Ιστορική εξέλιξη της έννοιας των πιθανοτήτων.

Από την πρώτη κιόλας εμφάνιση του ανθρώπου στη Γη, οι έννοιες της τάξεως και του χάους, του προβλέψιμου και του απρόβλεπτου, του καθοριστικού και του τυχαίου, έπαιξαν σημαντικό ρόλο στον τρόπο που ο άνθρωπος αντιλαμβανόταν τη φύση γύρω του.

Η ιστορία των πιθανοτήτων.

Η προέλευση των μαθηματικών χρονολογείται από την κλασική Ελλάδα, όπως σχεδόν όλος ο πολιτισμός μας. Τα θεμέλια αυτού που έγιναν αργότερα τα μαθηματικά τοποθετήθηκαν στην αρχαία Ελλάδα πριν από 2.300 χρόνια στο έργο του Ευκλείδη «**Στοιχεία**». Ο στόχος του Ευκλείδη με τη συγγραφή του βιβλίου ήταν διττός: από τη μια μεριά, να συγκεντρώσει τα μαθηματικά αποτελέσματα που ήταν γνωστά στην εποχή του και από την άλλη μεριά, να αποκτήσει ένα μοντέλο δράσεων για την απόδειξη αποτελεσμάτων και τη δημιουργία μιας μαθηματικής θεωρίας με αξιώματα και κανόνες επαγωγής.

Έτσι κατόρθωνε να διαχωρίσει τη μαθηματική αλήθεια από τη φυσική πραγματικότητα που την περιέβαλλε. Ολόκληρο το οικοδόμημα της σκέψεως του στηριζόταν στα αξιώματα, έτσι ώστε αν αυτά άλλαζαν θα προέκυπταν καινούργια μαθηματικά. Αυτό συνέβη όταν το 19^{ο} αιώνα τέθηκε υπό αμφισβήτηση ένα από τα λιγότερο προφανή αξιώματα, το **5^{ο}**, που λέει ότι «**από ένα σημείο μπορεί να περάσει μία, και μόνο μία παράλληλη σε μια δεδομένη ευθεία**» και η αντίκρουσή του οδήγησε σε άλλες γεωμετρίες που ονομάζονται «**Μη-Ευκλείδειες**».

Ο απώτερος στόχος των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, το μεγαλύτερο επίτευγμα των οποίων ήταν η γεωμετρία, ήταν να ανακαλύψουν αλήθειες, βεβαιότητες. Γι' αυτό δεν ακολουθούσαν τον πιο κατάλληλο δρόμο για να ανακαλύψουν αποτελέσματα που σχετίζονται με την αβεβαιότητα. Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι η θέληση των θεών αποκαλύπτεται με διάφορες μεθόδους που περιλαμβάνουν τα αποτελέσματα ρίψεων των ζαριών έτσι ώστε αν ερχόταν ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, αυτό ήταν η ρητή βούληση των θεών, και δεν είχε κανένα νόημα να επιχειρεί κάποιος να κατανοήσει αυτό που θα συνέβαινε, την τυχαιότητα. Έτσι φαίνεται σε ορισμένα από τα γραπτά και του Πλάτωνα.

Την εποχή των ρωμαίων, η αντίληψη των μαθηματικών μετατοπίστηκε, παρόλο που ο ελληνικός πολιτισμός ήταν το υπόβαθρο της ρωμαϊκής σκέψεως. Γι αυτούς, το σημαντικότερο στα μαθηματικά ήταν η χρησιμότητά τους για τη μέτρηση, την καταμέτρηση και τον υπολογισμό και η χρησιμοποίησή τους για να ζήσουν πιο άνετα και να επιτύχουν τη στρατιωτική υπεροχή. Οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά ως εργαλεία για την ανάπτυξη των τεχνικών που απαιτούνταν για την πραγματοποίηση των εντυπωσιακών δημόσιων έργων που διασκορπίζονται στην τεράστια επικράτειά τους, πολλά από τα οποία εξακολουθούν να στέκονται όρθια στην Ευρώπη, την Ασία και τη Βόρεια Αφρική.

Κατά το Μεσαίωνα εξακολουθούσε να μην υπάρχει μελέτη του τυχαίου. Επικρατούσε η αντίληψη ότι ο θεός είναι πανταχού παρών και οι θρησκευτικές ιδέες ήταν καθοριστικές στη μικρή ανάπτυξη της σκέψης στη διάρκεια εκείνης της εποχής. Επιπλέον, η πεποίθηση ότι κάθε γεγονός, σημαντικό ή ασήμαντο, εμφανίζεται κάτω από τη θεία πρόνοια ήταν ένα σοβαρό εμπόδιο για την ανάπτυξη του υπολογισμού των πιθανοτήτων. Για παράδειγμα το 13^{ο} αιώνα ο **Βασιλιάς Λουδοβίκος XI** της Γαλλίας, ακολουθώντας αυτή τη γραμμή σκέψεως, καταδίκασε όχι μόνο τα τυχερά παιχνίδια αλλά και την κατασκευή των ζαριών, εξισώνοντάς τα με άλλα αμαρτήματα κοινής αποδοκιμασίας, όπως η συχνή επίσκεψη σε ταβέρνες και η μοιχεία.

Οι πρόδρομοι των πιθανοτήτων.

Τα πρώτα θεμέλια στην προσέγγιση αυτού που αργότερα θα ονομαζόταν πιθανότητα οφείλονται σε μεγάλες μορφές της ιταλικής Αναγέννησης, όπως οι Tartaglia, Peverone, Γαλιλαίος και Gardano. Οι συλλογισμοί τους εμφανίζονται στον τομέα των παιχνιδιών, όπως στο λεγόμενο «πρόβλημα της διαίρεσης ή της διανομής». Ο **Luca Pacioli**, (περίπου 1445-περίπου 1517) το 1494 το διατυπώνει ως εξής: «Δύο ομάδες παίζουν μπάλα έτσι ώστε να χρειάζονται 60 πόντους για να κερδίσουν το παιχνίδι και κάθε «γκολ» αξίζει 10 πόντους. Τα στοιχήματα είναι 10 δουκάτων. Λόγω ενός περιστατικού δε μπορούν να τελειώσουν το παιχνίδι και η μία ομάδα μένει με 50 πόντους και η άλλη με 20. Θέλομε να μάθομε τι ποσοστό των χρημάτων του στοιχήματος ανήκει σε κάθε ομάδα».

Ο **Niccolo Fontana**,επονομαζόμενος **Tartaglia**, (1499-1557), αιτιολογεί τη λύση του προβλήματος: «Αν υποθέσομε ότι πρέπει να φτάσομε στα 6 γκολ και η Α έχει ήδη 5 και η Β έχει πετύχει 3, λέω ότι η πιο δίκαιη μοιρασιά είναι 2 προς 1, αφού η Α είναι δύο παιχνίδια μπροστά από τη Β. Αυτό αντιστοιχεί στο 1/3 του συνόλου των παιχνιδιών που απαιτούνται για τη νίκη. Επομένως, η Α θα έπρεπε να πάρει το 1/3 των στοιχημάτων. Το υπόλοιπο διαιρείται ισόποσα, δίνοντας στην Α ένα πλεονέκτημα σε σχέση με τη Β σε αναλογία 2 προς 1».

Όμως ο ίδιος ο Tartaglia δεν ήταν πολύ ευχαριστημένος με το σκεπτικό του, αναγνωρίζοντας ότι: «Η επίλυση ενός τέτοιου ερωτήματος πρέπει να είναι περισσότερο δικαστική παρά μαθηματική, αφού ανεξάρτητα από το πώς θα γίνει η διαίρεση, θα υπάρχει λόγος για αντιδικία».

Το 1558, ο **Giovanni Francesco Peverone**, στο βιβλίο του Due brevi e facile trattati, il primo d’ Arithmetica l’altro di Geometria, το λύνει με πιο σωστό τρόπο: «Ας υποθέσομε ότι η Α χρειάζεται να κερδίσει μόνο ένα παιχνίδι ακόμα για να κερδίσει το έπαθλο και στοιχηματίζει μία μονάδα. Αν στη Β μένει επίσης μόνο ένα παιχνίδι, θα στοιχηματίσει επίσης μία μονάδα. Τότε το βραβείο θα πρέπει να μοιραστεί ισομερώς. Αν στη Β μένουν δύο παιχνίδια, θα πρέπει να πληρώσει 2 μονάδες περισσότερες για να φθάσει στη θέση στην οποία της μένει μόνο ένα παιχνίδι. Επομένως, το έπαθλο θα έπρεπε να μοιραστεί με την μορφή 3 προς 1. Αν στη Β μένουν τρία παιχνίδια, θα έπρεπε να πληρώσει διπλάσια και πάλι και έτσι στο πρόβλημα του Pacioli το βραβείο θα μοιραζόταν 7 προς 1».

Η εφεύρεση της τυπογραφίας με κινητούς χαρακτήρες έκανε να εμφανιστούν πραγματείες μικρής ακρίβειας για τα διάφορα παιχνίδια της μόδας, οι κανόνες των οποίων διαδίδονταν μέχρι τότε με την προφορική παράδοση. Ο **Girolamo Cardano**, (1501-1576) είναι ο συγγραφέας του «**Liber de lubo aleae**», του **1^{ου} βιβλίου που σχετίζεται με τον κόσμο του τυχαίου**. Ο στόχος του είναι να υπολογίσει τις διαφορετικές δυνατότητες του ριξίματος διαφόρων ζαριών, καθώς και να επιλύσει προβλήματα διαίρεσης παρτίδων.

Επειδή δεν έχει τα κατάλληλα σύμβολα, καταφεύγει συνεχώς σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Σε όλη την πραγματεία δε χρησιμοποιεί τα τρέχοντα αποτελέσματα για την ένωση και την τομή των γεγονότων, αλλά αρκείται σε δύο κυρίως μεθόδους: απαρίθμηση των διαφόρων δυνατοτήτων και την έννοια του μέσου κέρδους. Το έργο αρχίζει, περιέργως, με μια σειρά από ηθικοπλαστικές συμβουλές σχετικά με τους κινδύνους του τζόγου. Ο Cardano εργάστηκε με τις έννοιες του σήμερα γνωστού ως κλασικού ορισμού της πιθανότητας, αν και δεν τις όρισε.

Εισήγαγε την ιδέα της αντιστοιχίας ενός αριθμού (πιθανότητας) p μεταξύ 0 και 1 σε ένα γεγονός του οποίου το αποτέλεσμα είναι άγνωστο, λαμβάνοντας υπόψη το συνολικό αριθμό αποτελεσμάτων και τον αριθμό των ευνοϊκών αποτελεσμάτων. Επίσης, έφτασε να διακρίνει αυτό που είναι σήμερα γνωστό ως «νόμος των μεγάλων αριθμών» λέγοντας ότι εάν η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι p, μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων N το λογικό είναι να στοιχηματίσει κανείς ότι θα συμβεί περίπου Np φορές.

Όμως ο Cardano απέτυχε να αναγνωρίσει τη θεωρητική σημασία αυτών των εννοιών, επειδή θεωρούσε αυτές τις σχέσεις απλά αριθμητικές παρά ως ένα μέτρο της πιθανότητας εμφάνισης ενός τυχαίου γεγονότος. Αργότερα, ο **Γαλιλαίος** (1564-1642) μελέτησε και έλυσε μερικά από τα προβλήματα που είχαν ήδη τεθεί από τον Cardano και μεταξύ 1613 και 1624 έγραψε μια πραγματεία για το θέμα, η οποία στη συλλογή των έργων του, που δημοσιεύθηκε το 1718, εμφανίζεται με τον τίτλο Considerazione Sopra il Gioco dei Dadi.

Σε αυτή περιλαμβάνεται το ακόλουθο πρόβλημα «Στο ρίξιμο ενός ισορροπημένου ζαριού, λαμβάνονται 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 πόντοι με ίσες πιθανότητες. Στην περίπτωση ριξίματος δύο ζαριών, το άθροισμα των πόντων που θα έχομε είναι μεταξύ 2 και 12. Τόσο το 9 όσο και το 10, από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 μπορούν να ληφθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους 9=3+6= 4+5 και 10=4+6=5+5. Στο πρόβλημα με τρία ζάρια, τόσο το 9 όσο και το 10 λαμβάνονται με διάφορους τρόπους, που είναι οι ακόλουθοι: άθροισμα 10 λαμβάνεται σε οποιοδήποτε από τα γεγονότα (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4) και (3, 3, 4), ενώ οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το άθροισμα 9 είναι { (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4) και (3, 3, 3)}.

Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν 6 ευνοϊκά γεγονότα. Έτσι δημιουργήθηκε το ερώτημα πώς είναι τότε δυνατό όταν ρίχνοντας πολλές φορές τα τρία ζάρια να έρχεται περισσότερες φορές το άθροισμα 10 παρά το 9». Για να επιλύσει το πρόβλημα ο Γαλιλαίος πραγματοποιεί μια προσεκτική ανάλυση όλων των αθροισμάτων πόντων που μπορούν να έρθουν ρίχνοντας τρία ζάρια, η οποία τον οδηγεί στην διαπίστωση ότι υπάρχουν 216 δυνατές περιπτώσεις. Από αυτές, οι 27 είναι ευνοϊκές για να έρθει άθροισμα 10 και 25 για να έρθει 9

Όμως η βασική συμβολή του Γαλιλαίου στη θεωρία των πιθανοτήτων ήταν δημιουργία της θεωρίας της μέτρησης σφαλμάτων. Ο Γαλιλαίος πίστευε ότι τα σφάλματα μέτρησης είναι αναπόφευκτα και διακρίνονταν σε δύο τύπους: «**συστημικά**», εξαιτίας των μεθόδων και των εργαλείων μέτρησης και «**τυχαία**», που ποικίλουν με απρόβλεπτο τρόπο από τη μια μέτρηση στην άλλη. Πρόκειται για μια κατάταξη που παραμένει σε ισχύ και με αυτές τις ιδέες ο Γαλιλαίος όχι μόνο συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων, αλλά έθεσε επίσης τα θεμέλια για τη γέννηση της στατιστικής.

Η εμφάνιση της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Υπήρχαν πολλοί και επιφανείς πρόδρομοι, όμως η θεωρία πιθανοτήτων οφείλει την αναγωγή της σε επιστήμη στην αλληλογραφία μεταξύ δύο μεγάλων επιστημόνων των **Pierre de Fermat** και **Blaise Pascal** (1654), που παρακινήθηκαν από τον παίκτη **Chevalier de Mere**, προσπαθώντας να λύσουν τα προβλήματα που είχε προτείνει στον πρώτο ο Chevalier de Mere. Γύρω στο 1652, στη διαρκεί ενός ταξιδιού, ο Pascal, (1623-1662) συναντήθηκε με τον τζογαδόρο Αντουάν Γκομπό, γνωστό de Mere, έναν από τους πολλούς ευγενείς με πάθος για τα παιχνίδια ζαριών και χαρτιών, ένα είδος επαγγελματία παίκτη, μορφωμένο και ευφυή άνθρωπο, κάποιον που με καλό κριτήριο κατάλαβε ότι αν σκεφτεί για τα παιχνίδια και τα γνωρίσει καλυτέρα θα έχει οφέλη.

Στη συνομιλία τους πρότεινε μια σειρά από προβλήματα που γοήτευσαν τον Pascal, ο οποίος προσκάλεσε και τον Fermat να συμμετέχει για την επίλυση τους.

Στην αλληλογραφία μεταξύ των δύο τους ενισχύθηκαν οι δύο μεγάλες ευφυΐες και δόθηκε ένα σοβαρό ξεκίνημα στον υπολογισμό των πιθανοτήτων.

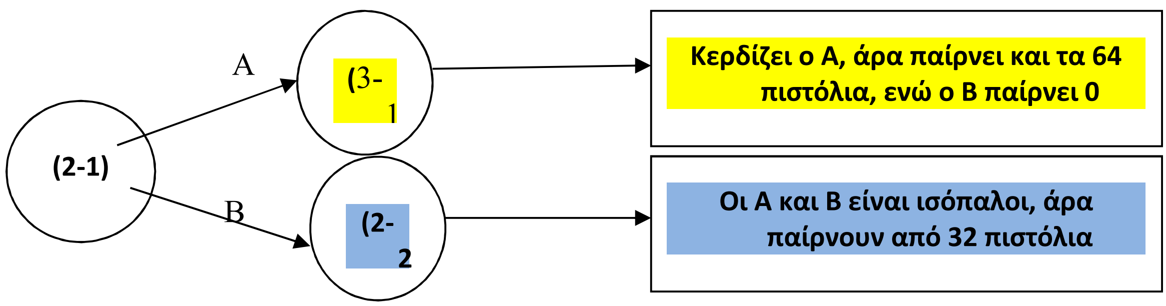
Οι Fermat και Pascal, παρά το βάθος της επιστημονικής τους σχέσης, το γεγονός ότι ήταν και οι δύο Γάλλοι και ζούσαν στην Τουλούζη και το Παρίσι, σε απόσταση που σήμερα θα θεωρούσαμε κοντινή (600 km) δε συναντήθηκαν ποτέ προσωπικά. Η σχέση τους ήταν μόνο αλληλογραφική.

Τα τρία προβλήματα που ο de Mere πρότεινε στον Pascal και που τόσο «παιχνίδι» έδωσαν στην ιστορία ήταν:

1. Έστω ότι δύο παίκτες, Α και Β, συμμετέχουν σε ένα στοίχημα 60$. Συμφωνούν ότι ο πρώτος που θα κάνει 3 πόντους κερδίζει όλο το στοίχημα, όμως, όταν ο Α έχει κερδίσει 2 πόντους και ο Β έχει κερδίσει 1, με κοινή συμφωνία αποφασίζουν να διακόψουν το παιχνίδι. Πώς πρέπει να μοιραστούν το στοίχημα των 60$;

2. Στο παιχνίδι του ριξίματος 3 ζαριών, ποιος έχει περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει, αυτός που ποντάρει στον αριθμό 9 ή αυτός που ποντάρει στον αριθμό 10;

3. Είναι ή όχι συμφέρον να στοιχηματίσει ότι θα έρθει τουλάχιστον ένα 6 σε τέσσερις ρίψεις ενός ζαριού; Ο συλλογισμός του Pascal, σχετικά με το πρώτο ερώτημα: Αν συνέχιζαν, τότε στην επόμενη παρτίδα θα κέρδιζε ή ο Α ή ο Β.



άρα ο Α παίρνει 48 (=32+16) ενώ ο Β παίρνει 16 (=0+16) (δηλαδή το στοίχημα μερίζεται με λόγο 3:1).

Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 2-0, τότε στο επόμενο παιχνίδι ο Α θα έπαιρνε και τα 64, ή θα γινότανε 2-1 δηλαδή ο Α θα έπαιρνε 48 και ο Β 16. Άρα, θα πάρει ο Α 56 (=32+24) και ο Β 8 (=0+8).

Αν το παιχνίδι είχε σταματήσει στο 1-0, τότε στο επόμενο παιχνίδι ή θα γινότανε 2-0 και θα έπαιρνε ο Α 56 και ο Β 8, ή θα γινότανε 1-1 δηλαδή ο Α θα έπαιρνε 32 και ο Β 32. Άρα, θα πάρει ο Α 44 (=28+16) και ο Β 20 (=4+16).

Για το δεύτερο ερώτημα, ο de Mere ομολόγησε στον Pascal ότι είχε τη διαίσθηση ότι ήταν καλύτερο να ποντάρεις 10 παρά 9, αλλά διαφορετικών αναλύσεων του 10 και του 9 ως αθροίσματος 3 προσθετέων (μεταξύ 1 και 6, τα πιθανά αποτελέσματα του ζαριού) ήταν ο ίδιος. Πράγματι, υπάρχουν έξι πιθανά αθροίσματα σε κάθε περίπτωση. Η διαίσθηση του de Mere ήταν βάσιμη, επειδή κάνοντας απλούς υπολογισμούς για τις ευνοϊκές περιπτώσεις να βγει 9 ή 10, προκύπτει ότι:

— Πιθανότητα να κερδίσεις ποντάροντας στο 9 = 25/216

— Πιθανότητα να κερδίσεις ποντάροντας στο 10 = 27/216

Το 216 προκύπτει από το 6^3

Δηλαδή, μια μικρή διαφορά, μόνο 1/108, υπέρ του 10 έναντι του 9. Έτσι ώστε εάν παίζει κάποιος μια φορά είναι σχεδόν ασήμαντο, όμως όχι αν παίζει με συστηματικό τρόπο. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο de Mere είχε διαίσθηση ενός μεγάλου παίκτη, σίγουρα προϊόν της μακροχρόνιας εμπειρίας του.

Η λύση που έδωσε ο Pascal στο τρίτο πρόβλημα ήταν ότι η πιθανότητα ότι ένα ρίξιμο δεν φέρνει 6 είναι ίση με 5/6. Αφού όλα τα ριξίματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, επειδή το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το άλλο, η πιθανότητα ότι στις τέσσερις ριξιές δεν θα έρθει κανένα 6 θα είναι :

P (κανένα 6) = 5/6 × 5/6 × 5/6× 5/6 =5^4/ 6^4 = 625 /1296 =0,482= 48, 22%.

Η πιθανότητα αυτή είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από το 0,5 συνεπώς είναι κάπως πλεονεκτικά να στοιχηματίσεις ότι δεν βγει κανένα έξι. Όμως χρειάζονται πολλές παρτίδες για να φανεί η μικρή διαφορά μεταξύ του 51,8% και του 48,22% για να βγει τουλάχιστον ένα 6. Σε ένα από τα πρώτα γράμματα που αντάλλαξαν (η αλληλογραφία τους διήρκησε για περισσότερο από δύο χρόνια) ο Pascal διηγείται στον Fermat τη συνάντησή του με τον de Mere και του γνωστοποιεί τη λύση για το πρόβλημα της διανομής, που μας δίνει μια σαφή ιδέα για τον τρόπο που ενεργούσε: «Να περίπου πώς κάνω για να μάθω την αξία καθεμιάς από τις παρτίδες όταν παίζουν δύο παίκτες, για παράδειγμα, σε τρεις παρτίδες, και καθένας έχει ποντάρει 32 νομίσματα στο παιχνίδι.

Έστω ότι ο πρώτος έχει δύο πόντους και ο άλλος έχει έναν. Τώρα παίζουν μια παρτίδα την οποία αν ο πρώτος κερδίσει, κερδίζει όλα τα χρήματα που είναι στο παιχνίδι, δηλαδή 64 νομίσματα. Αν την κερδίσει ο άλλος, ο καθένας έχει δύο πόντους και επομένως αν θέλουν να διακόψουν ο καθένας πρέπει να αποσύρει ότι στοιχημάτισε, δηλαδή 32 νομίσματα έκαστος.

Αν κερδίσει ο πρώτος, του ανήκουν 64, αν χάσει, του ανήκουν 32. Όμως αν δε θέλουν να διακινδυνεύσουν αυτή την παρτίδα και να διακόψουν χωρίς να την παίξουν, ο πρώτος πρέπει να πει: «είμαι βέβαιος ότι έχω 32 νομίσματα, επειδή μου τα δίνει ακόμα και η ήττα. Όμως για τα άλλα 32, ίσως θα τα πάρω εγώ, ίσως θα τα πάρετε εσείς. Η τύχη είναι ίδια, ας μοιραστούμε λοιπόν αυτά τα 32 νομίσματα, μισά-μισά, και μου δίνετε, εκτός από αυτά τα, τα 32 νομίσματα που μου αντιστοιχούν με βεβαιότητα». Θα έχει έτσι 48 νομίσματα, και ο άλλος 16.

Η επιστολή καταλήγει με τη γνωστή φράση «Ο κύριος de Mere έχει πολύ ταλέντο αλλά δεν είναι γεωμέτρης (μαθηματικός). Αυτό είναι, όπως γνωρίζετε, ένα μεγάλο ελάττωμα». Σχεδόν ταυτόχρονα, ο Fermat έλυσε το πρόβλημα ακολουθώντας μια εντελώς διαφορετική μέθοδο και η οποία, επιπλέον, γενίκευσε τη λύση, γεγονός που ήταν πολύ συναρπαστικό για τον Pascal: «Βλέπετε (έγραψε στον Fermat) ότι η αλήθεια είναι η ίδια στην Τουλούζη (όπου ζούσε ο Fermat) όπως στο Παρίσι (όπου κατοικούσε ο ίδιος)».

Ως «παράπλευρα οφέλη» από όλους αυτούς τους στοχασμούς, ο Pascal ανέπτυξε μια ολόκληρη σειρά μελετών συνδυαστικής, δημοσιεύοντας το 1665 την Πραγματεία για το αριθμητικό τρίγωνο, την πιο σημαντική συμβολή και συστηματοποίηση που είχε γίνει μέχρι τότε στη συνδυαστική. Το βιβλίο ξεκινά με την κατασκευή αυτού που είναι γνωστό από τότε ως το «τρίγωνο του Pascal», που έχουμε ήδη δει. Γύρω στο 1665, ο Ολλανδός **Christiaan Huygens** (1629-1695) ήρθε σε επαφή με τις ιδέες του Pascal και του Fermat, μέσω του **Roberval**, καθηγητή μαθηματικών στο Βασιλικό κολέγιο της Γαλλίας και άρχισε τις εργασίες του για τα προβλήματα σχετικά με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που μορφοποίησε στο βιβλίο De ratiociniis in ludo aleae (ο υπολογισμός στα τυχερά παιχνίδια) το 1657. Εκτός από την επίλυση ενδιαφερόντων προβλημάτων παιχνιδιών, χειρίζεται και εξηγεί την έννοια της «μαθηματικής ελπίδας» σε μια μεταβλητή με πεπερασμένο αριθμό τιμών. Το κάνει με τις εργασίες του για την αναμενόμενη ανθρώπινη ζωή από τα στοιχεία που συλλέχθηκαν στο Λονδίνο, σε σχέση με προβλήματα σχετικά με τα εισοδήματα και τις προσόδους.

Το 1^o βιβλίο πιθανοτήτων ήταν του Huygens “De Ratiociniis in ludo aleae” που το έγραψε το 1657 στα Ολλανδικά και μεταφράστηκε στα Λατινικά από τον Van Schooten. Για 60 χρόνια μέχρι το 1700 χρησιμοποιούνταν αυτό το βιβλίο, ως το βιβλίο για τις πιθανότητες. Η κύρια ιδέα του ήταν η έννοια της μέσης τιμής και όχι η έννοια της πιθανότητας. Ο Huygens ονόμαζε «τιμή της τύχης» τη μέση τιμή.

Ο Huygens έδωσε την νεώτερη επιστημονική πραγματεία για την έννοια της πιθανότητας. Τα βιβλία του ενέταξαν τη θεωρία πιθανοτήτων στα μαθηματικά ως ένα νέο κλάδο τους.

Η ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Από την αλληλογραφία των Pascal- Fermat, η θεωρία των πιθανοτήτων έγινε μέρος της γρήγορης ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών που συνέβαινε στην Ευρώπη εκείνης της εποχής, με τη συμβολή ενός ευρέος φάσματος ταλέντων που αφιέρωσαν τις προσπάθειες τους σε αυτή.

Ο **Jacob Bernoulli** (1654-1705) ήταν αυτός που έθεσε με σαφή τρόπο τα θεμέλια της εφαρμογής του υπολογισμού των πιθανοτήτων σε διαφορετικές κοινωνικές, ηθικές και οικονομικές απόψεις. Το έργο του «**Ars Conjectandi** (Η τέχνη της εικασίας)» εκδόθηκε στη Βασιλεία τον Αύγουστο του 1713, οκτώ χρόνια μετά το θάνατό του, αλλά εργάστηκε σε αυτό από το 1685, επηρεασμένος από την ανάγνωση του Huygens. Όρισε τις πιθανότητες ως το βαθμό βεβαιότητας με τον οποίο μπορεί να συμβεί ένα μελλοντικό γεγονός. Όσο για τον τίτλο του έργου του, ο συγγραφέας τον εξηγεί ως εξής: «Ορίζομε την τέχνη της εικασίας, ή στοχαστική τέχνη, ως την τέχνη της εκτίμησης με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια των πιθανοτήτων των πραγμάτων, έτσι ώστε στις αποφάσεις και τις ενέργειες μας να μπορούμε πάντα να βασιζόμαστε σε αυτό που έχει βρεθεί πώς είναι το καλύτερο, το πιο κατάλληλο, το πιο ασφαλές, το πιο συνιστώμενο. Αυτό είναι το μόνο αντικείμενο της σοφίας του φιλοσόφου και η συναίνεση του ηγεμόνα». Από τα 4 μέρη του Ars Conjectandi, τα τρία πρώτα αποτελούν συνέχεια του έργου του Huygens, μια συστηματική συλλογή συνδυαστικών αποτελεσμάτων και την εφαρμογή του όλου στα τυχερά παιχνίδια, ακολουθώντας όσα είχαν ήδη πραγματοποιηθεί.

Όμως το 4^o μέρος είναι θεμελιωδώς διαφορετικό, εξετάζει άλλες πτυχές, αποδεικνύει το θεώρημα των μεγάλων αριθμών εισάγοντας, επιπλέον, τη σημαντική ιδέα του διαστήματος εμπιστοσύνης. Ο Bernoulli εξετάζει δύο τύπους τυχαίων καταστάσεων, πρώτα αυτές που σχετίζονται με τυχερά παιχνίδια, όπου οι πιθανότητες είναι γνωστές εκ των προτέρων από τους κανόνες του παιχνιδιού και μπορούν να σχηματοποιηθούν με δοχεία.

Όμως προσθέτει ένα δεύτερο είδος καταστάσεων στις οποίες οι πιθανότητες ορίζονται εκ των υστέρων, μετά από έναν μεγάλο αριθμό πειραμάτων. Ο Bernoulli θεωρούσε δεδομένο ότι η πραγματοποίηση ενός συνεχώς αυξανόμενου αριθμού δοκιμών έπρεπε να παρέχει συνεπώς καλύτερες εκτιμώμενες αξίες πιθανοτήτων. Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα που επιτεύχθηκε από τον Bernoulli είναι για τις επαναλαμβανόμενες ρίψεις ενός μη κανονικού νομίσματος, με πιθανότητα p να έρθει κορόνα και $q=1-p$ να έρθουν γράμματα (p και q, επομένως, διαφορετικά από 1/2). Αν το νόμισμα ριχθεί δύο φορές, η πιθανότητα να έρθουν ακριβώς 2,1 ή 0 κορόνες είναι p^2, $2pq$ και q^2, που είναι οι όροι της ανάπτυξης του $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

Επίσης, ρίχνοντας το νόμισμα τρεις φορές, οι πιθανότητες για 3, 2, 1 ή 0 κορόνες είναι οι αντίστοιχοι όροι του $(p+q)^3=p^3+3p^2q+3q^2p+q^3$. Ο ίδιος ο Bernoulli είχε συναίσθηση της σημασίας αυτού που είχε επιτύχει, και των εφαρμογών του, όταν έγραψε «Εκτιμώ αυτήν την ανακάλυψη (την επέκταση της θεωρίας των πιθανοτήτων σε τομείς διαφορετικούς από των τυχερών παιχνιδιών) αρκετά περισσότερο από το αν είχα επιτύχει τον ίδιο τον τετραγωνισμό του κύκλου, επειδή αν αυτός είχε πράγματι βρεθεί, η ωφέλεια του θα είχε μικρή σημασία». Μια άλλη ξεχωριστή φυσιογνωμία στην εξέλιξη της θεωρίας είναι ο **Abraham De Moivre**, (1667-1754), γεννημένος στη Γαλλία αλλά εξόριστος στην Αγγλία μετά από μια από τις πολλές θρησκευτικές διώξεις που καταγράφει η ιστορία της Ευρώπης (στην περίπτωση του λόγω κατάργησης, το 1685, από τον Λουδοβίκο XIV, του Διατάγματος της Νάντης, το οποίο εγγυούταν τη θρησκευτική ελευθερία και έτσι ο De Moivre, που ήταν ουγενότος, αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τη χώρα του). **Διετέλεσε μέλος της Βασιλικής Εταιρείας και στενός φίλος του Νεύτωνα.**

Το βιβλίο του The Doctrine of Chances (για το οποίο έκανε διάφορες εκδόσεις ανάλογα με τις προόδους που πραγματοποιούσε) ακολουθεί τη γραμμή των Χόιχενς και Bernoulli, αλλά εφαρμόζει σε αυτή τις ιδέες του απειροστικού λογισμού που αναπτύσσονταν εκείνον τον καιρό. Ο De Moivre επέκτεινε το έργο του Bernoulli στα μη κανονικά νομίσματα. Όταν ο αριθμός των ρίψεων και των κορόνων είναι μεγάλοι αριθμοί είναι δύσκολο να υπολογιστούν με ακρίβεια οι δυναμικοί συντελεστές, και ο De Moivre υπολόγισε έναν κατά προσέγγιση τύπο που σχετίζει την προηγούμενη «διωνυμική κατανομή» του Bernoulli με τη συνάρτηση σφάλματος ή κανονική διανομή: $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}}$.

Ο De Moivre ήταν ο πρώτος που εξήγησε αυτή τη σύνδεση, θεμελιώδη για την ανάπτυξη των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Ο **Pierre Simon Laplace** έγραψε το 1773 την πρώτη του έκθεση σχετικά με τις πιθανότητες, σε μία εποχή που είχε ήδη χρησιμοποιήσει εκτενώς τον απειροστικό λογισμό. Σε αυτή ασχολείται κατά κύριο λόγο με μαθηματικές πτυχές, αφήνοντας κατά μέρος τα φιλοσοφικά θεμέλια των πιθανοτήτων, που ήταν τόσο παρόντα στα έργα των προκατόχων του. Αργότερα, το 1820, στο Φιλοσοφικό δοκίμιο για τις πιθανότητες, εισαγωγή στην τρίτη έκδοση της μνημειώδους πραγματείας του «**Αναλυτική θεωρία των πιθανοτήτων**» (η πρώτη έκδοση της οποίας εμφανίστηκε το 1812), ο Laplace εξηγεί τη γνωστή του διακήρυξη της «αιτιοκρατικής» (ντετερμινιστικής) πίστης: «Πρέπει να βλέπομε την παρούσα κατάσταση του σύμπαντος ως το αποτέλεσμα προηγούμενης κατάστασής του και ως την αιτία αυτής που θα ακολουθήσει.

Μια νοημοσύνη που σε μια δεδομένη στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που ζωντανεύουν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που την απαρτίζουν, αν επίσης ήταν αρκετά ευρεία για να υποβάλει όλα αυτά τα δεδομένα σε ανάλυση, θα συνόψιζε σε έναν μόνο τύπο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος και αυτών του πιο ελαφρού ατόμου: τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο για αυτή και τόσο το μέλλον όσο και το παρελθόν θα βρίσκονταν αντίκρυ στα μάτια του» έγραψε.

Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί ότι δεν επιχειρεί να βεβαιώσει ότι μια υψηλότερη νοημοσύνη θα μπορούσε να υπολογίσει όλες τις συνέπειες των νόμων της φύσης, αλλά ο στόχος του Laplace ήταν η ανάπτυξη της επιστήμης των πιθανοτήτων ώστε να έχει πιο ακριβή γνώση αυτών των νόμων της φύσης. Έτσι φτάνει στο περίφημο συμπέρασμα του ότι «φαίνεται σε αυτή την έκθεση ότι η θεωρία των πιθανοτήτων δεν είναι κατά βάθος παρά η κοινή λογική εκφρασμένη με τον υπολογισμό κάνει να εκτιμηθεί με ακρίβεια αυτό που τα δίκαια πνεύματα αισθάνονται από ένα είδος ενστίκτου, χωρίς να μπορούν να το συνειδητοποιήσουν». Στην πραγματεία του υπάρχουν δύο μέρη, στο πρώτο αναπτύσσει τη θεωρία των γεννητριών συναρτήσεων και τις θεωρίες που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των εκφράσεων των τύπων των μεγάλων αριθμών και στο δεύτερο πραγματεύεται τη γενική θεωρία των πιθανοτήτων. Μετά από τον Laplace και τους άμεσους συνεχιστές του, ειδικά του **Gauss** και **Legendre**, η θεωρία των πιθανοτήτων φτάνει στην ενηλικίωση της και το καθήκον που απομένει είναι η συστηματοποίηση, η βελτίωση και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, που πραγματοποιούνται στη διάρκεια του 19ου αιώνα. Δεν αναπτύσσεται μόνο στο πλαίσιο των μαθηματικών, αλλά εφαρμόζεται όλο και περισσότερο σε άλλους τομείς, ιδιαίτερα στη στατιστική μηχανική, η οποία της ανοίγει το δρόμο της φυσικής. Υπάρχουν πολλές ξεχωριστές προσωπικότητες σε όλον τον αιώνα, μεταξύ των οποίων αξίζει να αναφερθούν οι **Poisson**, **De Morgan**, **Cournot**, **Tchebycheff**, που ήταν ο εμπνευστής της Ρωσικής σχολής, στην οποία ανήκουν οι μαθητές του Markov και Liapunov), που θα άνοιγαν τον δρόμο για τον **Kolmogorov**, ο οποίος ήταν αυτός που διατύπωσε μια αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων. Ο Kolmogorov γνώριζε ότι με την εργασία του έκλεινε ένα μακροχρόνιο αγώνα κατά της αβεβαιότητας, όταν έγραφε ότι: «Η επιστημολογική αξία της θεωρίας των πιθανοτήτων βασίζεται στο γεγονός ότι τα τυχαία φαινόμενα δημιουργούν σε μεγάλη κλίμακα μια αυστηρή κανονικότητα, όπου το τυχαίο, με κάποιο τρόπο, έχει εξαφανιστεί». Περνούσαμε σε ένα άλλο ανώτερο στάδιο της κατάκτησης του τυχαίου. Μια ειδική μνεία αξίζει ο Βέλγος μαθηματικός **Adolphe Quetelet**, (1796-1874), ο οποίος ανέπτυξε ένα ενδιαφέρον για τις εφαρμογές των πιθανοτήτων και της στατιστικής στις διαφορετικές ανθρώπινες δραστηριότητες, έτσι ώστε θεωρείται ο ιδρυτής της σύγχρονης στατιστικής.

Υπήρξε ένας συλλέκτης κοινωνικών δεδομένων και έκανε την περιγραφή τους με όρους του νόμου κανονικής κατανομής, την οποία ονόμασε «νόμος των τυχαίων αιτιών». Από το 1835 υπερασπίστηκε τη χρήση της κανονικής καμπύλης για την προσέγγιση κάθε τύπου κοινωνικών δεδομένων (γεννήσεις, θάνατοι, εγκλήματα, αυτοκτονίες). Γνώριζε ότι παρόλο που τέτοια γεγονότα είναι απρόβλεπτα για κάθε άτομο, έχουν στατιστικές κατευθυντήριες γραμμές όταν εξετάζομε ολόκληρους πληθυσμούς. Έδωσε σχήμα σε αυτή την ιδέα μιλώντας για το «μέσο άνθρωπο», έναν όρο που χρησιμοποιήθηκε πολύ στη συνέχεια και που απεικονίζει ένα φανταστικό χαρακτήρα που είναι ο μέσος όρος σε όλες τις απόψεις.

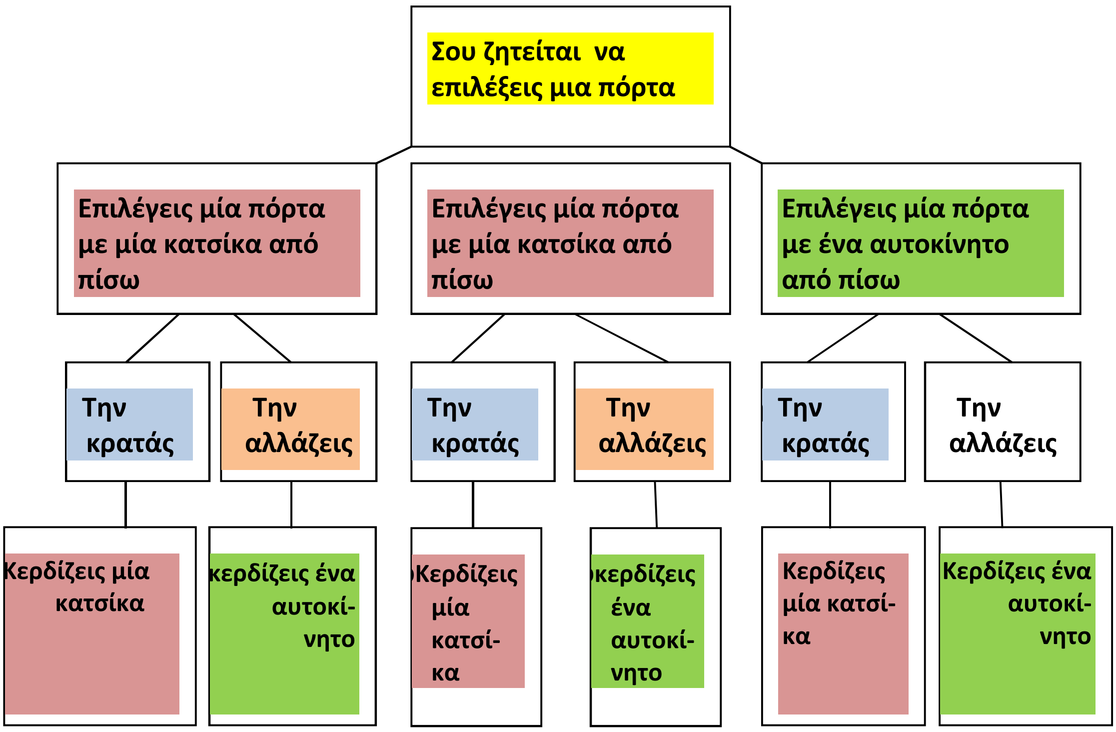
Όμως ο Quetelet δε θεωρούσε τον μέσο άνθρωπο μόνο ως μια μαθηματική έννοια, αλλά ότι ήταν ο στόχος της κοινωνικής δικαιοσύνης. Το 1844 εξέπληξε όλους τους σκεπτικιστές χρησιμοποιώντας το νόμο κανονικής κατανομής για την κατανομή του ύψους των ανδρών, πράγμα που του επέτρεψε να εντοπίσει τις απάτες για την «αποφυγή» της υποχρέωσης της στρατιωτικής θητείας στη Γαλλία: οι θεωρητικές προβλέψεις του τον οδήγησαν να δείξει ότι περίπου 2000 νέοι είχαν αποφύγει τη στράτευση δηλώνοντας επίτηδες μικρότερο ύψος από εκείνο που απαιτείται για την εκπλήρωση της στρατιωτικής θητείας.

Μια πρόσφατη ιστορία πιθανοτήτων.

Σε έναν τηλεοπτικό διαγωνισμό που έχεις φτάσει στην τελική ευθεία σε βάζουν μπροστά σε τρείς κλειστές πόρτες. Πίσω από μια από αυτές υπάρχει ένα «μεγάλο» έπαθλο, ένα αυτοκίνητο, ενώ οι άλλες δύο δεν κρύβουν τίποτα πολύτιμο. Πρέπει να επιλέξεις μόνο μια από τις πόρτες. Όταν έχεις ήδη δείξει την πόρτα που επέλεξες, ο παρουσιαστής αποφασίζει να συνεχίσει το θέαμα και σου ανοίγει μια από τις άλλες δύο, που δεν έχει έπαθλο, και σου δίνει μια νέα ευκαιρία, φυσικά, εάν θέλεις μπορείς να συνεχίσεις με την επιλογή σου, αλλά μπορείς επίσης να αφήσεις την πόρτα που έχεις επιλέξει και να διαλέξεις την άλλη κλειστή. Ερώτημα φυσικά είναι πια κίνηση θα είναι πιο συμφέρουσα, δηλαδή αν είναι το ίδιο να συνεχίσεις με την πόρτα που επέλεξες ή να αλλάξεις. Φαίνεται ως άσχετο ζήτημα και ότι είναι το ίδιο να κάνεις το ένα ή το άλλο. Ωστόσο, αυτό το πρόβλημα (γνωστό ως «**πρόβλημα του Μόντι Χολ**») οδήγησε σε κάμποσες συζητήσεις σχετικά πρόσφατα, με τη συμμετοχή εξαιρετικών μαθηματικών, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι πιθανότητες απέχουν πολύ από το να είναι θέμα που έχει κατανοηθεί καλά. Από το 1963 έως 1990 μεταδιδόταν στην τηλεόραση των ΗΠΑ ένας τηλεοπτικός διαγωνισμός με τίτλο let's Make a Deal, το παραπάνω πρόβλημα βασίζεται στην δυναμική του διαγωνισμού. Επίσης για πολλά χρόνια, σε περισσότερες από τριακόσιες εφημερίδες της ίδιας χώρας υπήρχε μια στήλη με τίτλο «ρωτήστε τη Marilyn» , στην οποία υπήρχαν ερωτήσεις και απαντήσεις. Η γυναίκα που ήταν υπεύθυνη για τη στήλη, η **Marilyn Vos Savant**, είναι διάσημη επειδή εμφανίζεται στο βιβλίο των ρεκόρ Γκίνες ως το άτομο με τον υψηλότερο δείκτη ευφυΐας στον κόσμο, με τιμή 228, και προσθέτει στη φήμη της το γεγονός ότι είναι παντρεμένη με τον γιατρό και επιστήμονα Ρόμπερτ Τζάρβικ, ο οποίος ανάπτυξε την τεχνητή καρδιά. Ήταν μια Κυριακή του 1990 όταν δημοσίευσε στη στήλη της την ερώτηση του προβλήματος: «Είναι πλεονέκτημα για τον διαγωνιζόμενο να αλλάξει την πόρτα που είχε επιλέξει αρχικά;».

Η Marilyn έγραψε στη στήλη της ότι ήταν καλύτερο να αλλάξει πόρτα. Αυτό έγινε αφορμή για μια πλημμύρα επιστολών από τους αναγνώστες της (περίπου 10000) που ήταν σχεδόν ομόφωνες, το 92% της έλεγε ότι έκανε λάθος, προσθέτοντας ότι ήταν απογοητευμένοι από το γεγονός ότι ένα άτομο σαν αυτή έδωσε μια λανθασμένη απάντηση σε μια τόσο απλή ερώτηση. Της έγραψαν ακόμη και πολλοί καθηγητές μαθηματικών, που ήταν αγανακτισμένοι. Οι απαντήσεις συνέχισαν να φτάνουν σε βιομηχανικές ποσότητες για μεγάλο χρονικό διάστημα έως ότου, αφού αφιέρωσε περισσότερο χώρο στη στήλη της, η συγγραφέας αποφάσισε να επιλύσει το θέμα. Η Marilyn είχε δίκιο και όλοι όσοι της έγραψαν, μαθηματικοί ή όχι έκαναν λάθος. Ακολουθεί το σχήμα με το αρχικό πρόβλημα, που πίσω από τις πόρτες χωρίς το μεγάλο έπαθλο υπάρχει μια κατσίκα της παρηγοριάς, που δείχνει ότι αν συνεχίσεις με την πόρτα που έχεις επιλέξει οι πιθανότητες σου είναι προφανές 1/3 εφόσον υπήρχαν τρεις πόρτες και επέλεξες μια, ενώ αν αλλάξεις γίνεται 2/3, διπλασιάζεις τις πιθανότητές σου.

Είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι δεν υπήρχαν αντιρρήσεις μόνο από τους μαθηματικούς του «σωρού», αλλά ότι ακόμη και ο Ούγγρος **Πολ Έρντος** ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του $20^{ου}$ αιώνα, είπε ότι αυτή η λύση ήταν αδύνατη και παραδέχτηκε το λάθος του μόνο μετά από μια προσομοίωση σε υπολογιστή.



Πιθανότητες & τύχη.

Στην καθημερινή ζωή μας περιβαλλόμαστε από πληροφορίες που μας μιλούν για πιθανότητες ότι θα συμβεί κάτι, πιθανότητες να κερδίσομε ένα έπαθλο, περίεργες συμπτώσεις, πιθανότητα ότι μια λάμπα θα διαρκέσει πάνω από 1.000 ώρες, πιθανότητες μιας ομάδας να κερδίσει το πρωτάθλημα ή απλά δεκάδες δημοσκοπήσεις που μας λένε αυτό που πιστεύομε για πολλά θέματα, χωρίς ποτέ να ρωτήσουν εμάς τους ίδιους, αν και, περιέργως, έχουν «καλό μάτι» και συνήθως «πέφτουν μέσα». Τα περισσότερα από τα παραπάνω σχόλια σχετίζονται με γεγονότα ή συμβάντα για τα οποία μπορούμε να γνωρίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις, αλλά το συγκεκριμένο αποτέλεσμά τους, όταν συμβαίνει, δεν είμαστε σε θέση να προβλέψομε.

Είναι φαινόμενα ή πειράματα που υπόκεινται στην «τύχη». Όμως μερικά από τα συμβάντα που αναφέρθηκαν δεν ταιριάζουν σε αυτή την κατηγορία. Έτσι, είναι δύσκολο να πιστέψει κανείς ότι όταν σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα βρίσκονται αντιμέτωπες η καλύτερη ομάδα στην Ευρώπη με μια ερασιτεχνική ομάδα, το αποτέλεσμα του αγώνα υπόκεινται στην τύχη. Το λεξικό της Βασιλικής Ισπανικής Ακαδημίας της Γλώσσας ορίζει το τυχαίο ως κάτι απρόβλεπτο, ένα συμπτωματικό γεγονός, και δηλώνει ότι ο όρος «στην τύχη» σημαίνει «χωρίς τάξη».

Πιθανόν αν σε καθέναν από εμάς ζητήσουν να πούμε τι εννοούμε με τον όρο «τυχαίο», θα βρεθούμε χωρίς σαφή απάντηση και θα πρέπει να ψάξομε να δώσομε παραδείγματα αυτού που αποκαλούμε «τυχερά παιχνίδια». Αυτό δείχνει ότι το τυχαίο είναι κάπως δύσκολο να προσδιοριστεί, αλλά το νόημα του μπορούμε να το αναγνωρίσομε και να το αιτιολογήσομε, ώστε να ξέρουμε αν πρέπει να συμμετέχομε η όχι σε ένα συγκεκριμένο τυχερό παιχνίδι και υπό ποιες προϋποθέσεις. Η ιδέα της πιθανότητας είναι στενά συνδεδεμένη με την ιδέα του τυχαίου και μας βοηθά να κατανοήσομε τις δυνατότητες μας για να κερδίσομε ένα τυχερό παιχνίδι ή να αναλύσομε τις δημοσκοπήσεις.

Ο **Laplace** δήλωσε: «Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι μια επιστήμη που ξεκίνησε με εκτιμήσεις για τα τυχερά παιχνίδια έχει γίνει το πιο σημαντικό αντικείμενο της ανθρώπινης γνώσης». Δύο αιώνες αργότερα, η δήλωση αυτή είναι όλο και πιο εμφανής, όχι μόνο στην καθημερινή ζωή, αλλά και στον τομέα της επιστήμης, της τεχνολογίας και των κοινωνικών επιστημών. Η κατανόηση και η μελέτη του τυχαίου είναι απαραίτητη, επειδή οι πιθανότητες είναι μια αναγκαία υποστήριξη για τη λήψη αποφάσεων σε οποιονδήποτε τομέα.

Για να κατανοήσομε καλύτερα σε τι καταστάσεις αναφερόμαστε, θα παρατηρήσομε ότι υπάρχουν φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω μας και τα αποτελέσματα είναι εύκολα προβλέψιμα, τα ντετερμινιστικά (αιτιοκρατικά) φαινόμενα. Όταν διεξάγεται ένα ντετερμινιστικό πείραμα, το αποτέλεσμα του μπορεί να προβλεφτεί κατηγορηματικά από ορισμένα αρχικά δεδομένα.

Απλά αλλάζει το αποτέλεσμα αν αλλάξει κάποιο από τα αρχικά δεδομένα από τα οποία εξαρτάται. Έτσι αν αφήσομε να πέσει ένα αντικείμενο από ένα συγκεκριμένο ύψος μπορούμε να βεβαιώσομε ότι θα πέσει στο έδαφος, να υπολογίσομε την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει ή τον χρόνο που θα κάνει για να φτάσει. Υπάρχουν πολλά άλλα φαινόμενα στα οποία δε συμβαίνει αυτό, αλλά από την ίδια αρχική κατάσταση μπορούν να αποκτηθούν διαφορετικά και απρόβλεπτα αποτελέσματα, τα τυχαία φαινόμενα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ρίξιμο ενός ζαριού (από αυτό προέρχεται ο όρος «αλεατορικό» aleas=«ζάρι»), αν και προσπαθούμε να το ρίξομε πάντα με τον ίδιο τρόπο, κάθε φορά υπάρχει ένα απρόβλεπτο αποτέλεσμα.

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης εξαρτάται από την τύχη. Μετρώντας με ακρίβεια μια ολόκληρη σειρά δεδομένων της αρχικής κατάστασης του ζαριού, τη γωνία και τη δύναμη με την οποία το ρίχνομε, την τριβή του αέρα, κλπ., και γνωρίζοντας τις εξισώσεις της κίνησης θα μπορούσαμε να προβλέψομε το αποτέλεσμα. Υπό αυτή την έννοια, ο Laplace έλεγε ότι η πιθανότητα είναι η μέτρηση της άγνοιάς μας. Όμως η αλήθεια είναι ότι μικρές αποκλίσεις (δύσκολα μετρήσιμες) οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό είναι το τυχαίο. Όμως, το ότι ένα φαινόμενο είναι τυχαίο και επομένως απρόβλεπτο στα συγκεκριμένα αποτελέσματα του, δε σημαίνει ότι δε μπορούμε να έχομε κάποια γνώση για αυτό, και εδώ επεμβαίνει η μελέτη των πιθανοτήτων, η οποία βρήκε σιγά-σιγά μια θέση στην ιστορία της ανθρωπότητας. Όπως διαπιστώνεται σε πολλές περιπτώσεις και παιχνίδια, όταν επαναλαμβάνεται πολλές φορές το ίδιο πείραμα τύχης παρατηρούνται πολλές κανονικότητες.

Το αποτέλεσμα του ριξίματος ενός ζαριού είναι αδύνατο να καθοριστεί, αλλά το συνολικό αποτέλεσμα αρκετών χιλιάδων ριξιμάτων μπορεί να είναι γνωστό με σχεδόν απόλυτη βεβαιότητα. Μπορούσαμε να πούμε ότι «στην τυχαιότητα η τάξη εμφανίζεται με την πάροδο του χρόνου, με τις επαναλήψεις». Όπως έλεγε ο Άρθουρ **Κόναν Ντόιλ** (1859–1930), ο δημιουργός του Σέρλοκ Χολμς, αναφερόμενος στην κοινωνία: «Ενώ κάθε άτομο είναι ένα άλυτο αίνιγμα, συλλογικά μεταμορφώνεται σε μια μαθηματική βεβαιότητα. Τα άτομα αλλάζουν, τα ποσοστά παραμένουν». Το ίδιο συμβαίνει με το ζάρι και άλλες τυχαίες καταστάσεις κάθε ρίξιμο ποικίλλει, οι αναλογίες διατηρούνται. Όταν επαναλαμβάνεται ένα πείραμα τύχης μπορεί να διαπιστωθεί επιπλέον ότι, γενικά, δεν εμφανίζονται όλα τα αποτελέσματα με την ίδια αναλογία, υπάρχουν γεγονότα που συμβαίνουν πιο συχνά από άλλα. Αν ρίξομε ένα «κανονικό» ζάρι όλες οι έδρες εμφανίζονται στην ίδια αναλογία, αλλά αν ρίξομε δύο «κανονικά» κέρματα και δούμε τον αριθμό των κορόνων που εμφανίζονται (0, 1 ή 2), είναι πιο συχνό να παρατηρούμε μόνο μια κορόνα.

Αν πάρομε ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα (σαράντα κάρτες διανεμημένες σε τέσσερα χρώματα) και δούμε αν το φύλλο είναι μια φιγούρα, δεν συμβαίνει με την ίδια συχνότητα να είναι ή να μην είναι. Η πιθανότητα ενός γεγονότος θα είναι ένας δείκτης των δυνατοτήτων για να συμβεί.

Πειράματα με στατιστική κανονικότητα.

Ρίχνομε δύο ζάρια και υπολογίζομε την διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων τους. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει την καταμέτρηση των αποτελεσμάτων, πρώτα με 189 κανονικές ριξιές και στη συνέχεια τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με υπολογιστή για 50.000, 100.000 και 1.000.000 ριξιές δύο ζαριών:

Διαφορά	189 ρίψεις	50.000 ρίψεις	100.000 ρίψεις	1.000.000 ρίψεις
0	32	8.143	16.570	166.600
1	50	13.551	27.280	277.782
2	34	11.249	22.513	221.871
3	45	8.479	16.834	167.562
4	18	5.806	11.455	110.363
5	10	2.772	5.348	55.822

Οι απόλυτες συχνότητες (αριθμός των φορών που παρατηρείται κάθε διαφορά) του πίνακα δεν μας δίνουν πολλές πληροφορίες. Είναι καλύτερα να κάνομε την αναλογία μεταξύ κάθε αποτελέσματος και του συνόλου των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν, που είναι η λεγόμενη σχετική συχνότητα καθενός από αυτά. Αυτές οι τιμές, που εκφράζονται στον ακόλουθο πίνακα, δίνουν περισσότερες πληροφορίες και επιτρέπουν να βγάλομε συμπεράσματα με μεγαλύτερη σαφήνεια:

Διαφορά	189 ρίψεις	50.000 ρίψεις	100.000 ρίψεις	1.000.000 ρίψεις
0	0.169	0.163	0.166	0.167
1	0.265	0.271	0.273	0.278
2	0.180	0.225	0.225	0.222
3	0.238	0.170	0.168	0.168
4	0.095	0.116	0.115	0.110
5	0.053	0.055	0.053	0.056

Ο πίνακας είναι η επαλήθευση για μια από τις αρχές που διέπουν την συμπεριφορά του τυχαίου, τη στατιστική κανονικότητα, σύμφωνα με την οποία, με την αύξηση του αριθμού των φορών που επαναλαμβάνομε ένα πείραμα τύχης, η σχετική συχνότητα καθενός αποτελέσματος προσεγγίζει όλο και περισσότερο μια ορισμένη τιμή. Ονομάζομε πιθανότητα ενός γεγονότος ακριβώς την τιμή εκείνη που πλησιάζει όλο και περισσότερο την σχετική συχνότητα όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται για μεγάλο αριθμό φορών (που στα μαθηματικά ονομάζεται οριακή τιμή). Όπως αναφέρθηκε πριν, αυτή η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι μια μέτρηση των δυνατοτήτων για να συμβεί.

Δεδομένου ότι η πιθανότητα είναι η οριακή τιμή της σχετικής συχνότητας, ικανοποιεί τις ιδιότητες των σχετικών συχνοτήτων:

- Η πιθανότητα prob (S) ενός γεγονότος S είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1, επειδή ο αριθμός των φορών που συμβαίνει πρέπει να περιλαμβάνεται μεταξύ 0 και του συνολικού αριθμού των φορών που το εκτελούμε $0\leq prob\ (S)\leq 1$.
- Η πιθανότητα ενός αδύνατου γεγονότος είναι 0. Η πιθανότητα ενός βέβαιου γεγονότος είναι 1. Αυτές οι δύο ιδιότητες μας επιτρέπουν να ορίσομε μια κλίμακα πιθανοτήτων. Αν ένα αποτέλεσμα δε συμβαίνει ποτέ έχει πιθανότητα 0. Αν συμβαίνει πάντα, έχει πιθανότητα 1. Αν συμβαίνει μερικές φορές, θα είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1. Ένα συμβάν θα είναι τόσο πιο πιθανό όσο πιο κοντά στο 1 είναι η πιθανότητα του. Όταν κάτι συμβαίνει πολύ συχνά λέμε ότι είναι πιθανό, η πιθανότητα του είναι κοντά στο 1.

Κάτι που συμβαίνει πολύ σπάνια λέμε είναι πολύ λίγο πιθανό: Η πιθανότητα του είναι κοντά στο 0. Όμως υπάρχει μια πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ υψηλής πιθανότητας (ακόμα και πολύ υψηλής) και βεβαιότητας: ότι ένα γεγονός έχει πολύ υψηλή πιθανότητα δεν επιτρέπει την επιβεβαίωση ότι λαμβάνεται από ένα συγκεκριμένο πείραμα.

- Η πιθανότητα ενός γεγονότος που αποτελείται από πολλά διαφορετικά αποτελέσματα είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών γεγονότων (αποτελέσματα) που το απαρτίζουν.
- Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των αποτελεσμάτων ρνός πειράματος τύχης (στοιχειώδη γεγονότα) είναι ίση με 1.
- Το άθροισμα των πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικών γεγονότων είναι ίσο με 1: prob(S) + prob(όχι S) = 1.

Η ιδιότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα επειδή σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα ενός γεγονότος όταν είναι γνωστή αυτή του αντίθετου (που μπορεί να είναι πιο εύκολο να βρεθεί). Πχ. το γεγονός «χρειάζονται περισσότερες από μια ριξιές ενός ζαριού για να έρθει ένα 6» αποτελεί το συμπλήρωμα του «να έρθει 6 με μια μόνο ριξιά». Αφού γνωρίζομε ήδη ότι η πιθανότητα για να έρθει 6 με μια μόνο ριξιά είναι p=1/6≈0,167 η πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος είναι:

Prob (να χρειαστούν περισσότερες από μια ριξιές) ≈ 1 – 0,167 ≈ 0,833.

Πρέπει να σημειώσομε ότι για να ορίσομε πιθανότητες με αυτή τη διαδικασία επαναλαμβανόμενου πειραματισμού χρειάζεται ένας «μεγάλος» αριθμός επαναλήψεων. Δηλαδή, πρέπει να συγχέομε το νόμο των μεγάλων αριθμών που ονομάζεται «νόμος των μικρών αριθμών», που εφαρμόζουμε τόσες φορές στην ζωή μας εξάγοντας γενικά συμπεράσματα από ένα μικρό αριθμό εμπειριών.

Αν για παράδειγμα, ταξιδέψαμε σε μια άλλη χώρα και πέσαμε θύμα κλοπής στο δρόμο και γνωρίζομε δύο άλλες περιπτώσεις ταξιδιωτών στους οποίους συνέβηκε το ίδιο (που μπορεί να μας το είπαν μόλις τους διηγηθήκαμε την περίπτωσή μας), χωρίς περισσότερα παραδείγματα αποφασίζομε ότι στη χώρα αυτή είναι πολύ πιθανό να σε κλέψουν (έστω και αν η εμπειρία μεγάλων ομάδων ταξιδιωτών και οι αντικειμενικές στατιστικές αποδεικνύουν τον αντίθετο).

Μπορεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος να έχει προδιάθεση να εξάγει γενικά συμπεράσματα που του επιτρέπουν να έχει οδηγούς για την δράση και ότι η επανάληψη ορισμένων γεγονότων περιορίζεται στην εμπειρία καθενός, παρόλο που πρέπει να εξάγει γενικές κατευθυντήριες γραμμές για την δράση. Η πραγματικότητα είναι ότι εξάγονται γενικά συμπεράσματα με αρκετή ελαφρότητα εφαρμόζοντας αυτόν τον εσφαλμένο νόμο των μικρών αριθμών και όχι μόνο σε ιδιωτικές συνομιλίες, αλλά ακόμα και στα μέσα ενημέρωσης, όπως η «αλάθητη» μέθοδος που ένας δημοσιογράφος περιέγραφε για τον υπολογισμό της έκτασης της ανεργίας:

«<u>Ρωτήστε τον εαυτό σας πόσους άνεργους έχεις στην οικογένειά σας. Στη συνέχεια ρωτήστε τους γείτονες, τους φίλους και τους γνωστούς σας και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε. Συγκρίνεται αυτόν τον αριθμό με τον αριθμό των ατόμων που αποτελούν την οικογένειά σας και όσους γνωρίζουν όλους αυτούς που ρωτήσατε. Έτσι θα έχετε ένα αλάθητο νούμερο για τον αριθμό των ανέργων</u>». Όπως φαίνεται μια περιορισμένη εμπειρία για να εξαχθούν γενικά συμπεράσματα συχνά οδηγεί στην εξαγωγή εσφαλμένων συμπερασμάτων.

Ισοπίθανα συμβάντα.

Δεν είναι πάντα απαραίτητο να καταφύγομε στον πειραματισμό για να ορίσομε την πιθανότητα ενός γεγονότος. Στο ρίξιμο ενός κανονικού ζαριού, οι συνθήκες συμμετρίας του μας επιτρέπουν να υποθέσομε ότι καμία από τι ς έδρες δεν θα έχει περισσότερες πιθανότητες να έρθει από ότι οι άλλες.

Έτσι, τα 6 πιθανά αποτελέσματα του ριξίματος ενός ζαριού είναι εξίσου πιθανά δηλαδή η πιθανότητα ενός από αυτά είναι 1/6 ≈ 0.167 (κάθε έδρα θα εμφανιστεί στο 16,7% των φορών). Αφαιρώντας ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα, με 12 φιγούρες από 40 φύλλα, φαίνεται λογικό να πιστεύομε ότι μια φιγούρα θα εμφανιστεί το 30% των φορών (12/40), έτσι ώστε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η πιθανότητα είναι 12/40 = 0,30. Χρησιμοποιώντας ως αναφορά αυτά τα δύο παραδείγματα βλέπομε ότι υπάρχουν περιπτώσεις που οι πιθανότητες των διαφόρων αποτελεσμάτων είναι διαισθητικές. Οι συνθήκες συμμετρίας και η κανονικότητα του ζαριού είναι αρκετές για να ορίσουμε τις ίδιες πιθανότητες σε οποιαδήποτε από τις έδρες 1/6. Στην περίπτωση της τράπουλας μπορούμε να χρησιμοποιήσομε παρόμοιο συλλογισμό. Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να ορίσομε την πιθανότητα ως εξής, αν κατά της διεξαγωγή ενός πειράματος τύχης μπορούν να προκύψουν Ν διαφορετικά αποτελέσματα και μπορεί να διασφαλιστεί ότι όλα έχουν τις ίδιες δυνατότητες εμφάνισης (είναι εξίσου δυνατά) η πιθανότητα καθενός από τα αποτελέσματα είναι p = 1/N. Στην περίπτωση του ζαριού, το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων (ονομάζεται δειγματικός χώρος) είναι Ε = {1, 2, 3 , 4 , 5, 6}. Αν ο κύβος είναι σωστός όλα τα στοιχειώδη γεγονότα θα είναι εξίσου δυνατά. Δηλαδή η πιθανότητα τους θα είναι P(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6)= 1/6 ≈ 0.167 (16,7%).

Ας εξετάσομε μερικά σύνθετα γεγονότα όπως «να έρθει ένας μονός αριθμός» ή «να έρθει ένα πολλαπλάσιο του 3». Ποιά θα είναι η πιθανότητά του; Εάν το αποτέλεσμα του ριξίματος είναι 2, 4 ή 6, θα επαληθευτεί το γεγονός «να έρθει ζυγός αριθμός». Αφού η πιθανότητα ενός σύνθετου γεγονότος ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών γεγονότων που το αποτελούν, έχομε:
Prob (ζυγός αριθμός) = p ({1, 3, 5}) = p(1) + p(3) + p(5) = 1/6 = 3/6 = 0,5 ή (50%).

Η πιθανότητα να έρθει ένα πολλαπλάσιο του 3 είναι: Prob(πολλαπλάσιο του 3) = π({3,6})= p(3)+p(6)=1/6+1/6 = 2/6 ≈ 0,333 (33,3%). Αν προσέξομε τα αποτελέσματα, p(μονός αριθμός)= 3/6, p(πολλαπλάσιο του 3) = 2/6.

Αυτές οι δύο πιθανότητες επιβεβαιώνουν ότι η πιθανότητα σε κάθε περίπτωση είναι ίση με το πηλίκο μεταξύ του αριθμού των στοιχειωδών γεγονότων που αποτελούν το σύνθετο γεγονός (3 στην πρώτη περίπτωση και 2 στη δεύτερη) και του συνολικού αριθμού αποτελεσμάτων ή στοιχειωδών γεγονότων που μπορεί να προκύψουν. Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο συλλογισμού στη γενική περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι, αν σε ένα πείραμα τύχης μπορούν να συμβούν Ν στοιχειώδη γεγονότα, όλα εξίσου δυνατά, η πιθανότητα ενός γεγονότος S που αποτελείται από n στοιχειώδη γεγονότα θα είναι:

p(S) = 1/N + 1/N + …+ 1/N (n αθροίσματα ίσα με 1/N) = n/N,

δηλαδή:

$$\text{P(S)}=\frac{\text{Αρ.των στοιχειωδών διαδοχικών γεγονότων που αποτελούν το γεγονός } S}{\text{Συνολικός αριθμός στοιχειωδών γεγονότων}}$$

Η πιθανότητα ενός γεγονότος S είναι ίση με την αναλογία μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για να συμβεί το γεγονός και του συνολικού αριθμού των δυνατών αποτελεσμάτων. Αυτός ο ορισμός είναι γνωστός κανόνας του Laplace: «Εάν όλα τα στοιχειώδη γεγονότα είναι εξίσου δυνατά, η πιθανότητα ενός γεγονότος (S) είναι το πηλίκο μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων για το S και του αριθμού των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος»:

$$\text{p(S)} = \frac{\text{Αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων για το } S}{\text{Αριθμός των δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ο κανόνας ή νόμος του Laplace <u>θεωρείται ως ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, επειδή είναι ο πρώτος γνωστός ορισμός</u>. Είναι πολύ χρήσιμος για το υπολογισμό των πιθανοτήτων σύνθετων γεγονότων σε καταστάσεις ισοπίθανες (όταν όλα τα γεγονότα είναι εξίσου δυνατά). Το μόνο που έχομε να κάνομε για να βρούμε την πιθανότητα ενός γεγονότος είναι να μετρήσομε το συνολικό αριθμό των στοιχειωδών γεγονότων (δυνατές περιπτώσεις) και τον αριθμό των στοιχειωδών γεγονότων που αποτελούν το γεγονός (ευνοϊκές περιπτώσεις). Για να κάνομε τις μετρήσεις των περιπτώσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τις τεχνικές της συνδυαστικής. Είναι τέτοια η επιρροή αυτού του ορισμού στην εξέταση των πιθανοτήτων που όταν σε ένα ζάρι, νόμισμα, ρουλέτα, κλπ.

Όλα τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά συνήθως τίθεται το προσδιοριστικό «του Laplace». Έστω ότι ένα βέλος ρίχνεται πάνω σε ένα στόχο. Αν θεωρήσομε ως δυνατά αποτελέσματα όλα τα σημεία του στόχου, αυτά είναι άπειρα, και έτσι ο παραπάνω κανόνας δεν είναι εφαρμόσιμος. Ωστόσο, αν απλοποιήσομε το πείραμα και διαιρέσομε το στόχο σε τέσσερα τεταρτημόρια με ίση περιοχή, έχομε λύσει το πρόβλημα, αφού ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων είναι τώρα τέσσερα, και τα τέσσερα είναι εξίσου δυνατά (αν υποτεθεί ότι ο ρίπτης δεν είναι έμπειρος παίκτης στα βελάκια και ρίχνει το βέλος τυχαία πάνω στο στόχο). Η διαίρεση σε τομείς διαφορετικής επιφάνειας, όπως συμβαίνει στους στόχους των αγώνων, δεν επιτρέπει πλέον την εφαρμογή του προηγούμενου κανόνα, αφού όλα τα αποτελέσματα (τομείς) δεν έχουν τις ίδιες δυνατότητες.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να γίνει μια μικρή τροποποίηση του προηγούμενου κανόνα ορίζοντας ως πιθανότητα κάθε τομέα το λόγο μεταξύ του εμβαδού και του συνολικού εμβαδού του στόχου. Τα περισσότερα τυχερά παιχνίδια που μπορούμε να σκεφτούμε ακολουθούν τον κανόνα του Laplace. Στις περιπτώσεις που δεν ισχύει αυτό, πρέπει να καθοριστεί ο τρόπος ορισμού των πιθανοτήτων. Μερικά παραδείγματα θα μας επιτρέψουν να το κατανοήσουμε καλύτερα. Επιλέγοντας στην τύχη ένα φύλλο από μια ισπανική τράπουλα, ποια είναι η πιθανότητα να είναι μπαστούνι, ποια να είναι μια φιγούρα και ποια να είναι μπαστούνι και φιγούρα;

Σε αυτό το πείραμα της τύχης υπάρχουν 40 δυνατές περιπτώσεις, όσες και τα φύλλα, και όλες είναι εξίσου πιθανές σε μια καινούργια τράπουλα, χωρίς σημάδια. Από τα 40 φύλλα, 10 είναι μπαστούνια, δηλαδή υπάρχουν 10 ευνοϊκές περιπτώσεις «να είναι μπαστούνι». Η πιθανότητά τους είναι:

$$\text{P(μπαστούνι)} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{40}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = 0{,}25 \text{ ή } 25\%$$

Ανάλογα, οι πιθανότητες των άλλων συμβάντων είναι:

$$\text{P (φιγούρα)} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{40}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} = 0{,}3 \text{ ή } 30\%$$

$$\text{P (μπαστούνι και φιγούρα)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{40}} = 0{,}075 \text{ ή } 7{,}5\%$$

Ένα άλλο παράδειγμα: αν τραβήξομε ταυτόχρονα δύο φύλλα μιας ισπανικής τράπουλας, ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο να είναι χρυσά; Είναι μια κατάσταση κατά την οποία όλες οι ομάδες δύο φύλλων που έχουμε επιλέξει έχουν την ίδια πιθανότητα και σε αυτή μπορεί να εφαρμοστεί ο ορισμός του Laplace. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι τρόποι τραβήγματος δύο φύλλων από τις 40 του συνόλου, ο αριθμός συνδυασμών των 40 στοιχείων (τα 40 φύλλα) που λαμβάνονται ανά 2: $\mathbf{C_{40,2}} = \binom{\mathbf{40}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{40!}}{\mathbf{2!*(40-2)!}} = \frac{\mathbf{40*39}}{\mathbf{2}} = 780$

Στην τράπουλα υπάρχουν 10 χρυσά φύλλα, επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις θα είναι οι διαφορετικοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τα 10 χρυσά, δηλαδή, οι συνδυασμοί 10 στοιχείων που λαμβάνονται ανά 2: $\boldsymbol{C_{10,2}} = \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{2!*(10-2)!=}} = \frac{\mathbf{10*9}}{\mathbf{2}} = \mathbf{45}$

Επομένως, η πιθανότητα ότι τα 2 φύλλα είναι χρυσά θα είναι: **Ρ(δύο χρυσά)=** $\frac{C_{10,2}}{C_{40,2}} = \frac{45}{780}$ **= 0,0577 ή 5,77%.** Η πιθανότητα είναι η ίδια όπως αν ψάχνομε να έχομε δυο φύλλα οποιασδήποτε άλλης φυλής (κούπες, σπαθιά ή μπαστούνια). Αυτό μπορεί να χρησιμέψει για να απαντήσομε σε ένα άλλο ερώτημα: ποια είναι η πιθανότητα ότι αν τραβήξομε δυο φύλλα αυτά θα είναι διαφορετικής φυλής; Αφού στην περίπτωση αυτή είναι το αντίθετο από το να είναι της ίδιας φυλής (το άθροισμα του να είναι σε μια από τις τέσσερις φυλές) έχομε:
Ρ(διαφορετικής φυλής)= 1–p(της ίδιας φυλής)= 1– [p(δύο χρυσά) + p (δύο κούπες) + p(δύο σπαθιά) + p(δύο μπαστούνια)]≈ 1 – [0,0577 + 0,0577 + 0,0577 + 0,0577] = 1-[4*0,0577] =1– 0,2308 = 0,7692 ή 76,92%.

Μέχρι τώρα έχομε δει περιπτώσεις όπου η πιθανότητα ενός γεγονότος λαμβάνεται με θεωρητικό τρόπο, από το κατασκευαστικό μοντέλο (ζάρια, παιγνιόχαρτα), αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις της ζωής δεν είναι δυνατό να γίνει ένα θεωρητικό μοντέλο, ούτε επομένως να συναχθεί η πιθανότητα καθενός από τα γεγονότα, παρόλο που είναι βολικό να έχουμε μια πιθανότητα, η οποία είναι ένα μέτρο των δυνατοτήτων για να συμβεί κάτι.

Στις σελίδες των εφημερίδων δίνονται πληροφορίες για τον καιρό με όρους πιθανοτήτων (εμφανίζεται σε ποσοστό). Έτσι μπορούμε να διαβάσομε ότι για την επόμενη μέρα η πρόβλεψη βροχής είναι 60%. Παλιότερα έλεγαν μόνο αν θα βρέξει ή όχι. Το ποσοστό είναι η συχνότητα των περιπτώσεων που έχει βρέξει κατά το παρελθόν σε καιρικές συνθήκες παρόμοιες που προβλέπεται για αύριο, λαμβάνοντας υπόψη τα διαθέσιμα στοιχεία. Δηλαδή δείχνει το ποσοστό αβεβαιότητας που συνδέεται με την δήλωση «θα βρέξει αύριο» και βασίζεται σε πολύπλοκους υπολογισμούς που εκτελούνται από μια τεράστια μάζα παρατηρούμενων δεδομένων. Όταν μιλάμε για τον αυριανό καιρό ως πιθανότητα βροχής είναι πολύ πιο ακριβές από το να πούμε απλά αν θα βρέξει ή όχι, δεδομένου ότι περιέχει τις πληροφορίες που απαιτούνται για το προγραμματισμό των δραστηριοτήτων οποιουδήποτε προσώπου εκείνη την ημέρα.

Η διαφορά αυτής της μέτρησης της πιθανότητας σε σχέση με αυτή των τυχερών παιχνιδιών ή των λαχείων είναι ότι ο ορισμός της πιθανότητας δε βασίζεται σε μοντέλα, αλλά σε στατιστικά δεδομένα. Αυτό συμβαίνει σε πολλές άλλες περιπτώσεις (αποτελεσματικότητα των φαρμάκων ή εμβολίων, ασφάλεια των διαφόρων μέσων μεταφοράς) και για αυτό η στατιστική χρησιμοποιείται για τη μελέτη της κοινωνίας και συνδέεται με την πιθανότητα, επειδή επιτρέπει να οριστούν πιθανότητες στα γεγονότα. Ένα μέσο που χρησιμοποιείται συχνά για να δημιουργήσει τυχαίες καταστάσεις (εξ ου και η πληθώρα των διαφορετικών παιχνιδιών) είναι οι τράπουλες. Υπάρχουν δύο βασικού τύποι γνωστοί ως ισπανική και γαλλική. Και οι δύο έχουν διεισδύσει βαθιά στη συλλογική φαντασία, επειδή όπως όλα τα μεγάλα παιχνίδια είναι μοντέλα αναγνωρίσιμων κοινωνικών καταστάσεων.

Η ισπανική τράπουλα είναι μια σχηματοποίηση της μεσαιωνικής κοινωνίας με τέσσερις φυλές, χρυσό, κούπες, σπαθιά και μπαστούνια τα οποία αντιπροσωπεύουν τις τέσσερις βασικές τάξεις της:

- αστοί (ή έμποροι, με τον χρυσό των νομισμάτων),
- κλήρος (με την κούπα των λειτουργικών εορτασμών),
- ευγενείς (με το σπαθί των ιπποτών) και
- αγρότες (με το μπαστούνι ή την ράβδο που χρησιμοποιούν στις χειροναγκτικές εργασίες τους).

Έχει 40 κάρτες, με 10 σε κάθε φυλή, εκ των οποίων 3 (βαλές ιππότης και βασιλιάς) είναι οι φιγούρες.

Η γαλλική τράπουλα είναι σχηματοποίηση του περάσματος του χρόνου, που αναφέρει τι συμβαίνει μέσα σε ένα έτος. Οι 4 φυλές αντιπροσωπεύουν τις 4 εποχές. Αφού σε κάθε μια υπάρχουν 13 φύλλα, συνολικά υπάρχουν 4*13 = 52 φύλλα, όπως οι 52 εβδομάδες ενός έτους. Εάν προστεθούν οι αριθμοί κάθε φυλής (1+2+3+…+13=91), πολλαπλασιαστούν με τις 4 φυλές και προστεθεί ο μπαλαντέρ έχομε 365 (4 * 91 + 1 = 365), που είναι οι 365 ημέρες του έτους.

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

Στις αρχές του 20ου αιώνα, η μαθηματική διατύπωση των πιθανοτήτων φαινόταν ως μια αναγκαιότητα για πολλούς μαθηματικούς. Ο Kolmogorov διατύπωσε κατά τη δεκαετία του 1930 μια σειρά από αξιώματα που επέτρεψαν την αξιωματική οικοδόμηση των πιθανοτήτων. Αυτή η αξιωματική προσέγγιση, ικανοποιητική για τη μαθηματική κοινότητα, αποφεύγει να δώσει εννοιολογικό ορισμό της πιθανότητας και να χρειάζεται να σκεφτόμαστε πάντα το πείραμα, και αναφέρεται μόνο στις ιδιότητες που πρέπει να πληρεί ο ορισμός πιθανότητας ενός γεγονότος.

Επιπλέον ο αξιωματικός ορισμός ανακτά όλες τις ιδιότητες που βρήκαμε διαισθητικά και έτσι ο Kolmogorov κατάφερε να κάνει να συμφωνήσουν τα τυπικά μαθηματικά και τα πειράματα με τυχαία φαινόμενα. Επιπλέον, τα αξιώματα του Kolmogorov έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη ενός άλλου κλάδου των μαθητικών που συνδέεται στενά με τις πιθανότητες: η θεωρία του μέτρου.

Ξεκινώντας από τα αξιώματα του Kolmogorov και ακολουθώντας μια αυστηρή μαθηματική ανάπτυξη παρόμοια με οποιουδήποτε άλλου κλάδου των μαθηματικών, καθορίζεται ένα σύνολο ιδιοτήτων και συνεπειών που δεν είναι εμφανείς και στις οποίες δεν θα είχαμε φτάσει με άλλο τρόπο. Η σημασία των πιθανοτήτων για τη μελέτη άλλων επιστημονικών τομέων και ο μεγάλος αριθμός εφαρμογών τους μας ξαναφέρνουν στα λόγια του Laplace «Τα σημαντικότερα ερωτήματα της ζωής δεν είναι στην πλειοψηφία τους παρά ζητήματα πιθανοτήτων». Ίσως για το λόγο αυτό οι πιθανότητες είναι ο κλάδος των μαθηματικών με το μεγαλύτερο αριθμό εφαρμογών.

Ο αξιωματικός ορισμός των πιθανοτήτων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Έστω δειγματικός χώρος E που συνδέεται με ένα πείραμα τύχης και το σύνολο των γεγονότων του F, ονομάζεται πιθανότητα οποιασδήποτε μορφής ανάθεσης σε κάθε γεγονός S, του F μιας αριθμητικής τιμής prob(S), με την προϋπόθεση ότι επαληθεύονται οι ιδιότητες:

1. Για οποιοδήποτε γεγονός S του F ισχύει ότι $prob(S) \geq 0$.
2. Η πιθανότητα του βέβαιου γεγονότος είναι η μονάδα: $prob(E) = 1$.
3. Έστω μια συλλογή αμοιβαία αποκλειόμενων γεγονότων $S_1, S_2, S_3 \ldots, S_n \ldots,$ του F, τότε: $Prob(S_1$ ή S_2 ή .... $S_n) = prob(S_1) + \ldots prob(S_n) + \ldots$

Λαμβάνοντας αυτές τις τρεις ιδιότητες ως αξιώματα, μέσω μιας τυπικής επαγωγικής διαδικασίας φτάνουμε σε άλλες σημαντικές ιδιότητες των πιθανοτήτων. Μερικές από αυτές που μπορούν να συναχθούν είναι:

1) $Prob(S_1) = 1 - prob(S_1)$, όπου S_1 το συμπληρωματικό γεγονός του S_1.
2) $Prob(S_1) \leq 1$.
3) $Prob(\emptyset) = 0$, όπου $\emptyset$ αντιπροσωπεύει το αδύνατο γεγονός.
4) Έστω δύο οποιαδήποτε γεγονότα S_1 και S_2 του F επαληθεύετε ότι :
$Prob(S_1 \cup S_2) = prob(S_1) + prob(S_2) - prob(S_1 \cap S_2)$.

Στην παραπάνω έκφραση, το σύμβολο ∪ δείχνει ότι πρέπει να συμβεί ένα γεγονός ή ένα άλλο και το σύμβολο ∩ ότι και τα δύο γεγονότα πρέπει να επαληθευτούν ταυτόχρονα.

Εύρεση της κατάστασης.

Μερικές φορές για να εμβαθύνομε σε κάτι είναι καλό να εξετάσομε την αντίθετη άποψη με αυτή που θα ήταν συνηθισμένο. Θα προτείνομε μερικές καταστάσεις στις οποίες είναι ήδη γνωστή η πιθανότητα για να εξακριβώσομε τη σύνθεση από την οποία ξεκινάμε:

Κατάσταση Α. Σε ένα δοχείο μπάλες άσπρου και μαύρου χρώματος. Δύο παίκτες στοιχηματίζουν ότι θα βγάλουν από το δοχείο δύο μπάλες, η πρώτη, του ιδίου χρώματος, και η άλλη, διαφορετικού χρώματος. Θέλουν να έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν. Πόσες μπάλες κάθε χρώματος πρέπει να έχει στο δοχείο;

Κατάσταση Β. Ο Γ και η Μ παίζουν με δύο ζάρια που δεν έχουν αριθμούς, αλλά χρωματιστές έδρες, μερικές μπλε και μερικές κόκκινες. Το παιχνίδι είναι απλό, αν οι επάνω έδρες έχουν το ίδιο χρώμα, κερδίζει ο Γ, εάν είναι διαφορετικές, κερδίζει η Μ. Θέλομε το παιχνίδι να είναι δίκαιο, δηλαδή και οι δύο παίχτες να έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν και ένα από τα δύο ζάρια έχει πέντε μπλε έδρες και μια κόκκινη. Πως πρέπει να χρωματίσομε τις έδρες του άλλου ζαριού;

Κατάσταση Γ. Έχομε τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων μπαλών (για παράδειγμα 10) και δύο ίδια δοχεία. Θέλομε να διανείμομε τις μπάλες στα δοχεία (κανένα από τα δύο δεν μπορεί να μείνει κενό) έτσι ώστε βγάζοντας μια μπάλα από ένα από αυτά, η πιθανότητα να είναι άσπρη να είναι η μεγίστη. Ποιά είναι αυτή η πιθανότητα; Θα είναι σε κάποια περίπτωση μεγαλύτερη από 1/2 (ή 50%);

Λύση Α. Φαίνεται ότι πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό μπαλών και χρώματος, αλλά δεν είναι έτσι, όπως φαίνεται από την εύρεση της πιθανότητας. Μια δυνατή λύση είναι 3 μπάλες ενός χρώματος (π.χ. άσπρο) και 1 του άλλου (μαύρο). Βλέπουμε ότι οι πιθανότητες είναι ίσες: P(AA)= $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Η πιθανότητα να βγει η πρώτη άσπρη είναι 3/4, επειδή υπάρχουν τρείς από τις τέσσερις. Ότι η δεύτερη είναι άσπρη, αν ήταν και η πρώτη, είναι 2/3, αφού μένουν δύο άσπρες από τις τρεις που υπάρχουν. Αν η πιθανότητα να βγουν δύο άσπρες είναι 1/2, αυτή να βγουν μπάλες διαφορετικού χρώματος (η μόνη εναλλακτική δυνατότητα) θα είναι επίσης 1/2.

Λύση Β. Το άλλο ζάρι πρέπει να έχει τρείς έδρες κάθε χρώματος, έστω κι αν φαίνεται ψέμα! Θα βρούμε τις πιθανότητες οι έδρες να έχουν το ίδιο χρώμα, που θα είναι το άθροισμα του να είναι μπλε και στα δύο ζάρια και του να είναι κόκκινες. Καθένα από τα δύο γεγονότα, με τη σειρά του, είναι το γινόμενο του να βγεί αυτό το χρώμα σε καθένα από τα ζάρια. Τελικά:
p(ίδιο χρώμα) = p(μπλε και στις δύο) + p(κόκκινο και στις δύο)= p(M1∩M2) + p(K1∩K2)= p(M1) · p(M2) + p(K1) · p(K2) =$\frac{5}{6}.\frac{3}{6}+\frac{1}{6}.\frac{3}{6}=\frac{15}{36}+\frac{3}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$
Και το άλλο 1/2 είναι ότι θα βγει διαφορετικό χρώμα.

Λύση Γ. Είναι εύκολο διαβάζοντας το δεύτερο ερώτημα να έχομε την τάση να πούμε ότι αφού υπάρχει ο ίδιος αριθμός μπαλών κάθε χρώματος (εφαρμόζοντας τη «μαθηματική» νοοτροπία, που φαίνεται χρήσιμη στην προκειμένη περίπτωση), το αποτέλεσμα θα είναι 50% ή 1/2. Όμως το ερώτημα μπορεί να μας κάνει να σκεφτούμε πως ίσως υπάρχει κάποιος τρόπος να το ξεπεράσουμε. Η αλήθεια είναι ότι βάζοντας σε ένα από τα δοχεία (π.χ. το 1) μια άσπρη μπάλα και τις υπόλοιπες στο άλλο δοχείο, η πιθανότητα αυξάνει σημαντικά:
p(άσπρο)=p(επιλογή δοχείου 1) · p(άσπρο στο δοχείο 1)+(επιλογή δοχείου 2) · p(άσπρο στο δοχείο 2) = $\frac{1}{2}$· 1+$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{19}=\frac{28}{38}$ = 0,7368→73,68%= = 0,7368→73,68%.

Εύρεση της πιθανότητας της πιθανότητας σε μία δεδομένη κατάσταση. Γενέθλια.

Κατάσταση Α. Πρώτο πρόβλημα των γενεθλίων. Μπορούμε να το διατυπώσουμε με διάφορους τρόπους, αλλά όλοι είναι ισοδυναμεί. Ο ακόλουθος ισχύει για γιορτές με πολλούς αγνώστους. «Σε μια συνάντηση υπάρχουν Ν άνθρωποι που έχουν μαζευτεί τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστο δύο από αυτούς γιορτάζουν τα γενέθλια τους την ίδια ημέρα (δηλαδή, ότι γεννήθηκαν την ίδια ημέρα του ίδιου μήνα); ή πιο συγκεκριμένα, πόσα άτομα πρέπει να είναι ώστε η πιθανότητα να είναι 1/2 (ή 50%);».

Κατάσταση Β. Ένα άλλο πρόβλημα γενεθλίων. Τώρα το ζητούμενο δεν είναι να βρεθούν δύο άτομα που γεννήθηκαν την ίδια ημέρα, αλλά να υπάρχει κάποιος του οποίου τα γενέθλια συμπίπτουν με τα δικά μου. Πόσα άτομα πρέπει να υπάρχουν, ώστε η πιθανότητα να ξεπερνά το 50%;

Λύση Α. Χρειάζεται να σκεφθούμε λίγο πόσα άτομα απαιτούνται για να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχουν δύο των οποίων τα γενέθλια συμπίπτουν; Αρκούν 367 άτομα, επειδή καθένα από τα πρώτα 366 μπορεί να έχει γενέθλια σε μια διαφορετική ημέρα του έτους (συμπεριλαμβανομένης της 29ης Φεβρουαρίου), όμως αυτό που έχει τη θέση 367 δεν έχει άλλη επιλογή παρά να έχει τα γενέθλια του την ίδια ημέρα με κάποιο από τα παραπάνω.

Χωρίς να λάβομε υπόψη τα δίσεκτα έτη (όπως θα κάνουμε στο έξης) αρκούν 366 άτομα. Πότε η πιθανότητα θα είναι 50%; Φαίνεται «προφανές» ότι είναι με τα μισά άτομα (δηλαδή, 183), αλλά δεν μπορούμε να βρούμε λόγους που το δικαιολογούν. Θα κάνομε μερικούς υπολογισμούς και θα εφαρμόσομε τον ορισμό. Αρχικά θα υποθέσομε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και θα βρούμε την πιθανότητα όταν δεν υπάρχουν συμπτώσεις, που είναι πιο εύκολο. Στη συνέχεια, αφαιρώντας από το 1(ή το 100 αν είναι σε ποσοστό) θα έχουν την πιθανότητα που ζητάμε.

Ας πάρομε μια ομάδα N ατόμων. Επιλέγομε ένα στην τύχη, που μπορεί να έχει γενέθλια σε οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες, όπως συμβαίνει και με το δεύτερο, με το τρίτο και με όλα τα άλλα μέχρι να συμπληρωθούν τα N άτομα. Επομένως ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων που μπορεί να έχουμε είναι:

CP(δυνατές περιπτώσεις)=$365\cdot365\cdot365\cdot365\cdot\ldots=365^N$.

Ας δούμε σε πόσες από αυτές τις 365^N δυνατές περιπτώσεις δεν υπάρχουν συμπτώσεις στα γενέθλια (θέλομε να μην υπάρχουν τα ίδια γενέθλια). Γι' αυτό μετράμε τις περιπτώσεις στις οποίες δεν επαναλαμβάνεται μια ημερομηνία γενεθλίων. Γι' αυτό υπάρχουν 365 τρόποι επιλογής της ημερομηνίας του πρώτου ατόμου, 364 για το δεύτερο, 364 για το δεύτερο, 363 για το τρίτο... μέχρι το N-*οστό* άτομο που μπορεί να έχει γενέθλια σε 365 – (N – 1) ημέρες.

Επομένως, ο αριθμός των δυνατών τρόπων επιλογής των ημερομηνιών γέννησης N ατόμων χωρίς να συμπίπτει κανένα από τα γενέθλια είναι:

CF(ευνοϊκές περιπτώσεις) = $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365-N)!}$.

Η πιθανότητα ότι δεν συμπίπτει κανένα ζεύγος γενεθλίων είναι

$$\frac{CF}{CP} = \frac{\frac{365!}{(365-N)!}}{365^N} = \frac{365!}{365^N \cdot (365-\mathrm{N})!}.$$

Δεδομένου ότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η πιθανότητα του αντίθετου γεγονότος (να έχει τουλάχιστον δύο άτομα των οποίων τα γενέθλια συμπίπτουν), η τιμή θα είναι: $P=1-\frac{365!}{365^N\cdot(365-\mathrm{N})!}$. (1)

Υπολογίζοντας την τιμή (1) για διαφορετικές τιμές του N βλέπουμε εκπληκτικά πράγματα. Για παράδειγμα, όταν N=50, έχουμε p=0,97. Σε μια ομάδα 50 ατόμων υπάρχουν 97% πιθανότητες να υπάρχουν δύο που έχουν την ίδια μέρα γενέθλια. Για N=23 είναι p=0,507: σε μια ομάδα 23 ατόμων υπάρχει ήδη πιθανότητα μεγαλύτερη από 50% (ακριβώς 50,7%) να συμπίπτουν τουλάχιστον δύο γενέθλια.

Στον παρακάτω πίνακα εκφράζονται οι τιμές πιθανότητας (σε δεκαδικές και ποσοστιαίες μονάδες) για διαφορετικούς αριθμούς ατόμων, εφαρμόζοντας τον τύπο (1):

N	p(N)	p(N)%	N	p(N)	p(N)%
10	0,11695	11,7	35	0,81438	81,4
15	0,2529	25,3	40	0,89123	89,1
20	0,41144	41,1	45	0,94098	94,1
22	0,4757	47,6	50	0,97037	97
23	0,5073	50,7	55	0,98626	98,6
25	0,5687	56,9	60	0,99412	99,4
30	0,70632	70,6	65	0,99768	99,8

Ο πίνακας μας δείχνει ότι με ομάδες 60 ατόμων υπάρχει η «σχεδόν» απόλυτη βεβαιότητα ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα (αν το δοκιμάζαμε σε 1.000 τυχαίες ομάδες, θα συνέβαινε σε περίπου 994). Όμως πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με το «σχεδόν», γιατί μπορούμε να είμαστε σίγουροι μόνο σε ομάδες 366 ατόμων. Αυτό που μας αποκαλύπτεται εδώ είναι ότι αν στοιχηματίζομε με σταθερότητα στη δυνατότητα αυτή θα κερδίζομε με πολύ μεγάλη συχνότητα, αλλά δεν θα ήταν καλό να παίξομε όλη μας την περιουσία σε μια μόνο περίπτωση, αφού θα μπορούσαμε να χάσομε.

Λύση Β. Στην περίπτωση αυτή η σύμπτωση είναι πολύ πιο δύσκολη και απαιτούνται πολύ περισσότερα άτομα. Η πιθανότητα ότι κάποιος δεν μοιράζεται τα γενέθλια του με έναν άλλο είναι 364/365, οπότε αν υπάρχουν N άτομα στην αίθουσα, η πιθανότητα ότι τα γενέθλια του δεν συμπίπτουν με κανενός είναι

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{N-1}$$

Επομένως, η πιθανότητα να υπάρχει κάποιος άλλος με τα ίδια γενέθλια είναι 1 μείον την τιμή αυτή $\mathrm{p} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{N-1}$

Θέλομε το p να είναι 0,5 που δεν επιτυγχάνεται όταν N=23, όπως προηγουμένως (γι' αυτή την τιμή το p=0,058571, μικρότερο από 6%), αλλά ικανοποιείται για N=254 άτομα (στην περίπτωση αυτή p=0,5005), ένα αποτέλεσμα που είναι πιο κοντά στη διαίσθηση μας από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Ίσως είναι επειδή είμαστε πολύ εγωιστές και ασυνείδητα σκεφτήκαμε ότι ήταν τα δικά μας γενέθλια!

Το περπάτημα του μεθυσμένου.

Πριν από την εμφάνιση των αλκοομέτρων, ένα κλασικό τεστ για τον εντοπισμό των μεθυσμένων οδηγών ήταν να τους βάζουν να περπατήσουν σε ευθεία γραμμή. Είναι κάτι που οποιοσδήποτε σε κανονικές συνθήκες το κάνει με ευκολία, αλλά μπορεί να είναι προβληματικό αν το εν λόγω άτομο έχει τις ικανότητες του επηρεασμένες από την κατανάλωση αλκοόλ ή άλλων ουσιών και επίσης αν, λόγω κάποιας ασθένειας, έχει δυσκολία για να διατηρήσει την ισορροπία. Είναι το λεγόμενο «**βάδισμα του μεθυσμένου**»: μετά από ένα βήμα προς μια κατεύθυνση, το επόμενο βήμα μπορεί να γίνει, τυχαία, σε οποιαδήποτε άλλη, ακόμα και προς τα πίσω, επιστρέφοντας στο σημείο εκκίνησης.

Αν κινούμαστε σε ευθεία γραμμή και σε κάθε βήμα προχωρούμε ένα μέτρο, αν κάνουμε N βήματα θα είμαστε N μέτρα από το σημείο εκκίνησης. Αν κάνομε τα βήματα του μεθυσμένου, πόσα θα χρειαστούν για να μετακινηθούμε για τα ίδια N μέτρα ή μετά από N βήματα του μεθυσμένου, σε τι απόσταση θα είμαστε από το σημείο εκκίνησης;

Εκτός από ψυχαγωγία, αυτό το πρόβλημα χρησιμεύει επίσης, για να γίνουν μοντέλα διάχυσης της θερμότητας και να μπορούμε να καταλάβομε γιατί ένα δωμάτιο χρειάζεται κάποιο χρόνο για να ζεσταθεί όταν ανάβει η θέρμανση, έτσι ώστε το καλοριφέρ καίει, κοντά του είμαστε σε σχετικά άνετη θερμοκρασία και λίγο πιο μακριά από αυτό κάνει κρύο. Όταν θερμαίνονται, τα μόρια του αέρα κινούνται ταχύτερα, και μετακινούνται με τυχαίο τρόπο, όπως ο μεθυσμένος.

Για να απαντηθεί μπορούν να γίνουν απλά μοντέλα. Για παράδειγμα, ρίχνοντας ένα κέρμα γίνεται μια κίνηση προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, ανάλογα με το αποτέλεσμα. Φαίνεται έτσι ότι, κατά μέσο όρο, για να προχωρήσει N μέτρα απαιτούνται N^2 βήματα. Για να απομακρυνθούμε κατά 10 m, πρέπει να κάνομε περίπου 100 βήματα ($100=10^2$). Πολλά, όπως φαίνεται, και η δυσαναλογία είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση. Για 50 m είναι ήδη 2.500 βήματα. Είναι κατανοητό τώρα το βάδισμα ενός μεθυσμένου μπορούμε να αντλήσουμε θετικά συμπεράσματα γιατί αργεί τόσο να ζεσταθεί ένα δωμάτιο με καλοριφέρ; Επιπλέον, στη δυσκολία μετακίνησης πρέπει να προστεθεί το ότι με την απόσταση ψύχοντας τα μόρια. Ακόμα και με.

Η γάτα και το ποντίκι.

Είναι ένα παιχνίδι τύχης. Υπάρχει μια γάτα και ένα ποντίκι στις θέσεις που σημειώνονται με το όνομά τους στον πίνακα. Ακολουθώντας το ένστικτο της, η γάτα θέλει να πιάσει το ποντίκι και αυτό προσπαθεί να ξεφύγει. Όμως στη προκειμένη περίπτωση πρόκειται για πολιτισμένα ζώα και συμφωνούν να ακολουθήσουν ορισμένους κανόνες παιχνιδιού. Καθένας από τους δύο θα κάνει ένα βήμα τη φορά (που και στις περιπτώσεις σημαίνει ότι θα περάσει από ένα διπλανό τετράγωνο οριζόντια ή κάθετα, όχι διαγώνια), στην τύχη. Η γάτα μετακινείται προς τα δεξιά ή προς τα πάνω. Το ποντίκι προς τα κάτω ή προς τα αριστερά. Αν σε κάποια στιγμή της διαδρομής συμπέσουν στο ίδιο τετράγωνο, η γάτα τρώει το ποντίκι. Αν ανταλλάξουν τις θέσεις τους χωρίς να έχει συμβεί ένα τέτοιο ενδεχόμενο, το ποντίκι σώζεται. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η γάτα θα φάει το ποντίκι; Και ότι το ποντίκι θα σωθεί;

		ΠΟΝΤΙΚΙ
ΓΑΤΑ		

Όταν έχομε κατανοήσει καλά το παιχνίδι, μπορούμε να επεκτείνουμε τον πίνακα, με τους ίδιους όρους παιχνιδιού και τοποθέτησης (και τα δύο στις αντίθετες γωνίες), αλλά τώρα σε τετράγωνο 4 x 4, στη συνέχεια 5 x 5 και ούτω καθεξής.

Λύση: Οι δύο πιθανότητες που προκύπτουν είναι αντίθετα γεγονότα, συνεπώς είναι συμπληρωματικές στο 1: αν p (ή P%) είναι η πιθανότητα η γάτα να φάει το ποντίκι, (1 – p) (ή 100 – P%) είναι η πιθανότητα για να σωθεί. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις μετακινήσεις της γάτας και του ποντικιού ρίχνοντας δύο κέρματα (ένα η γάτα και ένα το ποντίκι), όπου μια από τις δυνατότητες (π.χ. κορόνα) είναι να κινηθούν οριζόντια, και η άλλη, κάθετα.

Τα μόνα σημεία συνάντησης είναι αυτά της κύριας διαγωνίου του τετραγώνου (αυτής που δεν ενώνει τις αρχικές θέσεις), και επίσης πρέπει να φτάσουν και οι δύο ταυτόχρονα. Στην περίπτωση 3 x 3 το ποντίκι και η γάτα μπορούν να συναντηθούν σε 3 τετράγωνα. Για να φτάσουν εκεί πρέπει να κάνουν δύο βήματα, επομένως η πιθανότητα ότι καθένα θα φτάσει στα τετράγωνα των άκρων είναι (1/2) x (1/2) = (1/4). Στο κεντρικό τετράγωνο, στο οποίο μπορούν να φτάσουν με δύο τρόπους (αριστερά –κάτω και κάτω -αριστερά στην περίπτωση του ποντικιού και το αντίθετο για τη γάτα) είναι διπλή: 2/4 = 1/2. Η πιθανότητα να συναντηθούν σε ένα τετράγωνο των γωνιών είναι (1/4) x (1/4) = 1/16. Στο τετράγωνο του κέντρου, 2/4 x 2/4 = 4/16. Στο σύνολο των 3 τετραγώνων δυνατής συνάντησης η πιθανότητα είναι 1/16 + 1/16 + 4/16 = 6/16 =3/8 (ή 37,50%). Επομένως, η πιθανότητα να σωθεί το ποντίκι είναι 10/16=5/8 (ή 62,50%).

Πολυάριθμες οικογένειες.

Στη χώρα μας οι οικογένειες έχουν λίγα παιδιά, στο σημείο που είναι σπάνιο να βρεθεί κάποια με τέσσερα παιδιά. Όμως οι προηγούμενες γενιές ήταν πολύ παραγωγικές, και εξακολουθούν να είναι σε πολλά μέρη του πλανήτη. Είναι ήδη γνωστό ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγοράκι ή κοριτσάκι είναι σχεδόν ίδια.

Όμως μεταξύ των οικογενειών με τέσσερα παιδιά, τι είναι πιο πιθανό, να έχουν δύο παιδιά κάθε φύλου, ή τρία του ενός φύλου και ένα του άλλου;

Λύση. Μπορούμε να προσομοιώσομε την κατάσταση με τη ρίψη τεσσάρων νομισμάτων, με την κορόνα να αντιστοιχεί στο ένα φύλο, και τα γράμματα στο άλλο.

Μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα δεντροδιάγραμμα με τις πιθανότητες κορόνας ή γραμμάτων σε καθέναν από τους τέσσερις κλάδους.

Από τους 16 κλάδους του δέντρου, σε 8 είναι 3 παιδιά του ενός φύλου και ένα του άλλου (πιθανότητα που απομένουν είναι τα τέσσερα του ίδιου φύλου (πιθανότητα 3/8 = 37,5%) και οι δύο που απομένουν είναι τα τέσσερα του ίδιου φύλου (πιθανότητα 1/8=12,5%). Αν κάνετε πολλές δοκιμές (π.χ. προσθέτοντας τα αποτελέσματα πολλών φύλων που το κάνουν) τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σε αυτή την πιθανότητα.

Γεωμετρική πιθανότητα σε μία σφαίρα.

Επιλέγουμε τρία τυχαία σημεία πάνω σε μια σφαίρα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι τα τρία βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο (υποθέτοντας ότι ο μέγιστος κύκλος που το οριοθετεί ανήκει στο ημισφαίριο);

Λύση. Ίσως το θέμα απαιτεί ορισμένες προκαταρκτικές σκέψεις σχετικά με την γεωμετρία του χώρου και της σφαίρας. Έστω τρία οποιαδήποτε σημεία, υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα επίπεδο που περνάει από αυτά (γι' αυτό ένα τραπέζι μπορεί να σταθεί σε τρία πόδια, που δεν βρίσκονται σε ευθεία γραμμή. Αν βρίσκονται, τότε υπάρχουν άπειρα επίπεδα, τέμνοντας μια σφαίρα καθορίζει σε αυτή έναν κύκλο, που είναι μέγιστος (με ακτίνα ίση με της σφαίρας) αν αυτό το επίπεδο περνάει από το κέντρο της και με μικρότερη ακτίνα σε άλλη περίπτωση.

Στην τελευταία περίπτωση το σύνολο του κύκλου βρίσκεται σε ένα ημισφαίριο, που αποκτάται τέμνοντας τη σφαίρα με ένα επίπεδο παράλληλο προς αυτό που διέρχεται από το κέντρο. Επομένως, εάν το επίπεδο που περνά από τα τρία σημεία περνά από το κέντρο της, τα τρία σημεία είναι στον μέγιστο κύκλο που οριοθετεί το ημισφαίριο. Διαφορετικά, βρίσκονται μέσα σε αυτό. Όμως και στις δύο περιπτώσεις, τα τρία σημεία είναι στο ίδιο ημισφαίριο. Επομένως, η απροσδόκητη απάντηση είναι ότι τα τρία σημεία, με όποιον τρόπο κι αν τα επιλέξομε, είναι πάντα στο ίδιο ημισφαίριο.

Κληρώσεις & λαχειοφόρες αγορές.

Ο σχεδιασμός δίκαιων κληρώσεων και λαχειοφόρων αγορών (στις οποίες όλοι οι συμμετέχοντες έχουν τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν) είναι λίγο πιο περίπλοκος από ότι φαίνεται. Μπορούμε να θεωρήσομε ότι είναι κάτι που δεν μας επηρεάζει, εκτός αν είμαστε παίκτες, αλλά τότε δε θα έχομε ακριβή αντίληψη της πραγματικότητας. Στην πραγματικότητα, σε όλη μας τη ζωή συμμετέχουμε σε πολλές κληρώσεις, μερικές φορές χωρίς να το καταλαβαίνομε, όπως αυτές που γίνονται για την επιλογή μελών των εκλογικών τμημάτων ή ενόρκων στις δίκες.

Επίσης η κατανομή των σχολικών θέσεων στα μέρη και στις ηλικίες που είναι πάντα σπάνιες, η διανομή των κοινωνικών κατοικιών, η συμμετοχή στις εξεταστικές επιτροπές διαγωνισμών (αν κάποιος είναι δημόσιος υπάλληλος) ή ο τόπος ή η σειρά συμμετοχής σε αυτές (αν είναι υποψήφιος). Υπήρξαν ιστορικά παραδείγματα, μερικά διαβόητα, για άδικες κληρώσεις και κακοσχεδιασμένες λαχειοφόρες αγορές, σε όλες τις περιπτώσεις χωρίς προμελετημένο τρόπο, νομίζοντας ότι έκαναν το σωστό, γεγονός που δείχνει ότι ακόμη και στον τομέα αυτόν προκύπτουν δυσκολίες σύλληψης και εκτέλεσης. Η λέξη «λοταρία» για τη λαχειοφόρο αγορά προέρχεται από το lotto, ιταλική λέξη για να περιγράψει μια παρτίδα και ταυτόχρονα τον προορισμό. Ωστόσο, υπάρχουν αναφορές για λαχειοφόρες αγορές ακόμη και στην Κίνα, όπου η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη χρηματοδότηση του Σινικού Τείχους. Στην Ευρώπη, η ιστορία της λαχειοφόρου αγοράς ξεκινά το 1498 στην Πορτογαλία, που την επινόησε για να βοηθήσει τους ανήμπορους και να ανταποκριθεί στις νομισματικές ανάγκες της χώρας. Το 1727 η Ολλανδία ίδρυσε μια από τις παλαιότερες λαχειοφόρες αγορές στον κόσμο, αφού εξακολουθεί να λειτουργεί ακόμα. Αναζητούσαν να αποκαταστήσουν το δημόσιο ταμείο για τη χρηματοδότηση των πολέμων τους και για την κατασκευή δημόσιων έργων.

Κληρώσεις με κάλπικο νόμισμα.

Οι κληρώσεις με ένα νόμισμα μπορεί να μην είναι πολύ συχνές, αλλά με αυτές επιχειρούμε να πετύχομε μια καλύτερη αντίληψη των προβλημάτων που συνδέονται με τους σχεδιασμούς κληρώσεων. Αν έχομε ένα νόμισμα και με αυτό θέλομε να κάνομε μια δίκαιη και αμερόληπτη κλήρωση για δύο άτομα, η πρώτη δυνατότητα είναι να θεωρήσομε ότι το νόμισμα είναι κανονικό, δηλαδή, ότι η πιθανότητα να έρθουν κορόνα ή γράμματα είναι ακριβώς ίδια, οπότε η λύση είναι απλή, ρίχνομε κορόνα-γράμματα. Όμως, ότι το νόμισμα είναι κανονικό, είναι κάτι που δεν μπορούμε να γνωρίζομε εκ των προτέρων. Ωστόσο, με λίγη σκέψη μπορούμε να πετύχομε μια κλήρωση που είναι πραγματικά δίκαιη, ανεξαρτήτως του νομίσματος.

Αν υποθέσομε ότι η πιθανότητα να βγει κορόνα (C) είναι p (την οποία δεν γνωρίζομε και θα ήταν 0,5 αν το νόμισμα ήταν κανονικό), έτσι ώστε η πιθανότητα για γράμματα (X), το αντίθετο γεγονός με το προηγούμενο, θα είναι (1- p). Η πιθανότητα να έχομε CX (κορόνα- γράμματα) με αυτή τη σειρά, όταν οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες και το αποτέλεσμα της μιας δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης, είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων: **Prob(CX) = P* (1-P).**

Η πιθανότητα να έρθει XC με αυτή τη σειρά είναι:

Prob(XC) = (1-P)*P = (XC).

Επομένως, έχομε τον τρόπο για να κάνομε μια δίκαιη κλήρωση μεταξύ δύο ατόμων με οποιοδήποτε νόμισμα. Ρίχνομε το νόμισμα δύο συνεχόμενες φορές: με XC κερδίζει ένας από τους παίκτες, με CX, ο άλλος. Το μόνο μειονέκτημα είναι ότι οι ρίξεις στις οποίες έρχεται XX ή CC είναι ακατάλληλες, δεν μπορούμε να τις λάβομε υπόψη, και θα πρέπει να συνεχίσομε έως ότου μια φορά θα έχομε CX ή XC. Αγνοώντας αυτές τις περιπτώσεις δεν αλλάζει ο δίκαιος χαρακτήρας της κλήρωσης. Επομένως, οποιοδήποτε νόμισμα είναι καλό για να κάνομε μια δίκαια κλήρωση μεταξύ δύο ατόμων. Κάτι που δεν ισχύει μόνο για κέρματα και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άλλο μέσο με δύο πιθανά αποτελέσματα, έστω και αν έχουν πολύ διαφορετικές πιθανότητες.

Κληρώσεις για τρία ή περισσότερα άτομα.

Αν τα άτομα ανάμεσα στα οποία πρέπει να κάνομε την κλήρωση είναι τρία, κάποιος προτείνει την εξής διαδικασία, ετοιμάζομε μια τσάντα (ή αδιαφανές κουτί) με τρεις μπάλες, μια άσπρη και δύο μαύρες όλες με ίδιο σχήμα και υφή ώστε να μην μπορούν να διακριθούν με την αφή. Οι τρεις τραβούν, με τη σειρά, μια μπάλα που δεν επιστρέφουν στην τσάντα.

Κερδίζει αυτός που βγάζει την άσπρη μπάλα. Εξετάζοντας αν είναι δίκαιο ή όχι και αν κάποιος από τους τρεις έχει πλεονέκτημα μπορούμε να υποθέσουμε, για απλότητα, ότι οι μπάλες είναι αριθμημένες 0, 1, 2, και η άσπρη μπάλα είναι ο αριθμός 0. Η σειρά τραβήγματος των τριών μπαλών θα είναι μια από τις έξι ακόλουθες, που αντιστοιχούν στις έξι δυνατές διατάξεις που μπορούν να προκύψουν: 012 021 102 120 201 210

Μια απλή οπτική παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στις δύο από τις έξι περιπτώσεις η μπάλα 0 θα βγει πρώτη, σε άλλες δύο θα βγει δεύτερη και στις δύο υπόλοιπες Τρίτη. Με άλλα λόγια, είναι αδιάφορη η σειρά με την οποία θα τραβήξουν τη μπάλα. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Laplace, είναι επίσης προφανές ότι η πιθανότητα να βγει η άσπρη μπάλα πρώτη είναι 2/6 (δύο ευνοϊκές περιπτώσεις, σε έξι δυνατές περιπτώσεις, που αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες διατάξεις), και επίσης είναι 2/6 η πιθανότητα να βγει στη δεύτερη ή Τρίτη θέση.

Αν συλλογιστούμε το πρόβλημα με όρους δεσμευμένης πιθανότητας, εφόσον υπάρχουν τρεις μπάλες, η πιθανότητα να κερδίσει ο πρώτος είναι prob($1^{ος}$) = 1/3. Για να κερδίσει ο δεύτερος, ο πρώτος πρέπει να έχει βγάλει μια μαύρη μπάλα και ο δεύτερος την άσπρη. Με άλλα λόγια, ο δεύτερος πρέπει να έχει τη δυνατότητα να τραβήξει (η πιθανότητα για να συμβεί αυτό είναι 2/3, η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο πρώτος δεν έχει κερδίσει) και επιπλέον να βγάλει την άσπρη όταν υπάρχουν μόνο μια μαύρη και μια άσπρη. Συνολικά, prob($2^{ος}$) = 2/3 *1/2= 1/3. Τέλος, prob($3^{ος}$) = 1-1/3 – 1/3 = 1/3.

Αν αντί για τρεις είχε 100 ή Ν συμμετέχοντες, θα βάζαμε 100 (ή Ν) μπάλες και παρόμοιοι συλλογισμοί μας οδηγούν να βεβαιώσουμε ότι η πιθανότητα να βγει η μπάλα σε μια συγκεκριμένη θέση είναι 1/100 (ή 1/Ν).

Μια αντίστοιχη κατάσταση παρουσιάζεται όταν ο δάσκαλος θέλει να κληρώσει ένα βραβείο μεταξύ των Ν μαθητών του και γι’ αυτό γράφει έναν αριθμό μεταξύ 1 και Ν σε ένα χαρτί και ζητά από κάθε μαθητή «με αλφαβητική σειρά» έναν αριθμό μεταξύ 1 και Ν, δίνοντας το βραβείο σε όποιον μαντέψει τον αριθμό που έγραψε. Πάλι η σειρά δεν έχει σημασία.

Κληρώσεις με πολλούς συμμετέχοντες.

Οι κληρώσεις με πολλούς συμμετέχοντες παρουσιάζουν δυσκολίες, για αυτό τον λόγο θα γίνει αναφορά σε δύο ιστορικά γεγονότα, που και τα δύο σχετίζονται με στρατούς. Και στις δύο περιπτώσεις οργανώθηκαν με την εντύπωση ότι ήταν δίκαιες, ότι όλοι οι συμμετέχοντες είχαν τις ίδιες πιθανότητες να επιλεγούν ή να αποκλεισθούν.

Στις ΗΠΑ το 1970, με τον πόλεμο του Βιετνάμ στο απόγειό του, την ανάγκη για στρατιώτες και μια ατμόσφαιρα απόρριψής του, οργανώθηκε μια στρατιωτική κλήρωση για να επιλέξουν τους νέους που έπρεπε να αποσταλούν. Για να οργανώσουν την κλήρωση τοποθέτησαν τις 366 πιθανές ημερομηνίες ενός έτους (από 1 Ιανουαρίου έως 31 Δεκεμβρίου, συμπεριλαμβανομένης της $29^{ης}$ Φεβρουαρίου), καθεμιά σε μια κάψουλα και όλες τραβήχτηκαν στην τύχη. Η πρώτη που βγήκε ήταν η $14^{η}$ Σεπτεμβρίου, μετά η $24^{η}$ Απριλίου και με τον τρόπο αυτό στρατολογήθηκαν στρατιώτες, που γεννήθηκαν μεταξύ 1941 και 1952, ακολουθώντας τη σειρά των ημερομηνιών που εμφανίστηκαν στην κλήρωση (πρώτα αυτοί της $14^{ης}$ Σεπτεμβρίου, στη συνέχεια αυτοί της $24^{ης}$ Απριλίου κλπ.)

Στην κλήρωση του Βιετνάμ το αποτέλεσμα αποκάλυψε ότι εκείνοι που γεννήθηκαν στους τελευταίους μήνες του έτους ήταν πολλοί περισσότεροι από εκείνους που γεννήθηκαν στους υπόλοιπους μήνες. Δεδομένου ότι η ημερομηνία γέννησης θεωρείται τυχαία ήταν αναμενόμενο ότι η κατανομή των ημερομηνιών θα ήταν επίσης τυχαία. Όμως οι κάψουλες με τις ημερομηνίες γέννησης μπήκαν στο δοχείο αρχίζοντας από την $1^{η}$ Ιανουαρίου και έπειτα, με αυστηρή σειρά ημερομηνιών μέχρι να φτάσουν στις 31 Δεκεμβρίου. Χωρίς να τις αναμείξουν ιδιαίτερα άρχισαν να τραβούν, έτσι ώστε αυτές του τέλους του έτους που ήταν επάνω, βγήκαν σε πολύ υψηλότερο ποσοστό από το αναμενόμενο. Με πιο απλό και πιο δίκαιο τρόπο θα μπορούσαν να τραβήξουν μία ημερομηνία στην τύχη, μετά να γυρίσουν κατάλληλα το δοχείο, και να επιλέξουν τους απαιτούμενους άνδρες που γεννήθηκαν μετά την ημερομηνία αυτή. Η επόμενη περίπτωση αφορά την Ισπανία το 1997, όπου η στρατιωτική θητεία ήταν υποχρεωτική για τους άνδρες μιας συγκεκριμένης ηλικίας. Οι στρατεύσιμοι ήταν 165.342, αλλά οι ανάγκες του στρατού ήταν λιγότερες, έτσι ώστε 16.442 από αυτούς δεν έπρεπε να πάνε στρατό. Στην περίπτωση αυτή η επιλογή στην κλήρωση ήταν κάτι επιθυμητό. Οργανώθηκαν με τον ακόλουθο τρόπο: πρώτα δόθηκε με τυχαίο τρόπο ένας αριθμός σε καθέναν από τους 165,342 στρατεύσιμους.

Για να γίνει η κλήρωση τοποθετήθηκαν έξι δοχεία με μπάλες για καθένα από τα έξι ψηφία του αριθμού που θα επιλεγόταν και από τον οποίο θα αποδεσμεύονταν τα 16.442 «αγόρια» που είχαν αριθμούς συνεχόμενους με αυτόν που βγήκε και αν έφταναν στο τέλος θα ξανάρχιζαν από τον αριθμό 1 μέχρι να ολοκληρωθεί η απαιτούμενη ποσότητα). Στο πρώτο δοχείο είχε πέντε μπάλες με το 1 και πέντε με 0 (αντιστοιχούσε στις εκατοντάδες χιλιάδες). Σε όλα τα άλλα είχε 10 μπάλες αριθμημένες από το 0 έως το 9. Είχε προβλεφτεί ότι εάν στο δεύτερο δοχείο (με τις δεκάδες χιλιάδες) έβγαινε μια μπάλα μεγαλύτερη από το 6 όπως συνέβηκε στην πραγματικότητα, θα επαναλαμβανόταν το τράβηγμα στο δοχείο αυτό. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο ήταν δίκαια ή όχι η κλήρωση.

Στην περίπτωση αυτή το γεγονός ότι στο πρώτο δοχείο υπήρχε η ίδια πιθανότητα να βγει 0 ή 1, αφού υπήρχαν πέντε μπάλες για το καθένα, έκανε την πιθανότητα να βγει ένας αριθμός με συνέπεια να βρεθεί εκτός στρατολόγησης, να εξαρτάται από τον αριθμό που είχε. Έτσι, αγνοώντας το θέμα της ενδεχόμενης επανάληψης του αριθμού που βγήκε στο δεύτερο δοχείο, για τους αριθμούς μεταξύ 1 και 99.999, η πιθανότητα να βγουν είναι:

$$\mathbf{P^{(p)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{99.999} = \mathbf{0{,}000005}$$

Ενώ για τους υπόλοιπους αριθμούς η πιθανότητα είναι:

$$\mathbf{P(S)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{65.343} = \mathbf{0{,}00000765.}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί της τελευταίας ομάδας είχαν πιθανότητα να εκλεγούν σημαντικά μεγαλύτερη από τους πρώτους, κατά περίπου 50% περισσότερο. Ο αριθμός που βγήκε στην κλήρωση ήταν το 155.611. Στην περίπτωση του πρώτου 5, χρειάστηκε να επαναληφθεί το τράβηγμα, επειδή αρχικά βγήκε ένα 8 (επειδή είναι μεγαλύτερο από 6). Απαλλάχθηκαν από τη στρατιωτική υπηρεσία από τον αριθμό αυτόν μέχρι το τέλος και στη συνέχεια από το 1 έως να ολοκληρωθούν οι 16.442 απαλλαγέντες.

Λαχειοφόρες αγορές, μαθηματική προσδοκία.

Στις κοινωνίες μας υπάρχει αντίσταση στην πληρωμή φόρων, εκτός από έναν που καταβάλλεται οικειοθελώς και με ευχαρίστηση: οι επίσημες λαχειοφόρες αγορές. Επειδή σε αυτές, χωρίς καμία αμφιβολία, αυτός που κερδίζει πάντα είναι το κράτος. Η ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών έχει αναμφισβήτητο μαθηματικό ενδιαφέρον, αλλά επίσης και κοινωνικό. Λαμβάνοντας υπόψη τον μεγάλο αριθμό ανθρώπων και τις οικονομικές ποσότητες που διακινούνται, είναι ένα σημαντικό θέμα σε όλες τις χώρες. Δεδομένου ότι σε πολλά παιχνίδια όπως η λαχειοφόρος αγορά υπάρχει η δυνατότητα να αποκτηθούν διάφορα βραβεία, μια σημαντική έννοια είναι της μαθηματικής ελπίδας του κέρδους, η οποία μας παρέχει πληροφορίες σχετικά με το μέσο κέρδος που θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε. Για τον υπολογισμό του καθορίζονται, αρχικά, οι πιθανότητες κάθε βραβείου με την κλασική μέθοδο: ο λόγος μεταξύ του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων να πάρουμε ένα βραβείο και του συνόλου των πιθανών περιπτώσεων.

Για παράδειγμα, σε μια κλήρωση με 100 λαχνούς ή αριθμούς, ένα πρώτο βραβείο και δύο δεύτερα, η πιθανότητα να κερδίσουμε το πρώτο βραβείο παίζοντας ένα λαχνό είναι 1/100 = 0.01 ή 1%, και ένα δεύτερο, 2/100 = 0,02 ή 2%. Η πιθανότητα να μην κερδίσουμε είναι 97/100 = 0,97 ή 97%. Η μαθηματική προσδοκία του κέρδους σε ένα παιχνίδι είναι το άθροισμα των γινομένων των δυνατών κερδών επί της πιθανότητας απόκτησής τους μείον τα χρήματα που καταβλήθηκαν για την συμμετοχή.

Στην προηγούμενη λοταρία, αν κάθε λαχνός κοστίζει 5 €, το πρώτο βραβείο είναι 100 € και τα δύο δεύτερα 40 €, η ελπίδα του κέρδους είναι 100 * 0,01 + 40 * 0,02 – 5 = 1 + 0,8 – 5 = -3,2 €. Αν η ελπίδα είναι αρνητικός αριθμός, όπως στην περίπτωση αυτή, το παιχνίδι είναι **δυσμενές** για τον παίκτη. Αν ήταν θετικός, κάτι που συμβαίνει συχνά, εκτός από λάθος στον σχεδιασμό, θα ήταν **ευνοϊκό** και αν ήταν μηδέν, θα ήταν ένα **αμερόληπτο ή δίκαιο παιχνίδι** για τα δύο μέρη.

Λόττο.

Οι λαχειοφόρες αγορές με το όνο α λόττο, στις οποίες πρέπει να επιλεγούν m αριθμοί μεταξύ 1 και N είναι πολύ δημοφιλείς σε πολλές χώρες. Στην Ισπανία υπάρχουν τρεις: η Loteria Primitiva και το Lotto 6/49 στην Καταλονία, στις οποίες πρέπει να επιλεγούν 6 αριθμοί μεταξύ 1 και 49, και το 7/39 της ONCE. Στο Ηνωμένο Βασίλειο υπάρχει επίσης το 6/49. <u>Στην Ελβετία, το 6/45, στη Νέα Ζηλανδία, το 6/40 και στην Σουηδία υπάρχουν δύο δυνατότητες, 7/35 ή 6/48</u>.

Σε όλες τις περιπτώσεις, με μικρές παραλλαγές υπάρχει βραβείο αν βρεθούν όλοι ή διάφοροι από τους αριθμούς που κληρώνονται. Στην περίπτωση του Ισπανικού Λόττο πρέπει να βρεθούν 6, 5 + ένας άλλος αριθμός που κληρώνεται ξεχωριστά, συμπληρωματικός, 5, 4, 3. Σύμφωνα με το Ισπανικό Λόττο το πρώτο βραβείο είναι 6 αριθμοί που κληρώνονται μεταξύ 1 και 49. Ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να βγουν 6 αριθμοί από τους 49 δυνατούς, εφόσον η σειρά με την οποία επιλέγονται δεν έχει σημασία, είναι συλλογιζόμενοι ως εξής:

$$\binom{49}{6} = \boldsymbol{C_{49}^{6}} = \frac{\mathbf{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}}{\mathbf{6}} = \mathbf{13.983.816}$$

Σχεδόν 14 εκατομμύρια είναι οι συνδυασμοί που υπάρχουν. Έτσι η πιθανότητα να πετύχουμε τους 6 κάνοντας ένα μόνο στοίχημα είναι ένας πραγματικά μικρός αριθμός.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13.983.816}} = \mathbf{0{,}000007\%.}$$

Σχετικά με τις πιθανότητες των άλλων βραβείων, σε κάθε περίπτωση θα είναι:

$$\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma}}{\mathbf{13.983.816}}$$

γι' αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν οι δυνατές περιπτώσεις για κάθε αριθμό επιτυχιών. Μπορεί να μη βρεθεί κανένας από τους έξι αριθμούς και με κάθε «αποτυχία» μπορεί να ληφθεί οποιοσδήποτε από τους άλλους αριθμούς 49 – 6 = 43, επομένως υπάρχουν 6 · 43 = 258 δυνατότητες να υπάρξουν 5 επιτυχίες, αλλά ε΄δω περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις στις οποίες συμπίπτει ο συμπληρωματικός αριθμός και εκείνες που δεν συμπίπτει. Με παρόμοιους συλλογισμούς, οι ευνοϊκές περιπτώσεις για 4 επιτυχίες είναι $C_6^3 \cdot C_{43}^3$ = 246.820. Έτσι οι πιθανότητες επιτυχίας είναι:

5 + C: p= 6 / 13.983.816 = 1 / 2.330.636

5 p= 252 / 13.983.816 = 1 / 1.032
4 p= 13.545 / 13.983.816 = 1 / 57
3 p= 246.820 / 13.983.816 = 1 /57

Αθροίζοντας όλα αυτά, παίρνουμε ότι η πιθανότητα βραβείου είναι 1,86%. Είναι όλοι πάρα πολύ μικροί αριθμοί. Αν είμαστε σταθεροί είναι εύκολο, αφού το έτος έχει 52 εβδομάδες, περίπου μια φορά ανά έτος να έχουμε ένα δελτίο με τρεις επιτυχίες. Οι υπόλοιπες πιθανότητες είναι τόσο μικρές που δεν μπορούμε να αναμένουμε βραβεία με μεγαλύτερη συχνότητα, ακόμα και για τις 4 επιτυχίες θα πρέπει να περιμένουμε μερικά χρόνια.

Πίνακες ζωής.

Οι πίνακες ζωής ή θνησιμότητας είναι ένα στατιστικό εργαλείο που επιτρέπει την μελέτη της θνησιμότητας σε διάφορους πληθυσμούς σε μια χρονική περίοδο. Μία από τις πιο κοινές εφαρμογές τους είναι οι ασφάλειες. Οι πρώτοι πίνακες ζωής ή θνησιμότητας οφείλονται στον Τζον Γκράουντ ο οποίος, μαζί με τον William Petty, επεξεργάστηκε στο δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα τις πρώτες στατιστικές για τον πληθυσμό, γεγονός που τους καθιστά προδρόμους της σύγχρονης δημογραφίας.

Πιθανότητες & στατιστική στην ιατρική.

Με τα αποτελέσματα μερικών κλινικών αναλύσεων, ο γιατρός συμβουλεύεται μια σειρά στοιχείων τα οποία, σύμφωνα με διαδικασίες πιθανοτήτων και στατιστικής, του παρέχονται με κατανοητό τρόπο ώστε να λάβει μέτρα που θεωρεί κατάλληλα. Η τελική απόφαση είναι για τον γιατρό. Τα στοιχεία, η επεξεργασία τους και ο τρόπος με τον οποίο του παρέχονται είναι ένα μεγάλο εργαλείο υποστήριξης για την απόφασή του. Όμως μερικές πληροφορίες μπορεί να έχουν αποφασιστική σημασία ώστε ο γιατρός να πάρει αποφάσεις ή να μας επιβάλει πρότυπα συμπεριφοράς.

Για παράδειγμα, ξέρομε ότι ορισμένες «συστάσεις» μαζί με τις αγωγές, δείχνουν ότι κάτι είναι «εκτός των κανονικών ορίων». Στην ιατρική ως κανονικά όρια ενός συγκεκριμένου χαρακτηριστικού εννοούνται αυτά μεταξύ των οποίων βρίσκεται η πλειοψηφία του πληθυσμού στον οποίο ανήκομε και καθορίζονται με βάση το **θεώρημα κεντρικού ορίου** και την **κανονική κατανομή**. Η διαδικασία για να γίνει αυτό είναι να προσδιοριστεί μεταξύ ποιων τιμών θα βρίσκεται η μέση τιμή με ορισμένη πιθανότητα, το πρόβλημα που ήδη μελέτησε ο Laplace.

Οι τιμές μεταξύ των οποίων θα πρέπει να είναι ο μέσος όρος είναι αυτό που στη σημερινή στατιστική ονομάζεται **διάστημα εμπιστοσύνης**. Μια παρόμοια περίπτωση είναι όταν ένας παιδίατρος λέει ότι το εκατοστημόριο στο οποίο βρίσκεται ένα παιδί από την άποψη του βάρους και του ύψους είναι 85% ή 95%. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις διαφορετικές ηλικίες που χρησιμοποιούν οι παιδίατροι αναφέρονται στα βάρη και στα ύψη μεταξύ των οποίων είναι ο πληθυσμός των παιδιών που αποτελούν τον πληθυσμό αναφοράς. Ότι ένα παιδί είναι στο εκατοστημόριο 80 του ύψους και 75 του βάρους σημαίνει ότι το 80% των παιδιών της ίδιας ηλικίας θα είναι, το πολύ, του ίδιου ύψους με αυτό και το ίδιο για το εκατοστημόριο 75% όσον αφορά το βάρος. Είναι σημαντικό να έχομε έναν καλό πληθυσμό αναφοράς: αν αυτός που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της κανονικότητας του ύψους και του βάρους ήταν πολύ διαφορετικός από αυτόν που αντιστοιχεί, τα αποτελέσματα δεν θα είχαν καμιά εγκυρότητα.

Πιθανότητες & DNA.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, η χρήση των προφίλ δεσοξυριβονουκλεϊκου οξέος (DNA) χρησιμοποιείται σε δικαστικές υποθέσεις για την απόδειξη της πατρότητας, της οικογενειακής σχέσης μεταξύ διαφορετικών ατόμων ή της αθωότητας ή ενοχής ποινικών υπόπτων. Η ιδέα είναι η σύγκριση του DNA των παιδιών με αυτό των θεωρούμενων πατέρων στην περίπτωση των τεστ πατρότητας, ή του DNA που προέρχεται από δείγματα που συλλέχτηκαν στη σκηνή ενός εγκλήματος με αυτό που λαμβάνεται από τους υπόπτους. Αυτά τα τεστ έχουν βελτιωθεί και σήμερα αποτελούν μια βασική απόδειξη σε πολλές νομικές διαδικασίες, λόγω της μεγάλης ποικιλίας μεταξύ των προφίλ DNA των διαφορετικών ατόμων, ακόμα και αν ανήκουν στην ίδια εθνική ομάδα. Διάφορα γεγονότα, όπως η φήμη ορισμένων νομικών υποθέσεων στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί αυτός ο τύπος τεστ ή οι τηλεοπτικές σειρές όπως το CSI, έχουν κάνει γνωστές αυτές τις τεχνικές. Αυτό που είναι λιγότερο γνωστό είναι ότι πίσω από την ανάπτυξη αυτών των προφίλ DNA βρίσκονται ισχυρά εργαλεία πιθανοτήτων, τα οποία έχουν οδηγήσει στη δικαστική στατιστική.

Μία από τις πρώτες δίκες στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν τεστ DNA έγινε στην Αγγλία το 1987, όπου ένας νεαρός δεκαεπτά ετών κατηγορήθηκε για τον βιασμό και τη δολοφονία δύο κοριτσιών, ενός το 1983 και του άλλου το 1987. Ορισμένες περιστασιακές ενδείξεις και το ιστορικό του νεαρού έμοιαζαν να τον δείχνουν ένοχο χωρίς πολλές αμφιβολίες. Ο νεαρός ζήτησε η ανάλυση του αίματος και το DNA να συγκριθούν με τα δείγματα σπέρματος που βρέθηκαν στα δύο κορίτσια. Το συμπέρασμα ήταν πειστικό, τα δύο κορίτσια είχαν βιαστεί από το ίδιο άτομο, αλλά δεν ήταν ο κατηγορούμενος. Στις νομικές υποθέσεις στις οποίες επιχειρείται να προσδιοριστεί ο δράστης ή οι δράστες ενός εγκλήματος μετριέται κάποιο χαρακτηριστικό που επιτρέπει τον καθορισμό της πιθανής σχέσης του κατηγορούμενου με το έγκλημα. Η ιδέα είναι απλή, αλλά το πρόβλημα είναι η πρακτική εφαρμογή της.

Το θέμα είναι να οριστεί κάποιο χαρακτηριστικό που επιτρέπει να αναγνωριστεί με ακρίβεια ένα άτομο. Δε θα αναλυθεί ο τρόπος ανάλυσης DNA, αλλά θα περιγράψομε πως ο υπολογισμός των πιθανοτήτων συμβάλλει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το θεωρούμενο έγκλημα. Για να το απεικονίσομε, θα θεωρήσομε μια απλοποιημένη περίπτωση, λίγο ρεαλιστική αλλά χρήσιμη για τους σκοπούς μας.

Έχει διαπραχτεί ένα έγκλημα και η αστυνομία συλλέγει δείγματα DNA στο χώρο που έγινε και έχει συλλάβει έναν ύποπτο, από τον οποίο έχει πάρει το DNA του. Έστω ότι κάθε δείγμα DNA παράγει ένα απλό δεδομένο, ανεξάρτητα από το αν στη δίκη εμφανίζονται και άλλες δυνατότητες, θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο επιλογές: ο ύποπτος είναι ένοχος (C) ή αθώος ( ), και η απόφαση θα βασιστεί στα τεστ DNA. Ο σκοπός επομένως είναι η διάκριση μεταξύ των δύο ακόλουθων υποθέσεων:

1) Τα δείγματα προέρχονται από το ίδιο άτομο (C).
2) Τα δείγματα προέρχονται από διαφορετικά άτομα (I).

Συμβολίζομε με Εν (ένδειξη) τη σύμπτωση των δειγμάτων που προέρχονται από το DNA που συλλέχτηκαν στον τόπο του εγκλήματος και του υπόπτου και με S τις άλλες περιπτώσεις. Εδώ θα πρέπει να προσφύγομε στο θεώρημα του Bayes, που αναφέρει ότι για δύο γεγονότα A και B και συμβολίζοντας με prob (A| B) την δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A με δεδομένο το γεγονός B, υπό την προϋπόθεση ότι prob(B)$\neq$ 0, επαληθεύεται ότι:

Prob (A|B) = (prob (A|B) · prob (A) / prob (B).

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes, η αναλογία της ενοχής προς την αθωότητα δίνεται από:

$$\frac{prob\,(C|Ev|C,S)}{prob\,(I|Ev,S)} = \frac{prob\,(Ev|C,S)}{prob\,(Ev|I,S)} \cdot \frac{prob\,(C|S)}{prob(I|S)}$$

Από αυτή την έκφραση φαίνεται ότι οι δύο βασικές πιθανότητες που πρέπει να καθοριστούν είναι η πιθανότητα της ένδειξης Εν αν ο ύποπτος είναι ένας και εάν είναι αθώος. Δεν αρκεί να εξεταστεί μόνο η πιθανότητα της ένδειξης όταν ο ύποπτος είναι αθώος και να βγει το συμπέρασμα ότι μια μικρή τιμή αυτής της πιθανότητας είναι ισχυρή απόδειξη υπέρ της ενοχής. Η πιθανότητα της ένδειξης αν ο ύποπτος είναι ένοχος θα πρέπει να ληφθεί υπόψη. Αυτές οι δύο πιθανότητες δεν είναι συμπληρωματικές και θα μπορούσαν να είναι και οι δύο πολύ μικρές. Σε τέτοιες λεπτές διακρίσεις παίζουν δικηγόροι και εισαγγελείς και μια παρερμηνεία αυτών των λεπτών εννοιών των πιθανοτήτων μπορεί να σημαίνει την καταδίκη ενός αθώου ή την αθώωση ενός ενόχου.

Ελληνική Βιβλιογραφία.

- Papoulis A.: Πιθανότητες και τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες, Τρίτη έκδοση.
- Spiegel Murray R.: Πιθανότητες και στατιστική, Shaum's outline series.
- Ζαχαροπούλου Χρυσούλα: Στατιστική, Μέθοδοι, τόμος Α', εκδόσεις ζυγός.
- Κάκουλος Θεόφ.: Μαθήματα θεωρίας πιθανοτήτων, Αθήνα 1975.
- Σταματέλου Γεωργ.: Ασκήσεις Πιθανοτήτων Στατιστικής.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία.

- Feller W.: An introduction to Probability theory and its applications, volume I and II, Wiley International edition.
- ADAMS,W.J., The life and times of the central milit theorem. (Η ζωή και η εποχή του θεωρήματος κεντρικού ορίου), Νέα Υόρκη, American Mathematical society, 2009
- Barroq, J.D., El salto del tigre, Las matematicas de la vida contidiana, 2009
- Fermat, P. Pascal, B, La geometria del azar, A camunez Madrid, Nivola, 2007.
- Holland, B.,K., what are the chances? Voodoo deaths, office gossip, other advertures in probability.
- Engel,A., Probabilidad estadistica (πιθανότητες και στατιστική) , 1998.
- Hopkins University Press, 2002.