

## Περιεχόμενα

9.1 Βασική αρχή της απαρίθμησης .....	7
Εφαρμογή 1 .....	7
Εφαρμογή 2 .....	7
Εφαρμογή 3 .....	7
9.2 Ορισμός του $n$ παραγοντικού ( $n!$ ) .....	7
9.3 Μεταθέσεις .....	8
Εφαρμογή 4 .....	8
9.4 Κυκλικές μεταθέσεις .....	8
Παρατήρηση 1 .....	9
Εφαρμογή 5 .....	9
9.5 Επαναληπτικές μεταθέσεις .....	9
Εφαρμογή 6 .....	9
Εφαρμογή 7 .....	9
Εφαρμογή 8 .....	9
Εφαρμογή 9 .....	10
Εφαρμογή 10 .....	10
Εφαρμογή 11 .....	10
Εφαρμογή 12 .....	10
Εφαρμογή 13 .....	10
Εφαρμογή 14 .....	11
Παρατήρηση 2 .....	11
Εφαρμογή 15 .....	11
Εφαρμογή 16 .....	11
Εφαρμογή 17 .....	11
Εφαρμογή 18 .....	12
Εφαρμογή 19 .....	12
Εφαρμογή 20 .....	13
Εφαρμογή 21 .....	14
Άσκηση 1 .....	14
Άσκηση 2 .....	15
Άσκηση 3 .....	15
Άσκηση 4 .....	15
Άσκηση 5 .....	15
Άσκηση 6 .....	15
Άσκηση 7 .....	15
Άσκηση 8 .....	15
Άσκηση 9 .....	15
Άσκηση 10 .....	15
9.6 Διατάξεις .....	15
Εφαρμογή 22 .....	16
Εφαρμογή 23 .....	16
Εφαρμογή 24 .....	16
Εφαρμογή 25 .....	16
Εφαρμογή 26 .....	16
Εφαρμογή 27 .....	16
Παρατήρηση 3 .....	16
9.7 Διατάξεις με επανάληψη .....	16
Παρατήρηση 4 .....	16
Εφαρμογή 28 .....	16
Εφαρμογή 29 .....	17
Εφαρμογή 30 .....	17
Εφαρμογή 31 .....	17
Εφαρμογή 32 .....	17

Εφαρμογή 33 .....	17
Εφαρμογή 34 .....	17
Εφαρμογή 35 .....	18
Εφαρμογή 36 .....	18
Εφαρμογή 37 .....	18
Εφαρμογή 38 .....	19
Εφαρμογή 39 .....	19
9.8 Συνδυασμοί .....	20
Εφαρμογή 40 .....	20
Εφαρμογή 41 .....	20
Εφαρμογή 42 .....	20
Εφαρμογή 43 .....	21
9.9 Συνδυασμοί με επανάληψη .....	21
Εφαρμογή 44 .....	21
Εφαρμογή 45 .....	21
Εφαρμογή 46 .....	21
Εφαρμογή 47 .....	21
Εφαρμογή 48 .....	22
Εφαρμογή 49 .....	22
Εφαρμογή 50 .....	22
Εφαρμογή 51 .....	22
Εφαρμογή 52 .....	23
Εφαρμογή 53 .....	23
Εφαρμογή 54 .....	24
Εφαρμογή 55 .....	24
Εφαρμογή 56 .....	24
Παρατήρηση 5 .....	25
Εφαρμογή 57 .....	25
Εφαρμογή 58 .....	26
Εφαρμογή 59 .....	26
Εφαρμογή 60 .....	27
Παρατήρηση 6 .....	27
Παρατήρηση 7 .....	27
Παρατήρηση 8 .....	27
Παρατήρηση 9 .....	27
Παρατήρηση 10 .....	28
Παρατήρηση 11 (Ημερομηνίες γέννησης) .....	28
Παρατήρηση 12 (Το πρόβλημα του αναγραμματισμού) .....	29
Άσκηση 11 .....	29
Άσκηση 12 .....	29
Άσκηση 13 .....	29
Άσκηση 14 .....	29
Άσκηση 15 .....	29
Άσκηση 16 .....	29
Άσκηση 17 .....	29
Άσκηση 18 .....	29
Άσκηση 19 .....	29
Άσκηση 20 .....	29
Άσκηση 21 .....	29
Άσκηση 22 .....	30
Άσκηση 23 .....	30
Άσκηση 24 .....	30
Άσκηση 25 .....	30
Άσκηση 26 .....	30
Άσκηση 27 .....	30

Άσκηση 28.....	30
Άσκηση 29.....	30
Άσκηση 30.....	30
Άσκηση 31.....	30
Άσκηση 32.....	30
Άσκηση 33.....	30
Άσκηση 34.....	30
Άσκηση 35.....	31
Άσκηση 36.....	31
Άσκηση 37.....	31
Άσκηση 38.....	31
Άσκηση 39.....	31
Άσκηση 40.....	31
Άσκηση 41.....	31
Άσκηση 42.....	31
9.10 Η ύπαρξη του τυχαίου .....	32
9.11 Η ιστορία της τράπουλας.....	33
9.12 Διαγράμματα του John Venn.....	34
Τομή δύο συνόλων $A \cap B$ .....	34
Ένωση δύο συνόλων $A \cup B$ .....	34
Συμπλήρωμα ενός συνόλου $A^c = A' = \bar{A}$ .....	35
Διαφορά δύο συνόλων $(A - B), (B - A)$ .....	35
Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων $(A - B) \cup (B - A)$ .....	35
Εφαρμογή 61 .....	36
9.13 Στοιχεία της θεωρίας συνόλων.....	39
Αξίωμα της επεκτασιμότητας.....	39
Ένωση δύο συνόλων .....	39
Τομή δύο συνόλων .....	39
Διαφορά δύο συνόλων.....	39
Το κενό σύνολο .....	39
Υποσύνολο .....	39
Ισότητα δύο συνόλων .....	39
Δυναμοσύνολο του $A$ .....	39
Συμπλήρωμα.....	39
Συμμετρική διαφορά.....	39
9.14 Νόμοι της άλγεβρας Boole.....	40
Προσεταιριστικοί νόμοι.....	40
Αντιμεταθετικοί νόμοι.....	40
Επιμεριστικοί νόμοι.....	40
Νόμοι De Morgan.....	40
Νόμοι της αυτοδυναμίας .....	40
Θεωρήματα.....	40
Γενικεύσεις των νόμων του De Morgan.....	40
9.15 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας.....	40
Εφαρμογή 62 .....	41
Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων .....	41
Δεσμευμένη πιθανότητα.....	41
Πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων .....	41
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα.....	42
Παρατήρηση 13.....	42
Παρατήρηση 14 (Ανισότητα Bonferroni) .....	42
Παρατήρηση 15 (Ανισότητα Boole ή ιδιότητα υποπροσθετικότητας).....	42

Τυπολόγιο πιθανοτήτων .....	42
Παρατήρηση 16 .....	43
Εφαρμογή 63 .....	44
Παρατήρηση 17 .....	44
Εφαρμογή 64 .....	45
Εφαρμογή 65 .....	45
Εφαρμογή 66 .....	45
Εφαρμογή 67 .....	45
Εφαρμογή 68 .....	46
Εφαρμογή 69 .....	46
Εφαρμογή 70 .....	46
Εφαρμογή 71 .....	47
Εφαρμογή 72 .....	48
Εφαρμογή 73 .....	48
Εφαρμογή 74 .....	49
Εφαρμογή 75 .....	49
Εφαρμογή 76 .....	50
Εφαρμογή 77 .....	50
Εφαρμογή 78 .....	51
Εφαρμογή 79 .....	51
Εφαρμογή 80 .....	51
Εφαρμογή 81 .....	52
Εφαρμογή 82 .....	52
Εφαρμογή 83 .....	53
Εφαρμογή 84 .....	54
Εφαρμογή 85 .....	54
Εφαρμογή 86 .....	55
Εφαρμογή 87 .....	56
Εφαρμογή 88 .....	56
Εφαρμογή 89 .....	56
Εφαρμογή 90 .....	57
Εφαρμογή 91 .....	58
Εφαρμογή 92 .....	58
Εφαρμογή 93 .....	58
Εφαρμογή 94 .....	59
Εφαρμογή 95 .....	59
Εφαρμογή 96 .....	59
Εφαρμογή 97 .....	60
Παρατήρηση 18 .....	61
Εφαρμογή 98 .....	61
Εφαρμογή 99 .....	61
Εφαρμογή 100 .....	62
Εφαρμογή 101 .....	62
Εφαρμογή 102 .....	63
Εφαρμογή 103 .....	63
Εφαρμογή 104 .....	63
Εφαρμογή 105 .....	63
Εφαρμογή 106 .....	64
Εφαρμογή 107 .....	64
Εφαρμογή 108 .....	65
Εφαρμογή 109 .....	66
Εφαρμογή 110 .....	67
Εφαρμογή 111 .....	67
Εφαρμογή 112 .....	68
Εφαρμογή 113 .....	68

Εφαρμογή 114	69
Εφαρμογή 115	69
Εφαρμογή 116	70
Εφαρμογή 117	70
Εφαρμογή 118	70
Εφαρμογή 119	71
Εφαρμογή 120	71
Εφαρμογή 121	72
Εφαρμογή 122	72
Εφαρμογή 123	72
Εφαρμογή 124	73
Εφαρμογή 125	73
Εφαρμογή 126	74
Εφαρμογή 127	74
Εφαρμογή 128	75
Εφαρμογή 129	76
Εφαρμογή 130	76
Εφαρμογή 131	76
Εφαρμογή 132	76
Εφαρμογή 133	77
Εφαρμογή 134	78
Παρατήρηση 19	78
Εφαρμογή 135	78
Εφαρμογή 136	79
Εφαρμογή 137	79
Εφαρμογή 138	79
Εφαρμογή 139	79
Εφαρμογή 140	80
Εφαρμογή 141	80
Εφαρμογή 142	81
Εφαρμογή 143	81
Παρατήρηση 20	82
Εφαρμογή 144	82
Εφαρμογή 145	82
Εφαρμογή 146	82
Εφαρμογή 147	83
Εφαρμογή 148	83
Άσκηση 38	84
Άσκηση 39	84
Άσκηση 40	84
Άσκηση 41	84
Άσκηση 42	84
Άσκηση 43	84
Άσκηση 44	84
Άσκηση 45	84
Άσκηση 46	85
Άσκηση 47	85
Άσκηση 48	85
Άσκηση 49	85
Άσκηση 50	85
Άσκηση 51	85
Άσκηση 52	85
9.16 Το πρόβλημα του Monty Hall	86
9.17 Το δίλημμα του φυλακισμένου	88
9.18 Η ιστορία της ασφάλειας ζωής	89

9.18.1 Αρχαία Ελλάδα.....	89
9.18.2 Αρχαία Ρώμη.....	89
9.18.3 Βυζάντιο.....	90
9.18.4 Η ασφάλεια ζωής σήμερα.....	90

### 9.1 Βασική αρχή της απαρίθμησης

Όταν μία εργασία μπορεί να χωριστεί σε  $k$  διαδοχικές φάσεις, έτσι ώστε:

η 1<sup>η</sup> φάση να εκτελεστεί με  $v_1$  διαφορετικούς τρόπους,

η 2<sup>η</sup> φάση να εκτελεστεί με  $v_2$  διαφορετικούς τρόπους,

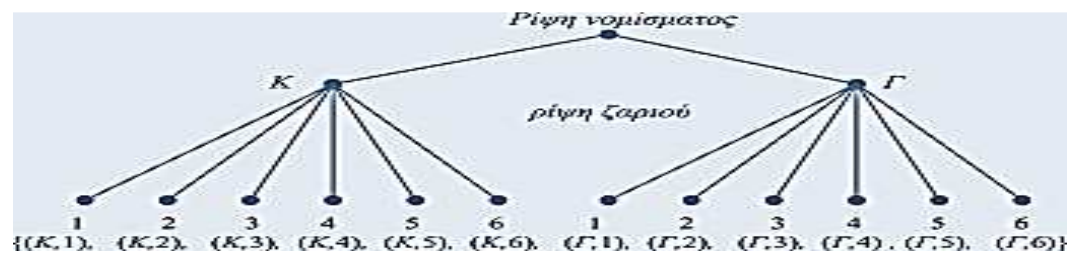
...

η  $k$ <sup>η</sup> φάση να εκτελεστεί με  $v_k$  διαφορετικούς τρόπους,

τότε η όλη διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με  $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k$  διαφορετικούς τρόπους.

#### Εφαρμογή 1

Πόσα αποτελέσματα προκύπτουν από την ρίψη ενός νομίσματος και ενός ζαριού; Απάντηση 12



#### Εφαρμογή 2

Πόσες παραγγελίες προκύπτουν από το παρακάτω menu ενός εστιατορίου; Απάντηση  $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Ορεκτικά	Σούπες	Σαλάτες	Κυρίως πιάτα
Αυγοτάραχο	Ψαρόσουπα	Κινόα	Γαρίδες ψητές
Ταραμοσαλάτα	Αρακά	Πράσινη	Ψάρια
Στρείδια		Ζεστή	Καραβίδες
Κυδώνια			Ριζότο σουπιά
			Ροφομακαρονάδα

#### Εφαρμογή 3

Πόσα ντυσίματα προκύπτουν αν διαθέτεις τα παρακάτω; Απάντηση:  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 2.880$

Υποδήματα	Παντελόνια	Ζώνες	Πουκάμισα	Γραβάτες
Μαύρα	Μαύρο	Μαύρη	Άσπρο	Κόκκινη
Καφέ	Γκρι	Καφέ	Μπλε	Μπλε
Μπορντώ	Μπλε	Σκούρα μπλε	Ροζ	Κίτρινη
Μπλε	Καφέ	Πλεκτή	Καφέ	Μαύρη
	Πράσινο	Καστόρινη	Κίτρινο	
		Με αγκράφα	Μαβ	

### 9.2 Ορισμός του $n$ παραγοντικού ( $n!$ )

Αν  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 2$ , τότε το γινόμενο  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  ονομάζεται  $n$  παραγοντικό και συμβολίζεται ως  $n!$ . Είναι  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ ,  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ ,  $1! = 1$ ,  $0! = 1$ <sub>op</sub>

Το  $0! = 1$  δεν έχει καμία συνδυαστική ερμηνεία. Ισχύει ότι  $n! = (n-1)! \cdot n$  για  $n \geq 1$

Επίσης για  $n \geq k$  ισχύει ότι  $n! = (n-k)!(n-k+1)(n-k+2)\dots n$ . Δηλαδή  $9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

### 9.3 Μεταθέσεις

Η συνδυαστική ανάλυση, κάνει την εμφάνιση της τον 17<sup>ο</sup> αιώνα στις εργασίες των Fermat και Pascal τις σχετικές με τη συστηματική επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάζονται στα τυχερά παίγνια. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκει στη θεωρία πιθανοτήτων.

Μεταθέσεις των  $n$  στοιχείων ενός συνόλου, ονομάζονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορώ να βάλω, με κάθε κατάταξη, σε μία σειρά (ή ευθεία γραμμή) τα  $n$  αυτά στοιχεία.

Το πλήθος των μεταθέσεων των  $n$  στοιχείων ισούται με  $n!$  Είναι προφανές ότι για ένα αντικείμενο, υπάρχει μόνο μία μετάθεση, δηλαδή  $1!$  Για δυο αντικείμενα  $\alpha, \beta$  υπάρχουν δυο δυνατές μεταθέσεις οι  $\alpha, \beta$  και  $\beta, \alpha$ . Η μετάθεση είναι διαφορετική, όταν ένα τουλάχιστον στοιχείο έχει διαφορετική τοποθέτηση.

#### Εφαρμογή 4

(α) 10 σπουδαστές παρατάσσονται στη σειρά, με  $10!$  τρόπους.

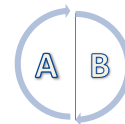
(β) 12 containers τοποθετούνται στη σειρά με  $12! = 479.001.600$  τρόπους.

### 9.4 Κυκλικές μεταθέσεις

Κυκλική ονομάζεται η μετάθεση των  $n$  στοιχείων, όταν αυτά αντί να τοποθετηθούν σε ευθεία γραμμή, τοποθετούνται σε περιφέρεια κύκλου, με καθορισμένη φορά. Άρα, σε κάθε κυκλική μετάθεση η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν. Κάθε κυκλική μετάθεση των  $n$  στοιχείων, δίνει  $n$  διαφορετικές απλές μεταθέσεις, διότι ως 1<sup>ο</sup> στοιχείο μπορώ να εκλάβω οποιοδήποτε από τα  $n$  στοιχεία. Άρα, το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων των  $n$  στοιχείων είναι

$(n-1)!$

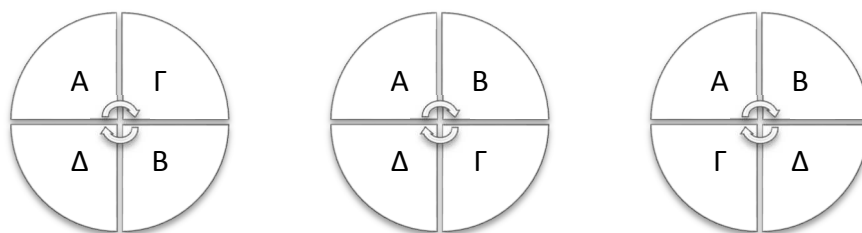
**2 ναυτικοί**, A, B κάθονται σε κυκλικό τραπέζι κατά  $(2-1)! = 1! = 1$  τρόπο μόνο. Βλέπε διπλανό σχήμα.

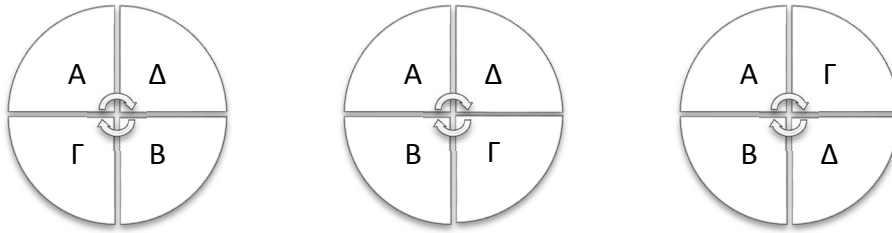


**3 ναυτικοί**, A, B, Γ κάθονται σε κυκλικό τραπέζι κατά  $(3-1)! = 2! = 2$  διαφορετικούς τρόπους. Βλέπε τα παρακάτω σχήματα.



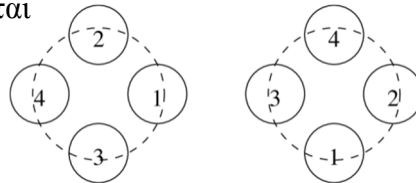
**4 ναυτικοί**, A, B, Γ, Δ κάθονται σε κυκλικό τραπέζι κατά  $(4-1)! = 3! = 6$  διαφορετικούς τρόπους. Βλέπε τα παρακάτω σχήματα.





### Παρατήρηση 1

Οι διπλανές μεταθέσεις, δεν θεωρούνται διαφορετικές μεταξύ τους.



### Εφαρμογή 5

7 μηχανικοί κάθονται σε κυκλικό τραπέζι, κατά  $(7-1)! = 6! = 720$  τρόπους.

### 9.5 Επαναληπτικές μεταθέσεις

Έστω  $\nu$  το πλήθος στοιχεία, όπως παρακάτω.

$$\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k_1} \quad \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{k_2} \quad \dots \quad \underbrace{\xi, \xi, \dots, \xi}_{k_p} \quad \text{με } k_1 + k_2 + \dots + k_p = \nu$$

Το πλήθος των επαναληπτικών τους μεταθέσεων είναι

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_p)!}{k_1! k_2! \dots k_p!} = \frac{\nu!}{k_1! k_2! \dots k_p!}$$

### Εφαρμογή 6

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται στη σειρά **3 κόκκινες**, **4 λευκές** και 5 μαύρες μπίλιες;

Οι τρόποι ισούται με τις επαναληπτικές μεταθέσεις των 12 στοιχείων, με όμοια τα 3 τα 4 και τα 5, δηλαδή

$$\frac{12!}{3! 4! 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3! 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2}$$

### Εφαρμογή 7

(α) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ;

(β) Από αυτούς, πόσοι αρχίζουν από το γράμμα Σ;

(γ) Πόσοι από τους αναγραμματισμούς αρχίζουν από Σ και τελειώνουν σε Α;

(α) Η λέξη αποτελείται από 9 διαφορετικά γράμματα. Άρα, οι αναγραμματισμοί της είναι  $9! = 362.880$

(β) Για όσους αρχίζουν από Σ, αρκεί να βρω τους αναγραμματισμούς των υπολοίπων 8 ψηφίων. Πρόκειται για το πλήθος των μεταθέσεων των υπολοίπων 8 γραμμάτων, άρα  $8! = 40.320$

(γ) Οι αναγραμματισμοί που αρχίζουν από Σ και τελειώνουν σε Α είναι το πλήθος των μεταθέσεων των υπολοίπων 7 γραμμάτων, άρα  $7! = 5.040$

### Εφαρμογή 8

Πόσοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1.000 σχηματίζονται από τα ψηφία 0, 2, 3, 4 αν χρησιμοποιούνται όλα, από μία μόνο φορά;

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

$$\left. \begin{array}{l} -0-- \quad 3! = 6 \text{ τρόποι} \\ --0- \quad 3! = 6 \text{ τρόποι} \\ ---0 \quad 3! = 6 \text{ τρόποι} \end{array} \right\} 18 \text{ τρόποι}$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Όλες οι μεταθέσεις των 4 ψηφίων είναι  $4! = 24$ . Πρέπει να αφαιρεθούν εκείνες που αρχίζουν από 0, διότι είναι αριθμοί μικρότεροι του 1.000. Το πλήθος τους είναι  $3! = 6$  άρα, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι  $24 - 6 = 18$

### Εφαρμογή 9

Οι αναγραμματισμοί της λέξης **ΠΑΤΕΡΑΣ** είναι  $\frac{7!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2.520$

διότι από τα 7 γράμματα που τη σχηματίζουν, υπάρχουν 2 ίδια.

### Εφαρμογή 10

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται 4 από τα 10 βιβλία το ένα πάνω στο άλλο; Οι δυνατοί τρόποι είναι όσες οι διατάξεις των 10 ανά 4, δηλαδή  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 90 \cdot 56 = 5.040$

### Εφαρμογή 11

Με πόσους τρόπους συμπληρώνονται οι κενές θέσεις (1 πλοίαρχος, 1 μηχανικός), επιλέγοντας από 3 πλοιάρχους και 5 μηχανικούς;

Η επιλογή πλοιάρχου γίνεται με 3 τρόπους, ενώ του μηχανικού με 5 και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή πλοιάρχου, άρα έχω 15 διαφορετικές προσλήψεις.

	Πλοίαρχος 1	Πλοίαρχος 2	Πλοίαρχος 3
Μηχανικός 1	✓	✓	✓
Μηχανικός 2	✓	✓	✓
Μηχανικός 3	✓	✓	✓
Μηχανικός 4	✓	✓	✓
Μηχανικός 5	✓	✓	✓

M1	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Π1} \\ \text{Π2} \\ \text{Π3} \end{array} \right.$	M2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Π1} \\ \text{Π2} \\ \text{Π3} \end{array} \right.$	M3	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Π1} \\ \text{Π2} \\ \text{Π3} \end{array} \right.$	M4	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Π1} \\ \text{Π2} \\ \text{Π3} \end{array} \right.$	M5	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Π1} \\ \text{Π2} \\ \text{Π3} \end{array} \right.$
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

### Εφαρμογή 12

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται στη σειρά 5 containers;

Για την 1<sup>η</sup> θέση, είναι υποψήφια 5 containers.

Για τη 2<sup>η</sup> θέση, είναι υποψήφια 4 containers.

Για την 3<sup>η</sup> θέση, είναι υποψήφια 3 containers.

Για την 4<sup>η</sup> θέση, είναι υποψήφια 2 containers.

Για την 5<sup>η</sup> και τελευταία θέση, είναι υποψήφιο το τελευταίο container.

Άρα, υπάρχουν  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 20 \cdot 6 = 120$  διαφορετικοί τρόποι.

Θέσεις	1 <sup>η</sup>	2 <sup>η</sup>	3 <sup>η</sup>	4 <sup>η</sup>	5 <sup>η</sup>
Υποψήφιοι	5	4	3	2	1

### Εφαρμογή 13

Με πόσους τρόπους ανεβαίνουν στο βάθρο, οι 3 πρώτες εντεκάδες, στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου;

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

Όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι  $1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! = \dots$

### Εφαρμογή 14

Με πόσους τρόπους μπαίνουν στη σειρά, 3 αναβάτες και τα άλογα τους, αν ο κάθε αναβάτης βρίσκεται δίπλα στο άλογο του;

Έστω A, B, Γ οι αναβάτες και α, β, γ τα άλογα.

Οι μεταθέσεις της 1<sup>ης</sup> ομάδας (A, α) είναι 2!

Οι μεταθέσεις της 2<sup>ης</sup> ομάδας (B, β) είναι 2!

Οι μεταθέσεις της 3<sup>ης</sup> ομάδας (Γ, γ) είναι 2!

Οι μεταθέσεις των τριών ομάδων είναι 3!

Άρα, μπαίνουν στη σειρά με  $2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! = 48$  τρόπους

$$\underbrace{2! \cdot 2! \cdot 2!}_{3!}$$

Aα Bβ Γγ



### Παρατήρηση 2

ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ είναι οι 6 μεταθέσεις των 3 ομάδων

### Εφαρμογή 15

Με πόσους τρόπους γράφεται μήνυμα 7 ψηφίων, με 3 γράμματα  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (στις άρτιες θέσεις) και 4 αριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  (στις περιττές θέσεις);

Όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι  $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$

1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_1$	$\gamma_1$	$\alpha_2$	$\gamma_2$	$\alpha_3$	$\gamma_3$	$\alpha_4$

### Εφαρμογή 16

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν το 1<sup>ο</sup> ψηφίο τους περιττό;

Για τη θέση του 1<sup>ου</sup> ψηφίου υποψήφιοι είναι οι εξής **5** (1, 3, 5, 7, 9) Για κάθε μία από τα υπόλοιπες 3 θέσεις (2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup> ψηφίου), οι υποψήφιοι είναι **10** κάθε φορά (από 0 ως και 9). Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 5.000

	1 <sup>ο</sup> ψηφίο	2 <sup>ο</sup> ψηφίο	3 <sup>ο</sup> ψηφίο	4 <sup>ο</sup> ψηφίο
Πλήθος				
υποψηφίων	<b>5</b>	10	<b>10</b>	10
αριθμών				

### Εφαρμογή 17

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται αν τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8 χρησιμοποιούνται από μία μόνο φορά;

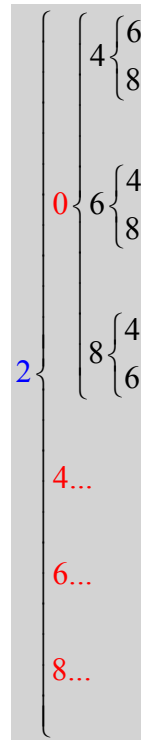
Για το **1<sup>ο</sup> ψηφίο** είναι υποψήφιοι οι ακόλουθοι **4** αριθμοί (2 ή 4 ή 6 ή 8), δηλαδή όλοι οι αρχικά δοθέντες αριθμοί πλην του 0. Π.χ. Έστω το 2

Για το **2<sup>ο</sup> ψηφίο** είναι υποψήφιοι πάλι **4** αριθμοί, ένας εκ των οποίων είναι το 0. Π.χ. 0, 4, 6, 8. Έστω το 0

Για το **3<sup>ο</sup> ψηφίο** υποψήφιοι είναι **3** αριθμοί που απέμειναν από τους 5 αρχικούς αριθμούς. Π.χ. 4, 6, 8. Έστω το 4

Για το **4<sup>ο</sup> και τελευταίο ψηφίο** υποψήφιοι είναι οι **2** αριθμοί που απέμειναν. Π.χ. 6, 8

Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 \cdot 6 = 96$



### Εφαρμογή 18

Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία και πόσοι με τα ίδια ψηφία;

(α) Για το **1<sup>ο</sup> ψηφίο** είναι υποψήφιοι **9** αριθμοί (από 1 έως και 9). Για το **2<sup>ο</sup> ψηφίο** είναι υποψήφιοι 10 αριθμοί (από 0 έως και 9) μείον αυτόν του 1<sup>ου</sup> ψηφίου, άρα **9** αριθμοί. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι  $9 \cdot 9 = 81$

	1 <sup>ο</sup> Ψηφίο	2 <sup>ο</sup> Ψηφίο
<b>Πλήθος υποψηφίων αριθμών</b>	9	9
<b>Υποψήφιοι αριθμοί</b>	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Μείον αυτόν του 1 <sup>ου</sup> ψηφίου

(β) Αν οι διψήφιοι αριθμοί έχουν τα ίδια ψηφία, τότε για το 1<sup>ο</sup> και για το 2<sup>ο</sup> ψηφίο οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 9. Όλοι οι δυνατοί αριθμοί είναι οι **11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	✓								
2		✓							
3			✓						
4				✓					
5					✓				
6						✓			
7							✓		
8								✓	
9									✓

### Εφαρμογή 19

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται από τρία (03) τεσσάρια, **τέσσερα (04) τριάρια** και δύο (02) δυάρια;

Αν δίνονταν τρία (03) δυάρια, τρία (03) τριάρια και τρία (03) τεσσάρια, τότε για τον σχηματισμό του τριψήφιου αριθμού, θα υπήρχαν από τρία (03) υποψήφια νούμερα για τη θέση του κάθε ενός εκ των τριών ψηφίων του. Άρα, θα προκύπτανε

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  τριψήφιοι αριθμοί. Από τα δεδομένα παρατηρώ ότι έχω ένα δυάρι λιγότερο και ένα τριάρι επιπλέον, σε σχέση με τον αρχικό υπολογισμό.

Άρα, μπορώ να σχηματίσω όλους τους ως άνω περιγραφέντες τριψήφιους αριθμούς πλην του 222. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι  $27 - 1 = 26$

444	434	424	344	334	324	244	234	224
443	433	423	343	333	323	243	233	223
442	432	422	342	332	322	242	232	-----

### Εφαρμογή 20

Βρείτε τις μεταθέσεις των γραμμάτων των ακόλουθων λέξεων

- (α) ΥΔΡΑ (β) ΣΥΡΟΣ (γ) ΙΚΑΡΙΑ  
 (δ) MISSISSIPPI (ε) ΚΑΤΑΡΤΙ (στ) ΑΓΚΥΡΑ  
 (ζ) ΑΚΑΜΑΤΡΑ (η) ΟΙΝΟΥΣΣΕΣ (θ) ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ  
 (ι) ΔΕΞΑΜΕΝΟΠΛΟΙΟ

(α) Όλα τα γράμματα είναι διαφορετικά, άρα  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  μεταθέσεις.

(β) Αν όλα τα γράμματα ήταν διαφορετικά, τότε οι μεταθέσεις θα ήταν 5! Υπάρχουν όμως 2 ίδια γράμματα (Σ, Σ) άρα, η εναλλαγή των μεταξύ τους θέσεων δεν θεωρείται διαφορετική μετάθεση. Οι δυνατές αλλαγές των θέσεων των ίδιων γραμμάτων (Σ, σ) είναι όσες οι μεταθέσεις των 2 ψηφίων, δηλαδή 2!

Έστω  $x$  το πλήθος των ζητούμενων μεταθέσεων. Ισχύει ότι  $2!x = 5! \Leftrightarrow x = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

(γ) ΙΚΑΡΙΑ Είναι  $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 180$

(δ) MISSISSIPPI Είναι  $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{2}} = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

(ε) ΚΑΤΑΡΤΙ Είναι  $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2!} = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$

(στ) ΑΓΚΥΡΑ Είναι  $\frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

(ζ) ΑΚΑΜΑΤΡΑ Είναι  $\frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 210 \cdot 8$



(η) ΟΙΝΟΥΣΣΕΣ Είναι  $\frac{9!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2!} = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

### (θ) ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ

Είναι  $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

(ι) ΔΕΞΑΜΕΝΟΠΛΟΙΟ Είναι  $\frac{13!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{2!}$

### Επεξήγηση

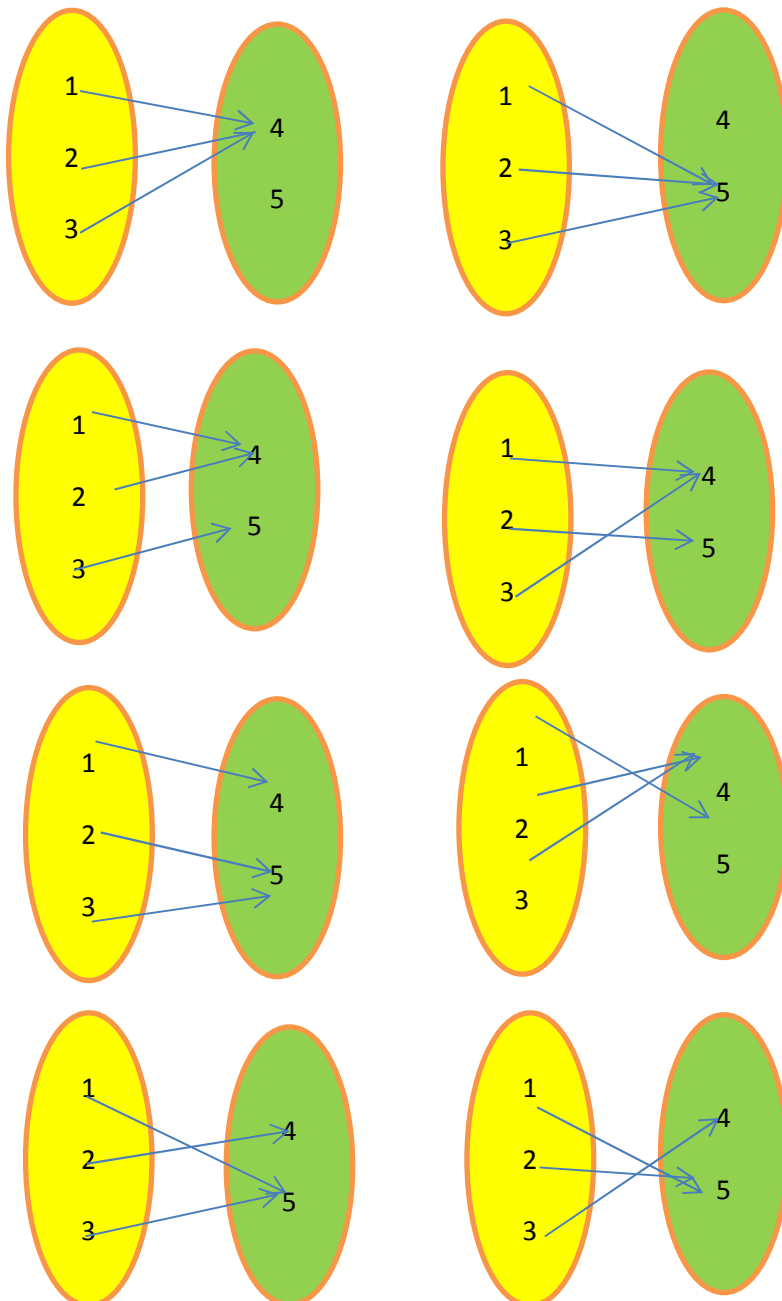
AN NA  2 1=2  
 ΙΚΑ ΙΑΚ  3 2 1=6 ΚΑΙ ΚΙΑ ΑΙΚ ΚΑΙ

### Εφαρμογή 21

Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν με πεδίο ορισμού το  $A = \{1, 2, 3\}$  και πεδίο τιμών το  $B = \{4, 5\}$ ;

Για να έχω συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$ , πρέπει από κάθε στοιχείο του 1<sup>ου</sup> συνόλου (του A), να φεύγει 1 και μόνο 1 βέλος προς οποιοδήποτε στοιχείο του 2<sup>ου</sup> συνόλου (του B). Για το κάθε στοιχείο του A, υπάρχουν 2 στοιχεία, του B, προς αντιστοίχιση.

Άρα, οι δυνατές επιλογές είναι  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



### Άσκηση 1

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται 4 βιβλία, το ένα δίπλα στο άλλο, σε ράφι βιβλιοθήκης; **Απάντηση**  $4! = 24$

**Άσκηση 2**

Με πόσους τρόπους γράφονται 6 παγωτά σε κατάλογο, το ένα κάτω από το άλλο; **Απάντηση**  $6!=720$

**Άσκηση 3**

Αμάξι παράγεται σε 4 χρώματα (λευκό, μαύρο, κόκκινο, μπλε) και 3 εκδόσεις (cabrio, sedan, 4X4). Πόσες φωτογραφίες πρέπει να περιέχει το διαφημιστικό έντυπο ώστε να είναι πλήρες; **Απάντηση** 12

**Άσκηση 4**

Πόσες ενδυμασίες προκύπτουν από 3 παντελόνια, 4 σακάκια, 5 πουκάμισα και 2 ζεύγη υποδημάτων; **Απάντηση** 120

**Άσκηση 5**

Με πόσους τρόπους επιλέγεται 1 από τα 2 βιβλία γεωμετρίας, 1 από τα 3 βιβλία άλγεβρας και 1 από τα 4 βιβλία φυσικής; **Απάντηση** 2, 6, 24

**Άσκηση 6**

Πόσες είναι οι πινακίδων κυκλοφορίας, αν αποτελούνται από 2 ή 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; **Απάντηση**  $25 \cdot 24^2 \cdot 9.000$

**Άσκηση 7**

Με πόσους τρόπους μπαίνουν στη σειρά 4 αθλήτριες και 3 αθλητές, αν είναι μαζί όλοι οι αθλητές και μαζί όλες οι αθλήτριες; **Απάντηση**  $2! \cdot 3! \cdot 4!$

**Άσκηση 8**

Πόσοι τετραψήφιοι κωδικοί αποτελούνται από τα ψηφία 9, 8, 7, 6; **Απάντηση**  $4^4$

**Άσκηση 9**

Πόσα αποτελέσματα προκύπτουν από 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2, 3, 3, 4 δυνατές απαντήσεις εκάστη, αντίστοιχα;

Πόσες είναι οι δυνατές απαντήσεις, αν οι ερωτήσεις απαντώνται σε τυχαία σειρά; **Απάντηση** 72 και  $1.728=72 \cdot 24$

**Άσκηση 10**

Πόσες στήλες έχουν παιχθεί σε δελτίο ΠΡΟΠΟ 13 αγώνων που περιέχει 6 στάνταρ, 3 διπλές και 4 τριπλές; **Απάντηση**  $2^3 \cdot 3^4 = 8 \cdot 81 = 648$

**9.6 Διατάξεις**

Διάταξη των  $v$  στοιχείων ενός συνόλου ανά  $k$ , είναι οι τρόποι που θέτω τα  $k$  στοιχεία σε μία ευθεία γραμμή. Δύο διατάξεις των  $v$  στοιχείων ανά  $k$ , είναι διαφορετικές αν τα στοιχεία είναι διαφορετικά ή αν η σειρά τους διαφέρει. Το πλήθος διατάξεων των  $v$  στοιχείων ανά  $k$  είναι  $\frac{v!}{(v-k)!}$

Επίσης δίνεται και από τον τύπο  $v(v-1)(v-2)\dots(v-k+1)$

**Εφαρμογή 22**

Με πόσους τρόπους συμπληρώνονται οι 3 πρώτες θέσεις ενός τουρνουά 12 σκακιστών;

$$\text{Είναι } \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 110 \cdot 12 = \dots$$

**Εφαρμογή 23**

Με πόσους τρόπους ξεφορτώνονται 3 από τα 7 containers του πλοίου;

$$\text{Είναι } \frac{v!}{(v-k)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 210$$

**Εφαρμογή 24**

Με πόσους τρόπους καταλύουν 5 ναυτικοί, σε 6 ξενοδοχεία, αν:

(α) μείνουν σε διαφορετικό ξενοδοχείο ο καθένας,

(β) δεν υπάρχει περιορισμός;

$$\text{Είναι (α) } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \cdot 6 = 720$$

$$\text{(β) } 6^5 = 36 \cdot 36 \cdot 6 = 1.296 \cdot 6 = 7.776$$

**Εφαρμογή 25**

Με πόσους τρόπους 3 επιβάτες, επιβιβάζονται σε 5 βαγόνια, αν:

(α) επιλέξουν διαφορετικό βαγόκι ο καθένας,

(β) δεν υπάρχει περιορισμός;

$$\text{Είναι (α) } 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$\text{(β) } 5^3 = 125$$

**Εφαρμογή 26**

Με πόσους τρόπους 5 σπουδαστές κάθονται σε 8 αριθμημένα καθίσματα;

$$\text{Είναι } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 42 \cdot 20 = 8 \cdot 840 = 6.720$$

**Εφαρμογή 27**

Με πόσους τρόπους από τράπουλα 52 καρτών, λαμβάνονται χωρίς επανατοποθέτηση, 3 κάρτες;

$$\text{Είναι } 52 \cdot 51 \cdot 50 = 2.652 \cdot 50 = 132.600$$

**Παρατήρηση 3**

Στις διατάξεις των  $v$  ανά  $k$  απαιτείται να είναι  $k \leq v$

Όταν  $k = v$ , τότε έχω τις μεταθέσεις των  $v$  στοιχείων που είναι  $v!$

**9.7 Διατάξεις με επανάληψη**

Διάταξη με επανάληψη των  $v$  στοιχείων ανά  $k$  είναι οι  $v^k$  τρόποι για να λάβω  $k$  στοιχεία, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά και να τα θέσω σε σειρά.

**Παρατήρηση 4**

Στις διατάξεις με επανάληψη των  $v$  στοιχείων ανά  $k$ , μπορεί να είναι και  $k \geq v$

**Εφαρμογή 28**

Πόσες λέξεις με 2 διαφορετικά σύμφωνα και 1 φωνήεν, σχηματίζονται αν:

φ σ σ

σ φ σ

σ σ φ

(α) το φωνήεν βρίσκεται ανάμεσα στα 2 σύμφωνα, ( $\Sigma_1 \Phi \Sigma_2$ ),

(β) δεν έχει σημασία η θέση που βρίσκεται το φωνήεν;

(α) Από τα 24 γράμματα της αλφαβήτου, 17 είναι σύμφωνα και 7 φωνήεντα. Η επιλογή του μοναδικού φωνήεντος είναι μία διάταξη των 7 ανά 1. Η επιλογή των 2 συμφώνων είναι μία διάταξη των 17 ανά 2. Άρα, σχηματίζονται  $17 \cdot (17-1) \cdot 7 = 17 \cdot 16 \cdot 7 = 1.904$  λέξεις των 3 ψηφίων με 1 φωνήεν ανάμεσα σε 2 σύμφωνα.

(β) Το φωνήεν μπορεί να βρίσκεται στην 1<sup>η</sup> ή 2<sup>η</sup> ή 3<sup>η</sup> θέση της λέξης. Άρα, σχηματίζονται  $3 \cdot 1.904 = 5.712$  λέξεις.

### Εφαρμογή 29

Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αριθμοί, με ψηφία από το 1 ως και το 9;

Όσες οι διατάξεις των 9 στοιχείων (αριθμών) ανά 5, δηλαδή  $9^5 = 59.049$ . ■■■■■

### Εφαρμογή 30

Στο ΠΡΟΠΟ μαντεύεις τον νικητή 13 αγώνων, τοποθετώντας δίπλα στα ονόματα των ομάδων τα σύμβολα 1 ή 2 ή X για νίκη της γηπεδούχου, της φιλοξενούμενης ή για μεταξύ τους ισοπαλία, αντίστοιχα. Πόσα είναι τα πιθανά αποτελέσματα (στήλες);  $3^{13} = 1.567.323$  στήλες.

Αγώνες ποδοσφαίρου														
1 <sup>ος</sup>	2 <sup>ος</sup>	3 <sup>ος</sup>	4 <sup>ος</sup>	5 <sup>ος</sup>	6 <sup>ος</sup>	7 <sup>ος</sup>	8 <sup>ος</sup>	9 <sup>ος</sup>	10 <sup>ος</sup>	11 <sup>ος</sup>	12 <sup>ος</sup>	13 <sup>ος</sup>		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Αποτελέσματα
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	X	Αποτελέσματα
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	Αποτελέσματα
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

### Εφαρμογή 31

Με πόσους τρόπους βιδώνονται στη σειρά 10 λάμπες (5 είναι μπλε, 3 κόκκινες και 2 λευκές) σε καλώδιο;

$$\text{Είναι } \frac{10!}{5! 3! 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! 2!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2!} = 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 = 28 \cdot 90$$

### Εφαρμογή 32

Πόσοι εξαψήφιοι κωδικοί σχηματίζονται από τα ψηφία 0 ή 1;

(■■■■■) Για την κάθε θέση στον κωδικό είναι υποψήφιοι 2 αριθμοί, το 0 και το 1. Το πλήθος των κωδικών που μπορούν να σχηματισθούν, ισούται με τις διατάξεις με επανάληψη των 2 ανά 6. Άρα, είναι  $2^6 = 64$

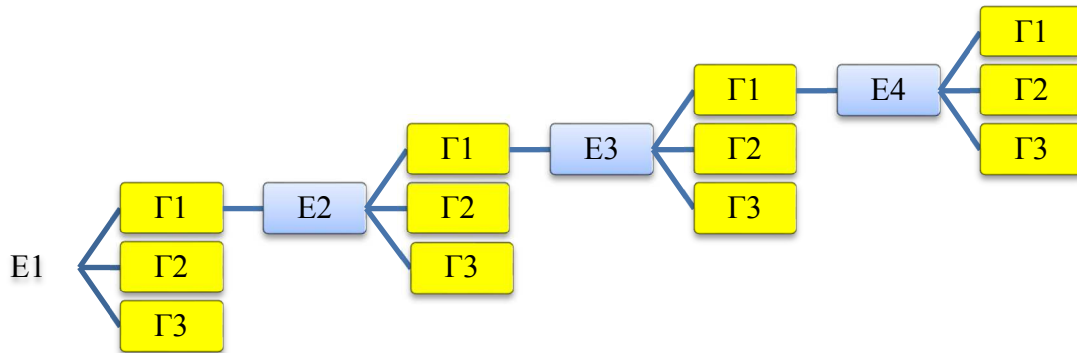
### Εφαρμογή 33

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, χωρίς το ψηφίο μηδέν;

$$\text{Είναι } 9^3 = 729 \text{ τριψήφιοι. } \text{■■■}$$

### Εφαρμογή 34

Με πόσους τρόπους ταχυδρομούνται 4 επιστολές σε 3 γραμματοκιβώτια; Κάθε επιστολή ταχυδρομείται σε οποιοδήποτε γραμματοκιβώτιο. Από κάθε γραμματοκιβώτιο ταχυδρομούνται καμία ή μία ή περισσότερες ή όλες οι επιστολές. Άρα, υπάρχουν  $3^4 = 81$  τρόποι.



### Εφαρμογή 35

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 αν τα ψηφία τους: **(α)** είναι διαφορετικά,

**(β)** μπορούν να επαναλαμβάνονται;

**(α)** Μας ενδιαφέρει η σειρά των ψηφίων. Δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία. (---) Άρα, είναι οι διατάξεις των 5 ανά 3, δηλαδή  $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

αριθμοί.

**(β)** Τα ψηφία των υπό σχηματισμό τριψήφιων αριθμών μπορούν να επαναλαμβάνονται. Άρα, πρόκειται για τις διατάξεις με επανάληψη των 5 ανά 3, δηλαδή  $5^3 = 125$  αριθμοί.

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{array}$$

### Εφαρμογή 36

Πόσοι συνδυασμοί τριών ψηφίων από τα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 χωρίς επανάληψη (μία φορά το καθένα): **(α)** περιέχουν το ψηφίο 4,

**(β)** δεν περιέχουν το ψηφίο 4.

**(α)**

$$\left. \begin{array}{ccc} 4 & \dots & \dots \\ \dots & 4 & \dots \\ \dots & \dots & 4 \end{array} \right\} 3 \text{ Περιπτώσεις}$$

$$3 \frac{6!}{(6-2)!} = 3 \frac{6!}{4!} = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$$

**(β)**  $\frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{array}$$

### Εφαρμογή 37

Κέρμα ρίχνεται 3 φορές. Πόσα αποτελέσματα προκύπτουν;

Σε κάθε ρίψη τα πιθανά ενδεχόμενα είναι 2, κεφάλι (Κ) ή γράμματα (Γ), άρα  $2^3 = 8$  διαφορετικά αποτελέσματα.

Δηλαδή: ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ



### Εφαρμογή 38

Από κάλπη με 4 αριθμημένα σφαιρίδια (από 1 ως 4), λαμβάνω ένα με επανατοποθέτηση και το καταγράφω. Αν η διαδικασία επαναληφθεί άλλες 2 φορές, πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται;

Για 1<sup>ο</sup> ψηφίο, είναι υποψήφιοι 4 αριθμοί.

Για 2<sup>ο</sup> ψηφίο, είναι υποψήφιοι 4 αριθμοί.

Για 3<sup>ο</sup> ψηφίο, είναι υποψήφιοι 4 αριθμοί.

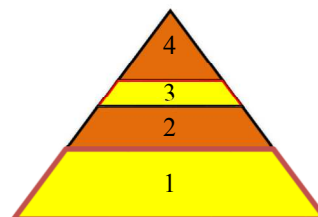
	Θέση 1 <sup>ου</sup> ψηφίου	Θέση 2 <sup>ου</sup> ψηφίου	Θέση 3 <sup>ου</sup> ψηφίου
Πλήθος υποψηφίων αριθμών	4	4	4

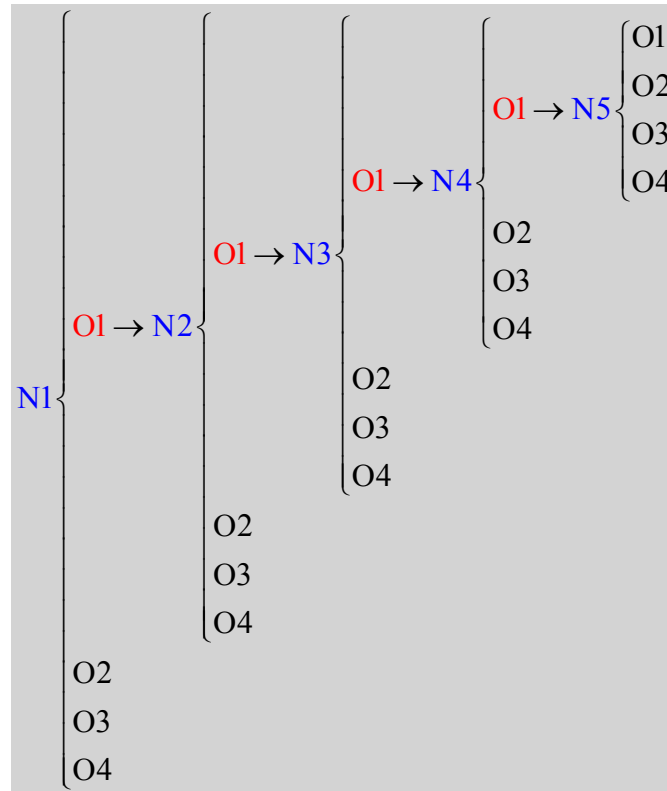
Άρα, σχηματίζονται  $4^3 = 64$  τριψήφιοι αριθμοί.

### Εφαρμογή 39

Με πόσους τρόπους κατανέμονται, στους ορόφους τετραώροφου κτηρίου, 5 ναυτικοί;

Κάθε ναυτικός επιλέγει ανάμεσα σε 4 ορόφους. Την ίδια στιγμή δεν μπορεί να βρίσκεται συγχρόνως σε περισσότερους από έναν ορόφους. Δεν υπάρχει περιορισμός ως προς το πλήθος των ναυτικών που μπορούν να βρίσκονται συγχρόνως στον ίδιο όροφο. Άρα, οι 5 ναυτικοί, κατανέμονται στους 4 ορόφους, με  $4^5 = 1.024$  τρόπους.





### 9.8 Συνδυασμοί

Έστω σύνολο  $A$  με  $v$  στοιχεία. Κάθε υποσύνολο του  $A$  με  $k$  στοιχεία ( $k \leq v$ ) ονομάζεται συνδυασμός των  $v$  στοιχείων ανά  $k$ . Το πλήθος συνδυασμών των  $v$  στοιχείων ανά  $k$  συμβολίζεται  $\binom{v}{k}$  και είναι  $\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}$ . Δυο συνδυασμοί είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν τουλάχιστον σε 1 στοιχείο. Στους συνδυασμούς δεν με ενδιαφέρει η σειρά με την οποία λαμβάνονται τα στοιχεία.

#### Εφαρμογή 40

Με πόσους τρόπους επιλέγονται 3 από τους 12 μηχανικούς;

$$\text{Με } \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3!} = 10 \cdot 11 \cdot 2 = 220 \text{ τρόπους}$$

#### Εφαρμογή 41

Με πόσους τρόπους επιλέγονται 3 από τους 15 μηχανικούς;

$$\text{Είναι } \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{3!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = 13 \cdot 35 = 455 \text{ τρόποι}$$

#### Εφαρμογή 42

Με πόσους τρόπους επιλέγεται (από 14 παίχτες) η εντεκάδα που θα αγωνισθεί, αν ένας παίχτης πρέπει οπωσδήποτε: **(α)** να αγωνισθεί  
**(β)** να μην αγωνισθεί.

**(α)** Αν δεν υπάρχει περιορισμός, τότε από τους 14 παίχτες επιλέγονται οι 11 που θα αγωνισθούν κατά  $\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{3!} = 2 \cdot 13 \cdot 14$  τρόπους

Αν ένας παίκτης αγωνισθεί, τότε καταλαμβάνει τη μία από τις 11 θέσεις, άρα από τους υπολοίπους 13 παίχτες επιλέγονται οι 10, κατά

$$\binom{13}{10} = \frac{13!}{10! 3!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 11 \cdot 2 \cdot 13 = 286 \text{ τρόπους}$$

(β) Αν ένας παίχτης δεν συμμετάσχει στον αγώνα, τότε από τους υπολοίπους 13 παίχτες επιλέγονται οι 11 που θα παίξουν, κατά

$$\binom{13}{11} = \frac{13!}{11! 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78 \text{ τρόπους}$$

### Εφαρμογή 43

Με πόσους τρόπους επιλέγονται 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας;

Είναι  $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! 47!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 52}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 51 \cdot 52 = \dots$

### 9.9 Συνδυασμοί με επανάληψη

Το πλήθος συνδυασμών των  $\nu$  στοιχείων ανά  $k$  με επαναλήψεις, ισούται με το πλήθος των απλών συνδυασμών των  $(\nu + k - 1)$  στοιχείων ανά  $k$ , δηλαδή

$$\binom{\nu + k - 1}{k}$$

### Εφαρμογή 44

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται από τους αριθμούς 2, 4, 6, 8, 9, με ελεύθερη επανάληψη των αριθμών τους;

$$\text{Είναι } \binom{\nu + k - 1}{k} = \binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$$

### Εφαρμογή 45

Πόσοι είναι οι συνδυασμοί αν απαντάς σε 6 από τις 9 ερωτήσεις;

$$\text{Είναι } \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot 12 = 84$$

### Εφαρμογή 46

Στο ΛΟΤΤΟ επιλέγεις 6 από τους 49 αριθμούς. Πόσοι είναι οι συνδυασμοί;

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \binom{49}{6} &= \frac{49!}{6! 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \\ &= \frac{44 \cdot 9 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 49}{6} = \frac{22 \cdot 9 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 49}{3} = 22 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 98 = 66 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 98 = \dots \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 47

Με πόσους τρόπους συγκροτείται 4μελής επιτροπή (2 άνδρες και 2 γυναίκες) από 30 σπουδαστές και 4 σπουδάστριες;

Οι σπουδαστές επιλέγονται κατά  $\binom{30}{2}$  τρόπους και οι σπουδάστριες κατά  $\binom{4}{2}$

τρόπους. Συνολικά, υπάρχουν  $\binom{30}{2} \cdot \binom{4}{2}$  τρόποι συγκρότησης της επιτροπής.

### Εφαρμογή 48

Πόσες εξάδες προκύπτουν από 12 αριθμούς;

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cancel{12}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11}{3} = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 = 7 \cdot 12 \cdot 11 = 77 \cdot 12 = 924$$

### Εφαρμογή 49

Πόσες τριάδες σχηματίζονται, με μπάλες ίδιου χρώματος, από 4 μπλε, 6 λευκές και 9 κόκκινες λάμπες;

Από τις 4 μπλε λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά  $\binom{4}{3}$  τρόπους.

Από τις 6 λευκές λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά  $\binom{6}{3}$  τρόπους.

Από τις 9 κόκκινες λάμπες, οι 3 επιλέγονται κατά  $\binom{9}{3}$  τρόπους.

Είναι  $\binom{4}{3} + \binom{6}{3} + \binom{9}{3} = 4 + 20 + 84 = 108$  τριάδες

### Εφαρμογή 50

Πόσες 5μελεις ομάδες συγκροτούνται από 10 πλοιάρχους και 6 μηχανικούς, αν στην κάθε ομάδα περιλαμβάνεται τουλάχιστον 1 μηχανικός;

Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις σχετικά με τη συγκρότηση της επιτροπής,

Μηχανικοί	Πλοιάρχους	Σύνολο
1	4	5
2	3	5
3	2	5
4	1	5
5	0	5

Είναι  $\binom{10}{4} \binom{6}{1} + \binom{10}{3} \binom{6}{2} + \binom{10}{2} \binom{6}{3} + \binom{10}{1} \binom{6}{4} + \binom{10}{0} \binom{6}{5} =$   
 $210 \cdot 6 + 120 \cdot 15 + 45 \cdot 20 + 10 \cdot 15 + 6 =$   
 $1260 + 1800 + 900 + 150 + 6 = 3060 + 1056 = 4116$

### Εφαρμογή 51

Με πόσους τρόπους η Ζιζέλ να καλεί για καφέ 5 από τα 11 άτομα, αν:

(α) τα 2 είναι παντρεμένα, άρα δεν προσκαλείται μόνο το ένα

(β) 2 από τα 11 δεν πρέπει να καλεστούν μαζί, διότι είναι τσακωμένα;

(α) Αν κληθούν οι 2 παντρεμένοι, τότε οι υπόλοιποι 3 καλεσμένοι

επιλέγονται από το σύνολο των 9 ατόμων κατά  $\binom{9}{3}$  τρόπους.

$$11 \left\langle \begin{array}{l} 5 \text{ Επιλέγονται} \\ 2 \text{ Έγγαμοι} \\ 3 \text{ Τυχεροί που επιλέγονται από } 11 - 2 = 9 \\ 6 \text{ Δεν επιλέγονται} \end{array} \right.$$

Αν δεν κληθούν οι 2 παντρεμένοι, τότε πρέπει από τα υπόλοιπα 9 άτομα να επιλεγούν τα 5, κατά  $\binom{9}{5}$  τρόπους.

$$11 - 2 \text{ Έγγαμοι} = 9 \left\langle \begin{array}{l} 5 \text{ Επιλέγονται} \\ 4 \text{ Δεν επιλέγονται} \end{array} \right.$$

Συνολικά, η επιλογή των καλεσμένων γίνεται κατά  $\binom{9}{3} + \binom{9}{5}$  τρόπους.

(β) Αν οι 2 τσακωμένοι δεν προσκληθούν, τότε από τους υπολοίπους 9, επιλέγονται οι 5 καλεσμένοι, κατά  $\binom{9}{5}$  τρόπους.

Αν από τους 2 τσακωμένους κληθεί μόνον ο ένας, τότε από τους υπολοίπους 9 επιλέγονται οι άλλοι 4, κατά  $\binom{9}{4}$  τρόπους την κάθε φορά, δηλαδή συνολικά

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{4} = 2 \binom{9}{4} \text{ τρόπους. Τελικά, η επιλογή των καλεσμένων γίνεται κατά } \binom{9}{5} + 2 \binom{9}{4} \text{ τρόπους.}$$

### Εφαρμογή 52

Με πόσους τρόπους συγκροτούν 10 μηχανικοί μία 4μελή επιτροπή, αν το ένα μέλος της οριστεί πρόεδρος;

Τα 4 μέλη της επιτροπής επιλέγονται από τα 10 υποψήφια κατά  $\binom{10}{4}$  τρόπους.

Επειδή πρέπει ο ένας εκ των 4 να οριστεί πρόεδρος, θέση που μπορεί να καταληφθεί από τον καθένα εκ των 4 επιλεγέντων, έχω 4 περιπτώσεις. Άρα,

$$\begin{aligned} \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} &= \\ 4 \binom{10}{4} &= 4 \frac{10!}{4! 6!} = \\ 4 \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4!} &= 4 \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 = 28 \cdot 30 = 840 \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 53

Με πόσους τρόπους επιλέγονται για μετάθεση 5 από τους 15 καθηγητές, αν 2 εκ των 15 είναι σύζυγοι, άρα μετατίθενται και οι 2 μαζί ή κανένας τους. Έχω 2 περιπτώσεις.

Στην **1<sup>η</sup> περίπτωση** μετατίθενται οι 2 έγγαμοι καθηγητές, άρα καταλαμβάνουν τις 2 από τις 5 προς μετάθεση θέσεις. Οι υπόλοιπες 3 θέσεις, διεκδικούνται από τους υπολοίπους 13 καθηγητές κατά  $\binom{13}{3}$  τρόπους.

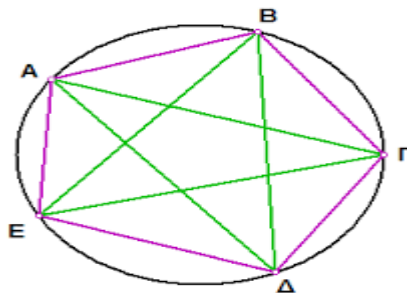
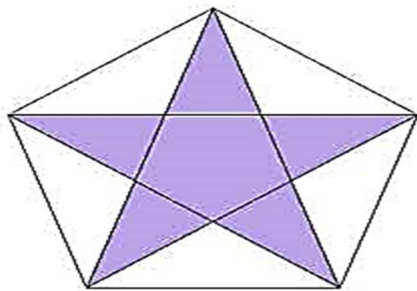
Στη **2<sup>η</sup> περίπτωση** οι 2 έγγαμοι καθηγητές δεν μετατίθενται, άρα οι υπόλοιποι 13 διεκδικούν τις 5 προς μετάθεση θέσεις, κατά  $\binom{13}{5}$  τρόπους.

$$\text{Συνολικά } \binom{13}{5} + \binom{13}{3} = \frac{13!}{5! 8!} + \frac{13!}{3! 10!} = 99 \cdot 13 + 22 \cdot 13 = 121 \cdot 13 = 1.573$$

#### Εφαρμογή 54

Πόσοι δρόμοι πρέπει να κατασκευασθούν, ώστε να συνδέονται 5 πόλεις;

Το πλήθος των δρόμων ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των 5 πόλεων ανά 2, δηλαδή  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! (5-2)!} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

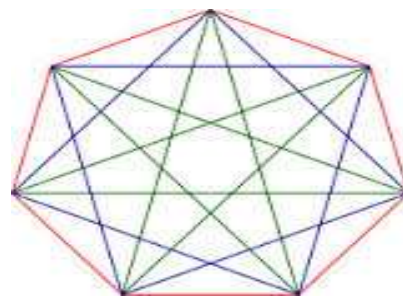
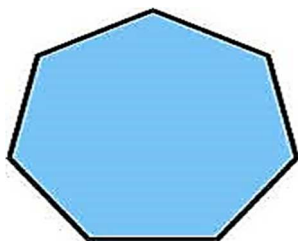


#### Εφαρμογή 55

Πόσα ευθύγραμμα τμήματα και πόσα τρίγωνα ορίζουν 7 σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου;

Εφόσον τα 7 σημεία ανήκουν στην περιφέρεια κύκλου, ανά 3 σημεία δεν είναι συνευθειακά. Ανά 2 σημεία ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα πλήθους  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! (7-2)!} = \frac{7!}{2! 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2!} = \frac{42}{2} = 21$

Ανά 3 σημεία ορίζουν τρίγωνα, πλήθους  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! (7-3)!} = \frac{7!}{3! 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 5 \cdot 7 = 35$



#### Εφαρμογή 56

Με πόσους τρόπους 11 άτομα χωρίζονται σε μία:

(α) 6μελή και μία 5μελή ομάδα

(β) 5μελή, μία 4μελή και μία 2μελή ομάδα;

(α) Η διαδικασία χωρίζεται σε 2 φάσεις.

Στην 1<sup>η</sup> φάση, επιλέγονται από τα 11 άτομα τα 6 με  $\binom{11}{6}$  τρόπους.

Στη 2<sup>η</sup> φάση, από τα 5 εναπομείναντα άτομα επιλέγονται τα 5, με  $\binom{5}{5}$  τρόπους.

$$\begin{aligned} \text{Τελικά, υπάρχουν } \binom{11}{6} \binom{5}{5} &= \binom{11}{6} \cdot 1 = \binom{11}{6} = \frac{11!}{6! (11-6)!} \\ \frac{11!}{6! 5!} &= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cancel{10} \cdot 11}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cancel{5}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11}{3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 14 \cdot 33 = 462 \text{ τρόποι.} \end{aligned}$$

(β) Η διαδικασία, χωρίζεται σε 3 φάσεις.

Στην 1<sup>η</sup> φάση, επιλέγονται από τα 11 άτομα τα 5 με  $\binom{11}{5}$  τρόπους.

Στη 2<sup>η</sup> φάση, από τα 6 εναπομείναντα άτομα επιλέγονται τα 4 με  $\binom{6}{4}$  τρόπους.

Στην 3<sup>η</sup> φάση, από τα  $11-5-4=2$  άτομα επιλέγονται τα 2 με  $\binom{2}{2}$  τρόπους.

$$\begin{aligned} \text{Τελικά, υπάρχουν } \binom{11}{5} \binom{6}{4} \binom{2}{2} &= \binom{11}{5} \cdot \binom{6}{4} \cdot 1 = \binom{11}{5} \cdot \binom{6}{4} = \\ \frac{11!}{5! (11-5)!} \frac{6!}{4! (6-4)!} &= \frac{11!}{5! 4! 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{4! 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = \end{aligned}$$

$$7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 630 \cdot 11 = 6.930 \text{ τρόποι}$$

### Παρατήρηση 5

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! 4!} \quad \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! 3!} \quad \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! 6!} \quad \binom{11}{6} = \frac{11!}{6! 5!}$$

### Εφαρμογή 57

Έστω 5 παγωτά (σοκολάτα, βανίλια, φράουλα, μπανάνα, φιστίκι). Με πόσους τρόπους γεμίζει ένα κυπελάκι (4 μπάλες) αν:

- (α) οι μπάλες είναι διαφορετικές,
- (β) 2 μπάλες είναι ίδιες,
- (γ) 3 μπάλες είναι σοκολάτα;

(α) Οι τρόποι είναι όσοι οι συνδυασμοί των 5 παγωτών ανά 4, δηλαδή

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! (5-4)!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι	Μπάλες
✓	✓	✓	✓		4
✓	✓	✓		✓	4
✓	✓		✓	✓	4
✓		✓	✓	✓	4
	✓	✓	✓	✓	4

(β) Από τις 5 γεύσεις επιλέγεις 4. Από τις 4 μπάλες οι 2 είναι ίδιες, άρα οι άλλες 2 είναι διαφορετικές τόσο με τις πρώτες όσο και μεταξύ τους. Η διαδικασία χωρίζεται σε δυο φάσεις.

Στην 1<sup>η</sup> φάση, επιλέγονται οι 2 διαφορετικές μπάλες (έστω σοκολάτα και βανίλια) κατά  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} = 10$  τρόπους. Οι 20 περιπτώσεις του σχήματος διαιρούνται δια του 2, διότι η επιλογή σοκολάτα–βανίλια είναι ίδια με την επιλογή βανίλια–σοκολάτα.

σοκ	$\left\{ \begin{array}{l} \text{βαν} \\ \text{φρ} \\ \text{μπαν} \\ \text{φισ} \end{array} \right\}$	βαν	$\left\{ \begin{array}{l} \text{σοκ} \\ \text{φρ} \\ \text{μπαν} \\ \text{φισ} \end{array} \right\}$	σοκ	$\left\{ \begin{array}{l} \text{βαν} \\ \text{σοκ} \\ \text{μπαν} \\ \text{φισ} \end{array} \right\}$	μπαν	$\left\{ \begin{array}{l} \text{βαν} \\ \text{φρ} \\ \text{σοκ} \\ \text{φισ} \end{array} \right\}$	φισ	$\left\{ \begin{array}{l} \text{βαν} \\ \text{φρ} \\ \text{σοκ} \\ \text{φισ} \end{array} \right\}$
-----	--	-----	--	-----	---	------	---	-----	---

Στη 2<sup>η</sup> φάση, επιλέγονται οι 2 ίδιες μπάλες από τις 3 γεύσεις που απέμειναν (φράουλα, μπανάνα και φιστίκι), κατά  $\binom{3}{1} = 3$  τρόπους.

Συνολικά, υπάρχουν  $\binom{5}{2} \binom{3}{1} = 10 \cdot 3 = 30$  τρόποι

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι
		✓	✓	✓
		✓	✓	✓

(γ) Αφού οι 3 μπάλες είναι σοκολάτα, η μπάλα που απομένει, επιλέγεται από τις υπόλοιπες 4 γεύσεις κατά  $\binom{4}{1} = 4$  τρόπους

Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα	Μπανάνα	Φιστίκι
✓				
✓				
✓				
	✓	✓	✓	✓

### Εφαρμογή 58

Δείξτε ότι, αν  $v$  μηχανικοί τσουγκρίσουν τα ποτήρια τους ανά 2, τότε θα ακουστούν  $\frac{v(v-1)}{2}$  τσουγκρίσματα.

Κάθε μηχανικός κάνει  $(v-1)$  τσουγκρίσματα, όσοι είναι οι υπόλοιποι καλεσμένοι. Άρα, από τους  $v$  μηχανικούς γίνονται  $v(v-1)$  τσουγκρίσματα. Επειδή το τσουγκρίσμα του 1<sup>ου</sup> με τον 2<sup>ο</sup> είναι ίδιο με το τσουγκρίσμα του 2<sup>ου</sup> με τον 1<sup>ο</sup>, ο πραγματικός αριθμός των τσουγκρισμάτων είναι  $\frac{v(v-1)}{2}$

### Εφαρμογή 59

Πόσοι συμμετείχαν σε δείπνο, αν ακούστηκαν 120 τσουγκρίσματα, διότι τσουγκρίσαν όλοι τα ποτήρια τους ανά 2;

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \nu^2 - \nu = 240 \Leftrightarrow \nu = 16 \text{ επιβάτες}$$

### Εφαρμογή 60

Πόσες χειραψίες έγιναν, όταν 10 ναυτικοί αντάλλαξαν χειραψία ο ένας με τον άλλο;

$$\frac{10(10-1)}{2} = 5 \cdot 9 = 45 \text{ χειραψίες}$$

### Παρατήρηση 6

Η τοποθέτηση στη σειρά των  $\nu$  στοιχείων ενός συνόλου, γίνεται με  $P_\nu = \nu!$  τρόπους, όσες και οι μεταθέσεις των  $\nu$  στοιχείων.

Η κυκλική μετάθεση των  $\nu$  στοιχείων ενός συνόλου, γίνεται με  $(\nu-1)!$  τρόπους.

Η τοποθέτηση στη σειρά των στοιχείων των  $\nu$  συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ , που έχουν αντίστοιχα πληθαρικούς  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ , έτσι ώστε τα στοιχεία κάθε συνόλου να είναι συνεχώς τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, γίνεται με  $\nu! \cdot \sigma_1! \cdot \sigma_2! \cdot \dots \cdot \sigma_\nu!$  τρόπους. Αρχικά, τα  $\nu$  το πλήθος σύνολα τοποθετούνται στη σειρά με  $\nu!$  τρόπους. Ακολουθώντας, τα στοιχεία του συνόλου  $A_1$  τοποθετούνται στη σειρά κατά  $\sigma_1!$ , του συνόλου  $A_2$  κατά  $\sigma_2!$ , κ.ο.κ.

Η κυκλική μετάθεση των στοιχείων των ανωτέρω  $\nu$  συνόλων γίνεται με  $(\nu-1)! \cdot \sigma_1! \cdot \sigma_2! \cdot \dots \cdot \sigma_\nu!$  τρόπους.

### Παρατήρηση 7

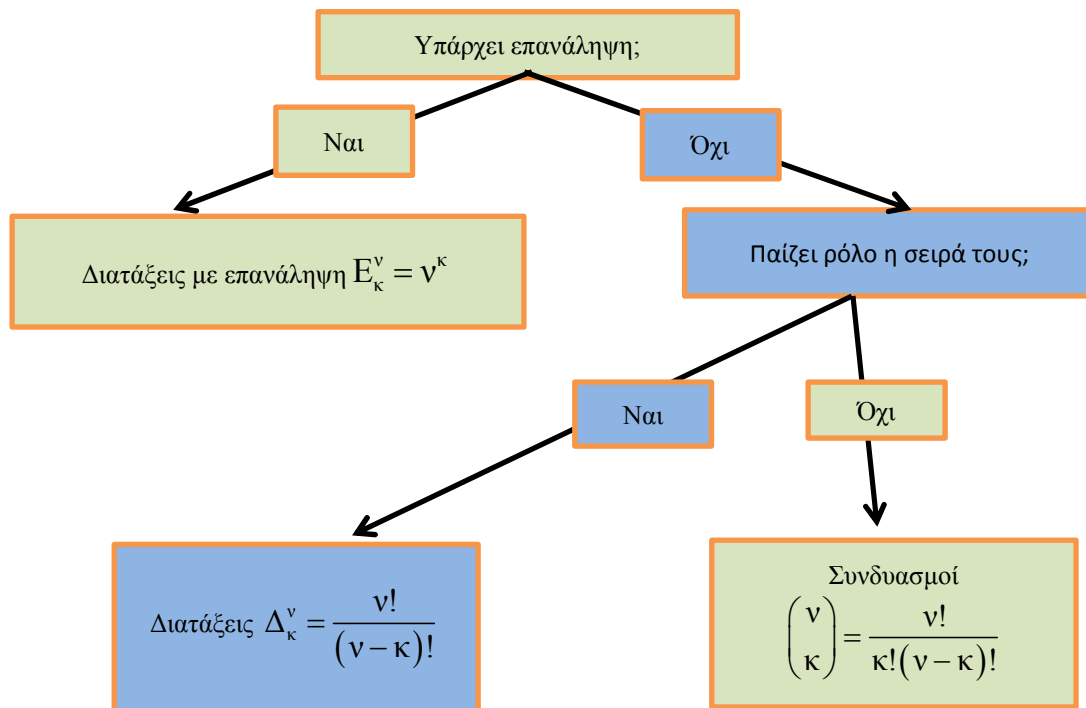
Για την εναλλάξ τοποθέτηση γραμμικά (ή κυκλικά) των στοιχείων των συνόλων  $A_1, A_2$  με πληθαρικούς  $\sigma_1, \sigma_2$  αντίστοιχα ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ), τοποθετούνται αρχικά τα στοιχεία του  $A_1$  (διότι  $\sigma_1 > \sigma_2$ ), κατά  $\sigma_1!$  (ή  $(\sigma_1-1)!$ ) τρόπους και στη συνέχεια οι  $(\sigma_1-1)$  το πλήθος ενδιάμεσες θέσεις καλύπτονται από τα στοιχεία του  $A_2$  κατά  $\Delta_{\sigma_2}^{\sigma_1-1}$  τρόπους.

### Παρατήρηση 8

Το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου  $A$  ( $\nu$  στοιχεία), σε  $k$  υποσύνολα  $A_1$  ( $\sigma_1$  στοιχεία),  $A_2$  ( $\sigma_2$  στοιχεία), ...,  $A_k$  ( $\sigma_k$  στοιχεία), με  $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k = \nu$ , είναι  $\Pi = \binom{\nu}{\sigma_1} \cdot \binom{\nu - \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \binom{\nu - (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{k-1})}{\sigma_k}$  αν ενδιαφέρει και  $\Pi' = \frac{\Pi}{k!}$  αν δεν ενδιαφέρει η σειρά των υποσυνόλων.

### Παρατήρηση 9

Για την επιλογή του κατάλληλου τύπου που θα χρησιμοποιηθεί για την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου ισχύει:



### Παρατήρηση 10

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου που δημιουργείται αν από τα σύνολα  $A_1$  (πληθαιριθμού  $v_1$ ), ...,  $A_k$  (πληθαιριθμού  $v_k$ ), επιλεγούν, αντίστοιχα,  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  στοιχεία είναι  $\binom{v_1}{\sigma_1} \cdot \binom{v_2}{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \binom{v_k}{\sigma_k}$ . Αν ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων του νέου συνόλου, το πλήθος των στοιχείων του είναι  $\binom{v_1}{\sigma_1} \cdot \binom{v_2}{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \binom{v_k}{\sigma_k} \cdot P_{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}$ .

### Παρατήρηση 11 (Ημερομηνίες γέννησης)

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων ώστε τα  $v$  άτομα να έχουν γεννηθεί μία οποιαδήποτε ημέρα του έτους είναι  $E_v^{365} = 365^v$ . Υπάρχουν 365 περιπτώσεις ώστε τα  $v$  άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, δηλαδή μία από τις 365 ημέρες του έτους.

Υπάρχουν  $\Delta_v^{365}$  τρόποι προκειμένου τα  $v$  άτομα να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές, ανά 2 ημερομηνίες. Υπάρχουν  $E_v^{365} - \Delta_v^{365}$  τρόποι ώστε από τα  $v$  άτομα, 2 τουλάχιστον να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

Υπάρχουν  $365 \cdot \Delta_{v-\mu}^{364}$  τρόποι ώστε από τα  $v$  άτομα, τα πρώτα  $\mu$  το πλήθος (όπου  $\mu < v$ ), να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ενώ τα υπόλοιπα ( $v - \mu$  άτομα), σε άλλες και διαφορετικές ανά 2 ημερομηνίες.

Υπάρχουν  $\binom{v}{\mu} \cdot 365 \cdot \Delta_{v-\mu}^{364}$  τρόποι ώστε από τα  $v$  το πλήθος άτομα, τα  $\mu$  (όπου  $\mu < v$ ), να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία ενώ τα υπόλοιπα ( $v - \mu$  άτομα), σε άλλες και διαφορετικές ανά 2 ημερομηνίες.

### Παρατήρηση 12 (Το πρόβλημα του αναγραμματισμού)

Το πλήθος των αναγραμματισμών μίας λέξης  $\nu$  γραμμάτων που έχει  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  αντίστοιχα ίδια γράμματα, ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου των  $\nu$  στοιχείων σε υποσύνολα των  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  στοιχείων και είναι

$$\Pi = \binom{\nu}{\sigma_1} \cdot \binom{\nu - \sigma_1}{\sigma_2} \cdots \binom{\nu - (\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{k-1})}{\sigma_k} = \frac{\nu!}{\sigma_1! \sigma_2! \cdots \sigma_k!} \quad \text{διότι. Αν όλα τα}$$

γράμματα είναι ανόμοια, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι  $\Pi = \nu!$

### Άσκηση 11

Δείξτε ότι  $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k}$

### Άσκηση 12

Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν;

### Άσκηση 13

Πόσοι τριψήφιοι άρτιοι αριθμοί υπάρχουν;

### Άσκηση 14

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, με άθροισμα των 2 πρώτων ψηφίων τους 6;

### Άσκηση 15

Με πόσους τρόπους κρεμιούνται 8 παλά σε κρεμάστρα 6 θέσεων;

### Άσκηση 16

Με πόσους τρόπους επιλέγονται 4 σφαιρίδια, από κάλπη με 4 λευκά και 5 μαύρα, ώστε:

- (α) να είναι όλα λευκά
- (β) 2 να είναι λευκά;
- (γ) 1 τουλάχιστον να είναι λευκό;
- (δ) το πολύ 1 να είναι λευκό;

### Άσκηση 17

Με πόσους 6 σπουδαστές τοποθετούνται σε σειρά; Αν καθίσουν κυκλικά, πόσοι τρόποι υπάρχουν;

### Άσκηση 18

Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης NEPO;

### Άσκηση 19

Με πόσους τρόπους σχηματίζεται 5-μελής επιτροπή (πρόεδρος, αντιπρόεδρος, γραμματέας, ταμίας, μέλος) από 5 σπουδαστές;

### Άσκηση 20

Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία, σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5;

### Άσκηση 21

Με πόσους τρόπους μοιράζονται σε 3 από τους 11 παίκτες, 3 φανέλες με τα νούμερα 0, -1, -2;

**Άσκηση 22**

Με πόσους τρόπους 5 άτομα κάθονται σε 3 καρέκλες κυκλικού τραπέζιου;

**Άσκηση 23**

Με πόσους τρόπους 8 αμάξια παρκάρουν σε 6 θέσεις στάθμευσης;

**Άσκηση 24**

Με πόσους τρόπους 6 αμάξια παρκάρουν σε 8 θέσεις στάθμευσης;

**Άσκηση 25**

Με πόσους τρόπους 6 άτομα διανυκτερεύουν σε 8 ξενοδοχεία;

**Άσκηση 26**

Πόσες διαφορετικές τριμελείς ομάδες σχηματίζονται από 7 σπουδαστές;

**Άσκηση 27**

Πόσες διαγώνιες έχει ένα  $n$ -γωνο;

**Άσκηση 28**

Με πόσους τρόπους ο προπονητής 12 παικτών σχηματίζει 2 πεντάδες;

**Άσκηση 29**

Με πόσους τρόπους μπορούν, 3 Έλληνες, 4 Γάλλοι, 5 Πορτογάλοι και 6 Κύπριοι σύνεδροι να καθίσουν, ώστε τα μέλη κάθε χώρας να βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο: (α) στη σειρά  
(β) γύρω από κυκλικό τραπέζι;

**Άσκηση 30**

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται τα στοιχεία του  $\Omega = \{1, 2, 3, k, s\}$  στη σειρά, ώστε τα 2 γράμματα να είναι συνεχώς μαζί; Ομοίως για κυκλική μετάθεση.

**Άσκηση 31**

Με πόσους τρόπους κάθονται στη σειρά (ή κυκλικά) 2 πλοίαρχοι και 4 μηχανικοί, ώστε οι πλοίαρχοι να μην είναι ο ένας δίπλα στον άλλο;

**Άσκηση 32**

Με πόσους τρόπους κάθονται στη σειρά (ή κυκλικά) 4 πλοίαρχοι και 4 μηχανικοί ώστε: (α) οι 4 πλοίαρχοι να κάθονται μαζί;  
(β) οι πλοίαρχοι και οι μηχανικοί να κάθονται εναλλάξ;

**Άσκηση 33**

Με πόσους τρόπους μοιράζονται 8 βιβλία σε 2 σχολές, ώστε η 1<sup>η</sup> να λάβει 5 και η 2<sup>η</sup> 3 βιβλία;

**Άσκηση 34**

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται 9 βιβλία σε 3 ράφια (Α, Β, Γ) χωρητικότητας 4, 3, 2 αντίστοιχα;

**Άσκηση 35**

Με πόσους τρόπους μοιράζονται 12 βιβλία, εξίσου σε 3 σπουδαστές;

**Άσκηση 36**

Με πόσους τρόπους 6 μηχανικοί χωρίζονται σε 3 ισοπληθείς ομάδες;

**Άσκηση 37**

Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί των λέξεων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΦΥΣΙΚΗ;

**Άσκηση 38**

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για νόμισμα που ρίχνεται 7 φορές να εμφανισθούν:

(α) 5 κεφαλές (Κ) και 2 γράμματα (Γ)

(β) το πολύ 2 κεφαλές;

**Άσκηση 39**

Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε, 4 άτομα να έχουν γενέθλια από 28 Μαρτίου ως και 31 Μαΐου;

**Άσκηση 40**

Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε, από 5 άτομα τουλάχιστον τα 2 να έχουν γεννηθεί την ίδια ημέρα τους εβδομάδας;

**Άσκηση 41**

Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε 3 άτομα να έχουν γενέθλια:

(α) την ίδια ημέρα του έτους

(β) διαφορετικές (ανά 2) ημέρες του έτους

(γ) τα 2, τουλάχιστον την ίδια ημέρα του έτους;

**Άσκηση 42**

Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε από 5 άτομα τα 3 να έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία, ενώ τα άλλα 2 σε 2 διαφορετικές μεταξύ τους ημερομηνίες;

### 9.10 Η ύπαρξη του τυχαίου

Η ύπαρξη του τυχαίου έχει γίνει αντιληπτή εδώ και χιλιετίες. Η εξήγηση του δεν υπάρχει ακόμα. Στην προσπάθεια τους να βάλουν τάξη στην ανεξήγητη ροή των γεγονότων, οι άνθρωποι δημιούργησαν την έννοια της μοίρας. Αργότερα, επινόησαν τις πιθανότητες. Πρόκειται για τον μοναδικό κλάδο των μαθηματικών που δουλεύει πάνω στην απόλυτη αβεβαιότητα. Για αυτό, σε αντίθεση με κάθε άλλον επιστημονικό τομέα, τα αποτελέσματα που δίνει είναι απλά προβλέψεις. Οι πιθανότητες δεν είναι ένα εργαλείο που εξουδετερώνει την έννοια του τυχαίου. Το μόνο που κατάφεραν οι μαθηματικοί με τη δημιουργία αυτής της θεωρίας, ήταν να περιορίσουν την ισχύ του. Να φτιάξουν διαβαθμίσεις, ανάλογα με τις πιθανότητες του. Οι πιθανότητες δεν ανακαλύφθηκαν για να καταπολεμήσουν την έννοια της μοίρας. Οι επιστήμονες αντιλαμβάνονται πως ορισμένα θέματα θα παραμείνουν ανεξήγητα και τυχαία.

Η θεωρία των πιθανοτήτων δημιουργήθηκε για χάρη των τυχερών παιχνιδιών, ενώ πέρασαν αρκετά χρόνια ώστε οι μαθηματικοί να αντιληφθούν την πραγματική δύναμη του κλάδου και να τον χρησιμοποιήσουν για επιστημονικά ζητήματα.

Η έννοια του τυχαίου, είναι βαθιά ριζωμένη στη ζωή μας. Η ύπαρξη μας, οφείλεται σε τυχαία γεγονότα. Κάθε σπερματοζώαριο έχει τις ίδιες πιθανότητες, αλλά μήπως τα 2 που προπορεύονταν στον αγώνα δρόμου τράκαραν μεταξύ τους, αφήνοντας μοιραία τη θέση τους στο 3<sup>ο</sup> της σειράς; Μπορούμε να βρούμε αμέτρητα αντίστοιχα παραδείγματα, που αποδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο του τυχαίου στη ζωή. Οι μαθηματικοί προτιμούν να αποφεύγουν αυτές τις περιπτώσεις, διότι δεν μπορούν να αποδεχτούν πως είναι ανίκανοι να τις αντιμετωπίσουν. Παρόλα αυτά, ο κλάδος των πιθανοτήτων, που έχει εμφανιστεί εδώ και μόλις λίγους αιώνες, έχει κάνει τεράστιες προόδους. Πλέον, η έννοια της πιθανότητας είναι ικανή να εξηγήσει πολλά φαινόμενα που διαχρονικά θεωρούνταν τυχαία.

Το πιο απλό παράδειγμα πιθανοτήτων είναι η ρίψη του ζαριού, διότι δεν μπορεί να προβλεφθεί ποια από τις 6 πλευρές θα εμφανισθεί. Οι νόμοι των πιθανοτήτων λένε πως αν συνεχίσουμε να ρίχνουμε το ζάρι αρκετές φορές, θα εμφανιστούν όλες οι πλευρές με την ίδια συχνότητα. Κάθε πλευρά έχει περίπου 16,66% πιθανότητα εμφάνισης, που αντιστοιχεί στο ένα έκτο. Η αυστηρή θεμελίωση του κλάδου των πιθανοτήτων χάρισε στους επιστήμονες, κάθε κλάδου, μια νέα μέθοδο διαχείρισης των προβλημάτων τους. Όσο οι πιθανότητες εξελίσσονταν, τόσο εισάγονταν όλο και βαθύτερα στην επιστημονική διαδικασία. Ο 1<sup>ος</sup> τομέας που επωφελήθηκε από τη δημιουργία των πιθανοτήτων ήταν η **στατιστική**, που βρήκε το καταλληλότερο εργαλείο για να προβλέψει ποσοστά. Αυτό είναι ένα μικρό δείγμα της συνεισφοράς των πιθανοτήτων στις υπόλοιπες επιστήμες. Η **σύγχρονη φυσική** βασίζεται σε πιθανότητες. Η **κβαντομηχανική** και οι νόμοι γύρω από την κίνηση των υποατομικών σωματιδίων, στηρίζονται στα ποσοστά των πιθανοτήτων. Οι τυχαίες κινήσεις των μικρών σωμάτων, δεν είναι δυνατό να προβλεφθούν ξεχωριστά. Οι μαθηματικοί είναι ικανοί να υπολογίσουν τη συνολική κίνηση τους, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που βρίσκουν τα ποσοστά που μπορεί κάποιος να φέρει εξάρεις.

Η σύγχρονη φυσική βασίζεται στην τύχη, έχοντας περιθώρια μικρών σφαλμάτων, όμως πλέον οι επιστήμονες έχουν βρει τρόπο να την κοντρολάρουν. Πιθανότατα η εξήγηση των τυχαίων γεγονότων δεν θα επιτευχθεί ποτέ, αφού όσο εμβαθύνει κάποιος στον χώρο των πιθανοτήτων τόσο πιο πολύ χάνεται. Ο κλάδος των πιθανοτήτων δεν είναι ικανός να λύσει τα μυστήρια που ανέκαθεν απασχολούσαν τους ανθρώπους. Για αυτό άλλωστε επινοήθηκαν η έννοια του τυχαίου και η λέξη μοίρα. Με αυτό το μαθηματικό εργαλείο όμως, η χαοτική φύση του τυχαίου μπορεί να μπει σε μια τάξη.

### 9.11 Η ιστορία της τράπουλας

Η λέξη τράπουλα, προέρχεται από την ιταλική λέξη *trappola* που σημαίνει παγίδα ή δόλος. Η τράπουλα αποτελείται από τα τραπουλόχαρτα. Παιχνίδια με χαρτιά τράπουλας είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα παγκοσμίως. Η καταγωγή της είναι ασιατική, πιθανολογείται ότι γεννήθηκε μεταξύ Ινδίας και Κίνας περί τον 10<sup>ο</sup> αιώνα. Μερικές κινεζικές τράπουλες χρησιμοποιούν ένα σύστημα, που έχει τις ρίζες του στο ντόμινο και στο σκάκι. Τα κινέζικα τραπουλόχαρτα, ήταν συγχρόνως και χαρτονομίσματα. Ακόμη και σήμερα, ορισμένες κινεζικές τράπουλες απεικονίζουν νομίσματα. Στην Ευρώπη εμφανίστηκε 1<sup>η</sup> φορά, τον 14<sup>ο</sup> αιώνα. Επικράτησε το γαλλικό σύστημα που έχει τις ρίζες του στον 14<sup>ο</sup> αιώνα και για αυτό οι φιγούρες φορούν ενδυμασίες εκείνης της εποχής. Η φιγούρα της βασίλισσας προστέθηκε αργότερα, σε αυτές του βασιλιά, του ιπότη και του υπηρέτη.

Στα γαλλικά τραπουλόχαρτα οι φιγούρες πήραν τα ονόματα μεγάλων προσωπικοτήτων της ιστορίας.

Ο ρήγας κούπα είναι ο **Καρλομάγνος**.

Ο ρήγας καρό είναι ο **Ιούλιος Καίσαρας**.

Ο ρήγας σπαθί είναι ο **Μέγας Αλέξανδρος**.

Ο ρήγας μπαστούνι είναι ο **Δαβίδ**.

Η ντάμα μπαστούνι είναι η **Παλλάδα Αθηνά**. Οι υπόλοιπες είναι η **Ιουδίθ**, η **Ραχήλ** και η **Αρζίν**.

Ο βαλές καρό είναι ο **Έκτορας**. Οι υπόλοιποι βαλέδες είναι ο **Λάνσελοτ**, ο **Οζιέ** και ο **Λαϊρ**.

Τα σύμβολα μπαστούνι (**bastoni**), νομίσματα (**denari**), σπαθί (**spade**) και κούπα (**cope**) συμβολίζουν αντίστοιχα, τους αγρότες, τους εμπόρους, τους ευγενείς και τον κλήρο. Η τράπουλα έχει συνολικά:

**365** σύμβολα σε όλα τα χαρτιά της, όσες είναι οι ημέρες του έτους,

**12** φιγούρες, όσοι είναι οι μήνες του έτους,

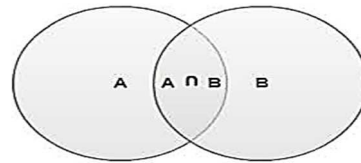
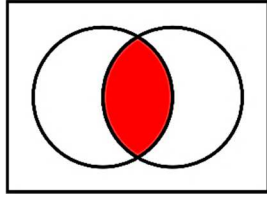
**52** φύλλα, όσες είναι οι εβδομάδες του έτους,

**4** σύμβολα, όσες είναι οι εποχές του έτους

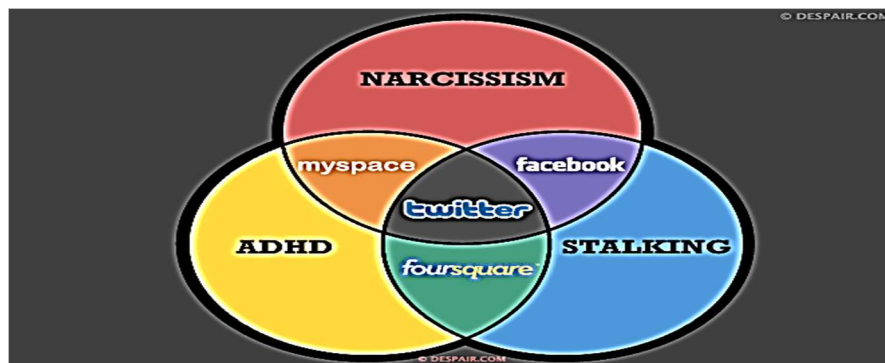
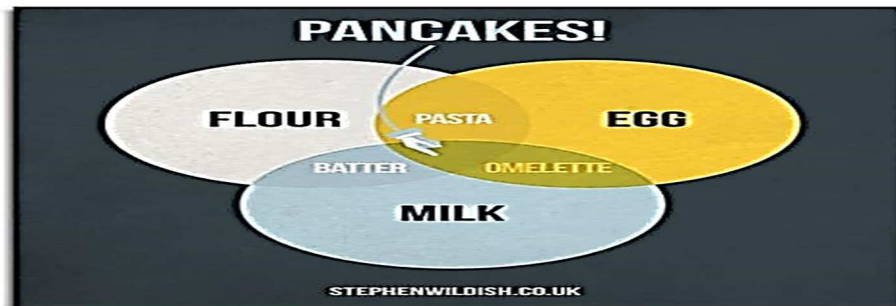
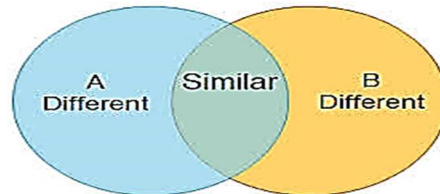
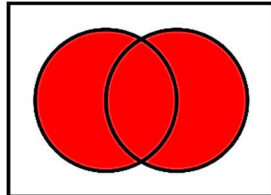
**13** φύλλα με το ίδιο σύμβολο, όσες είναι οι εβδομάδες της κάθε εποχής.

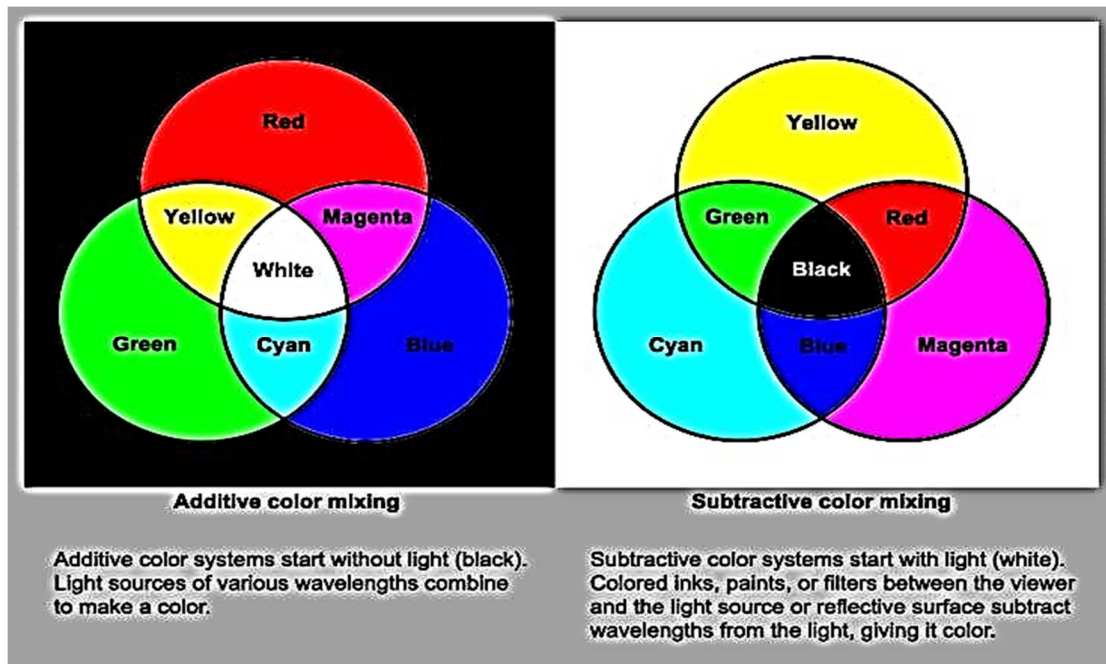
## 9.12 Διαγράμματα του John Venn

Τομή δύο συνόλων  $A \cap B$

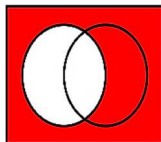


Ένωση δύο συνόλων  $A \cup B$

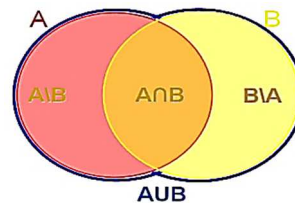
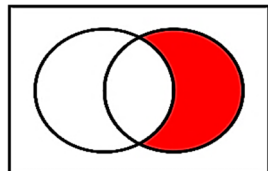




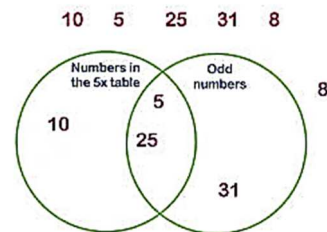
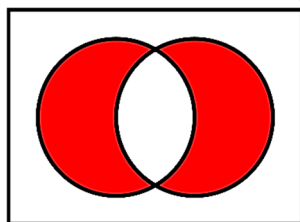
Συμπλήρωμα ενός συνόλου  $A^C = A' = \bar{A}$



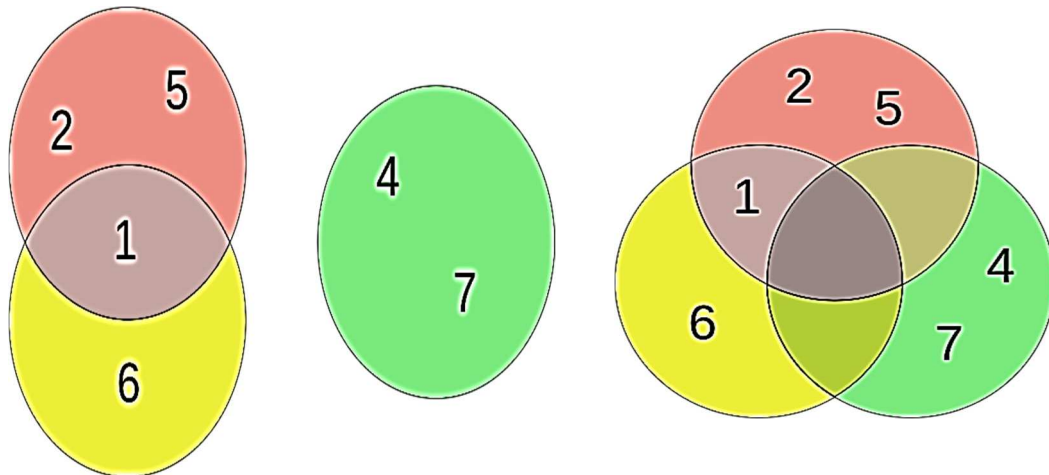
Διαφορά δύο συνόλων  $(A - B), (B - A)$



Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων  $(A - B) \cup (B - A)$



## Εφαρμογή 61



$$A = \{1, 2, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A - B = \{2, 5\}$$

$$\Gamma - A = \Gamma = \{4, 7\}$$

$$A' = \{4, 6, 7\}$$

$$A \cup A' = \Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap A' = \{ \} = \emptyset$$

$$\overline{\Omega} = \{ \}$$

$$\Omega \cap \{ \} = \{ \}$$

$$B = \{1, 6\}$$

$$A \cup \Gamma = \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

$$A \cap \Gamma = \{ \} = \emptyset$$

$$B - A = \{6\}$$

$$\Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B' = \{2, 4, 5, 7\}$$

$$B \cup B' = \Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B \cap B' = \{ \} = \emptyset$$

$$\overline{\{ \}} = \Omega$$

$$\Gamma = \{4, 7\}$$

$$B \cup \Gamma = \{1, 4, 6, 7\}$$

$$B \cap \Gamma = \{ \} = \emptyset$$

$$A - \Gamma = A = \{1, 2, 5\}$$

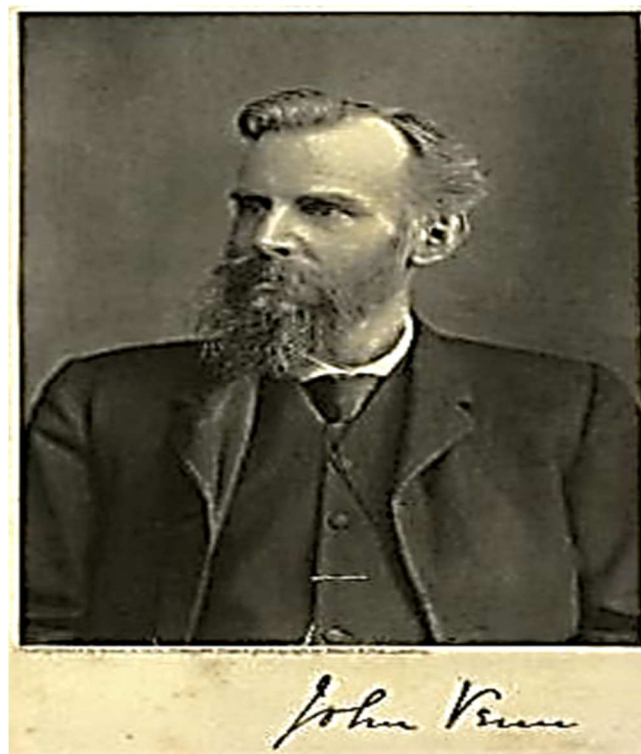
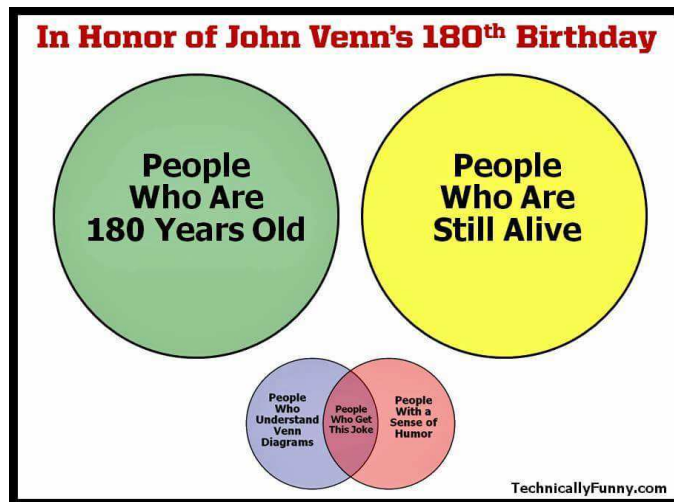
$$A \cap B \cap \Gamma = \{ \} = \emptyset$$

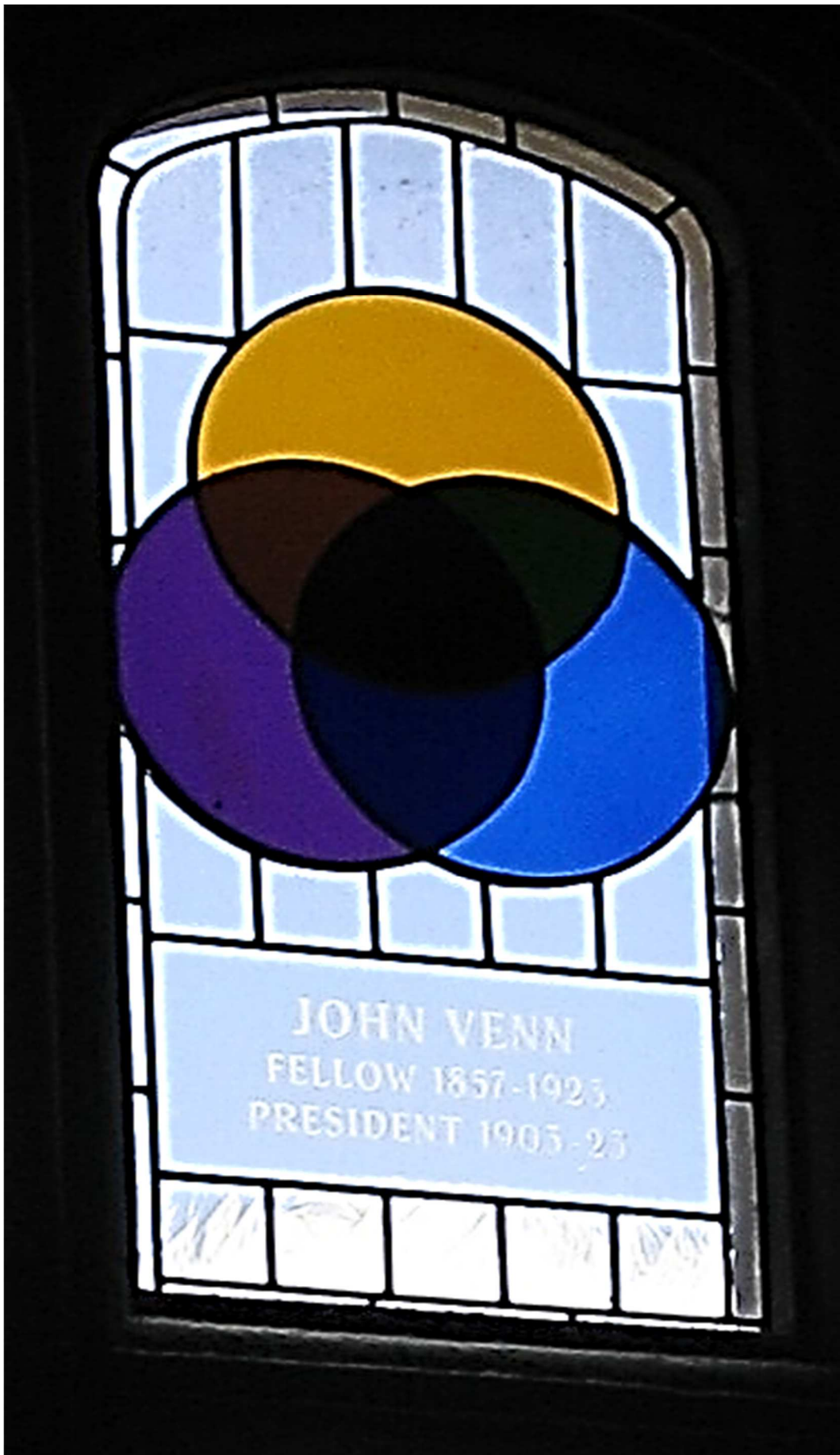
$$\Gamma' = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$\Gamma \cup \Gamma' = \Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\Gamma \cap \Gamma' = \{ \} = \emptyset$$

$$\Omega \cup \{ \} = \Omega$$





Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

### 9.13 Στοιχεία της θεωρίας συνόλων

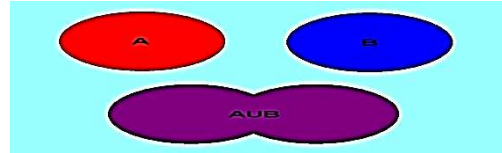
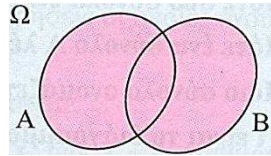
#### Αξίωμα της επεκτασιμότητας

Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

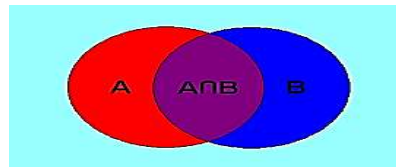
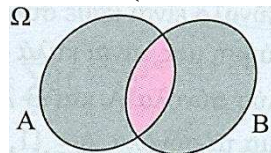
#### Ένωση δύο συνόλων

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



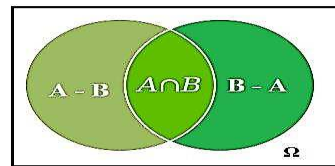
#### Τομή δύο συνόλων

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



#### Διαφορά δύο συνόλων

$$A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

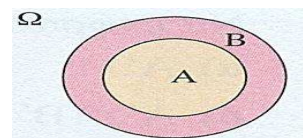


#### Το κενό σύνολο

$\emptyset = \{ \}$  Είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Ισχύει ότι  $\emptyset \subseteq A$  για κάθε σύνολο  $A$

#### Υποσύνολο

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$



#### Ισότητα δύο συνόλων

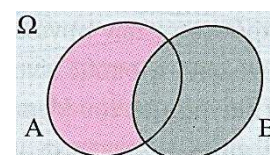
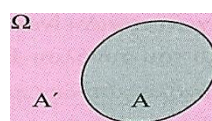
$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

#### Δυναμοσύνολο του A

$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$  Είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A

#### Συμπλήρωμα

$$\bar{A} = \{x \in \Omega \wedge x \notin A\}$$



#### Συμμετρική διαφορά

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

## 9.14 Νόμοι της άλγεβρας Boole

### Προσεταιριστικοί νόμοι

$$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap (A \cap \Gamma), \quad A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup (A \cup \Gamma)$$

### Αντιμεταθετικοί νόμοι

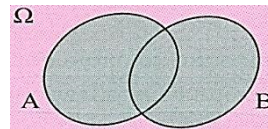
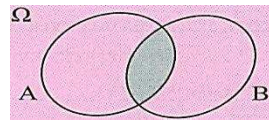
$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

### Επιμεριστικοί νόμοι

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma), \quad A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

### Νόμοι De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

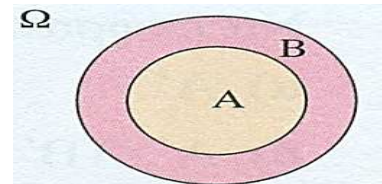


### Νόμοι της αυτοδυναμίας

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

### Θεωρήματα

- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$
- $A \cap \{ \} = \{ \}$
- $A \cup \{ \} = A$
- $\overline{\{ \}} = \Omega$
- $\overline{\Omega} = \{ \}$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $A \cap \overline{A} = \{ \}$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta A = \{ \}$
- $(A \Delta B) \Delta \Gamma = A \Delta (B \Delta \Gamma)$
- $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
- $A \vee \left\{ \begin{array}{l} A \cup B = A \cup \Gamma \\ A \cap B = A \cap \Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow B = \Gamma$
- Οι ακόλουθες 4 προτάσεις είναι ισοδύναμες.  
 $A \subseteq B, \quad A \cap B = A, \quad A - B = \{ \}, \quad A \cup B = B$



### Γενικεύσεις των νόμων του De Morgan

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

## 9.15 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\text{An } A \subseteq B \subseteq \Omega \text{ τότε } P(A) \leq P(B)$



Η θεωρία των πιθανοτήτων οφείλει τη γέννηση της στην τάση των ανθρώπων να παίζουν τυχερά παίγνια παρά τους κάθε φορά ισχύοντες περιοριστικούς νόμους. Δημοφιλέστερο παίγνιο είναι οι κύβοι ή ζάρια. Η λέξη προέρχεται από την αραβική λέξη az-zahr (κύβοι για παίξιμο) από την οποία προκύπτουν η γαλλική hazard, η

αγγλική hazard και η γερμανική hasardpiel. Με τη θεωρία πιθανοτήτων ασχολήθηκαν πριν από τον 16<sup>ο</sup> αιώνα οι Ιταλοί μαθηματικοί:

- Faccioli (1494)
- Tartaglia (1556)
- Peverone (1558)

και μεταγενέστερα οι:

- James Bernoulli (1654–1705)
- Pascal (1623–1662)
- Fermat (1608–1665)

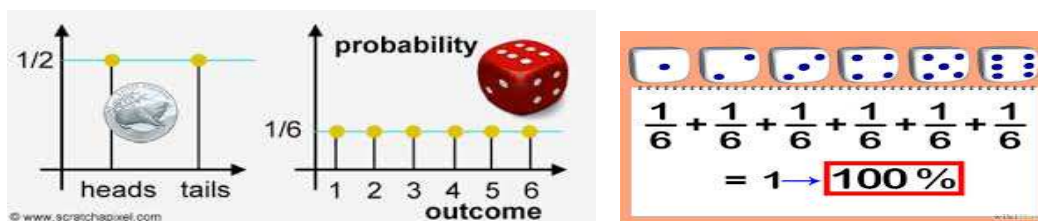
Ο Laplace εργάστηκε για την ανάπτυξη του λογισμού των πιθανοτήτων. Σημαντική ήταν η συμβολή των:

- Chebyshev
- Markov
- Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903–1988)
- Borrell.

### Εφαρμογή 62

Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή όταν ρίχνεται ένα κέρμα, είναι  $\frac{1}{2}$

Η πιθανότητα να έλθει στην πάνω επιφάνεια κύβου που στρίβεται, το 4 είναι  $\frac{1}{6}$



### Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Δυο ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  του δειγματικού χώρου  $\Omega$  ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** αν και μόνο αν  $A \cap B = \{ \}$

Άρα τα  $A$ ,  $B$  είναι ασυμβίβαστα αν και μόνο αν  $P(A \cap B) = P(\{ \}) = 0$

Άρα, αν τα  $A$ ,  $B$  είναι ασυμβίβαστα, τότε  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

### Δεσμευμένη πιθανότητα

Αν  $A$ ,  $B$  είναι δυο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) \neq 0$ , τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του  $B$  με δεδομένο το  $A$  συμβολίζεται ως  $P(B/A)$

$$\text{και ορίζεται ως } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

### Πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Η πιθανότητα να συμβούν το ενδεχόμενο  $A$  και το ενδεχόμενο  $B$ , δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A \cap B$ , ισούται με την πιθανότητα του ενός από τα δυο

ενδεχόμενα, πολλαπλασιασμένη επί την πιθανότητα του άλλου, όταν το 1<sup>ο</sup> έχει πραγματοποιηθεί.

### Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δυο ενδεχόμενα  $A, B$  με  $P(A) \cdot P(B) \neq 0$  ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν  $P(A/B) = P(A)$  και  $P(B/A) = P(B)$

### Παρατήρηση 13

Δυο ενδεχόμενα  $A, B$  με  $P(A) \cdot P(B) \neq 0$  είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A/B) = P(A)$
- $P(B/A) = P(B)$

### Παρατήρηση 14 (Ανισότητα Bonferroni)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

### Παρατήρηση 15 (Ανισότητα Boole ή ιδιότητα υποπροσθετικότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

		AND	OR	XOR
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \nabla q$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

### Τυπολόγιο πιθανοτήτων

- Για οποιοδήποτε γεγονός (ή ενδεχόμενο ή συμβάν)  $A$  του δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι  $0 \leq p(A) \leq 1$
- Η πιθανότητα του βέβαιου γεγονότος είναι  $p(\Omega) = 1$
- Εξ' ορισμού, η πιθανότητα του κενού συνόλου είναι μηδέν, δηλαδή  $p(\emptyset) = 0$
- Για οποιοδήποτε γεγονός  $A$  του  $\Omega$ , ισχύει ότι  $p(A) + p(A') = 1$
- Αν τα γεγονότα  $A, B$  του  $\Omega$  είναι **ξένα μεταξύ τους** (ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** ή **ασυμβίβαστα**) τότε  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Αν τα γεγονότα  $A, B, \Gamma$  του  $\Omega$  είναι **ξένα μεταξύ τους** ανά δυο, τότε  $p(A \cup B \cup \Gamma) = p(A) + p(B) + p(\Gamma)$
- Αν  $A, B$  οποιαδήποτε τυχαία γεγονότα του  $\Omega$ , τότε:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = p(A \cap B')$$

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = p(B \cap A')$$

- Για οποιαδήποτε γεγονότα  $A, B, \Gamma$  του  $\Omega$  ισχύει ότι

$$p(A \cup B \cup \Gamma) = p(A) + p(B) + p(\Gamma) \\ - p(A \cap B) - p(A \cap \Gamma) - p(B \cap \Gamma) \\ + p(A \cap B \cap \Gamma)$$

- Αν  $A, B$  γεγονότα του  $\Omega$  και  $A \subset B$  τότε  $p(A) < p(B)$
- Αν  $A, B$  γεγονότα του  $\Omega$  και  $A \subseteq B$  τότε  $p(A) \leq p(B)$
- Για τη δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη ή a posteriori ή εκ των υστέρων) πιθανότητα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} p(A/B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \\ p(B/A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \end{aligned} \right\} p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$$

- Αν τα γεγονότα  $A, B$  του  $\Omega$  είναι **ανεξάρτητα** τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot \cancel{p(B)}}{\cancel{p(B)}} = p(A)$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\cancel{p(A)} \cdot p(B)}{\cancel{p(A)}} = p(B)$$

- Αν τα γεγονότα  $A, B$  του  $\Omega$  είναι **ανεξάρτητα**, τότε είναι ανεξάρτητα και τα γεγονότα:  $A', B'$  δηλαδή  $p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B')$

$$A, B' \text{ δηλαδή } p(A \cap B') = p(A) \cdot p(B')$$

$$A', B \text{ δηλαδή } p(A' \cap B) = p(A') \cdot p(B)$$

- Για οποιαδήποτε γεγονότα  $A, B, \Gamma$  του  $\Omega$  ισχύει ότι

$$p(A \cap B \cap \Gamma) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(\Gamma/A \cap B)$$

- Για οποιαδήποτε τυχαία γεγονότα  $A, B$  του  $\Omega$  ισχύει ότι:

$$p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$$

$$p(A \cap B) \leq p(B) \leq p(A \cup B)$$

- Τα γεγονότα  $A, B, \Gamma$  του  $\Omega$  λέγονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις:  $p(A \cap B \cap \Gamma) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(\Gamma)$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap \Gamma) = p(A) \cdot p(\Gamma)$$

$$p(B \cap \Gamma) = p(B) \cdot p(\Gamma)$$

### Παρατήρηση 16

Η ανεξαρτησία τριών συμβάντων λαμβανομένων ανά δυο, δεν εξασφαλίζει την τέλεια ανεξαρτησία τους.



### Εφαρμογή 63

Νικητής σε τουρνουά ανακηρύσσεται όποιος από τους 2 παίχτες κερδίσει 2 αγώνες. Να γραφεί ο δειγματικός χώρος.

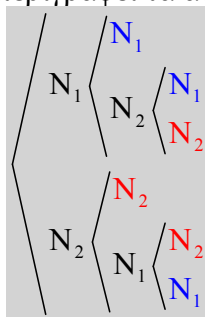
Αν  $N_1$  σημαίνει νίκη του 1<sup>ου</sup> παίχτη και  $N_2$  νίκη του 2<sup>ου</sup> παίχτη, τότε όλα τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τα ακόλουθα.

1 <sup>ος</sup> Αγώνας	2 <sup>ος</sup> Αγώνας	3 <sup>ος</sup> Αγώνας	Νικητές
$N_1$	$N_1$		$N_1$
$N_1$	$N_2$	$N_1$	$N_1$
$N_1$	$N_2$	$N_2$	$N_2$
$N_2$	$N_2$		$N_2$
$N_2$	$N_1$	$N_2$	$N_2$
$N_2$	$N_1$	$N_1$	$N_1$

Άρα, ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  είναι ο ακόλουθος.

$$\Omega = \{N_1 - N_1, N_1 - N_2 - N_1, N_1 - N_2 - N_2, N_2 - N_2, N_2 - N_1 - N_2, N_2 - N_1 - N_1\}.$$

Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω είναι το ακόλουθο.



### Παρατήρηση 17

Η πιθανότητα να κερδίσει ο κάθε παίχτης το τουρνουά, δοθέντος ότι έχει νικήσει στον 1<sup>ο</sup> αγώνα, είναι  $\frac{2}{3}$ . Δηλαδή, ορίζω τα γεγονότα:

Γεγονός A: {Νίκη στον 1<sup>ο</sup> αγώνα}, Γεγονός B: {Νίκη στο τουρνουά} και από το

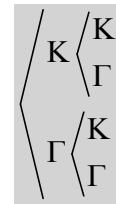
δεντροδιάγραμμα προκύπτει ότι  $p(B/A) = \frac{2}{3}$

**Εφαρμογή 64**

Να γραφεί ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  για κέρμα που ρίχνεται 2 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξουν 2 ίδιες ενδείξεις;

Είναι  $\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$  Θεωρώ το ευνοϊκό ενδεχόμενο να υπάρξουν 2

ίδιες ενδείξεις  $A = \{KK, \Gamma\Gamma\}$  Άρα,  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = 0,5$



Το δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω, είναι το παραπάνω.

**Εφαρμογή 65**

Από τράπουλα 52 καρτών, τραβάω μία κάρτα. Υπολογίστε την πιθανότητα των ακόλουθων ενδεχομένων:

A: «Εμφάνιση κάρτας με κούπα»

B: «Εμφάνιση κάρτας με τον αριθμό 5»

Γ: «Εμφάνιση της κάρτας κούπα με τον αριθμό 5».

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{52}$$

**Εφαρμογή 66**

Ποια είναι η πιθανότητα στη ρίψη ενός ζαριού να εμφανισθεί το 4;

Ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Όλα τα απλά γεγονότα του δειγματικού χώρου θεωρούνται ισοπίθانا.

Άρα, αν γεγονός  $A = \{\text{εμφάνιση του αριθμού 4}\}$  τότε θα είναι  $P(A) = \frac{1}{6}$

**Εφαρμογή 67**

Ζάρι ρίχνεται μία φορά. Βρείτε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$  και υπολογίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

A: «Εμφάνιση άρτιου αριθμού»

B: «Εμφάνιση περιττού αριθμού»

Γ: «Εμφάνιση αριθμού μικρότερου του 5»

Δ: «Εμφάνιση αριθμού μεγαλύτερου από 7»

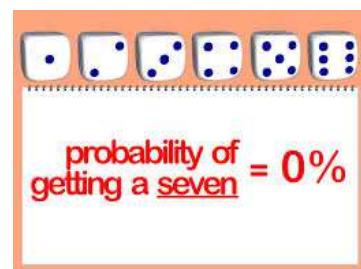
Ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$B = \{1, 3, 5\} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\Gamma = \{1, 2, 3, 4\} \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta = \{ \} \quad P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$



**Εφαρμογή 68**

Βγάζω 2 μπαλάκια, το ένα μετά το άλλο χωρίς επανατοποθέτηση, από κάλπη με 20 λευκά και 12 μαύρα. Ποια η πιθανότητα να βγει πρώτα λευκό και μετά μαύρο; Θεωρώ τα ενδεχόμενα:  $\Lambda$ : «το μπαλάκι είναι λευκό»

$M$ : «το μπαλάκι είναι μαύρο»

Συνολικά, περιέχονται 32 μπαλάκια στην κάλπη.

20 Λευκά 12 Μαύρα
----------------------

Η πιθανότητα να είναι το 1<sup>ο</sup> μπαλάκι λευκό, είναι  $\frac{20}{32}$

Η πιθανότητα να είναι το 2<sup>ο</sup> μπαλάκι μαύρο, ενώ το 1<sup>ο</sup> ήταν λευκό, είναι  $\frac{12}{31}$

$$\text{Ισχύει ότι } p(\Lambda \cap M) = p(\Lambda) p(M/\Lambda) = \frac{20}{32} \frac{12}{31} = \frac{5}{8} \frac{12}{31} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 31} = \frac{15}{62}$$

**Εφαρμογή 69**

Από τους 600 προς πώληση λαμπτήρες, οι 200 κατασκευάστηκαν στο εργοστάσιο  $A$ , οι 250 στο  $B$  και οι 150 στο  $\Gamma$ . Αν η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να είναι λειτουργικός είναι 0.93, 0.96 και 0.88 για τα εργοστάσια  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, ποια είναι η πιθανότητα αν πωληθεί ένας από τους 600 αυτός να είναι λειτουργικός;

Εργοστάσιο $A$	Εργοστάσιο $B$	Εργοστάσιο $\Gamma$	Σύνολο
200 λαμπτήρες	250 λαμπτήρες	150 λαμπτήρες	600 λαμπτήρες
93% λειτουργικοί	96% λειτουργικοί	88% λειτουργικοί	
186 Λειτουργικοί	240 Λειτουργικοί	132 Λειτουργικοί	558 Λειτουργικοί

$$\text{Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι } p = \frac{186 + 240 + 132}{600} = \frac{558}{600} = \frac{93}{100} = 0,93$$

**Εφαρμογή 70**

Με βάση τη σειρά γέννησης των παιδιών τρίτεκνης οικογένειας, υπολογίστε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  $A$ : «Η οικογένεια έχει ακριβώς ένα αγόρι»,

$B$ : «Η οικογένεια έχει το 1<sup>ο</sup> παιδί αγόρι»,

$\Gamma$ : «Η οικογένεια έχει τουλάχιστον ένα αγόρι»,

$\Delta$ : «Η οικογένεια έχει το πολύ ένα αγόρι».

Ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{AAA, AAK, AKK, AKA, KKK, KAA, KKA, KAK\}$

όπου  $A$  η γέννηση αγοριού και  $K$  η γέννηση κοριτσιού.

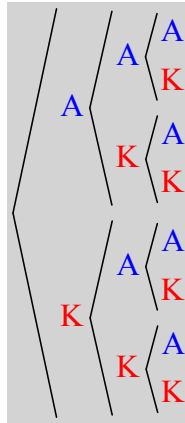
$$A = \{AKK, KAK, KKA\} \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$B = \{AAA, AAK, AKK, AKA\} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\Gamma = \Omega - \{KKK\} \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

$$\Delta = \{AKK, KAK, KKA, KKK\} \quad P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Το αντίστοιχο δέντροδιάγραμμα είναι το ακόλουθο.



### Εφαρμογή 71

Από κάλπη με 2 κόκκινες, 3 κίτρινες και 2 πράσινες μπάλες, λαμβάνω διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση 2. Ποια είναι η πιθανότητα:

(α) και οι 2 μπάλες να είναι κίτρινες

(β) η μία μπάλα να είναι κίτρινη και η άλλη κόκκινη;

Η κάλπη περιέχει 7 μπάλες. Η επιλογή των 2 από τις 7 γίνεται με  $\binom{7}{2}$  τρόπους.

(α) Η επιλογή των 2 κίτρινων από τις 3 κίτρινες μπάλες της κάλπης, γίνεται με

$$\binom{3}{2} \text{ τρόπους. Άρα, } p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{2!}{7!} = \frac{3}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

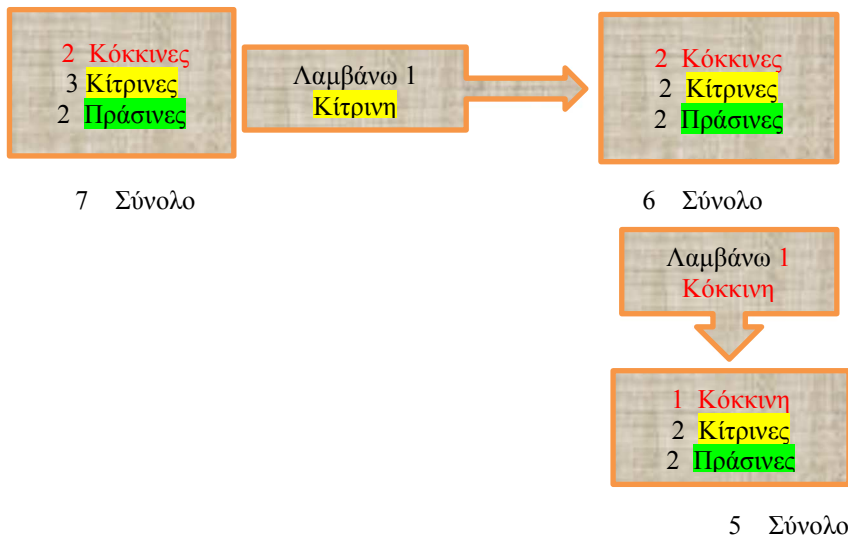
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $p = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$  διότι, αρχικά από τις 7 μπάλες

(εκ των οποίων οι 3 κίτρινες), επιλέγεται η μία κίτρινη με πιθανότητα  $\frac{3}{7}$

Ακολουθώντας, από τις 6 μπάλες που απομένουν (εκ των οποίων οι 2 κίτρινες), η πιθανότητα επιλογής μίας κίτρινης είναι  $\frac{2}{6}$

(β) Η επιλογή της μίας κίτρινης από τις 3 κίτρινες μπάλες, γίνεται με  $\binom{3}{1}$  τρόπους. Ομοίως, η επιλογή της μίας κόκκινης από τις 2 κόκκινες μπάλες, γίνεται με  $\binom{2}{1}$  τρόπους. Η επιλογή της κίτρινης δεν εξαρτάται ούτε επηρεάζει την επιλογή της κόκκινης μπάλας.

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{7!}{2!5!}} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{6 \cdot 7}{2}} = \frac{2}{7}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\begin{aligned}
 & p(\text{κίτρινη} \cap \text{κόκκινη}) + p(\text{κόκκινη} \cap \text{κίτρινη}) = \\
 & p(\text{κίτρινη}) p(\text{κόκκινη} / \text{κίτρινη}) + p(\text{κόκκινη}) p(\text{κίτρινη} / \text{κόκκινη}) = \\
 & \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

**Εφαρμογή 72**

Από 8 πλακέτες εκ των οποίων οι 2 ελαττωματικές, επιλέγονται 2. Ποια η πιθανότητα η μία ακριβώς να είναι ελαττωματική;

Οι 2 από τις 8 πλακέτες, επιλέγονται με  $\binom{8}{2}$  τρόπους. Η ελαττωματική επιλέγεται

από τις 2 ελαττωματικές, με  $\binom{2}{1}$  τρόπους. Ομοίως, η κανονική επιλέγεται από τις 6

κανονικές, με  $\binom{6}{1}$  τρόπους.

$$8 \left\langle \begin{array}{l} 2E \quad \leftarrow 1E \\ 6K \quad \leftarrow 1K \end{array} \right\rangle 2$$

Η επιλογή της ελαττωματικής είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της

$$\text{κανονικής. Άρα, } p = \frac{\binom{6}{1} \binom{2}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{\frac{8!}{2! 6!}} = \frac{6 \cdot 2}{\frac{7 \cdot 8}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 4} = \frac{6}{7 \cdot 2} = \frac{3}{7}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\begin{aligned}
 & p(K_1 \cap E_2) + p(E_1 \cap K_2) = \\
 & p(K_1) p(E_2 / K_1) + p(E_1) p(K_2 / E_1) = \\
 & \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

**Εφαρμογή 73**

Από κάλπη με 6 κάρτες (αριθμημένες από 1 ως 6), επιλέγονται 2. Ποια η πιθανότητα στη μία κάρτα να υπάρχει άρτιος και στην άλλη περιττός αριθμός;

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap \Pi) &= P(A)P(\Pi / A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\ P(\Pi \cap A) &= P(\Pi)P(A / \Pi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned} \right\} P_{O\Lambda} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Οι 2 κάρτες επιλέγονται από τις 6, με  $\binom{6}{2}$  τρόπους.

Η επιλογή της μίας από τις 3 άρτιες, γίνεται με  $\binom{3}{1}$  τρόπους.

Η επιλογή της μίας από τις 3 περιττές, γίνεται με  $\binom{3}{1}$  τρόπους.

Η επιλογή της άρτιας, δεν έχει σχέση με την επιλογή της περιττής κάρτας.

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3 \cdot 3}{\frac{6!}{2!4!}} = \frac{3 \cdot 3}{\frac{5 \cdot 6}{2!}} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5}$$

#### Εφαρμογή 74

5 ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν 5 διαφορετικές ενδείξεις;

Σε κάθε ρίψη του ζαριού υπάρχουν 6 ισοπίθανα δυνατά ενδεχόμενα. Άρα, συνολικά μετά από τις 5 ρίψεις ο δειγματικός χώρος έχει  $6^5$  δυνατά ενδεχόμενα, διότι τα αποτελέσματα της μίας ρίψης δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα των υπολοίπων ρίψεων. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι  $6!$  διότι:

Κατά την 1<sup>η</sup> ρίψη οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 6.

Κατά τη 2<sup>η</sup> ρίψη οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 5.

Κατά την 3<sup>η</sup> ρίψη οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 4.

Κατά την 4<sup>η</sup> ρίψη οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 3.

Κατά την 5<sup>η</sup> και τελευταία ρίψη οι υποψήφιοι αριθμοί είναι 2.

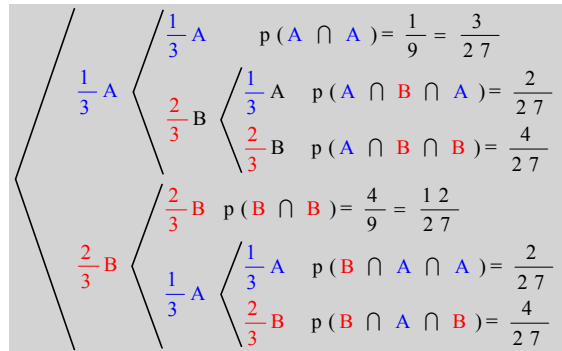
$$\text{Άρα, } p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{6 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5}{54}$$

Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τις ανωτέρω ρίψεις είναι το ακόλουθο.

#### Εφαρμογή 75

Η πιθανότητα να κερδίσει σε ένα σετ ο Α τον Β, είναι  $1/3$ . Νικά όποιος κερδίσει 2 συνεχόμενα σετ. Ποια η πιθανότητα ο Α κερδίσει τα 2 πρώτα σετ;

Η νίκη του Α, στο 1<sup>ο</sup> σετ δεν επηρεάζει την έκβαση του 2<sup>ου</sup> σετ. Άρα, η πιθανότητα νίκης του, δηλαδή το  $1/3$ , παραμένει σε κάθε σετ ίδια. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ . Το σχετικό δεντροδιάγραμμα που περιγράφει τα ανωτέρω, είναι το ακόλουθο.



### Εφαρμογή 76

Από 6 πλοιάρχους και 6 μηχανικούς, συγκροτούνται 2 εξαμελείς ομάδες. Ποια η πιθανότητα, κάθε ομάδα να έχει ίδιο αριθμό πλοιάρχων και μηχανικών;

Κάθε ομάδα αποτελείται από 3 πλοιάρχους και 3 μηχανικούς. Η επιλογή των 6 ατόμων της 1<sup>ης</sup> ομάδας (από τους 12 ναυτικούς), γίνεται με  $\binom{12}{6}$  τρόπους και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή όσων θα απαρτίζουν τη 2<sup>η</sup> ομάδα. Μετά από τη συμπλήρωση της 1<sup>ης</sup> ομάδας, απομένουν 6 ναυτικοί ώστε να συμπληρώσουν τη 2<sup>η</sup> ομάδα και αυτό γίνεται με  $\binom{6}{6} = 1$  τρόπο.

Οι 3 πλοίαρχοι επιλέγονται από τους 6 πλοιάρχους, με  $\binom{6}{3}$  τρόπους.

Οι 3 μηχανικοί επιλέγονται από τους 6 μηχανικούς, με  $\binom{6}{3}$  τρόπους.

$$p = \frac{\binom{6}{3} \binom{6}{3}}{\binom{12}{6} \binom{6}{6}} = \frac{6!}{3! 3!} \frac{6!}{3! 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{3!}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}$$

$$\frac{\cancel{4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{7 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 11} = \frac{100}{231} = 0,432900 \cong 0,433$$

Δηλαδή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου 43,3 %

### Εφαρμογή 77

Ποια είναι η πιθανότητα για νόμισμα που ρίχνεται 11 φορές, να φέρει ακριβώς 5 φορές κεφαλή;

Η πιθανότητα εμφάνισης κεφαλής είναι 0,5 και ισούται με την πιθανότητα εμφάνισης γραμμάτων (συμπληρωματικά ενδεχόμενα). Από τις 11 ρίψεις, κεφαλή εμφανίζεται τις 5 φορές, άρα γράμματα εμφανίζονται 6 φορές. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα, από τις δοκιμές Bernoulli, είναι

$$p = \binom{11}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \binom{11}{5} \frac{1}{2^{11}} = \frac{11!}{5! \cdot 6! \cdot 2^{11}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{5! \cdot 2^{11}} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11}{5! \cdot 2^7}$$

$$\frac{7 \cdot 9 \cdot \cancel{5} \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cancel{5} \cdot 2^7} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 11}{2^{11}}$$

**Εφαρμογή 78**

Ποια η πιθανότητα για ζάρι που ρίχνεται 11 φορές, να φέρει την ένδειξη 3 ακριβώς 5 φορές;

Η πιθανότητα εμφάνισης 3 σε κάθε ρίψη είναι  $\frac{1}{6}$ , άρα η συμπληρωματική της πιθανότητα, είναι  $\frac{5}{6}$ . Σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $\binom{11}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^6$

**Εφαρμογή 79**

2 κέρματα ρίχνονται ταυτόχρονα. Αν το ένα έφερε γράμματα, ποια είναι η πιθανότητα να φέρει και το άλλο γράμματα;

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  που προκύπτει από τη ρίψη 2 κερμάτων είναι  $\Omega = \{KK, ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}$ . Έστω τα γεγονότα: A: «ένα από τα 2 φέρνει γράμματα»

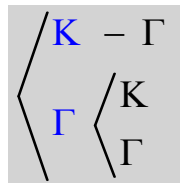
B: «και τα 2 φέρνουν γράμματα»

Είναι  $A = \{ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}$  και  $B = \{ΓΓ\}$ , άρα,  $A \cap B = \{ΓΓ\}$

Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας είναι  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$\text{Είναι } p = \frac{N(B)}{N(A)} = \frac{1}{3}$$

**Εφαρμογή 80**

Ποια η πιθανότητα από τράπουλα 52 καρτών, αν τραβήξω 2 κάρτες να είναι κούπες;

Οι δυνατές περιπτώσεις επιλογής των 2 καρτών, είναι  $\binom{52}{2}$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις (επέλεξα 2 κούπες), είναι  $\binom{13}{2}$

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{13!}{2! 11!}}{\frac{52!}{2! 50!}} = \frac{12 \cdot 13}{51 \cdot 52} = \frac{12 \cdot 13}{51 \cdot 52} = \frac{6 \cdot 13}{51 \cdot 26} = \frac{6}{51 \cdot 2} = \frac{3}{51}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Ορίζω τα ενδεχόμενα  $K_1$ : «Εμφάνιση κούπας την 1<sup>η</sup> φορά»

$K_2$ : «Εμφάνιση κούπας τη 2<sup>η</sup> φορά»

$$p(K_1 \cap K_2) = p(K_1) p(K_2/K_1) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} = \frac{1}{4} \frac{12}{51} = \frac{3}{51}$$

**Εφαρμογή 81**

Από τις 7 Ferrari που πέρασαν έξω από τη σχολή, οι 2 ήταν κόκκινες. Ποια η πιθανότητα να διήλθαν διαδοχικά, η μία ακριβώς μετά την άλλη;

Υπάρχουν  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$  τρόποι να διέλθουν τα αυτοκίνητα έξω από τη σχολή. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 6 (θέσεις 1<sup>ου</sup>-2<sup>ου</sup> αυτοκινήτου: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7). Άρα,  $p = \frac{6}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{\frac{7!}{2!5!}} = \frac{6 \cdot 7}{2! \cdot 7} = \frac{2}{7}$

**Εφαρμογή 82**

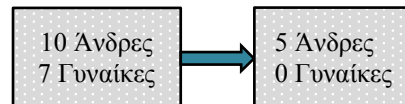
Από 10 άντρες και 7 γυναίκες, επιλέγονται 5 ένορκοι. Ποια η πιθανότητα οι ένορκοι να είναι: (α) όλοι άντρες

(β) 3 άντρες και 2 γυναίκες

(γ) τουλάχιστον 3 γυναίκες;

$$(α) \frac{\binom{10}{5}}{\binom{17}{5}} = \frac{\frac{10!}{5!5!}}{\frac{17!}{5!12!}} = \frac{\frac{10!}{17!}}{\frac{12!}{5!}} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 17} =$$

$$\frac{6 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 17} = \frac{60 \cdot 9}{13 \cdot 60 \cdot 17} = \frac{9}{13 \cdot 17}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ορίζω τα ενδεχόμενα  $A_1$ : «Άνδρας ο 1<sup>ος</sup> ένορκος»

$A_2$ : «Άνδρας ο 2<sup>ος</sup> ένορκος»

$A_3$ : «Άνδρας ο 3<sup>ος</sup> ένορκος»

$A_4$ : «Άνδρας ο 4<sup>ος</sup> ένορκος»

$A_5$ : «Άνδρας ο 5<sup>ος</sup> ένορκος»

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$$

$$p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2)p(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3)p(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

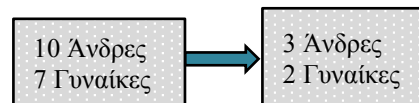
$$\frac{10}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} =$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 6}{17 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 13} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 3}{17 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{9}{17 \cdot 13}$$

(β)

$$\frac{\binom{10}{3} \binom{7}{2}}{\binom{17}{5}} = \frac{\frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{7!}{2!5!}}{\frac{17!}{5!12!}} = \frac{\frac{10!}{3!2!}}{\frac{17!}{12!}} = \frac{10!}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2!} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} =$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 90}{13 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17} = \frac{90}{13 \cdot 17}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ορίζω τα ενδεχόμενα Α: «Επιλέγεται άνδρας ένορκος»

Γ: «Επιλέγεται γυναίκα ένορκος»

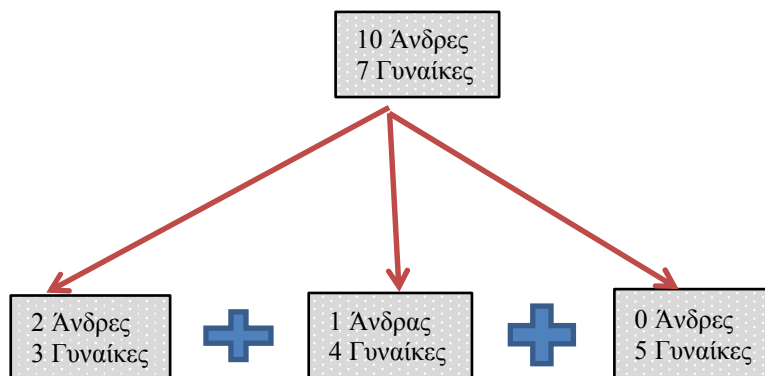
Η παράμετρος  $\frac{5!}{3! 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} = 10$  περιγράφει τους τρόπους επιλογής των ενόρκων. Η

πιθανότητα είναι  $\frac{5!}{3! 2!} p(A \cap A \cap A \cap \Gamma \cap \Gamma) = 10 \frac{10}{17} \frac{9}{16} \frac{8}{15} \frac{7}{14} \frac{6}{13} = \frac{90}{17 \cdot 13}$

$$(\gamma) \frac{\binom{7}{3} \binom{10}{2} + \binom{7}{4} \binom{10}{1} + \binom{7}{5} \binom{10}{0}}{\binom{17}{5}} = \frac{\frac{7!}{3! 4!} \frac{10!}{2! 8!} + \frac{7!}{4! 3!} \frac{10!}{1! 9!} + \frac{7!}{5! 2!} \frac{10!}{0! 10!}}{\frac{17!}{5! 12!}} =$$

$$\frac{\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} \frac{9 \cdot 10}{2!} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} 10 + \frac{6 \cdot 7}{2!} 1}{\frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{5!}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 45 + 5 \cdot 7 \cdot 10 + 21}{\frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{1575 + 350 + 21}{\frac{13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 4}} =$$

$$\frac{1575 + 350 + 21}{13 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 17} = \frac{1575 + 371}{182 \cdot 34} = \frac{1946}{6188} = \frac{973}{3094} = 0,31447964 \approx 31,4\%$$



### Εφαρμογή 83

Ποια η πιθανότητα από τράπουλα 52 καρτών, 4 από τις 6 κάρτες να είναι άσσοι;

Οι 6 κάρτες επιλέγονται από τις 52 με  $\binom{52}{6}$  τρόπους.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι  $\binom{4}{4} \binom{52-4}{2} = \binom{4}{4} \binom{48}{2} = \binom{48}{2}$  διότι οι 4 άσσοι

επιλέγονται από τους 4 άσσους με  $\binom{4}{4} = 1$  τρόπο και οι υπόλοιπες 2 κάρτες (που απομένουν προς συμπλήρωση της εξάδας) επιλέγονται από τις εναπομείναντες  $52 - 4 = 48$  κάρτες με  $\binom{48}{2}$  τρόπους. Άρα,

$$p = \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{6}} = \frac{48!}{2! 46!} = \frac{\cancel{47} \cdot \cancel{48}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{47} \cdot \cancel{48} \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{1}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$\frac{\cancel{7} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{4 \cdot 6}{49 \cdot 10 \cdot 17 \cdot 52} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{49 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 26} = \frac{3}{49 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 13} = \dots$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Οι 6 κάρτες (4 άσσοι και 2 οποιεσδήποτε άλλες) εξάγονται τυχαία κατά  $\frac{6!}{4! 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$  διαφορετικούς τρόπους. Για 4 φύλλα που τυχαία εξάγονται, η πιθανότητα να είναι και τα 4 άσσοι είναι  $\frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{2}{50} \frac{1}{49}$

Τα υπόλοιπα 2 φύλλα, προς συμπλήρωση της εξάδας, δύναται να είναι οποιαδήποτε από τα 48 ( $52-4=48$ ) που απομένουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $15 \left[ \frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{2}{50} \frac{1}{49} \right] \frac{\cancel{48}}{\cancel{48} \cancel{47}} = 15 \frac{1}{13} \frac{1}{17} \frac{1}{25} \frac{1}{49} = \frac{15}{13 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 49} = \frac{3}{13 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 49}$

### Εφαρμογή 84

Από κούτα με 12 πλακέτες (4 είναι ελαττωματικές), επιλέγω 3. Ποια η πιθανότητα να είναι λειτουργικές;

Η πιθανότητα η 1<sup>η</sup> να είναι λειτουργική, είναι  $\frac{8}{12}$

Η πιθανότητα η 2<sup>η</sup> να είναι λειτουργική, αν η 1<sup>η</sup> είναι λειτουργική, είναι  $\frac{7}{11}$

Αν οι 1<sup>η</sup>, 2<sup>η</sup> είναι λειτουργικές, η πιθανότητα να είναι λειτουργική η 3<sup>η</sup> είναι  $\frac{6}{10}$

Θεωρώ τα γεγονότα: Α: «Η 1<sup>η</sup> πλακέτα είναι λειτουργική»

Β: «Η 2<sup>η</sup> πλακέτα είναι λειτουργική»

Γ: «Η 3<sup>η</sup> πλακέτα είναι λειτουργική»

Από τη γενικευμένη πρόταση του πολλαπλασιασμού, είναι

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(\Gamma/A \cap B) =$$

$$\frac{8}{12} \frac{7}{11} \frac{6}{10} = \frac{\cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 11 \cdot 5} = \frac{14}{55}$$

$$12 \begin{cases} 4E \\ 8A - 3A \end{cases}$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος } p = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8!}{3! 5!} \cdot \frac{8!}{12!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 8}{10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{7 \cdot 8}{10 \cdot 11 \cdot \cancel{2}} = \frac{7 \cdot 4}{10 \cdot 11} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 11} = \frac{14}{55}$$

### Εφαρμογή 85

Οι μηχανές Α, Β, Γ παράγουν τα 50%, 30%, 20% των λαμπτήρων με ποσοστά ελαττωματικών ανά μηχανή, 3%, 4%, 5%, αντίστοιχα.

(α) Ποια η πιθανότητα αν λάβω έναν λαμπτήρα, να είναι ελαττωματικός;

(β) Αν ένας λαμπτήρας που επιλεγεί είναι ελαττωματικός, ποια η πιθανότητα να κατασκευάστηκε στη μηχανή Α;

(α) Ορίζω τα ενδεχόμενα: Χ: «ο λαμπτήρας είναι ελαττωματικός»

Α: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε στη μηχανή Α»

Β: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε στη μηχανή Β»

Γ: «ο λαμπτήρας κατασκευάστηκε στη μηχανή Γ»

Αν ο λαμπτήρας που επελέγη είναι ελαττωματικός, μπορεί να προέρχεται από την Α, ή από τη Β ή από τη Γ μηχανή. Από τον τύπο του Bayes ισχύει ότι

$$P(X) = P(A)P(X/A) + P(B)P(X/B) + P(\Gamma)P(X/\Gamma)$$

$$= \frac{5\cancel{0}}{100} \frac{3}{10\cancel{0}} + \frac{3\cancel{0}}{100} \frac{4}{10\cancel{0}} + \frac{2\cancel{0}}{100} \frac{\cancel{5}}{10\cancel{0}} = 0,015 + 0,012 + 0,010 = 0,037$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 3,7 %

Μηχανή	Ποσοστά παραγωγής	Ποσοστά ελαττωματικών ανά μηχανή	Πιθανότητα ελαττωματικών ανά μηχανή	Τελική πιθανότητα ελαττωματικών
A	50%	3%	$\frac{150}{100 \cdot 100}$	$\frac{370}{100 \cdot 100} = \frac{37}{1.000} = 0,037$
B	30%	4%	$\frac{120}{100 \cdot 100}$	
Γ	20%	5%	$\frac{100}{100 \cdot 100}$	

$$(\beta) \text{ Είναι } p(A/X) = \frac{p(A \cap X)}{p(X)} = \frac{15\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \cdot 1\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{15}{37}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Από τον τύπο του Bayes ισχύει ότι:

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B) + P(\Gamma) \cdot P(X/\Gamma)} =$$

$$\frac{0,50 \cdot 0,03}{0,50 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,20 \cdot 0,05} = \frac{15}{37}$$

### Εφαρμογή 86

Αν το άθροισμα ενδείξεων 2 ζαριών είναι 6, ποια η πιθανότητα το ένα ζάρι να έφερε την ένδειξη 2;

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από 36 στοιχεία.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

A: «το άθροισμα ενδείξεων είναι 6», άρα

$$A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}, \text{ συνεπώς } P(A) = \frac{5}{36}$$

**B:** «το 2 εμφανίζεται σε ένα τουλάχιστον ζάρι». Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της  $P(B/A) = ?$ ; Είναι  $A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$ , άρα  $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$$\text{Άρα, } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

### Εφαρμογή 87

Από δοχείο με 5 σφαιρίδια (αριθμημένα από 1 ως 5) επιλέγονται 2, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα να μην επιλεγεί το σφαιρίδιο 4;

Θεωρώ τα γεγονότα  $A$ : {Δεν επιλέγεται το σφαιρίδιο 4 την 1<sup>η</sup> φορά}

$B$ : {Δεν επιλέγεται το σφαιρίδιο 4 την 2<sup>η</sup> φορά}

Τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα δηλαδή η πραγματοποίηση ή η μη πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση ή τη μη πραγματοποίηση του άλλου.

$$\text{Άρα, } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

### Εφαρμογή 88

Αν τα γεγονότα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα και  $p(A) = \frac{1}{5}$ ,  $p(B) = \frac{1}{2}$ , υπολογίστε την  $p(A / A \cup B)$

$$\begin{aligned} \text{Από } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ έπεται ότι } P(A / (A \cup B)) &= \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \\ \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{10}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 89

Το  $\Omega = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma K K, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$  είναι ο δειγματικός χώρος για κέρμα που ρίχθηκε 3 φορές. Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

$A$ : «στην 1<sup>η</sup> ρίψη εμφανίζεται  $K$ », άρα  $A = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma\}$ ,

$$\text{συνεπώς } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$B$ : «στη 2<sup>η</sup> ρίψη εμφανίζεται  $K$ », άρα  $B = \{KKK, KK\Gamma, \Gamma K K, \Gamma K\Gamma\}$ ,

$$\text{συνεπώς } P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\Gamma$ : «εμφανίζονται διαδοχικά, ακριβώς δυο  $K$ », άρα  $\Gamma = \{K\Gamma K, \Gamma K K\}$ ,

$$\text{συνεπώς } P(\Gamma) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- Είναι  $A \cap B = \{KKK, KK\Gamma\}$ , άρα  $P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  Ισχύει ότι  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , άρα τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα.
- Είναι  $A \cap \Gamma = \{KK\Gamma\}$ , άρα  $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{8}$  Ισχύει ότι  $P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ , άρα τα  $A, \Gamma$  είναι ανεξάρτητα.
- Είναι  $B \cap \Gamma = \{KK\Gamma, \Gamma KK\}$ , άρα  $P(B \cap \Gamma) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  Ισχύει ότι  $P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(B)P(\Gamma)$ , δηλαδή  $P(B \cap \Gamma) \neq P(B)P(\Gamma)$ , άρα τα  $B, \Gamma$  δεν είναι ανεξάρτητα.

### Εφαρμογή 90

Από τράπουλα 52 φύλλων λαμβάνω 2 φύλλα. Ποια η πιθανότητα να είναι:

- ( $\alpha$ ) το ένα φύλλο 2 και το άλλο βαλές,  
 ( $\beta$ ) και τα 2 φύλλα μπαστούνι;

Ο δειγματικός χώρος έχει  $\binom{52}{2}$  στοιχεία διότι κατά τόσους τρόπους λαμβάνω 2 από τα 52 φύλλα.

( $\alpha$ ) Η τράπουλα έχει 4 βαλές και 4 φύλλα με τον αριθμό 2. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι  $\binom{4}{1} \binom{4}{1} = 4 \cdot 4 = 16$  διότι κάθε ευνοϊκή περίπτωση λήψης φύλλου 2 που είναι  $\binom{4}{1}$  το πλήθος, συνδυάζετε με τις  $\binom{4}{1}$  φορές λήψης βαλέ.

$$\text{Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι } \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{4 \cdot 4}{51 \cdot 26} = \frac{8}{663}$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Ορίζω τα γεγονότα  $A$ : «Εμφάνιση φύλλου 2»

$B$ : «Εμφάνιση φύλλου βαλές»

$$p(A)p(B/A) + p(B)p(A/B) =$$

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{52 \cdot 51} = 2 \cdot \frac{4}{13 \cdot 51} = \frac{8}{663}$$

( $\beta$ ) Από τα 52 φύλλα της τράπουλας τα 13 είναι μπαστούνια. Άρα,

$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{13!}{2! \cdot 11!}}{\frac{52!}{2! \cdot 50!}} = \frac{\frac{12 \cdot 13}{2!}}{\frac{51 \cdot 52}{2!}} = \frac{12 \cdot 13}{51 \cdot 52} = \frac{12}{51 \cdot 4} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Ορίζω τα γεγονότα  $M_1$ : «Εμφάνιση φύλλου μπαστούνι την 1<sup>η</sup> φορά»

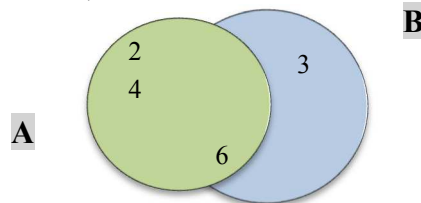
$$M_2: \text{«Εμφάνιση φύλλου μπαστούνι την 2<sup>η</sup> φορά»}$$

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)P(M_2/M_1) =$$

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

### Εφαρμογή 91

Ποια η πιθανότητα το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού να είναι αριθμός άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3;



Ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Θεωρώ τα ενδεχόμενα

$$\mathbf{A}: \text{«εμφανίζεται άρτιος αριθμός»} \quad A = \{2, 4, 6\} \quad P(A) = \frac{3}{6}$$

$$\mathbf{B}: \text{«εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 3»} \quad B = \{3, 6\} \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

$$\text{Είναι } A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}, \text{ άρα } P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\text{Είναι } A \cap B = \{6\} \neq \{ \} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \text{ άρα:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

### Εφαρμογή 92

Ποια η πιθανότητα το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού να είναι αριθμός άρτιος ή η ένδειξη 5;

Ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

$$\mathbf{A}: \text{«εμφανίζεται άρτιος αριθμός»} \quad A = \{2, 4, 6\} \quad P(A) = \frac{3}{6}$$

$$\mathbf{B}: \text{«εμφανίζεται ο αριθμός 5»} \quad B = \{5\} \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

Ζητώ την πιθανότητα  $P(A \cup B)$ . Είναι  $A \cap B = \{ \}$ , δηλαδή τα A, B είναι ξένα

$$\text{μεταξύ τους. Άρα, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

### Εφαρμογή 93

$$\text{Αν } \frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{5}, \text{ υπολογίστε τις } P(A), P(A')$$

$$\text{Είναι } \frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5P(A) = 3 - 3P(A) \Leftrightarrow 8P(A) = 3 \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

$$\text{Άρα, } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

### Εφαρμογή 94

Η πιθανότητα να έχουν ανοικτό τηλέφωνο οι A, B είναι  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$  αντίστοιχα.

Ποια η πιθανότητα ένας τουλάχιστον από τους A, B να έχει ανοικτό τηλέφωνο;

Έστω τα ενδεχόμενα: A: «ο A έχει ανοικτό τηλέφωνο»

B: «ο B έχει ανοικτό τηλέφωνο»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

### Εφαρμογή 95

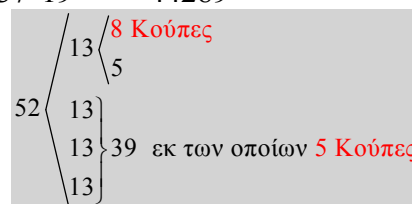
Τράπουλα 52 φύλλων, μοιράζεται εξίσου σε 4 παίκτες. Ο 1<sup>ος</sup> παίρνει 8 κούπες. Ποια η πιθανότητα ένας άλλος να πάρει τουλάχιστον μία κούπα;

Οι 3 υπόλοιποι παίκτες λαμβάνουν συνολικά 39 κάρτες, ο καθένας με  $\binom{39}{13}$

τρόπους. Όλες οι κούπες είναι 13. Αφού ο 1<sup>ος</sup> παίκτης έλαβε 8 οι υπόλοιποι 3 παίκτες συνολικά θα μοιραστούν τις υπόλοιπες 5 κούπες. Δηλαδή, από τα 39 φύλλα των 3 παικτών, τα 5 είναι κούπες και τα υπόλοιπα 34 καρό, μπαστούνια και σπαθιά. Η πιθανότητα ένας παίκτης να πάρει τουλάχιστον μία κούπα είναι συμπληρωματική της πιθανότητας να μην λάβει καμία κούπα. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p = 1 - \frac{\binom{34}{13}}{\binom{39}{13}} = 1 - \frac{\frac{34!}{13! 21!}}{\frac{39!}{13! 26!}} = 1 - \frac{21!}{39!} = 1 - \frac{34! 26!}{39! 21!} = 1 - \frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39} =$$

$$1 - \frac{11 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2}{7 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 3} = 1 - \frac{22 \cdot 230}{63 \cdot 37 \cdot 19} = 1 - \frac{5060}{44289} = 1 - 0,114 = 0,886 \text{ δηλαδή, } 88,6 \%$$



### Εφαρμογή 96

Το 60% των κατοίκων μίας πόλης, είναι γυναίκες. Το 1% των γυναικών και το 5% των ανδρών έχει ζάχαρο.

(α) Για άτομο που επιλέγετε τυχαία, ποια η πιθανότητα να έχει ζάχαρο;

(β) Για άτομο που έχει ζάχαρο, ποια η πιθανότητα να είναι άνδρας;

(α) Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A: \text{«Το επιλεγέν άτομο είναι άνδρας»} \quad P(A) = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$Γ: \text{«Το επιλεγέν άτομο είναι γυναίκα»} \quad P(Γ) = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$Z: \text{«Το επιλεγέν άτομο έχει ζάχαρο»} \quad P(Z/A) = \frac{5}{100} \quad P(Z/Γ) = \frac{1}{100}$$

Το επιλεγέν άτομο που έχει ζάχαρο, μπορεί να είναι άνδρας ή γυναίκα.

0,4 A	0,05 Z
	0,95 Z'
0,6 Γ	0,01 Z
	0,99 Z'

$$P(Z) = P(A) \cdot P(Z/A) + P(\Gamma) \cdot P(Z/\Gamma)$$

$$= \frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \frac{5}{100} + \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} \frac{1}{100} = \frac{20}{1.000} + \frac{6}{1.000} = \frac{26}{1.000}$$

$$(β) P(A/Z) = \frac{P(A \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(A) \cdot P(Z/A)}{P(A) \cdot P(Z/A) + P(\Gamma) \cdot P(Z/\Gamma)} =$$

$$\frac{\frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \frac{5}{100}}{\frac{26}{1.000}} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} = 0,7692$$

Επίσης είναι  $P(\Gamma/Z) = 1 - P(A/Z) = 1 - 0,7692 = 0,2308$

$$\text{Υπενθύμιση } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

### Εφαρμογή 97

Παίκτης ρίχνει 2 ζάρια και το άθροισμα των ενδείξεων τους είναι 10. Ποια η πιθανότητα ο αντίπαλος να φέρει μεγαλύτερο άθροισμα;

Αν A είναι το γεγονός «ο αντίπαλος να φέρει άθροισμα μεγαλύτερο από 10», μπορεί να χωρισθεί σε 2 υποπεριπτώσεις

$$A_1: \text{«ο αντίπαλος φέρνει άθροισμα 11»}, \quad A_1 = \{(5,6), (6,5)\}$$

$$A_2: \text{«ο αντίπαλος φέρνει άθροισμα 12»}, \quad A_2 = \{(6,6)\}$$

$$\text{Είναι } A = A_1 \cup A_2 \Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 8,3%

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

### Παρατήρηση 18

Όταν διασπάω ένα γεγονός σε μικρότερα γεγονότα και κατόπιν τα χρησιμοποιώ, αυτά πρέπει να είναι ασυμβίβαστα. Όταν όμως χρησιμοποιώ το γινόμενο τους, αυτά πρέπει να είναι ανεξάρτητα.

### Εφαρμογή 98

Από τράπουλα 52 φύλλων, λαμβάνω τα 6. Ποια η πιθανότητα τα 2 φύλλα να είναι κόκκινα και τα άλλα 4 μαύρα;  $52 \left\langle \begin{matrix} 26 \text{ Κόκκινα} - 2 \text{ Κόκκινα} \\ 26 \text{ Μαύρα} - 4 \text{ Μαύρα} \end{matrix} \right\rangle 6$

Τα 6 φύλλα επιλέγονται από τα 52, με  $\binom{52}{6}$  τρόπους.

Τα 2 κόκκινα επιλέγονται από τα 26 κόκκινα, με  $\binom{26}{2}$  τρόπους.

Τα 4 μαύρα επιλέγονται από τα 26 μαύρα, με  $\binom{26}{4}$  τρόπους.

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι  $\binom{26}{2} \binom{26}{4}$

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{26}{2} \binom{26}{4}}{\binom{52}{6}} = \frac{26! \cdot 26!}{2! \cdot 24! \cdot 4! \cdot 22!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{2 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 25}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}$$

$$\frac{25 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 25}{47 \cdot 49 \cdot 10 \cdot 17 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 25}{47 \cdot 49 \cdot 68} = \frac{65 \cdot 575}{2303 \cdot 68} = 0,2386592 \quad \text{Δηλαδή, } p = 23,87 \%$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Οι τρόποι που τοποθετούνται στη σειρά τα 6 φύλλα είναι  $\frac{6!}{4! 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$15 \left( \frac{26}{52} \frac{25}{51} \right) \left( \frac{26}{50} \frac{25}{49} \frac{24}{48} \frac{23}{47} \right) = 15 \left( \frac{1}{2} \frac{25}{51} \right) \left( \frac{13}{25} \frac{25}{49} \frac{1}{2} \frac{23}{47} \right) = \frac{15 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 23}{102 \cdot 49 \cdot 94} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 23}{34 \cdot 49 \cdot 94}$$

### Εφαρμογή 99

Πλοίο έχει κονσέρβες προέλευσης Ατλαντικού ή Ειρηνικού ωκεανού, όπως στον παρακάτω πίνακα. Ποια η πιθανότητα για κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία, να είναι προέλευσης Ατλαντικού, δοθέντος ότι είναι καλή;

Ποιότητα	Ατλαντικού	Ειρηνικού	Σύνολο
Καλές	1.400	1.000	2.400
Χαλασμένες	40	20	60
<b>Σύνολο</b>	<b>1.440</b>	<b>1.020</b>	<b>2.460</b>

Θεωρώ τα γεγονότα:

$$A: \text{«η κονσέρβα είναι προέλευσης Ατλαντικού»}, P(A) = \frac{1.440}{2.460}$$

$$B: \text{«η κονσέρβα είναι καλή»}, P(B) = \frac{2.400}{2.460}$$

$$\text{Είναι } P(A \cap B) = \frac{1.400}{2.460}$$

$$\text{Άρα, } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1.400}{\frac{2.460}{2.460}} = \frac{1400}{2400} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} = 0,58\bar{3} \quad \text{δηλαδή } 58,33 \%$$

### Εφαρμογή 100

Πλοίο έχει τεσσάρων ειδών κονσέρβες, όπως στον παρακάτω πίνακα. Ποια η πιθανότητα για κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία, να είναι του β είδους, δοθέντος ότι είναι καλή;

Είδη κονσερβών	Καλές	Χαλασμένες	Σύνολο
<b>α</b>	1.300	20	1.320
<b>β</b>	850	15	865
<b>γ</b>	700	10	710
<b>δ</b>	550	5	555
<b>Σύνολο</b>	<b>3.400</b>	<b>50</b>	<b>3.450</b>

Θεωρώ το γεγονός **A**: «η κονσέρβα είναι καλή». Ο δειγματικός χώρος έχει 3.450 στοιχεία κατανομημένα σε 4 υποσύνολα α, β, γ, δ με αντίστοιχες πιθανότητες επιλογής  $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = P(\delta) = \frac{1}{4}$

$$\text{Είναι } P(A/\alpha) = \frac{1.300}{1.320}, \quad P(A/\beta) = \frac{850}{865}, \quad P(A/\gamma) = \frac{700}{710}, \quad P(A/\delta) = \frac{550}{555}$$

$$\text{Είναι } P(\beta/A) = \frac{P(\beta \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{850}{3.450}}{\frac{3.400}{3.450}} = \frac{850}{3.400} = \frac{85}{340} = \frac{17}{68} = 0,25$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Από τον τύπο του Bayes, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\beta/A) = \frac{P(\beta) \cdot P(A/\beta)}{P(\alpha) \cdot P(A/\alpha) + P(\beta) \cdot P(A/\beta) + P(\gamma) \cdot P(A/\gamma) + P(\delta) \cdot P(A/\delta)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{850}{865}}{\frac{1}{4} \frac{1300}{1320} + \frac{1}{4} \frac{850}{865} + \frac{1}{4} \frac{700}{710} + \frac{1}{4} \frac{550}{555}} = 0,2491267 \cong 0,25 \quad \text{δηλαδή, περίπου } 25\%$$

### Εφαρμογή 101

Ιδανικό ζάρι ρίχνεται 4 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να:

(α) μην έλθει κανένα 6

(β) έλθει τουλάχιστον ένα 6;

$$(α) \quad p = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{25 \cdot 25}{36 \cdot 36} = \frac{625}{1.296} = 0,482253$$

$$(β) \quad p' = 1 - p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - 0,482253 = 0,517747$$

**Εφαρμογή 102**

Από ράφι με 4 βιβλία μαθηματικών, 3 φυσικής και 1 λεξικό, λαμβάνω 3. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι: (α) 1 από τα 3 βιβλία το λεξικό, (β) τα 2 βιβλία μαθηματικών και το 1 φυσικής;

$$(α) \frac{\binom{1}{1} \binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$$

$$(β) \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}$$

4 Μαθηματικά  
3 Φυσική  
1 Λεξικό

**Εφαρμογή 103**

Ποια είναι η πιθανότητα 5 παίκτες να έχουν γεννηθεί ανά 2, σε διαφορετικούς μήνες; Ποια είναι η πιθανότητα 2 τουλάχιστον παίκτες να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα;

$$\frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{\cancel{12} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{11 \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 2}{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cancel{2}} = \frac{55 \cdot 2}{72 \cdot 4} = \frac{55}{72 \cdot 2} \cong 0,382, \quad 1 - 0,382 = 0,618$$

**Εφαρμογή 104**

Ποια η πιθανότητα να είναι 2 μπάλες άσπρες, αν λαμβάνονται διαδοχικά από κάλη με 4 άσπρες και 2 μαύρες: (α) με επανατοποθέτηση (β) χωρίς επανατοποθέτηση;

$$(α) \frac{4}{6} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad (β) \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6} = \frac{2}{5}$$

4 Λευκές  
2 Μαύρες

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ορίζω τα γεγονότα  $\Lambda_1$ : «Η 1<sup>η</sup> μπάλα είναι λευκή»

$\Lambda_2$ : «Η 2<sup>η</sup> μπάλα είναι λευκή»

$$\text{Είναι } p(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = p(\Lambda_1) p(\Lambda_2 / \Lambda_1) = \frac{4}{6} \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

**Εφαρμογή 105**

Ποια η πιθανότητα μεταξύ 4 καρτών που επιλέγονται από τράπουλα 52 καρτών, τουλάχιστον οι 3 να είναι σπαθιά;

$$52 \text{ κάρτες} \begin{cases} 4 \text{ κάρτες} \begin{cases} 4 \text{ κάρτες σπαθιά} \\ 3 \text{ κάρτες σπαθιά \& 1 κάρτα άλλο χαρτί} \end{cases} \\ 48 \text{ κάρτες} \end{cases}$$

Από τις 52 κάρτες οι 4 επιλέγονται με  $\binom{52}{4}$  τρόπους. Από τις 52 κάρτες, οι

13 είναι σπαθιά, ενώ οι υπόλοιπες 39 είναι κούπες, καρό και μπαστούνια.

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{13}{4} + \binom{13}{3} \binom{39}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{\binom{13}{4} + \binom{13}{3} 39}{\binom{52}{4}}$$

**Εφαρμογή 106**

Σπουδαστής απαντά σε 2 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (των 4 επιλογών η κάθε μία). Ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά: **(α)** και στις 2 ερωτήσεις, **(β)** ακριβώς στη μία ερώτηση,

$$\text{(α)} \quad p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad P &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \\ &= \frac{2}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**Εφαρμογή 107**

Ποια είναι η πιθανότητα στο ΛΟΤΤΟ (6 από 49), παίζοντας:

**(α)** μία εξάδα, να πετύχεις 5 αριθμούς

**(β)** μία εξάδα, να πετύχεις τους 6 αριθμούς

**(γ)** 40 αριθμούς, να πετύχεις τουλάχιστον 5 από τους 6;

**(α)** Οι 6 αριθμοί που έπαιξες, επιλέγονται από τους 49, με  $\binom{49}{6}$  τρόπους.

Οι 5 αριθμοί επιλέγονται από τους 6 τυχερούς, με  $\binom{6}{5} = 6$  τρόπους.

Ο αριθμός που περισσεύει, επιλέγεται από τους 43 άτυχους με  $\binom{43}{1} = 43$  τρόπους.

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{\binom{49}{6}}$$

**(β)** Οι 6 αριθμοί που έπαιξες επιλέγονται από τους 49, με  $\binom{49}{6}$  τρόπους. Άρα,

$$p = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\frac{49!}{6! 43!}} = \frac{1}{\frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6!}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = \frac{1}{44 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 49}$$

**(γ)** Οι 40 αριθμοί που έπαιξες επιλέγονται από τους 49, με  $\binom{49}{40}$  τρόπους. Από τους

49 αριθμούς, οι 6 που κληρώνονται είναι οι τυχεροί, ενώ οι υπόλοιποι 43 που δεν κληρώνονται, είναι οι άτυχοι. Για να πετύχεις τουλάχιστον 5 από τους 6 τυχερούς, σημαίνει ότι υπάρχουν οι ακόλουθες 2 υποπεριπτώσεις:

**(γ1)** Να πετύχεις και τους 6 τυχερούς αριθμούς, δηλαδή από τους 40 που επέλεξες να είναι οι 6 τυχεροί και οι υπόλοιποι 34 άτυχοι.

$$\text{Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα } p_1 = \frac{\binom{6}{6} \binom{43}{34}}{\binom{49}{40}} = \frac{1 \binom{43}{34}}{\binom{49}{40}} = \frac{\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}}$$

(γ2) Να πετύχεις τους 5 τυχερούς από τους 6 τυχερούς που κληρώθηκαν και να χάσεις τους υπόλοιπους 35 (από τους 40 που έπαιξες), που επιλέγονται από τους 43 άτυχους που δεν κληρώθηκαν.

$$\text{Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα } p_2 = \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{35}}{\binom{49}{40}} = \frac{6 \binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}$$

$$\text{Άρα, } p = p_1 + p_2 = \frac{\binom{43}{34}}{\binom{49}{40}} + \frac{6 \binom{43}{35}}{\binom{49}{40}} = \frac{\binom{43}{34} + 6 \binom{43}{35}}{\binom{49}{40}}$$

### Εφαρμογή 108

Από 8 αρσενικούς και 6 θηλυκούς παπαγάλους επιλέγονται οι 2. Ποια η πιθανότητα και οι 2 να είναι: (α) διαφορετικού φύλλου  
(β) του ίδιου φύλλου.

$$(α) p = \frac{\binom{8}{1} \binom{6}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{8 \cdot 6}{91} = \frac{48}{91}$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Ορίζω τα γεγονότα  $A_1$ : «Ο 1<sup>ος</sup> παπαγάλος είναι αρσενικός»

$A_2$ : «Ο 2<sup>ος</sup> παπαγάλος είναι αρσενικός»

$\Theta_1$ : «Ο 1<sup>ος</sup> παπαγάλος είναι θηλυκός»

$\Theta_2$ : «Ο 2<sup>ος</sup> παπαγάλος είναι θηλυκός»

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap \Theta_2) + p(\Theta_1 \cap A_2) &= \\ p(A_1) p(\Theta_2/A_1) + p(\Theta_1) p(A_2/\Theta_1) &= \\ \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} &= \frac{48}{14 \cdot 13} + \frac{48}{14 \cdot 13} = \frac{24}{7 \cdot 13} + \frac{24}{7 \cdot 13} = \frac{48}{91} \end{aligned}$$

(β) Έστω τα ενδεχόμενα A: «Οι 2 παπαγάλοι είναι αρσενικοί»

B: «Οι 2 παπαγάλοι είναι θηλυκοί»

Επειδή  $A \cap B = \{ \}$  και  $A \cup B = \Omega$ , είναι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$p' = P(A) + P(B) = \frac{\binom{8}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28 + 15}{91} = \frac{43}{91}$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος} \quad p' = 1 - p = 1 - \frac{48}{91} = \frac{43}{91}$$

**3<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2) &+ p(\Theta_1 \cap \Theta_2) = \\ p(A_1)p(A_2/A_1) &+ p(\Theta_1)p(\Theta_2/\Theta_1) = \\ \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} &+ \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56+30}{14 \cdot 13} = \frac{86}{14 \cdot 13} = \frac{43}{7 \cdot 13} = \frac{43}{91} \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 109

Από κάλπη με 3 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες, λαμβάνω 2. Ποια η πιθανότητα να είναι: (α) διαφορετικού χρώματος,

(β) ίδιου χρώματος;

(α) Στην κάλπη περιέχονται 7 μπάλες. Μπορούν να επιλεγούν οι 2 με  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{2!} = 21$  τρόπους (δυνατές περιπτώσεις). Οι ευνοϊκές περιπτώσεις

$$\text{είναι } \binom{3}{1} \binom{4}{1} = 3 \cdot 4 = 12 \quad \text{Άρα, } p = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ορίζω τα γεγονότα  $\Lambda_1$ : «Η 1<sup>η</sup> μπάλα είναι λευκή»

$\Lambda_2$ : «Η 2<sup>η</sup> μπάλα είναι λευκή»

$M_1$ : «Η 1<sup>η</sup> μπάλα είναι μαύρη»

$M_2$ : «Η 2<sup>η</sup> μπάλα είναι μαύρη»

$$\begin{aligned} p(\Lambda_1 \cap M_2) &+ p(M_1 \cap \Lambda_2) = \\ p(\Lambda_1)p(M_2/\Lambda_1) &+ p(M_1)p(\Lambda_2/M_1) = \\ \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} &+ \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$(β) \text{ Είναι } p' = 1 - p = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Για να είναι οι 2 επιλεγείσες μπάλες ίδιου χρώματος αρκεί να είναι και οι 2 άσπρες ή και οι 2 μαύρες. Αυτό γίνεται με  $\binom{3}{2} = 3$  ή  $\binom{4}{2} = 6$  τρόπους αντίστοιχα.

$$\text{Άρα, } p' = p_1 + p_2 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

**3<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\begin{aligned} p(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) &+ p(M_1 \cap M_2) = \\ p(\Lambda_1)p(\Lambda_2/\Lambda_1) &+ p(M_1)p(M_2/M_1) = \\ \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} &+ \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 110

Ποια η πιθανότητα παίζοντας μία απλή στήλη ΠΡΟΠΟ, να επιτύχεις: (α) 13άρι  
(β) 12άρι  
(γ) 11άρι;

Σε κάθε ποδοσφαιρικό αγώνα υπάρχουν τα 3 ακόλουθα δυνατά ενδεχόμενα:

- 1 (νίκη της γηπεδούχου ομάδας),
- X (ισοπαλία) και
- 2 (νίκη της φιλοξενούμενης ομάδας).

Επειδή οι αγώνες που περιλαμβάνονται σε ένα δελτίο ΠΡΟΠΟ είναι 13, τα δυνατά αποτελέσματα είναι  $3^{13}$  το πλήθος.

(α) Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι  $p = \frac{1}{3^{13}}$

(β) Για να επιτύχεις 12άρι σημαίνει ότι μάντεψες σωστά όλους τους αγώνες εκτός από έναν, στον οποίο αν π.χ. βγήκε 1, εσύ είχες εσφαλμένα ποντάρει στα άλλα 2 ενδεχόμενα, δηλαδή στα X και 2.

$$\text{Άρα, } p = \frac{\binom{13}{12} + \binom{13}{12}}{3^{13}} = \frac{2 \binom{13}{12}}{3^{13}} = \frac{2 \cdot 13}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}$$

$$\text{(γ) Ομοίως } p = \frac{\binom{13}{11} + \binom{13}{11} + \binom{13}{11} + \binom{13}{11}}{3^{13}} = \frac{4 \binom{13}{11}}{3^{13}} = \frac{4 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2}}{3^{13}} = \frac{24 \cdot 13}{3^{13}} = \frac{8 \cdot 13}{3^{12}}$$

### Εφαρμογή 111

Το δείγμα A περιέχει 8 chips (τα 3 ελαττωματικά), ενώ το B περιέχει 5 (τα 2 ελαττωματικά). Για 2 chips που λαμβάνονται 1 από κάθε δείγμα, ποια η πιθανότητα:

- (α) να είναι και τα 2 μη ελαττωματικά,
- (β) το 1 να είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι,
- (γ) αν το 1 είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι, το ελαττωματικό να προέρχεται από το δείγμα A;

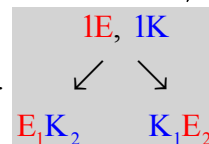
(α) Η πιθανότητα να επιλεγεί 1 μη ελαττωματικό chip από το A, είναι  $\frac{5}{8}$  και

από το B είναι  $\frac{3}{5}$

A 8 $\left\langle \begin{array}{l} 3E \\ 5K \end{array} \right.$	B 5 $\left\langle \begin{array}{l} 2E \\ 3K \end{array} \right.$
--	--

Επειδή τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα,  $P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$

(β) Το συμβάν μπορεί να σπάσει σε 2 υποσυμβάντα.



Η πιθανότητα επιλογής ελαττωματικού chip από το A και μη ελαττωματικού chip από το B, είναι  $p_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$ . Η πιθανότητα επιλογής μη ελαττωματικού chip

από το A και ελαττωματικού chip από το B, είναι  $p_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$

$$\text{Άρα, } p = p_1 + p_2 = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$\begin{aligned}
 &P(E_1 \cap K_2) + P(K_1 \cap E_2) = \\
 &P(E_1) \cdot P(K_2 / E_1) + P(K_1) \cdot P(E_2 / K_1) = \\
 &\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{40}
 \end{aligned}$$

(γ) Θεωρώ τα ενδεχόμενα:  $E_1$ : «επιλέγεται ελαττωματικό chip από το A»  
 $E_2$ : «1 chip είναι ελαττωματικό και το άλλο όχι»

$$\text{Είναι } p(E_2) = \frac{19}{40}, \quad p(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{40}$$

$$\text{Άρα, } p(E_1 / E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}$$

**Εφαρμογή 112**

1 στα 1.000 άτομα πάσχει από κάποια ασθένεια. Η εξέταση για τη διάγνωση της, δίνει λάθος αποτέλεσμα στο 1% των περιπτώσεων αν το άτομο πάσχει από την ασθένεια και στο 2% των περιπτώσεων, αν δεν πάσχει. Ποια η πιθανότητα να προκύψει θετικό αποτέλεσμα σε τυχαίο άτομο; Αν προκύψει θετικό αποτέλεσμα, ποια η πιθανότητα να νοσεί;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα: A: «Προκύπτει θετικό αποτέλεσμα»  
 B: «Το άτομο νοσεί»

$$\text{Είναι } p(B) = \frac{1}{1.000}, \quad p(B') = \frac{999}{1.000}, \quad 1.000 \text{ άτομα } \begin{cases} 1 \text{ νοσεί} \\ 999 \text{ υγιείς} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 100 \text{ ασθενείς } \begin{cases} A: 99 \text{ ασθενείς} \\ A': 1 \text{ υγιής} \end{cases}, \quad 100 \text{ υγιείς } \begin{cases} A': 98 \text{ υγιείς} \\ A: 2 \text{ ασθενείς} \end{cases}, \quad A \begin{cases} A_1 \text{ ασθενής} \\ A_2 \text{ υγιής} \end{cases}
 \end{array}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2). \quad \text{Είναι } p(A/B) = \frac{99}{100}, \quad p(A/B') = \frac{2}{100}$$

$$\text{Είναι } p(A) = p(A/B)p(B) + p(A/B')p(B') = \frac{99}{100} \frac{1}{1.000} + \frac{2}{100} \frac{999}{1.000} = \frac{2.097}{100}$$

$$\text{Είναι } p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{\frac{2.097}{100}} = \frac{p(A/B)p(B)}{\frac{2.097}{100}} = \frac{\frac{99}{100} \frac{1}{1000}}{\frac{2.097}{100}} = \frac{99}{2097}$$

**Εφαρμογή 113**

Η πιθανότητα ναυτολόγησης των A, B είναι 50% και 25%, αντίστοιχα. Η πιθανότητα να μη ναυτολογηθούν είναι 30%. Ποια η πιθανότητα να:

(α) ναυτολογηθούν και οι 2

(β) ναυτολογηθεί μόνο ο A;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα: A: «ναυτολογείται ο A»,  $p(A) = 0,50$

B: «ναυτολογείται ο B»,  $p(B) = 0,25$

$$\text{Δίνεται ότι } p(A' \cap B') = p\left[(A \cup B)'\right] = 0,30$$

Άρα,  $p(A \cup B) = 0,70$

(α) Από  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$  προκύπτει ότι

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,50 + 0,25 - 0,70 = 0,05$$

(β)  $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0,50 - 0,05 = 0,45$

#### Εφαρμογή 114

Έστω  $A, B$  γεγονότα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $p(A) = \frac{3}{4}$ ,  $p(B) = \frac{5}{8}$ .

Εξετάστε αν τα  $A, B$  είναι ξένα μεταξύ τους. Δείξτε ότι  $\frac{3}{4} \leq p(A \cup B)$  και

$$\frac{3}{8} \leq p(A \cap B) \leq \frac{5}{8}$$

Αν τα  $A, B$  ήταν αμοιβαίως αποκλειόμενα έπρεπε να ισχύει η σχέση  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} > 1$  άτοπο. Άρα, δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

- Είναι  $A \subseteq A \cup B$  άρα,  $p(A) \leq p(A \cup B) \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq p(A \cup B)$
- Είναι  $A \cap B \subseteq B$  άρα,  $p(A \cap B) \leq p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) \leq \frac{5}{8}$
- $p(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - p(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $\frac{5}{8} - p(A \cap B) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$   
 $\frac{3}{8} \leq p(A \cap B)$

#### Εφαρμογή 115

Τα γεγονότα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $p(A) = 0,8$  και  $p(B) = 0,4$  είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα; Δείξτε ότι  $0,2 \leq p(A \cap B) \leq 0,4$

Αν τα  $A, B$  είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα πρέπει να ισχύει η σχέση  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,8 + 0,4 = 1,2 > 1$  άτοπο. Άρα, δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα.

- Από  $A \cap B \subseteq B$  έπεται ότι  $p(A \cap B) \leq p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) \leq 0,4$
- Είναι  $p(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $0,8 + 0,4 - p(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$   
 $0,2 \leq p(A \cap B)$

**Εφαρμογή 116**

Είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  αν  $p(A) = \frac{1}{4}$ ,  $p(B) = \frac{1}{5}$ ,  $p(A \cup B) = \frac{3}{10}$ ; Ποια η πιθανότητα πραγματοποίησης μόνο του A;

Αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα πρέπει  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{20} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} \text{ που προφανώς δεν ισχύει.}$$

Άρα,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - p(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{20} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - p(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$p(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

$$\text{Επίσης } p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

**Εφαρμογή 117**

3 κέρματα ρίχνονται ταυτόχρονα σε ένα πείραμα τύχης με 8 απλά ενδεχόμενα. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος  $\Omega$ .

1° κέρμα	2° κέρμα	3° κέρμα	Απλό ενδεχόμενο
K	K	K	KKK
K	K	Γ	KKΓ
K	Γ	Γ	KΓΓ
Γ	Γ	Γ	ΓΓΓ
K	Γ	K	KΓK
Γ	Γ	K	ΓΓK
Γ	K	K	ΓKK
Γ	K	Γ	ΓKΓ

**Εφαρμογή 118**

2 ζάρια ρίχνονται και το 1° φέρνει την ένδειξη 4. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι μεγαλύτερο του 8;

Από τη ρίψη των 2 ζαριών προκύπτουν 36 δυνατά ενδεχόμενα. Έστω τα ενδεχόμενα: **A**: «το 1° ζάρι φέρνει 4»,  $P(A) = \frac{1}{6}$

**B**: «το άθροισμα των 2 ζαριών είναι μεγαλύτερο του 8»

Προφανώς  $A \cap B = \{(4, 5), (4, 6)\}$ , άρα  $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$$\text{Είναι } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

### Εφαρμογή 119

Έστω τα ενδεχόμενα: A: «ο Cpt στις 11 π.μ. βρίσκεται στην πλώρη»,  $p(A) = 0,50$

B: «ο Cpt στις 11 π.μ. βρίσκεται στην πρύμνη»,  $p(B) = 0,30$

Ποια η πιθανότητα στις 11 π.μ. ο Cpt να μη βρίσκεται στην πλώρη ούτε στην πρύμνη;

$$\text{Είναι } p(A' \cap B') = p[(A \cup B)'] = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B)] =$$

$$1 - [0,50 + 0,30] = 0,20$$

Τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή  $A \cap B = \emptyset$

### Εφαρμογή 120

Βρείτε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$  όταν 2 ζάρια ρίχνονται ταυτόχρονα.

		White Die					
		1	2	3	4	5	6
Red Die	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

**Εφαρμογή 121**

Ποια η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων 2 ζαριών, να είναι μικρότερο ή ίσο του 11;

Έστω το ενδεχόμενο  $A$ : «άθροισμα των ενδείξεων μικρότερο ή ίσο του 11».

Είναι  $A'$ : «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 12», δηλαδή  $A' = \{(6, 6)\}$

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  περιέχει 36 στοιχεία.













$$\text{Άρα, } P(A) = 1 - P'(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

**Εφαρμογή 122**

Ποια η πιθανότητα το άθροισμα ενδείξεων 2 ζαριών να είναι 7;

$$\text{Είναι } p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

**Εφαρμογή 123**

Εταιρεία αγοράζει λιπαντικά από 3 βιομηχανίες με πιθανότητες  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  και ικανοποιούν τις απαιτήσεις της με πιθανότητες  $k, l, m$  αντίστοιχα. Αν επιλεγεί τυχαία ένα λιπαντικό, ποια η πιθανότητα να πληροί τις απαιτήσεις της εταιρίας; Θεωρώ τα γεγονότα:

$A$ : «το επιλεγέν λιπαντικό ικανοποιεί τις απαιτήσεις της εταιρίας»

$B$ : «επιλέγεται λιπαντικό μίας βιομηχανίας».

Το γεγονός  $B$  χωρίζεται στα γεγονότα:

$$B_1: \text{«επιλέγεται λιπαντικό της 1ης βιομηχανίας»}, p(B_1) = \frac{1}{3}$$

$$B_2: \text{«επιλέγεται λιπαντικό της 2ης βιομηχανίας»}, p(B_2) = \frac{1}{3}$$

$$B_3: \text{«επιλέγεται λιπαντικό της 3ης βιομηχανίας»}, p(B_3) = \frac{1}{3}$$

Ισχύει ότι  $p(A) = p(B_1)p(A/B_1) + p(B_2)p(A/B_2) + p(B_3)p(A/B_3)$

$$= \frac{1}{3}k + \frac{1}{3}l + \frac{1}{3}m = \frac{k+l+m}{3}$$

**Εφαρμογή 124**

20 σπουδαστές ναυτολογήθηκαν σε φορτηγό ( $\Phi$ ), 10 σε δεξαμενόπλοιο ( $\Delta$ ) και 10 σε ακτοπλοϊκό ( $A$ ) ή κρουαζιερόπλοιο ( $K$ ). Για τυχαίο σπουδαστή είναι  $p(A) = \frac{x}{3x+4}$  και  $p(K) = \frac{x-1}{9x+2}$  όπου  $x \in \mathbb{N}$ . Υπολογίστε:  $x$ ,  $p(A)$ ,  $p(K)$  και το πλήθος των σπουδαστών που ναυτολογήθηκαν σε κρουαζιερόπλοιο και σε ακτοπλοϊκό.

Έστω τα ενδεχόμενα:  $\Phi$ : «σπουδαστής ναυτολογήθηκε σε  $\Phi$ »,  $p(\Phi) = \frac{1}{2}$

$\Delta$ : «σπουδαστής ναυτολογήθηκε σε  $\Delta$ »,  $p(\Delta) = \frac{1}{4}$

$A$ : «σπουδαστής ναυτολογήθηκε σε  $A$ »

$K$ : «σπουδαστής ναυτολογήθηκε σε  $K$ »

Είναι  $p(\Phi) + p(\Delta) + p(A) + p(K) = 1$

$$\Leftrightarrow p(A) + p(K) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3x+4} + \frac{x-1}{9x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{Δεκτή} \\ x = \frac{-4}{7} & \text{Απορρίπτεται διότι οδηγεί σε } p(A) < 0 \end{cases}$$

Είναι  $p(A) = \frac{x}{3x+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$  άρα, 8 σπουδαστές ναυτολογήθηκαν σε  $A$

και  $p(K) = \frac{x-1}{9x+2} = \frac{1}{20}$  άρα, 2 σπουδαστές ναυτολογήθηκαν σε  $K$

**Εφαρμογή 125**

Μαθηματικός επιστρέφει τυχαία τα γραπτά σε 30 σπουδαστές. Ποια η πιθανότητα:

( $\alpha$ ) κάθε σπουδαστής να λάβει το δικό του γραπτό

( $\beta$ ) ο Αρχιμήδης να λάβει το δικό του γραπτό

( $\gamma$ ) οι Αρχιμήδης και Ευκλείδης να λάβουν ο καθένας το γραπτό του

( $\delta$ ) τουλάχιστον ένας από τους Αρχιμήδη και Ευκλείδη να λάβουν το γραπτό τους.

( $\alpha$ ) Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι  $30!$  και υπάρχει μόνο μία περίπτωση να πάρει κάθε σπουδαστής το δικό του γραπτό. Άρα,

$$p_1 = \frac{1}{30!} = \frac{1}{30} \frac{1}{29} \frac{1}{28} \frac{1}{27} \dots$$

( $\beta$ ) Έστω ότι ο Αρχιμήδης έλαβε το δικό του γραπτό. Ισχύει ότι  $p_2 = \frac{29!}{30!} = \frac{1}{30}$

( $\gamma$ ) Έστω τα γεγονότα:  $A$ : «ο Αρχιμήδης έλαβε το γραπτό του»,  $p(A) = \frac{1}{30}$

$B$ : «ο Ευκλείδης έλαβε το γραπτό του»,  $p(B) = \frac{1}{30}$

Είναι  $p(B/A) = \frac{1}{29}$  και

$$p(A \cap B) = p(A)p(B/A) = \frac{1}{30} \frac{1}{29} = \frac{1}{870} \cong 0,0011 \text{ δηλαδή, } 0,11 \%$$

$$(\delta) \text{ Είναι } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} - \frac{1}{870} = \frac{57}{870} \cong 0,0655$$

δηλαδή, 6,55 %

### Εφαρμογή 126

4 πλοιοκτήτες φθάνουν ταυτόχρονα σε πόλη με 3 ναυπηγία και τηλεφωνούν σε ένα ο καθένας, ώστε να το επισκεφθούν ανεξάρτητα από τους άλλους. Ποια η πιθανότητα και οι 4 να: **(α)** έχουν τηλεφωνήσει στο ίδιο ναυπηγείο;

**(β)** επισκεφθούν ταυτόχρονα όλα τα ναυπηγεία;

**(α)** Κάθε πλοιοκτήτης μπορεί να τηλεφωνήσει σε 1 οποιοδήποτε από τα 3 ναυπηγεία. Άρα, έχει 3 δυνατές επιλογές. Συνολικά, υπάρχουν  $3^4 = 81$  επιλογές. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις, δηλαδή να τηλεφωνήσουν και οι 4 στο ίδιο ναυπηγείο είναι όσες και τα ναυπηγεία, δηλαδή 3. Άρα,  $p = \frac{3}{81} = \frac{1}{27} \cong 0,037$  δηλαδή, 3,7 %

**(β)** Αν και οι 4 επισκέφθηκαν ταυτόχρονα τα 3 ναυπηγεία, σημαίνει ότι οι 2 επισκέφθηκαν συγχρόνως, το ίδιο ναυπηγείο. Κάθε στιγμή, ο κάθε πλοιοκτήτης μπορεί να βρίσκεται σε 1 μόνο ναυπηγείο. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι όσες το πλήθος των μεταθέσεων των 4 (πλοιοκτητών) εκ των οποίων οι 2 (πλοιοκτήτες) είναι ίδιοι (ή ίσοι αφού φτάνουν στο ίδιο ναυπηγείο συγχρόνως), δηλαδή  $3 \frac{4!}{2!} = 3 \frac{3 \cdot 4}{1} = 36$

Άρα,  $p = \frac{36}{81} = \frac{4}{9} \cong 0,4$  δηλαδή, 44,4 %

### Εφαρμογή 127

Από τράπουλα 52 φύλλων, λαμβάνονται τυχαία 3. Ποια η πιθανότητα:

**(α)** 1 ακριβώς φύλλο από τα 3 να είναι άσσος

**(β)** τουλάχιστον 1 φύλλο από τα 3 να είναι άσσος;

**(α)** Τα 3 φύλλα επιλέγονται από τα 52 με  $\binom{52}{3}$  τρόπους. Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις ισχύει ότι σε κάθε 3 φύλλα υπάρχει 1 άσσος που επιλέγεται από τους 4 άσσους με  $\binom{4}{1} = 4$  τρόπους. Κάθε άσσος που επιλέγεται, συνδυάζεται με τα υπόλοιπα 2 φύλλα, που επιλέγονται από τα υπόλοιπα  $52 - 4 = 48$ , με  $\binom{48}{2}$  τρόπους.

$$\text{Είναι } p = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{4 \cdot 1.128}{22.100} = \frac{4.512}{22.100} = 0,2041 \text{ δηλαδή, } 20,41 \%$$

**(β)** Θεωρώ το ενδεχόμενο

**A:** «1 τουλάχιστον φύλλο είναι άσσος» το οποίο διασπάται στα παρακάτω συμβάντα:

**A<sub>1</sub>:** «1 φύλλο από τα 3 είναι άσσος»

**A<sub>2</sub>:** «2 φύλλα από τα 3 είναι άσσοι»

**A<sub>3</sub>:** «και τα 3 φύλλα είναι άσσοι»

Το ενδεχόμενο A ισούται με το άθροισμα των συμβάντων  $A_1, A_2, A_3$ , δηλαδή  $A = A_1 + A_2 + A_3$ , συνεπώς  $p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$

$$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2} + \binom{4}{2}\binom{48}{1} + \binom{4}{3}\binom{48}{0}}{\binom{52}{3}} = \frac{4.512 + 288 + 4}{22.100} = 0,2174 \text{ άρα, } 21,74 \%$$

### Εφαρμογή 128

Σε εργοστάσιο κατασκευής εξαρτημάτων λειτουργούν 3 μηχανές με παραγωγή και ποσοστά ελαττωματικών: 10.000 & 4% για την 1<sup>η</sup>, 15.000 & 6% για την 2<sup>η</sup> και 20.000 & 2% για την 3<sup>η</sup> μηχανή. Ποια η πιθανότητα για ελαττωματικό εξάρτημα, να προέρχεται από την 1<sup>η</sup> μηχανή;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

$$A_1: \text{«το εξάρτημα κατασκευάστηκε στην 1}^{\text{η}} \text{ μηχανή»}, p(A_1) = \frac{10.000}{45.000} = \frac{2}{9}$$

$$A_2: \text{«το εξάρτημα κατασκευάστηκε στην 2}^{\text{η}} \text{ μηχανή»}, p(A_2) = \frac{15.000}{45.000} = \frac{1}{3}$$

$$A_3: \text{«το εξάρτημα κατασκευάστηκε στην 3}^{\text{η}} \text{ μηχανή»}, p(A_3) = \frac{20.000}{45.000} = \frac{4}{9}$$

B: «το εξάρτημα είναι ελαττωματικό»

$$\text{Είναι } p(B/A_1) = \frac{4}{100}, \quad p(B/A_2) = \frac{6}{100}, \quad p(B/A_3) = \frac{2}{100}$$

Μηχανή	Ποσοστά παραγωγής	Ποσοστά ελαττωματικών ανά μηχανή	Πιθανότητα ελαττωματικών ανά μηχανή	Τελική πιθανότητα ελαττωματικών
1 <sup>η</sup>	$\frac{2}{9}$	4%	$\frac{8}{900}$	$\frac{34}{900}$
2 <sup>η</sup>	$\frac{1}{3}$	6%	$\frac{6}{300} = \frac{18}{900}$	
3 <sup>η</sup>	$\frac{4}{9}$	2%	$\frac{8}{900}$	

$$\text{Είναι } P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{900}}{\frac{34}{900}} = \frac{8}{34} = \frac{4}{17} = 0,2352941 \cong 0,235 \text{ δηλαδή, } 23,5 \%$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Από τον τύπο του Thomas Bayes (1763 μΧ), είναι:

$$\begin{aligned} p(A_1/B) &= \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1)p(B/A_1)}{p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3)} \\ &= \frac{\frac{2}{9} \frac{4}{100}}{\frac{2}{9} \frac{4}{100} + \frac{1}{3} \frac{6}{100} + \frac{4}{9} \frac{2}{100}} = \frac{\frac{2}{9} \cdot 4}{\frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{4}{9} \cdot 2} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{9} + 2 + \frac{8}{9}} \\ &= \frac{8}{8+18+8} = \frac{4}{4+9+4} = \frac{4}{17} \cong 0,235 \text{ δηλαδή, } 23,5 \% \end{aligned}$$

**Εφαρμογή 129**

Για ζάρι και κέρμα που ρίχνονται, ποια η πιθανότητα το κέρμα να φέρει γράμματα και το ζάρι 5 ή 6;

Το πείραμα τύχης είναι σύνθετο. Ο δειγματικός του χώρος  $\Omega$  προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{Κ, Γ\} =$

$$\{(1,Κ), (1,Γ), (2,Κ), (2,Γ), (3,Κ), (3,Γ), (4,Κ), (4,Γ), (5,Κ), (5,Γ), (6,Κ), (6,Γ)\}$$

Τα δυνατά αποτελέσματα είναι 12. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι 2.

Τα αποτελέσματα ρίψης ζαριού και κέρματος είναι ανεξάρτητα. Άρα,  $p = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

**Εφαρμογή 130**

Αν  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  ένας δειγματικός χώρος με  $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ ,  $p(\omega_1) = \frac{p(\omega_3)}{2}$ ,  $p(\omega_1) = \frac{p(\omega_4)}{6}$ , υπολογίστε τις  $p(\omega_1)$ ,  $p(\omega_2)$ ,  $p(\omega_3)$ ,  $p(\omega_4)$ .

Έστω ότι  $p(\omega_1) = x$ . Είναι  $p(\omega_2) = x$ ,  $p(\omega_3) = 2x$ ,  $p(\omega_4) = 6x$

Από  $\sum_{i=1}^4 p(\omega_i) = 1 \Leftrightarrow x + x + 2x + 6x = 1 \Leftrightarrow x = 0,1$  προκύπτει ότι

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = x = 0,1$$

$$p(\omega_3) = 2x = 0,2$$

$$p(\omega_4) = 6x = 0,6$$

**Εφαρμογή 131**

Αν  $p(A) = \frac{17}{30}$ ,  $p(B) = \frac{7}{15}$ ,  $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$  υπολογίστε τις  $p(B')$ ,  $p(A \cap B)$ ,  $p(A - B)$ ,  $p(A \cup B')$

$$\bullet p(B') = 1 - p(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\bullet p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - p(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$p(A \cap B) = \frac{11}{30}$$

$$\bullet p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{17}{30} - \frac{11}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$\bullet p(A \cup B') = p(A) + p(B') - p(A \cap B') =$$

$$\frac{17}{30} + \frac{8}{15} - \frac{6}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

**Εφαρμογή 132**

Αν  $p(A - B) = \frac{1}{4}$ ,  $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ,  $p(B' - A) = \frac{1}{2}$

(α) Υπολογίστε την  $p(A)$

(β) Αποδείξτε ότι  $p(B) = \frac{1}{4}$

(γ) Ποια η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα 2 ενδεχόμενα A, B;

(α)  $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} = p(A) - \frac{1}{20} \Leftrightarrow$$

$$p(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(β)  $p(B' - A) = p(B') - p(B' \cap A) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} = [1 - p(B)] - p(A - B) \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2} - p(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$p(B) = \frac{1}{4}$$

(γ)  $p[(A - B) \cup (B - A)] =$

$$p(A - B) + p(B - A) =$$

$$\frac{1}{4} + p(B) - p(A \cap B) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

### Εφαρμογή 133

3 δοχεία περιέχουν χρωματιστά σφαιρίδια όπως στον παρακάτω πίνακα. Επιλέγεται 1 δοχείο από το οποίο λαμβάνεται 1 σφαιρίδιο. Αν είναι ερυθρό, ποια η πιθανότητα να προέρχεται από το 2<sup>ο</sup> δοχείο;

Δοχείο	Ερυθρές	Λευκές	Μαύρες	Σύνολο
1 <sup>ο</sup>	3	4	1	8
2 <sup>ο</sup>	1	2	3	6
3 <sup>ο</sup>	4	3	2	9
Σύνολο	8	9	6	23

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

E: «το σφαιρίδιο που επιλέγεται είναι ερυθρό»

$E_1$ : «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 1<sup>ο</sup> δοχείο»,  $p(E_1) = \frac{1}{3}$

$E_2$ : «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 2<sup>ο</sup> δοχείο»,  $p(E_2) = \frac{1}{3}$

$E_3$ : «το σφαιρίδιο προέρχεται από το 3<sup>ο</sup> δοχείο»,  $p(E_3) = \frac{1}{3}$

Είναι  $p(E/E_1) = \frac{3}{8}$ ,  $p(E/E_2) = \frac{1}{6}$ ,  $p(E/E_3) = \frac{4}{9}$

Τα  $E_1, E_2, E_3$  είναι ασυμβίβαστα. Άρα:

$$\begin{aligned}
 p(E_2/E) &= \frac{p(E_2 \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E_2)p(E/E_2)}{p(E_1)p(E/E_1) + p(E_2)p(E/E_2) + p(E_3)p(E/E_3)} \\
 &= \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}}{\cancel{\frac{1}{3}} \frac{3}{8} + \cancel{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{3}} \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{4}{9}} = \frac{36}{213} = \frac{12}{71} = 0,169014
 \end{aligned}$$

### Εφαρμογή 134

2 δοχεία περιέχουν άσπρα και μαύρα σφαιρίδια, όπως στον παρακάτω πίνακα. Από το 1<sup>ο</sup> δοχείο λαμβάνεις 1 σφαιρίδιο και το ρίχνεις στο 2<sup>ο</sup>. Ακολούθως, από το 2<sup>ο</sup> δοχείο λαμβάνεις 1 σφαιρίδιο. Ποια η πιθανότητα αυτό που έριξες από το 1<sup>ο</sup> δοχείο στο 2<sup>ο</sup> να είναι μαύρο, αν αυτό που έβγαλες από το 2<sup>ο</sup> ήταν άσπρο;

Δοχείο	Άσπρα	Μαύρα	Σύνολο
1 <sup>ο</sup>	2	1	3
2 <sup>ο</sup>	1	5	6
Σύνολο	3	6	9

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

$E_1$ : «επιλέγεται άσπρο σφαιρίδιο από το 1<sup>ο</sup> δοχείο»,  $p(E_1) = \frac{2}{3}$

$E_2$ : «επιλέγεται μαύρο σφαιρίδιο από το 1<sup>ο</sup> δοχείο»,  $p(E_2) = \frac{1}{3}$

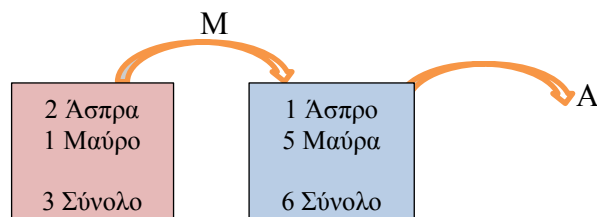
$A$ : «επιλέγεται άσπρο σφαιρίδιο από το 2<sup>ο</sup> δοχείο»

Είναι  $p(A/E_1) = \frac{2}{7}$ ,  $p(A/E_2) = \frac{1}{7}$

$$p(E_2/A) = \frac{p(E_2 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(E_2)p(A/E_2)}{p(E_1)p(A/E_1) + p(E_2)p(A/E_2)} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}}{\cancel{\frac{2}{3}} \frac{2}{7} + \cancel{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}} = \frac{1}{5}$$

### Παρατήρηση 19

$$p(A/E_2) = \frac{p(A \cap E_2)}{p(E_2)} \Leftrightarrow p(A \cap E_2) = p(E_2) \cdot p(A/E_2)$$



### Εφαρμογή 135

Ποια η πιθανότητα να φέρεις 3 διαδοχικούς αριθμούς αν ρίξεις 3 ζάρια;

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι όσο το πλήθος όλων των διατεταγμένων τριάδων με επαναλήψεις των 6 ενδεχομένων που μπορεί να φέρει το κάθε ζάρι. Δηλαδή είναι  $6^3$ . Οι ευνοϊκές τριάδες είναι οι  $(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,6)$ . Κάθε τριάδα π.χ. η  $(1,2,3)$  δίνει  $3! = 6$  μεταθέσεις.

Άρα, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι  $4 \cdot 3! = 4 \cdot 6$

$$\text{Άρα, } p = \frac{4 \cdot 6}{6^3} = \frac{4}{6 \cdot 6} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \approx 11 \%$$

### Εφαρμογή 136

Τοποθετούνται σε ράφι 6 βιβλία άλγεβρας και 4 γεωμετρίας. Ποια η πιθανότητα 3 συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο;

Τα βιβλία είναι 10 άρα τοποθετούνται με  $10!$  τρόπους. Τα 3 συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας λογίζονται ως 1, άρα θεωρώ ότι υπάρχουν 8 βιβλία που διατάσσονται με  $8!$  τρόπους. Τα 3 συγκεκριμένα βιβλία άλγεβρας διατάσσονται μεταξύ τους, το ένα δίπλα στο άλλο με  $3!$  τρόπους. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $\frac{8!3!}{10!} = \frac{3!}{9 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$

$$\underbrace{[A_1] - [A_2] - [A_3]}_{1 \text{ Βιβλίο}} - [A_4] - [A_5] - [A_6] - [\Gamma_1] - [\Gamma_2] - [\Gamma_3] - [\Gamma_4]$$

### Εφαρμογή 137

Από τις 12.000 βίδες, το 3% είναι ελαττωματικές. Ποια η πιθανότητα από δείγμα 600 βιδών, οι 12 να είναι ελαττωματικές;

Από τις 12.000 βίδες, οι 360 είναι ελαττωματικές άρα οι 11.640 είναι κανονικές. Από το δείγμα των 600 βιδών, αν οι 12 είναι ελαττωματικές, οι 588 είναι

$$\text{κανονικές. Άρα, } p = \frac{\binom{360}{12} \binom{11.640}{588}}{\binom{12.000}{600}} = \dots$$

12.000	{	3%      360 E → 12 E	}	600
		97%    11.640 K → 588 K		

### Εφαρμογή 138

Ποια είναι η πιθανότητα στις 5 ρίψεις ενός ζαριού να εμφανιστεί το 6 τρεις φορές; Είναι  $p = \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{25}{6^5}$

### Εφαρμογή 139

Το 1<sup>ο</sup> δοχείο περιέχει **4 κόκκινα** και **5 μπλε** σφαιρίδια ενώ το 2<sup>ο</sup> περιέχει **6 κόκκινα** και **7 μπλε**. Κέρμα ρίχνεται και αν έλθει κεφαλή, επιλέγεται σφαιρίδιο από το 1<sup>ο</sup> δοχείο, ενώ αν έλθουν γράμματα από το 2<sup>ο</sup>. Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινο σφαιρίδιο;

Ορίζω τα γεγονότα

K: «Επιλέγω κόκκινο σφαιρίδιο»,

$\Delta_1$ : «Επιλέγω σφαιρίδιο από το 1<sup>ο</sup> δοχείο»

$\Delta_2$ : «Επιλέγω σφαιρίδιο από το 2<sup>ο</sup> δοχείο»

4 Κόκκινα 5 Μπλε	6 Κόκκινα 7 Μπλε
9 Σύνολο	13 Σύνολο

$$P(K) = P(\Delta_1)P(K/\Delta_1) + P(\Delta_2)P(K/\Delta_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13} = \frac{2}{9} + \frac{3}{13} = \dots$$

**Εφαρμογή 140**

Ποια η πιθανότητα να έλθει ένα τουλάχιστον 4 σε 2 ρίψεις ενός ζαριού;  
Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

$A_1$ : «εμφάνιση 4 στην 1<sup>η</sup> ρίψη»

$A_2$ : «εμφάνιση 4 στη 2<sup>η</sup> ρίψη»

$A_1 \cup A_2$ : «εμφάνιση 4 στην 1<sup>η</sup> ή στη 2<sup>η</sup> ή και στις 2 ρίψεις»

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{12}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1				✓		
2				✓		
3				✓		
4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5				✓		
6				✓		

**Εφαρμογή 141**

Σε εργαστήριο με δυνατότητα επισκευής το πολύ 6 συσκευών ημερησίως, υπάρχουν 10 κινητά και 12 ταμπλέτες. Ποια η πιθανότητα επισκευής σε μία ημέρα:

(α) το πολύ 4 κινητών

(β) 5 κινητών και μίας ταμπλέτας;

(α) Η πιθανότητα ισούται με το άθροισμα πιθανοτήτων των υποενδεχομένων στα οποία διαμελίσθηκε το υπό μελέτη ενδεχόμενο.

Άρα,  $p = 0,0124 + 0,1062 + 0,2985 + 0,3538 + 0,1858 = 0,9567$  δηλαδή, 95,67 %

Πλήθος κινητών	Πλήθος ταμπλετών	Πιθανότητα	Σύνολο συσκευών
0	6	$\frac{\binom{10}{0}\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} = \frac{\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} = 0,0124$	6
1	5	$\frac{\binom{10}{1}\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} = \frac{10\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} = 0,1062$	6
2	4	$\frac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} = 0,2985$	6
3	3	$\frac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} = 0,3538$	6
4	2	$\frac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}} = 0,1858$	6

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος που είναι συμπληρωματικό του να επισκευασθούν στη διάρκεια μίας ημέρας 5 ή 6 συσκευές κινητών.

$$\text{Άρα, } p = 1 - \left[ \frac{\binom{10}{5} \binom{12}{1}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{6} \binom{12}{0}}{\binom{22}{6}} \right] = 1 - \left[ \frac{\binom{10}{5} 12}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{6}}{\binom{22}{6}} \right] = 1 - 0,0433 = 0,9567$$

$$\text{(β) Είναι } \frac{\binom{10}{5} \binom{12}{1}}{\binom{22}{6}} = 0,0405 \text{ δηλαδή, } 4,05 \%$$

**Εφαρμογή 142**

Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$  ένας δειγματικός χώρος. Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι κατάλληλοι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου  $k$  του  $\Omega$ ; (α)  $p(k) = \frac{1}{k}$  (β)  $p(k) = \frac{1}{2^k}$  (γ)  $p(k) = \frac{1}{2k}$

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_6$	$p_1 + p_2 + p_3 + p_6$
$p(k) = \frac{1}{k}$	$p_1 = \frac{1}{1}$	$p_2 = \frac{1}{2}$	$p_3 = \frac{1}{3}$	$p_6 = \frac{1}{6}$	$> 1$
$p(k) = \frac{1}{2^k}$	$p_1 = \frac{1}{2} = \frac{32}{64}$	$p_2 = \frac{1}{4} = \frac{16}{64}$	$p_3 = \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$	$p_6 = \frac{1}{64}$	$\frac{57}{64}$
$p(k) = \frac{1}{2k}$	$p_1 = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$	$p_2 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$	$p_3 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$	$p_6 = \frac{1}{12}$	1

Άρα, δεκτή είναι μόνο η (γ).

**Εφαρμογή 143**

Η πιθανότητα να ζουν μετά από μισό αιώνα ένας άνδρας και μία γυναίκα είναι 0,8 και 0,9 αντίστοιχα. Ποια η πιθανότητα μετά από μισό αιώνα να:

(α) ζουν και οι δυο

(β) μη ζει κανένας από τους δυο

(γ) ζει τουλάχιστον ο ένας από τους δυο;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα: Α: «μετά από μισό αιώνα ζει ο άντρας»

Γ: «μετά από μισό αιώνα ζει η γυναίκα»

Θεωρώ ότι τα Α, Γ είναι ανεξάρτητα.

$$\text{(α) } p(A \cap \Gamma) = p(A) \cdot p(\Gamma) = \frac{8}{10} \frac{9}{10} = \frac{72}{100} = 0,72$$

$$\text{(β) } p(A' \cap \Gamma') = p(A') \cdot p(\Gamma') = \frac{2}{10} \frac{1}{10} = \frac{2}{100} = 0,02$$

$$\text{(γ) } P(\text{Τουλάχιστον ένας ζει}) = 1 - P(\text{Κανείς απο τους 2 δε ζει}) = 1 - 0,02 = 0,98$$

### Παρατήρηση 20

Αν οι πιθανότητες να κερδίσω τα ποσά  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι αντίστοιχα  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (με  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ) τότε η μέση τιμή (ή **μαθηματική ελπίδα** ή αναμενόμενη

$$\text{τιμή}) \text{ είναι } E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

Αν  $E = 0$ , δηλαδή αν το αναμενόμενο κέρδος είναι μηδέν, τότε το παιχνίδι ονομάζεται **δίκαιο**. Η ονομασία οφείλεται στο ότι μετά από πολλές επαναλήψεις του παιχνιδιού, κανείς από τους συμμετέχοντες δεν κερδίζει ούτε χάνει.

### Εφαρμογή 144

Έστω ότι  $\nu$  άτομα αγοράζουν από έναν λαχνό, αριθμημένο από 1 ως  $\nu$ . Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι κατά 0,8 % μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος, υπολογίστε το  $\nu$ .

Αποκλείεται να είναι το  $\nu$  άρτιος, διότι τότε η πιθανότητα κλήρωσης άρτιου θα ήταν ίση με την πιθανότητα κλήρωσης περιττού. Άρα, το  $\nu$  είναι περιττός αριθμός, άρα  $\frac{\nu-1}{2}$  είναι το πλήθος των άρτιων και  $\frac{\nu+1}{2}$  το πλήθος των περιττών λαχνών.

$$\nu \text{ αριθμοί } \begin{cases} \text{άρτιος } \frac{\nu-1}{2} \\ \text{περιττός } \frac{\nu+1}{2} \end{cases} \quad \text{Ισχύει ότι } \nu - \frac{\nu-1}{2} = \frac{2\nu}{\nu} - \frac{\nu-1}{2} = \frac{\nu+1}{2}$$

$$\text{Αν } \nu = 7 \begin{cases} 4 \text{ περιττοί} \\ 3 \text{ άρτιοι} \end{cases} \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \frac{\nu-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$\text{Αν } \nu = 5 \begin{cases} 3 \text{ περιττοί} \\ 2 \text{ άρτιοι} \end{cases} \quad 1, 2, 3, 4, 5 \quad \frac{\nu-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$p(\pi) = \frac{0,8}{100} + p(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{8}{1.000} + \frac{\nu-1}{2\nu} \Leftrightarrow \nu = 125$$

### Εφαρμογή 145

Αν το ζάρι φέρει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ο Αρχιμήδης χάνει από 100 £, ενώ αν φέρει 5 ή 6 κερδίζει από 200 £

(α) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος του;

(β) Αν έλθει το 1 τρεις φορές και το 6 δυο φορές, χάνει 300 £ αλλά κερδίζει 400 £. Ποιο ήταν το αναμενόμενο κέρδος του;

$$(α) \text{ Είναι } E = -\frac{4}{6}100 + \frac{2}{6}200 = 0$$

$$(β) E = -\frac{4}{6}300 + \frac{2}{6}400 = -200 + \frac{400}{3} = -\frac{600}{3} + \frac{400}{3} = -\frac{200}{3} \cong -66,6$$

### Εφαρμογή 146

Από ελέγχους σε 100 σκάφη, διαπιστώθηκε ότι:

Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD), Επίκουρος Καθηγητής

30 στερούνταν πιστοποιητικών αξιολογίας,  
 40 είχαν ελλείψεις στα σωστικά μέσα,  
 15 στερούνταν πιστοποιητικών αξιολογίας και είχαν ελλείψεις στα σωστικά μέσα. Αν επιλεγεί ένα σκάφος, ποια είναι η πιθανότητα να:

(α) έχει διαπράξει τουλάχιστον μία από τις 2 παραβάσεις,

(β) μην έχει υποπέσει σε καμία από τις 2 παραβάσεις,

(γ) έχει διαπράξει μόνο μία από τις 2 παραβάσεις;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

A: «το σκάφος στερείται πιστοποιητικού αξιολογίας»,  $p(A) = 0,30$

B: «το σκάφος έχει ελλείψεις στα σωστικά μέσα»,  $p(B) = 0,40$

$$(α) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,30 + 0,40 - 0,15 = 0,55$$

$$(β) p[(A \cup B)'] = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,55 = 0,45$$

$$(γ) p[(A - B) \cup (B - A)] =$$

$$p(A - B) + p(B - A) =$$

$$p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) =$$

$$0,30 - 0,15 + 0,40 - 0,15 = 0,40$$

#### Εφαρμογή 147

Κάτω από τη βάση έλαβε το 60 % στην άλγεβρα, το 40 % στη γεωμετρία ενώ το 35% και στα 2 μαθήματα. Ποιο ποσοστό των μαθητών έλαβε κάτω από τη βάση σε 1: (α) τουλάχιστον από τα 2 μαθήματα,

(β) μόνο από τα 2 μαθήματα;

Θεωρώ τα γεγονότα: A: «ο μαθητής απέτυχε στην άλγεβρα»,  $p(A) = 0,60$

Γ: «ο μαθητής απέτυχε στη γεωμετρία»,  $p(\Gamma) = 0,40$

$A \cap \Gamma$ : «ο μαθητής απέτυχε και στα 2 μαθήματα»,  $p(A \cap \Gamma) = 0,35$

$$(α) p(A \cup \Gamma) = p(A) + p(\Gamma) - p(A \cap \Gamma) = 0,60 + 0,40 - 0,35 = 0,65$$

$$(β) p[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] =$$

$$p(A - \Gamma) + p(\Gamma - A) =$$

$$p(A) - p(A \cap \Gamma) + p(\Gamma) - p(A \cap \Gamma) =$$

$$0,60 - 0,35 + 0,40 - 0,35 = 0,30$$

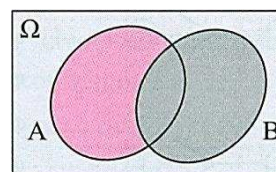
#### Εφαρμογή 148

Αν  $p(A) = \frac{2}{5}$ ,  $p(B) = \frac{1}{4}$ ,  $p(A \cup B) = \frac{1}{2}$  υπολογίστε  $p(A')$ ,  $p(B')$ ,  $p(A \cup B)'$ ,

$p(A \cap B)$ ,  $p(A - B)$ ,  $p(B - A)$ .

$$\bullet p(A') = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet p(B') = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



- $p(A \cup B)' = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow$   
 $\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{20}$
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{8}{20} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
- $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

### Άσκηση 38

Νόμισμα τις 7 πρώτες φορές φέρνει γράμματα. Ποια η πιθανότητα να φέρει γράμματα την 8<sup>η</sup> φορά;

### Άσκηση 39

Εργοστάσιο με 100 ελαστικά (τα 5 ελαττωματικά), πουλά 4 σε συνεργείο. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον το 1 να είναι ελαττωματικό;

### Άσκηση 40

Ζάρι ρίχνεται 3 φορές. Ποια η πιθανότητα το 6 να: **(α)** μην έλθει ποτέ,  
**(β)** έλθει τουλάχιστον μία φορά;

### Άσκηση 41

Η πιθανότητα να πετύχουν στόχο οι A, B είναι  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$  αντίστοιχα. Ποια η πιθανότητα να πληγεί ο στόχος αν οι A, B στοχεύσουν συγχρόνως; **Απάντηση**  $\frac{11}{20}$

### Άσκηση 42

Ποια η πιθανότητα να έχει αριθμό πολλαπλάσιο του 3 ή του 7, σφαιρίδιο που επιλέγεται από κάλη με 17 (αριθμημένα από 1 ως 17);

### Άσκηση 43

Οι A, B, Γ έχουν πιθανότητες  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  αντίστοιχα, να πετύχουν στόχο. Ποια η πιθανότητα αν πυροβολήσουν ταυτόχρονα, μόνο ο ένας να πετύχουν στόχο;

### Άσκηση 44

Το A αλόγο έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει, από ότι το B και το B διπλάσια, από ότι το Γ. Ποια η πιθανότητα του κάθε αλόγου να κερδίσει;

### Άσκηση 45

Οι άντρες  $m_1$ ,  $m_2$  και οι γυναίκες  $w_1, w_2, w_3$  μετέχουν σε αγώνα. Αν τα άτομα ίδιου φύλλου έχουν ίσες πιθανότητες να κερδίσουν, αλλά κάθε άντρας έχει διπλάσιες πιθανότητες από κάθε γυναίκα:

- (α)** Ποια η πιθανότητα να κερδίσει μία γυναίκα;
- (β)** Αν οι  $m_1, w_1$  είναι παντρεμένοι, ποια η πιθανότητα ένας εκ των 2 να κερδίσει;

**Άσκηση 46**

Ταξιτζής έχει ένα ατύχημα κάθε  $k$  έτη. Ποια η πιθανότητα να μην έχει ατύχημα επί  $\lambda$  έτη;

**Άσκηση 47**

Μηχανικός παρέλαβε 70 κιβώτια των 50 λαμπτήρων έκαστο (4% ελαττωματικοί) και 30 κιβώτια των 60 λαμπτήρων (5% ελαττωματικοί). Ποια η πιθανότητα για ελαττωματικό λαμπτήρα να έχει επιλεγεί από κιβώτιο των 50 λαμπτήρων;

**Άσκηση 48**

Μηχανή τροφοδοτείται από 3 όμοιες μπαταρίες και λειτουργεί αν 2 τουλάχιστον από αυτές είναι εντάξει. Η πιθανότητα κάθε μπαταρίας να «πέσει» στις πρώτες 8 ώρες λειτουργίας της, είναι 0,2. Ποια η πιθανότητα να λειτουργεί η μηχανή επί 8 ώρες;

**Άσκηση 49**

Εκ των 200 πλοίων, τα 8 ρυπαίνουν. Αν ελεγχθούν 5, ποια η πιθανότητα:

- (α) τα 4 να ρυπαίνουν
- (β) κανένα να μη ρυπαίνει
- (γ) τουλάχιστον ένα να ρυπαίνει;

**Άσκηση 50**

Το 25% απέτυχε στην άλγεβρα, το 15% στη γεωμετρία και το 10% και στα 2 μαθήματα. Για μαθητή που επιλέγεται τυχαία, ποια η πιθανότητα:

- (α) να έχει αποτύχει και στα 2 μαθήματα
- (β) να έχει αποτύχει μόνο στο 1 μάθημα

**Άσκηση 51**

Σε σύλλογο με μέλη 20 αντρώγυνα, 3 άτομα επιλέγονται για προεδρείο. Ποια η πιθανότητα στο προεδρείο να:

- (α) μετέχουν μόνο άντρες,
- (β) μετέχουν μόνο γυναίκες,
- (γ) μετέχουν 2 γυναίκες και 1 άντρας,
- (δ) μην μετέχουν άντρας και γυναίκα που είναι αντρώγυνο;

**Άσκηση 52**

Ποια η πιθανότητα να βρέχει στην Αυστραλία, αν έτσι σου είπαν τηλεφωνικά 3 γνωστοί σου που κατοικούν εκεί (καθένας έχει 66 % πιθανότητα να λείει αλήθεια);

### 9. 16 Το πρόβλημα του Monty Hall

Σε έναν τηλεοπτικό διαγωνισμό που έχει φτάσει στην τελική ευθεία, σε βάζουν μπροστά σε 3 κλειστές πόρτες. Πίσω από μια από αυτές υπάρχει ένα μεγάλο έπαθλο, ένα αυτοκίνητο, ενώ οι άλλες 2 δεν κρύβουν τίποτα πολύτιμο. Πρέπει να επιλέξεις μόνο μια από τις πόρτες. Όταν δείξεις την πόρτα που επέλεξες, ο παρουσιαστής αποφασίζει να συνεχίσει το θέαμα και ανοίγει μια από τις άλλες δύο, που δεν έχει έπαθλο και σου δίνει μια νέα ευκαιρία, αν θέλεις μπορείς να συνεχίσεις με την επιλογή σου, αλλά μπορείς επίσης να αφήσεις την πόρτα που έχεις επιλέξει και να διαλέξεις την άλλη κλειστή.



Ερώτημα είναι πια κίνηση είναι πιο συμφέρουσα, δηλαδή αν είναι το ίδιο να συνεχίσεις με την πόρτα που επέλεξες ή να αλλάξεις. Φαίνεται ως άσχετο ζήτημα και ότι είναι το ίδιο να κάνεις το ένα ή το άλλο. Ωστόσο, αυτό το πρόβλημα (γνωστό ως πρόβλημα του Monty Hall) οδήγησε σε συζητήσεις με τη συμμετοχή εξαιρετικών μαθηματικών, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι πιθανότητες απέχουν πολύ από το να είναι θέμα που έχει κατανοηθεί καλά.

Από το 1963 ως το 1990 μεταδιδόταν στην τηλεόραση των ΗΠΑ ένας τηλεοπτικός διαγωνισμός με τίτλο *Let's Make a Deal*, το παραπάνω πρόβλημα βασίζεται στη δυναμική του διαγωνισμού. Επίσης για πολλά χρόνια, σε περισσότερες από 300 εφημερίδες της ίδιας χώρας υπήρχε μια στήλη με τίτλο «ρωτήστε τη Marilyn», στην οποία υπήρχαν ερωτήσεις και απαντήσεις. Η γυναίκα που ήταν υπεύθυνη για τη στήλη, η **Marilyn Vos Savant** (11.08.1942–), είναι διάσημη επειδή εμφανίζεται στο βιβλίο των ρεκόρ ως το άτομο με τον υψηλότερο δείκτη ευφυΐας στον κόσμο με τιμή **IQ=228** και προσθέτει στη φήμη της το γεγονός ότι είναι παντρεμένη (1982) με τον γιατρό και επιστήμονα Robert Koffler Jarvis (11.05.1946–26.05.2025), ο οποίος ανάπτυξε την τεχνητή καρδιά. Ήταν μια Κυριακή του 1990 όταν δημοσίευσε στη στήλη της την ερώτηση του προβλήματος

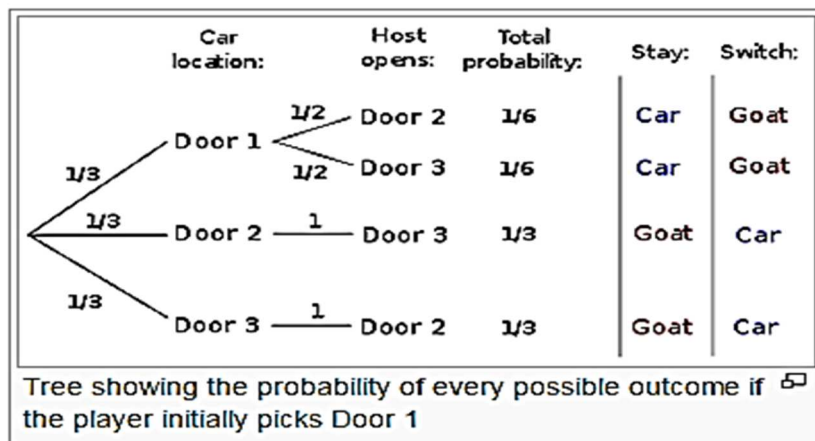
*«Είναι πλεονέκτημα για τον διαγωνιζόμενο να αλλάξει την πόρτα που είχε επιλέξει αρχικά;».*

Η Marilyn έγραψε στη στήλη της ότι ήταν καλύτερο να αλλάξει πόρτα. Αυτό έγινε αφορμή για μια πλημμύρα επιστολών από τους αναγνώστες της (περίπου 10.000) που ήταν σχεδόν ομόφωνες, το 92% της έλεγε ότι έκανε λάθος, προσθέτοντας ότι ήταν απογοητευμένοι από το γεγονός ότι ένα άτομο σαν αυτή έδωσε μια λανθασμένη απάντηση σε μια τόσο απλή ερώτηση. Της έγραψαν πολλοί καθηγητές μαθηματικών, που ήταν αγανακτισμένοι. Οι απαντήσεις συνέχισαν να φτάνουν σε βιομηχανικές ποσότητες για μεγάλο χρονικό διάστημα ως ότου, αφού αφιέρωσε περισσότερο χώρο στη στήλη της, η συγγραφέας αποφάσισε να επιλύσει το θέμα.

Η Marilyn είχε δίκιο και όσοι της έγραψαν, μαθηματικοί ή όχι έκαναν λάθος. Ακολουθεί το σχήμα με το αρχικό πρόβλημα, που πίσω από τις πόρτες χωρίς το μεγάλο έπαθλο υπάρχει μια κατσίκα, που δείχνει ότι αν συνεχίσεις με την πόρτα που έχεις επιλέξει οι πιθανότητες σου είναι  $1/3$  εφόσον υπήρχαν 3 πόρτες και επέλεξες μια, ενώ αν αλλάξεις γίνεται  $2/3$ , διπλασιάζεις τις πιθανότητές σου. Είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι δεν υπήρχαν αντιρρήσεις μόνο από τους μαθηματικούς του «σωρού», αλλά ότι ακόμη και ο Ούγγρος Pal Erdos (26.03.1913–20.09.1996) ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20<sup>ου</sup> αιώνα, είπε ότι αυτή η λύση ήταν αδύνατη και παραδέχτηκε το λάθος του μόνο μετά από μια προσομοίωση σε υπολογιστή.

## Player picks Door 1

Car hidden behind Door 1		Car hidden behind Door 2		Car hidden behind Door 3	
Player initially picks Door 1					
Host randomly opens either goat door		Host must open Door 3		Host must open Door 2	
Probability 1/6	Probability 1/6	Probability 1/3		Probability 1/3	
Switching loses	Switching loses	Switching wins		Switching wins	



Το δώρο είναι στην	Πόρτα Α	Πόρτα Β	Πόρτα Γ
Επιλέγετε	Πόρτα Α	Πόρτα Α	Πόρτα Α
Ο Monty Hall ανοίγει την	Πόρτα Β ή Γ	Πόρτα Γ	Πόρτα Γ
Τελική έκβαση	Παραμένετε στην πόρτα Α, κερδίζετε	Παραμένετε στην πόρτα Α, χάνετε	Παραμένετε στην πόρτα Α, χάνετε

Το δώρο είναι στην	Πόρτα Α	Πόρτα Β	Πόρτα Γ
Επιλέγετε	Πόρτα Α	Πόρτα Α	Πόρτα Α
Ο Monty Hall ανοίγει την	Πόρτα Β	Πόρτα Γ	Πόρτα Β
Τελική έκβαση	Αλλάζετε με την πόρτα Γ, χάνετε	Αλλάζετε με την πόρτα Β κερδίζετε	Αλλάζετε με την πόρτα Γ κερδίζετε

### 9.17 Το δίλημμα του φυλακισμένου

Δύο άτομα συλλαμβάνονται ως ύποπτοι τέλεσης αδικημάτων. Η αστυνομία δεν έχει όλα τα αποδεικτικά στοιχεία για να τους απαγγείλει κατηγορία, οπότε τους βάζει σε χωριστά κελιά, εμποδίζοντάς την μεταξύ τους επικοινωνία. Ο εισαγγελέας τους επισκέπτεται ξεχωριστά και κάνει στον καθένα την εξής προσφορά:

- Αν καταθέσεις εναντίον του άλλου (και ο άλλος δεν μιλήσει) τότε αφήνεσαι ελεύθερος, ενώ ο άλλος φυλακίζεται για 20 έτη.
- Αν δεν μιλήσει κανείς σας, πηγαίνετε για 1 έτος στη φυλακή και οι δύο για ήσσονος σημασίας αδικήματα, τα οποία η αστυνομία μπορεί να αποδείξει.
- Αν αλληλοκαρφωθείτε, τότε θα φυλακισθείτε για 10 έτη ο καθένας.

		
	10 / 10	FREE! / 20
	20 / FREE!	1 / 1

kathimerinifysiki.gr

Πιθανότερο θεωρείται ότι 2 λογικοί άνθρωποι θα επιλέξουν το βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή να σιωπήσουν και οι 2 και να φυλακισθούν μόνο για ενός έτος. Τι συμβαίνει όμως στην πράξη; Η απάντηση βρίσκεται στην εμπιστοσύνη που δείχνει ο ένας στην απόφαση του άλλου. Με δεδομένη κάθε επιλογή του αντίπαλου παίκτη, το αποτέλεσμα του ανταγωνισμού επικρατεί έναντι του αποτελέσματος της συνεργασίας. Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι το κοινό συμφέρον, δεν είναι πάντα η επιλογή των απόλυτα λογικά σκεπτόμενων ατόμων αλλά συχνά απόλυτα λογικά επιλογές μπορούν να οδηγήσουν σε ζημία, όλους τους εμπλεκόμενους.

Η κατάσταση αλλάζει αν το παιχνίδι επαναλαμβάνεται, οπότε κάθε παίκτης έχει τη δυνατότητα να τιμωρήσει μέσω της επιλογής του τον άλλο παίκτη, για την προηγούμενη παρασπονδία του. Σε αυτή την περίπτωση, όταν οι επαναλήψεις του παιχνιδιού τείνουν στο άπειρο, η επιλογή της συνεργασίας (να κρατήσουν και οι 2 κλειστό το στόμα τους) τείνει να επικρατήσει.

Αν οι 2 ύποπτοι επικοινωνούσαν, θα έβλεπαν ότι καλύτερη λύση είναι η μη ομολογία. Όμως δεν αποκλείεται η προδοσία. Όμως αν οι 2 ύποπτοι έχουν ξαναέρθει αντιμέτωποι με το συγκεκριμένο πρόβλημα, τότε έχουν συνεννοηθεί και δεν υπάρχει περίπτωση προδοσίας, δηλαδή δεν θα μιλήσουν. Αυτή η ισορροπία λέγεται **τέλεια ισορροπία** του John Forbes Nash Jr (13.01.1928–23.05.2018).

## 9.18 Η ιστορία της ασφάλειας ζωής

Η ασφάλιση, είναι τόσο παλιά όσο και ο άνθρωπος. Από την εμφάνισή του, ο άνθρωπος οργάνωνε τη ζωή του σε κοινωνίες, επειδή διαπίστωσε ότι από μόνος του δε μπορούσε να ανταπεξέλθει στους κινδύνους της προϊστορικής εποχής. Οργανωμένος σε κοινωνίες μέσα σε σπηλιές, μπόρεσε να βρει την απαραίτητη ασφάλεια. Την έννοια της ασφάλισης, τη βρίσκουμε με σαφήνεια διατυπωμένη στα αρχαία κείμενα, ή τη συμπεραίνουμε από διάφορα περιστατικά. Οι αρχές του θεσμού της ασφάλισης χάνονται γύρω στη 2<sup>η</sup> π.Χ. χιλιετία. Η ασφάλιση στα πρώτα της στάδια, εμφανίστηκε με τη μορφή αλληλοβοήθειας, μεταξύ ατόμων που εκτελούσαν ένα παρεμφερές είδος εργασίας. Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες δούλευαν οι εργάτες των πυραμίδων στην αρχαία Αίγυπτο, ήταν άθλιες. Πολλά εργατικά ατυχήματα και πολλές ασθένειες τους μάζιζαν. Έτσι, δημιουργήθηκε το **1<sup>ο</sup> γνωστό ταμείο αλληλοβοήθειας**, όπως προκύπτει από πάπυρο που βρίσκεται στο μουσείο του Καΐρου. Οι πληρωμές των εργατών γίνονταν τότε σε είδος (λάδι, σιτάρι και άλλα τρόφιμα) την 1<sup>η</sup> κάθε μήνα. Από αυτή την αμοιβή, κατέβαλαν από κοινού κάποια ποσότητα τροφίμων, ώστε να εξασφαλιστεί φαγητό για όσους δε μπορούσαν να δουλέψουν. Επιπλέον, το ταμείο αλληλοβοήθειας προέβλεπε αποζημίωση σε περίπτωση θανάτου, για να πληρωθούν τα έξοδα κηδείας. Παρόμοιες ασφαλίσεις υπάρχουν και σε άλλους νεότερους κώδικες των χωρών της Μεσοποταμίας.

### 9.18.1 Αρχαία Ελλάδα

Στην αρχαία Ελλάδα, ήταν διαδεδομένη η ασφαλιστική κάλυψη των εξόδων κηδείας, σύστημα που αναπτύχθηκε μέσω θρησκευτικών, μη κερδοσκοπικών οργανώσεων. Αργότερα, με νόμο του Σόλωνα τον 6<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα, θεσπίστηκε ο όρος των **ομοτάφων**, ο **1<sup>ος</sup> ασφαλιστικός νόμος** που καθόριζε τη λειτουργία εταιριών που είχαν ως αντικείμενο την κάλυψη των εξόδων κηδείας.

Τα διάφορα σωματεία και οι ενώσεις της εποχής, διεύρυναν την έννοια της ασφάλισης δημιουργώντας εταιρίες που είχαν ως αντικείμενο την αλληλοβοήθεια, την αμοιβαιότητα και τον καταμερισμό των κινδύνων, πέρα από τα έξοδα κηδείας και είχαν πλέον κερδοσκοπικό χαρακτήρα. Στην Κύπρο τον 5<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα, εμφανίστηκε το **1<sup>ο</sup> νοσοκομειακό πρόγραμμα της ιστορίας**. Ήταν η συμφωνία μεταξύ του βασιλιά Ιδαλίου και του ιατρού Ονάσιλλου και των αδελφών του. Η συμφωνία όριζε ότι ο Ονάσιλλος και οι αδελφοί του θα αναλάμβαναν την περίθαλψη των στρατιωτών που θα τραυματιζόντουσαν σε επερχόμενη μάχη. Σαν αντάλλαγμα, ο βασιλιάς Ιδάλιος πρόσφερε χρήματα και γη.

### 9.18.2 Αρχαία Ρώμη

Στους πρώτους Ρωμαϊκούς χρόνους, η επίδραση των αρχαίων Ελλήνων ήταν μεγάλη. Φυσικά δε θα μπορούσε η ασφάλιση να αποτελεί εξαίρεση. Έτσι, όλη η τεχνογνωσία της ασφάλισης, πέρασε αυτούσια στους Ρωμαίους και εξελίχθηκε. Από τους λεγεωνάριους θεσπίστηκε το **1<sup>ο</sup> συνταξιοδοτικό σύστημα** της ανθρωπότητας. Σύμφωνα με αυτό, όποιος λεγεωνάριος αποχωρούσε από την υπηρεσία έπαιρνε χρηματική αποζημίωση, ή αν σκοτωνόταν σε κάποια μάχη, η αποζημίωση καταβαλλόταν στην οικογένειά του.

Με την ανάπτυξη των τεχνών και των επιστημών, οι Ρωμαίοι δημιούργησαν πίνακες που καθόριζαν τις παροχές και τις συντάξεις, ανάλογα με τις εισφορές των ενδιαφερομένων. Η φιλοσοφία αυτής της οργάνωσης, δε διαφέρει καθόλου από το πνεύμα των σημερινών τιμολογίων των ασφαλιστικών εταιριών.

### 9.18.3 Βυζάντιο

Στο Βυζάντιο υπάρχουν πολλά ιστορικά στοιχεία που φανερώουν την έννοια της ασφάλισης και τα βρίσκουμε κατά κύριο λόγο στους **Πανδέκτες** του Ιουστινιανού. Τα πιο χαρακτηριστικά στοιχεία της ασφάλισης υπάρχουν στο 14<sup>ο</sup> βιβλίο όπου αναφέρεται στην κοινή αβαρία των Ροδίων και στα ναυτοδάνεια των Αθηναίων και στο 15<sup>ο</sup> βιβλίο όπου αναφέρεται η δωρεά αιτία θανάτου, που είχε ως σκοπό την οικονομική εξασφάλιση της χήρας, κάτι ανάλογο με τη σημερινή ασφάλιση ζωής. Από τον 14<sup>ο</sup> μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, σημειώθηκαν ραγδαίες εξελίξεις στο θεσμό της ασφάλειας ζωής. Το **1435**, στη Βαρκελώνη της Ισπανίας εκδόθηκε ο **1<sup>ος</sup> νόμος** που αφορούσε τη σύνταξη των ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Έτσι, άρχισε να δημιουργείται το ασφαλιστικό δίκαιο. Η ασφάλιση γινόταν με εμπειρικό τρόπο και εξαρτιόνταν πολύ από τον παράγοντα τύχη. Πολλοί ασφαλιστές καταστράφηκαν οικονομικά, γιατί δε μπόρεσαν να αντέξουν τις αποζημιώσεις. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα του συνεταιρισμού.

Οι ασφαλιστές, άρχισαν να συνεταιρίζονται και να ευθύνονται για πολλούς κινδύνους, αλλά με συγκεκριμένο ποσοστό και όχι για ολόκληρο τον κίνδυνο. Με αυτό τον τρόπο, άρχισε να εφαρμόζεται η θεωρία των μεγάλων αριθμών, να περιορίζεται ο παράγοντας της τύχης και να εξουδετερώνεται ο κίνδυνος της χρεοκοπίας του ασφαλιστή. Το **1650**, ο Φλωρεντιανός ιατρός **Lorento Tonti**, ίδρυσε την **1<sup>η</sup> τοντία**. Οι τοντίνες ήταν σωματεία που συγκέντρωναν από τα μέλη τους, εισφορές για τη δημιουργία κεφαλαίου και μοίραζαν τα κέρδη στα μέλη που επιζούσαν κάθε χρόνο. Η διάρκεια του σωματείου ήταν ορισμένη, οπότε με τη λήξη της το κεφάλαιο διανεμόταν στα μέλη που επιζούσαν ή ήταν αόριστης διάρκειας και το κεφάλαιο το έπαιρνε ο τελευταίος επιζών. Ήταν μια μορφή ασφάλισης επιβίωσης, αλλά οδηγούσε στον πλουτισμό εκείνου που είχε την τύχη να επιβιώσει.

Από τον θεσμό των τοντίνων ξεκίνησαν οι έρευνες για τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου και βασίζονταν σε στατιστικές παρατηρήσεις, που με τον υπολογισμό της πιθανότητας ζωής για την κάθε ηλικία, θεμελίωσαν τη σύγχρονη ασφάλιση ζωής. Το 1654 ο μαθηματικός **Pascal** διατυπώνει τον νόμο των πιθανοτήτων, ο οποίος με τους συσχετισμούς του βοήθησε στη δημιουργία των τιμολογίων των ασφαλιστικών εταιριών που εφαρμόζεται μέχρι σήμερα.

Οι Άγγλοι αστρονόμοι **Edmond Halley** και **James Dotson** διαμόρφωσαν τον **1<sup>ο</sup> επίσημο πίνακα θνησιμότητας** το 1693. Σκοπός τους ήταν να καθορίσουν διαφορετικό ασφάλιστρο, ανάλογα με την ηλικία του ασφαλισμένου και συνέλαβαν αυτή την ιδέα όταν μία ασφαλιστική εταιρία αρνήθηκε να ασφαλίσει τον Dotson, λόγω μεγάλης ηλικίας. Ο νόμος των πιθανοτήτων του Pascal, σε συνδυασμό με τον πίνακα θνησιμότητας των Halley και Dotson, δημιούργησε μία νέα επιστήμη, την **αναλογιστική**, στην οποία στηρίζεται η σύγχρονη ασφάλιση.

### 9.18.4 Η ασφάλεια ζωής σήμερα

Σήμερα, η ασφάλιση έχει εξελιχθεί σε επιστήμη. Με την ασφαλιστική μελέτη της οικογένειας ή της επιχείρησης, ο επαγγελματίας ασφαλιστικός σύμβουλος μπορεί να προσφέρει τέτοια ασφαλιστική κάλυψη που είναι ικανή να αποτρέψει οποιαδήποτε οικονομική ζημιά ή καταστροφή.