

Διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ)

Διαφορική εξίσωση (ΔΕ), ονομάζεται μία εξίσωση που περιέχει παραγώγους μίας άγνωστης συνάρτησης. Οι ΔΕ διακρίνονται σε:

- **Συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ), στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση y είναι συνάρτηση μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής. Π.χ. $y'' = y$
- **Μερικές** διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση y είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Π.χ. $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4xy + 5x + 6y + 7$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y + 5$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 4x + 6$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$$

Τάξη μίας ΔΕ, ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Βαθμός μίας ΔΕ, που μπορεί να γραφεί σε μορφή πολωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η ανώτερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση.

- $dy + (xy - \cos x)dx = 0$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $5\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 7y = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $8y''' + 7xy'' + 5y(y')^2 - xy = 0$, 3^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7y = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - xy = 0$, 3^{ης} τάξης, 2^{ου} βαθμού
- $y' - x = (y - xy')^{-3}$ ή $y' - x = \frac{1}{(y - xy')^3}$, 1^{ης} τάξης, 4^{ου} βαθμού
- $\sqrt{\rho' + \rho} = \cos \theta$, ή $\rho' + \rho = \cos^2 \theta$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$, ή $\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right)^4 = \rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$, 2^{ης} τάξης, 4^{ου} βαθμού
- $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$, 2^{ης} τάξης, 2^{ου} βαθμού
- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 6xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x - 12$, 2^{ης} τάξης, 2^{ου} βαθμού

Αν μία ΔΕ δεν μπορεί να γραφεί σε μορφή πολωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, τότε δεν διακρίνουμε το βαθμό αυτής.

- $e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 3$, 2^{ης} τάξης, δεν έχει βαθμό διότι υπάρχει ο παράγοντας e^y που δεν γράφεται σε μορφή πολυωνύμου

Γραμμική, ονομάζεται μία ΔΕ αν είναι 1^{ου} βαθμού ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της. Η γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης έχει τη μορφή $y' + p(x)y = q(x)$ και αν $q(x) = 0$ γράφεται ως $y' + p(x)y = 0$ και ονομάζεται **ομογενής** γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης (λύνεται με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών). Π.χ. $y' - 2y = x$, $xy' + 2y = 3x$, $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Μία γραμμική ΔΕ είναι 1^{ου} βαθμού, ενώ μία 1^{ου} βαθμού ΔΕ δεν είναι πάντα γραμμική. Π.χ. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 y^3 - 7 \Leftrightarrow y' - 4x^2 y^3 = -7$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού, όχι γραμμική διότι υπάρχει το y^3

Επίλυση ή ολοκλήρωση μίας ΔΕ, ονομάζεται η εύρεση της άγνωστης συνάρτησης της οποίας κάποιες παράγωγοι εμφανίζονται στη ΔΕ. Η συνάρτηση αυτή, ονομάζεται **γενική λύση** ή **ολοκλήρωμα** της ΔΕ. Από τη γενική λύση, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά, λαμβάνουμε διάφορες λύσεις οι οποίες κατά αντιδιαστολή προς τη γενική λύση, ονομάζονται **μερικές λύσεις**. Οι γραφικές παραστάσεις των μερικών λύσεων μίας ΔΕ, ονομάζονται **ολοκληρωτικές καμπύλες** της ΔΕ. Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης μίας ΔΕ δεν είναι μόνο η εύρεση των λύσεων, όταν αυτό είναι δυνατό, αλλά και η μελέτη της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων.

Εφαρμογή 1

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι λύσεις της ΔΕ $y'' = y$;

(α) $y(x) = e^x$ (β) $y(x) = \sin x$ (γ) $y(x) = 4e^{-x}$ (δ) $y(x) = 0$

Λύση

(α)	(β)
$\left. \begin{aligned} y(x) &= e^x \\ y'(x) &= e^x \\ y''(x) &= e^x \end{aligned} \right\} y'' = y$	$\left. \begin{aligned} y(x) &= \sin x \\ y'(x) &= \cos x \\ y''(x) &= -\sin x \end{aligned} \right\} y'' \neq y$

(γ)	(δ)
$\left. \begin{aligned} y(x) &= 4e^{-x} \\ y'(x) &= -4e^{-x} \\ y''(x) &= 4e^{-x} \end{aligned} \right\} y'' = y$	$\left. \begin{aligned} y(x) &= 0 \\ y'(x) &= 0 \\ y''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} y'' = y$

Εφαρμογή 2

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι λύσεις της ΔΕ $y'' - 4y' + 4y = e^x$;

(α) $y(x) = e^x$ (β) $y(x) = e^{2x}$ (γ) $y(x) = e^x + e^{2x}$ (δ) $y(x) = xe^x + e^{2x}$ (ε) $y(x) = e^x + xe^{2x}$

Λύση

(α)

$$\left. \begin{aligned} y = e^x &\Rightarrow 4y = 4e^x \\ y' = e^x &\Rightarrow -4y' = -4e^x \\ y'' = e^x \end{aligned} \right\} y'' - 4y' + 4y = e^x$$

(β)

$$\left. \begin{aligned} y = e^{2x} &\Rightarrow 4y = 4e^{2x} \\ y' = 2e^{2x} &\Rightarrow -4y' = -8e^{2x} \\ y'' = 4e^{2x} \end{aligned} \right\} y'' - 4y' + 4y = 0$$

(γ)

$$\left. \begin{aligned} y = e^x + e^{2x} &\Rightarrow 4y = \cancel{4e^x} + \cancel{4e^{2x}} \\ y' = e^x + 2e^{2x} &\Rightarrow -4y' = \cancel{-4e^x} - \cancel{8e^{2x}} \\ y'' = e^x + \cancel{4e^{2x}} \end{aligned} \right\} y'' - 4y' + 4y = e^x$$

ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών

Στις ΣΔΕ 1^{ης} τάξης, ανήκουν οι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, των οποίων ζητείται να βρεθούν οι γενικές λύσεις. Υπάρχουν 2 γενικές μορφές ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

1^η μορφή

$$A(x) + B(y)y' = 0 \Leftrightarrow B(y)y' = -A(x) \Leftrightarrow B(y) \frac{dy}{dx} = -A(x) \Leftrightarrow$$

$$B(y)dy = -A(x)dx \Leftrightarrow \int B(y) dy = -\int A(x) dx + c$$

2^η μορφή

$$y' = A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{B(y)} = A(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x) dx + c$$

Εφαρμογή 3

$$\text{Λύστε τη ΔΕ } x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0$$

Λύση

$$x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0 \Leftrightarrow x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x \cancel{(1+y^2)}}{\cancel{(1+y^2)}(1+x^2)} + \frac{y \cancel{(1+x^2)}}{(1+y^2)\cancel{(1+x^2)}} \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2} dy = -\frac{x}{1+x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = -\int \frac{x}{1+x^2} dx + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln c \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = \ln \frac{c}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$1 + y^2 = \frac{c}{1 + x^2} \Leftrightarrow (1 + y^2)(1 + x^2) = c \text{ γενική λύση της } \Sigma \Delta \text{Ε με } c, c_1 \in \mathbb{R} \text{ και } c > 0.$$

Εφαρμογή 4

Λύστε τη ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών $y = 2xy'$. Ποια είναι η ολοκληρωτική γραμμή που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$;

Λύση

$$y = 2xy' \Leftrightarrow y = 2x \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{2x} + c_1 = \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + c_1 = \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|x| + \ln|c| = \ln|y| \Leftrightarrow \ln|x| + 2 \cdot \ln|c| = 2 \cdot \ln|y| \Leftrightarrow \ln|x| + \ln|c|^2 = \ln|y|^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(|x||c|^2) = \ln|y|^2 \Leftrightarrow |x||c|^2 = |y|^2 \Leftrightarrow xc^2 = y^2$$

Στη γενική λύση θέτω $x = 1$ και $y = 2$, οπότε $1c^2 = 2^2 \Leftrightarrow c = 2$

Συνεπώς, η ζητούμενη ολοκληρωτική γραμμή είναι $y^2 = 4x$

Εφαρμογή 5

Λύστε τη ΔΕ $(1 + y^2)dx + x \cdot y \cdot dy = 0$

Λύση

$$(1 + y^2)dx + x \cdot y \cdot dy = 0 \Leftrightarrow x \cdot y \cdot dy = -(1 + y^2)dx \Leftrightarrow \frac{y}{1 + y^2} dy = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = -\int \frac{dx}{x} + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = -\ln x + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln \sqrt{1 + y^2} = \ln \frac{c}{x} \Leftrightarrow 1 + y^2 = \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow c = x^2(1 + y^2)$$

Εφαρμογή 6

Λύστε τη ΔΕ $x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$

Λύση

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0 \Leftrightarrow x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 1)dy \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{y}{y^2 - 1} dy \Leftrightarrow \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{y}{y^2 - 1} dy + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 - 1} dy + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 1) + \ln c_2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 - 1) = \ln(y^2 - 1) + 2\ln c_2 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln[2c_2(y^2 - 1)] \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 1 = 2c_2(y^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = c(y^2 - 1) \text{ με } c, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ και } c_2, c > 0$$

Εφαρμογή 7

Λύστε τη ΔΕ $y' = x^2 \cdot y^3$

Λύση

$$y' = x^2 \cdot y^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^3} = x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \frac{x^3 + 3c}{3} \Leftrightarrow -2y^2 = \frac{3}{x^3 + 3c}$$

Η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι $2y^2 = \frac{-3}{x^3 + c_1}$ με $c, c_1 \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 8

Υπολογίστε τους $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε η $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $y(1) = 1$ και $y'(1) = -1$

Λύση

$$\bullet y(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 \cdot e^1 + c_2 \cdot 1 \cdot e^1 + 1^2 \cdot e^1 = 1 \Leftrightarrow c_1 e + c_2 e + e = 1$$

$$\bullet y'(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_2 e^x + x^2 e^x + 2x e^x$$

•

$$y'(1) = -1 \Leftrightarrow c_1 e^1 + c_2 1 e^1 + c_2 e^1 + 1^2 e^1 + 2 \cdot 1 e^1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 e + c_2 e + c_2 e + e + 2e = -1 \Leftrightarrow c_1 e + 2c_2 e + 3e = -1$$

Ισχύει ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 e + c_2 e + e = 1 \\ c_1 e + 2c_2 e + 3e = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e(c_1 + c_2 + 1) = 1 \\ e(c_1 + 2c_2 + 3) = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + 1 = \frac{1}{e} \\ c_1 + 2c_2 + 3 = \frac{-1}{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ \frac{1}{e} - c_2 - 1 + 2c_2 + 3 = \frac{-1}{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 + 2 = \frac{-2}{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{e} + 2 + \frac{2}{e} - 1 \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1 + \frac{3}{e} \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{array} \right\}$$

Εφαρμογή 9

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{2x}$

Λύση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{2x} \Leftrightarrow \frac{2dy}{y} = \frac{-3dx}{x} \Leftrightarrow \frac{2dy}{y} + \frac{3dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \int \frac{2dy}{y} + \int \frac{3dx}{x} = c_1 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \ln y + 3 \cdot \ln x = \ln c \Leftrightarrow \ln y^2 + \ln x^3 = \ln c \Leftrightarrow \ln(y^2 x^3) = \ln c \Leftrightarrow y^2 x^3 = c$$

Επειδή η σταθερά c_1 είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί για c_1 να θέσω $\ln c$, όπου $c > 0$ άλλη αυθαίρετη σταθερά.

Εφαρμογή 10

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $(x-1)^2 y dx + x^2 (y+1) dy = 0$

Λύση

Θεωρώ ότι $xy \neq 0$

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 y dx + x^2 (y+1) dy &= 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \frac{y+1}{y} dy = 0 \Leftrightarrow \\
\frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \frac{(y+1)}{y} dy &= 0 \Leftrightarrow \int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \int \frac{y+1}{y} dy = c \Leftrightarrow \\
\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} dx + \int \frac{y}{y} dy + \int \frac{1}{y} dy &= c \Leftrightarrow \\
\int 1 dx - \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int 1 dy + \ln y &= c \Leftrightarrow x - 2\ln x - \frac{1}{x} + y + \ln y = c
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 11

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$

Λύση

$$\begin{aligned}
(1+x^3)dy - x^2 y dx &= 0 \Leftrightarrow (1+x^3)dy = x^2 y dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3} dx \Leftrightarrow \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x^2}{1+x^3} dx + c \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx + c_1 \Leftrightarrow \\
\ln y &= \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + \ln c \Leftrightarrow \ln y = \ln \sqrt[3]{1+x^3} + \ln c \Leftrightarrow \ln y = \ln \left(c \sqrt[3]{1+x^3} \right) \Leftrightarrow \\
y &= c \sqrt[3]{1+x^3}. \text{ Επειδή η σταθερά } c_1 \text{ είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί για } c_1 \text{ να θέσω } \ln c \\
&\text{όπου } c > 0, \text{ άλλη αυθαίρετη σταθερά.}
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 12

Αφού βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $e^x dx - y dy = 0$ να υπολογιστεί η καμπύλη ολοκλήρωσης της που διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$

Λύση

$$\begin{aligned}
e^x dx - y dy &= 0 \Leftrightarrow e^x dx = y dy \Leftrightarrow \int e^x dx = \int y dy + c_1 \Leftrightarrow \\
e^x &= \frac{y^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow 2e^x = y^2 + 2c_1 \Leftrightarrow y^2 = 2e^x - 2c_1
\end{aligned}$$

Γενική λύση

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην ανωτέρω εξίσωση προκύπτει ότι $1^2 = 2e^0 - 2c_1 \Leftrightarrow 1 = 2 - 2c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη καμπύλη είναι $y^2 = 2e^x - 2c_1 = 2e^x - 1$ ή ισοδυνάμως $y = \sqrt{2e^x - 1}$.

Εφαρμογή 13

Λύστε τη ΔΕ $(x^2 - y^2)dx + 2 \cdot x \cdot y \cdot dy = 0$

Λύση

Αν $f(x, y) = (x^2 - y^2)dx + 2 \cdot x \cdot y \cdot dy$ ισχύει ότι:

$$f(\lambda x, \lambda y) = ((\lambda x)^2 - (\lambda y)^2)dx + 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y \cdot dy = \lambda^2 (x^2 - y^2)dx + \lambda^2 2 \cdot x \cdot y \cdot dy = \lambda^2 [(x^2 - y^2)dx + 2 \cdot x \cdot y \cdot dy] = \lambda^2 \cdot f(x, y)$$

Συνεπώς, η ΔΕ $f(x, y) = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{M(x, y)}dx + \underbrace{2 \cdot x \cdot y}_{N(x, y)}dy = 0$ είναι ομογενής ως προς x, y βαθμού ομοιογένειας 2.

$$\text{Θέτω } \frac{y}{x} = \omega \Leftrightarrow y = x\omega \Leftrightarrow y' = x'\omega + x\omega' \Leftrightarrow y' = \omega + x\omega'$$

και αντικαθιστώντας στην $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ προκύπτει ότι

$$(x^2 - x^2\omega^2)dx + 2xx\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - \omega^2) + 2x^2\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow_{x \neq 0}$$

$$(1 - \omega^2) + 2\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow 1 - \omega^2 + 2\omega^2 + 2x\omega \frac{d\omega}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \omega^2 + 2x\omega \frac{d\omega}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x\omega \frac{d\omega}{dx} = -(1 + \omega^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{dx} = -\frac{1 + \omega^2}{2\omega d\omega} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2\omega}{1 + \omega^2} d\omega \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -\ln(1 + \omega^2) + \ln c \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{c}{1 + \omega^2} \Leftrightarrow x = \frac{c}{1 + \omega^2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{c}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{cx^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \cancel{x} = \frac{cx^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{cx}{x^2 + y^2}$$

Άρα, $x^2 + y^2 = cx$, με $c > 0$.

Ολοκληρωτική καμπύλη είναι η καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε μία μερική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των ορθογωνίων αξόνων.

Οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών ή επίπεδο γένος καμπυλών, είναι το σύνολο των καμπυλών που προκύπτουν από τη γενική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των καρτεσιανών αξόνων. Δηλαδή, πρόκειται για ένα πλήθος επίπεδων καμπυλών, που ορίζονται από μία εξίσωση, που περιέχει μόνο μία παράμετρο της μορφής $f(x, y, c_1) = 0$.

Εφαρμογή 14

Λύστε την ομογενή ΔΕ $2 \cdot x \cdot y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

Λύση

Η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y με βαθμό ομοιογένειας 2.

$$\text{Είναι } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{2y}{x}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \frac{y}{x}} \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \text{ και αντικαθιστώ στην (1)}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\text{Άρα } \frac{2 \cdot u}{1-u^2} \frac{du}{dx} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2 \cdot u}{1-u^2} du = \int \frac{1}{x} dx + c_1 \Rightarrow -\ln(1-u^2) = \ln x + \ln c \Rightarrow$$

$$\ln \frac{1}{1-u^2} = \ln(x \cdot c) \Rightarrow \frac{1}{1-u^2} = x \cdot c \Rightarrow \frac{1}{x \cdot c} = 1-u^2 = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}$$

$$\text{Συνεπώς, } \frac{1}{c} = \frac{x^2 - y^2}{x}.$$

Εφαρμογή 15

Λύστε την ομογενή ΔΕ $(y^2 - x^2)dx + xy dy = 0$

Λύση

Είναι $f(x, y) = (y^2 - x^2)dx + x \cdot y dy$ Άρα:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \left[(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2 \right] dx + \lambda x \cdot \lambda y dy = \lambda^2 (y^2 - x^2) dx + \lambda^2 x \cdot y dy = \lambda^2 f(x, y)$$

Συνεπώς, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y βαθμού ομογένειας 2

$$\text{Θέτω } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow dy = u dx + x du$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι:

$$(x^2 u^2 - x^2) dx + x \cdot u \cdot x (u dx + x du) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 u^2 dx - x^2 dx + x^2 u^2 dx + x^3 u du = 0 \Leftrightarrow x^2 (2u^2 - 1) dx + x^3 u du = 0$$

Διαιρώ δια x^2 , υποθέτοντας ότι $x \neq 0$ και προκύπτει ότι $(2u^2 - 1)dx + x u du = 0$

$$\text{➤ Αν } 2u^2 - 1 \neq 0 \text{ είναι: } \frac{\cancel{(2u^2 - 1)} dx}{x \cancel{(2u^2 - 1)}} + \frac{\cancel{x} u du}{\cancel{x} (2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{u du}{(2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \frac{4u du}{(2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{4u du}{(2u^2 - 1)} = c \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{4} \ln(2u^2 - 1) = c \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \ln x + \ln(2u^2 - 1) = 4c \Leftrightarrow \ln x^4 + \ln(2u^2 - 1) = 4c \Leftrightarrow \ln[x^4 (2u^2 - 1)] = \ln c' \Leftrightarrow$$

$$x^4 (2u^2 - 1) = c' \Leftrightarrow x^4 \left(2 \frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = c' \Leftrightarrow 2x^2 y^2 - x^4 = c'$$

$$\text{➤ Αν } 2u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

Εφαρμογή 16

Λύστε την ομογενή ΔΕ $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

Λύση

$$\text{Είναι } f(x, y) = xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

$$\text{Άρα, } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda \cdot x dy - \lambda \cdot y dx = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} dx =$$

$$\lambda(xdy - ydx) = \lambda\sqrt{x^2 + y^2}dx = \lambda f(x, y)$$

Συνεπώς, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y βαθμού ομογένειας 1

$$\begin{aligned} \text{Είναι } xdy - ydx &= \sqrt{x^2 + y^2}dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} &= \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτω } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + x \frac{du}{dx} \text{ και αντικαθιστώντας στην } (1) \\ \text{προκύπτει ότι } \cancel{u} + x \frac{du}{dx} = \cancel{u} + \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x} + c_1 = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Leftrightarrow \ln x + \ln c = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \Leftrightarrow x \cdot c = u + \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow$$

$$xc = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\text{Άρα } x^2c = y + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2c - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2c - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^4c^2 + \cancel{y^2} - 2 \cdot x^2c \cdot y = x^2 + \cancel{y^2} \Leftrightarrow x^4c^2 - 2 \cdot x^2c \cdot y = x^2 \Leftrightarrow x^2c^2 - 2 \cdot c \cdot y = 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2c^2 - 1 = 2 \cdot c \cdot y \Leftrightarrow \frac{x^2c^2 - 1}{2 \cdot c} = y \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \text{ με } c > 0.$$

ΔΕ των οποίων το 1^ο μέρος είναι ολικό ή τέλειο διαφορικό

Έχουν τη μορφή $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Εφαρμογή 17

Να λυθεί η ΔΕ $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

Λύση

Είναι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$, άρα η ΔΕ είναι τέλειο διαφορικό και η γενική της λύση δίνεται

από τον τύπο: $\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c$ δηλαδή

$$\int_0^x (3x^2 + 4xy) dx + \int_0^y (2 \cdot 0^2 + 3y^2) dy = c \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + y^3 = c$$

Άλυσες ασκήσεις διαφορικών εξισώσεων

1. Πυροβόλο βάλει βλήμα με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_0 στο επίπεδο xOz υπό γωνία $\hat{\theta}$ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο και $0 \leq \theta \leq \pi$. Τα σημεία του ανωτέρω επιπέδου που δεν είναι δυνατό να βληθούν από το κανόνι βρίσκονται πέρα από μία καμπύλη που θα διαγράψει το βλήμα, για τις διάφορες τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$. Βρείτε την καμπύλη αυτή που ονομάζεται περιβάλλουσα των τροχιών.

2. Δεξαμενή όγκου V είναι γεμάτη με καθαρό νερό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0''$ αρχίζει να εισρέει στη δεξαμενή θαλασσινό νερό, από σωλήνα παροχής Π , με αποτέλεσμα να εκρέει από τη δεξαμενή ίσος όγκος νερού ανά μονάδα χρόνου. Αν η συγκέντρωση του αλατιού στο θαλασσινό νερό είναι $x \frac{gr}{lit}$ βρείτε τη μάζα m του αλατιού που είναι διαλυμένη στο νερό που περιέχει η δεξαμενή τη χρονική στιγμή $t > 0$ και κάντε τη γραφική παράσταση $m(t)$.

Παραδοχή. Το αλάτι που περιέχεται στο θαλασσινό νερό το εισρέον στη δεξαμενή, διαχέεται ακαριαία σε όλο τον όγκο της δεξαμενής, ώστε η εκάστοτε συγκέντρωση αλατιού να είναι σταθερή, σε όλο τον όγκο της δεξαμενής.

3. Γνωρίζεις ότι σε σώμα που κινείται εντός ρευστού με ταχύτητα v , ασκείται από το ρευστό μία δύναμη F_R (αντίσταση ρευστού) ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα του σώματος, μέτρου $F_R = k_1 v$, όπου k_1 συντελεστής ανεξάρτητος της ταχύτητας. Σώμα μάζας m πέφτει από ύψος h_0 χωρίς αρχική ταχύτητα. Ποια θα είναι η ταχύτητα του v την τυχαία χρονική στιγμή t , αν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τον ανωτέρω τύπο; Να γίνει η γραφική παράσταση $v(t)$.

4. Τορπίλη μάζας m εκτοξεύεται οριζόντια, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιβραδύνεται από μία δύναμη ανάλογη της ταχύτητας της. Αν στην τορπίλη δεν ασκείται καμία άλλη δύναμη, ποια θα είναι η ταχύτητα της μετά τη διέλευση χρόνου t από την εκτόξευση της;