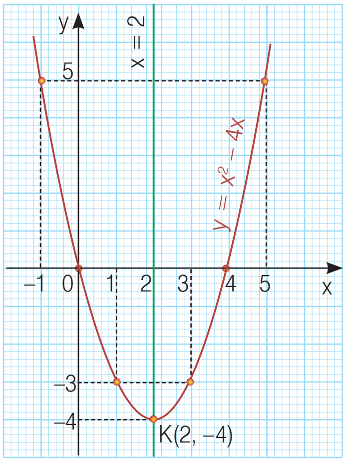
Λύση

Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = -4$ και $γ = 0$, οπότε έχουμε $-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ και $-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -4$.

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, –4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



Σχεδιάζουμε την παραβολή και παρατηρούμε ότι τα σημεία της που έχουν τεταγμένη y αρνητική είναι εκείνα που έχουν τετμημένη x μεταξύ των αριθμών 0 και 4. Άρα, είναι $y < 0$, όταν $0 < x < 4$.

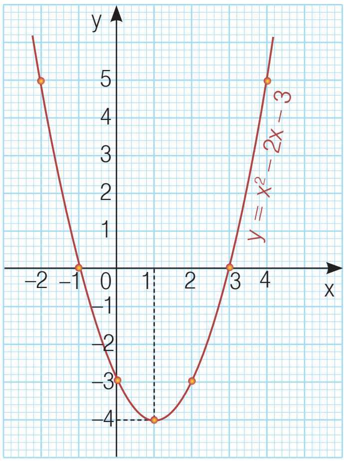
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 – 2x – 3$. Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η γραφική παράσταση είναι .... με κορυφή το σημείο .... και άξονα συμμετρίας την ευθεία ....

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει .... τιμή y = ..., όταν x = ...

γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία ...., ... και τον άξονα y′y στο σημείο ....



2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Η παραβολή $y = 4x^2 + 2$ έχει:

i) Κορυφή το σημείο

α) (4, 2) β) (0, 4) γ) (0, 2) δ) (2, 0)

ii) Άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

α) $x = 2$ β) $y = 0$ γ) $x = 0$ δ) $y = 2$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η συνάρτηση $y = –2x^2 – 5x + 4$ παίρνει ελάχιστη τιμή. ☐

β) Η παραβολή $y = x^2 – x + 2$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Α(0, 2). ☐

γ) Ο άξονας y′y είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = 3x^2 – 7$. ☐

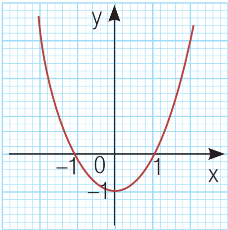
δ) Η κορυφή της παραβολής $y = (x + 1)^2$ είναι σημείο του άξονα x′x. ☐

ε) Η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 2$ είναι σημείο του άξονα y′y. ☐

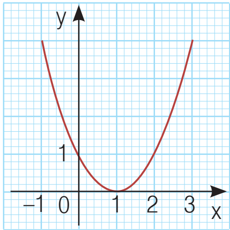
4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1. $y = (x + 1)^2$ **2.** $y = x^2 - 1$ **3.** $y = x^2 + 1$ **4.** $y = (x - 1)^2$

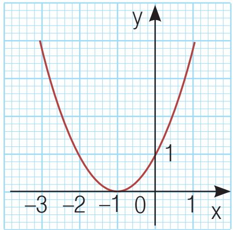
α)



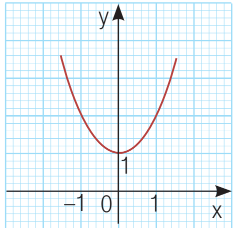
β)



γ)



δ)



α	β	γ	δ

5 Ορισμένες τιμές της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α < 0$ φαίνονται στον πίνακα.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία .... και κορυφή το σημείο ....

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή y = ..., όταν x = ...

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία ...., ... και τον άξονα y′y στο σημείο ....

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = x^2 + 2x - 3$ β) $y = -2x^2 + 4x + 6$

2 Να βρείτε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης:

α) $y = 3x^2 - 12x + 11$ β) $y = -4x^2 - 8x + 1$ γ) $y = -2(x - 6)^2 + 7$

3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 2x$ για $-4 \leq x \leq 2$ και με τη βοήθεια αυτής να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x^2 + 2x = 3$.

4 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x + 2$ και με τη βοήθεια αυτής να αποδείξετε ότι $x^2 + 2 > 2x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

5 Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + \lambda$.

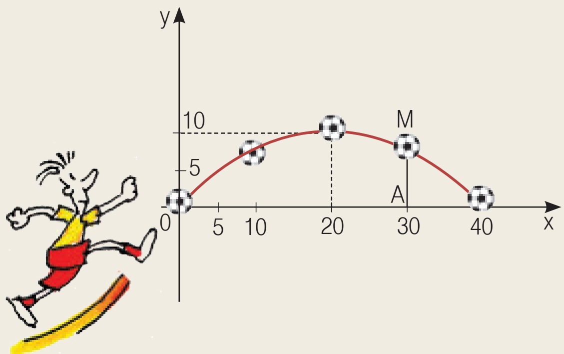
α) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το σημείο Α(1, 6) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης;

β) Αν $\lambda = 2$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4 \leq x \leq 1$ και να βρείτε τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

6 Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = x^2 - 6x + 5$. Αν Α, Β, Γ είναι τα κοινά της σημεία με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7 Να βρείτε τους αριθμούς β και γ, ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + \beta x + \gamma$ για $x = 4$ να παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = -7$.

8 Ένας ποδοσφαιριστής έδιωξε την μπάλα από το σημείο Ο, η οποία αφού διέγραψε μια παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος 10 m έφτασε σε απόσταση 40 m.



α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$, με $0 \leq x \leq 40$.

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το έδαφος, όταν αυτή βρισκόταν στο σημείο Μ, που έχει τετμημένη 30 και σε ποιο άλλο σημείο της τροχιάς η μπάλα απείχε από το έδαφος την ίδια απόσταση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τις δύο παραβολές, που οι συντεταγμένες των σημείων τους επαληθεύουν την εξίσωση $9y^2 = 4x^4$.

2 Να βρείτε την τιμή του α, ώστε οι εξισώσεις $y = (2\alpha - 1)x^2$ και $y = (1 - 4\alpha^2)x^2$ να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα x′x.

3 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -x^2$, $y = 2x - 3$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

4 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, –3) και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Α(0, 5).

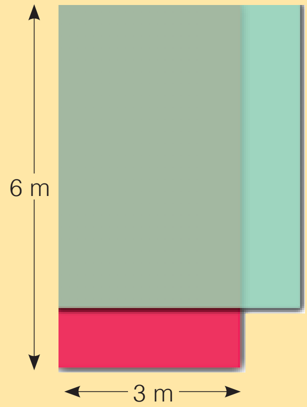
5 Το άθροισμα των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) είναι 10 cm.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν y του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του ΑΒ = x είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$, με $0 < x < 10$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

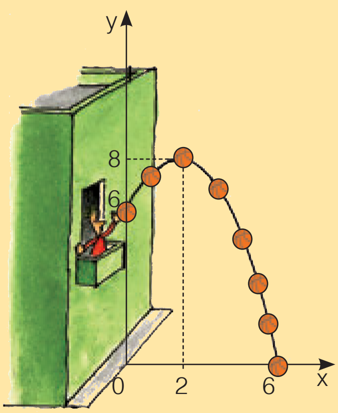
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

6 Ένα κατάστημα σχήματος ορθογωνίου αρχικά σχεδιάστηκε, να κατασκευαστεί με μήκος 6 m και πλάτος 3 m. Η αρχιτέκτων όμως, προκειμένου να μεγαλώσει τη βιτρίνα του καταστήματος σκέφτηκε να μειώσει το μήκος του και ταυτόχρονα να αυξήσει το πλάτος του κατά τα ίδια μέτρα.
Ποια πρέπει να είναι η μεταβολή κάθε διάστασης, ώστε το εμβαδόν να γίνει μέγιστο;



7 Σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm παίρνουμε σημείο Μ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΜΓΔ και ΒΜΕΖ. Πού πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να γίνει ελάχιστο;

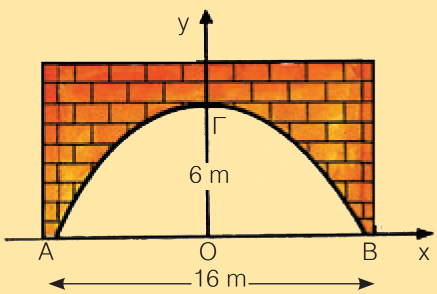
8 Από το μπαλκόνι ενός σπιτιού και από ύψος 6 m από το έδαφος πετάμε μία μπάλα, η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος από το έδαφος 8 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η μπάλα προσκρούσει στο έδαφος σ' ένα σημείο που απέχει 6 m από το πεζοδρόμιο, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της τροχιάς της μπάλας στο σύστημα αξόνων που φαίνεται στο σχήμα είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$, με $0 \leq x \leq 6$.

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το σημείο ρίψης όταν κατά την κάθοδό της βρισκόταν και πάλι σε ύψος 6 m από το έδαφος;

9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάθετη τομή μιας σήραγγας που κατασκευάστηκε σε σχήμα παραβολής με μέγιστο πλάτος ΑΒ = 16 m και μέγιστο ύψος ΟΓ = 6 m.

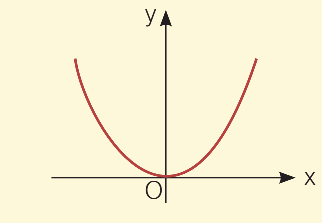
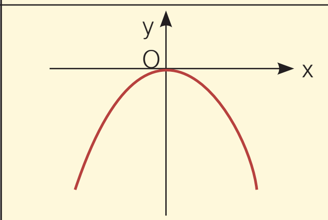


α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής στο σύστημα αξόνων του σχήματος είναι $y = -\frac{3}{32}x^2 + 6$, με $-8 \leq x \leq 8$.

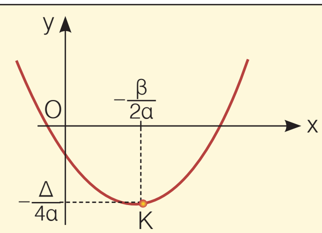
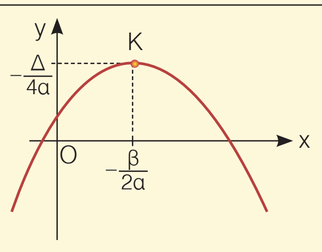
β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού που μπορεί να διασχίσει τη σήραγγα, όταν το πλάτος του φορτηγού είναι 3,2 m και ο δρόμος είναι μιας κατεύθυνσης.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

α) Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$

Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή
$(0, 0)$	$x = 0$	$\alpha > 0$		Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$
		$\alpha < 0$		Η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$

β) Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

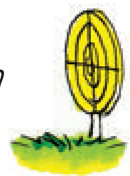
Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή
$\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$	$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha > 0$		Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
		$\alpha < 0$		Η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1 Σύνολα

- ✔ *Μαθαίνω την έννοια του συνόλου και πώς παριστάνεται ένα σύνολο.*
- ✔ *Κατανοώ πότε δύο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός συνόλου.*
- ✔ *Μαθαίνω να βρίσκω την ένωση ή την τομή δύο συνόλων καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στην οθόνη ενός υπολογιστή γράψαμε τις λέξεις **ελευθερία – ευτυχία**.

1. Ποια γράμματα πληκτρολογήσαμε για κάθε λέξη;
2. Ποια είναι τα φωνήεντα και ποια τα σύμφωνα κάθε λέξης;
3. Ποια είναι τα κοινά φωνήεντα των δύο λέξεων;
4. Ποια είναι τα κοινά σύμφωνα των δύο λέξεων;

Η έννοια του συνόλου

Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενό τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.τ.λ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κ.τ.λ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κ.τ.λ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, **σύνολα**.
Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται **στοιχείο** του συνόλου.

Παράσταση συνόλου

Κάθε σύνολο συμβολίζεται μ' ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου (Α, Β, Γ, ...) και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

α) **Με αναγραφή των στοιχείων του**
Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Π.χ. το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ελευθερία είναι $Α = \{ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α\}$, το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2004 είναι $Β = \{2, 0, 4\}$, κ.τ.λ.
Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια,

χρησιμοποιούμε αποσιωπητικά. Π.χ. το σύνολο των μικρών γραμμάτων της Ελληνικής αλφαβήτου είναι Α = {α, β, γ, ..., χ, ψ, ω}, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.

Στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε ότι το στοιχείο β **ανήκει** στο σύνολο Α, ενώ **δεν ανήκει** στο σύνολο ℕ. Αυτό συμβολίζεται αντίστοιχα ως εξής:

$\beta \in A$ και $\beta \notin \mathbb{N}$.

β) **Με περιγραφή των στοιχείων του**

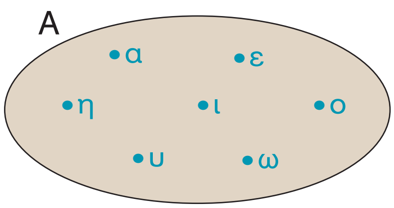
Το σύνολο Α = {0, 2, 4, 6, 8, ...}, που έχει ως στοιχεία τους άρτιους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να το παραστήσουμε και ως εξής:

Α = {άρτιοι φυσικοί αριθμοί} ή Α = {x∈ℕ, όπου x άρτιος αριθμός}

Στην προηγούμενη περίπτωση λέμε ότι παριστάνουμε το σύνολο με περιγραφή των στοιχείων του.

γ) **Με διάγραμμα Venn**

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε εποπτικά και με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής. Π.χ. το σύνολο των φωνηέντων της Ελληνικής αλφαβήτου φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται διάγραμμα Venn.



Ίσα σύνολα

Αν πάρουμε τα σύνολα Α = {α, ε, ι, υ} και Β = {φωνήεντα της λέξης ευτυχία}, παρατηρούμε ότι το σύνολο Β με αναγραφή των στοιχείων του γράφεται Β = {ε, υ, ι, α} και έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το σύνολο Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα σύνολα Α, Β είναι ίσα και γράφουμε Α = Β.

Γενικά

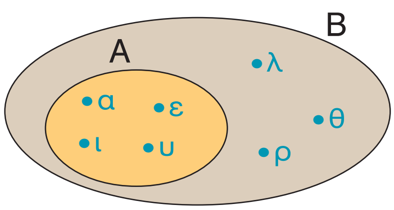
Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Υποσύνολο συνόλου

Αν πάρουμε τα σύνολα

Α = {α, ε, ι, υ} και Β = {ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α},

παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β και το συμβολίζουμε **Α ⊆ Β**.

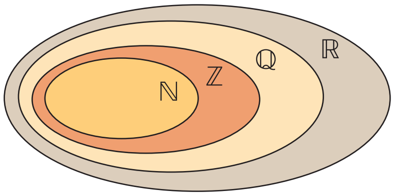


Γενικά

Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Άμεσες συνέπειες του προηγούμενου ορισμού είναι και οι προτάσεις:
- Για κάθε σύνολο Α ισχύει $A \subseteq A$.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

Οι γνωστοί μας αριθμοί και τα αντίστοιχα σύνολά τους συμβολίζονται ως εξής:



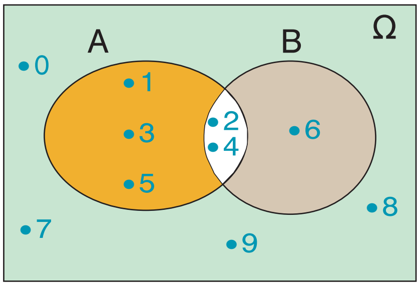
Είναι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\alpha}{\beta}, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ ακέραιοι, με } \beta \neq 0\right\}$

Πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R} = \{\text{ρητοί ή άρρητοι αριθμοί}\}$



Τα σύνολα με τα οποία ασχολούμαστε κάθε φορά είναι συνήθως υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου, που ονομάζεται **βασικό σύνολο**. Αυτό παριστάνεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου και συμβολίζεται με Ω.
Π.χ. με βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορα υποσύνολά του, όπως $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ κ.τ.λ.

Κενό σύνολο

Το σύνολο $A = \{$ημέρα της εβδομάδας που αρχίζει από Μ$\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο, αφού δεν υπάρχει ημέρα της εβδομάδας που να αρχίζει από Μ. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Α ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται $\varnothing$.

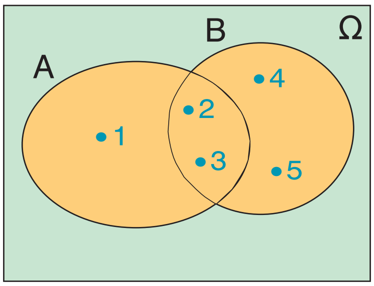
Γενικά

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Πράξεις με σύνολα

α) Ένωση συνόλων



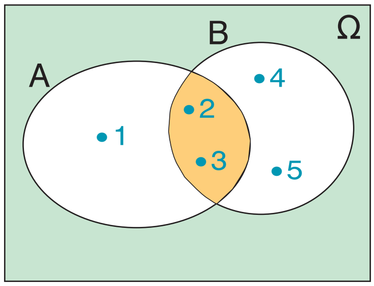
Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά και μη κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **ένωση** των συνόλων Α και Β και συμβολίζεται $A \cup B$.
Άρα $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων Α, Β, αν ανήκει **στο σύνολο Α ή στο σύνολο Β**, δηλαδή αν ανήκει σ' ένα τουλάχιστον από αυτά.

β) Τομή συνόλων

Αν πάρουμε τα σύνολα Α = {1, 2, 3}, Β = {2, 3, 4, 5}, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **τομή** των συνόλων Α, Β και συμβολίζεται $A \cap B$. Άρα

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

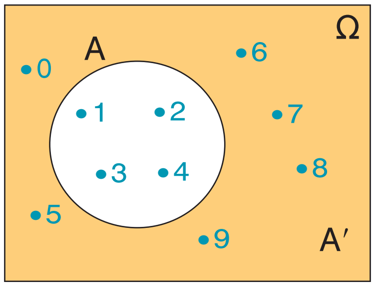


Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο συνόλων Α, Β, αν ανήκει **και στο σύνολο Α και στο σύνολο Β**.

γ) Συμπλήρωμα συνόλου

Αν πάρουμε το σύνολο Α = {1, 2, 3, 4} και ως βασικό σύνολο Ω θεωρήσουμε το σύνολο Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **συμπλήρωμα** του Α ως προς το Ω και συμβολίζεται A'. Άρα

$$A' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$



Όπως φαίνεται και από το προηγούμενο διάγραμμα Venn, ισχύουν:

$$A \cup A' = \Omega \quad \text{και} \quad A \cap A' = \varnothing$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:**
$A = \{x \in \mathbb{Z}$, όπου $-3 \leq x < 2\}$, Β = {περιττοί φυσικοί αριθμοί} και
$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^3 = x\}$.

Λύση

Τα στοιχεία του συνόλου Α είναι οι ακέραιοι αριθμοί x, για τους οποίους ισχύει $-3 \leq x < 2$, οπότε $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου Β είναι οι περιττοί φυσικοί αριθμοί, οπότε $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου Γ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^3 = x$ ή $x^3 - x = 0$ ή $x(x^2 - 1) = 0$ ή $x(x - 1)(x + 1) = 0$.

Άρα $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 0$, οπότε $\Gamma = \{-1, 0, 1\}$.

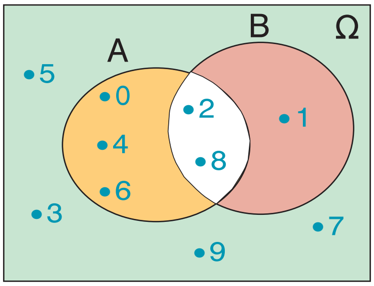
2 **Με βασικό σύνολο Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} θεωρούμε τα σύνολα**
$A = \{x \in \Omega$, όπου x άρτιος$\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου x ψηφίο του αριθμού 1821$\}$.

α) Να παρασταθούν τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να γίνει το διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιοριστούν τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' και B'.

γ) Να επαληθευτεί ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Λύση



α) Τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:
$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ και $B = \{1, 8, 2\}$.
Το διάγραμμα Venn φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β) Έχουμε ότι:
$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 8\}$,
$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ και $B' = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

γ) Επειδή $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, έχουμε ότι $(A \cup B)' = \{3, 5, 7, 9\}$. Επίσης $A' \cap B' = \{3, 5, 7, 9\}$, οπότε $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
Επειδή $A \cap B = \{2, 8\}$, έχουμε ότι $(A \cap B)' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Επίσης $A' \cup B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, οπότε $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 2, 1\}$ είναι ίσα. ☐

β) Τα σύνολα $A = \{6, 7\}$ και $B = \{67\}$ είναι ίσα. ☐

γ) Αν $A = \{\alpha, \beta\}$ και $B = \{\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, τότε $A \subseteq B$. ☐

δ) Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $0x = 2\}$ είναι το κενό σύνολο. ☐

ε) $A \cup A' = \Omega$. ☐

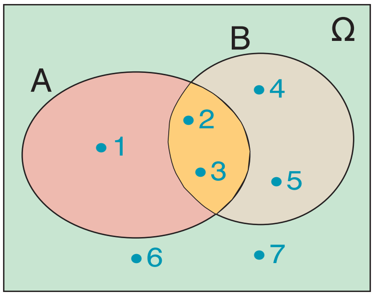
στ) $A \cap A' = \varnothing$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, το ίσο του σύνολο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^2 = 4\}$	1. $\{0, 1, 2\}$
β. $\{x \in \mathbb{N}$, όπου $x^2 = 4\}$	2. $\varnothing$
γ. $\{x \in \mathbb{Z}$, όπου $3x = 4\}$	3. $\{-2, 2\}$
δ. $\{x \in \mathbb{N}$, όπου $x \leq 2\}$	4. $\{2\}$
	5. $\{1, 2\}$

α	β	γ	δ

3 Από το διάγραμμα Venn του διπλανού σχήματος να προσδιορίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:



Ω = ...

A = ... B = ...

A' = ... B' = ...

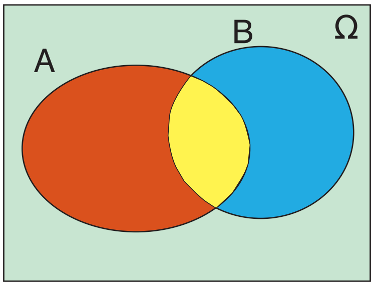
$A \cup B$ = ... $A \cap B$ = ...

4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, το συμπλήρωμά του ως προς $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\{\beta\}$	1. $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$
β. $\{\alpha, \beta, \varepsilon\}$	2. $\varnothing$
γ. $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$	3. $\{\beta, \gamma, \varepsilon\}$
δ. {γράμματα της λέξης δάδα}	4. $\{\alpha, \delta\}$
ε. $\varnothing$	5. $\{\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon\}$
	6. $\{\gamma, \delta\}$

α	β	γ	δ	ε

5 Με βάση το διπλανό διάγραμμα Venn να καθορίσετε το χρώμα ή τα χρώματα των παρακάτω συνόλων:



α) $A \cup B$: ....

β) $A \cap B$: ....

γ) A': ....

δ) B': ....

ε) $(A \cup B)'$: ....

στ) $(A \cap B)'$: ....

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^2 = 25\}$ β) $B = \{x \in \mathbb{N}$, όπου $x^2 = 25\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}$, όπου $-2 < x \leq 4\}$ δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N}$, όπου x διαιρέτης του $12\}$

2 Ποιο από τα σύνολα $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{-1, 0\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3\}$, $\Delta = \{(1, 2), (4, 5)\}$ είναι:

α) Υποσύνολο του συνόλου $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

β) Ίσο με το σύνολο Λ={άρτιοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 6};

γ) Ίσο με το σύνολο $M = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^2 + x = 0\}$;

3 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$$A = \{\text{ψηφία του αριθμού 2123}\}$$

και να βρείτε όλα τα υποσύνολά του.

4 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$$A = \{(x, y), \text{ όπου } x, y \in \mathbb{N} \text{ και } x + y = 4\}$$

5 Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ β) $B = \{ι, σ, τ, ο, ρ, α\}$ γ) $Γ = \{0, 2\}$

6 Με βασικό σύνολο $Ω = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 4, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn και να προσδιορίσετε τα σύνολα:

α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) A' δ) B'

7 Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{$γράμματα της λέξης άλγεβρα$\}$,

$B = \{$γράμματα της λέξης φρεγάτα$\}$ και

$Γ = \{$γράμματα της λέξης ελάφι$\}$.

α) Να γράψετε τα σύνολα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $B \cup Γ$, $A \cap B$, $A \cap Γ$.

γ) Να επαληθεύσετε ότι $A \cap (B \cup Γ) = (A \cap B) \cup (A \cap Γ)$.

8 Θεωρούμε τα σύνολα:

$A = \{$θεατές της τελετής έναρξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004$\}$.

$B = \{$θεατές της τελετής λήξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004$\}$.

Σε ποιο σύνολο ανήκει εκείνος που:

α) Παρακολούθησε και τις δύο τελετές.

β) Παρακολούθησε μία τουλάχιστον τελετή.

γ) Παρακολούθησε την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης.

δ) Δεν παρακολούθησε την τελετή έναρξης αλλά ούτε και την τελετή λήξης.

9 Δίνονται τα σύνολα $A = \{$αθλητές στίβου$\}$ και $B = \{$φοιτητές Πανεπιστημίου$\}$

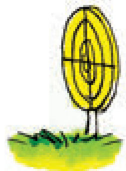
Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει στο σύνολο:

α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) A' δ) B'

ε) $A \cap B'$ στ) $A' \cap B$ ζ) $A' \cap B'$

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

- ✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται πείραμα τύχης, ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του και πώς αυτός προσδιορίζεται.*
- ✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, πότε πραγματοποιείται και πότε είναι βέβαιο ή αδύνατο.*
- ✔ *Γνωρίζω πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και ποια ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα;

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια θα είναι η ένδειξή του;

β) Μετράμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει. Ποια θα είναι η ένδειξη του θερμομέτρου;

γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Ποια θα είναι η πάνω όψη του;

δ) Επιλέγουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρούμε με το 2. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης;

ε) Επιλέγουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2. Ποιος θα είναι ο αριθμός αυτός;

στ) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποιο θα είναι το ζεύγος των ενδείξεων;

2. Σε καθένα από τα πειράματα που δεν μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμά του, γνωρίζετε τα δυνατά του αποτελέσματα; Ποια είναι αυτά;

Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος

Σε πολλές περιπτώσεις, όταν κάνουμε ένα πείραμα, μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του. Για παράδειγμα:

– Αν μετρήσουμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει, είμαστε βέβαιοι ότι η ένδειξη του θερμομέτρου θα είναι 100° Κελσίου.

– Αν επιλέξουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρέσουμε με το 2, είμαστε επίσης βέβαιοι ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι μηδέν.

Υπάρχουν όμως και πειράματα, τα οποία όσες φορές και αν τα επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους με απόλυτη βεβαιότητα. Ένα τέτοιο πείραμα λέγεται **πείραμα τύχης**. Για παράδειγμα,

– Αν ρίξουμε ένα ζάρι δεν είμαστε σε θέση κάθε φορά να προβλέψουμε την ένδειξή του, αν και γνωρίζουμε ότι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του είναι το $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με Ω και ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος.

Γενικά

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός νομίσματος τα δυνατά αποτελέσματα είναι κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ), οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι Ω = {Κ, Γ}.

Το πλήθος των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται με **Ν(Ω)**.

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού είναι Ν(Ω) = 6, ενώ στη ρίψη ενός νομίσματος είναι Ν(Ω) = 2.

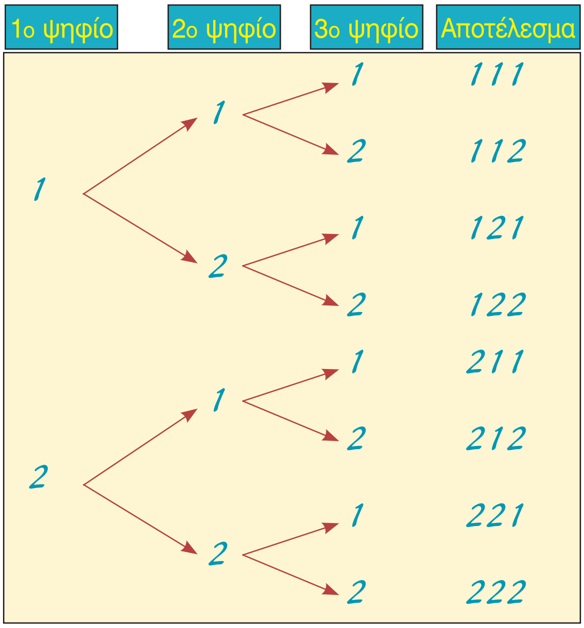
Εύρεση δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης

Σε πολλά πειράματα τύχης, όπως στη ρίψη ενός ζαριού ή ενός νομίσματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εύκολα και άμεσα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα τύχης στα οποία προσδιορίζουμε ευκολότερα το δειγματικό τους χώρο, αν εφαρμόσουμε ειδικές τεχνικές ή μεθόδους.

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2, για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το πρώτο ψηφίο και σε κάθε περίπτωση γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ.



Με το διπλανό διάγραμμα, που ονομάζεται **δεντροδιάγραμμα**, βρίσκουμε ευκολότερα όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 1 ή 2, δηλαδή είναι:

Ω = {111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222}, και περιέχει 8 στοιχεία (Ν(Ω) = 8).

Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές και σημειώσουμε κάθε φορά την ένδειξή του, τότε για να προσδιορίσουμε ευκολότερα το δειγματικό χώρο, χρησιμοποιούμε το διπλανό πίνακα. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη του πίνακα, δηλαδή είναι:

Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 5), (6,6)}, και περιέχει 36 στοιχεία (Ν(Ω) = 36).

2η ρίψη / 1η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ενδεχόμενα

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Το σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, που είναι υποσύνολο του Ω, ονομάζεται **ενδεχόμενο** του πειράματος και συγκεκριμένα είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
Ομοίως, το $B = \{1, 2, 3\}$ είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Γενικά

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Αν ρίξουμε ένα ζάρι και φέρουμε τον αριθμό 6, που ανήκει στο σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο Α **πραγματοποιείται**. Το ενδεχόμενο όμως Α πραγματοποιείται ακόμη και αν κατά τη συγκεκριμένη εκτέλεση του πειράματος εκτός από 6 φέρουμε 2 ή 4. Γι' αυτό τα στοιχεία 2, 4, 6 του ενδεχομένου Α ονομάζονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
Για ένα ενδεχόμενο Α, το πλήθος των ευνοϊκών του περιπτώσεων, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του, συμβολίζεται με **N(A)**. Για το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ είναι $N(A) = 3$.

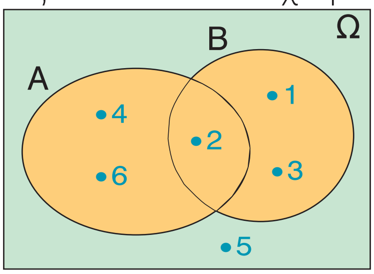
Βέβαιο – Αδύνατο ενδεχόμενο

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε το ενδεχόμενο να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 7 είναι το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
Το ενδεχόμενο όμως να φέρουμε ένδειξη μεγαλύτερη του 6 είναι $\varnothing$. Το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

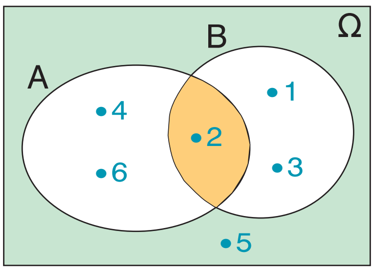
Πράξεις με ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, το ενδεχόμενο είναι σύνολο, οπότε παριστάνεται και με διάγραμμα Venn. Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων γίνονται όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Έτσι έχουμε:

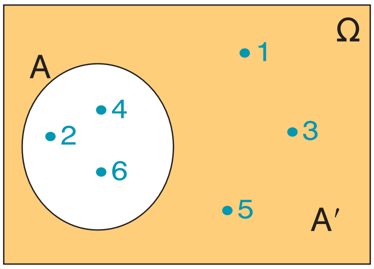
- **Ένωση** δύο ενδεχομένων Α, Β ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cup B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.
  Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε
  $$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



- **Τομή** δύο ενδεχομένων Α, Β ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cap B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β.
  Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε
  $$A \cap B = \{2\}.$$



- **Συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται το ενδεχόμενο Α′ που πραγματοποιείται, όταν **δεν πραγματοποιείται το Α**.
  Π.χ. στο πείραμα τύχης «ρίψη ενός ζαριού» αν
  $A = \{2, 4, 6\}$, τότε $A' = \{1, 3, 5\}$.

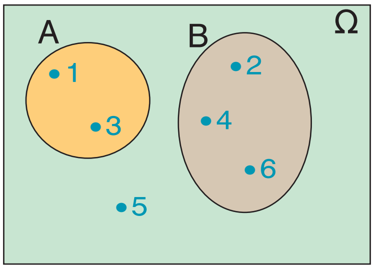


Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Σ' ένα πείραμα τύχης δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι δυνατόν να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή να ισχύει

$$A \cap B = \varnothing.$$

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα $A = \{1, 3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, οπότε σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα**.



Γενικά

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

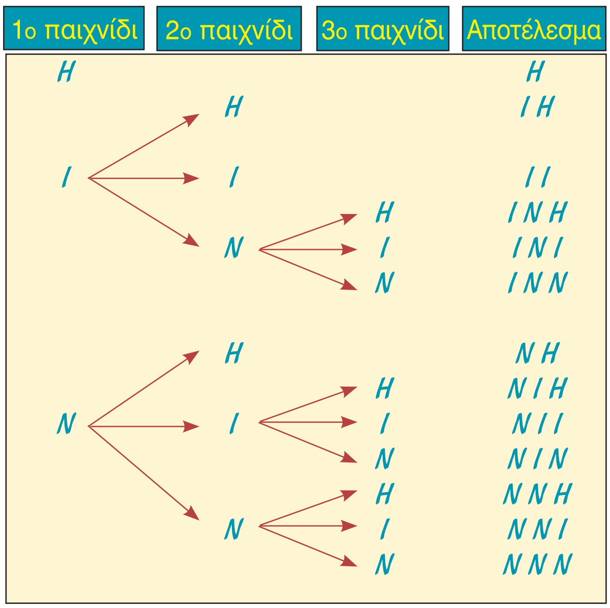
1 Σ' ένα τουρνουά σκακιού ένας παίκτης αποκλείεται από τη συνέχεια των αγώνων, αν ηττηθεί μία φορά ή φέρει δύο ισοπαλίες. Αν ένας παίκτης έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, ποια είναι τα αποτελέσματα που θα μπορούσε να έχει φέρει μέχρι εκείνη τη στιγμή;

Λύση

Το πιθανό αποτέλεσμα ενός σκακιστή για κάθε παιχνίδι είναι ήττα (Η), ισοπαλία (Ι) ή νίκη (Ν). Τα δυνατά αποτελέσματα που έφερε ένας παίκτης που έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, προκύπτουν ευκολότερα από το διπλανό διάγραμμα.

Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων είναι:

Ω = {Η, ΙΗ, ΙΙ, ΙΝΗ, ΙΝΙ, ΙΝΝ, ΝΗ, ΝΙΗ, ΝΙΙ, ΝΙΝ, ΝΝΗ, ΝΝΙ, ΝΝΝ}



2 Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 4. Επιλέγουμε στην τύχη μια μπάλα, καταγράφουμε τον αριθμό της, την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

α) Να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

β) Να προσδιοριστούν τα ενδεχόμενα.

Α. Οι δύο μπάλες έχουν τον ίδιο αριθμό.

Β. Ο αριθμός της πρώτης μπάλας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό της δεύτερης μπάλας.

Γ. Ο αριθμός μιας μόνο μπάλας είναι 3.

Λύση

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα 16 στοιχεία του διπλανού πίνακα, οπότε είναι:

$\Omega = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \ldots,\ (4,\ 3)\ (4,\ 4)\}$.

2η μπάλα / 1η μπάλα	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

β) Το ενδεχόμενο Α έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία ο πρώτος αριθμός είναι ίδιος με τον δεύτερο.

Άρα: $A = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4)\}$.

Το ενδεχόμενο Β έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία ο πρώτος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο.

Άρα: $B = \{(2,\ 1)\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)\ (4,\ 3)\}$.

Το ενδεχόμενο Γ έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία μόνο ένας από τους δύο αριθμούς είναι το 3.

Άρα: $\Gamma = \{(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (4,\ 3)\}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης:

α) Ρίχνω ένα ζάρι και καταγράφω την πάνω όψη του.

β) Αφήνω ένα βαρύ σώμα να πέσει και καταγράφω τη φορά της κίνησής του.

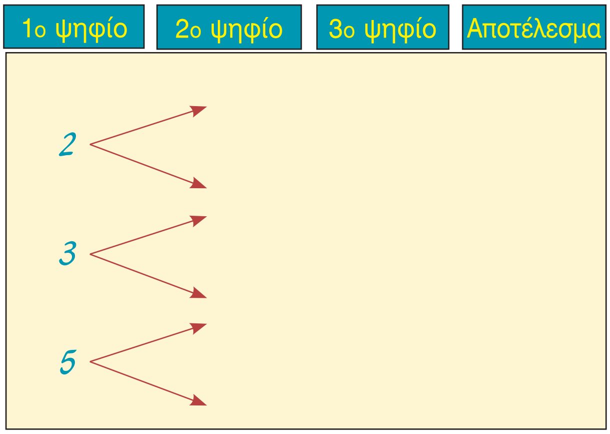
γ) Βγάζω ένα φύλλο από μία τράπουλα και σημειώνω ποιο είναι.

δ) Ανοίγω ένα βιβλίο και σημειώνω τον αριθμό που αντιστοιχεί στη δεξιά σελίδα του.

2 Επιλέγουμε διαδοχικά δύο μαθητές Γυμνασίου και καταγράφουμε την τάξη όπου φοιτούν. Ένας μαθητής για να βρει το δειγματικό χώρο έφτιαξε το διπλανό πίνακα. Μήπως έκανε κάποιο λάθος;

2ος μαθητής / 1ος μαθητής	Α	Β	Γ
Α	ΑΑ	ΑΒ	ΑΓ
Β	ΑΒ	ΒΒ	ΒΓ
Γ	ΓΑ	ΓΒ	ΓΓ

3 Το δεντροδιάγραμμα με το οποίο ένας μαθητής ήθελε να προσδιορίσει όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 2, 3, 5, που το καθένα χρησιμοποιείται μία μόνο φορά, έμεινε ημιτελές. Μπορείτε να το συμπληρώσετε;



4 Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ενδεχόμενα του πειράματος;

α) $A = \{4, 8, 10\}$ **β)** $B = \{0, 2, 3, 6\}$ **γ)** $\Gamma = \{4, 7, 8, 10\}$ **δ)** $\Delta = \{6\}$

5 Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα πραγματοποιούνται:

α) $A = \{2, 4, 6\}$ **β)** $B = \{1, 3, 5\}$ **γ)** $\Gamma = \{4, 5, 6\}$ **δ)** $\Delta = \{1, 2, 3\}$

6 ‘Ενα κουτί περιέχει κόκκινες, κίτρινες και μαύρες μπίλιες. Αν επιλέξω μια μπίλια ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι αδύνατο;

α) Η μπίλια είναι κόκκινη. **β)** Η μπίλια είναι κίτρινη.
γ) Η μπίλια είναι πράσινη. **δ)** Η μπίλια δεν είναι μαύρη.

7 Επιλέγω στην τύχη ένα μήνα του έτους. Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι βέβαιο;

α) Ο μήνας έχει 31 ημέρες.
β) Ο μήνας είναι θερινός.
γ) Το όνομα του μήνα αρχίζει από Μ.
δ) Ο μήνας έχει περισσότερες από 27 ημέρες.

8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ενδεχόμενο της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $A \cup B$ β. $A \cap B$ γ. A'	1. Δεν πραγματοποιείται το Α. 2. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β. 3. Δεν πραγματοποιείται το Β. 4. Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β.

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Το κυλικείο ενός σχολείου διαθέτει για φαγητό σάντουϊτς (σ), τυρόπιτα (τ), γλυκό (γ) και για αναψυκτικό πορτοκαλάδα (π), λεμονάδα (λ).
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή που αγόρασε ένα είδος φαγητού και ένα είδος αναψυκτικού και καταγράφουμε την προτίμησή του. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

2 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

3 Σ' έναν προκριματικό όμιλο των Πανευρωπαϊκών αγώνων Μπάσκετ κληρώθηκαν να παίξουν τέσσερις ομάδες Α, Β, Γ, Δ δίνοντας μεταξύ τους από δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Με τη βοήθεια ενός πίνακα να βρείτε όλα τα ζεύγη των αντιπάλων.

4 Σ' ένα κουτί υπάρχουν τρεις μπάλες, μία κόκκινη, μία άσπρη και μία μπλε που διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.
α) Με πόσες το πολύ κινήσεις θα πάρουμε την κόκκινη μπάλα;
β) Με πόσες κινήσεις μπορούμε να αναγνωρίσουμε το χρώμα κάθε μπάλας;
γ) Θεωρείστε την πρώτη κίνηση ως ξεχωριστό πείραμα. Ποιος είναι ο δειγματικός του χώρος;

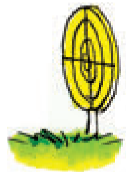
5 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι συμμετέχουν 4 άντρες (Δημήτρης, Κώστας, Μιχάλης, Παναγιώτης) και 3 γυναίκες (Ειρήνη, Ζωή, Σταματίνα). Επιλέγουμε στην τύχη έναν άντρα και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφουμε τα ονόματα των αντιπάλων. Να προσδιορίσετε:
α) Το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Τα ενδεχόμενα Α: διαγωνίστηκαν η Ειρήνη ή η Ζωή.
Β: Δε διαγωνίστηκε ο Μιχάλης.

6 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα ενδεχόμενα
$A = \{x \in \Omega$, όπου x διαιρέτης του $9\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου $x < 6\}$
και να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν:
α) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.
β) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β.
γ) Δεν πραγματοποιείται το Β.

7 Οι δράστες μια κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.
α) Ποιο είναι το σύνολο των πιθανών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου;
β) Να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα:
Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

5.3 Έννοια της πιθανότητας

✔ *Μαθαίνω τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.*
✔ *Γνωρίζω τους βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Επιλέγουμε στην τύχη ένα αυτοκίνητο του οποίου ο αριθμός κυκλοφορίας είναι ζυγός και καταγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του.

– Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι είναι πιθανότερο να είναι μικρότερο του 6 παρά να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν άρτιο μονοψήφιο φυσικό αριθμό, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Αν κάθε αριθμός επιλέγεται στην τύχη και δεν έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, τότε όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής και λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**.

Στο εξής, όταν λέμε ότι η επιλογή γίνεται στην τύχη θα εννοείται ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε από τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω αριθμό μικρότερο του 6, είναι το $A = \{0, 2, 4\}$ και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 0 ή 2 ή 4, ενώ το ενδεχόμενο να επιλέξουμε αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6 είναι $B = \{6, 8\}$ και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 6 ή 8. Βλέπουμε λοιπόν ότι από τους 5 αριθμούς του δειγματικού χώρου Ω, 3 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α και 2 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α είναι $\frac{3}{5}$ ή 60% και συμβολίζουμε $P(A) = \frac{3}{5}$ ή 60%, ενώ η πιθανότητα της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Β είναι $P(B) = \frac{2}{5}$ ή 40%. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο αριθμητής του κλάσματος είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιτώσεων για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου, αφού $N(A) = 3$ και $N(B) = 2$, ενώ ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος, αφού $N(\Omega) = 5$.

Γενικά

Σ' ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Για παράδειγμα, από ένα κουτί που περιέχει 25 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 11 είναι πράσινες και οι 14 είναι κόκκινες, αν βγάλουμε στην τύχη μία, τότε οι πιθανότητες των ενδεχομένων Π: Βγάζω πράσινη μπάλα και Κ: Βγάζω κόκκινη μπάλα είναι:

$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{11}{25} \text{ ή } 44\% \quad \text{και} \quad P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{14}{25} \text{ ή } 56\%.$$

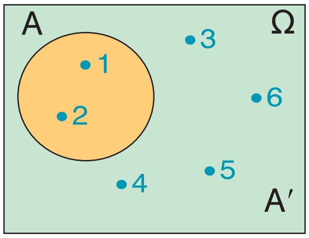
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ακόμη ότι:

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \quad \text{και} \quad P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$$

Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου Α είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το 0 και μικρότερος ή ίσος από το 1, αφού το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$$

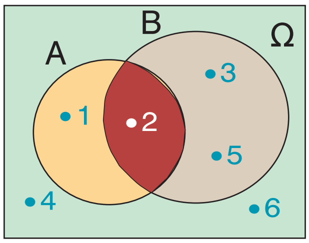
Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων



Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου τα 6 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.
Έτσι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{1, 2\}$ είναι
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Το συμπληρωματικό του Α είναι το
$A' = \{3, 4, 5, 6\}$ και η πιθανότητά του είναι $P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Παρατηρούμε ότι $P(A) + P(A') = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Γενικά

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α′ ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.



Αν τώρα πάρουμε τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ και προσδιορίσουμε την ένωση και την τομή τους, τότε έχουμε:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $A \cap B = \{2\}$.

Άρα $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

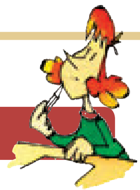
Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ και $P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$,

δηλαδή ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Γενικά

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Τις προηγούμενες ιδιότητες χρησιμοποιούμε συχνά για να υπολογίσουμε πιθανότητες και γι' αυτό λέμε ότι αποτελούν **βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Επιλέγουμε στην τύχη ένα μήνα του έτους. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: Ο μήνας αρχίζει από Μ.

Β: Ο μήνας είναι θερινός.

Γ: Ο μήνας έχει 31 ημέρες.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει 12 στοιχεία, οπότε το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι $N(\Omega) = 12$.

Το ενδεχόμενο Α είναι $A = \{$Μάρτιος, Μάιος$\}$, οπότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την πραγματοποίησή του είναι $N(A) = 2$.

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ ή περίπου 16,7%.

Το ενδεχόμενο Β είναι $B = \{$Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος$\}$, οπότε έχουμε $N(B) = 3$.

Άρα $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ ή 25%.

Το ενδεχόμενο Γ είναι

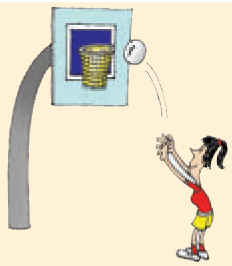
$\Gamma = \{$Ιανουάριος, Μάρτιος, Μάιος, Ιούλιος, Αύγουστος, Οκτώβριος, Δεκέμβριος$\}$,

οπότε $N(\Gamma) = 7$. Άρα $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{7}{12}$ ή περίπου 58,3%.

2 Μια ομάδα δίνει δύο αγώνες. Αν η πιθανότητα να κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 45%, η πιθανότητα να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα είναι 60% και η πιθανότητα να κερδίσει και τους δύο αγώνες είναι 27%, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα.

β) Να κερδίσει έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες.



Λύση

Ονομάζουμε Α το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα τον πρώτο αγώνα και Β το ενδεχόμενο να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα. Το ενδεχόμενο να κερδίσει και τους δύο αγώνες είναι $A \cap B$, οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{45}{100}, \quad P(B) = \frac{60}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{27}{100}.$$

α) Το ενδεχόμενο να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι το συμπλήρωμα του Α, δηλαδή το A'. Γνωρίζουμε όμως ότι $P(A) + P(A') = 1$, οπότε έχουμε:

$$\frac{45}{100} + P(A') = 1 \quad \text{ή} \quad P(A') = 1 - \frac{45}{100} \quad \text{ή} \quad P(A') = \frac{55}{100}.$$

Άρα η πιθανότητα να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 55%.

β) Το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β, οπότε είναι το $A \cup B$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, οπότε έχουμε:

$$P(A \cup B) + \frac{27}{100} = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} - \frac{27}{100} = \frac{78}{100}.$$

Άρα η πιθανότητα να κερδίσει έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες είναι 78%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα;

α) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 4 είναι πράσινες, 4 κόκκινες και 4 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

β) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 5 είναι πράσινες, 5 κόκκινες και 2 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

γ) Από τη λέξη «χαρά» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

δ) Από τη λέξη «χώρα» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

2 Αν επιλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της αλφαβήτου, τότε η πιθανότητα να είναι φωνήεν είναι:

α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{24}$ γ) $\frac{7}{24}$ δ) $\frac{17}{24}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α μπορεί να είναι $P(A) = 1{,}02$.

β) Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι 80%, τότε γράφουμε $P(A) = 80$.

γ) Το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1 και το αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0.

δ) Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι 32%, τότε η πιθανότητα να μη βρέξει είναι 68%.

4 Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο Α είναι $\frac{3}{5}$, τότε η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το Α είναι:

α) $\frac{5}{3}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5 Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{4}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$.

Ένας μαθητής υπολόγισε ότι $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$. Είναι σωστή η απάντησή του; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Επιλέγουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως και το 13. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι:
α) άρτιος β) πολλαπλάσιο του 4;

2 Σε μια κλήρωση υπάρχουν 1200 λαχνοί από τους οποίους κερδίζει ο ένας. Πόσο % πιθανότητα έχει να κερδίσει κάποιος που αγόρασε 6 λαχνούς;

3 Σε μια τράπουλα 52 φύλλων υπάρχουν 12 φιγούρες. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να μην είναι φιγούρα;

4 Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 8 είναι γαλάζιες, οι 7 είναι κίτρινες και οι 5 είναι άσπρες. Βγάζουμε στην τύχη μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Η μπάλα να είναι κίτρινη.
Β: Η μπάλα να μην είναι άσπρη.
Γ: Η μπάλα να είναι γαλάζια ή άσπρη.

5 Στον διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία των 25 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό:
α) 15
β) μικρότερο του 14
γ) μεγαλύτερο ή ίσο του 16
δ) 19 ή 20

Βαθμός	Μαθητές
9	1
10	2
12	3
13	2
14	4
15	3
16	2
17	2
18	3
19	2
20	1

6 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη;

7 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Φέρνουμε και τις δύο φορές 6.
Β: Φέρνουμε την ίδια ένδειξη και τις δύο φορές.
Γ: Φέρνουμε μία τουλάχιστον φορά 5.

8 Από τους 25 μαθητές μιας τάξης μόνο οι 12 έλυσαν μια άσκηση. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει λύσει την άσκηση;

Αν ο πρώτος μαθητής που επιλέξαμε δεν έλυσε την άσκηση και από τους υπόλοιπους επιλέξουμε στην τύχη ένα δεύτερο μαθητή, τότε ποια είναι η πιθανότητα να έχει λύσει την άσκηση;

9 Η πιθανότητα να μην πάει κάποιος στο θέατρο είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να πάει. Ποια είναι τελικά η πιθανότητα να πάει στο θέατρο;

10 Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

11 Αν $P(A) = \frac{5}{14}$, $P(B') = \frac{11}{14}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

12 Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 42%, να γνωρίζει Γαλλικά είναι 21% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 15%. Ποια είναι η πιθανότητα να γνωρίζει μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες;

13 Ο καθηγητής των Μαθηματικών διαπίστωσε ότι στο μάθημα της Γεωμετρίας, από τους 24 μαθητές ενός τμήματος, 18 είχαν κανόνα, 14 είχαν διαβήτη και 20 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κανόνα και διαβήτη;

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά – Ο Μέντελ και οι νόμοι της κληρονομικότητας

Η μεταβίβαση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών από γονείς σε απογόνους, μελετήθηκε στα φυτά από τον Γ. Μέντελ.

Αν διασταυρώσουμε δύο ροζ λουλούδια μοσχομπίζελου, υβρίδια πρώτης γενιάς, τότε στα 4 λουλούδια που θα πάρουμε στη δεύτερη γενιά, 1 θα είναι κόκκινο, 2 ροζ και 1 λευκό. Δηλαδή η πιθανότητα να πάρουμε στη δεύτερη γενιά κόκκινο λουλούδι είναι

$\frac{1}{4}$ ή 25%, ροζ λουλούδι $\frac{2}{4}$ ή 50% και λευκό λουλούδι $\frac{1}{4}$ ή 25%.

– Πώς συνέβαλε η θεωρία των πιθανοτήτων στη διατύπωση των νόμων της κληρονομικότητας;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{x \in \mathbb{N}$, όπου $x \leq 8\}$, $A = \{x \in \Omega$, όπου x άρτιος$\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου x διαιρέτης του $8\}$.

α) Να γράψετε τα σύνολα Ω, Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και τα A', B' ως προς βασικό σύνολο Ω.

γ) Αν επιλέξετε τυχαία ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε την πιθανότητα:

i) να ανήκει στο Α
ii) να μην ανήκει στο Β
iii) να ανήκει στο Α και στο Β
iv) να ανήκει στο Α ή στο Β.

2 Σ' έναν καταψύκτη υπάρχουν 12 παγωτά, από τα οποία 3 είναι βανίλια, 3 σοκολάτα, 3 φράουλα και 3 φιστίκι. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει η Μαρία τυχαία ένα παγωτό με γεύση φράουλας που μόνο αυτό δεν της αρέσει; Δύο μέρες αργότερα 1 παγωτό βανίλια, 2 παγωτά σοκολάτα και 1 παγωτό φράουλα έχουν καταναλωθεί. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να πάρει η Μαρία τυχαία ένα παγωτό που να της αρέσει;

3 Τα 80 παιδιά της Γ' τάξης ενός Γυμνασίου επέλεξαν να διδαχτούν μια δεύτερη ξένη γλώσσα ανάμεσα στα Γαλλικά και τα Γερμανικά. Τα 18 από τα 30 αγόρια επέλεξαν τα Γερμανικά, ενώ 36 κορίτσια επέλεξαν τα Γαλλικά.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Αγόρια	Κορίτσια
Γαλλικά		
Γερμανικά		

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) να είναι αγόρι
ii) να έχει επιλέξει τα Γερμανικά
iii) να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει τα Γαλλικά
iv) να είναι κορίτσι ή να έχει επιλέξει τα Γερμανικά.

4 Από το σύνολο $\{25^\circ, 36^\circ, 65^\circ, 92^\circ\}$ που περιέχει ως στοιχεία μέτρα γωνιών, επιλέγουμε τυχαία δύο διαφορετικούς αριθμούς. Αν αυτοί εκφράζουν τα μέτρα δύο γωνιών ενός τριγώνου, ποια είναι η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να είναι ορθογώνιο;

5 Από το σύνολο $\{8, 12, 16, 20\}$ επιλέγουμε τυχαία τρεις διαφορετικούς αριθμούς. Ποια η πιθανότητα οι τρεις αυτοί αριθμοί να εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου;

6 Από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς τον ένα μετά τον άλλο και με αυτούς σχηματίζουμε ένα κλάσμα. Ο πρώτος είναι ο αριθμητής και ο δεύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε το κλάσμα **α)** να εκφράζει ακέραιο αριθμό **β)** να είναι μικρότερο της μονάδας.

7 Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ και $P(A') + P(B') = \frac{11}{10}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

8 Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι, όταν ρίχνουμε δύο ζάρια, η πιθανότητα να έχουν άθροισμα 8 είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έχουν άθροισμα 7. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο (τρίγωνο Πασκάλ) προκειμένου να προσδιορίσει το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων κατά τη ρίψη ενός νομίσματος. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία, δύο, τρεις φορές, τότε τα δυνατά αποτελέσματα και το πλήθος τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ρίψεων	Δυνατά αποτελέσματα	Τρίγωνο Πασκάλ	Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
1	Κ Γ	1 1	$2 = 2^1$
2	ΚΚ ΚΓ ΓΚ ΓΓ	1 2 1	$4 = 2^2$
3	ΚΚΚ ΚΚΓ ΚΓΚ ΓΚΚ ΓΓΚ ΓΚΓ ΚΓΓ ΓΓΓ	1 3 3 1	$8 = 2^3$

Να βρείτε:

α) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος.

β) Την πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και τις 5 φορές.

γ) Την πιθανότητα να φέρουμε όλες τις φορές γράμματα, αν ρίξουμε το νόμισμα 6 φορές.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΣΥΝΟΛΑ

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
- Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με **περιγραφή** των στοιχείων του και με το **διάγραμμα Venn**.
- **Ίσα** ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- Ένα σύνολο Α ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζεται $A \subseteq B$.
- **Κενό** σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

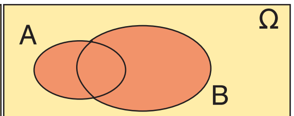
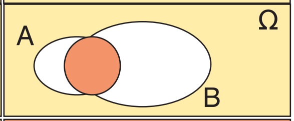
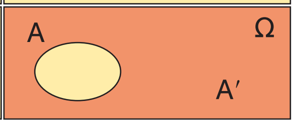
Πράξεις με σύνολα

- **Ένωση** δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cup B$.
- **Τομή** δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cap B$.
- **Συμπλήρωμα** ενός συνόλου Α ως προς ένα βασικό σύνολο Ω ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται A'.

Β. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα.
- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
- Ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται**, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.
- **Βέβαιο** ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.
- **Αδύνατο** ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.

Πράξεις με ενδεχόμενα

	Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Σημασία	Παράσταση
Ένωση	$A \cup B$	« Α ή Β»	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.	
Τομή	$A \cap B$	« Α και Β»	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β.	
Συμπλήρωμα	A'	« Όχι Α»	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.	

- **Ασυμβίβαστα** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα Α και Β, όταν $A \cap B = \varnothing$.

Γ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Κλασικός ορισμός της πιθανότητας**

  Σ' ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζουμε τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

  – Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

  – Ισχύουν $P(\Omega) = 1$ και $P(\varnothing) = 0$.

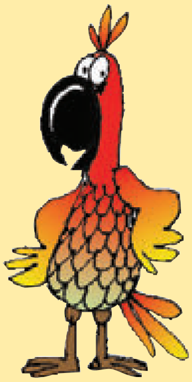
- **Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**

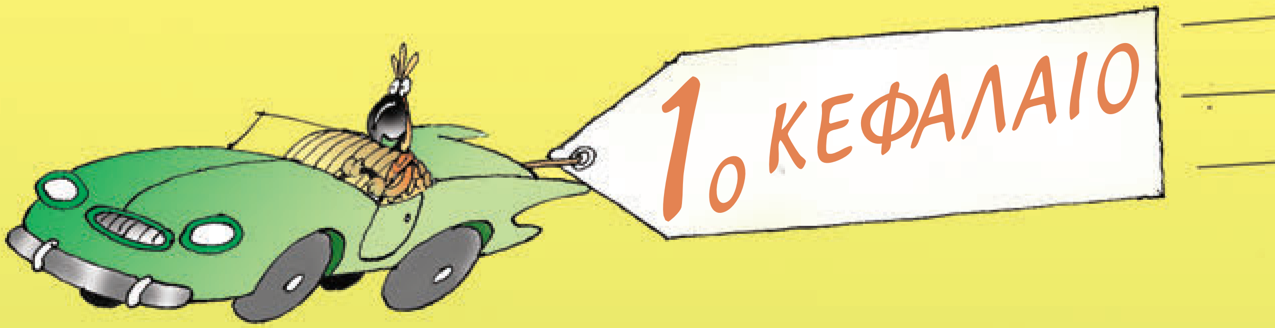
  Σ' ένα πείραμα τύχης

  – για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ισχύει $P(A) + P(A') = 1$

  – για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

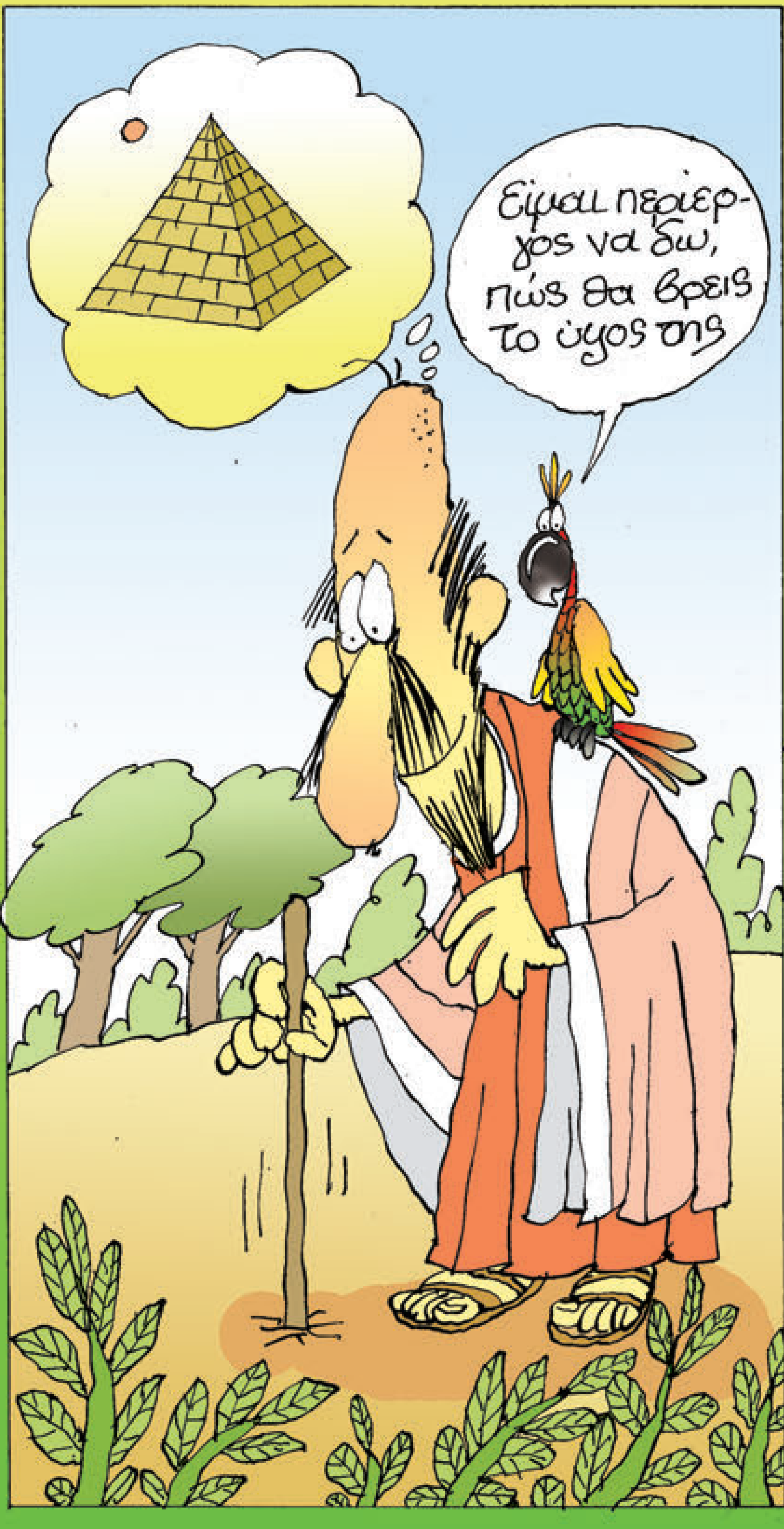

Β΄ ΜΕΡΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ



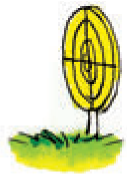

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

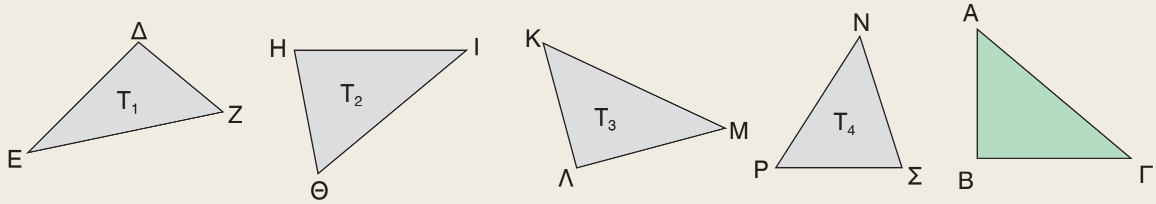

Είμαι περίεργος να δω, πώς θα βρεις το ύψος της

- ✔ *Θυμάμαι ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια – δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.*
- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.*
- ✔ *Μαθαίνω ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.*



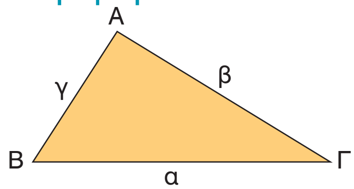
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4.



1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 ταυτίζεται.
2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
   ΑΒ = ..., ΒΓ = ..., ΓΑ = ..., $\hat{A}$ = ..., $\hat{B}$ = ... και $\hat{Γ}$ = ...

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων



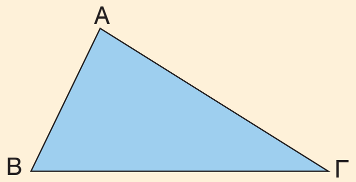
Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α, β, γ.

Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ}$

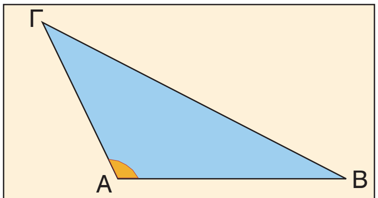
Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία $\hat{A}$.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκείμενες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$.

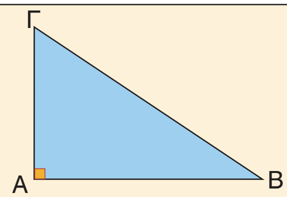
Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:



Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.



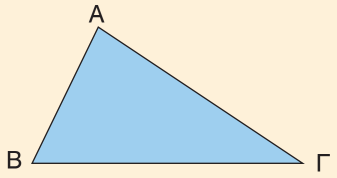
Αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.



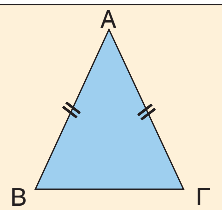
Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

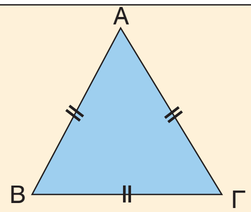
Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:



Σκαληνό, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.



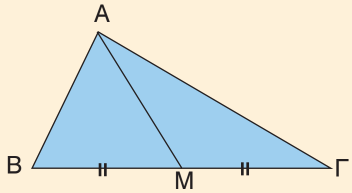
Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.



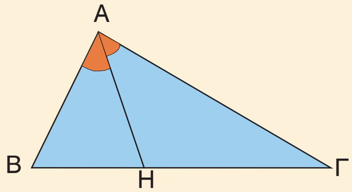
Ισόπλευρο, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

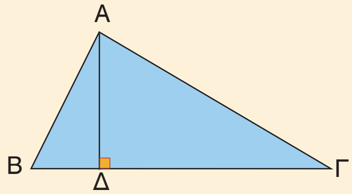
Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.



Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.



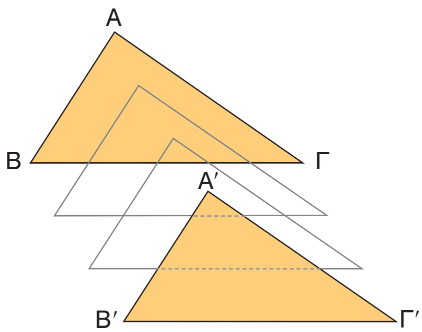
Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

Ίσα τρίγωνα

Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του Α, Β, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως και το τρίγωνο ΑΒΓ θα πάρει τη θέση του τριγώνου Α′Β′Γ′.



Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \quad \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'}, \quad \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'} \quad \text{και}$$
$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}', \quad \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}', \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'.$$

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.**

Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.**

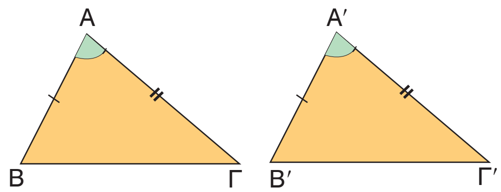
Στο εξής σε κάθε μετατόπιση τριγώνου θα θεωρούμε ότι αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δύο ίσα τρίγωνα, μπορούμε να μετατοπίσουμε κατάλληλα το ένα από αυτά, ώστε να πέσει πάνω στο άλλο.
Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.
Στη συνέχεια, θα μάθουμε προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε ότι και με λιγότερα στοιχεία είναι δυνατόν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.
Οι προτάσεις αυτές είναι γνωστές ως **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

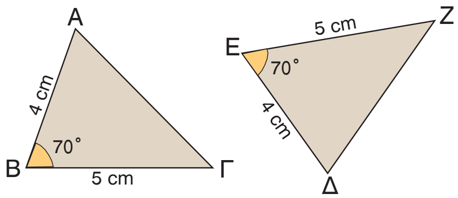
1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

Για δύο τρίγωνα ισχύει η παρακάτω **βασική ιδιότητα ισότητας**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



Πράγματι, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν δύο πλευρές ίσες ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και την περιεχόμενη γωνία τους ίση $\hat{A} = \hat{A}'$.
Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η γωνία $\hat{A}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{A}'$ και η πλευρά ΑΒ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Β′, τότε η πλευρά ΑΓ θα συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Γ′ και οι κορυφές Β, Γ θα συμπέσουν με τις κορυφές Β′, Γ′ αντιστοίχως. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ θα συμπέσουν, οπότε είναι ίσα.

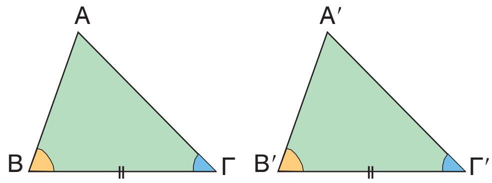


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΒ = ΔΕ = 4 cm, ΒΓ = ΕΖ = 5 cm) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70^\circ$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$A\Gamma = \Delta Z, \quad \hat{\Gamma} = \hat{Z} \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{A}.$$

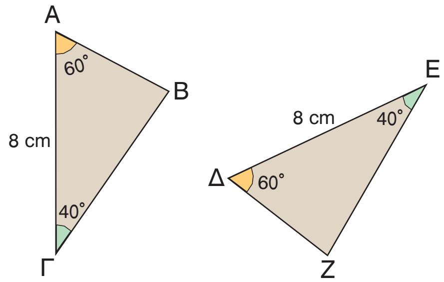
Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, $\hat{Z}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΔ.
Γενικά:
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

2ᵒ κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).



Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν μία πλευρά ίση ΒΓ = Β′Γ′ και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες $\widehat{B} = \widehat{B}'$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η πλευρά του ΒΓ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Β′Γ′ και η γωνία $\widehat{B}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\widehat{B}'$, τότε η γωνία $\widehat{\Gamma}$ θα συμπέσει με την ίση της γωνία $\widehat{\Gamma}'$ και η κορυφή Α θα συμπέσει με την κορυφή Α′.
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ θα συμπέσουν, οπότε είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

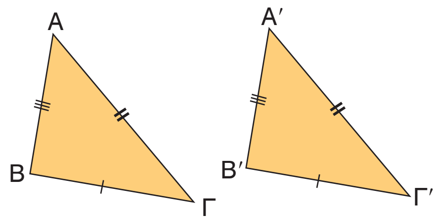


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{E} = 40^\circ$).
Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\widehat{B} = \widehat{Z},\ AB = \Delta Z,\ B\Gamma = EZ.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{E}$.
Γενικά:
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3ᵒ κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

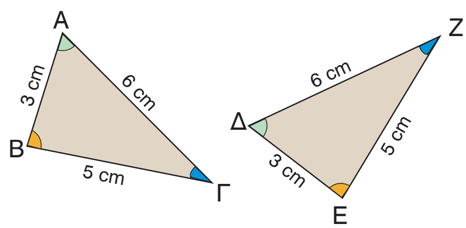


Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες

(ΑΒ = Α′Β′, ΒΓ = Β′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′).

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε αυτό θα συμπέσει με το τρίγωνο Α′Β′Γ′, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

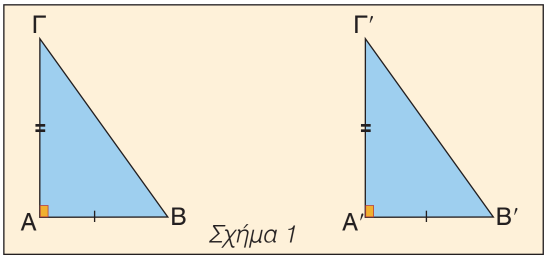


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ΑΒ = ΔΕ = 3 cm, ΑΓ = ΔΖ = 6 cm και ΒΓ = ΕΖ = 5 cm. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

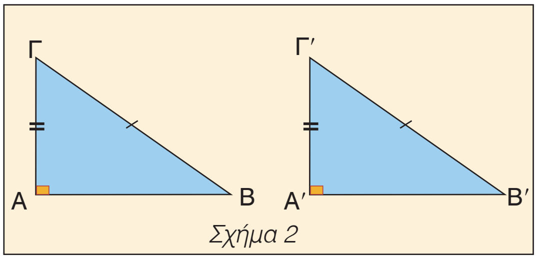
$$\widehat{A} = \widehat{\Delta},\ \widehat{B} = \widehat{E}\ \text{και}\ \widehat{\Gamma} = \widehat{Z}.$$

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα.



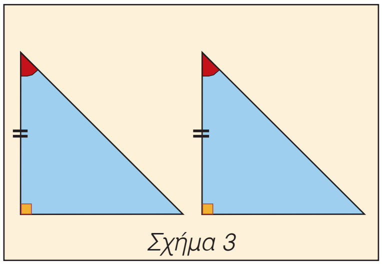
Σχήμα 1

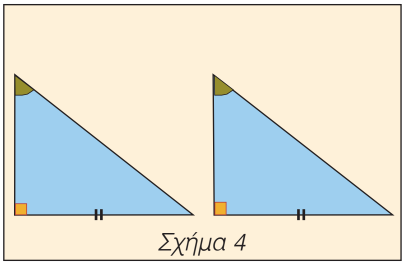


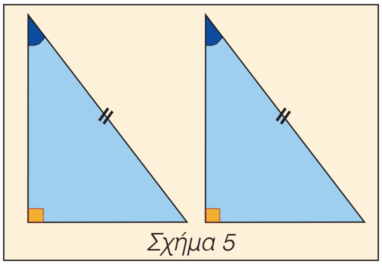
Σχήμα 2

Στο σχήμα 1 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, αφού αυτή είναι ορθή. Στο σχήμα 2 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίση και όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.


Σχήμα 3


Σχήμα 4


Σχήμα 5

Στο σχήμα 3 τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.
Στα σχήματα 4 και 5 τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

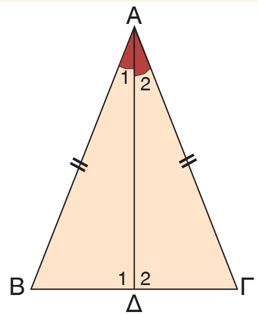
Ο τρεις αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
Από τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διαπιστώνουμε ότι:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν
- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.
β) Να αποδειχθεί ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση



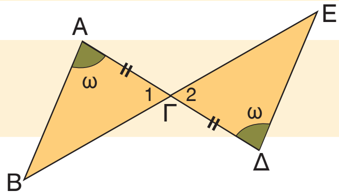
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:
- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.
Αφού είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

2 Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = \omega$ και ΑΓ = ΓΔ.
Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΔΕ.



Λύση

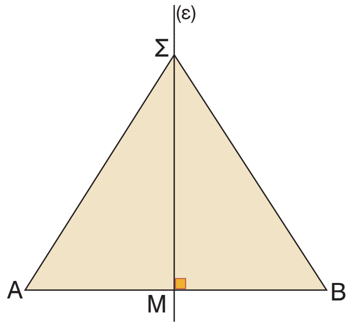
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχουν:
- ΑΓ = ΓΔ από την υπόθεση
- $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ από την υπόθεση
- $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΔΕ.

3 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Λύση

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο



σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, κοινή πλευρά και
- ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

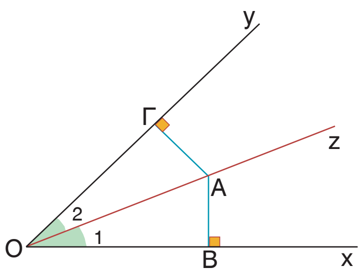
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας $x\hat{O}y$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

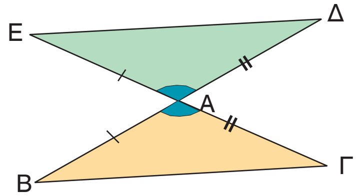
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι:

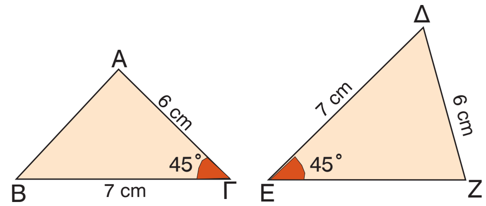
Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

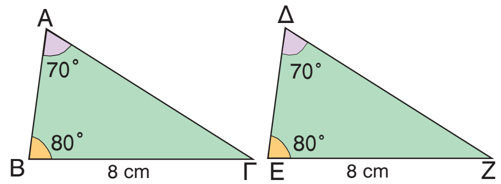
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{B} = \ldots\ldots$, $\hat{\Gamma} = \ldots\ldots$ και ΒΓ = …… .



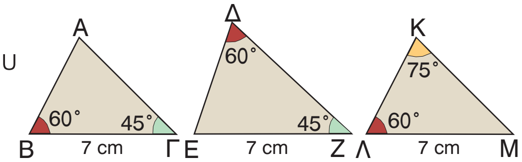
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



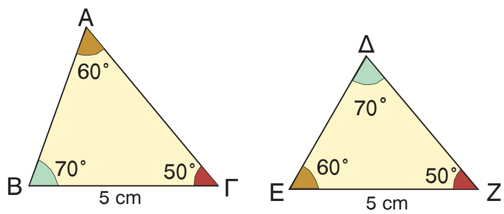
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες ΑΒ = ….. και ΑΓ = …..



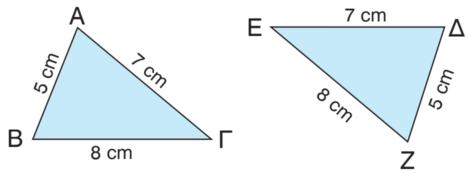
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A} = \ldots\ldots$, $\hat{B} = \ldots\ldots$ και $\hat{\Gamma} = \ldots\ldots$



7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐

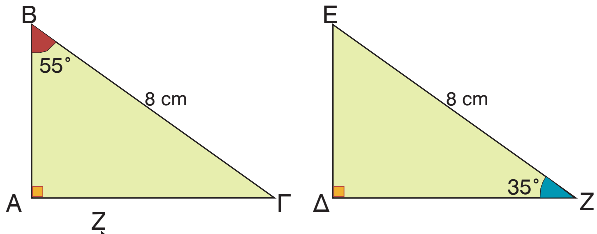
γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες. ☐

δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. ☐

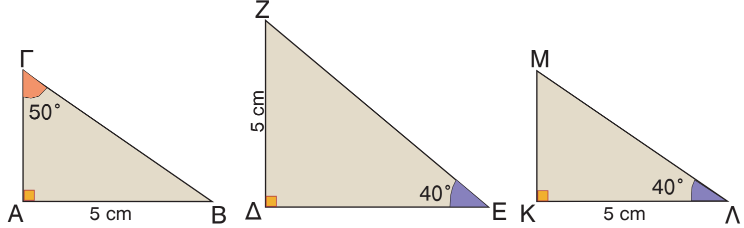
ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση. ☐

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. ☐

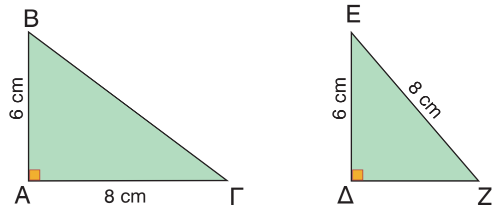
8 Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



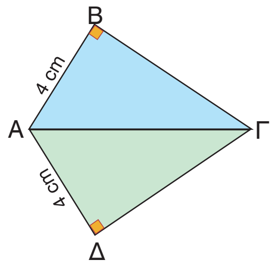
9 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



10 Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.

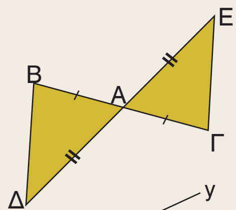


11 Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ.

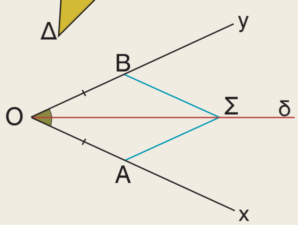


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

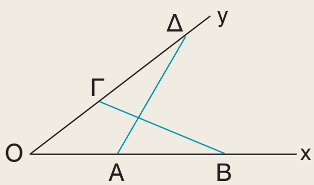


2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.

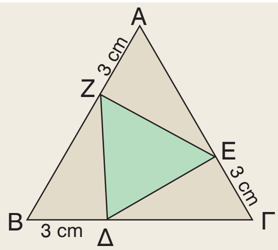


3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

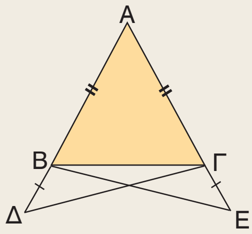
4 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.



5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



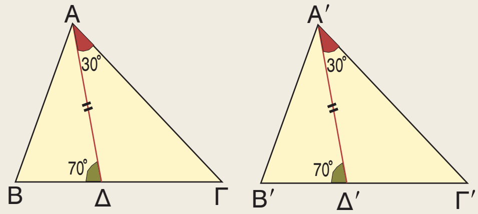
6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



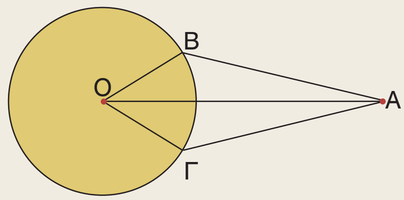
7 Σ' ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΓ = ΓΔ.

8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

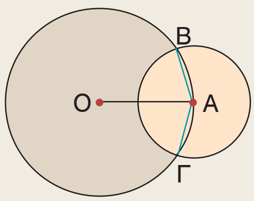
9 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους ΑΔ και Α′Δ′ ίσες. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = Α′Β′
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



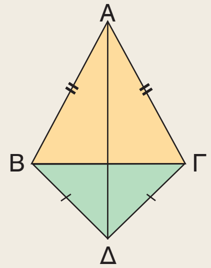
10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα.



11 Αν Ο, Α είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.



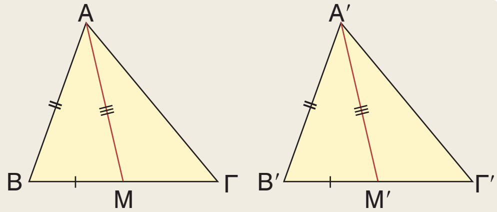
12 Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.



13 Στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι ΑΜ και Α′Μ′ είναι ίσες. Αν ΑΒ = Α′Β′ και ΒΜ = Β′Μ′, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B}'$.

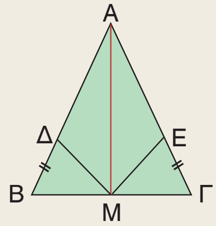
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

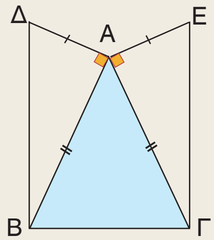


14 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα.





15 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) να φέρετε ΑΔ ⊥ ΑΒ και ΑΕ ⊥ ΑΓ. Αν είναι ΑΔ = ΑΕ, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

16 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΔ και ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΒΔ.

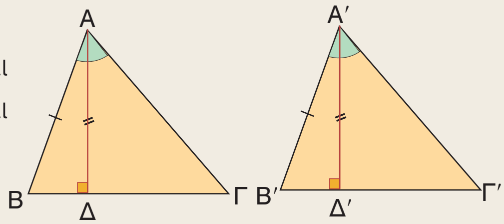
17 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο ΒΔ. Αν ΔΕ ⊥ ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ.

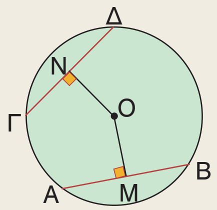
18 Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον Μ ενός τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

19 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και ΑΒ = Α′Β′. Αν τα ύψη τους ΑΔ και Α′Δ′ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

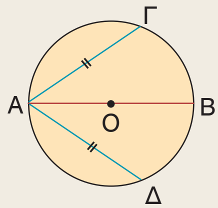
α) $\hat{B} = \hat{B}'$

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.





20 Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ είναι ίσα. Ισχύει το αντίστροφο;



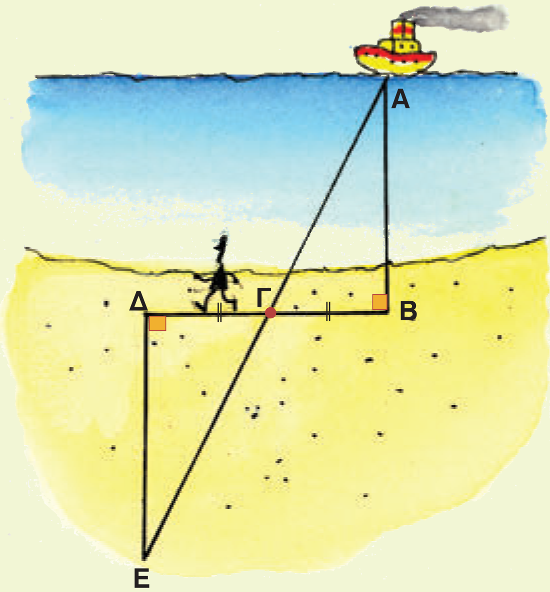
21 Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές ΑΓ και ΑΔ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές ΒΓ και ΒΔ είναι ίσες.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΒ, τότε:

- Ξεκινάμε από το σημείο Β και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην ΑΒ διανύουμε μιαν απόσταση ΒΓ. Στο σημείο Γ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση ΓΔ = ΒΓ.
- Στο σημείο Δ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη ΒΔ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο Ε, από το οποίο τα σημεία Α και Γ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.



Η ζητούμενη απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση ΔΕ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.

Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο **Θαλής ο Μιλήσιος**.

Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΒ = ΔΕ; Μπορείτε να το αποδείξετε; Αναζητήστε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

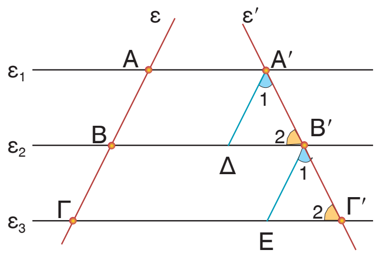
- ✔ *Μαθαίνω πότε παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει.*
- ✔ *Μαθαίνω να διαιρώ ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα τμήματα.*
- ✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς υπολογίζεται.*
- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα τμήματα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να διαπιστώσετε ότι τρεις διαδοχικές γραμμές του τετραδίου ορίζουν στην ευθεία ε ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε′ που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις προηγούμενες διαδοχικές γραμμές ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε′;

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ε′ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ είναι ίσα μεταξύ τους.

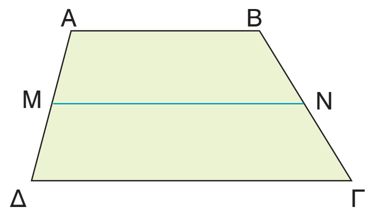
Πράγματι, αν φέρουμε Α′Δ // ε, Β′Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α′Β′Δ και Β′Γ′Ε παρατηρούμε ότι έχουν:

- Α′Δ = Β′Ε γιατί Α′Δ = ΑΒ, Β′Ε = ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΑ′ΔΒ, ΒΒ′ΕΓ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΒΓ.
- $\widehat{Β}_2' = \widehat{Γ}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ε_2$, $ε_3$ που τέμνονται από την ε′.
- $\widehat{Α}_1' = \widehat{Β}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Α′Δ, Β′Ε που τέμνονται από την ε′.

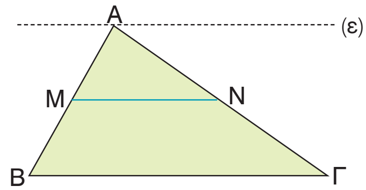
Τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, επομένως είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε Α′Β′ = Β′Γ′. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Για παράδειγμα, σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) αν από το μέσο Μ της ΑΔ φέρουμε ευθεία ΜΝ παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες ΑΒ, ΜΝ, ΔΓ, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΒΓ. Άρα ΒΝ = ΝΓ.



Ομοίως, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.



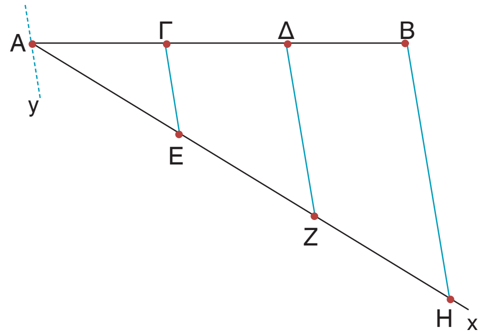
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι 1,66... cm, οπότε καθένα από αυτά δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με ακρίβεια, αν εργαστούμε με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:



Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με τον διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

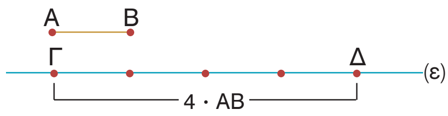
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα.

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

- Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σε μια ευθεία ε πάρουμε τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα είναι ίσο με ΑΒ, τότε κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, για το οποίο λέμε ότι είναι ίσο με 4 · ΑΒ και γράφουμε ΓΔ = 4 · ΑΒ.

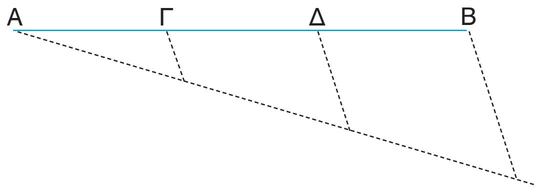
  Η ισότητα αυτή γράφεται και ως εξής: $\frac{ΓΔ}{ΑΒ} = 4$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο **λόγος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός 4.



- Αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, τότε λέμε ότι το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με $\frac{1}{3}\cdot$ ΑΒ και γράφουμε:

$\text{ΑΓ} = \frac{1}{3}\cdot\text{ΑΒ}$ ή $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{3}$.



Λέμε ακόμη ότι:

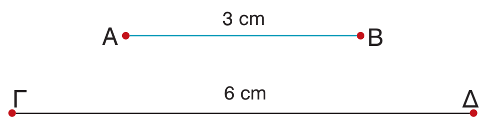
$\text{ΑΔ} = \frac{2}{3}\cdot\text{ΑΒ}$ ή $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{2}{3}$.

Δηλαδή ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{1}{3}$, ενώ ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{2}{3}$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ · ΑΒ.

- Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 3 cm και ΓΔ = 6 cm, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι $\frac{1}{2}$,



δηλαδή είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους $\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$

Γενικά

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ΔΕ = 120 cm και ΖΗ = 1,5 m, τότε

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{120\text{ cm}}{1{,}5\text{ m}} = \frac{120\text{ cm}}{150\text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ένας αριθμός που εκφράζει τη σχέση που συνδέει τα μήκη τους.
Αν γνωρίζουμε λοιπόν τον λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων π.χ. $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = 2$, αυτό σημαίνει ότι το μήκος του ΑΒ είναι διπλάσιο από το μήκος του ΓΔ, αλλά δε γνωρίζουμε το μήκος κάθε τμήματος, αφού είναι δυνατό να είναι ΑΒ = 80 cm και ΓΔ = 40 cm ή ΑΒ = 18 cm και ΓΔ = 9 cm κ.τ.λ.

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 9 cm και ΓΔ = 3 cm, τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 3$. Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ = 6 cm και ΗΘ = 2 cm, τότε ο λόγος του ΕΖ προς το ΗΘ είναι $\frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$, δηλαδή ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του ΕΖ προς το ΗΘ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΗΘ.

Γενικά

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.

Η ισότητα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή ως α, β, γ, δ θεωρούμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $αδ = βγ$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $\frac{α}{γ} = \frac{β}{δ}$ ή $\frac{δ}{β} = \frac{γ}{α}$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

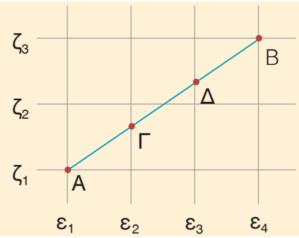
  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = \frac{α + γ}{β + δ}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε τετραγωνισμένο χαρτί έχουμε χαράξει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

α) Να συγκριθούν τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

β) Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΔ}{ΒΓ}$.



Λύση

α) Οι παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία ζ_1, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

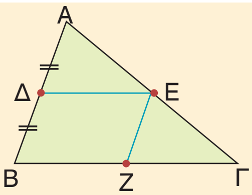
β) Αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ είναι ίσα, έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{2}{2} = 1$$

2 Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ // ΒΓ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ. Επειδή Ε το μέσο της ΑΓ και ΕΖ // ΑΒ, έχουμε Ζ μέσο ΒΓ.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα ΔΕ = ΒΖ. Όμως $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

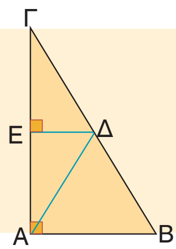
Άμεσα λοιπόν προκύπτει ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

3 Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ.

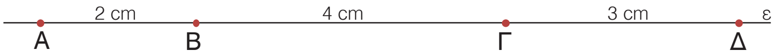
β) Επειδή ΔΕ // ΑΒ και ΑΒ ⊥ ΑΓ, θα είναι ΔΕ ⊥ ΑΓ. Άρα, ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΓ και από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε ΑΔ = ΔΓ.

Όμως $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4 **Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικά σημεία μιας ευθείας ε τέτοια ώστε ΑΒ = 2 cm, ΒΓ = 4 cm και ΓΔ = 3 cm, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.**

Λύση

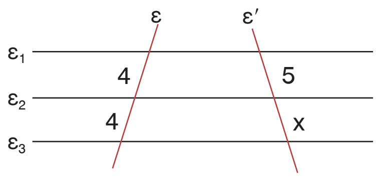


Είναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{1}{2}$ και $\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$.

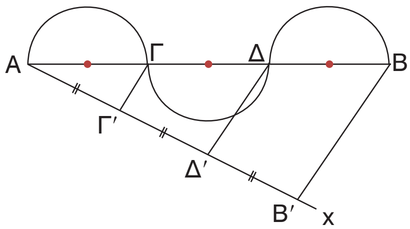
Άρα έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

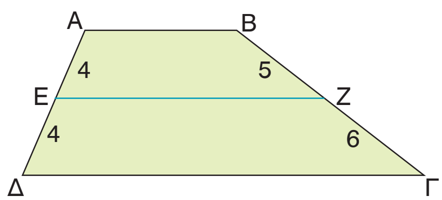
1 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 // ε_2 // ε_3$.
Να υπολογίσετε το x.



2 Αν Β′Β // ΓΓ′ // ΔΔ′ και η διάμετρος ΓΔ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



3 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η ΕΖ παράλληλη προς τις βάσεις του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = —$ β) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = —$

γ) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = —$ δ) $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = —$

5 Αν ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ
να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{AB}{A\Delta} = \_\_$ β) $\frac{B\Delta}{BE} = \_\_$ γ) $\frac{A\Gamma}{AE} = \_\_$ δ) $\frac{AE}{B\Gamma} = \_\_$ ε) $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \_\_$

6 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ΑΒ = 8 cm και ΓΔ = 12 cm, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$. ☐

β) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$, τότε ΑΒ = 2 και ΓΔ = 3. ☐

γ) Ο λόγος δύο πλευρών τετραγώνου είναι ίσος με 1. ☐

δ) Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. ☐

ε) Ο λόγος της ακτίνας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι 2. ☐

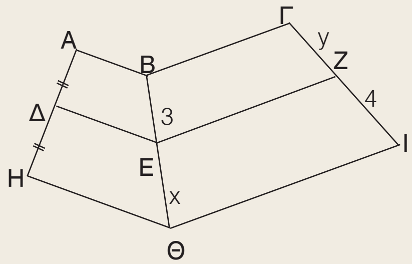
στ) Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. ☐

ζ) Ο λόγος μιας πλευράς ισόπλευρου τριγώνου προς την περίμετρό του είναι $\frac{1}{3}$. ☐

7 Βλέποντας την αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}$ η Μαρία ισχυρίστηκε ότι ΑΒ = 1 και ΓΔ = 4, ενώ η Ελένη ισχυρίστηκε ότι το ΓΔ είναι τετραπλάσιο του ΑΒ. Ποια από τις δύο έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΔΕ // ΗΘ και ΒΓ // ΕΖ // ΘΙ.
Αν ΑΔ = ΔΗ, να υπολογίσετε το x και το y.



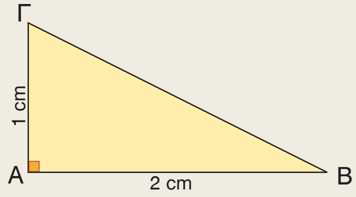
2 α) Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7 cm σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Πάνω σε μια ευθεία ε να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta = \frac{2}{5}AB$, $\Delta Z = \frac{4}{5}AB$ και $ZH = \frac{6}{5}AB$.

β) Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ii) $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$ iii) $\frac{AB}{ZH}$ iv) $\frac{ZH}{\Delta Z}$ v) $\frac{\Gamma\Delta}{ZH}$

3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{A\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{AB}$ γ) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$



4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι ΑΒ = 6 cm και ΒΓ = 10 cm. Να υπολογίσετε τους λόγους:

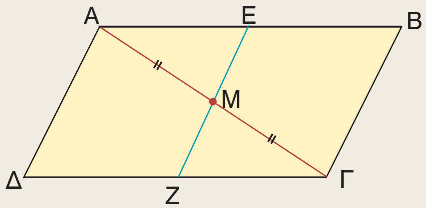
α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{AB}{A\Gamma}$

5 Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4 cm. Να υπολογίσετε το λόγο του ύψους του προς την πλευρά του.

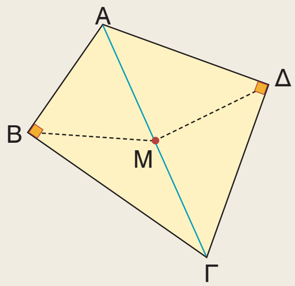
6 Από το μέσο Μ της διαγωνίου ΑΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, έχουμε φέρει ΕΖ // ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΔΓ αντιστοίχως.

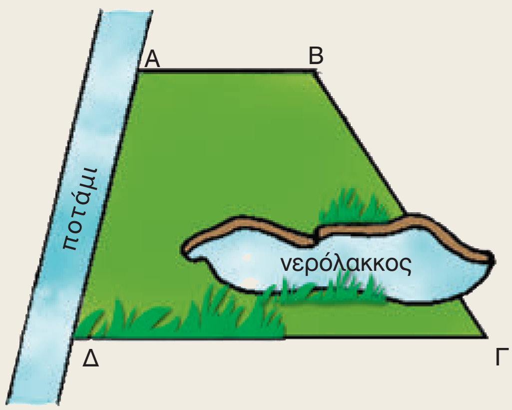
β) Τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΑΕ, ΑΜ.



7 Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν Μ είναι το μέσον της διαγωνίου ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΒΜ = ΜΔ.



8 Ένα αγρόκτημα έχει το σχήμα ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ο ιδιοκτήτης του θέλει να μετρήσει την περίμετρό του, προκειμένου να το περιφράξει αλλά τη ΒΓ δεν μπορεί να τη μετρήσει γιατί παρεμβάλλεται ένας νερόλακκος που σχηματίστηκε από την τελευταία βροχόπτωση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πώς θα μπορούσε να την υπολογίσει;



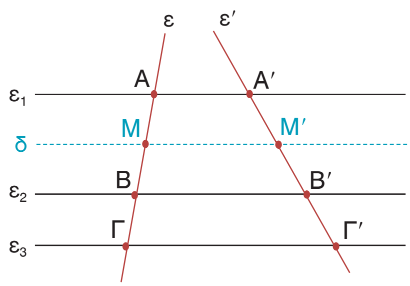
1.3 Θεώρημα του Θαλή

✔ *Μαθαίνω το Θεώρημα του Θαλή και πώς να το χρησιμοποιώ για τον υπολογισμό του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος και του λόγου δυο τμημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να επιλέξετε τρεις γραμμές του τετραδίου που να ορίζουν στην ε δύο ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε το ένα από αυτά να είναι διπλάσιο του άλλου.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις γραμμές που επιλέξατε προηγουμένως ορίζουν και στην ε' δύο ευθύγραμμα τμήματα, που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου;



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$.

Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και για τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ ισχύει μια ανάλογη σχέση. Δηλαδή $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.

Πράγματι, αν από το μέσο Μ του ΑΒ φέρουμε την ευθεία δ παράλληλη προς τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, τότε οι παράλληλες ευθείες ε_1, δ, ε_2, ε_3 ορίζουν στην ευθεία ε ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ευθεία ε'.
Δηλαδή ισχύει $Α'Μ' = Μ'Β' = Β'Γ'$ και επομένως $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$ θα ισχύει και $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$, οπότε:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{2 \cdot ΒΓ}{2 \cdot Β'Γ'} \quad ή \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′.

Γενικά

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

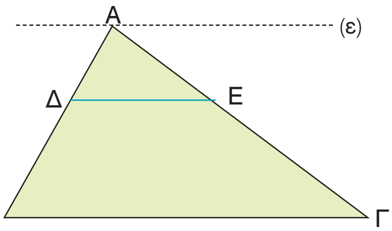
$$\text{αν} \quad \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \quad \text{τότε} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$$

Η προηγούμενη **πρόταση είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή**.
Από την ισότητα των τριών λόγων του Θεωρήματος του Θαλή έχουμε τις εξής αναλογίες

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} \quad \text{και} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}.$$

Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A'B'}{B'\Gamma'}$ και $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{A'B'}{A'\Gamma'}$.

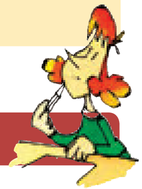
Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ // ΒΓ και από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ θα ορίζουν στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τμήματα ανάλογα.



Δηλαδή, $\dfrac{A\Delta}{AE} = \dfrac{\Delta B}{E\Gamma}$, οπότε και $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$.

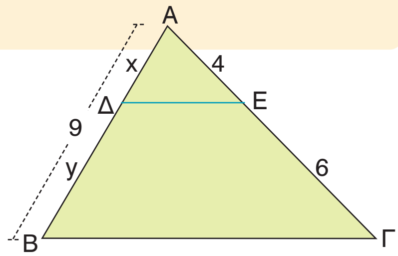
Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$, τότε ΔΕ // ΒΓ. Επομένως:

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:
- **Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$.**
- **Αν $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$ τότε ΔΕ // ΒΓ.**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 9, ΑΕ = 4 και ΕΓ = 6.
Αν ΔΕ // ΒΓ να υπολογιστούν τα x, y.**



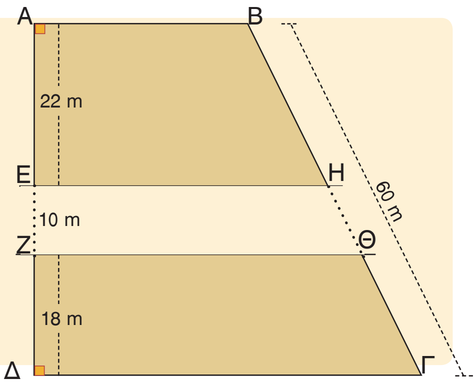
Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$\dfrac{A\Delta}{AE} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ ή $\dfrac{x}{4} = \dfrac{9}{10}$ ή $10x = 36$ ή $x = 3{,}6$.

Άρα $y = 9 - 3{,}6$ οπότε $y = 5{,}4$.

2 **Μέσα από ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου με ΑΔ = 50 m και ΒΓ = 60 m πέρασε ένας δρόμος παράλληλος προς τις πλευρές του ΑΒ, ΓΔ που είχε πλάτος 10 m και χώρισε το οικόπεδο στα δύο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν είναι ΑΕ = 22 m και ΖΔ = 18 m, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΗ, ΘΓ, ΗΘ.**



Λύση

Επειδή ΑΒ // ΕΗ // ΔΓ από το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$\dfrac{BH}{AE} = \dfrac{B\Gamma}{A\Delta}$ ή $\dfrac{BH}{22} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot BH = 1320$ ή $BH = 26{,}40$ m.

Επειδή ΑΒ // ΖΘ // ΔΓ από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε

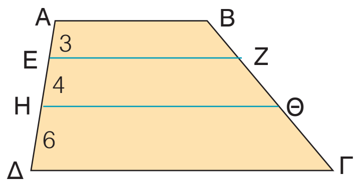
$\dfrac{\Theta\Gamma}{Z\Delta} = \dfrac{B\Gamma}{A\Delta}$ ή $\dfrac{\Theta\Gamma}{18} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot \Theta\Gamma = 1080$ ή $\Theta\Gamma = 21{,}60$ m.

Άρα $H\Theta = 60 - (26{,}40 + 21{,}60)$ ή $H\Theta = 12$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

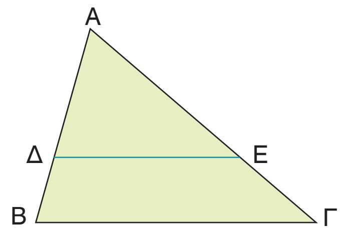
α) $\dfrac{BZ}{\Theta\Gamma} = \text{—}$ β) $\dfrac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \text{—}$ γ) $\dfrac{B\Theta}{B\Gamma} = \text{—}$



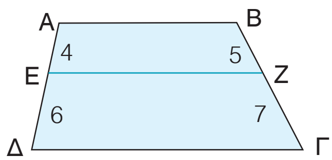
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\dfrac{\Delta B}{E\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ ☐ β) $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{E\Gamma}{AE}$ ☐

γ) $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{E\Gamma}$ ☐ δ) $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma}$ ☐

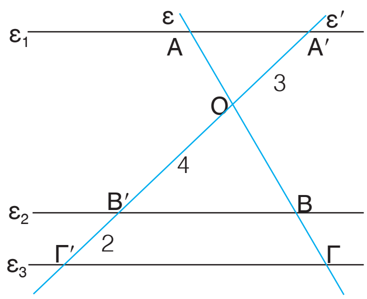


3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

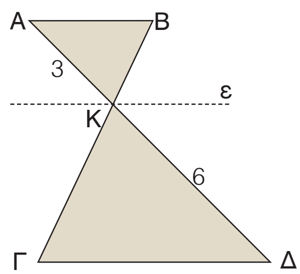
α) $\dfrac{OB}{B\Gamma}$ β) $\dfrac{B\Gamma}{O\Gamma}$ γ) $\dfrac{OA}{OB}$ δ) $\dfrac{AB}{B\Gamma}$

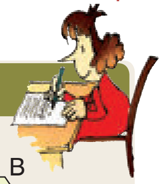


5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\dfrac{BK}{K\Gamma}$	1. $\dfrac{2}{3}$
β. $\dfrac{K\Gamma}{B\Gamma}$	2. $\dfrac{1}{3}$
γ. $\dfrac{B\Gamma}{BK}$	3. $\dfrac{1}{2}$
	4. 3

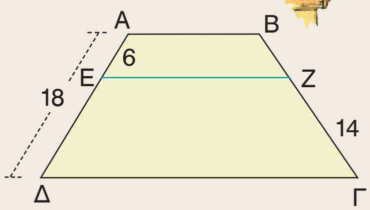
α	β	γ



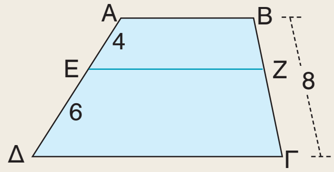


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

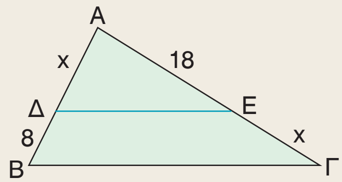
1 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ.



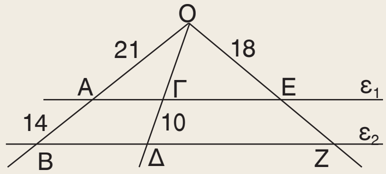
2 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΖΓ.



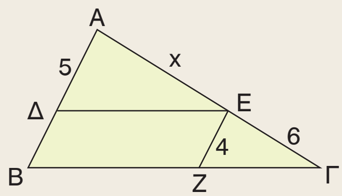
3 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ. Να υπολογίσετε το x.



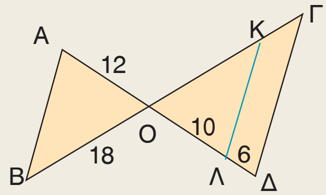
4 Στο διπλανό σχήμα είναι ε_1 // ε_2. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΕΖ.



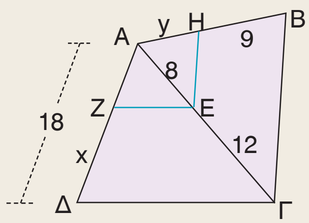
5 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, ΕΖ // ΑΒ.
Να υπολογίσετε το x.



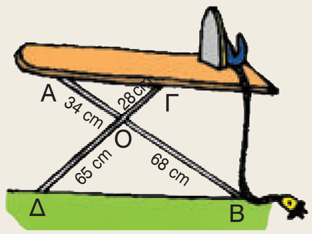
6 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΚΛ // ΓΔ. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΚ και ΚΓ.



7 Στο διπλανό σχήμα είναι ΕΖ // ΔΓ και ΕΗ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε τα x, y.



8 Κάποιος συναρμολόγησε μια πτυσσόμενη σιδερώστρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και διαπίστωσε ότι η σανίδα δεν ήταν οριζόντια.
Πού έγινε το λάθος;



1.4 Ομοιοθεσία

✔ *Μαθαίνω να βρίσκω το ομοιόθετο ενός σχήματος.*
✔ *Γνωρίζω με ποιες σχέσεις συνδέονται τα ομοιόθετα σχήματα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του να πάρετε ένα σημείο Ο.

2. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′, ΟΔ′ διπλάσια των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου.

3. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ″, ΟΒ″, ΟΓ″, ΟΔ″, μισά των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες τους με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε;

Το ομοιόθετο σημείου

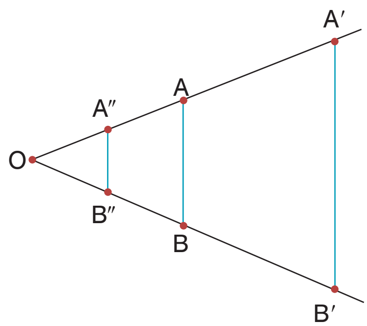
Αν πάρουμε δύο σημεία Ο, Α και στην ημιευθεία ΟΑ πάρουμε ένα σημείο Α′, τέτοιο ώστε ΟΑ′ = 2·ΟΑ, τότε λέμε ότι το σημείο Α′ είναι **ομοιόθετο** του Α με κέντρο Ο και λόγο λ = 2.

Αν Α″ σημείο της ημιευθείας ΟΑ, τέτοιο ώστε $ΟΑ'' = \frac{1}{2} \cdot ΟΑ$,

τότε το Α″ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Ο και λόγο $λ = \frac{1}{2}$.

Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** ομοιοθεσίας, ενώ ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος** ομοιοθεσίας. Είναι φανερό ότι το κέντρο Ο έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2 το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα Α′Β′, όπου Α′, Β′ τα ομοιόθετα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Επειδή ΟΑ′ = 2 · ΟΑ και ΟΒ′ = 2 · ΟΒ, θα έχουμε $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ} = \frac{ΟΒ'}{ΟΒ} = 2$, οπότε ΑΒ // Α′Β′.

Επομένως

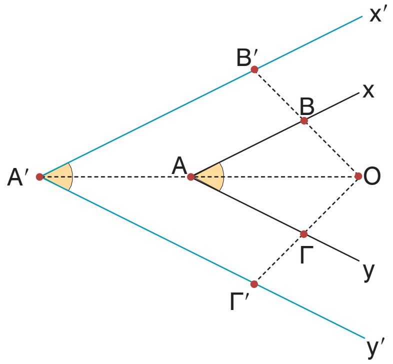
Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.

Αν συγκρίνουμε τα τμήματα Α′Β′ και ΑΒ, διαπιστώνουμε ότι Α′Β′ = 2 · ΑΒ ή $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2$.

Αν Α″Β″ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, τότε:
$Α''Β'' = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{Α''Β''}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$.

Το ομοιόθετο γωνίας

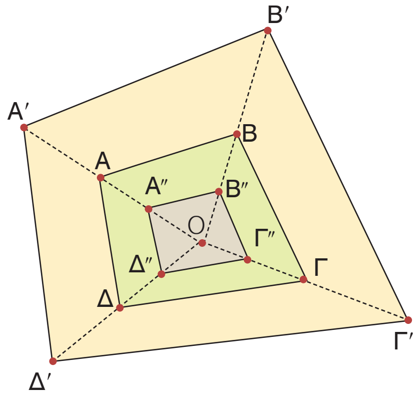
Για να βρούμε το ομοιόθετο μιας γωνίας $x\hat{A}y$ με κέντρο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), παίρνουμε ένα σημείο Β στην πλευρά Αx, ένα σημείο Γ στην πλευρά Αy και βρίσκουμε τα σημεία Β′, Α′, Γ′ που είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των Β, Α, Γ. Ορίζεται έτσι η γωνία $x'\hat{A}'y'$, που είναι ομοιόθετη της γωνίας $x\hat{A}y$.



Αν συγκρίνουμε τις δύο γωνίες διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες, δηλαδή $x\hat{A}y = x'\hat{A}'y'$. Επομένως

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.

Το ομοιόθετο πολυγώνου



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, το ομοιόθετο ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′, όπου Α′, Β′, Γ′, Δ′ είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ. Οι πλευρές και οι γωνίες του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του ΑΒΓΔ, οπότε ισχύουν:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = 2 \quad \text{και} \quad \hat{Α}' = \hat{Α},\ \hat{Β}' = \hat{Β},\ \hat{Γ}' = \hat{Γ},\ \hat{Δ}' = \hat{Δ}.$$

Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο λ = 2 είναι **μεγέθυνση** του ΑΒΓΔ. Αν Α″Β″Γ″Δ″ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, ομοίως ισχύουν:

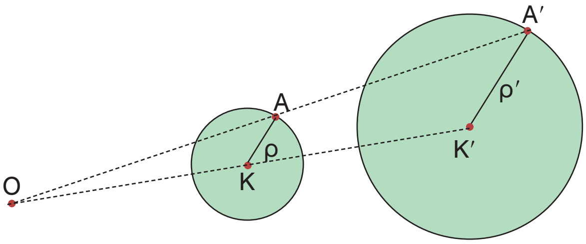
$$\frac{Α''Β''}{ΑΒ} = \frac{Β''Γ''}{ΒΓ} = \frac{Γ''Δ''}{ΓΔ} = \frac{Δ''Α''}{ΔΑ} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \hat{Α}'' = \hat{Α},\ \hat{Β}'' = \hat{Β},\ \hat{Γ}'' = \hat{Γ},\ \hat{Δ}'' = \hat{Δ}.$$

Το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι **σμίκρυνση** του ΑΒΓΔ.

Γενικά

- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι αντίστοιχες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- Αν το πολύγωνο Π′ είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ, τότε το Π′ είναι
  - μεγέθυνση του Π, όταν λ > 1
  - σμίκρυνση του Π, όταν 0 < λ < 1 και
  - ίσο με το Π, όταν λ = 1.

Το ομοιόθετο κύκλου



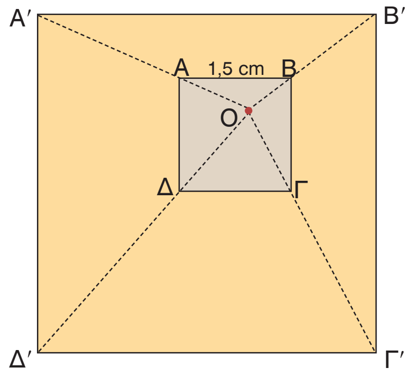
Για να βρούμε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Κ, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο έναν θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), βρίσκουμε το ομοιόθετο του κέντρου Κ και το ομοιόθετο ενός σημείου Α του κύκλου, που είναι τα σημεία Κ′ και Α′ αντιστοίχως.

Ορίζεται έτσι ένας κύκλος (Κ′, ρ′), όπου ρ′ = Κ′Α′, που είναι ομοιόθετος του κύκλου (Κ, ρ). Το ευθύγραμμο τμήμα Κ′Α′ είναι ομοιόθετο του ΚΑ με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, οπότε Κ′Α′ = 2 • ΚΑ, δηλαδή ρ′ = 2ρ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Με κέντρο ομοιοθεσίας ένα εσωτερικό σημείο Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς 1,5 cm και λόγο λ = 3, να σχεδιαστεί το ομοιόθετό του και να αποδειχτεί ότι είναι τετράγωνο.**

Λύση



Στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ παίρνουμε αντιστοίχως τα τμήματα ΟΑ′ = 3 • ΟΑ, ΟΒ′ = 3 • ΟΒ, ΟΓ′ = 3 • ΟΓ, ΟΔ′ = 3 • ΟΔ.

Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο λ = 3,

οπότε: $\dfrac{Α'Β'}{ΑΒ} = \dfrac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \dfrac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \dfrac{Δ'Α'}{ΔΑ} = 3$.

Άρα, Α′Β′ = 3 • ΑΒ = 3 • 1,5 = 4,5 cm.

Ομοίως έχουμε Β′Γ′ = Γ′Δ′ = Δ′Α′ = 4,5 cm

Επειδή τα ομοιόθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες του ίσες, το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ θα έχει τις γωνίες του ορθές. Επομένως το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι τετράγωνο, αφού έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές. Άρα

Το ομοιόθετο ενός τετραγώνου είναι τετράγωνο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

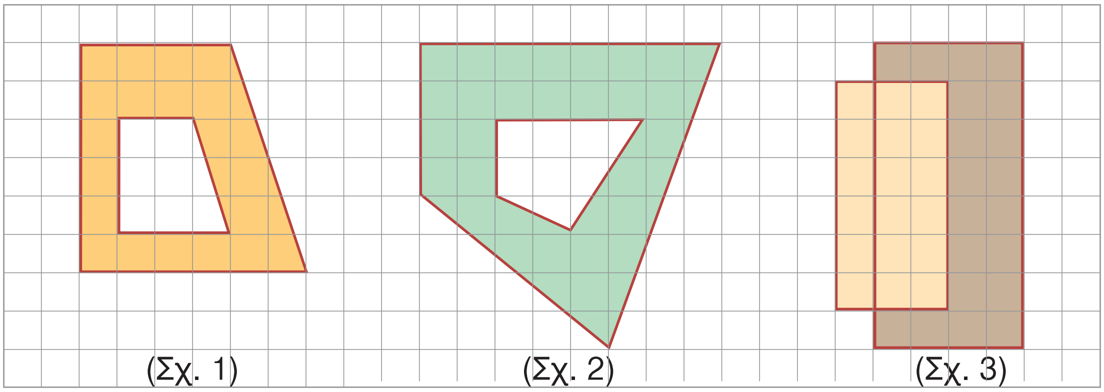
1 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο

α) λ = 5 το ομοιόθετο του Α είναι το .... **β)** λ = 2 το ομοιόθετο του Β είναι το ....

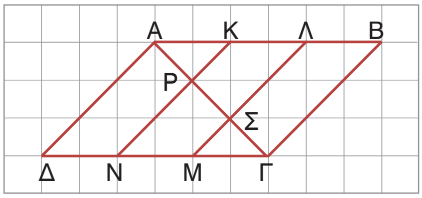
γ) $λ = \dfrac{1}{3}$ το ομοιόθετο του Γ είναι το .... **δ)** $λ = \dfrac{3}{5}$ το ομοιόθετο του Ε είναι το ....

2 Σε ποια από τα παρακάτω σχήματα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα;



3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο τμήματος
ΚΡ	Α	3	
ΡΝ	Γ		ΣΜ
ΣΜ			ΑΔ
ΒΓ	Α		ΚΡ
ΒΛ	Β	3	

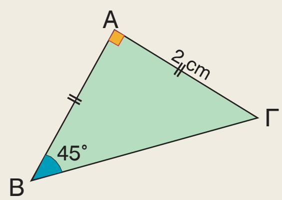


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 3 cm.
α) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο: i) $\lambda = \frac{1}{2}$ ii) $\lambda = 2$.
β) Να υπολογίσετε τις πλευρές των τετραγώνων που σχεδιάσατε.

2 Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές ΑΒ $=$ 12 cm και ΑΓ $=$ 9 cm. Με κέντρο την κορυφή Α και λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές του.

3 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Ο εκτός του τριγώνου και λόγο $\lambda = 3$.
Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του νέου τριγώνου.



4 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Ο, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο $\lambda = 3$. Να αποδείξετε ότι ο νέος κύκλος θα έχει τριπλάσιο μήκος και εννεαπλάσιο εμβαδόν.

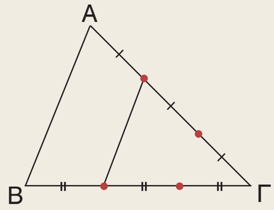
5 Να τοποθετήσετε στο σχήμα τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αν γνωρίζετε ότι:

– Το Κ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Γ και λόγο $\frac{1}{3}$.

– Το Α είναι ομοιόθετο του Λ με κέντρο Κ και λόγο 2.

– Το ΛΜ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{2}{3}$.

– Το ΑΒ είναι ομοιόθετο του ΚΝ με κέντρο Γ και λόγο 3.



6 Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο 2 και κέντρο ομοιοθεσίας:

α) το σημείο Κ β) το σημείο Α γ) ένα εξωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου.

Να συγκρίνετε τα τρία ομοιόθετα σχήματα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

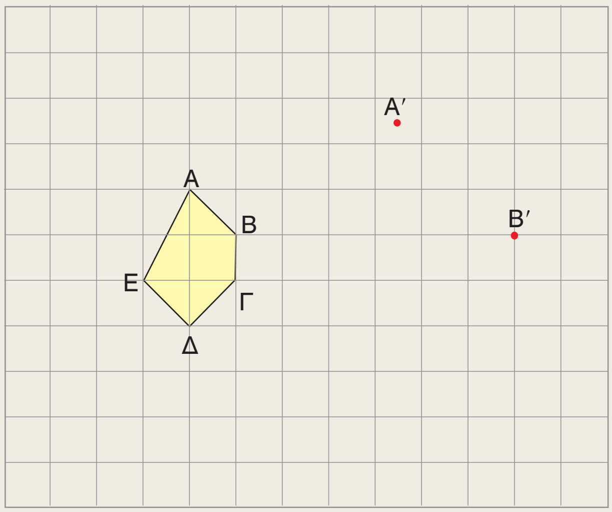
7 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να πάρετε τα σημεία Α(–1, 1), Β(2, 2) και Γ(0, –2).

α) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α′Β′Γ′ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda = 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Με ποια σχέση συνδέονται οι συντεταγμένες των κορυφών των δύο τριγώνων;

β) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α″Β″Γ″ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο το σημείο Κ(1, 1), λόγο $\lambda = 2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Ισχύει η ανάλογη σχέση για τις συντεταγμένες των κορυφών αυτών των τριγώνων;

8 Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ να ορίσετε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι ΔΕ // ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

9 Να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ στην ομοιοθεσία κατά την οποία τα σημεία Α′, Β′ είναι ομοιόθετα των κορυφών Α, Β αντιστοίχως.



1.5 Ομοιότητα

✔ *Μαθαίνω πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια.*
✔ *Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια.*

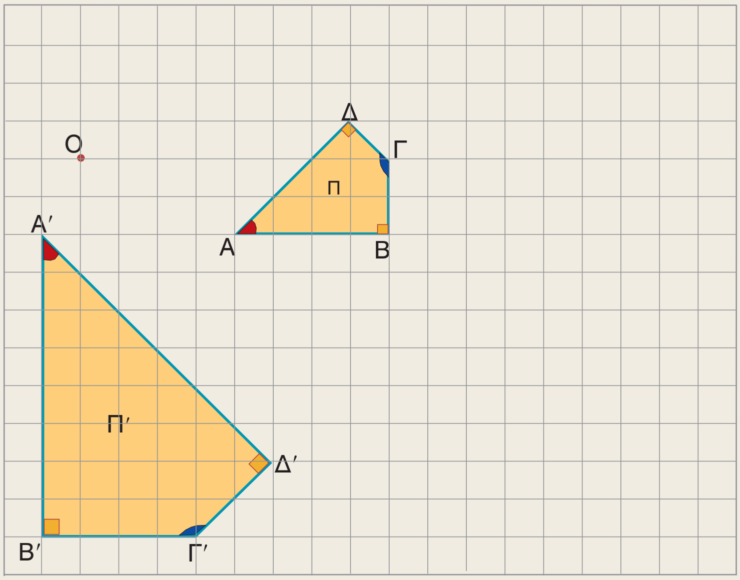
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα, οι πλευρές του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′) έχουν διπλάσιο μέγεθος από τις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (ή Π) και οι αντίστοιχες γωνίες των τετραπλεύρων είναι ίσες.

1. Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 2$.

2. Να συγκρίνετε το τετράπλευρο που σχεδιάσατε με το Π′.

3. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα αρχικά τετράπλευρα Π και Π′;



Α Όμοια πολύγωνα

Αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα. Δύο πολύγωνα Π και Π′ που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου ή είναι ίσα τα λέμε **όμοια** και συμβολίζουμε Π ≈ Π′. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.

Αν όμως ένα πολύγωνο Π′, δεν είναι ομοιόθετο του Π ή δεν είναι εύκολο να εξηγήσουμε ότι είναι ομοιόθετο του Π, τότε πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι όμοιό του;
Ας πάρουμε δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ (ή Π) και Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′), ώστε οι πλευρές του Π′ να είναι διπλάσιες των πλευρών του Π και οι αντίστοιχες γωνίες τους να είναι ίσες. Αν σχεδιάσουμε ένα τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) ομοιόθετο του Π με λόγο $\lambda = 2$, τότε τα τετράπλευρα Π′ και Π″ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες. Το Π″ ως ομοιόθετο του Π, με λόγο 2 είναι μεγέθυνση του, άρα και το ίσο του πολυγώνο Π′ είναι μεγέθυνση του Π, οπότε τα τετράπλευρα Π και Π′ είναι όμοια.
Το ίδιο θα συνέβαινε αν το Π′ ήταν σμίκρυνση του Π.
Τα αρχικά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ τα σχεδιάσαμε, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \hat{A}' = \hat{A},\ \hat{B}' = \hat{B},\ \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma},\ \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

και διαπιστώσαμε ότι είναι όμοια.

Γενικά **Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.**

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο $\left(\text{π.χ. } \frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2\right)$, γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.

Είδαμε λοιπόν ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν και γι' αυτά οι ιδιότητες των ομοιοθέτων σχημάτων, δηλαδή:

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Από τη σχέση (1) και γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

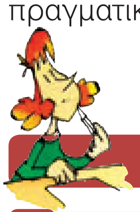
$$λ = \frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = \frac{Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Δ' + Δ'Α'}{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ} = \frac{\text{περίμετρος } Π'}{\text{περίμετρος } Π}.$$ Άρα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

Λόγος ομοιότητας – Κλίμακα

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μια γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση, δηλαδή παρουσιάζουν ένα σχήμα όμοιο με το πραγματικό. Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη που αναγράφεται πάνω σ' αυτόν. Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στον χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

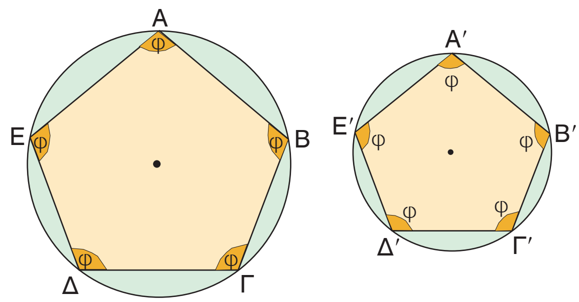
Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 2000000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στον χάρτη προς το πραγματικό είναι $λ = \frac{1}{2000000}$, οπότε 1 cm στον χάρτη είναι 20 km στην πραγματικότητα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.

Λύση



Οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'}$$

αφού και οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι.

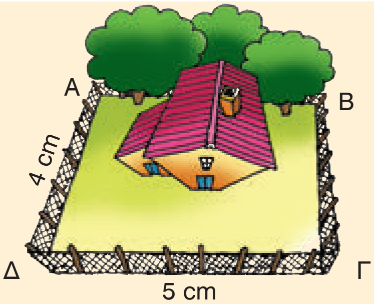
Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι $φ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

Γενικά

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μήκους 270 m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;



Λύση

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ της αεροφωτογραφίας είναι σμίκρυνση του πραγματικού αγροκτήματος Α′Β′Γ′Δ′, οπότε είναι όμοιο προς αυτό.

Άρα ισχύει $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = λ$ (1).

Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων τους.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 18$ cm, ενώ του Α′Β′Γ′Δ′ είναι ίση με το μήκος του συρματοπλέγματος, δηλαδή 270 m ή 27000 cm.

Άρα $λ = \dfrac{18}{27000} = \dfrac{1}{1500}$ οπότε $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \dfrac{1}{1500}$.

Επομένως έχουμε:

$Α'Δ' = 1500 \cdot ΑΔ = 1500 \cdot 4 = 6000$ cm ή $Α'Δ' = 60$ m.

$Δ'Γ' = 1500 \cdot ΔΓ = 1500 \cdot 5 = 7500$ cm ή $Δ'Γ' = 75$ m.

Δηλαδή, οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος είναι 60 m και 75 m. Η κλίμακα φωτογράφισης είναι ίση με τον λόγο ομοιότητας $λ = \dfrac{1}{1500}$ δηλαδή 1 : 1500.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια. ☐

β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια. ☐

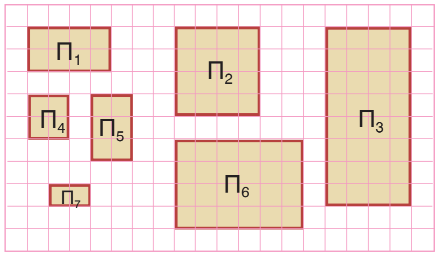
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια. ☐

δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια. ☐

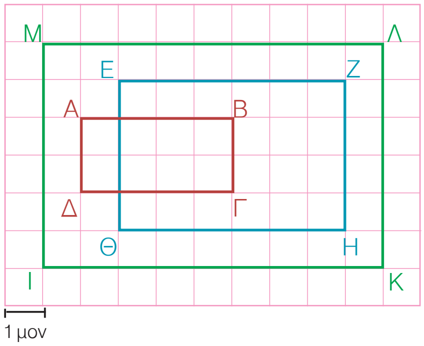
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια. ☐

στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια. ☐

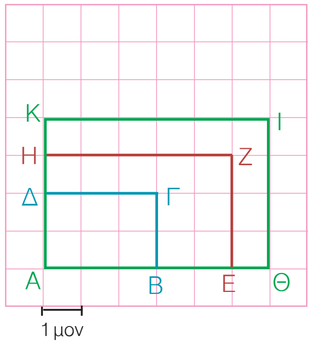
2 Ποια από τα πολύγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια;



3 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις διαστάσεις των αντιστοίχων παραλληλογράμμων και να βρείτε ποια απ' αυτά είναι όμοια.

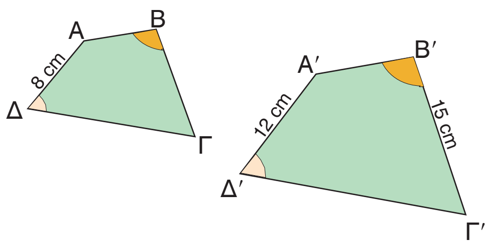


	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		
ΙΚΛΜ		



	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΑΕΖΗ		
ΑΘΙΚ		

4 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τις προτάσεις:



α) Ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α′Β′Γ′Δ′ είναι ....

β) Ο λόγος ομοιότητας του Α′Β′Γ′Δ′ προς το ΑΒΓΔ είναι ....

γ) Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 110°, τότε και η γωνία .... είναι 110°.

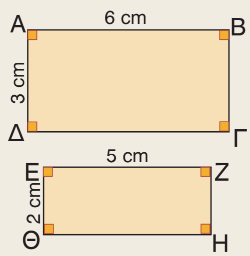
δ) Ο λόγος $λ = \dfrac{Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Δ' + Δ'Α'}{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}$ είναι ίσος με ....

ε) Η πλευρά ΒΓ είναι ίση με .... cm.

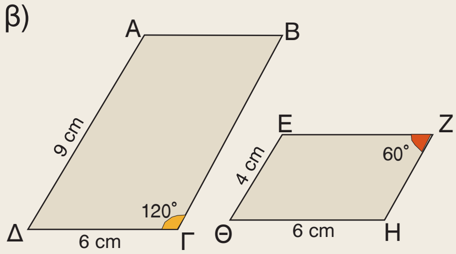
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α)

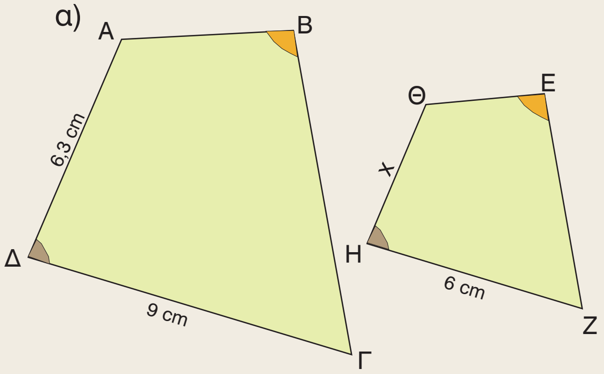


β)

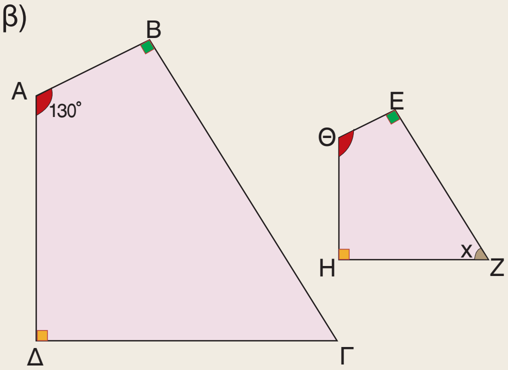


2 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια, να βρείτε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α)



β)



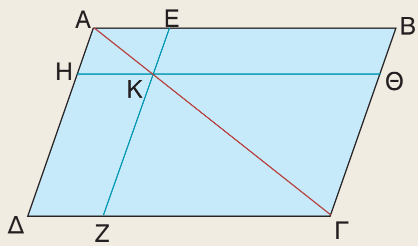
3 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24 cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20 cm, σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ είναι παραλληλόγραμμο όμοιο με το ΑΒΓΔ.

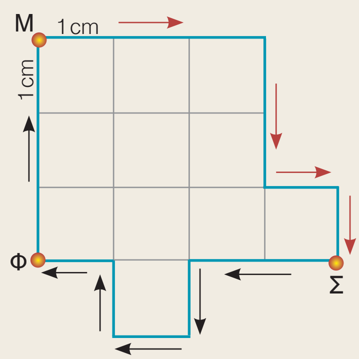
5 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΚ $= \frac{1}{4}$ΑΓ, ΕΖ // ΑΔ και ΗΘ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

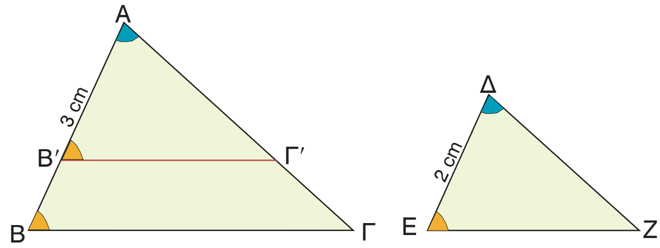
β) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΚΘΓΖ.



6 Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του Μ και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο, έφτασε στο σχολείο του Σ. Το μεσημέρι επέστρεψε σπίτι του από άλλο δρόμο προκειμένου να περάσει και από το σπίτι ενός φίλου του που βρισκόταν στο σημείο Φ. Αν η συνολική διαδρομή που έκανε ο μαθητής ήταν 640 m, να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια των δύο φίλων. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;



Β Όμοια τρίγωνα



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Δηλαδή αν έχουν $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$ και $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $\hat{Β} = \hat{Ε}$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$.

Για να είναι λοιπόν δύο τρίγωνα όμοια πρέπει να ισχύουν όλες οι προηγούμενες ισότητες; Ευτυχώς όχι.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν δύο γωνίες τους ίσες ($\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$).

Αν τοποθετήσουμε το τρίγωνο ΔΕΖ πάνω στο ΑΒΓ, ώστε η γωνία $\hat{Δ}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{Α}$, τότε η πλευρά ΕΖ θα συμπέσει με τη Β′Γ′ και οι γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Β}'$ θα είναι ίσες. Άρα Β′Γ′ // ΒΓ και από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ} = \frac{2}{3} \quad ή \quad ΑΒ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ \quad και \quad ΑΓ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒ′Γ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ στην ομοιοθεσία με κέντρο Α και λόγο $\frac{2}{3}$, οπότε ΑΒ′Γ′ ≈ ΑΒΓ. Επειδή τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒ′Γ′ είναι ίσα, θα είναι και ΔΕΖ ≈ ΑΒΓ.

Επομένως

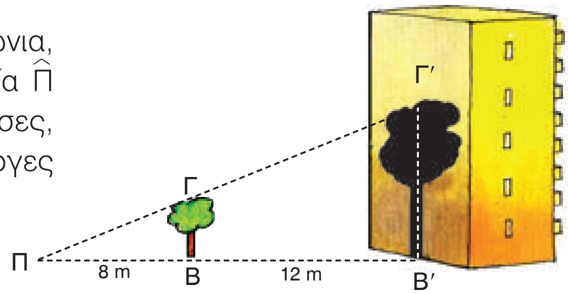
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Είδαμε λοιπόν, ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο ΒΓ. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

Λύση



Τα τρίγωνα ΠΒΓ και ΠΒ′Γ′ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{Β} = \hat{Β}' = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{Π}$ κοινή. Επομένως, έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΠΒ}{ΠΒ'} \quad (1).$$

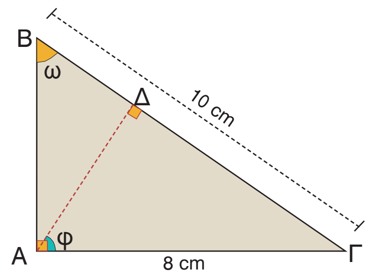
Η σκιά καλύπτει το ισόγειο και 4 ορόφους, οπότε θα έχει ύψος $B'\Gamma' = 5 \cdot 3 = 15$ m. Άρα η ισότητα *(1)* γίνεται $\frac{B\Gamma}{15} = \frac{8}{8+12}$ ή $20 \cdot B\Gamma = 120$, οπότε το ύψος του δέντρου είναι $B\Gamma = 6$ m.

2 Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ίσες γωνίες	$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$	$\hat{\Gamma}$ κοινή	$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ



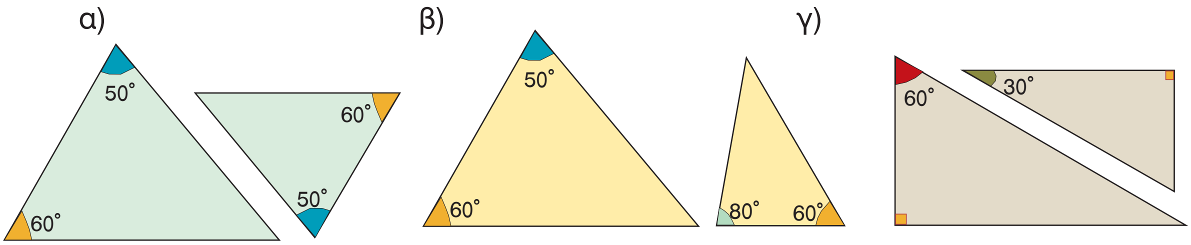
Άρα έχουμε $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$ *(1).*

Από τις ισότητες (1) έχουμε $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ή $\frac{10}{8} = \frac{8}{\Delta\Gamma}$.

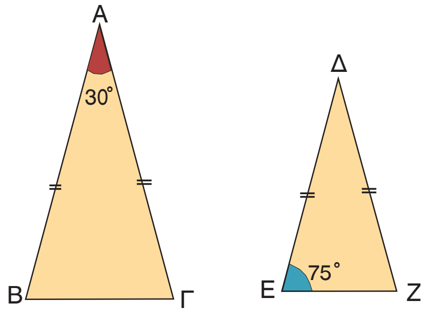
Άρα $10 \cdot \Delta\Gamma = 64$, οπότε $\Delta\Gamma = 6{,}4$ cm. Επειδή $B\Gamma = 10$ cm και $\Delta\Gamma = 6{,}4$ cm έχουμε $B\Delta = 10 - 6{,}4$ δηλαδή $B\Delta = 3{,}6$ cm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;

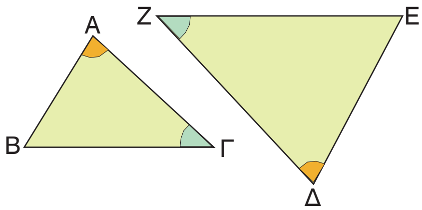


2 Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.



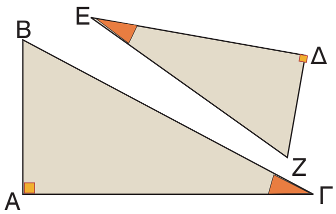
3 Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη των ομοίων τριγώνων.

α)



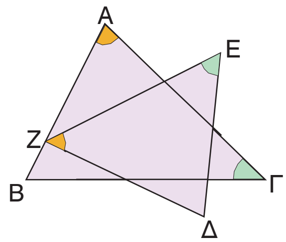
___ = ___ = ___

β)



___ = ___ = ___

γ)



___ = ___ = ___

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια. ☐

β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια. ☐

γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. ☐

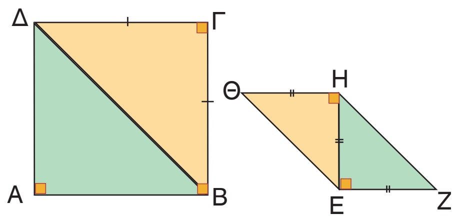
δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια. ☐

ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40°, είναι όμοια. ☐

στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων, είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους. ☐

5 α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΖΗ είναι όμοια.

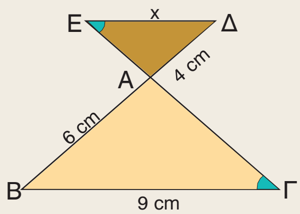
β) Αν δύο πολύγωνα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ομοίων τριγώνων, είναι πάντοτε όμοια;



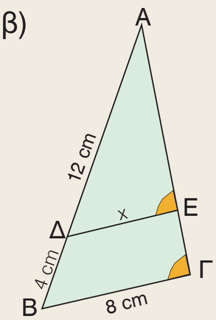
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

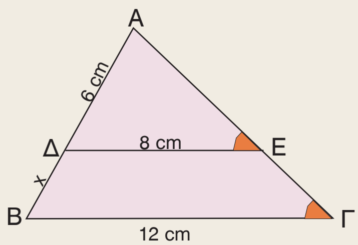
α)



β)



γ)



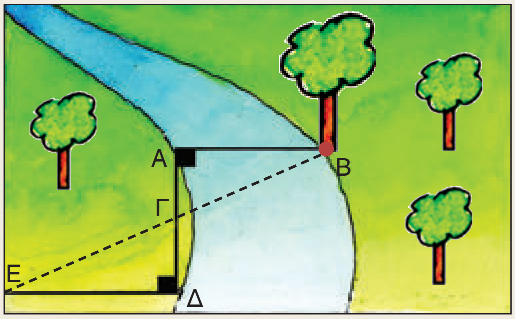
2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια. Αν ΔΒ = 4 cm και ΔΓ = 9 cm, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

3 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 12 cm ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 3 cm. Να αποδείξετε ότι:

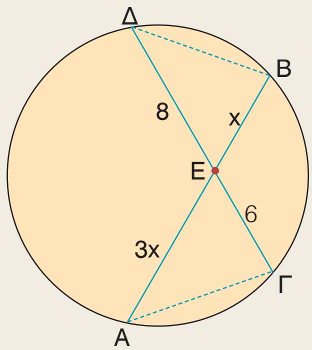
α) ΔΕ // ΒΓ

β) τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια.

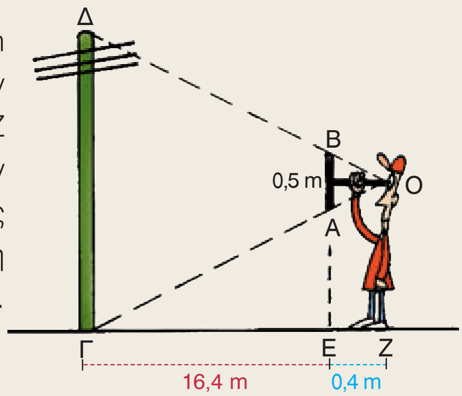
4 Να βρείτε το πλάτος ΑΒ του ποταμού, αν ΑΓ = 12 m, ΓΔ = 15 m, ΕΔ = 60 m και $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$.



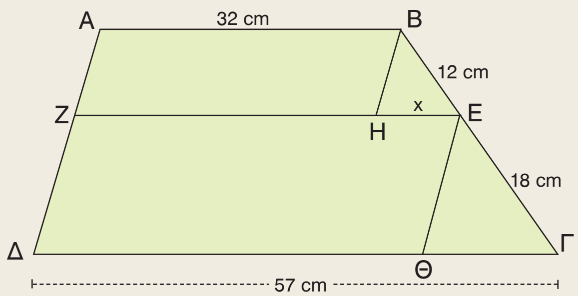
5 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΕΔ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



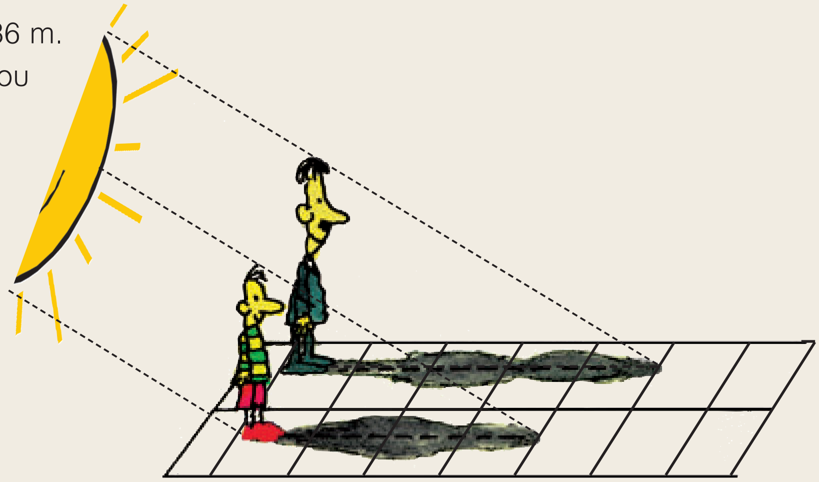
6 Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση 0,4 m κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί ΑΒ = 0,5 m. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Ζ τέτοιο, ώστε οι ευθείες ΟΑ, ΟΒ να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόστασή μας από την κεραία είναι ΓΖ = 16,8 m. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας;



7 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΕΖ // ΔΓ, ΒΗ // ΑΔ και ΕΘ // ΑΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΗΕ, ΕΘΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



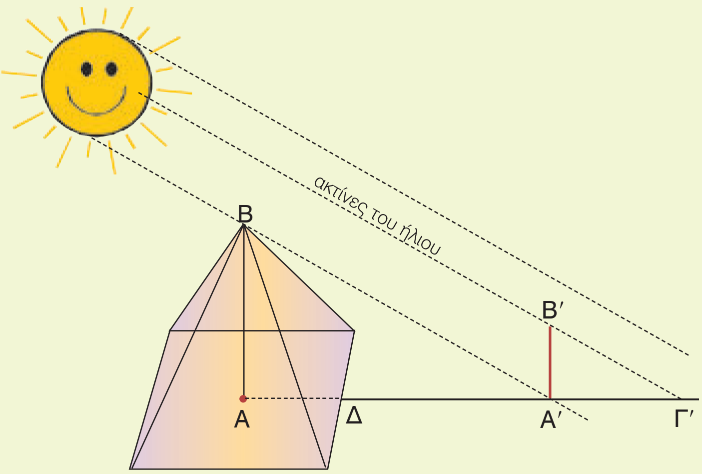
8 Ο γιος έχει ύψος 1,36 m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα του;



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο Θαλής ο Μιλήσιος (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.

Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με τον λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

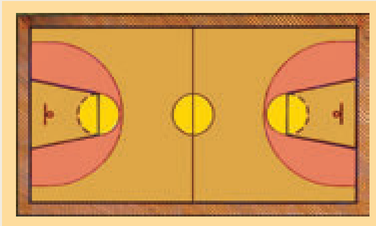
Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ′;

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

✔ *Μαθαίνω τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά ομοίων πολυγώνων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε ένα γήπεδο μπάσκετ με κλίμακα 1 : 50. Το σχέδιο είχε διαστάσεις 60 cm x 30 cm.



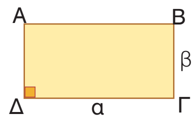
1. Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου.
2. Να υπολογίσετε τον λόγο του εμβαδού του σχεδίου προς το αντίστοιχο εμβαδό του γηπέδου.
3. Να συγκρίνετε τον λόγο που βρήκατε με το τετράγωνο της κλίμακας του σχεδίου.

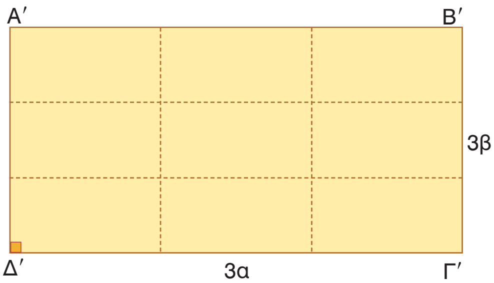
Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α, β. Αν σχεδιάσουμε και το ορθογώνιο Α′Β′Γ′Δ′ με τριπλάσιες διαστάσεις, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας $\lambda = 3$. Τα εμβαδά Ε′, Ε των δύο ορθογωνίων είναι:

$$E' = 3\alpha \cdot 3\beta \quad \text{και} \quad E = \alpha \cdot \beta$$

οπότε ο λόγος τους είναι:

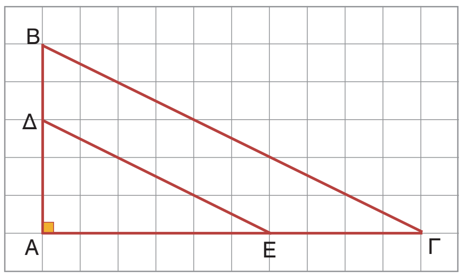
$$\frac{E'}{E} = \frac{3\alpha \cdot 3\beta}{\alpha \cdot \beta} = 3^2$$





Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Ομοίως, αν στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $Α\Delta = \frac{3}{5}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{3}{5}Α\Gamma$, τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο $\frac{3}{5}$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{5}$.



Για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των ομοίων αυτών τριγώνων ισχύει:

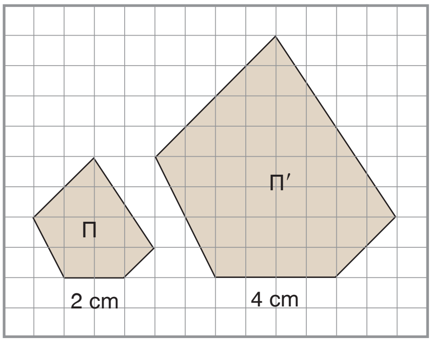
$$\frac{(Α\Delta Ε)}{(ΑΒ\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot Α\Delta \cdot ΑΕ}{\frac{1}{2}\cdot ΑΒ \cdot Α\Gamma} = \frac{Α\Delta}{ΑΒ}\cdot\frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος των εμβαδών των ομοίων τριγώνων ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι και πάλι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Γενικά

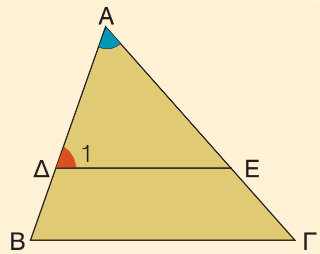
Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο (Π) είναι όμοιο με το πολύγωνο (Π′) και δύο ομόλογες πλευρές τους είναι 2 cm και 4 cm αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας του (Π) προς το (Π′) είναι $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, οπότε για τα εμβαδά τους Ε και Ε′ ισχύει $\frac{E}{E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm², να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΕΓΒ.**



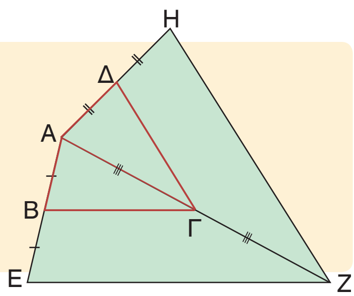
Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. Άρα για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) ισχύει

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{18} = \frac{4}{9} \text{ ή } (ΑΔΕ) = 8 \text{ cm}^2.$$

Το τραπέζιο ΔΕΓΒ έχει εμβαδόν (ΔΕΓΒ) = 18 cm² – 8 cm² = 10 cm².

2 **Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;**



Λύση

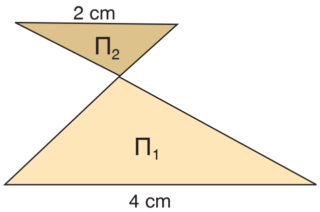
Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο 2.

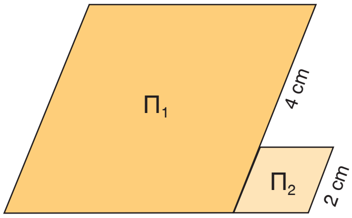
Άρα ΑΕΖΗ ≈ ΑΒΓΔ, οπότε $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΕΖΗ)} = \left(\frac{ΑΒ}{ΑΕ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

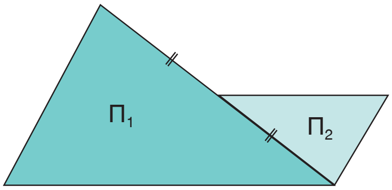
Επομένως, (ΑΕΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ), δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΖΗ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν τα πολύγωνα $Π_1$, $Π_2$ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους $Ε_1$, $Ε_2$.







$Ε_1 = ...Ε_2$ $\qquad$ $Ε_1 = ...Ε_2$ $\qquad$ $Ε_1 = ...Ε_2$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

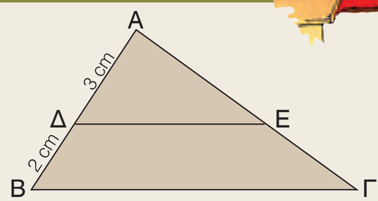
β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιός του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν .... φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

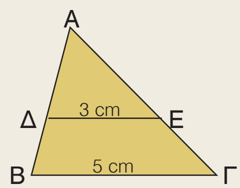
3 Ένα ορθογώνιο $Π_1$ είναι όμοιο με το ορθογώνιο $Π_2$ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$.
Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του $Π_1$ είναι το 16% του εμβαδού του $Π_2$. Έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$



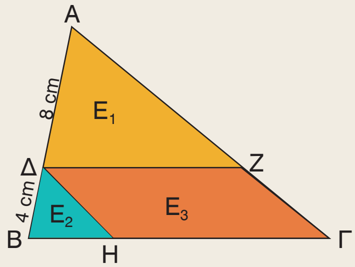
2 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.
Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm^2, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



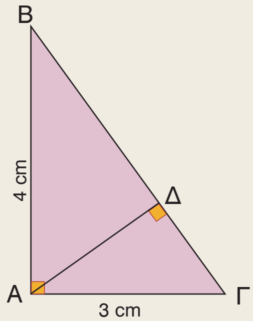
3 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 1 cm και ΓΔ = 5 cm, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Να υπολογίσετε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

4 Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\dfrac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ β) $\dfrac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}$

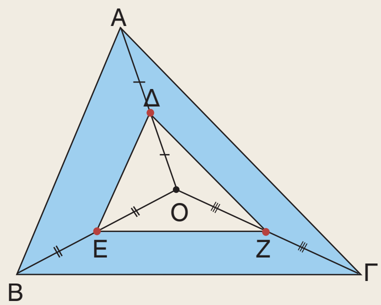


5 Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, ΔΖ // ΒΓ και ΔΗ // ΑΓ, τότε να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 ισχύουν: $E_1 = \dfrac{4}{9}E$, $E_2 = \dfrac{1}{9}E$ και $E_3 = E_1$.



6 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\dfrac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$ β) $\dfrac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}$



7 Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε τυχαίο σημείο Ο. Αν Δ, Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τότε να αποδείξετε ότι:

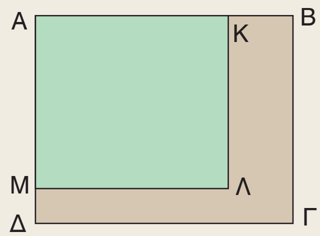
α) το τρίγωνο ΔΕΖ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

β) το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με τα $\dfrac{3}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

8 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 40 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει, αν φωτοτυπηθεί:

α) μεγέθυνση 120% **β)** σμίκρυνση 75%.

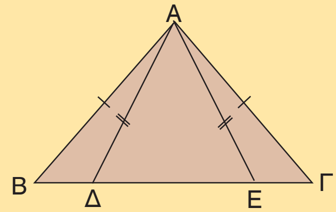
9 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, τότε να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.



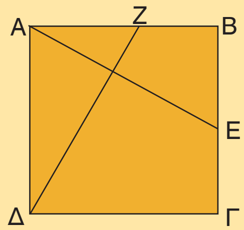
10 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου μειώθηκαν κατά 20%, γιατί αυξήθηκε το πλάτος των διπλανών δρόμων. Να βρείτε πόσο % μειώθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



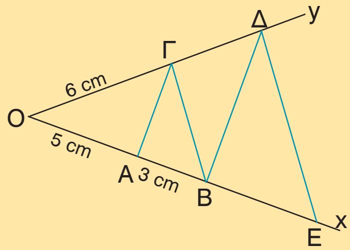
2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ζ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, τέτοια ώστε ΑΖ = ΒΕ.
Να αποδείξετε ότι: **α)** ΔΖ = ΑΕ **β)** ΔΖ ⊥ ΑΕ.



3 Σε ευθεία ε να πάρετε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΗ. Να αποδείξετε ότι ΑΗ = ΓΖ.

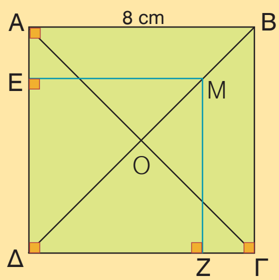
4 Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΒΓ = Β′Γ′, $\widehat{Β} = \widehat{Β}'$ και οι διχοτόμοι ΒΜ και Β′Μ′ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΒΔ // ΑΓ και ΔΕ // ΓΒ.
α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $ΟΒ^2 = ΟΑ \cdot ΟΕ$.

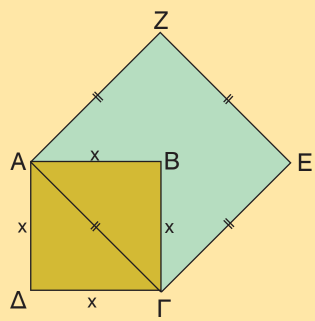


6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

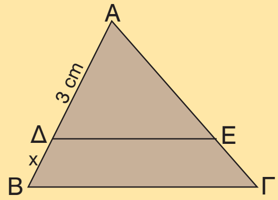
7 Οι διαγώνιοι τετραγώνου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Από το μέσον Μ του ΟΒ να φέρετε ΜΕ ⊥ ΑΔ και ΜΖ ⊥ ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΜΕΔΖ.



8 Με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς x, να σχηματίσετε το τετράγωνο ΑΓΕΖ.
α) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$.
β) Αν (ΑΓΕΖ) = 200 cm^2, να υπολογίσετε την πλευρά x.

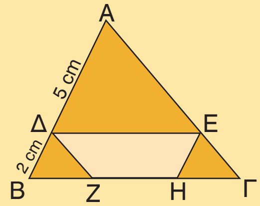


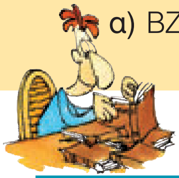
9 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ και $(ΑΔΕ) = \frac{9}{16}(ΑΒΓ)$. Να υπολογίσετε το x.



10 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΓΗ β) $(ΔΕΗΖ) = \frac{16}{49} \cdot (ΑΒΓ)$





ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

- Ίσα τρίγωνα λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Κριτήρια ισότητας τριγώνων. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π – Γ – Π).
  - Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ – Π – Γ).
  - Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π – Π – Π).
- Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
  - Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Β. ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

- Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ · ΑΒ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.
- Θεώρημα Θαλή. Τρεις ή περισσότερες ευθείες, αν τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

Γ. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

- Ομοιόθετο ενός σημείου Α ως προς το κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται το σημείο Α′ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει ΟΑ′ = λ · ΟΑ.
- Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.
- Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.
- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Όμοια πολύγωνα λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
  - Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.
  - Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

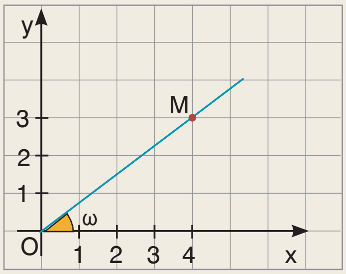
- ✔ *Θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.*
- ✔ *Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.*
- ✔ *Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy φέραμε την ημιευθεία ΟΜ, που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx γωνία ω.

1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και να υπολογίσετε την απόσταση του Μ από την αρχή Ο.

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

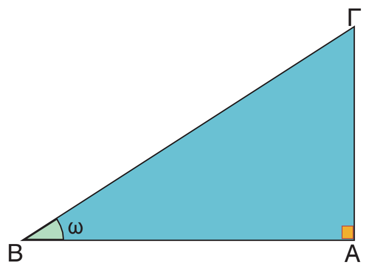


Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

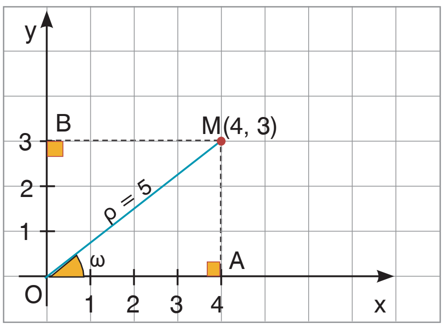
$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy πάρουμε το σημείο Μ(4, 3) και φέρουμε $ΜΑ \perp x'x$ και $ΜΒ \perp y'y$, τότε έχουμε ΟΑ = 4 και ΟΒ = ΑΜ = 3. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\widehat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση ρ = ΟΜ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα

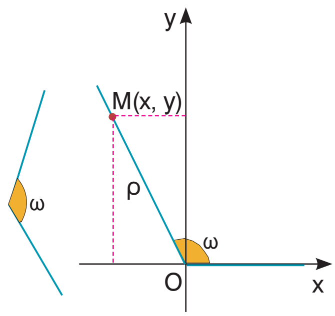


$$\text{ημω} = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\text{συνω} = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\text{εφω} = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.
Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει



$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$$

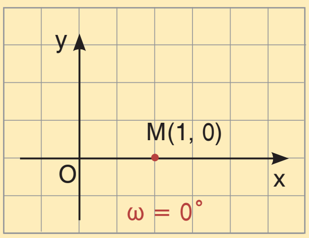
$$\text{συνω} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε: **ημω>0, συνω>0, εφω>0**.
- **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $\rho>0$, οπότε: **ημω>0, συνω<0, εφω<0**.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$.
Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0°, 90° και 180°.

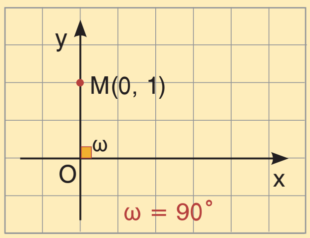


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το M(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\text{ημ}0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{συν}0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{εφ}0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

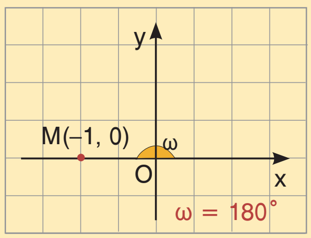


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το M(0,1), τότε $\omega = x\hat{O}M = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\text{ημ}90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{συν}90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται
(γιατί x=0)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το M(–1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\text{ημ}180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{συν}180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{εφ}180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

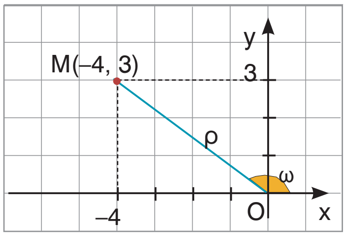
Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο Μ(–4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

Λύση



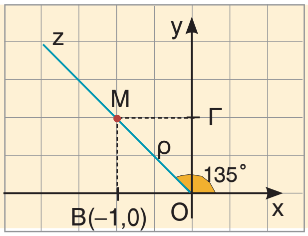
Για την απόσταση ΟΜ = ρ έχουμε:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

Άρα: $ημω = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$, $συνω = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

και $εφω = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135°$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο Μ με τετμημένη –1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135°$.



Λύση

Φέρουμε ΜΒ ⊥ x′x και ΜΓ ⊥ y′y. Επειδή $x\hat{O}M = 135°$ και $x\hat{O}y = 90°$ θα είναι $Γ\hat{O}M = 45°$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ είναι και ισοσκελές.

Άρα ΟΓ = ΜΓ = ΟΒ = 1 και η τεταγμένη του σημείου Μ είναι y = 1.

Δηλαδή έχουμε Μ(–1, 1) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα $ημ135° = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135° = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $εφ135° = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο Μ(5, 12) είναι ρ = ΟΜ = 13. Αν $\omega = x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

ημω = ...   συνω = ...   εφω = ...

2 Αν η γωνία $\omega = x\hat{O}M$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.
ημω ... 0 συνω ... 0 εφω ... 0

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ90°	
β. συν180°	1. 0
γ. εφ0°	
δ. συν90°	2. -1
ε. ημ0°	
στ. εφ180°	3. 1
ζ. συν0°	
η. ημ180°	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \le$ συνω ≤ 1.

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε εφω < 0.

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει ημω > 0, τότε η ω είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

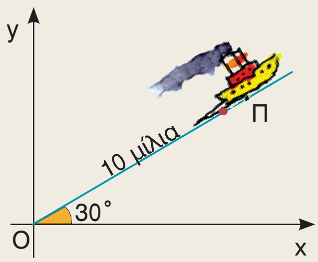
1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$, όταν:
α) Μ(3, 4) β) Μ(–5, 12) γ) Μ(0, 3)

2 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -2x$.

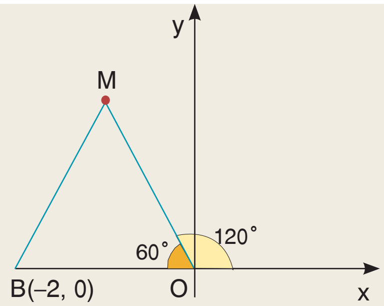
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη –1.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

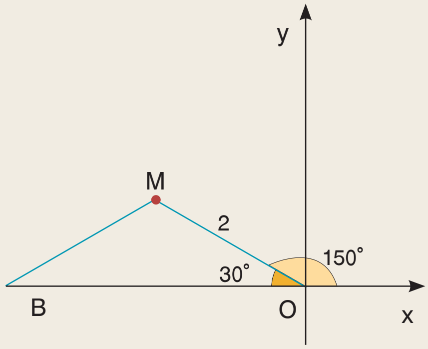
3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Οx γωνία 30°. Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



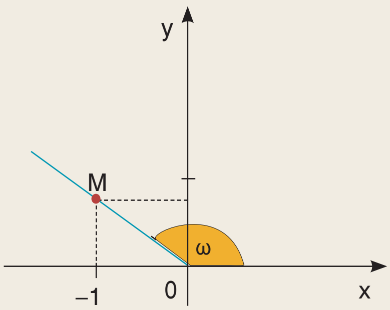
4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο.
Να υπολογίσετε:
α) τις συντεταγμένες του Μ.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°.



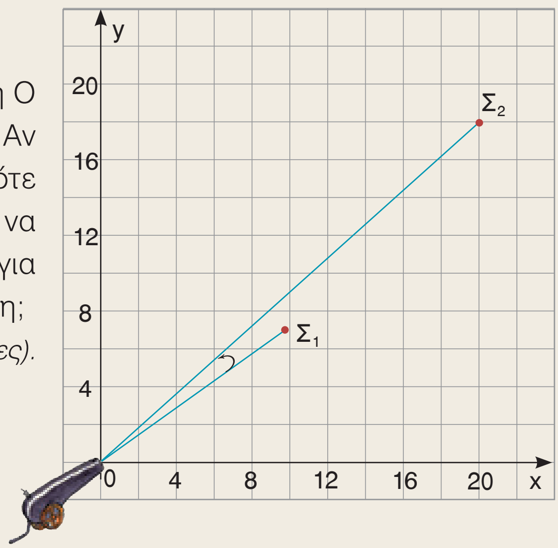
5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές.
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Μ είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150°.



6 Στο διπλανό σχήμα είναι $εφω = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι –1, τότε να υπολογίσετε:
α) την τεταγμένη του σημείου Μ.
β) το ημω και το συνω.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση Ο και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο $Σ_1$. Αν ο στόχος $Σ_1$ μετακινηθεί στη θέση $Σ_2$, τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση;
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

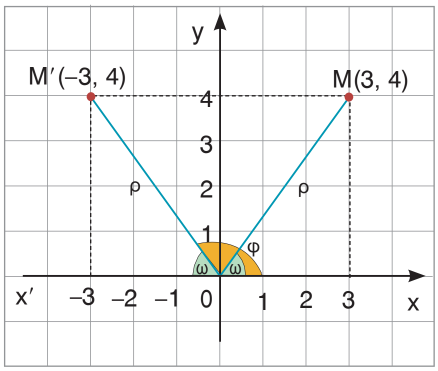
Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:
- ✔ *Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.*
- ✔ *Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να πάρετε το σημείο Μ(3, 4).

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Μ′, που είναι συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y′y;
2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $x\hat{O}M = \omega$ και $x\hat{O}M' = \varphi$ είναι παραπληρωματικές.
3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο Μ(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο Μ′(–3, 4) ως προς τον άξονα y′y.



Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = x\hat{O}M'$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$.

Έχουμε ακόμη ότι

$\rho = OM = OM' = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5},\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5},\quad \varepsilon\varphi\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, φ = 180° – ω έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά

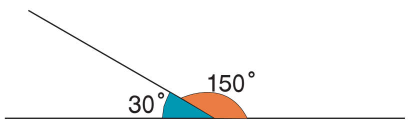
Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° – ω ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$\eta\mu150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu30^\circ = \frac{1}{2}$$



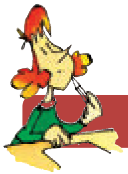
$$\sigma\upsilon\nu150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30°, αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180°, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν ημx = ημ35° και $0 \leq x \leq 180°$, τότε είναι x = 35° ή x = 180° – 35°, δηλαδή x = 35° ή x = 145°.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης Α = ημ140° + συν170° – ημ40° + συν10°.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι ημ140° = ημ40°.
Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι συν170° = –συν10°. Άρα:
Α = ημ140° + συν170° – ημ40° + συν10° = ημ40° – συν10° – ημ40° + συν10° = 0.

2 Αν $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 80°$ και $\hat{B} = 70°$ να αποδειχθεί ότι: α) ημ(Α + Β) = ημΓ β) συν(Α + Β) = –συνΓ

Λύση

Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή είναι:
80° + 70° + $\hat{\Gamma}$ = 180°, οπότε $\hat{\Gamma}$ = 30°. Άρα:
α) ημ(Α + Β) = ημ(80° + 70°) = ημ150° = ημ(180° – 30°) = ημ30° = ημΓ.
β) συν(Α + Β) = συν(80° + 70°) = συν150° = συν(180° – 30°) = –συν30° = –συνΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) ημ150° = ημ30°	☐	β) συν135° = συν45°	☐
γ) εφ100° = εφ80°	☐	δ) εφ75° = –εφ105°	☐
ε) συν110° = –συν70°	☐	στ) ημ140° = –ημ40°	☐

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180°$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) Αν ημx = ημ60°, τότε x = ...
β) Αν συνx = –συν20°, τότε x = ...
γ) Αν εφx = –εφ30°, τότε x = ...

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ140°	1. ημ40°
β. συν140°	2. συν40°
γ. εφ140°	3. εφ40°
	4. –ημ40°
	5. –συν40°
	6. –εφ40°

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 120° β) 135° γ) 150°

2 Να αποδείξετε ότι:
α) ημ108° + συν77° – ημ72° + συν103° = 0
β) εφ122° – εφ58° · εφ135° = 0

3 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2 45° + συν^2 135° = 1$ β) $ημ^2 30° + ημ^2 60° + ημ^2 120° + ημ^2 150° = 2$

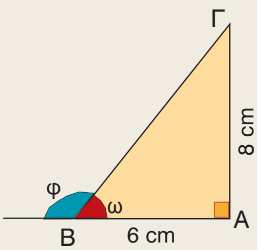
4 Να αποδείξετε ότι: ημ(140° + x) = ημ(40° – x) και συν(158° – x) = –συν(22° + x).

5 Να βρείτε τη γωνία x, όταν:
α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) ημx = 1 – ημx γ) $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$
δ) $συνx = -\frac{1}{2}$ ε) $εφx = -\sqrt{3}$ στ) 2εφx = 1 + εφx

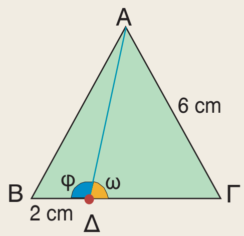
6 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;

7 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{Δ} = 90°$. Να αποδείξετε ότι:
α) ημΑ + συνΑ – ημΓ + συνΓ = 0 β) εφΑ + εφΓ = 0

8 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

✔ *Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και μαθαίνω πώς αποδεικνύονται.*

✔ *Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε ένα σημείο Μ στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

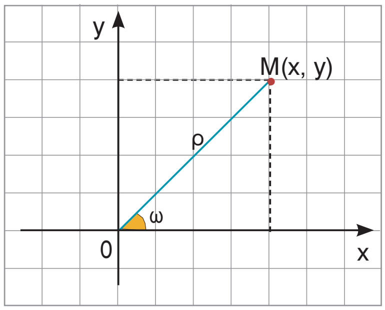
1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\widehat{O}M$.
2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(ημω)^2 + (συνω)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.
3. Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{ημω}{συνω}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$ρ = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } ρ^2 = x^2 + y^2.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2} = \frac{x^2}{ρ^2} + \frac{y^2}{ρ^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 = 1 \quad (1).$$



Επειδή $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, η ισότητα *(1)* γίνεται

$$(συνω)^2 + (ημω)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } ημ^2ω + συν^2ω = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\boxed{ημ^2ω + συν^2ω = 1}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, με την προϋπόθεση ότι $συνω \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{yρ}{xρ} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{y}{x} = εφω$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $συνω \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθειά τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ημω $= \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$συν^2ω = 1 - ημ^2ω$ ή $συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$ ή $συν^2ω = \frac{16}{25}$ ή $συνω = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $συνω < 0$, οπότε $συνω = -\frac{4}{5}$.

Από την ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ έχουμε $εφω = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$, οπότε $εφω = -\frac{3}{4}$.

2 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = 2$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Έχουμε $εφω = 2$ δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 2$, οπότε $ημω = 2συνω$ *(1)*.

Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 2συνω έχουμε

$(2συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή $4συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $5συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = \frac{1}{5}$,

άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ ή $συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι οξεία έχουμε $συνω > 0$, οπότε $συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Από την ισότητα *(1)* έχουμε $ημω = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$ ή $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = 1$ β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Έχουμε

$(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = ημ^2x - 2ημxσυνx + συν^2x + 2ημxσυνx = ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Έχουμε

$$1 + εφ^2ω = 1 + \left(\frac{ημω}{συνω}\right)^2 = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $ημ^2ω = \frac{3}{5}$, τότε $συν^2ω = \frac{2}{5}$. ☐

β) Αν συνω = 0, τότε δεν ορίζεται η εφω. ☐

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$. ☐

δ) Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $συνω = \frac{12}{13}$, τότε $εφω = \frac{5}{12}$ ☐

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε ημω = 0 και συνω = 0. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν ημω = 1, τότε συνω = ...

β) Αν ημω = 0, τότε συνω = ...

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{3}{5}$, τότε το συνω είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $συνω = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$Α = \frac{1}{3}ημω + \frac{2}{3}συνω - \frac{1}{10}εφω.$$

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^3ω + ημωσυν^2ω = ημω$ β) $συν^2ω - συν^4ω = ημ^2ωσυν^2ω$

6 Αν είναι $x = 3συνω$ και $y = 3ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xσυνω + yημω = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$ β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$

β) $(αημω + βσυνω)^2 + (βημω - ασυνω)^2 = α^2 + β^2$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2x\, εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

10 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{συν^2x}{1 + ημx} = 1 - ημx$ β) $εφx + \dfrac{συνx}{1 + ημx} = \dfrac{1}{συνx}$

11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $ημ50°ημ130° - συν50°συν130°$

β) $ημ^2 14° + ημ^2 114° + συν^2 166° + συν^2 66°$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ70°συν70° - εφ110°συν110° = 0$

β) $εφ^2 40°συν^2 40° + συν^2 140° = 1$

13 Αν είναι $α = 30°$ και $β = 60°$, τότε να αποδείξετε ότι:

$ημ^2x\, ημα\, ημβ + συν^2x\, συνα\, συνβ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

14 Είναι γωνία, όχι οξεία,

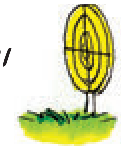
ημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ + 1}{λ + 3}$ και

συνημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{-2λ\sqrt{3}}{λ + 3}$.

Ποια γωνία είναι;

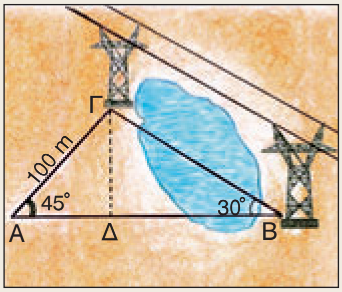
2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

✔ *Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

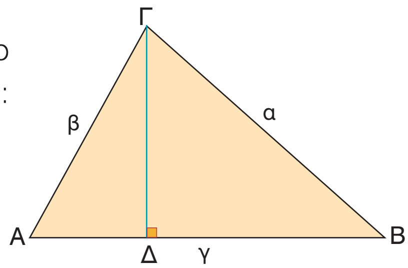


1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\frac{ΓΒ}{ημ45^\circ}$ και $\frac{ΓΑ}{ημ30^\circ}$ είναι ίσοι.
2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

Α Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$ημA = \frac{ΓΔ}{β}$ ή $ΓΔ = βημA$ *(1)*

$ημB = \frac{ΓΔ}{α}$ ή $ΓΔ = αημB$ *(2)*

Από τις ισότητες *(1)*, *(2)* έχουμε $βημA = αημB$ ή $\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ}$.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\boxed{\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ}}$$

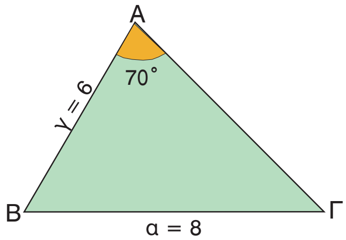
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων**.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με τον νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές – γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με τον νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$, αφού



$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ ή $\frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{6}{\eta\mu\Gamma}$ ή $8\eta\mu\Gamma = 6\eta\mu 70^\circ$ ή

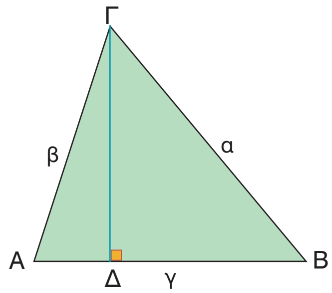
$\eta\mu\Gamma = \frac{6\eta\mu 70^\circ}{8}$ ή $\eta\mu\Gamma = \frac{6 \cdot 0{,}94}{8}$ ή $\eta\mu\Gamma = 0{,}705$.

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Β Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με τον νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ *(1)*.



Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$, η ισότητα *(1)* γράφεται:

$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta$ *(2)*.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta}$ ή $A\Delta = \beta\sigma\upsilon\nu A$.

Άρα η ισότητα *(2)* γράφεται: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$

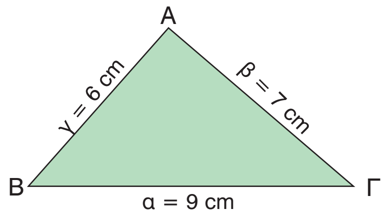
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{aligned}}$$

Με τον νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 9$ cm, $\beta = 7$ cm και $\gamma = 6$ cm, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.



Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{B}$ έχουμε:

$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha συνB$ ή

$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot συνB$ ή

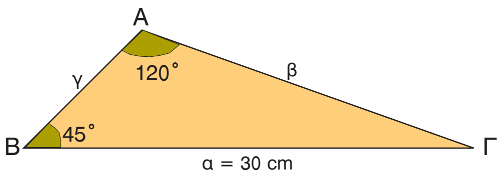
$49 = 36 + 81 - 108 \cdot συνB$ ή $108\, συνB = 68$ ή

$συνB = \frac{68}{108} = 0{,}629$. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\widehat{B} = 51^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 30$ cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Gamma}$ και η πλευρά β.**

Λύση



Από τη σχέση $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ έχουμε

$120^\circ + 45^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή

$\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 165^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 15^\circ$.

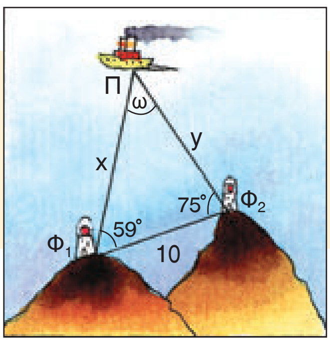
Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\frac{\alpha}{ημA} = \frac{\beta}{ημB}$ ή $\frac{30}{ημ120^\circ} = \frac{\beta}{ημ45^\circ}$ ή $\beta \cdot ημ120^\circ = 30 \cdot ημ45^\circ$ *(1)*.

Επειδή $ημ120^\circ = ημ(180^\circ - 60^\circ) = ημ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $ημ45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα *(1)* γράφεται:

$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ή $\beta = \frac{30\sqrt{6}}{3}$ ή $\beta = 10\sqrt{6}$ cm.

2 **Δύο φάροι $Φ_1$, $Φ_2$ απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x, y του πλοίου από κάθε φάρο.**



Λύση

Στο τρίγωνο $ΠΦ_1Φ_2$ έχουμε $\omega + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $\omega = 46^\circ$. Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\frac{10}{ημ46^\circ} = \frac{x}{ημ75^\circ} = \frac{y}{ημ59^\circ}$.

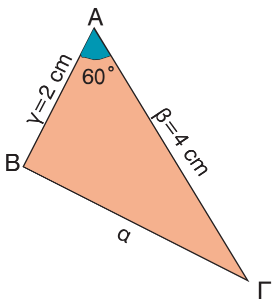
Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46°}=\frac{x}{ημ75°}$ έχουμε $x=\frac{10 \cdot ημ75°}{ημ46°}$ ή $x=\frac{10 \cdot 0,966}{0,719}=13,44$ μίλια.

Από την ισότητα $\frac{10}{ημ46°}=\frac{y}{ημ59°}$ έχουμε $y=\frac{10 \cdot ημ59°}{ημ46°}$ ή $y=\frac{10 \cdot 0,857}{0,719}=11,92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από τον φάρο $Φ_1$ 13,44 μίλια και από τον φάρο $Φ_2$ 11,92 μίλια.

3 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 60°$, $β = 4$ cm και $γ = 2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{Γ}$.**

Λύση



Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA$ ή $α^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot συν60°$

ή $α^2 = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2}$ ή $α^2 = 12$.

Άρα $α = \sqrt{12}$ δηλαδή $α = 2\sqrt{3}$ cm.

Ομοίως έχουμε:

$β^2 = γ^2 + α^2 - 2γασυνB$ ή $4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot συνB$ ή

$16 = 4 + 12 - 8\sqrt{3} \cdot συνB$ ή $8\sqrt{3} \cdot συνB = 0$ ή $συνB = 0$, οπότε $\widehat{B} = 90°$.

Αφού $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{Γ} = 180°$ και $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 90°$, έχουμε $\widehat{Γ} = 30°$.

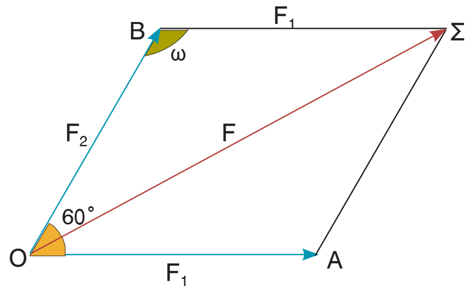
4 **Δύο δυνάμεις $F_1 = 4$ N και $F_2 = 3$ N εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία $ω = 60°$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.**

Λύση

Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΣ και επειδή $ΒΣ = F_1$, έχουμε:

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2συνω$ *(1)*.

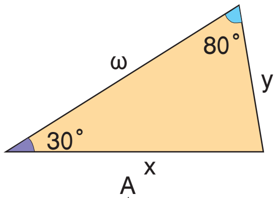
Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $συνω = -συν60°$ και ο τύπος *(1)* γράφεται:



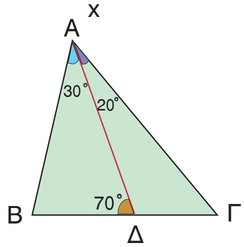
$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συν60°$ ή $F^2 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ ή $F^2 = 37$, οπότε

$F = \sqrt{37}$ N ή $F = 6,08$ N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ____ = ____ = ____



2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ ____ = ____ = ____

β) στο τρίγωνο ΑΔΓ ____ = ____ = ____

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

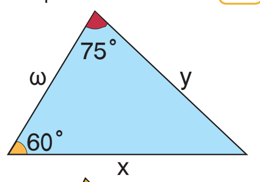
α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει αημΒ = βημΑ. ☐

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 100^\circ$, τότε $\dfrac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$. ☐

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 80^\circ$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$. ☐

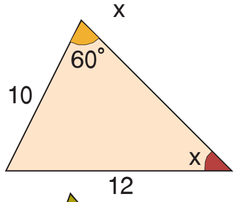
ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. ☐



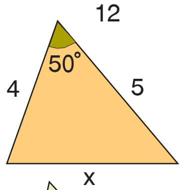
4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων:

$x^2 =$ .... $y^2 =$ .... $\omega^2 =$ ....

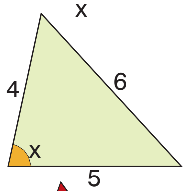
5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις



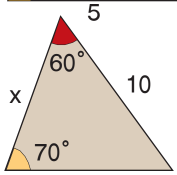
α) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



β) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....

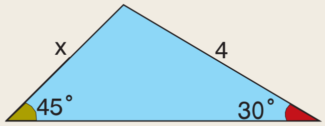


δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με τον νόμο των .... από την ισότητα ....

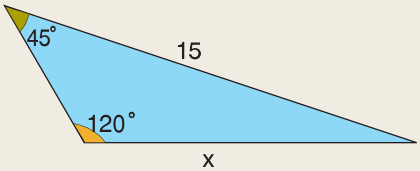
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

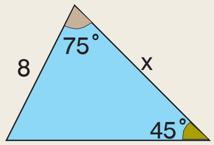
α)



β)

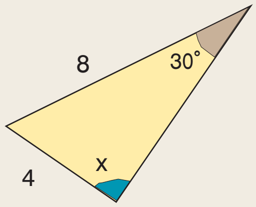


γ)

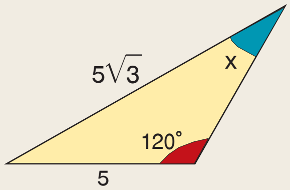


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

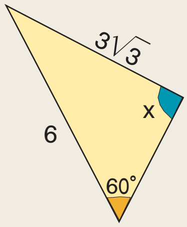
α)



β)



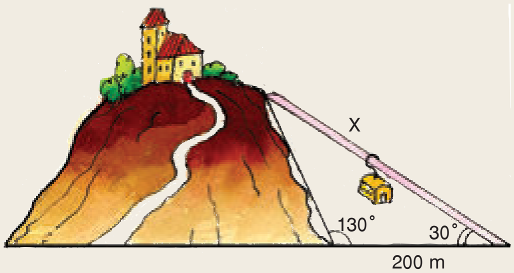
γ)



3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:
α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\widehat{B} = 30^\circ$ **β)** $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

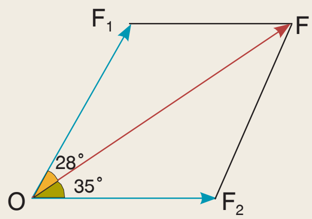
4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

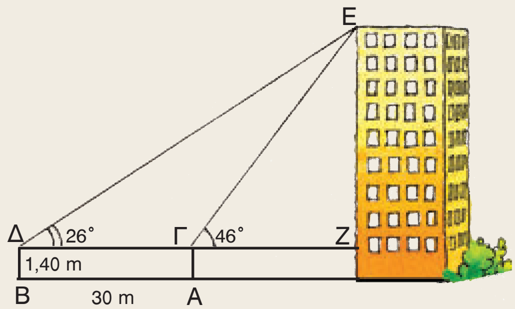


6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:
– Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\widehat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;
Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση του είπε:
– Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.
Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

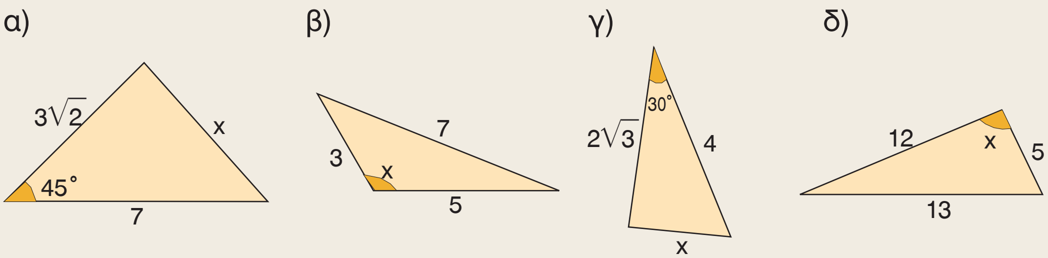
7 Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10$ N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35°. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1, F_2. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Gamma}Z = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $E\widehat{\Delta}\Gamma = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m.
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

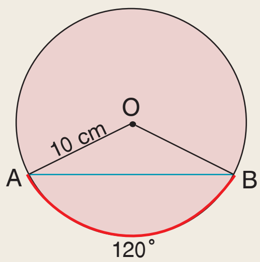


9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:



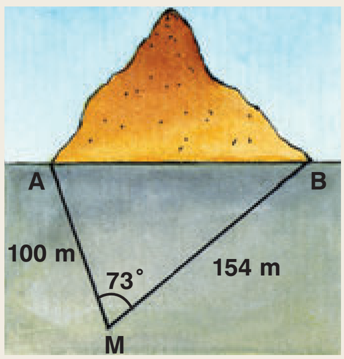
10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $\widehat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα R = 10 cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε τόξο 120°. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.

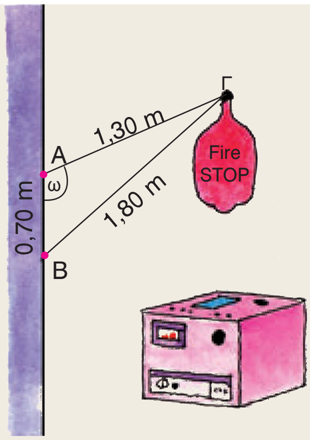


12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ=4, ΒΓ=3 και $\widehat{A} = 120^\circ$.

13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας ΑΒ. Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ που η απόστασή του από το Α ήταν 100 m και από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $A\widehat{M}B = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70 m, ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80 m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες ΑΒ, ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω. Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

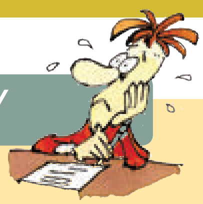


ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων.

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ



1 Να αποδείξετε ότι:

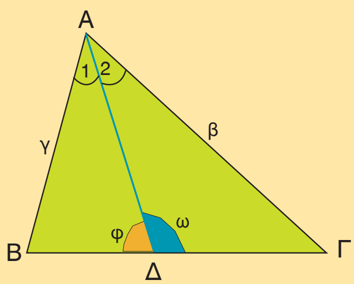
α) $(1 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 - \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)$ β) $\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \dfrac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2}{\eta\mu x}$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy δίνεται το σημείο Α(4, 0) και το σημείο Μ που έχει τετμημένη –5, τεταγμένη θετική και η απόστασή του από το Ο είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $A\hat{O}M$, να υπολογίσετε το συνω και την απόσταση ΑΜ.

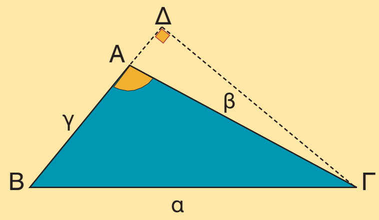
3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 30 cm, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΑΔ.

4 Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

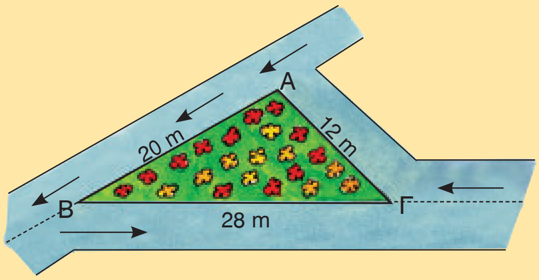
α) $\dfrac{\gamma}{B\Delta} = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu A_1}$ β) $\dfrac{\beta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\eta\mu A_2}$ γ) $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



5 α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$.



β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 α) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, τότε να αποδειξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

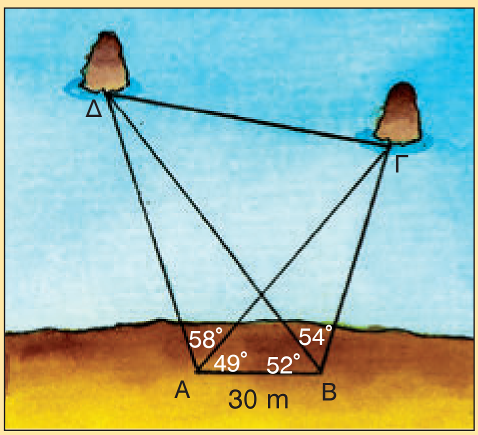
7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$ β) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$

γ) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B)$ δ) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{3}{4}$.

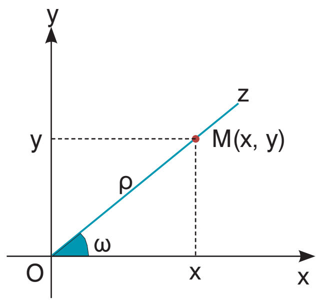
9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$**

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, αν είναι $\omega = x\hat{O}z$, και M(x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz, διαφορετικό από το O, τότε:



$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν M(1, 2), τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$\eta\mu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{1} = 2.$$

- **Τα πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

ω	0°		90°		180°
ημω		+		+	
συνω		+		–	
εφω		+		–	

- **Οι παραπληρωματικές γωνίες** έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

Π.χ. $\eta\mu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ$ $\qquad \sigma\upsilon\nu 160^\circ = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ $\qquad \varepsilon\varphi 160^\circ = -\varepsilon\varphi 20^\circ$

- **Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:**

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω).

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

Π.χ. $\eta\mu^2 35^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 35^\circ = 1$, $\quad \varepsilon\varphi 35^\circ = \dfrac{\eta\mu 35^\circ}{\sigma\upsilon\nu 35^\circ}$

- **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν**

  – Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

  – Νόμος των συνημιτόνων: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu A$

  $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\ \sigma\upsilon\nu B$

  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \sigma\upsilon\nu \Gamma$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ – ΟΝΟΜΑΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α′ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

1 α) 18, β) 10, γ) –7, δ) –20 **2** 2004 **3** 65 km, 25 km **4** α) $\frac{1}{3}$, β) –1, γ) $-\frac{7}{3}$, δ) $-\frac{3}{2}$ **5** α) $-\frac{1}{4}$, β) $\frac{25}{22}$, γ) –5 **6** –1 **7** α) +, – β) +, – γ) –, + δ) –, + **8** α), β), γ) Να βγάλετε τις παρενθέσεις και να κάνετε τις πράξεις. **9** $A=4-(x+y)+(\omega+\varphi)=2$, $B=1+(x+y)-(\varphi+\omega)=3$ **10** Είναι $\alpha+\beta=28$, $\gamma+\delta=16$, οπότε $A=-24+(\alpha+\beta)+2(\gamma+\delta)=36$ **11** Παρατηρήστε ότι το άθροισμα όλων των αριθμών είναι 0.

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

1 α) 2^3, β) 3^6, γ) 10^3, δ) 5^8, ε) 3^2, στ) 3^6, ζ) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$, η) 3^2 **2** α) 4, β) $\frac{1}{9}$, γ) 1, δ) –27, ε) 10.000, στ) 16, ζ) $\frac{9}{4}$, η) $\frac{1}{10}$ **3** α) $5x^{10}$, β) x^5y^7, γ) $-8x^4$, δ) $-\frac{8x}{27}$, ε) $-108x^{12}$, στ) $-\frac{2x}{3}$ **4** Α = 0, Β = –1, Γ = –100.000, Δ = 125 **5** Εννιά φορές.

Γ. Ρίζες

1 α) $-2\sqrt{5}$, β) $3\sqrt{7}-4\sqrt{3}$, γ) $\frac{11}{28}$, δ) 9 **2** α), β), γ), δ) Να εφαρμόσετε ιδιότητες ριζών **3** α) 4 β) 10 γ) 6 **4** **1η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 10. **2η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 16, **3η γραμμή:** $12\sqrt{2}$, 18, το ΚΛΜΝ **5** α) 10, β) $6\sqrt{2}$, γ) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$, δ) 2 **6** α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, β) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, γ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, δ) $2+\sqrt{2}$ **7** α) $x=\sqrt{5}$, β) $x=2$, γ) $x=8$, δ) $x=0$ **8** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **9** Παρατηρήστε ότι $ΒΕ=\sqrt{50}+\sqrt{8}=7\sqrt{2}$ **10** Είναι $ΒΓ=3\sqrt{5}$ και $ΔΕ=\sqrt{5}$, οπότε ΒΓ = 3ΔΕ **11** α) $ΑΓ=2\sqrt{5}$, β) $4+2\sqrt{20}$, $2(2+\sqrt{20})$.

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

1 α) 4, β) 4 **2** $-\frac{5}{7}\alpha^2\beta^3$ **3** α) ν = 0, β) ν = 3, γ) ν = 4 **4** α) κ = 3, ν = 2, λ οποιοσδήποτε αριθμός β) λ = 4, κ = 3, ν = 2, γ) λ = –4, κ = 3, ν = 2 **5** $E=4\pi\rho^2$, $V=\frac{4}{3}\pi\rho^3$, E=1256, $V=\frac{12560}{3}$ **6** x + 9, (x ο αριθμός των νικών) **7** x^2+25, 169

Β. Πράξεις με μονώνυμα

1 α) $-3x^2y$, β) $-\alpha x^2$, γ) $\frac{3}{2}x^3$, δ) $0{,}4\alpha\beta$, ε) $-\frac{4}{5}xy^2\omega^4$, στ) 0 **2** α) $-15x^3$, β) $\frac{9}{2}x^5$, γ) $-6x^3y^4$, δ) $6x^3y^5\omega$, ε) $-\frac{4}{3}\alpha^2\beta^6$, στ) $-\frac{1}{3}x^4\alpha^5$, ζ) $-x^3y^4\omega^4$ **3** α) $-4\alpha^2$, β) $\frac{4x}{y}$, γ) $-\frac{5}{18}\alpha\beta^3$, δ) $-7x\omega^2$, ε) $4x\alpha^3\omega$, στ) $-\frac{5}{7}\alpha\beta^5$ **4** α) $\frac{2}{3}x^5y^5$, β) x^3y^5, γ) $-4x^8y^{11}\omega^6$ **5** α) $3x^2$, β) $2xy$, γ) x^2+xy, δ) $\left(4+\frac{\pi}{2}\right)x^2$, ε) $2xy+\frac{\pi x^2}{2}$ – (α), (β), (δ) **6** Είναι ίσα.

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

1 α) $x^4+2x^3-5x^2+3x+10$, β) $2x^3-6x+1$, γ) $2x^3-3x^2+7x+7$, δ) $-x^4+x-5$ **2** α) 9, β) $y^3-3xy^2+2x^3$. Ο βαθμός ως προς x και y είναι 3 **3** α) P(–3) = 3 και P(2) = 3, β) P(1) = –5 και P(3) = 15 **4** α) Περιμ. = $2\pi x+200$, Εμβ. = πx^2+200x, β) Περιμ. = 388,4 m, Εμβ. = 8826 m^2 **5** α) $-x^3+7x^2-2x+1$, β) $-2x^2y+xy-y^3$, γ) $\alpha^2-7\alpha\beta-2\beta^2$, δ) $3\omega^2+\omega+3$, ε) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{12}x+\frac{4}{3}$, στ) $4x^3+2x^2+4$ **6** α) $5x^3-x^2-4x-2$, β) $2x^3+3x^2-2x+4$, γ) $x^3+5x^2-9x+14$ **7** α) $-7x^2$, +3, $-4x$ β) $+5x$, $-2x^3$, –1 **8** **1η γραμμή:** $6x^2-2x+1$ **2η γραμμή:** $5x^2+x-2$, x^2+5x-6 **3η γραμμή:** $3x^2-x$, $8x^2-1$ **9** α = –3, β = 7, γ = –4 **10** t^2+20t, 125 m.

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1 α) $15x^3y-6x^2y^2$, β) $8x^3-4x^2$, γ) $-x^2+9x$, δ) $-2x^3y+2xy^3$ **2** α) $-8\alpha^2+16\alpha\beta-6\beta^2$, β) x^3, γ) $6x^4-39x^3+45x^2$, δ) $x+20$, ε) $-6x^4+11x^3+9x^2-4x$, στ) $-3x^3+14x^2y-3xy^2-20y^3$ **3** α) $12x^4-29x^3+23x^2-6x$, β) $-2x^4+4x^3-5x^2+11x-6$, γ) $22x^3+41x^2y-8xy^2-3y^3$ **4** α) β) Να κάνετε τις πράξεις και αναγωγή ομοίων όρων **5** α) $-8x^3+30x^2-37x+15$, β) $2x^3-11x^2+18x-9$, γ) $-8x^3+24x^2-30x+10$ **6** α = –6, β = 18, γ = –12, δ = 0 **7** γ. **8** Παρατηρήστε ότι $E_1=x(x+5)$ και $E_2=(x+2)(x-1)$

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1 α) x^2+4x+4, β) $y^2+10y+25$, γ) $4\omega^2+4\omega+1$, δ) $\kappa^2+4\kappa\lambda+4\lambda^2$, ε) $9y^2+12y\beta+4\beta^2$, στ) x^4+2x^2+1, ζ) $y^4+2y^3+y^2$, η) $4x^4+12x^3+9x^2$, θ) $x^2+2\sqrt{2}x+2$, ι) $x+2\sqrt{xy}+y$, ια) $\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$, ιβ) $\omega^2+8+\frac{16}{\omega^2}$ **2** α) x^2-6x+9, β) $y^2-10y+25$, γ) $9\omega^2-6\omega+1$, δ) $4κ^2 - 4κλ + λ^2$, ε) $9y^2 - 12yβ + 4β^2$, στ) $x^4 - 4x^2 + 4$, ζ) $y^4 - 2y^3 + y^2$, η) $4x^4 - 20x^3 + 25x^2$, θ) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$, ι) $x - 2\sqrt{xy} + y$, ια) $α^2 - 3α + \frac{9}{4}$, ιβ) $ω^2 - 4 + \frac{4}{ω^2}$

3 α) $4 + 2\sqrt{3}$, β) $11 + 2\sqrt{30}$, γ) $11 - 6\sqrt{2}$, δ) $8 - 2\sqrt{7}$

4 α) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, β) $(y - 4)^2 = y^2 - 8y + 16$, γ) $(4x - α)^2 = 16x^2 - 8xα + α^2$, δ) $(x^2 - 2ω)^2 = x^4 - 4x^2ω + 4ω^2$

5 α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, β) $y^3 + 12y^2 + 48y + 64$, γ) $8α^3 + 12α^2 + 6α + 1$, δ) $27α^3 + 54α^2β + 36αβ^2 + 8β^3$, ε) $x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$, στ) $y^6 + 3y^5 + 3y^4 + y^3$, ζ) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, η) $y^3 - 15y^2 + 75y - 125$, θ) $27α^3 - 27α^2 + 9α - 1$, ι) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$, ια) $y^6 - 6y^4 + 12y^2 - 8$, ιβ) $ω^6 - 6ω^5 + 12ω^4 - 8ω^3$

6 α) $x^2 - 1$, β) $y^2 - 4$, γ) $9 - ω^2$, δ) $16 - x^2$, ε) $y^2 - x^2$, στ) $x^2 - y^2$, ζ) $4x^2 - 49y^2$, η) $x^2 - 2$, θ) $x - y$

7 $P(x) = 20 =$ σταθερό

8 α) Διαφορά τετραγώνων (3 φορές), β) Προηγούμενη ταυτότητα για $α = 10$ και $β = 1$

9 α) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ β) $\frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2}$ γ) $\frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$, δ) $2(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$

10 α) $x^3 - 27$, β) $y^3 + 8$, γ) $8ω^3 + 1$, δ) $1 - α^3$

11 α) $5x^2 + 12x + 41$, β) $-2x^2 + 10$, γ) $4x^2 - 2xy + 6y^2$, δ) 64, ε) $16α^3 + 12α$, στ) $6α^2 + 12α$, ζ) $6α^5 + 2α^3$, η) $-48α^2 + 13α - 1$

12 α), β), γ) Να κάνετε τις πράξεις στο α′ μέλος, δ), ε), στ) Να κάνετε τις πράξεις σε κάθε μέλος

13 α) 4, β) $12\sqrt{5}$, γ) 28, δ) 144

14 α) Να κάνετε τις πράξεις στο α′ μέλος, β) Προηγούμενη ταυτότητα για $α = 2005$, $x = 20$

15 Να αποδείξετε ότι στο τρίγωνο ΓΔΒ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

16 Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{(α+β)^2-(α-β)^2}{αβ} = 4$

17 α) Να κάνετε πράξεις στο β′ μέλος, β) Να χρησιμοποιήσετε προηγούμενη ταυτότητα (Ε = 24 cm^2)

18 Ίδιο εμβαδόν, αφού $(α - β)(α + β) = α^2 - β^2$

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

1 α) $3(α + 2β)$, β) $2(x - 4)$, γ) $2ω(4ω + 3)$, δ) $-3x(3x + 2)$, ε) $4αβ(2α + β)$, στ) $2x(x - y + 1)$, ζ) $αβ(α + β - 1)$, η) $2α^2(α - 2 + 3β)$, θ) $\sqrt{2}\,y(x - 3 + 2y)$

2 α) $(α - β)(x + y)$, β) $(x + y)(α + β)$, γ) $(x - 2)(2x - 5)$, δ) $(α - 2)(α^2 + 3)$, ε) $(x - 1)(4x - 1)$, στ) $2x(x - 3)(-2x + 9)$

3 i) α) $x(x+1)$, β) $y(2y-5)$, γ) $(ω-3)(ω+2)$, δ) $3α(α-1)$ ii) α) $x = 0$ ή $x = -1$, β) $y = 0$ ή $y = \frac{5}{2}$, γ) $ω = 3$ ή $ω = -2$, δ) $α = 0$ ή $α = 1$

4 α) $(x + y)(x + α)$, β) $(x - 1)(x^2 + 1)$, γ) $(x - 5)(x^2 + 4)$, δ) $(2x - 3)(x^2 + 2)$, ε) $(x - 2)(4x - α)$, στ) $(α - 2β)(9β - 5)$, ζ) $(3x - 2y)(4x - 5)$, η) $(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$, θ) $(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{2}x - 1)$

5 α) $(α + β)(7α + 3β)$, β) $(x - y)(5x - 3y)$, γ) $(x - y)(3x + 2y)$

6 α) $(α + β)(αβ - 1)$, β) Να αποδείξετε ότι $α = -β$ ή $αβ=1$

7 α) $(α - 1)(2α + β + x)$, β) $(α - 2)(2β + 5 + 2y)$

8 α) $(x - 3)(x + 3)$, β) $(4x - 1)(4x + 1)$, γ) $(α - 3β)(α + 3β)$, δ) $(αβ - 2)(αβ + 2)$, ε) $5(ω - 1)(7ω + 5)$, στ) $(-x + 8)(5x - 4)$, ζ) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$, η) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, θ) $(x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$

9 α) $2(x - 4)(x + 4)$, β) $7(2 - y)(2 + y)$, γ) $2x(x - 1)(x + 1)$, δ) $5α(x - 4)(x + 4)$, ε) $2(x - 3)(x + 1)$

10 Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $α^2 - β^2 = (α - β)(α + β)$ α) 45, β) 0,35, γ) 24λ

11 α) $x = 7$ ή $x = -7$, β) $x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$ ή $x = -\frac{2}{3}$, γ) $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -3$, δ) $x = -2$ ή $x = -3$ ή $x = -1$

12 α) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, β) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$, γ) $(ω + 4)(ω^2 - 4ω + 16)$, δ) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$, ε) $(3y + 1)(9y^2 - 3y + 1)$

13 α) $3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, β) $2α(2α + 1)(4α^2 - 2α + 1)$, γ) $\frac{4}{3}π\,(R - ρ)(R^2 + Rρ + ρ^2)$, δ) $αβ(α + β)(α^2 - αβ + β^2)$

14 α) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, β) $8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$, γ) $α^3 - 8β^3 = (α - 2β)(α^2 + 2αβ + 4β^2)$, δ) $α^3 + 125β^3 = (α + 5β)(α^2 - 5αβ + 25β^2)$

15 α) $(x - 1)^2$, β) $(y + 2)^2$, γ) $(ω - 3)^2$, δ) $(α + 5)^2$, ε) $(1 - 2β)^2$, στ) $(3x^2 + 1)^2$, ζ) $(2y - 3)^2$, η) $(4x + y)^2$, θ) $(5α - β)^2$, ι) $(α + β - 1)^2$, ια) $\left(\frac{y}{3} - 3\right)^2$, ιβ) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

16 α) $3(x + 4)^2$, β) $-(y - 2)^2$, γ) $2(α - 2β)^2$, δ) $α(2α + 3)^2$

17 α) $x^2 + 2xy + y^2$, β) $x + y$ **18** $x+1$ **19** α) $(x+1)(x+2)$, β) $(y - 1)(y - 3)$, γ) $(ω + 2)(ω + 3)$, δ) $(α + 1)(α + 5)$, ε) $(x - 4)(x - 3)$, στ) $(y + 3)(y - 4)$, ζ) $(ω - 3)(ω - 6)$, η) $(α + 5)(α - 2)$

20 α) $(x + 2)(x + \sqrt{3})$, β) $(x + 2α)(x + 3β)$, γ) $(x + 3)(x - \sqrt{2})$

21 α) $2(ω + 1)(ω + 4)$, β) $3(α - 5)(α + 1)$, γ) $α(x - 1)(x - 6)$

22 α) Να βγάλετε κοινό παράγοντα 1453, β) Να βγάλετε κοινό παράγοντα 801, γ) Διαφορά τετραγώνων, δ) Παρατηρήστε ότι $999 = 1000 - 1$, $1001 = 1000 + 1$, ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1 = (999 + 1)^2$, στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9 = (97 + 3)^2$

23 α) $(x-2)(x + 2)(y - 1)(y + 1)$, β) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$, γ) $(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$, δ) $(x - 3)^2(x + 3)^2$, ε) $(α - β)(α - β - 1)$, στ) $(x - y - ω)(x - y + ω)$, ζ) $(1 + α - β)(1 - α + β)$, η) $(y - 5 + x)(y - 5 - x)$, θ) $(x - 1)(x - 2)(-3x + 14)$, ι) $(y + 2)^2(y - 3)(y - 1)$, ια) $(α - β + γ)(α - β - γ)(α + β + γ)(α + β - γ)$, ιβ) $(2x - 3α)^2$

24 Η πλευρά x μειώθηκε κατά 2 ενώ η πλευρά y μειώθηκε κατά 1.

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

1 α) $\pi(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $\upsilon(x) = 0$, β) $\pi(x) = 2x^2 - x - 3$, $\upsilon(x) = 8$, γ) $\pi(x) = 6x^3 + 6x^2 + 5x + 7$, $\upsilon(x) = 0$, δ) $\pi(x) = 2x^2 + x + 3$, $\upsilon(x) = -5$, ε) $\pi(x) = x^3 - 2x + 1$, $\upsilon(x) = 5x$, στ) $\pi(x) = 3x^2 + x - 1$, $\upsilon(x) = 0$, ζ) $\pi(x) = 4x^2 + 3$, $\upsilon(x) = 0$, η) $\pi(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$, $\upsilon(x) = -\frac{1}{3}x - 4$ **2** α) $\Delta(x) = 6x^2 + 22x + 12$, $\delta(x) = 3x + 2$, $\pi(x) = 2x + 6$, β) $\Delta(x) = 2x^3 + 10x^2 + 2x + 20$, $\delta(x) = x + 3$, $\pi(x) = 2x^2 + 4x - 10$, $\upsilon(x) = 50$ **3** $2x^3 + x^2 + 2x + 5$ **4** α), β) Να αποδείξετε ότι η διαίρεση P(x): Q(x) είναι τέλεια **5** α) $\pi(x) = x^2 - 2x + 1$, $\upsilon(x) = 0$, β) $(x - 3)(x + 3)(x - 1)^2$ **6** α) Να κάνετε τη διαίρεση, β) $(x + 1)^4$ **7** Θα έκανε τη διαίρεση $(\alpha^3 + \beta^3) : (\alpha + \beta)$ **8** α) $\pi(x) = x^2 - 5$, $\upsilon(x) = 4x^2 - 6x + 7$, β) $\pi(x) = x^3 + 6$, $\upsilon(x) = -6x + 27$ **9** $\pi(x) = 6x^2 + 6x + 6$, $\upsilon(x) = \alpha + 6$ και $\alpha = -6$ **10** $2x + 3$ **11** Παρατηρήστε ότι το εμβαδόν του δωματίου είναι $45x^2 + 56xy + 16y^2$, Μήκος $= 9x + 4y$.

1.8 Ε.Κ.Π. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1 α) Ε.Κ.Π. $= 72x^3y^3\omega^4$, Μ.Κ.Δ. $= 6x^2y\omega^2$, β) Ε.Κ.Π. $= 30\alpha x^2y^3\omega^2$, Μ.Κ.Δ. $= 5$, γ) Ε.Κ.Π. $= 24x^2y^3(x + y)^2(x - y)$, Μ.Κ.Δ $= x(x + y)$ **2** α) Ε.Κ.Π.$=12(x+y)(x-y)^3$, Μ.Κ.Δ.$=2(x-y)$, β) Ε.Κ.Π. $= \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 2)$, Μ.Κ.Δ. $= \alpha - 2$, γ) Ε.Κ.Π. $= \alpha^2(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2$, Μ.Κ.Δ. $= \alpha(\alpha - 1)$.

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1 α) $x \neq 4$, β) $y \neq \frac{5}{2}$, γ) $\omega \neq -1$, δ) $x \neq 0$ και $x \neq 3$ **2** α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{y}{4}$, γ) $\frac{\omega}{4x}$, δ) $\frac{\alpha y^2}{2\beta}$, ε) 1, στ) –1, ζ) $\frac{1}{\omega-2}$, η) 1 **3** α) $\frac{3}{x+2}$, β) $\frac{3}{y}$, γ) $\frac{x}{\omega}$, δ) $\frac{5(\alpha+2)}{\alpha-2}$, ε) $\frac{x+4}{x}$, στ) $\frac{y-1}{y+1}$, ζ) $\frac{3x}{2x-\omega}$, η) $\frac{1}{\alpha-\beta}$ **4** α) $\frac{x+1}{x+2}$, β) $\frac{y-1}{y-2}$, γ) $\frac{\omega-1}{\omega+1}$, **5** α) $\frac{x+4}{x+3}$, β) $\frac{y-3}{2y-3}$, γ) $\frac{3}{\omega^2+1}$, δ) $\frac{\alpha-4}{\alpha}$ **6** Η μέση ταχύτητα είναι $\frac{A\Gamma}{2t} = \frac{5t + 2t^2}{2t}$

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α. Πολλαπλασιαμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

1 α) $\frac{1}{xy}$, β) $\frac{3}{4y}$, γ) $\frac{4x}{3}$, δ) $\frac{\alpha}{\beta}$, ε) $\frac{-3\omega}{2}$, στ) $\frac{6}{\alpha}$ **2** α) $\frac{4x^2}{3}$, β) $\frac{-1}{3y}$, γ) $\frac{-1}{3\beta^3}$, δ) $2\omega x$ **3** α) $\frac{8}{x}$, β) –1, γ) $\frac{x}{\omega(x+\omega)}$, δ) $\frac{1}{\alpha}$, ε) $\frac{x+1}{x-2}$, στ) $\frac{y+3}{2y-3}$ **4** α) 3, β) –1, γ) $-\frac{1}{\omega}$, δ) $\frac{1}{\beta(\alpha+1)}$, ε) $\frac{1}{x^2}$, στ) 1 **5** α) $\frac{x-2}{2(x-1)}$, β) $\frac{1}{2}$, γ) $\frac{(x+2)^2}{2(x+3)^2}$

Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

1 α) $\frac{x+y}{xy}$, β) $\frac{x-2}{x(x+1)}$, γ) $\frac{1-y}{y^2}$, δ) $\frac{1-\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)}$, **2** α) 1, β) $-\frac{3}{y}$, γ) $\frac{1}{\omega-2}$, δ) $\frac{-1}{2(x-6)}$, ε) $\frac{6}{x-\omega}$, στ) $\frac{-2}{\alpha+3}$ **3** α) $x - 1$, β) $\frac{y-1}{y+1}$, γ) $\frac{\omega^2}{\omega-1}$, δ) $\frac{1}{\beta+\alpha}$ **4** α) $\frac{x+2}{x}$, β) $\frac{3}{x-2y}$, γ) $\frac{y+3}{y-3}$, δ) $x+y$ **5** α) $\frac{2}{2x+1}$, β) $\frac{2}{x+1}$, γ) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, δ) $\frac{1}{\alpha+\beta}$ **6** α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα, β) Να εφαρμόσετε την (α) για $x = 56$, $y = 44$ **7** β) Να εφαρμόσετε την (α) για $x = 100$

Γενικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

1 $-\frac{217}{24}$ **2** Να λάβετε υπόψη σας ότι $2\nu+1$ είναι περιττός, ενώ ο 2ν είναι άρτιος **3** $A = 4$, $B = 3$ **4** β) Παρατηρήστε ότι $P(-99)=P(1-100)=P(100)$ **5** α) Να κάνετε τις πράξεις στο β′ μέλος, β) Να χρησιμοποιήσετε το (α), γ) Να χρησιμοποιήσετε το (β), **6** α) Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, β) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **7** α) Αποδείξτε ότι $(x-y)(x+y)(x^2+2)=0$, β) Αποδείξτε ότι $(x-y)^2(x+y)=0$ **8** α) $(x+1)(x+3)$, $(x+3)(x-1)$ β) $A = \frac{3}{(x+3)(x-1)}$ **9** β) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **10** α) $R = 4x^2 + 1$, β) $R = 4x^2 + 1$ **11** α) $\kappa^2 + \kappa = \kappa(\kappa+1)$ και ένας από τους δύο είναι άρτιος, β), γ) Να χρησιμοποιήσετε το (α) **12** α) $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$, να θέσετε $x = 7$ β) $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$. Παρατηρήστε ότι $2^{15}+1=$ $=(2^3)^5+1=8^5+1$ και να θέσετε $x = 8$. **13** α) Να κάνετε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος.

Κεφάλαιο 2ο

2.1. Η εξίσωση αx + β = 0

1 α) $x = -2$, β) Αδύνατη, γ) Ταυτότητα, δ) $x = -\frac{23}{2}$ **2** α) $x = -1$, β) Ταυτότητα, γ) Αδύνατη, δ) $x = 2$ **3** Ο αριθμός 6 **4** Δεν μπορεί γιατί είχε 60 € **5** Αν πάρουμε τυχαίο αριθμό x, τότε προκύπτει η εξίσωση $0x = 0$ (Ταυτότητα) **6** Σε 2 ώρες.

2.2. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

1 α) $x = 4$ ή $x = -1$, β) $y = 0$ ή $y = -5$, γ) $\omega = 3$ ή $\omega = -\frac{1}{2}$, δ) $x = 0$ ή $x = 7$, ε) $y = 0$ ή $y = 6$, στ) $\omega = \frac{1}{2}$ (διπλή λύση), **2** α) $x = 0$ ή $x = 7$, β) $y = 0$ ή $y = -9$, γ) $\omega = 6$ ή $\omega = -6$, δ) Αδύνατη, ε) $\varphi = 4$ ή $\varphi = -4$, στ) $z = 0$ ή $z = 3$ **3** α) $x = 0$ ή $x = 1$, β) $x = 0$ ή $x = -4$, γ) Αδύνατη, δ) $x = 0$ ή $x = 18$, ε) $x = 1$ ή $x = \frac{1}{5}$, στ) $x = 0$ ή $x = -2\sqrt{3}$ **4** α) $x = -\frac{1}{3}$ ή $x = \frac{4}{3}$, β) $y = 7$ ή $y = -5$, γ) $\omega = 4$ ή $\omega = -4$ **5** α) $x = 2$ (διπλή λύση), β) $y = 3$ ή $y = -4$, γ) $\omega = 5$ ή $\omega = -3$, δ) $t = 2$ ή $t = \frac{3}{2}$, ε) $\varphi = 1$ ή $\varphi = \frac{1}{3}$, στ) $z = -1$ ή $z = \frac{8}{5}$ **6** α) $x = -\frac{1}{5}$ (διπλή λύση), β) $y = 2$ ή $y = -2$ (διπλή λύση), γ) Να αντικαταστήσετε το 2006ω με $2007\omega - \omega$, $\omega = 1$ ή $\omega = -2007$. **7** α) $x = \alpha$ ή $x = \beta$, β) $x = \sqrt{3}$ ή $x = -1$.

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.

1 1η σειρά: $x^2 - x + 2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$. 2η σειρά: $3x^2 - 2x = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 0$. 3η σειρά: $-x^2 + 1 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ **2** α) $x = -1$ ή $x = 2$, β) $y = -1$ ή $y = \frac{1}{4}$, γ) $\omega = 2$ ή $\omega = -\frac{3}{2}$, δ) $z = 1$ ή $z = \frac{1}{2}$, ε) $t = \frac{1}{5}$ (διπλή λύση), στ) $x = \frac{3}{2}$ (διπλή λύση), ζ) $x = -3$ (διπλή λύση), η) $x = -1$ ή $x = 5$, θ) Αδύνατη **3** α) $x = 0$ ή $x = 7$, β) $x = 4$ ή $x = -4$ **4** α) $x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, β) $y = -1$ ή $y = 5$, γ) $\omega = 4$ (διπλή λύση), δ) Αδύνατη **5** α) $x = 2$ ή $x = \frac{8}{5}$, β) $y = \frac{5}{2}$ (διπλή λύση), γ) $t = 1$ ή $t = \frac{6}{5}$, δ) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\omega = 2\sqrt{3}$ **6** α) $(x-2)(x+6)$, β) $3\left(y - \frac{5}{3}\right)(y-1)$, γ) $-2(\omega-1)\left(\omega - \frac{3}{2}\right)$, δ) $(x-8)^2$, ε) $9\left(y + \frac{2}{3}\right)^2$, στ) $-(\omega-5)^2$ **7** α) Είναι $\Delta = (2\alpha - 1)^2 \geq 0$, β) Είναι $\Delta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ **8** Να δείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

2.3. Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1 α) $x = 10$ m, β) $x = 7$ m, γ) $x = 4$ m, δ) $x = 6$ m **2** α) 4, β) 6, γ) 3 **3** 2 dm **4** 50 m **5** 5 και 7 ή –7 και –5 **6** Οι σελίδες είναι 22 και 23 **7** 16 ομάδες **8** $x = 2$ **9** 35 και 2 **10** 18 cm, 24cm **11** 3 m **12** 4 m **13** 6 sec, 180 m.

2.4. Κλασματικές εξισώσεις

1 α) $x = 5$, β) $y = -9$, γ) αδύνατη, δ) $\alpha = 2$, ε) x είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $x \neq 3$, στ) αδύνατη **2** α) $x = 1$ ή $x = 3$, β) $y = 5$ ή $y = \frac{1}{2}$, γ) $\omega = 1$ ή $\omega = -3$, δ) $\alpha = 3$ ή $\alpha = -2$, ε) αδύνατη, στ) $y = 4$ **3** α) $x = 10$, β) y είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $y \neq 2$ και $y \neq -1$, γ) αδύνατη, δ) $\alpha = 1$ **4** α) $y = 2$, β) αδύνατη, γ) $x=0$ ή $x=3$, δ) $\alpha = -\frac{1}{4}$ **5** α) $x = 4$ ή $x = -4$, β) $x = 6$ **6** α) $V = \frac{m}{\rho}$, β) $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$, γ) $S = \frac{\rho\ell}{R}$, δ) $T_1 = \frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2}$, ε) $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, στ) $\alpha = \frac{\beta\gamma}{2\gamma-\beta}$, ζ) $\upsilon_\alpha^2 = \frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$, η) $\lambda = \frac{S-\alpha}{S}$. **7** α) 4 και $\frac{1}{4}$, β) 5, γ) 6 και 8 **8** $\frac{84}{x} + 9 = \frac{84}{x-3}$, $x = 7$ **9** $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+2} + 4$, $x = 10$ **10** $\frac{12}{x} + \frac{15}{x-0{,}2} = 25$, $x = 1{,}2$ gr/cm^3 **11** $\frac{120}{x} = \frac{120}{x-2} - 3$, $x = 10$ **12** $\frac{210}{x} - \frac{210}{x+10} = \frac{1}{2}$, $60\frac{km}{h}$.

2.5. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

1 Παρατηρήστε ότι $3(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) > 0$ **2** α) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το –5, και στη συνέχεια αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το 30, β) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 3 και στη συνέχεια προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 18, γ) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 4 και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 2 **3** α) $0 < \alpha - 2 < 4$, β) $-1 < 2\alpha - 5 < 7$, γ) $-5 > 1 - 3\alpha > -17$ **4** α), β) Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της διάταξης, γ) Παρατηρήστε ότι $2\alpha < \alpha + \beta$, δ) Παρατηρήστε ότι $\alpha + \beta < 2\beta$ **5** και **6** Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της διάταξης **7** Να πολλαπλασιάσετε κατά μέλη τις ανισότητες $\alpha > \beta$ και $\alpha > \beta$ **8** α) Να πολλαπλασιάσετε και τα δύο μέλη της ανισότητας $\alpha > 1$ με το α, β) Να πολλαπλασιάσετε και τα δύο μέλη της ανισότητας $x > 2$ με το x^2 **9** Να διαιρέσετε τα μέλη της ανισότητας $\alpha > \beta$ με $\alpha\beta > 0$ **10** α) Παρατηρήστε ότι $x-3>0$ και $y-2<0$, β) Παρατηρήστε ότι $xy + 6 - 2x - 3y = (x-3)(y-2)$ **11** α) Παρατηρήστε ότι $(x-1)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν

$x = 1$, **β)** Παρατηρήστε ότι $(x - y)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν $x = y$, **γ)** Παρατηρήστε ότι $x^2 + (y - 1)^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ και $y = 1$. **12** **α)** Η ανισότητα γίνεται $(x–1)^2 \geq 0$, **β)** Η ανισότητα γίνεται $(x + 1)^2 \geq 0$ **13** 126 **14** Μεταξύ 126 € και 145 € **15** $16{,}51 < B < 19{,}10$ – ναι **16** **α)** $x > 1$, **β)** $x < -5$, **γ)** αδύνατη, **δ)** $x < -4$, **ε)** αληθεύει για κάθε τιμή του x, **στ)** $x > 0$ **17** **α)** $-4 < x < 9$, **β)** $x > -2$, **γ)** $x < -2$ **18** $x = 3$.

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1 **α)** $x = -α - β$, **β)** $x = -β$ **2** $x = 3$, $y = 5$ **3** 15 και 16 **4** **α)** $x = -\frac{2α}{3}$, **β)** $x = \frac{1-3α}{6}$ **5** $x = 2$ **6** Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ και οι λύσεις είναι $3, -1, -5$ **7** 2 και 3 **8** 19m και 21m **9** Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΑΒΓ, οπότε $x = 9$ **10** Προσδιορίστε το πρόσημο της διαφοράς τους, όταν $αβ > 0$, $αβ < 0$, $αβ = 0$ **11** **α)** Να κάνετε τις πράξεις στο πρώτο μέλος, **β)** Να χρησιμοποιήσετε το (α) **12** Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $ν(ν + 1)(ν + 2) > 0$ **13** **α)** Να χρησιμοποιήσετε την τριγωνική ανισότητα $α + β > γ$, **β)** Να χρησιμοποιήσετε τις τριγωνικές ανισότητες $α < β + γ$ και $α + γ > β$, **γ)** Να χρησιμοποιήσετε κυκλικά το ερώτημα (β) **14** Παρατηρήστε ότι $\frac{α}{β} > 1$ και $\frac{β}{γ} > 1$ **15** Η διακρίνουσα είναι $Δ = 5α(α–4) > 0$ **16** Παρατηρήστε ότι $(α–1)^2 + (β–2)^2 + (γ–3)^2 = 0$, οπότε $α=1$, $β=2$ και $γ=3$ **17** Παρατηρήστε ότι $A = (α–5β)^2 + 2(β–2)^2 \geq 0$, η ελάχιστη της Α είναι 0 όταν $α=10$ και $β=2$ **18** Η εξίσωση γίνεται $(x - 2020)\left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2007}\right) = 0$, οπότε $x = 2020$.

Κεφάλαιο 3ο

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

1 $ε_1 \,//\, ε_2 \,//\, ε_3$ **2** **α)** $λ = 4$ **3** **α)** $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, **β)** $E = 6$ **4** **α)** $(-2, 2)$, **β)** $ζ_3$ **5** **β)** Σχηματίζεται ορθογώνιο με εμβαδόν 30 **6** **α)** $λ = 2$, **β)** $λ = 1$ **7** **α)** $x + 2y = 4$, **β)** 15 λεπτά **8** $2x + 3y = 25$, $(2, 7)$, $(5, 5)$, $(8, 3)$ $(11, 1)$.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

1 **α)** $(3, 2)$, **β)** $(1, 3)$, **γ)** $(0, 0)$, **δ)** $(1, 1)$, **ε)** Αόριστο, **στ)** Αδύνατο **2** **α)** Καμμία, **β)** Άπειρες, **γ)** Μία **3** **α)** 0 m/sec, 10 m/sec, **β)** $t = 10$ sec, $υ = 20$ m/sec **4** **α)** 1η περίπτωση: $ε_1$, 2η περίπτωση: $ε_2$, 3η περίπτωση: $ε_3$, **β)** 24 αγώνες, **γ)** 2η, **δ)** 90 €, **ε)** 1η περίπτωση: αν παρακολουθήσει μέχρι και 6 αγώνες, 2η περίπτωση: αν παρακολουθήσει από 6 μέχρι και 24 αγώνες, 3η περίπτωση: αν παρακολουθήσει από 24 αγώνες και πάνω.

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

1 **α)** $x = 9$, $y = 4$, **β)** $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$, **γ)** $x = 3$, $y = 2$, **δ)** $x = -1$, $y = -1$ **2** **α)** $x = 11$, $y = 26$, **β)** $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, **γ)** $x = y = 0$, **δ)** αδύνατο **3** **α)** $x = y = 4$, **β)** $x = -3$, $y = -2$, **γ)** $x = 5$, $y = 4$ **4** **α)** $x = 0$, $y = -2$, **β)** $x = 3$, $y = -3$ **5** **α)** $α = 1$, $β = -1$, **β)** $ω = 2$, $φ = -5$, **γ)** $x = -2$, $y = 1$ **6** **α)** $x = 1$, $y = 2$, **β)** Πολλαπλασιάστε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το –2 και προσθέστε κατά μέλη, $α = 2$, $β = -6$, **γ)** Πολλαπλασιάστε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με 3 και προσθέστε κατά μέλη, $ω=φ=3$ **7** $M\left(\frac{15}{7}, \frac{8}{7}\right)$ **8** Κοινό σημείο των $ε_1$ και $ε_2$ είναι το $(-4, 2)$, κοινό σημείο των $ε_2$ και $ε_3$ είναι το $(3, -5)$ και κοινό σημείο των $ε_3$ και $ε_1$ είναι το $(8, 10)$ **9** 45 και 55 **10** $α=5$, $β=1$ **11** $α=-1$, $β=1$ **12** $λ = 5$, $μ = 7$ **13** $π = 20$ cm, $γ = 30$ cm **14** 500 των 2 κιλών και 300 των 5 κιλών **15** Φυσική 19 και Χημεία 13 **16** 35 cm και 23 cm **17** $θ = 16$, $μ = 24$ **18** 250 και 150 λίτρα **19** $υ_0 = 20$ m/sec και $α = 4$ m/sec^2 – Σε 5 sec **20** 845 αυτοκίνητα και 100 μοτοσικλέτες **21** 10 και 2.

Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

1 Αδύνατο αν $κ \neq 1$ και αόριστο αν $κ = 1$ **2** $λ = 5$ και $μ = -2$ **3** $α=2$ και $β= 10$ **4** **α)** $x = y = 1$, **β)** $x = y = -2$ **5** **α)** $(x = 1,\ y = 2)$ ή $(x = 4,\ y = -4)$, **β)** $x = -2$ και $y = -1$, **γ)** $x = y = \frac{7}{2}$ **6** 83 και 17 **7** $λ = 2$ και $κ = 1$ **8** 11 cm και 7 cm **9** 9 και 4 **10** Α′ θέση: 50 εισιτήρια – Β′ θέση: 300 εισιτήρια **11** 64 **12** 75 **13** 32 m και 28 m **14** 30 λεπτά και 15 λεπτά **15** 75 km/h και 60 km/h **16** 25 m/sec και 120 m **17** $R_1 = 4Ω$, $R_2 = 6Ω$.

Κεφάλαιο 4ο

4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

1 και **2** Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 2

3 $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ **4** $A\left(\frac{3}{2}, -9\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}, -9\right)$
5 $\lambda = 0$ **6** $\lambda = -2$ **7** α) Να κάνετε τα διαγράμματα $E = \frac{1}{2}\upsilon^2$, $E = \upsilon^2$, $E = 2\upsilon^2$, β) Εκείνο που έχει μάζα 1 (μικρότερη), γ) Εκείνο που έχει μάζα 4 (μεγαλύτερη).

4.2 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

1 α), β) Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 3 **2** α) Ελάχιστη τιμή –1, β) Μέγιστη τιμή 5, γ) Μέγιστη τιμή 7 **3** $x=1$, $x=-3$ **4** Παρατηρήστε ότι ισχύει $y > 0$ για κάθε τιμή του x **5** α) $\lambda = 2$, β) $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ **6** 10 **7** Παρατηρήστε ότι $-\frac{\beta}{2} = 4$ και $-7 = 4^2 + 4\beta + \gamma$, $\beta = -8$ και $\gamma = 9$
8 α) Παρατηρήστε ότι $-\frac{\beta}{2\alpha} = 20$ και τα σημεία (0, 0) και (20, 10) ανήκουν στην παραβολή, β) 7,5 m – Ν(10 , 7,5).

Γενικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

1 $y = \pm\frac{2}{3}x^2$ **2** $\alpha = 0$ **3** $A(1, -1)$, $B(-3, -9)$
4 $y = 2x^2 - 8x + 5$ **5** α) Παρατηρήστε ότι $ΑΓ=10-x > 0$, γ) Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν $x=y=5$ cm
6 $E = (6-x)(3+x)$, $x = 1,5$ m **7** Αν $ΑΜ = x$, τότε $E= 2x^2-20x+100$ – Στο μέσον του ΑΒ **8** α) Παρατηρήστε ότι $-\frac{\beta}{2\alpha} = 2$ και τα σημεία (0, 6), (2, 8) ανήκουν στην παραβολή, β) 4 m **9** α) Παρατηρήστε ότι $y = \alpha x^2 + 6$ και το σημείο (8, 0) ανήκει στην παραβολή, β) Προσδιορίστε την τεταγμένη του σημείου που έχει τετμημένη 1,6 και θα βρείτε 5,76 m.

Κεφάλαιο 5ο

5.1 Σύνολα

1 α) $A = \{-5, 5\}$, β) $B = \{5\}$, γ) $Γ = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, δ) $Δ = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ **2** $A \subseteq K$, $Γ \subseteq K$, $A = Λ$, $B = M$
3 $A=\{1, 2, 3\}$. Υποσύνολα του Α είναι: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, A, $\varnothing$ **4** $A = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$
5 α) Α = {περιττοί φυσικοί αριθμοί}, β) Β = {γράμματα της λέξης ι σ τ ο ρ ί α}, γ) Γ = {ψηφία του αριθμού 20}
6 α) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, β) $A \cap B = \{2, 4\}$, γ) $A' = \{3, 6\}$, δ) $B' = \{1, 3, 5\}$ **7** α) $A=\{α, λ, γ, ε, β, ρ\}$, $B = \{φ, ρ, ε, γ, α, τ\}$, $Γ = \{ε, λ, α, φ, ι\}$, β) $B \cup Γ = \{φ, ρ, ε, γ, α, τ, λ, ι\}$, $A \cap B = \{α, γ, ε, ρ\}$, $A \cap Γ = \{α, λ, ε\}$, γ) $A \cap (B \cup Γ) = \{α, λ, γ, ε, ρ\}$ **8** α) $A \cap B$, β) $A \cup B$, γ) $A \cap B'$, δ) $A' \cap B'$ **9** α) Είναι αθλητής του στίβου ή φοιτητής του Πανεπιστημίου, β) Είναι αθλητής του στίβου και φοιτητής του Πανεπιστημίου, γ) Δεν είναι αθλητής του στίβου, δ) Δεν είναι φοιτητής του Πανεπιστημίου, ε) Είναι αθλητής του στίβου και όχι φοιτητής του Πανεπιστημίου, στ) Δεν είναι αθλητής του στίβου αλλά είναι φοιτητής του Πανεπιστημίου, ζ) Δεν είναι ούτε αθλητής του στίβου ούτε φοιτητής του Πανεπιστημίου.

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

1 Ω = {σπ, σλ, ττ, τλ, γπ, γλ} **2** Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} **3** ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ **4** α) Ω = {Κ, Α, Μ}, β) Με τρεις το πολύ κινήσεις, γ) Με δύο κινήσεις **5** α) Ω = {ΔΕ, ΔΖ, ΔΣ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΣ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΣ, ΠΕ, ΠΖ, ΠΣ}, β) Α = {ΔΕ, ΔΖ, ΚΕ, ΚΖ, ΜΕ, ΜΖ, ΠΕ, ΠΖ}, Β = {ΔΕ, ΔΖ, ΔΣ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΣ, ΠΕ, ΠΖ, ΠΣ} **6** α) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, β) $A \cap B = \{1, 3\}$, γ) $B' = \{6, 7, 8, 9\}$ **7** α) {2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972}, β) A = {2672, 2872, 2972}, B = {2642, 2672, 2842, 2872}.

5.3 Έννοια πιθανότητας

1 α) $\frac{6}{13}$, β) $\frac{3}{13}$ **2** 0,5% **3** $\frac{40}{52}$ **4** $P(A) = \frac{7}{20}$, $P(B) = \frac{15}{20}$, $P(Γ) = \frac{13}{20}$ **5** α) $\frac{3}{25}$, β) $\frac{8}{25}$, γ) $\frac{10}{25}$, δ) $\frac{3}{25}$

6 $\frac{2}{8}$ **7** $P(A)=\frac{1}{36}$, $P(B)=\frac{6}{36}$, $P(Γ)=\frac{11}{36}$ **8** $\frac{13}{25}$, $\frac{12}{24}$

9 $\frac{1}{4}$ ή 25% **10** $\frac{1}{10}$ **11** $\frac{1}{14}$ **12** 48% **13** $\frac{12}{24}$ ή 50%

Γενικές ασκήσεις 5ου κεφαλαίου

1 α) $Ω = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$, β) $A \cup B=\{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4, 8\}$, $A' = \{1, 3, 5, 7\}$, $B' = \{0, 3, 5, 6, 7\}$, γ) i) $P(A) = \frac{5}{9}$, ii) $P(B') = \frac{5}{9}$, iii) $P(A \cap B) = \frac{3}{9}$, iv) $P(A \cup B) = \frac{6}{9}$

2 $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{8}$ **3** α) 1η γραμμή: 12, 36 - 2η γραμμή: 18, 14 β) i) $\frac{30}{80}$, ii) $\frac{32}{80}$, iii) $\frac{12}{80}$, iv) $\frac{68}{80}$ **4** $\frac{2}{12}$

5 $\frac{3}{4}$ ή 75% **6** α) $\frac{4}{12}$, β) $\frac{6}{12}$ **7** $\frac{2}{10}$ **8** Δεν είναι σωστός, αφού, $P(8) = \frac{5}{36}$ ενώ $P(7) = \frac{6}{36}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Ισότητα τριγώνων

1 Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ (Π – Γ – Π) **2** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΣ, ΟΒΣ, (Π – Γ – Π) **3** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ (Π – Γ – Π) **4** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΓ (Π – Γ – Π) **5** Τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ, ΓΔΕ είναι ίσα (Π – Γ – Π) **6** Τα τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΕ είναι ίσα (Π – Γ – Π) **7** Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ είναι ίσα (Γ – Π – Γ) **8** Να φέρετε μια διαγώνιο και να συγκρίνετε τα τρίγωνα που σχηματίζονται **9** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, Α′Β′Δ′ (Γ – Π – Γ), β) (Γ – Π – Γ) **10** (Π – Π – Π) **11** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ (Π – Π – Π) **12** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ (Π – Π – Π) **13** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΜ, Α′Β′Μ′ (Π – Π – Π), β) (Π – Γ – Π) **14** α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΔΜ, ΓΕΜ (Π – Γ – Π), β) (Π – Π – Π) **15** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ **16** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ – Ιδιότητα της μεσοκαθέτου **17** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ **18** Να φέρετε ΑΑ′ ⊥ ε, ΒΒ′ ⊥ ε και να συγκρίνετε τα τρίγωνα που σχηματίζονται **19** α) Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, Α′Β′Δ′, β) (Γ – Π – Γ) **20** Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ, ΟΓΝ. Ναι, ισχύει το αντίστροφο. **21** Να φέρετε τις χορδές ΒΓ, ΒΔ και να παρατηρήσετε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

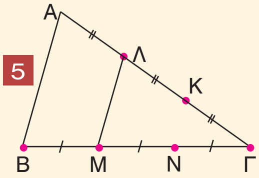
1 Να εφαρμόσετε το θεώρημα των ίσων τμημάτων μεταξύ παραλλήλων ευθειών **2** β) i) $\frac{2}{5}$, ii) 2, iii) $\frac{5}{6}$, iv) $\frac{3}{2}$, v) $\frac{1}{3}$ **3** α) 2, β) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, γ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **4** α) $\frac{3}{5}$, β) $\frac{4}{5}$, γ) $\frac{3}{4}$ **5** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **6** α) Να εφαρμόσετε τη σχετική πρόταση που ισχύει σε τρίγωνο, β) Είναι $\frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΜ} = 2$ **7** Παρατηρήστε ότι ΒΜ, ΔΜ είναι διάμεσοι ορθογωνίων τριγώνων που αντιστοιχούν στην ίδια υποτείνουσα. **8** Να φέρετε από το μέσο της ΑΔ παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου.

1.3 Θεώρημα Θαλή

1 ΒΖ=7 **2** ΒΖ=3,2, ΖΓ=4,8 **3** x=12 **4** ΟΓ=15, ΕΖ = 12 **5** x = 7,5 **6** ΟΚ = 15, ΚΓ = 9 **7** x = 10,8, y = 6 **8** Για να είναι $\frac{ΟΑ}{ΟΒ} = \frac{ΟΓ}{ΟΔ}$ μία λύση είναι ΟΔ = 62 και ΟΓ = 31

1.4 Ομοιοθεσία

5



1 β) i) 1,5 cm ii) 6 cm **2** 6 cm, 8 cm, 10 cm **3** $\hat{A}' = 90^\circ$, $\hat{B}' = \hat{\Gamma}' = 45^\circ$ και Α′Β′ = Α′Γ′ = 6 cm, Β′Γ′ = $6\sqrt{2}$ cm **4** Παρατηρήστε ότι ο ομοιόθετος κύκλος θα έχει τριπλάσια ακτίνα **6** Είναι ίσα **7** α) Α′(–2, 2), Β′(4, 4), Γ′(0, –4). Είναι διπλάσιες β) Α″(–3, 1), Β″(3, 3), Γ″(–1, –5). Όχι **8** Παρατηρήστε ότι το ΔΕ είναι ομοιόθετο του ΒΓ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{3}$ **9** Παρατηρήστε ότι το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των Α′Α, Β′Β και ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\frac{5}{2}$

1.5 Ομοιότητα

Α. Όμοια πολύγωνα

1 Στη β′ περίπτωση **2** α) x = 4,2 cm, β) x = 50° **3** Όχι. Δεν είναι οι πλευρές ανάλογες **4** Είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Κ και λόγο $\frac{1}{2}$ **5** α) ΑΕΚΗ ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο $\frac{1}{4}$, β) ΚΘΓΖ ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{3}{4}$, ΚΘΓΖ ≈ ΑΒΓΔ ≈ ΑΕΚΗ **6** 120 m, 1: 4000.

Β. Όμοια τρίγωνα

1 α) x = 6cm, β) x = 6cm, γ) x = 3cm **2** ΑΔ = 6 cm **3** α) Ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, β) Έχουν γωνίες ίσες **4** ΑΒ = 48 m **5** x = 4 **6** 21 m **7** x = 10cm **8** 1,70 m.

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

1 $\frac{9}{25}$ **2** 50 cm² **3** 25 φορές **4** α) $\frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{4}$ **5** Παρατηρήστε ότι $\frac{E_1}{E} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ και $\frac{E_2}{E} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ **6** α) $\frac{16}{9}$, β) $\frac{16}{25}$ **7** α) Το ΔΕΖ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο Ο και λόγο $\frac{1}{2}$, β) Είναι $\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **8** α) 57,6 cm², β) 22,5 cm² **9** 69% **10** 36%.

Γενικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

1 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΕΑΓ είναι ίσα **2** α) Να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΕ, β) Παρατηρήστε ότι $Α\hat{Δ}Ζ = Ε\hat{Α}Β$ **3** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΒΓΖ **4** Να συγκρίνετε κατ' αρχήν τα τρίγωνα ΒΓΜ, Β′Γ′Μ′ **5** α) ΟΔ = 9,6 cm και ΟΕ = 12,8 cm **6** $6\sqrt{2}$ cm **7** 36 cm^2 **8** α) 2, β) 10 cm **9** 1 cm **10** α) Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Θαλή, β) Παρατηρήστε ότι (ΔΕΗΖ)=(ΑΒΓ)–(ΑΔΕ)–(ΒΔΖ)–(ΓΕΗ).

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° \leq ω \leq 180°$

1 α) ημω $= \frac{4}{5}$, συνω $= \frac{3}{5}$, εφω $= \frac{4}{3}$, β) ημω $= \frac{12}{13}$, συνω $= -\frac{5}{13}$, εφω $= -\frac{12}{5}$, γ) ημω = 1, συνω = 0, εφω δεν ορίζεται **2** α) 2, β) ημω $= \frac{2\sqrt{5}}{5}$, συνω $= -\frac{\sqrt{5}}{5}$, εφω = –2 **3** Π($5\sqrt{3}$, 5) **4** α) Μ(–1, $\sqrt{3}$), β) ημ120° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, συν120° $= -\frac{1}{2}$, εφ120° $= -\sqrt{3}$ **5** α) Να φέρετε ΜΚ ⊥ x′x και παρατηρήστε ότι ΜΚ = 1, β) ημ150° $= \frac{1}{2}$, συν150° $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$, εφ150° $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **6** α) $\frac{3}{4}$, β) ημω $= \frac{3}{5}$, συνω $= -\frac{4}{5}$ **7** Παρατηρήστε ότι $Σ_1$(10, 7) και $Σ_2$(20, 18), $Σ_1\widehat{O}Σ_2 = 7°$.

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

1 α) ημ120° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, συν120° $= -\frac{1}{2}$, εφ120° $= -\sqrt{3}$,
β) ημ135° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, συν135° $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ135° = –1,
γ) ημ150° $= \frac{1}{2}$, συν150° $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$, εφ150° $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 α) Παρατηρήστε ότι 108°+72°=180° και 77°+103° =180°, β) Παρατηρήστε ότι 122°+ 58° = 180° **3** α), β) Να αντικαταστήσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τις τιμές τους **4** Παρατηρήστε ότι σε κάθε περίπτωση οι γωνίες είναι παραπληρωματικές **5** α) 45° ή 135°, β) 30° ή 150°, γ) 30°, δ) 120°, ε) 120°, στ) 45° **6** Παρατηρήστε ότι οι δύο γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες ή παραπληρωματικές – όχι **7** α), β) Παρατηρήστε ότι $\hat{A} + \hat{Γ} = 180°$ **8** ημω $= \frac{4}{5}$, συνω $= \frac{3}{5}$, εφω $= \frac{4}{3}$ και ω, φ παραπληρωματικές γωνίες **9** Να φέρετε το ύψος ΑΚ, ημω $= \frac{3\sqrt{21}}{14}$, συνω $= \frac{\sqrt{7}}{14}$, εφω $= 3\sqrt{3}$ και ω, φ παραπληρωματικές γωνίες.

2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

1 συνω $= \frac{12}{13}$, εφω $= \frac{5}{12}$ **2** ημω $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$, εφω $= -2\sqrt{2}$ **3** ημω $= \frac{3}{5}$, συνω $= \frac{4}{5}$ **4** Α = 0 **5** Να βγάλετε κοινό παράγοντα α) το ημω, β) το $συν^2ω$ **6** α), β) Να αντικαταστήσετε τα x, y **7** α) Να αντικαταστήσετε το $ημ^2α$ με 1 – $συν^2α$, β) Από τους δύο πρώτους όρους να βγάλετε κοινό παράγοντα το $ημ^2α$ **8** α), β) Να αναπτύξετε τις ταυτότητες **9** α) Παρατηρήστε ότι $εφ^2x = \frac{ημ^2x}{συν^2x}$, β) Να αντικαταστήσετε την εφx με $\frac{ημx}{συνx}$ **10** α) Παρατηρήστε ότι $συν^2x = 1 - ημ^2x = (1 - ημx)(1 + ημx)$, β) Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα εφx $= \frac{ημx}{συνx}$ **11** α) 1, β) 2 **12** α) Παρατηρήστε ότι εφ70° $= \frac{ημ70°}{συν70°}$ και 70° + 110° = 180°, β) Παρατηρήστε ότι εφ40° $= \frac{ημ40°}{συν40°}$ και 40° + 140° = 180° **13** Να αντικαταστήσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών α = 30° και β = 60°.

Μαθηματικό αίνιγμα: Επειδή $\left(\frac{λ+1}{λ+3}\right)^2 + \left(\frac{-2λ\sqrt{3}}{λ+3}\right)^2 = 1$ και ω>90° είναι λ=1 και ω = 150°.

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

1 α) $2\sqrt{2}$, β) $5\sqrt{6}$, γ) $4\sqrt{6}$ **2** α) 90°, β) 30°, γ) 90° **3** α) $\hat{A}$ = 45° και $\hat{Γ}$ = 105° ή $\hat{A}$ = 135° και $\hat{Γ}$ = 15°, β) $\hat{B}$ = 45° και $\hat{A}$ = 75° **4** Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των ημιτόνων **5** Περίπου 448 m **6** Από τον νόμο των ημιτόνων προκύπτει ημΑ = $\sqrt{3}$ που είναι αδύνατο **7** $F_1 \approx 6{,}44$ Ν και $F_2 \approx 5{,}27$ Ν **8** 29,06 m **9** α) 5, β) 120°, γ) 2, δ) x = 90° **10** β = γ = 3 **11** $10\sqrt{3}$ cm **12** ΑΓ = $\sqrt{13}$, ΒΔ = $\sqrt{37}$ **13** Είχε δίκιο. Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των συνημιτόνων. Το μήκος της σήραγγας ήταν 157,19 m **14** 126°.

Γενικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1 α) Να κάνετε τις πράξεις σε κάθε μέλος, β) Να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα στο 1ο μέλος **2** συνω $= -\frac{5}{13}$ και ΑΜ = 15 **3** Είναι $Α\hat{Δ}Γ = Α\hat{Γ}Δ$. Είναι ΑΔ = $10\sqrt{6}$ cm. **4** α) β) Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των ημιτόνων, γ) Παρατηρήστε ότι ημφ = ημω **5** β) $\hat{A}$ = 120°, (ΑΒΓ) = $60\sqrt{3}$ m^2 **6** α) Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των ημιτόνων, β) Είναι ημ(Β + Γ) = συν(Β – Γ) = 1 **7** α) Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των ημιτόνων, β), γ), δ) Να χρησιμοποιήσετε τον νόμο των συνημιτόνων **8** Είναι α = 6, β = 5, γ = 4 ή α = 5, β = 6, γ = 4 **9** Περίπου 65 m.

Κωδικός Βιβλίου: 0-21-0143
ISBN 978-960-06-2766-4

ΙΤΥΕ "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο τεχνολογιας υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 21 0143 9