

Περιεχόμενα

10.1 Εισαγωγή.....	3
10.2 Είδη διαφορικών εξισώσεων.....	4
Εφαρμογή 1.....	4
10.3 Τάξη και βαθμός μίας διαφορικής εξίσωσης.....	4
Εφαρμογή 2.....	4
10.4 Γραμμική διαφορική εξίσωση.....	5
10.5 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης.....	5
Εφαρμογή 3.....	5
Εφαρμογή 4.....	6
10.6 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.....	6
Εφαρμογή 5.....	7
Εφαρμογή 6.....	8
Εφαρμογή 7.....	8
Εφαρμογή 8.....	9
Εφαρμογή 9.....	9
Εφαρμογή 10.....	9
Εφαρμογή 11.....	10
Εφαρμογή 12.....	10
Εφαρμογή 13.....	11
Εφαρμογή 14.....	11
Εφαρμογή 15.....	12
Εφαρμογή 16.....	13
Εφαρμογή 17.....	14
Εφαρμογή 18.....	15
10.7 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις.....	16
Εφαρμογή 19.....	16
10.8 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.....	16
10.9 Εφαρμογές στη ναυτιλία.....	16
10.9.1 Ναυπηγική.....	17
10.9.2 Ναυτική μηχανολογία.....	17
10.9.3 Ευστάθεια.....	18
10.9.4 Φόρτωση.....	18
10.9.5 Επικοινωνίες.....	19
10.9.6 Επικοινωνίες.....	19
10.9.7 Υδροδυναμική αντίσταση.....	19
10.9.8 Υδροδυναμική βελτίωση.....	20
10.9.9 Ανάλυση κυκλωμάτων και ενεργειακή απόδοση.....	22
10.9.10 Διαχείριση του συστήματος τροφοδοσίας.....	22
10.9.11 Δίκτυα επικοινωνίας και καθυστερήσεις.....	23
Εφαρμογή 20.....	23
Εφαρμογή 21.....	23
Εφαρμογή 22.....	24
Εφαρμογή 23.....	24
Εφαρμογή 24.....	25
Εφαρμογή 25.....	26
Εφαρμογή 26.....	27
Εφαρμογή 27.....	27
Εφαρμογή 28.....	28
Εφαρμογή 29.....	29
10.10 Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2 ^{ης} τάξης.....	29
10.10.1 Φυσική.....	30
Εφαρμογή 30.....	30
10.10.2 Βιολογία.....	31
10.10.3 Χημεία.....	31

10.10.4 Ηλεκτρονικά και ηλεκτρολογία.....	31
Εφαρμογή 31	31
10.10.5 Ρομποτική και τεχνητή νοημοσύνη	32
10.10.6 Αεροδυναμική και μηχανική ρευστών	33
10.10.7 Υδροστατική.....	33
10.10.8 Προγραμματισμός και προσομοιώσεις.....	34
10.10.9 Οικονομία και χρηματοοικονομικά.....	34
10.10.10 Υγεία και ιατρική	34
10.10.11 Περιβάλλον και κλίμα	34
10.10.12 Μουσική και ήχος.....	34
10.10.13 Απλό εκκρεμές	34
10.10.14 Ταλαντώσεις.....	35
10.10.15 Εξίσωση της ελαστικής καμπύλης και μέγιστη εκτροπή	35
10.11 Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2 ^{ης} τάξης στη ναυτιλία.....	35
10.11.1 Κίνηση πλοίου στη διάρκεια κυματισμών.....	36
10.11.2 Δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου.....	36
10.11.3 Ευστάθεια των πλοίων.....	36
10.11.4 Αυτόματος έλεγχος της πορείας.....	37
10.11.5 Υπολογιστικά μοντέλα και ναυπηγική ανάλυση.....	37
10.11.6 Προσομοιώσεις και πλοία νέας τεχνολογίας.....	37
10.11.7 Καταπόνηση του κύτους	37
10.11.8 Κύματα, συντονισμός και ναυτική μηχανολογία	38
Άλυτες ασκήσεις	38

10.1 Εισαγωγή

Οι διαφορικές εξισώσεις, είναι κλάδος των μαθηματικών που οφείλει τη γέννηση του στη μηχανική, στην αστρονομία και στη θεωρητική φυσική. Αρχίζουν να κάνουν την εμφάνισή τους από την εποχή των Newton (1642–1727) και Leibniz (1646–1716). Ο Newton είναι ο 1^{ος} που χρησιμοποίησε διαφορική εξίσωση, για τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων, περιοριζόμενος στις απλές μορφές $\frac{dy}{dx} = f(y)$,

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Ο Leibniz προχώρησε περισσότερο, αναπτύσσοντας τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, των ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης και των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης. Στον Leibniz οφείλονται οι συμβολισμοί της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ και του ολοκληρώματος

$\int f(x) dx$. Σκοπός της επιστήμης είναι η κατανόηση της φύσης, μέσα στην οποία ζούμε και μπορεί να επιτευχθεί με τη μελέτη των φαινομένων (φυσικών, χημικών, κοινωνικών, οικονομικών,...). Στη μελέτη αυτή, πρωταρχικό ρόλο παίζουν τα μαθηματικά. Από αρχαιοτάτων ετών, είχε γίνει αντιληπτό ότι τίποτα δεν παραμένει σταθερό, όλα αλληλένδετα μεταβάλλονται, όπως επιγραμματικά εκφράζει το ρητό του Ηράκλειτου (544–484 π.Χ.), *Πάντα ρει, πάντα χωρεί και ουδέν μένει*.

Η ταχύτητα ενός σώματος, που πέφτει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας, αλλάζει με τον χρόνο. Η αεροδυναμική αντίσταση ενός σώματος, αυξάνεται με την ταχύτητα, όχι όμως πάντα γραμμικά. Η θέση της Γης και των άλλων πλανητών, αλλάζει με τον χρόνο, σε σχέση με τον Ήλιο. Το κύρτωμα μιας δοκού, εξαρτάται από το βάρος που την καταπονεί. Ο όγκος μιας σφαίρας, μεταβάλλεται με την ακτίνα του. Επειδή τα περισσότερα φαινόμενα είναι πολύπλοκα, είναι πρακτικά αδύνατο να θεμελιωθούν και να περιγραφούν πλήρως, με μαθηματικό τρόπο.

Για αυτό προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πραγματικότητα με μαθηματικά πρότυπα, (μοντέλα), κάνοντας ορισμένες υποθέσεις που απλοποιούν τα φαινόμενα και τους νόμους που τα διέπουν. Οι απλοποιήσεις αυτές ανάγονται συνήθως στην παράλειψη ορισμένων στοιχείων, που θεωρούμε ότι επιδρούν λίγο, ή και καθόλου, στην εξέλιξη του φαινομένου. Η δημιουργία του μαθηματικού προτύπου γίνεται με μια μαθηματοποίηση των αντιστοιχών νόμων, που επειδή συνήθως περιέχουν ρυθμούς μεταβολής ενός μεγέθους, (ποσοτικά άγνωστου), εκφράζονται με παραγώγους του άγνωστου αυτού μεγέθους, οπότε το μαθηματικό πρότυπο παίρνει τη μορφή μιας συναρτησιακής σχέσης που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και ορισμένες παραγώγους της. Η συναρτησιακή αυτή σχέση ονομάζεται διαφορική εξίσωση.

10.2 Είδη διαφορικών εξισώσεων

Διαφορική εξίσωση (ΔΕ), είναι μία εξίσωση που περιέχει τις παραγώγους μίας άγνωστης συνάρτησης. Οι ΔΕ διακρίνονται σε:

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ), στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση y είναι συνάρτηση μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής. Π.χ. $y'' = y$

Μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση y είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

Εφαρμογή 1

Βρείτε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4xy + 5x + 6y + 7$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y + 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 4x + 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$$

10.3 Τάξη και βαθμός μίας διαφορικής εξίσωσης

Τάξη μίας ΔΕ, ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Βαθμός μίας ΔΕ, που μπορεί να γραφεί σε μορφή πολυωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η ανώτερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Εφαρμογή 2

Βρείτε την τάξη και τον βαθμό των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων.

- $dy + (xy - \cos x) dx = 0$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 7y = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $8y''' + 7xy'' + 5y(y')^2 - xy = 0$, 3^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 7y = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - 5 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 - xy = 0$, 3^{ης} τάξης, 2^{ου} βαθμού
- $y' - x = (y - xy')^{-3}$ ή $y' - x = \frac{1}{(y - xy')^3}$, 1^{ης} τάξης, 4^{ου} βαθμού
- $\sqrt{\rho' + \rho} = \cos \theta$, ή $\rho' + \rho = \cos^2 \theta$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2}$, ή $\left(\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} \right)^4 = \rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2$, 2^{ης} τάξης, 4^{ου} βαθμού
- $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{4}{x} \frac{dy}{dx} = 0$, 2^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού
- $4 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$, 2^{ης} τάξης, 2^{ου} βαθμού

$$\bullet \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + 6xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 9x - 12, \text{ 2}^{\text{ης}} \text{ τάξης, 2}^{\text{ου}} \text{ βαθμού}$$

Αν μία ΔΕ δεν μπορεί να γραφεί σε μορφή πολυωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της, τότε δεν διακρίνω τον βαθμό της.

$$\bullet e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 3, \text{ 2}^{\text{ης}} \text{ τάξης, δεν έχει βαθμό διότι υπάρχει ο παράγοντας } e^y \text{ που δεν γράφεται σε μορφή πολυωνύμου}$$

10.4 Γραμμική διαφορική εξίσωση

Γραμμική, ονομάζεται μία ΔΕ αν είναι 1^{ου} βαθμού ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της. Η γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης έχει τη μορφή $y' + p(x)y = q(x)$ και αν $q(x) = 0$ γράφεται ως $y' + p(x)y = 0$ και ονομάζεται **ομογενής** γραμμική ΔΕ 1^{ης} τάξης (λύνεται με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών). Π.χ. $y' - 2y = x$, $xy' + 2y = 3x$, $y' + \frac{1}{x}y = 2$

Μία γραμμική ΔΕ είναι 1^{ου} βαθμού, ενώ μία 1^{ου} βαθμού ΔΕ δεν είναι πάντα γραμμική. Π.χ. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 y^3 - 7 \Leftrightarrow y' - 4x^2 y^3 = -7$, 1^{ης} τάξης, 1^{ου} βαθμού, όχι γραμμική διότι υπάρχει το y^3

Εφαρμογή στη ναυτιλία

Η φόρτιση (και η εκφόρτιση) ενός πυκνωτή σε συστήματα αυτοματισμού και η απόσβεση των ταλαντώσεων ακολουθούν μία γραμμική διαφορική εξίσωση. Η φόρτιση ενός πυκνωτή σε ηλεκτρικό κύκλωμα RC , περιγράφεται από τη σχέση $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{E}{RC}$, όπου:

V η τάση στον πυκνωτή

R η αντίσταση

C η χωρητικότητα

E η πηγή της τάσης

10.5 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

Επίλυση ή ολοκλήρωση μίας ΔΕ, είναι η εύρεση της άγνωστης συνάρτησης της οποίας κάποιες παράγωγοι εμφανίζονται στη ΔΕ. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται **γενική λύση** ή **ολοκλήρωμα** της ΔΕ. Από τη γενική λύση, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά, λαμβάνω διάφορες λύσεις οι οποίες κατά αντιδιαστολή προς τη γενική λύση, ονομάζονται **μερικές λύσεις**. Οι γραφικές παραστάσεις των μερικών λύσεων μίας ΔΕ, ονομάζονται **ολοκληρωτικές καμπύλες** της ΔΕ. Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης μίας ΔΕ είναι η εύρεση των λύσεων, όταν αυτό είναι δυνατό και η μελέτη της ποιοτικής συμπεριφοράς τους.

Εφαρμογή 3

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι λύσεις της ΔΕ $y'' = y$;

$$(α) y(x) = e^x \quad (β) y(x) = \sin x \quad (γ) y(x) = 4e^{-x} \quad (δ) y(x) = 0$$

$$(\alpha) \begin{cases} y(x) = e^x \\ y'(x) = e^x \\ y''(x) = e^x \end{cases} y'' = y \qquad (\beta) \begin{cases} y(x) = \sin x \\ y'(x) = \cos x \\ y''(x) = -\sin x \end{cases} y'' \neq y$$

$$(\gamma) \begin{cases} y(x) = 4e^{-x} \\ y'(x) = -4e^{-x} \\ y''(x) = 4e^{-x} \end{cases} y'' = y \qquad (\delta) \begin{cases} y(x) = 0 \\ y'(x) = 0 \\ y''(x) = 0 \end{cases} y'' = y$$

Εφαρμογή 4

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι λύσεις της ΔΕ $y'' - 4y' + 4y = e^x$;

$$(\alpha) y(x) = e^x \qquad (\beta) y(x) = e^{2x} \qquad (\gamma) y(x) = e^x + e^{2x}$$

$$(\delta) y(x) = xe^x + e^{2x} \qquad (\epsilon) y(x) = e^x + xe^{2x}$$

$$(\alpha) \begin{cases} y = e^x \Rightarrow 4y = 4e^x \\ y' = e^x \Rightarrow -4y' = -4e^x \\ y'' = e^x \end{cases} y'' - 4y' + 4y = e^x$$

$$(\beta) \begin{cases} y = e^{2x} \Rightarrow 4y = 4e^{2x} \\ y' = 2e^{2x} \Rightarrow -4y' = -8e^{2x} \\ y'' = 4e^{2x} \end{cases} y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$(\gamma) \begin{cases} y = e^x + e^{2x} \Rightarrow 4y = 4e^x + 4e^{2x} \\ y' = e^x + 2e^{2x} \Rightarrow -4y' = -4e^x - 8e^{2x} \\ y'' = e^x + 4e^{2x} \end{cases} y'' - 4y' + 4y = e^x$$

$$(\delta) \begin{cases} y = xe^x + e^{2x} \Rightarrow 4y = 4xe^x + 4e^{2x} \\ y' = e^x + xe^x + 2e^{2x} \Rightarrow -4y' = -4e^x - 4xe^x - 8e^{2x} \\ y'' = 2e^x + xe^x + 4e^{2x} \end{cases} y'' - 4y' + 4y = -2e^x + xe^x$$

$$(\epsilon) \begin{cases} y = e^x + xe^{2x} \Rightarrow 4y = 4e^x + 4xe^{2x} \\ y' = e^x + e^{2x} + 2xe^{2x} \Rightarrow -4y' = -4e^x - 4e^{2x} - 8xe^{2x} \\ y'' = e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x} \end{cases} y'' - 4y' + 4y = e^x$$

10.6 Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Στις ΣΔΕ 1^{ης} τάξης, ανήκουν οι ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών, των οποίων ζητείται να βρεθούν οι γενικές λύσεις. Υπάρχουν 2 γενικές μορφές ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών.

1^η μορφή

$$A(x) + B(y)y' = 0 \Leftrightarrow B(y)y' = -A(x) \Leftrightarrow B(y) \frac{dy}{dx} = -A(x) \Leftrightarrow$$

$$B(y)dy = -A(x)dx \Leftrightarrow \int B(y)dy = -\int A(x)dx + c$$

2^η μορφή

$$y' = A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = A(x)B(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{B(y)} = A(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + c$$

Εφαρμογή στη ναυτιλία

Ο ρυθμός απώλειας θερμότητας από μια μηχανή στο περιβάλλον περιγράφεται με τον νόμο του Newton. Μια διαχωρίσιμη εξίσωση εκφράζει την ψύξη μιας μηχανής ή τη διάλυση του καυσίμου. Η ψύξη μίας μηχανής περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ΠΕΡ}})$ όπου:

T η θερμοκρασία του μετάλλου,
 $T_{\text{ΠΕΡ}}$ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος,
 k μία σταθερά.

Εφαρμογή 5

$$\text{Λύστε τη ΔΕ } x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0$$

$$\text{Είναι } x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(1+y^2) + y(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(1+y^2)}{(1+y^2)(1+x^2)} + \frac{y(1+x^2)}{(1+y^2)(1+x^2)} \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{1+y^2} dy = -\frac{x}{1+x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = -\int \frac{x}{1+x^2} dx + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+y^2) = \ln \frac{c}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$1+y^2 = \frac{c}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$(1+y^2)(1+x^2) = c \text{ γενική λύση της ΣΔΕ με } c, c_1 \in \mathbb{R} \text{ και } c > 0$$

Εφαρμογή 6

Λύστε τη ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών $y = 2xy'$. Ποια είναι η ολοκληρωτική γραμμή που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$;

$$\text{Είναι } y = 2xy' \Leftrightarrow$$

$$y = 2x \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{2x} + c_1 = \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + c_1 = \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|x| + \ln|c| = \ln|y| \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| + 2 \cdot \ln|c| = 2 \cdot \ln|y| \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| + \ln|c|^2 = \ln|y|^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(|x||c|^2) = \ln|y|^2 \Leftrightarrow$$

$$|x||c|^2 = |y|^2 \Leftrightarrow$$

$$xc^2 = y^2$$

Στη γενική λύση θέτω $x=1$ και $y=2$, οπότε $1c^2 = 2^2 \Leftrightarrow c = 2$

Άρα, η ζητούμενη ολοκληρωτική γραμμή είναι $y^2 = 4x$

Εφαρμογή 7

Λύστε τη ΔΕ $(1+y^2)dx + x \cdot y \cdot dy = 0$

$$\text{Είναι } (1+y^2)dx + x \cdot y \cdot dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot y \cdot dy = -(1+y^2)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{1+y^2} dy = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = -\int \frac{dx}{x} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -\ln x + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln \sqrt{1+y^2} = \ln \frac{c}{x} \Leftrightarrow$$

$$1+y^2 = \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$c = x^2(1+y^2)$$

Εφαρμογή 8

Λύστε τη ΔΕ $x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$

Είναι $x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0 \Leftrightarrow$

$x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 1)dy \Leftrightarrow$

$\frac{x}{x^2 - 1}dx = \frac{y}{y^2 - 1}dy \Leftrightarrow$

$\int \frac{x}{x^2 - 1}dx = \int \frac{y}{y^2 - 1}dy + c_1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 - 1}dy + c_1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 1) + \ln c_2 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2 - 1) = \ln(y^2 - 1) + 2 \ln c_2 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2 - 1) = \ln[2c_2(y^2 - 1)] \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 = 2c_2(y^2 - 1) \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 = c(y^2 - 1)$ με $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και $c_2, c > 0$

Εφαρμογή 9

Λύστε τη ΔΕ $y' = x^2 \cdot y^3$

Είναι $y' = x^2 y^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y^3 \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{y^3} = x^2 dx \Leftrightarrow$

$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx \Leftrightarrow$

$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow$

$\frac{1}{-2y^2} = \frac{x^3 + 3c}{3} \Leftrightarrow$

$-2y^2 = \frac{3}{x^3 + 3c}$ Η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι $2y^2 = \frac{-3}{x^3 + c_1}$ με $c, c_1 \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 10

Υπολογίστε τους $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε η $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $y(1) = 1$ και $y'(1) = -1$

Είναι

• $y(1) = 1 \Leftrightarrow$

$c_1 \cdot e^1 + c_2 \cdot 1 \cdot e^1 + 1^2 \cdot e^1 = 1 \Leftrightarrow$

$c_1 e + c_2 e + e = 1$

$$\bullet y'(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_2 e^x + x^2 e^x + 2x e^x$$

$$\bullet y'(1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 e^1 + c_2 1 e^1 + c_2 e^1 + 1^2 e^1 + 2 \cdot 1 e^1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 e + c_2 e + c_2 e + e + 2e = -1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 e + 2c_2 e + 3e = -1$$

$$\text{Ισχύει ότι } \begin{cases} c_1 e + c_2 e + e = 1 \\ c_1 e + 2c_2 e + 3e = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e(c_1 + c_2 + 1) = 1 \\ e(c_1 + 2c_2 + 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = \frac{1}{e} \\ c_1 + 2c_2 + 3 = \frac{-1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ \frac{1}{e} - c_2 - 1 + 2c_2 + 3 = \frac{-1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 + 2 = \frac{-2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{e} - c_2 - 1 \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{e} + 2 + \frac{2}{e} - 1 \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 + \frac{3}{e} \\ c_2 = -2 - \frac{2}{e} \end{cases}$$

Εφαρμογή 11

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{2x}$

$$\text{Είναι } \frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2dy}{y} = \frac{-3dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2dy}{y} + \frac{3dx}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{2dy}{y} + \int \frac{3dx}{x} = c_1 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln y + 3 \ln x = \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln y^2 + \ln x^3 = \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln(y^2 x^3) = \ln c \Leftrightarrow$$

$$y^2 x^3 = c$$

Επειδή η σταθερά c_1 είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί για c_1 να θέσω $\ln c$, όπου $c > 0$ άλλη αυθαίρετη σταθερά.

Εφαρμογή 12

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $(x-1)^2 y dx + x^2 (y+1) dy = 0$

Θεωρώ ότι $xy \neq 0$

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 y dx + x^2 (y+1) dy &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \frac{x^2 (y+1)}{x^2 y} dy &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \frac{(y+1)}{y} dy &= 0 \Leftrightarrow \\
\int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx + \int \frac{y+1}{y} dy &= c \Leftrightarrow \\
\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} dx + \int \frac{y}{y} dy + \int \frac{1}{y} dy &= c \Leftrightarrow \\
\int 1 dx - \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int 1 dy + \ln y &= c \Leftrightarrow \\
x - 2\ln x - \frac{1}{x} + y + \ln y &= c
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 13

Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$

$$\text{Είναι } (1+x^3)dy - x^2 y dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1+x^3)dy = x^2 y dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3} dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2}{1+x^3} dx + c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{1+x^3} + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \ln \left(c \sqrt[3]{1+x^3} \right) \Leftrightarrow$$

$$y = c \sqrt[3]{1+x^3}$$

Επειδή η σταθερά c_1 είναι αυθαίρετη, μπορώ αντί για c_1 να θέσω $\ln c$ όπου $c > 0$, άλλη αυθαίρετη σταθερά.

Εφαρμογή 14

Αφού βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $e^x dx - y dy = 0$ να υπολογιστεί η καμπύλη ολοκλήρωσης της που διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$

$$\text{Είναι } e^x dx - y dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x dx = y dy \Leftrightarrow$$

$$\int e^x dx = \int y dy + c_1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{y^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$2e^x = y^2 + 2c_1 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 2e^x - 2c_1$$

Γενική λύση

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην ανωτέρω εξίσωση προκύπτει ότι

$$1^2 = 2e^0 - 2c_1 \Leftrightarrow 1 = 2 - 2c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2} \quad \text{Άρα, η ζητούμενη καμπύλη είναι}$$

$$y^2 = 2e^x - 2c_1 = 2e^x - 1 \quad \text{ή ισοδυνάμως } y = \sqrt{2e^x - 1}$$

Εφαρμογή 15

$$\text{Λύστε τη ΔΕ } (x^2 - y^2) dx + 2 \cdot x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$\text{Αν } f(x, y) = (x^2 - y^2) dx + 2xy dy \text{ ισχύει ότι } f(\lambda x, \lambda y) =$$

$$((\lambda x)^2 - (\lambda y)^2) dx + 2\lambda x \lambda y dy =$$

$$\lambda^2 (x^2 - y^2) dx + \lambda^2 2xy dy =$$

$$\lambda^2 [(x^2 - y^2) dx + 2xy dy] = \lambda^2 f(x, y)$$

$$\text{Άρα, η ΔΕ } f(x, y) = \underbrace{(x^2 - y^2) dx}_{M(x,y)} + \underbrace{2 \cdot x \cdot y \cdot dy}_{N(x,y)} = 0 \text{ είναι ομογενής ως προς } x, y$$

βαθμού ομοιογένειας 2

$$\text{Θέτω } \frac{y}{x} = \omega \Leftrightarrow y = x\omega \Leftrightarrow y' = x'\omega + x\omega' \Leftrightarrow y' = \omega + x\omega'$$

και αντικαθιστώντας στην $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0$ προκύπτει ότι

$$(x^2 - x^2\omega^2) dx + 2x\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(1 - \omega^2) + 2x\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \omega^2) + 2\omega(\omega + x\omega') = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \omega^2 + 2\omega^2 + 2x\omega \frac{d\omega}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \omega^2 + 2x\omega \frac{d\omega}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x\omega \frac{d\omega}{dx} = -(1 + \omega^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{dx} = -\frac{1 + \omega^2}{2\omega d\omega} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2\omega}{1 + \omega^2} d\omega \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{dx} = -\frac{1+\omega^2}{2\omega d\omega} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2\omega}{1+\omega^2} d\omega \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -\ln(1+\omega^2) + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\ln x = \ln \frac{c}{1+\omega^2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{c}{1+\omega^2} = \frac{c}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{cx^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{cx^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{cx}{x^2+y^2}$$

Άρα, $x^2 + y^2 = cx$, με $c > 0$

Ολοκληρωτική καμπύλη είναι η καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε μία μερική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των ορθογωνίων αξόνων.

Οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών ή επίπεδο γένος καμπυλών, είναι το σύνολο των καμπυλών που προκύπτουν από τη γενική λύση της ΔΕ, στο επίπεδο των καρτεσιανών αξόνων. Δηλαδή, πρόκειται για ένα πλήθος επίπεδων καμπυλών, που ορίζονται από μία εξίσωση, που περιέχει μόνο μία παράμετρο της μορφής $f(x, y, c_1) = 0$

Εφαρμογή 16

Λύστε την ομογενή ΔΕ $2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

Η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y με βαθμό ομογένειας 2

$$\text{Είναι } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{2y}{x}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \frac{y}{x}} \quad (1)$$

Θέτω $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ και αντικαθιστώ στην (1)

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\text{Άρα, } \frac{2 \cdot u \cdot du}{1-u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2u}{1-u^2} du = \int \frac{1}{x} dx + c_1 \Rightarrow$$

$$-\ln(1-u^2) = \ln x + \ln c \Rightarrow$$

$$\ln \frac{1}{1-u^2} = \ln(xc) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-u^2} = xc \Rightarrow$$

$$\frac{1}{xc} = 1 - u^2 = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}$$

$$\text{Άρα, } \frac{1}{c} = \frac{x^2 - y^2}{x}$$

Εφαρμογή 17

Λύστε την ομογενή ΔΕ $(y^2 - x^2)dx + xy dy = 0$

Είναι $f(x, y) = (y^2 - x^2)dx + x \cdot y dy$

Άρα, $f(\lambda x, \lambda y) =$

$$\left[(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2 \right] dx + \lambda x \cdot \lambda y dy =$$

$$\lambda^2 (y^2 - x^2) dx + \lambda^2 x \cdot y dy =$$

$$\lambda^2 f(x, y)$$

Άρα, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y βαθμού ομογένειας 2

Θέτω $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow dy = u dx + x du$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι:

$$(x^2 u^2 - x^2) dx + x \cdot u \cdot x (u dx + x du) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 u^2 dx - x^2 dx + x^2 u^2 dx + x^3 u du = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 (2u^2 - 1) dx + x^3 u du = 0$$

Διαιρώ δια x^2 , υποθέτοντας ότι $x \neq 0$ και προκύπτει ότι $(2u^2 - 1) dx + x u du = 0$

$$\text{➤ Αν } 2u^2 - 1 \neq 0 \text{ είναι } \frac{\cancel{(2u^2 - 1)} dx}{x \cancel{(2u^2 - 1)}} + \frac{\cancel{x} u du}{\cancel{x} (2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{u du}{(2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \frac{4u du}{(2u^2 - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{4u du}{(2u^2 - 1)} = c \Leftrightarrow$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln(2u^2 - 1) = c \Leftrightarrow$$

$$4 \ln x + \ln(2u^2 - 1) = 4c \Leftrightarrow$$

$$\ln x^4 + \ln(2u^2 - 1) = 4c \Leftrightarrow$$

$$\ln [x^4 (2u^2 - 1)] = \ln c' \Leftrightarrow$$

$$x^4 (2u^2 - 1) = c' \Leftrightarrow$$

$$x^4 \left(2 \frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = c' \Leftrightarrow$$

$$2x^2y^2 - x^4 = c'$$

$$\blacktriangleright \text{Αν } 2u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Εφαρμογή 18

Λύστε την ομογενή ΔΕ $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

Είναι $f(x, y) = xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

Άρα, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x dy - \lambda y dx = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} dx =$

$\lambda(xdy - ydx) = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} dx = \lambda f(x, y)$

Άρα, η ΔΕ είναι ομογενής ως προς x, y βαθμού ομογένειας 1

$$\text{Είναι } xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}dy - y\cancel{dx}}{\cancel{x}dx - x\cancel{dx}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cancel{dx}}{x\cancel{dx}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + x \frac{du}{dx} \text{ και αντικαθιστώντας στην } (1)$$

$$\text{προκύπτει ότι } \cancel{u} + x \frac{du}{dx} = \cancel{u} + \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow$$

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} + c_1 = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln x + \ln c = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \Leftrightarrow$$

$$xc = u + \sqrt{1 + u^2} \Leftrightarrow$$

$$xc = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\text{Άρα, } x^2c = y + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2c - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$(x^2c - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^4c^2 + y^2 - 2x^2cy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^4c^2 - 2x^2cy = x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2c^2 - 2cy = 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2c^2 - 1 = 2cy \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 c^2 - 1}{2c} = y \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \text{ με } c > 0$$

10.7 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

Εξισώσεις της μορφής $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ είναι ακριβείς αν $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Εφαρμογή στη ναυτιλία

Δυναμικά συστήματα σε θερμοδυναμική ανάλυση (θερμοδυναμικές διεργασίες) πλοίων, όπου οι εξισώσεις της ενέργειας (ενεργειακές ισορροπίες) προκύπτουν από ακριβείς διαφορικές σχέσεις.

Εφαρμογή 19

Να λυθεί η ΔΕ $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

Είναι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$, άρα η ΔΕ είναι τέλει διαφορικό και η γενική της λύση δίνεται

από τον τύπο: $\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c$ δηλαδή

$$\int_0^x (3x^2 + 4xy) dx + \int_0^y (2 \cdot 0^2 + 3y^2) dy = c \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 y + y^3 = c$$

10.8 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Είναι της μορφής $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ και μετασχηματίζονται με την αντικατάσταση $y = ux$

Εφαρμογή στη ναυτιλία

Στη μηχανική των ρευστών, για να περιγραφεί η αναλογία ταχύτητας / απόστασης σε συγκεκριμένα μοντέλα ροής, γύρω από το κύτος του πλοίου.

10.9 Εφαρμογές στη ναυτιλία

Η ναυτιλία και η ναυπηγική επιστήμη αποτελούν τομείς που συνδυάζουν την τεχνολογία, την επιστήμη και τις πρακτικές εφαρμογές σε ένα περιβάλλον με υψηλές απαιτήσεις αξιοπιστίας και ασφάλειας. Από τον σχεδιασμό και την κατασκευή των εμπορικών πλοίων, μέχρι τη λειτουργία των μηχανών τους, τη φόρτωση, την ευστάθεια και τα συστήματα επικοινωνιών, η ανάγκη για ακριβή πρόβλεψη, έλεγχο και βελτιστοποίηση, είναι συνεχής. Σε αυτό το πλαίσιο, οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης αποτελούν ένα θεμελιώδες εργαλείο, διότι περιγράφουν με απλό αλλά ισχυρό τρόπο τις σχέσεις που διέπουν μεταβαλλόμενα φυσικά μεγέθη και μεταβαλλόμενες διεργασίες. Δηλαδή, δεν μας λένε μόνο σε ποια κατάσταση είναι ένα σύστημα, αλλά και με ποιον τρόπο αλλάζει η κατάσταση του με τον χρόνο ή με κάποια άλλη μεταβλητή. Στα πλοία, οι εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων είναι σχεδόν παντού.

Μία διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, είναι μία εξίσωση που συνδέει μία άγνωστη συνάντηση $y(x)$ με την 1^η παράγωγο $\frac{dy}{dx}$. Η γενική μορφή είναι

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \text{ Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους } y$$

εξαρτάται από το ίδιο το μέγεθος ή και από την ανεξάρτητη μεταβλητή x . Στη ναυτιλία το x μπορεί να εκφράζει τον χρόνο (π.χ. ώρες λειτουργίας μηχανής), ενώ το y μπορεί να είναι ένα μέγεθος όπως η θερμοκρασία ενός κυλίνδρου, η ταχύτητα του πλοίου ή η ηλεκτρική ένταση σε ένα κύκλωμα. Οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης, αποτελούν τη βάση για:

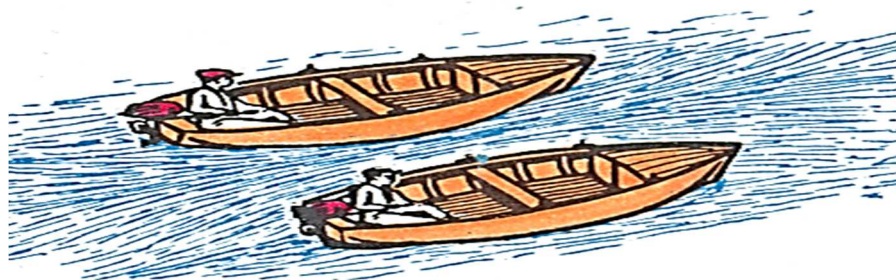
- Προσομοιώσεις με τη βοήθεια των υπολογιστών (π.χ. Computational Fluid Dynamics – CFD).
- Αυτόματα συστήματα ελέγχου σε μηχανές και σε ηλεκτρικές εγκαταστάσεις, διότι αναπαριστούν το πώς μεταβάλλεται το ηλεκτρικό ρεύμα σε έναν κινητήρα κατά την εκκίνηση.
- Προβλέψεις κατανάλωσης καυσίμων και βελτιστοποίησης της πορείας.
- Ανάλυση του ρίσκου, σε ακραίες καιρικές συνθήκες.

Συνεπώς, η γνώση και η κατανόηση των διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης είναι απαραίτητα για όσους ασχολούνται με την κατασκευή και τη λειτουργία των εμπορικών πλοίων.

10.9.1 Ναυπηγική

Χρησιμοποιούνται για:

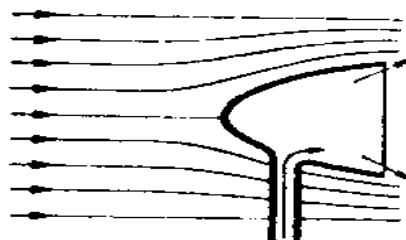
- την ανάλυση της κίνησης του πλοίου στο νερό (το πλοίο δεν είναι σταθερό, αλλά αντιδρά σε φορτίσεις, κυματισμούς και μεταβολές του φορτίου),
- την εκτίμηση του κυματισμού,
- τη μελέτη των δυνάμεων που αναπτύσσονται στο κύτος του πλοίου διότι περιγράφουν το πώς αυξάνεται (ή μειώνεται) η μετατόπιση του, όσο φορτώνεται (ή ξεφορτώνεται) σταδιακά.



Οι 2 βάρκες κινδυνεύουν να συγκρουσθούν μεταξύ τους

10.9.2 Ναυτική μηχανολογία

Μοντελοποιούν τις θερμικές και τις μηχανικές διεργασίες στις μηχανές εσωτερικής καύσης (ΜΕΚ), στους κινητήρες AC/DC, στις γεννήτριες, στα συστήματα ισχύος, στους λέβητες, στα συστήματα ψύξης, στα συστήματα λίπανσης και δείχνουν το πώς μεταβάλλεται η πίεση στον κύλινδρο της μηχανής, κάθε χρονική στιγμή. Οι μηχανές, μας ενδιαφέρουν στη σταθερή τους λειτουργία, στο πώς ανεβάζουν στροφές, πως ψύχονται, πως λιπαίνονται, πως αλλάζει η πίεση του καυσίμου σε κάθε φάση της λειτουργίας τους, δηλαδή μας ενδιαφέρει η δυναμική τους.



Εξαεριστήρας πλοίου

Συχνά, η φόρτωση ενός πλοίου περιγράφεται μέσω μίας κατανομής του βάρους $w(x)$ η οποία εξαρτάται από την απόσταση x από την πλώρη του πλοίου. Αυτή η κατανομή του βάρους, περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης

$$\frac{dW(x)}{dx} = \omega(x), \text{ όπου:}$$

$W(x)$ το συνολικό βάρος μέχρι το σημείο x

$\omega(x)$ η κατανομή του βάρους, ανά μονάδα μήκους

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης, επιτρέπει τον υπολογισμό του συνολικού βάρους ανά τμήμα του πλοίου ώστε να διασφαλισθεί ότι η κατανομή του βάρους είναι ομοιόμορφη και σωστή.

10.9.5 Επικοινωνίες

Στις επικοινωνίες (δορυφορικές επικοινωνίες, GMDSS, GPS, radar), χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική αναπαράσταση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, για την εξασθένηση του σήματος και για την απόκριση των φίλτρων RC/RL. Στις επικοινωνίες, το ραδιοσήμα (ραδιοκύματα) φτάνει στο πλοίο με απώλειες που περιγράφονται από απλές διαφορικές σχέσεις.

10.9.6 Επικοινωνίες

Πρέπει να γνωρίζουμε πώς εξελίσσεται το ρεύμα σε ένα κύκλωμα όταν συμβαίνει μια διαταραχή (π.χ. βραχυκύκλωμα, εκκίνηση κινητήρα). Οι διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και για τη σχεδίαση ηλεκτρικών κυκλωμάτων που περιλαμβάνουν συστήματα επαγωγής και ροής ενέργειας.

10.9.7 Υδροδυναμική αντίσταση

Η ροή του νερού γύρω από το πλοίο, περιγράφεται από τις πολύπλοκες (διότι περιλαμβάνουν πολλές παραμέτρους) εξισώσεις Navier – Stokes, των οποίων η γενική μορφή είναι η

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 v + f \text{ όπου:}$$

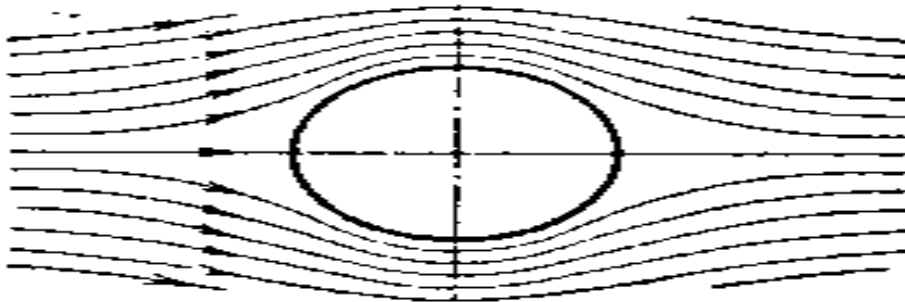
ρ η πυκνότητα του νερού

v το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας της ροής

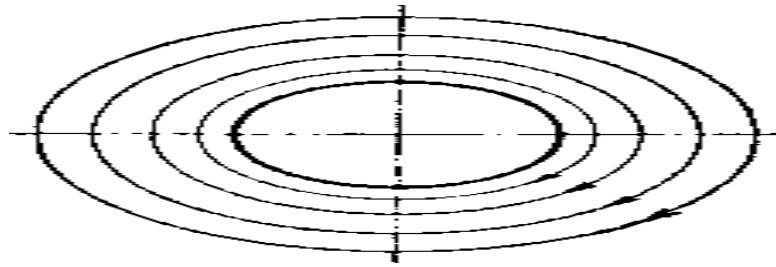
p η πίεση του νερού

μ το ιξώδες του νερού

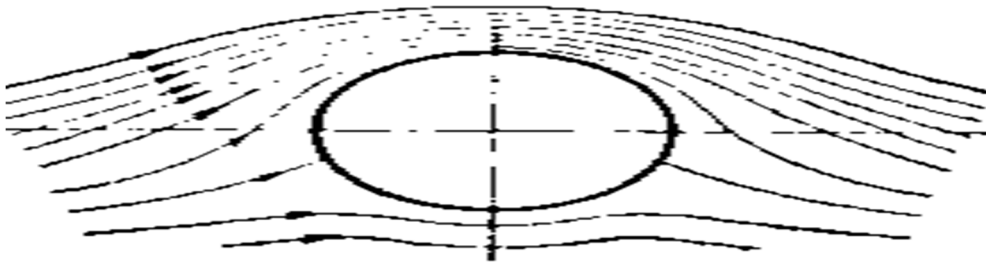
f οι εξωτερικές δυνάμεις (π.χ. βαρύτητα, δυνάμεις από τα κύματα)



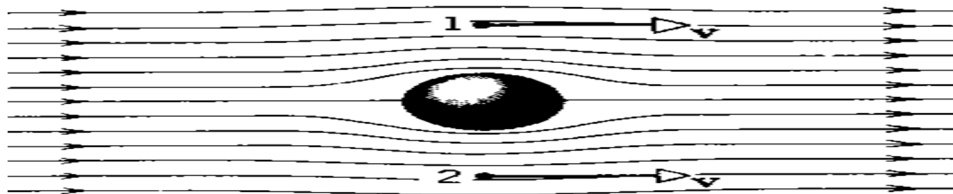
Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που ακινητεί



Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που περιστρέφεται



Ρευματικές γραμμές γύρω από σφαίρα που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση



Στα σημεία 1 και 2, το ρευστό έχει την ίδια ταχύτητα

10.9.8 Υδροδυναμική βελτίωση

Η αντίσταση του νερού που ασκείται στο πλοίο, εξαρτάται από το σχήμα του και από την ταχύτητα του μέσα στο νερό. Η διαφορά πίεσης μεταξύ της πλώρης και της πρύμνης και η αλληλεπίδραση του πλοίου με τα κύματα, επηρεάζουν την αντίσταση. Η αντίσταση περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $R = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d A$

όπου: R η αντίσταση του πλοίου

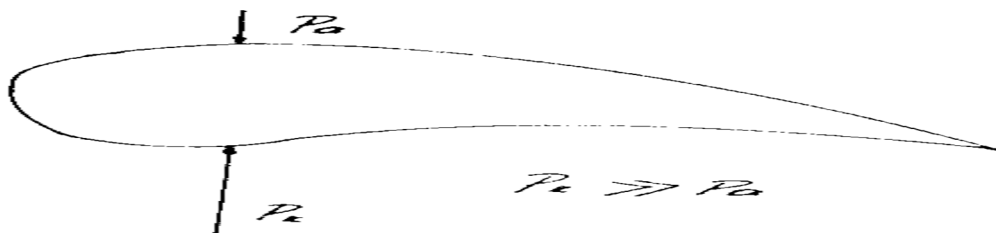
ρ η πυκνότητα του νερού

v η ταχύτητα του πλοίου

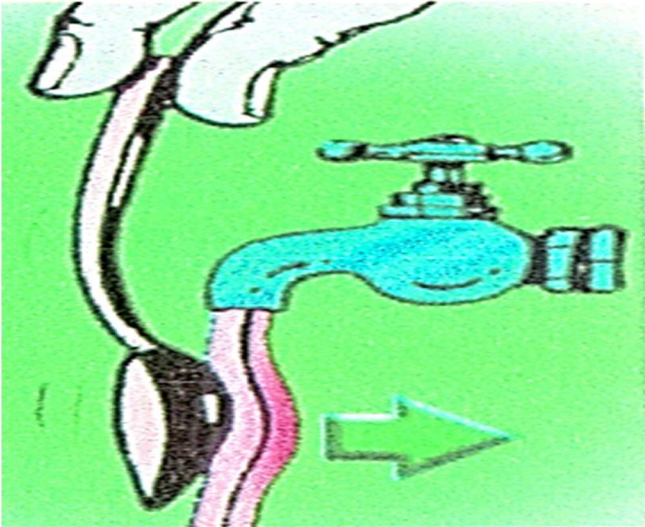
C_d ο συντελεστής της αντίστασης

A η επιφάνεια του πλοίου που έρχεται σε επαφή με το νερό

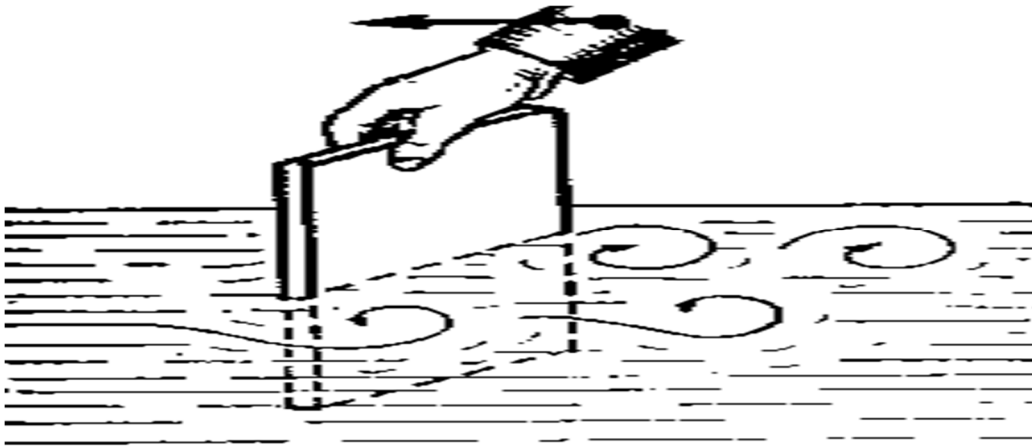
Η ελαχιστοποίηση της αντίστασης επιτυγχάνεται μέσω της βελτιστοποίησης του σχήματος του πλοίου, της κατανομής του βάρους και της χρήσης ειδικών τεχνολογιών και χρωμάτων προς μείωση των τριβών.



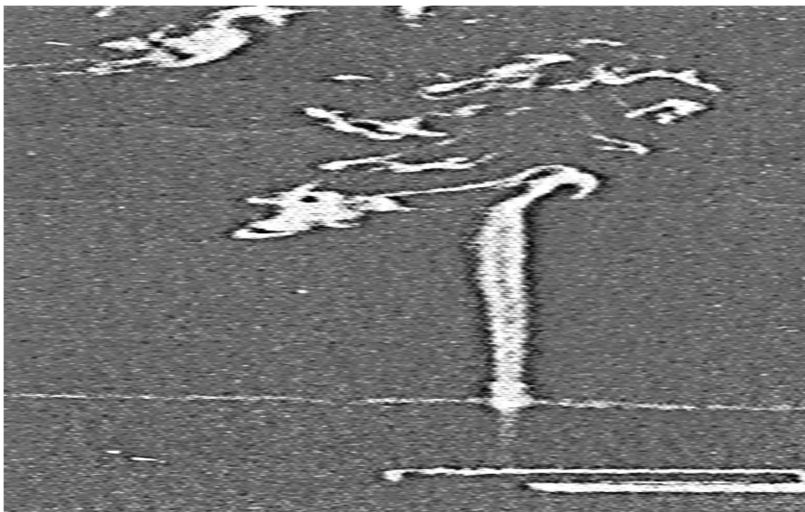
Βολβός πλοίου. Η διαφορά ταχυτήτων στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια, προκαλεί την εμφάνιση της δυναμικής άνωσης



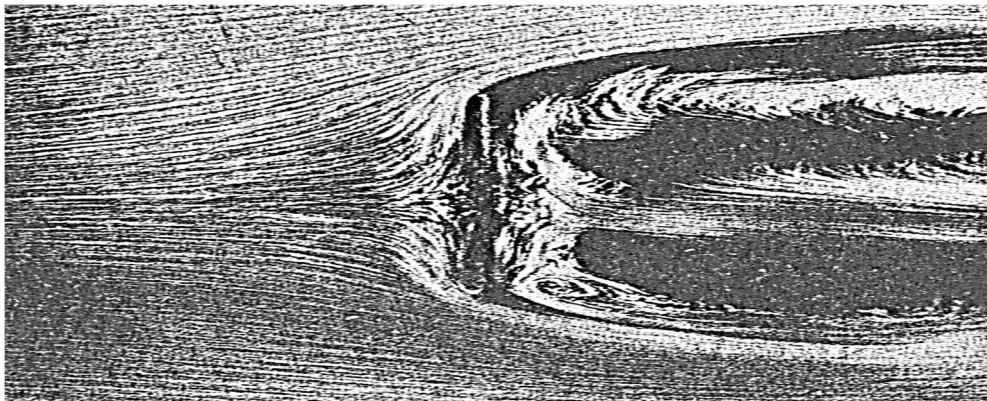
Στο κουτάλι ασκείται οριζόντια δύναμη προς τη βρύση



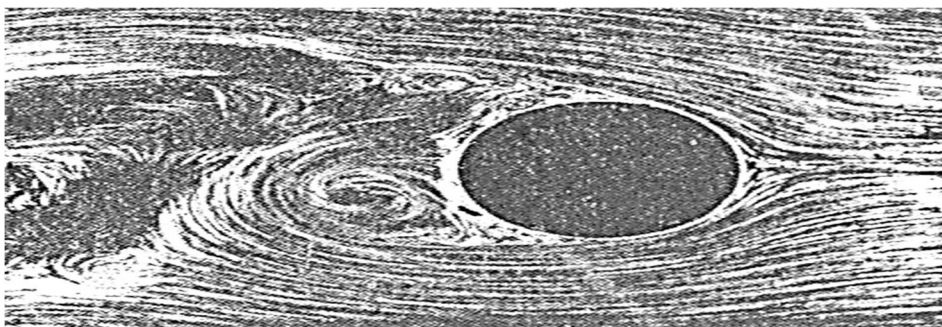
Στην πίσω πλευρά της κινούμενης σανίδας, σχηματίζονται στρόβιλοι



Η ροή του καπνού αρχικά είναι στρωτή και μετά τυρβώδης



Στη δεξιά μεριά της πλάκας και μέσα στον αύλακα η ροή είναι τυρβώδης



Στρόβιλος που αποσπάται από το πίσω μέρος σφαίρας κατά τη ροή πραγματικού ρευστού

10.9.9 Ανάλυση κυκλωμάτων και ενεργειακή απόδοση

Η διάταξη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος του πλοίου μπορεί να αναλυθεί μέσω της εξίσωσης RL που ακολουθεί $L \frac{dI}{dt} + RI = V(t)$, όπου:

L η αυτεπαγωγή του κυκλώματος

R η αντίσταση

I το ρεύμα

$V(t)$ η τάση που εφαρμόζεται

Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται για την ανάλυση της συμπεριφοράς του ηλεκτρικού ρεύματος και για την εκτίμηση των απωλειών ενέργειας που προκαλούνται από την αντίσταση και από την αυτεπαγωγή.

10.9.10 Διαχείριση του συστήματος τροφοδοσίας

Η τροφοδοσία των διαφόρων συστημάτων του πλοίου (π.χ. φωτιστικά, μηχανές, συστήματα ελέγχου) απαιτεί τη χρήση διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης για την αποδοτική διαχείριση της ενέργειας και την εξισορρόπηση των φορτίων. Για την ανάλυση της σταθερότητας (ή της μεταβολής) της τάσης στο ηλεκτρικό σύστημα,

χρησιμοποιείται η εξίσωση $\frac{dV}{dt} = \frac{P_{in} - P_{out}}{C}$, όπου:

P_{in} η ισχύς εισόδου στο σύστημα

P_{out} η ισχύς εξόδου στο σύστημα

C η χωρητικότητα της μπαταρίας ή του συσσωρευτή

10.9.11 Δίκτυα επικοινωνίας και καθυστερήσεις

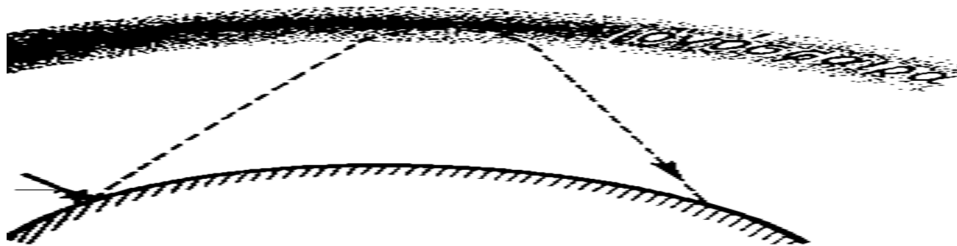
Η μετάδοση σήματος και η καθυστέρηση στα δίκτυα επικοινωνίας των πλοίων, περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις που αναλύουν τη συμπεριφορά των σημάτων, κατά τη διάρκεια της μετάδοσης. Η καθυστέρηση και ο φόρτος του δικτύου, υπολογίζονται από την εξίσωση $\frac{dL}{dt} = -aL + bR$, όπου:

a, b συντελεστές

L η καθυστέρηση του δικτύου

R ο φόρτος του συστήματος

Στόχος είναι η αποφυγή καθυστερήσεων και αποτυχιών στην επικοινωνία μεταξύ των πλοίων ή μεταξύ των κεντρικών μονάδων ελέγχου.



Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ανακλώνται στην ιονόσφαιρα και επιστρέφουν στη Γη

Εφαρμογή 20

Να βρεθεί η καμπύλη (c), που η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο της $M(x, y)$ είναι ανάλογη της $v^{\eta\varsigma}$ δύναμης της τετμημένης.

Επειδή το μήκος της εφαπτομένης είναι $y \frac{dx}{dy}$, η διαφορική εξίσωση που ζητώ είναι η

$$y \frac{dx}{dy} = kx^v \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dx}{x^v} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \int x^{-v} dx \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} + \ln c_1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{|y|}{c} = \frac{1}{k} \cdot \frac{x^{1-v}}{1-v} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{\frac{x^{1-v}}{k(1-v)}}$$

Εφαρμογή 21

Υλικό σημείο αφήνεται να πέσει σε υγρή μάζα χωρίς αρχική ταχύτητα. Η αντίσταση της μάζας είναι τέτοια, που η επιτάχυνση γ και η ταχύτητα v συνδέονται με τη σχέση $\gamma = g - 4v$. Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης;

Επειδή $\gamma = \frac{dv}{dt}$, η $\gamma = g - 4v$ γίνεται $\frac{dv}{dt} = g - 4v \Leftrightarrow \frac{dv}{g - 4v} = dt$

Ολοκληρώνοντας, έχω $\ln(g - 4v) = -4t + g \Leftrightarrow$

$$g - 4v = g \cdot e^{-4t} \Leftrightarrow v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t})$$

Επειδή $v = \frac{ds}{dt}$, η $v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t})$ δίνει τη διαφορική εξίσωση $\frac{ds}{dt} = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t})$ που όπως και η $\frac{dv}{g - 4v} = dt$, είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\text{Ολοκληρώνοντας την, παίρνω } s = \frac{g}{16}(4t + e^{-4t} + c)$$

Υποθέτοντας ότι $s = 0$ για $t = 0$, βρίσκω $c = -1$ οπότε η εξίσωση της κίνησης είναι $s = \frac{g}{16}(4t + e^{-4t} - 1)$ Από την $v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t})$ παρατηρώ ότι, όταν $t \rightarrow \infty$, τότε η

$$\text{ταχύτητα έχει } \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{g}{4}$$

Εφαρμογή 22

Δύναμη F ασκείται σε ένα υλικό σημείο M μάζας m και το αναγκάζει να κινείται ευθύγραμμα πάνω στη διεύθυνση επενέργειας της. Στο M εφαρμόζεται επίσης μια αντίδραση R , ανάλογη με της ταχύτητάς του. Με τις αρχικές συνθήκες $v(0) = 0$ να βρεθεί η ταχύτητα του M για κάθε χρονική στιγμή t .

Το M δέχεται μια δύναμη $F_{ολ}$ που είναι η συνισταμένη των F , R δηλαδή $F_{ολ} = F - \alpha v$ όπου $\alpha = 0$ συντελεστής αναλογίας της ταχύτητας.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής είναι $m \frac{dv}{dt} = F - \alpha v$. Αυτή η διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, γίνεται $m \frac{dv}{F - \alpha v} = dt$

$$\text{Ολοκληρώνοντας έχω } \frac{-m}{a} \int \frac{d(F - \alpha v)}{F - \alpha v} = \int dt \Leftrightarrow$$

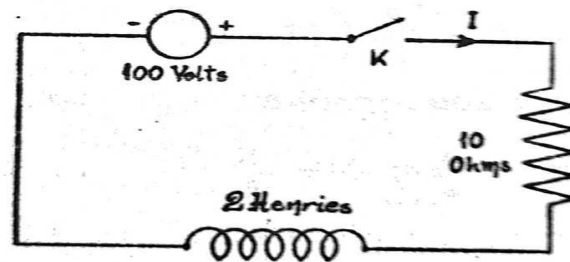
$$\frac{-m}{a} \ln(F - \alpha v) = t + c \Leftrightarrow \ln(F - \alpha v) = \frac{-at}{m} - \frac{ac}{m} \Leftrightarrow$$

$$F - \alpha v = e^{\frac{-a}{m}(t+c)} \Leftrightarrow v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$$

Για να προσδιορίσω τη c , αντικαθιστώ τις αρχικές συνθήκες στη $v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$ και βρίσκω $c = \frac{-m}{a} \ln F$ Αντικαθιστώ αυτή την τιμή στη $v = \frac{F - e^{\frac{-a}{m}(t+c)}}{a}$ και παίρνω τη ζητούμενη συνάρτηση της ταχύτητας.

Εφαρμογή 23

Γεννήτρια έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) 100V και συνδέεται σε σειρά, με αντίσταση 10Ω και με επαγωγική αντίσταση 2 H . Αν ο διακόπτης K είναι κλειστός τη χρονική στιγμή $t = 0$, να βρεθεί η διαφορική εξίσωση του ρεύματος και να προσδιοριστεί η ένταση ως προς τον χρόνο t .



Ηλεκτρικό κύκλωμα RL

Αν I το ρεύμα (σε A) που διατρέχει το κύκλωμα, έχω

- Τάση τροφοδοσίας 100V
- Πτώση τάσης από την ωμική αντίσταση $E_R = I \cdot R = 10 \cdot I$
- Πτώση τάσης από την επαγωγική αντίσταση $E_L = L \frac{dI}{dt} = 2 \frac{dI}{dt}$.
- Από τον αντίστοιχο κανόνα του Kirchhoff $E = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I \Leftrightarrow$

$$100 = 2 \frac{dI}{dt} + 10I \Leftrightarrow 50 = \frac{dI}{dt} + 5I \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0$$

Εφόσον ο διακόπτης είναι κλειστός τη χρονική στιγμή $t = 0$, πρέπει να είναι $I = 0$

Η $\frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0$ είναι γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με $g(t) = 5t^0$,

$$h(t) = -50t^0 \text{ οπότε } \int g(t) dt = 5 \int dt = 5t + c_1 \Leftrightarrow e^{\int g(t) dt} = e^{5t}, \quad e^{-\int g(t) dt} = e^{-5t},$$

$$\int h(t) e^{\int g(t) dt} dt = -\int 50 e^{5t} dt = -10 e^{5t} + c_2$$

$$\text{Άρα, η γενική λύση της } \frac{dI}{dt} + 5I - 50 = 0 \text{ είναι } I = (10e^{5t} + c_2) e^{-5t} = ce^{-5t} + 10$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $I = 0$, η $I = ce^{-5t} + 10$ δίνει $c = -10$

$$\text{Άρα, } I = 10(1 - e^{-5t})$$

Εφαρμογή 24

Ηλεκτρικό κύκλωμα περιλαμβάνει σε σειρά πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , ωμική αντίσταση R , ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ E και διακόπτη Δ . Να βρεθεί το ρεύμα i που διαρρέει το κύκλωμα κάθε χρονική στιγμή, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δηλαδή μόλις κυκλοφορήσει ρεύμα στο κύκλωμα,

τότε εμφανίζονται οι τάσεις: **α)** στα άκρα του πηνίου $L \frac{di}{dt}$

β) στα άκρα της αντίστασης Ri

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff για τη τάση, έχω $L \frac{di}{dt} + Ri = E \Leftrightarrow$

$\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$ Η $\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$ είναι γραμμική, οπότε η γενική της λύση είναι

$$i = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left[c + \int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt \right] \quad \text{ή} \quad i = e^{-\frac{R}{L}t} \left(c + \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} \right)$$

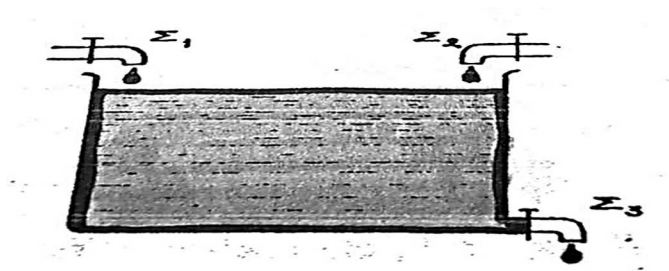
Για να προσδιορίσω τη σταθερά c , αντικαθιστώ στην $i = e^{\frac{-R}{L}t} \left(c + \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} \right)$ τις αρχικές συνθήκες που είναι $c(0) = 0$ και παίρνω $c = -\frac{E}{R}$. Άρα, η μερική λύση της $\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$ είναι $i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{\frac{-R}{L}t} \right)$

Εφαρμογή 25

Το δοχείο του σχήματος, χωρητικότητας $V \text{ m}^3$ είναι γεμάτο καθαρό νερό και οι στρόφιγγες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι κλειστές. Αν το νερό που παρέχει στο δοχείο η Σ_1 είναι καθαρό, ενώ η Σ_2 αναμειγμένο με αλάτι υπό αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ και οι παροχές των Σ_1, Σ_2 είναι $\beta \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ ενώ της Σ_3 είναι $2\beta \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$, να βρεθεί η ποσότητα του αλάτος στο δοχείο, μετά από χρόνο $t \text{ sec}$ από το ταυτόχρονο άνοιγμα των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Υποθέτω ότι κάθε στιγμή η ανάμειξη αλάτος και νερού είναι τέλεια και ότι η ροή είναι ομοιόμορφη.

Αν η στιγμή του ταυτόχρονου ανοίγματος των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι η αρχή μέτρησης του χρόνου υποθέτω ότι μετά πάροδο $t \text{ sec}$ υπάρχουν στο δοχείο $x \text{ gr}$ αλάτι. Τότε, η ανά μονάδα όγκου περιεχόμενη στο δοχείο ποσότητα (ή συγκέντρωση) αλάτος είναι $\frac{x}{V}$. Άρα, η ζητούμενη διαφορική εξίσωση διατυπώνεται ως εξής

$$\frac{dx}{dt} = a - 2\beta \frac{x}{V}, \quad 0 \leq x < +\infty \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dt} + 2\beta \frac{x}{V} - a = 0$$



Δεξαμενή νερού με 3 στρόφιγγες

Η $\frac{dx}{dt} + 2\beta \frac{x}{V} - a = 0$ είναι γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης με $g(t) = 2\beta \frac{1}{V} t^0$, $h(t) = -at^0$ οπότε η γενική λύση της είναι $x = \frac{aV - ce^{-\frac{2\beta}{V}t}}{2\beta}$ με $0 \leq t < +\infty$ και $c \neq 0$. Αν $c = 0$ τότε έχω μια μερική λύση, την $x = \frac{aV}{2\beta}$. Στο παρών

πρόβλημα, πρέπει για $t = 0$ να έχω $x = 0$, οπότε η $x = \frac{aV - ce^{-\frac{2}{V}t}}{2\beta}$ δίνει $c = aV$

Άρα, η λύση του προβλήματος δίνεται από τον τύπο $x = \frac{aV}{2\beta} \left(1 - e^{-\frac{2}{V}t} \right)$

Εφαρμογή 26

Έστω ότι ο συντελεστής ειδικής θερμότητας του ατμοσφαιρικού αέρα κατά τη μετατροπή υπό σταθερή πίεση, είναι $c' = a + \beta t$ όπου $\alpha = 0,241$ και $\beta = 0,0000313$.

Ποια ποσότητα Q θερμίδων απαιτείται για την ανύψωση της θερμοκρασίας 1 kg ατμοσφαιρικού αέρα, υπό σταθερή πίεση, από $t_1 = 20^\circ \text{ C}$ σε $t_2 = 780^\circ \text{ C}$;

Το όριο του $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ όταν το $\Delta t \rightarrow 0$ ονομάζεται συντελεστής ειδικής θερμότητας, που σε

κάποια θερμοκρασία t , δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{dQ}{dt}$

Είναι $\lambda = c' = a + \beta \cdot t$ και ο τύπος $\lambda = \frac{dQ}{dt}$ γίνεται $\frac{dQ}{dt} = a + \beta \cdot t$

Η $\frac{dQ}{dt} = a + \beta \cdot t$ είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και η

λύση της είναι $Q = \int_{t_1}^{t_2} (a + \beta t) dt = a(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}(t_2^2 - t_1^2) = \left(a + \beta \frac{t_2 + t_1}{2} \right) (t_2 - t_1)$

Αν θέσω $\frac{t_2 + t_1}{2} = t_\mu$, οπότε η $Q = \left(a + \beta \frac{t_2 + t_1}{2} \right) (t_2 - t_1)$ γίνεται

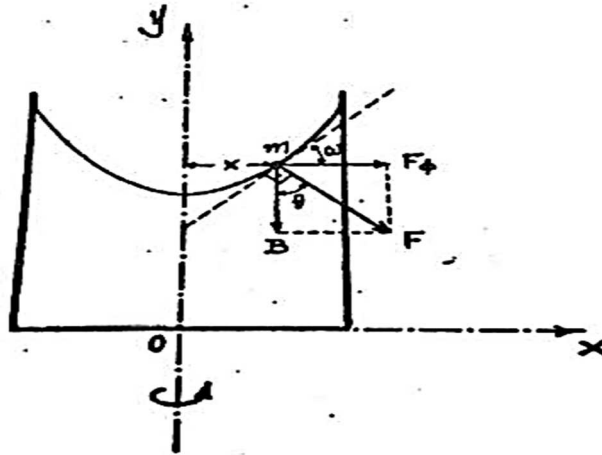
$Q = (a + \beta t_\mu)(t_2 - t_1) = c'_\mu (t_2 - t_1)$ όπου c'_μ ο συντελεστής της μέσης ειδικής θερμότητας και βρίσκω $c'_\mu = a + \beta t_\mu = 0,25352$ οπότε $Q = 192,675 \text{ cal}$

Εφαρμογή 27

Κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό και περιστρέφεται περί τον άξονα του, κατακόρυφα, με μεγάλη ταχύτητα. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης της υγρής επιφάνειας του, όταν η σταθερή γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται το δοχείο είναι ω .

Κατά την περιστροφή το υγρό, στο κέντρο θα πλησιάζει προς τον πυθμένα, ενώ στα τοιχώματα θα τείνει να υψωθεί προς τα χείλη του δοχείου, λόγω της αδράνειας. Έστω μικρή μάζα m του υγρού, που απέχει από τον άξονα απόσταση x . Στη μάζα m επιδρούν δυο δυνάμεις:

- Το βάρος της $B = mg$, με διεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω και
- Η φυγόκεντρος δύναμη $F_\phi = m\omega^2 x$, με οριζόντια διεύθυνση.



Περιστροφή δοχείου με υγρό, περί κατακόρυφο άξονα

Υπό την επενέργεια αυτών των δύο δυνάμεων η m παραμένει στη θέση αυτή (σε απόσταση x από τον άξονα και στο ίδιο ύψος από τον πυθμένα). Επίσης, λόγω της σταθερής ταχύτητας ω , η μορφή της επιφάνειας του υγρού παραμένει σταθερή. Άρα, η συνισταμένη F , των δύο αυτών δυνάμεων θα είναι κάθετη επί το εφαπτόμενο, στο αντίστοιχο σημείο, επίπεδο της επιφάνειας του υγρού. Όπως προκύπτει από το σχήμα για τις γωνίες $\omega = \theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\theta$

Αν η καμπύλη επιφάνειας του υγρού είναι της μορφής $y = f(x)$, έχω

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{dy}{dx} \text{ και } \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{\Phi}}{B} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad \text{οπότε η } \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\theta, \text{ από τις } \varepsilon\varphi\omega = \frac{dy}{dx} \text{ και}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega^2 x}{g}, \text{ γίνεται } \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Η $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και

γράφεται $dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx$ που ολοκληρώνοντας την παίρνω την $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + c$ η οποία

είναι μία παραβολή με άξονα Oy

Εφαρμογή 28

Ο πληθυσμός μιας χώρας διπλασιάζεται κάθε 50 έτη. Σε πόσα χρόνια θα τριπλασιαστεί, αν η ταχύτητα, με την οποία αυξάνεται, είναι ανάλογη προς τον αριθμό των κατοίκων της χώρας;

Έστω x ο πληθυσμός κατά τον χρόνο t και x_0 ο πληθυσμός της τον χρόνο t_0 . Αν στο χρονικό διάστημα dt , η αύξηση του πληθυσμού είναι dx , τότε η ταχύτητα

αύξησης είναι $\frac{dx}{dt}$. Αν k είναι ο συντελεστής αναλογίας, τότε σύμφωνα με το

πρόβλημα, έχω $\frac{dx}{dt} = kx$ που είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και

γίνεται $\frac{dx}{x} = k \cdot dt$, με ολοκλήρωμα $x = ce^{kt}$

Για να υπολογίσω το k , για $t = 0$ είναι $x = x_0$, άρα $x_0 = c \Leftrightarrow x = x_0 e^{kt}$

Από τα δεδομένα έχω ότι αν $t = 50$ τότε $x = 2 \cdot x_0$ άρα, από $x = x_0 e^{kt}$ έχω $2x_0 = x_0 e^{50k} \Leftrightarrow e^{50k} = 2$

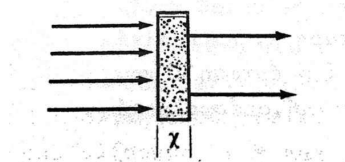
Στο τέλος της ζητούμενης περιόδου t , πρέπει να είναι $x = 3x_0$ οπότε η $x = ce^{kt}$ δίνει $e^{kt} = 3 \Leftrightarrow e^{50kt} = 3^{50} \Leftrightarrow e^{(50k)t} = 3^{50}$ οπότε από την $e^{50k} = 2$ προκύπτει ότι $t \log 2 = 50 \log 3 \Leftrightarrow t = 50 \frac{\log 3}{\log 2} \Leftrightarrow t = 79$

Άρα, ο πληθυσμός θα τριπλασιασθεί μετά από 79 έτη.

Εφαρμογή 29

Να βρεθεί η εξασθένηση της έντασης J των ακτίνων Rontgen, όταν διαπερνούν ένα σώμα πάχους x ενός ομογενούς υλικού.

Η εξασθένηση της έντασης των ακτίνων οφείλεται στην απορρόφηση μέρους της ενέργειας τους, δηλαδή μέρους του αριθμού φωτονίων, από το υλικό. Έχει διατυπωθεί ότι η εξασθένηση των ακτίνων είναι ανάλογη με το πάχος του υλικού καθώς και με την ένταση J αυτών. Αν οι ακτίνες περάσουν από ένα στρώμα πάχους Δx του υλικού, θα μειωθεί η ένταση τους κατά ΔJ , που θα είναι $\Delta J = -KJ\Delta x$



Εξασθένηση ακτίνων X

Το K λέγεται **γραμμικός συντελεστής εξασθένησης** και εξαρτάται από τη φύση του υλικού. Το πρόσημο $-$ σημαίνει τη μείωση.

Η $\Delta J = -KJ\Delta x$ γράφεται $\frac{\Delta J}{\Delta x} = -KJ$ και η οριακή της τιμή είναι $\frac{dJ}{dx} = -KJ$

Η $\frac{dJ}{dx} = -KJ$ είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών οπότε γράφεται

$\frac{dJ}{J} = -Kdx$ και ολοκληρώνοντας παίρνω $\ln J = -Kx + c \Leftrightarrow J = e^{-Kx+c} = e^{-Kx} e^c \Leftrightarrow$

$J = c_1 e^{-Kx}$ όπου $c_1 = e^c$

Για να προσδιορίσω τη σταθερά c_1 αντικαθιστώ στην $J = c_1 e^{-Kx}$ τις αρχικές συνθήκες $J(0) = J_0$ και παίρνω $c_1 = J_0$, οπότε η μερική λύση της $\frac{dJ}{dx} = -KJ$ είναι

$J = J_0 e^{-Kx}$

10.10 Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις, αποτελούν ένα από ισχυρότερα εργαλεία των μαθηματικών, διότι περιγράφουν καταστάσεις όπου μία ποσότητα μεταβάλλεται σε σχέση με μία άλλη. Είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση των φυσικών φαινομένων, για την ανάπτυξη των νέων και καινοτόμων τεχνολογιών και για τη μοντελοποίηση των καταστάσεων που συναντάμε καθημερινά. Παρακάτω εξετάζονται οι κυριότερες εφαρμογές τους στην επιστήμη, στην τεχνολογία, στην καθημερινή ζωή και στη ναυτιλία. Οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης στη ναυτιλία, δεν είναι απλώς

μαθηματικά εργαλεία, αλλά είναι κρίσιμα μέσα για τη βαθιά κατανόηση και την ουσιαστική βελτιστοποίηση της διαγωγής των πλοίων, διότι βοηθούν σε:

- Αναλύσεις της ευστάθειας
- Προσομοιώσεις των ταλαντώσεων και της καταπόνησης, λόγω των φορτίων
- Κατασκευαστικό σχεδιασμό
- Συστήματα πλοήγησης και αυτόματου ελέγχου

Ειδικά στη ναυτιλία, οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης είναι πυρήνας των μεθόδων σχεδιασμού, αξιολόγησης και βελτιστοποίησης, διότι επιτρέπουν:

- Προβλέψεις για την ασφάλεια του πλου και για την άνεση των ναυτικών
- Ανάλυση της δυναμικής του σκάφους
- Ανάπτυξη «έξυπνων» και αυτόνομων πλοίων
- Μείωση της κατανάλωσης των καυσίμων και αποφυγή της επιβάρυνσης του περιβάλλοντος.

Χάρη σε αυτές τις εξισώσεις, η ναυπηγική μπορεί να συνδυάζει την ασφάλεια, την απόδοση και την καινοτομία, με βάση ακριβή φυσικά μοντέλα.

10.10.1 Φυσική

Η φυσική, αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό πεδίο εφαρμογής των διαφορικών εξισώσεων. Ο Newton, διατύπωσε τον 2^ο νόμο της κίνησης με τη βοήθεια των παραγώγων $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$. Η προηγούμενη σχέση, αποτελεί μια διαφορική εξίσωση που

περιγράφει την επιτάχυνση ενός σώματος, υπό την επίδραση μίας σταθερής (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά) δύναμης. Τέτοιες εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να μελετηθεί η κίνηση των σωμάτων, οι ταλαντώσεις, τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα κύματα και οι θερμικές ροές.

Εφαρμογή 30

Δύναμη F αναγκάζει ένα υλικό σημείο M μάζας m να κινείται ευθύγραμμα. Αν η τροχιά του M συμπίπτει με τη διεύθυνση της F , να βρεθεί η θέση του M κάθε χρονική στιγμή t , με αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$ και $v(0) = v_0$. Υποθέτω ότι δεν έχω απώλειες ενεργείας.

Θεωρώ ως άξονα των x τη διεύθυνση της F και ως αρχή, ένα σημείο O αυτής. Τότε, η απόσταση του M από το O θα είναι, σύμφωνα με το πρόβλημα, συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή $OM = x(t)$. Επειδή στο σημείο M ενεργεί η δύναμη F , ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής $m \cdot \gamma = F$

Γνωρίζω ότι η επιτάχυνση είναι η 2^η παράγωγος της συνάρτησης του διαστήματος ως προς τον χρόνο. Δηλαδή, $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$ οπότε η σχέση $m \cdot \gamma = F$ λόγω της $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\text{γίνεται } m \frac{d^2x}{dt^2} = F \text{ ή } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Μετά από δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, η $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$ δίνει $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ όπου

c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Η $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ είναι η γενική

λύση του προβλήματος. Για να προσδιορίσω τις c_1, c_2 , παραγωγίζω την $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$,

οπότε προκύπτει ότι $v = \frac{F}{m}t + c$ και αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές στις $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ και $v = \frac{F}{m} t + c$, παίρνω $c_2 = 0$, $c_1 = v_0$. Οπότε η $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ γίνεται $x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t$

10.10.2 Βιολογία

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη δυναμική των πληθυσμών. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το μοντέλο Malthus, που περιγράφει τον πληθυσμό $P(t)$ ως $\frac{dP}{dt} = rP$ και εκφράζει την ιδέα ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος με το μέγεθος του. Πιο εξελιγμένα μοντέλα (όπως το λογαριθμικό μοντέλο ή τα συστήματα Lotka–Volterra), μελετούν την αλληλεπίδραση μεταξύ των θηρευτών και των θηραμάτων, ή τον ανταγωνισμό μεταξύ των ειδών.

10.10.3 Χημεία

Οι διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν το πώς μεταβάλλονται οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων και των προϊόντων, κατά τη διάρκεια μιας αντίδρασης. Για παράδειγμα, σε μία απλή αντίδραση $A \rightarrow B$ η μεταβολή της συγκέντρωσης του A περιγράφεται από τη σχέση $\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$, όπου k είναι μία σταθερά της ταχύτητας. Από αυτό το μοντέλο, μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες για τον χρόνο ημιζωής και για τη θερμοδυναμική ισορροπία.

10.10.4 Ηλεκτρονικά και ηλεκτρολογία

Οι διαφορικές εξισώσεις, είναι κρίσιμες στον σχεδιασμό και στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ένα απλό κύκλωμα με αντίσταση, πυκνωτή και πηγή τάσης (κύκλωμα RC), περιγράφεται από την εξίσωση $RC \frac{dV}{dt} + V = V_0$

Τέτοιες εξισώσεις, επιτρέπουν τη μελέτη της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων, των φίλτρων, των παλμογράφων και των ολοκληρωτών.

Εφαρμογή 31

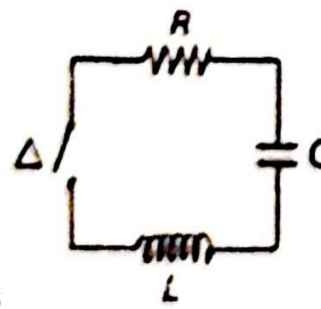
Ηλεκτρικό κύκλωμα περιέχει σε σειρά πηνίο αυτεπαγωγής L , ωμική αντίσταση R και φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C . Να βρεθεί το φορτίο q του πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ . Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δηλαδή μόλις κυκλοφορήσει ρεύμα στο κύκλωμα λόγω της εκφόρτισης του πυκνωτή, εμφανίζονται οι παρακάτω τάσεις:

α) στα άκρα του πηνίου $-L \frac{d^2 q}{dt^2}$

β) στα άκρα της αντίστασης $-R \frac{dq}{dt}$

γ) στα άκρα του πυκνωτή $\frac{q}{C}$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff για την τάση, έχω



$L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$ ή $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$ Η χαρακτηριστική εξίσωση της

$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$ είναι $k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$ με ρίζες

$x_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$ Ανάλογα τώρα με τις τιμές των R, L,

δηλαδή ανάλογα με το πρόσημο της Δ , διακρίνω 3 περιπτώσεις λύσεων. Οι αρχικές συνθήκες είναι $q(0) = q_0$ και $q'(0) = 0$

α) Αν $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta < 0$, βρίσκω τη μερική λύση της

$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$, που είναι η συνάρτηση $q = Ae^{-\mu t} \sin(\omega t - \varphi)$ η οποία εκφράζει

μια **φθίνουσα ταλάντωση** με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

β) Αν $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta > 0$, τότε η μερική λύση της

$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$ είναι $q = Ae^{\kappa_1 t} + Be^{\kappa_2 t}$ όπου $A = \frac{q_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4}{CR^2}}} + 1 \right]$

$B = \frac{q_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4}{CR^2}}} - 1 \right]$. Η $q = Ae^{\kappa_1 t} + Be^{\kappa_2 t}$ εκφράζει μια **ισχυρή απόσβεση του**

φορτίου.

γ) Αν $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta = 0$, η μερική λύση της $k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$

είναι $q = q_0 e^{-\mu t} (1 + \mu t)$ Η $q = q_0 e^{-\mu t} (1 + \mu t)$ είναι μία μη περιοδική φθίνουσα συνάρτηση και ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση**. Οι εφαρμογές που εξέτασα μέχρι τώρα αναφέρονταν σε ταλαντώσεις κλειστών συστημάτων. Τώρα θα μελετήσω συστήματα στα οποία επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις. Οι ταλαντώσεις σε αυτή την περίπτωση περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = \varphi(t)$, όπου $x = x(t)$

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη που η εξωτερική δύναμη είναι περιοδική, οπότε $\varphi(t)$ θα είναι της μορφής $F_0 \sin \omega t$ ή $F_0 \eta \mu \omega t$. Η $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = \varphi(t)$ είναι το μαθηματικό μοντέλο του φαινομένου που ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**.

10.10.5 Ρομποτική και τεχνητή νοημοσύνη

Οι ρομποτικοί βραχίονες και τα αυτόνομα οχήματα, κινούνται βάσει μοντέλων που βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, ο έλεγχος της

ταχύτητας και της κατεύθυνσης, εξαρτάται από μαθηματικά μοντέλα που προβλέπουν την αλλαγή της θέσης και της ταχύτητας, κάθε χρονική στιγμή.

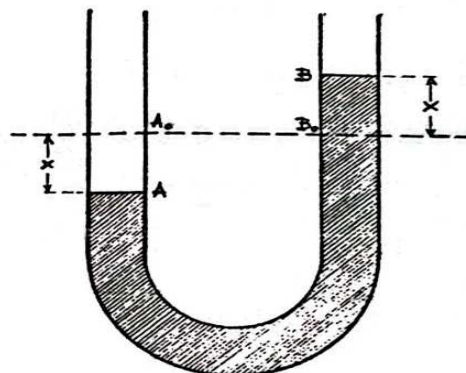
10.10.6 Αεροδυναμική και μηχανική ρευστών

Η ροή του αέρα γύρω από ένα αεροπλάνο ή η ροή του νερού μέσα σε έναν σωλήνα, περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier–Stokes, που είναι σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η κατανόηση και η επίλυση τους, επιτρέπει την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των ρευστών, μέσα σε διάφορα περιβάλλοντα.

10.10.7 Υδροστατική

Υγρό ισορροπεί εντός σωλήνα σχήματος U. Όταν η ελεύθερη του επιφάνεια απομακρυνθεί κατά x από την αρχική του στάθμη της κατάστασης της ηρεμίας, υπό την επίδραση δύναμης F , αυτό κινείται, έστω με αμελητέες τριβές.

Αν S η διατομή του σωλήνα, ℓ το μήκος του που έχει καταλάβει το υγρό και (μ) η ανά μονάδα όγκου μάζα του υγρού, τότε η κινητήρια δύναμη F , που αντιστοιχεί προς το βάρος της στήλης υγρού ύψους $2x$, είναι $F = S \cdot 2x \cdot \mu \cdot g$ και η μάζα m του υγρού είναι $m = S \cdot \ell \cdot \mu$



Σωλήνας U

Άρα, ο θεμελιώδης νόμος της κίνησης που εκφράζεται από την $F = m \cdot \alpha$, δίνει $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ του σημείου, (-) οφειλόμενου στο ότι η F έχει φορά τη φορά της μετατόπισης, δηλαδή από την αρχική στάθμη A_0B_0 , προς το A για το αριστερό σκέλος του σωλήνα ή προς το B για το δεξιό σκέλος του σωλήνα.

Η $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ από την $m = S \cdot \ell \cdot \mu$, γίνεται $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = S \cdot \ell \cdot \mu \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, ή $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-2g}{\ell} x$, ή $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$, όπου $k^2 = \frac{2g}{\ell}$ Από

την $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ συμπεραίνω ότι έχω μια διαφορική εξίσωση της οικογένειας των ημιτονοειδών γραμμών, δηλαδή μια αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση, με ανάλογο τον υπολογισμό της περιόδου του εκκρεμούς, μήκους $\frac{\ell}{2}$, οπότε για το υγρό

είναι $x = x_0 \cdot \eta\mu(k \cdot t - \phi)$ και $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$, όπου η T είναι ανεξάρτητη των S ,

μ δηλαδή της φύσης του υγρού, γεγονός που δεν θα συμβαίνει αν λάβω υπόψη τις τριβές και επομένως την απόσβεση της ταλάντωσης του υγρού μέσα στον σωλήνα.

10.10.8 Προγραμματισμός και προσομοιώσεις

Σε λογισμικά προσομοίωσης των φυσικών συστημάτων (π.χ. μηχανών, κλιματικών μοντέλων, προσομοίωσης κυκλοφορίας), χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι, για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Οι προσομοιώσεις, βασίζονται στις διαφορικές εξισώσεις για την ακριβή αναπαράσταση της πραγματικότητας.

10.10.9 Οικονομία και χρηματοοικονομικά

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν την εξέλιξη των τιμών, των επιτοκίων, των επενδύσεων και των καταναλωτικών συνηθειών. Για παράδειγμα, η εξίσωση Black–Scholes που χρησιμοποιείται στην τιμολόγηση των παραγώγων, είναι μία μερική διαφορική εξίσωση.

10.10.10 Υγεία και ιατρική

Κατά την εξάπλωση των μολυσματικών ασθενειών, τα επιδημιολογικά μοντέλα (όπως το SIR) βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις. Αυτά τα μοντέλα, προβλέπουν την πορεία (εξάπλωση) μιας επιδημίας, ποσοτικοποιούν την ανάγκη για εμβόλια και εκτιμούν τον αριθμό των μολυσμένων ατόμων στον χρόνο.

10.10.11 Περιβάλλον και κλίμα

Η πρόβλεψη της θερμοκρασίας, της ρύπανσης ή της στάθμης των υδάτων, βασίζεται σε διαφορικές εξισώσεις. Μοντέλα κλιματικής αλλαγής, πρόβλεψης του καιρού και διαχείρισης των φυσικών πόρων, είναι όλα εφαρμογές αυτής της μεθοδολογίας.

10.10.12 Μουσική και ήχος

Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων, περιγράφεται με τη βοήθεια της κυματικής εξίσωσης, που είναι διαφορική εξίσωση η οποία έχει εφαρμογές σε ηχητικές συσκευές, στην ακουστική των χώρων και στην επεξεργασία του σήματος.

10.10.13 Απλό εκκρεμές

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του απλού εκκρεμούς μήκους ℓ , όταν αυτό κινείται μέσα σε κάποιο μέσο, που προκαλεί αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας του,

υπολογίζεται στη μηχανική ότι είναι $ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$ όπου b , g , m , ℓ σταθερές και θ η γωνία στροφής. Στην περίπτωση πολύ μικρών ταλαντώσεων του εκκρεμούς, επειδή $\eta\mu\theta = \theta - \frac{\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\theta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$ δηλαδή, όταν η γωνία θ είναι πολύ μικρή, μπορώ (χωρίς μεγάλο σφάλμα), να θεωρήσω ότι $\eta\mu\theta = \theta$, οπότε η

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0 \text{ γίνεται } ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0$$

Οι λύσεις της $ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$, προσεγγίζουν τις λύσεις της

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0, \text{ εφόσον οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρές.}$$

10.10.14 Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις φυσικών συστημάτων, μελετώνται με βάση τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές που έχουν τη γενική μορφή $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t)$. Η συνάρτηση $f(t)$ και οι συντελεστές a_1, a_2

θεωρούνται γνωστά, οι δε συμβολισμοί \ddot{x}, \dot{x} σημαίνουν $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}$ αντίστοιχα.

Αν στη διαφορική εξίσωση $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t)$ είναι $f(t) = 0$ τότε η ταλάντωση λέγεται **ελεύθερη**, ενώ όταν $f(t) \neq 0$ η ταλάντωση καλείται **εξαναγκασμένη**. Ειδικότερες μορφές ταλαντώσεων στις παραπάνω περιπτώσεις είναι δυνατό να προκύψουν από τη διερεύνηση των ριζών της αντίστοιχης χαρακτηριστικής εξίσωσης της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t)$. Για τη μελέτη των ταλαντώσεων θα χρησιμοποιήσω πρώτα ένα απλό μηχανικό σύστημα και έπειτα θα μεταφέρω τα συμπεράσματα, που είναι εντελώς ανάλογα, σε ένα ηλεκτρικό σύστημα.

10.10.15 Εξίσωση της ελαστικής καμπύλης και μέγιστη εκτροπή

Οριζόντια δοκός που στηρίζεται στα 2 άκρα της, φορτίζεται κάθετα προς τον άξονα της. Το βέλος που σχηματίζεται από την επίδραση των δυνάμεων του φορτίου, ονομάζεται **ελαστική καμπύλη** και αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των διατομών της δοκού, που είναι κάθετες προς τον άξονά της. Από τη μηχανική, είναι γνωστό ότι η εξίσωση της ελαστικής καμπύλης είναι $R = \frac{E \cdot I}{M}$ όπου

- R η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης,
- E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού,
- I η ροπή αδράνειας στο τυχόν σημείο,
- M η ροπή κάμψης.

Αν στην $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$, που δίνει το R , παραλείψω το $(y')^2$ (διότι η κλίση της

ελαστικής καμπύλης είναι μικρή) τότε η $R = \frac{E \cdot I}{M}$ δίνει τη διαφορική εξίσωση 2^{ης}

τάξης $\frac{1}{y''} = \frac{E \cdot I}{M} \Rightarrow y'' = \frac{M}{E \cdot I}$ με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατό να επιλύσω τα προβλήματα που αφορούν την κάμψη της δοκού.

10.11 Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης στη ναυτιλία

Η ναυτιλία, ως ένας από τους σημαντικότερους κλάδους της παγκόσμιας οικονομίας και της μηχανικής, εξαρτάται απόλυτα από την ακριβή πρόβλεψη και από τη μελέτη της κίνησης των πλοίων. Εφόσον η θάλασσα αποτελεί ένα δυναμικό και διαρκώς μεταβλητό περιβάλλον, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι απαραίτητη. Οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, βρίσκουν συχνά εφαρμογές στον χώρο της ναυτιλίας, διότι περιγράφουν τα **δυναμικά συστήματα** στα οποία υπάρχει **επιτάχυνση**. Σε πολλά από αυτά, ένα πλοίο ή κάποιο εξάρτημά του κινείται υπό την επίδραση εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, γεγονός που μοντελοποιείται με εξισώσεις (οι οποίες περιέχουν παραγώγους 2^{ης} τάξης), της θέσης ή της γωνίας περιστροφής, ως προς τον χρόνο. Οι διαφορικές εξισώσεις και ειδικά οι εξισώσεις 2^{ης} τάξης, είναι τα κύρια μαθηματικά εργαλεία για:

- Τη μελέτη των κινήσεων των πλοίων στη διάρκεια των κυματισμών

- Την πρόβλεψη της σταθερότητας – ευσταθούς πλεύσης
- Τον σχεδιασμό των αυτοματοποιημένων συστημάτων πλοήγησης
- Την αποφυγή των φαινομένων του συντονισμού και των μηχανικών αστοχιών.

10.11.1 Κίνηση πλοίου στη διάρκεια κυματισμών

Ένα πλοίο που πλέει στη θάλασσα, επηρεάζεται από τα κύματα. Η κίνηση του, μπορεί να αναλυθεί σε 6 βαθμούς ελευθερίας:

- **Heave** (κατακόρυφη μετατόπιση)
- **Sway** (πλευρική μετατόπιση)
- **Surge** (εμπρόσθια / οπίσθια μετατόπιση)
- **Roll** (περιστροφή γύρω από τον διαμήκη άξονα)
- **Pitch** (περιστροφή γύρω από τον εγκάρσιο άξονα)
- **Yaw** (περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα)

Αυτές οι κινήσεις, μοντελοποιούνται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης.

Εφαρμογή στη ναυτιλία

Πρόκειται για μία κλασική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με εφαρμογές στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς των πλοίων στα κύματα. Η ταλάντωση roll, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M(t)$ όπου:

- I η ροπή αδράνειας του πλοίου γύρω από τον άξονα
- c ο συντελεστής απόσβεσης (λόγω των ρευστών)
- k η σκληρότητα επαναφοράς (λόγω της άνωσης)
- θ η γωνία ταλάντωσης (roll)
- $M(t)$ η εξωτερική ροπή λόγω των κυμάτων

10.11.2 Δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου

Οι περισσότερες από αυτές τις κινήσεις, περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, της μορφής $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$, όπου:

- m η μάζα (ή ροπή αδράνειας)
- c η απόσβεση λόγω της αντίστασης του νερού (υδροδυναμικές δυνάμεις)
- k η σταθερά επαναφοράς (π.χ. λόγω της άνωσης)
- $F(t)$ η εξωτερική δύναμη (π.χ. κύματα, άνεμος)
- $x(t)$ η μετατόπιση ή γωνία

Αυτές οι εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να προβλέψουμε αν το πλοίο μπορεί να παραμείνει ευσταθές (εμφάνιση ροπής επαναφοράς), άνετο για τους επιβάτες και ασφαλές για τα φορτία.

10.11.3 Ευστάθεια των πλοίων

Για την εξασφάλιση ότι το πλοίο **θα επιστρέψει στην αρχική θέση ισορροπίας του** (αποκλεισμός εμφάνισης της ροπής ανατροπής) μετά από μία διαταραχή (π.χ. λόγω του δυνατού ανέμου ή των ισχυρών κυμάτων), μελετάται η δυναμική του συστήματος, με χρήση διαφορικών εξισώσεων. Αυτό, βοηθά στον υπολογισμό των **κρίσιμων σημείων της ευστάθειας**. Το μοντέλο, είναι συνήθως μια

εξίσωση του τύπου $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + ky = 0$, όπου x είναι η μετατόπιση του κέντρου

βάρους / άξονα. Αυτή η εξίσωση, περιγράφει την **ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση**, η οποία είναι θεμελιώδης στη μελέτη των κινήσεων του πλοίου, μετά από έντονο κυματισμό (διατοιχισμός). Αν η λύση της εξίσωσης φθίνει σε σχέση με τον χρόνο, τότε το πλοίο θεωρείται ευσταθές. Η ανάλυσή της ευστάθειας, γίνεται σε στατικό και σε δυναμικό επίπεδο.

10.11.4 Αυτόματος έλεγχος της πορείας

Ο αυτόματος έλεγχος της πορείας ενός πλοίου (π.χ. μέσω PID controller), απαιτεί τη **μοντελοποίηση της δυναμικής απόκρισης** του όταν αυτό στρέφεται (yaw motion), κάτι που υλοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. Π.χ. η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική απόκριση του πλοίου σε αλλαγή πορείας, είναι

η ακόλουθη $I \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = u(t)$, όπου:

y η γωνία στροφής

I η ροπή αδράνειας, ως προς τον κατακόρυφο άξονα

$u(t)$ η είσοδος (π.χ. κίνηση του πηδαλίου)

10.11.5 Υπολογιστικά μοντέλα και ναυπηγική ανάλυση

Κατά τη φάση της **σχεδίασης των νέων πλοίων**, χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα (συχνά με βάση διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης) για:

- Την προσομοίωση των δομικών ταλαντώσεων του κύτους (π.χ. **hull girder vibration**),
- Την αποφυγή φαινομένων όπως ο **συντονισμός**, που μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφική αστάθεια (μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης),
- Τον προσδιορισμό των **ιδιοσυχνοτήτων** (natural frequencies) και των **μορφών της ταλάντωσης** (mode shapes).

10.11.6 Προσομοιώσεις και πλοία νέας τεχνολογίας

Οι διαφορικές εξισώσεις, εφαρμόζονται σε **λογισμικά CFD (Computational Fluid Dynamics)** και **FEA (Finite Element Analysis)**, που ευρύτατα χρησιμοποιούνται για την:

- Προσομοίωση της ροής του νερού, γύρω από το κύτος του πλοίου,
- Ανάλυση της πίεσης που ασκείται κάθε χρονική στιγμή, στο πηδάλιο και στα πτερύγια,
- Βελτιστοποίηση του σχήματος (υδροδυναμική μορφή, βολβός πλώρης) του πλοίου, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της αντίστασης (τριβής) που συναντά, κατά την πλεύση του.

10.11.7 Καταπόνηση του κύτους

Το κύτος του πλοίου, λειτουργεί ως δοκός (δομικό στοιχείο) που παραμορφώνεται ελαστικά, κατά τη διάρκεια των κυματισμών. Η δυναμική ανάλυση των παραμορφώσεων του κύτους, περιλαμβάνει μορφές ταλάντωσης και κατανομές των διαφόρων φορτίων. Η όλη διαδικασία, μοντελοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} ή και 4^{ης} τάξης (όπως η εξίσωση της καμπτικής δόνησης Euler–Bernoulli)

$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(x, t)$ όπου y είναι η κάθετη μετατόπιση του κύτους.

Με αυτές τις εξισώσεις, γίνεται ανάλυση της παραμόρφωσης, υπολογισμός της κόπωσης και εξασφαλίζεται διαχρονικά η αντοχή.

10.11.8 Κύματα, συντονισμός και ναυτική μηχανολογία

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη ναυτική μηχανολογία είναι ο συντονισμός, δηλαδή, όταν η συχνότητα ταλάντωσης των κυμάτων είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πλοίου. Αν συμβεί αυτό, τότε οι κινήσεις του πλοίου μεγεθύνονται επικίνδυνα (μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης). Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από

την ομογενή εξίσωση $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Οι ναυπηγοί, προσπαθούν να σχεδιάσουν τα πλοία έτσι ώστε να αποφεύγουν το φαινόμενο του συντονισμού, με τα τυπικά ωκεάνια κύματα.

Άλυτες ασκήσεις

1. Πυροβόλο βάλει βλήμα με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_0 στο επίπεδο xOz υπό γωνία $\hat{\theta}$ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο και $0 \leq \theta \leq \pi$. Τα σημεία του ανωτέρω επιπέδου που δεν είναι δυνατό να βληθούν από το κανόνι βρίσκονται πέρα από μία καμπύλη που θα διαγράψει το βλήμα, για τις διάφορες τιμές της γωνίας $\hat{\theta}$. Βρείτε αυτή την καμπύλη που ονομάζεται περιβάλλουσα των τροχιών.

2. Δεξαμενή όγκου V είναι γεμάτη με καθαρό νερό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0''$ αρχίζει να εισρέει στη δεξαμενή θαλασσινό νερό, από σωλήνα παροχής Π , με αποτέλεσμα να εκρέει από τη δεξαμενή ίσος όγκος νερού ανά μονάδα χρόνου. Αν η συγκέντρωση του αλατιού στο θαλασσινό νερό είναι $x \frac{gr}{lit}$ βρείτε τη μάζα m του αλατιού που είναι διαλυμένη στο νερό που περιέχει η δεξαμενή τη χρονική στιγμή $t > 0$ και κάντε τη γραφική παράσταση $m(t)$

Παραδοχή. Το αλάτι που περιέχεται στο θαλασσινό νερό που εισρέει στη δεξαμενή, διαχέεται ακαριαία σε όλο τον όγκο της, ώστε η εκάστοτε συγκέντρωση του να είναι σταθερή, σε όλο τον όγκο.

3. Σε σώμα που κινείται εντός ρευστού με ταχύτητα v , ασκείται από το ρευστό μία δύναμη F_R (αντίσταση ρευστού) ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα του σώματος, μέτρου $F_R = k_1 v$, όπου k_1 συντελεστής ανεξάρτητος της ταχύτητας. Σώμα μάζας m πέφτει από ύψος h_0 χωρίς αρχική ταχύτητα. Ποια θα είναι η ταχύτητα του v την χρονική στιγμή t , αν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τον ανωτέρω τύπο; Να γίνει η γραφική παράσταση $v(t)$

4. Τορπίλη μάζας m εκτοξεύεται οριζόντια, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιβραδύνεται από μία δύναμη ανάλογη της ταχύτητας της. Αν στην τορπίλη δεν ασκείται άλλη δύναμη, ποια θα είναι η ταχύτητα της μετά τη διέλευση χρόνου t από την εκτόξευση της;