

ΑΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ - ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

## Μαθηματικά Ι

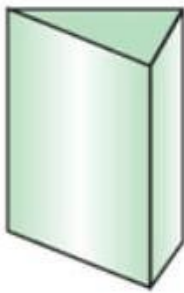
### Εμβαδόν και Όγκος Στερεών

Επιμέλεια: Παναγιώτα Λάλου

Ιανουάριος 2021

## Ορθό Πρίσμα

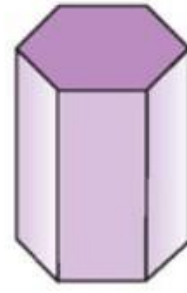
**Πρίσμα** είναι το πολύεδρο που έχει δύο έδρες ίσες και παράλληλες (βάσεις) και όλες τις άλλες έδρες του παραλληλόγραμμα. Ύψος πρίσματος είναι η απόσταση των βάσεων του. **Ορθό** λέγεται το πρίσμα που οι έδρες του είναι κάθετες στις βάσεις του, διαφορετικά λέγεται πλάγιο. Κανονικό είναι το πρίσμα που οι βάσεις του είναι κανονικά πολύγωνα. Ένα πρίσμα παίρνει την ονομασία του από το σχήμα των βάσεων του. Αν είναι τρίγωνα τότε το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, αν είναι εξαγωνα εξαγωνικό κ.τ.λ.



τριγωνικό πρίσμα

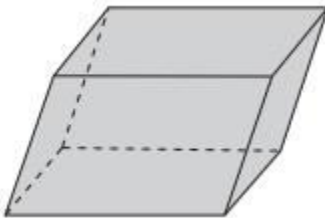


πενταγωνικό πρίσμα

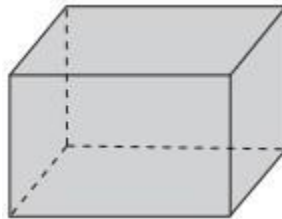


εξαγωνικό πρίσμα

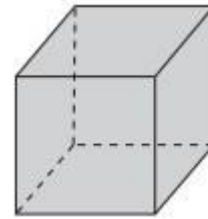
Αν οι βάσεις ενός πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα, τότε το πρίσμα λέγεται **παραλληλεπίπεδο**. Αν το πρίσμα είναι ορθό και οι βάσεις είναι ορθογώνια, το πρίσμα λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ειδικότερα, αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές ίσες, λέγεται **κύβος**.



Παραλληλεπίπεδο



Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο



Κύβος

Εμβαδόν Παράπλευρης επιφάνειας

$$E_{\pi} = \Pi_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon$$

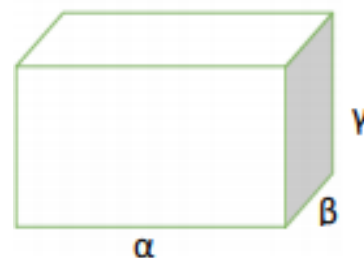
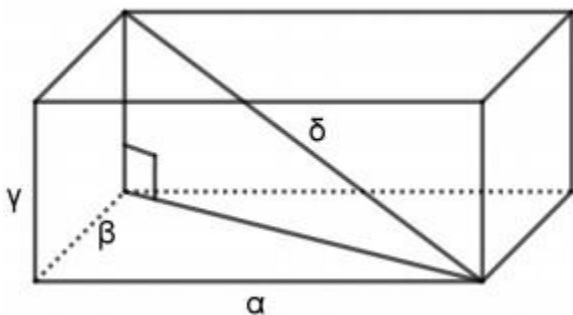
Εμβαδόν Ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = 2E_{\text{βάσης}} + E_{\pi}$$

Όγκος:

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon$$

## Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο



Εμβαδόν Παράπλευρης επιφάνειας:

$$E_{\pi} = 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

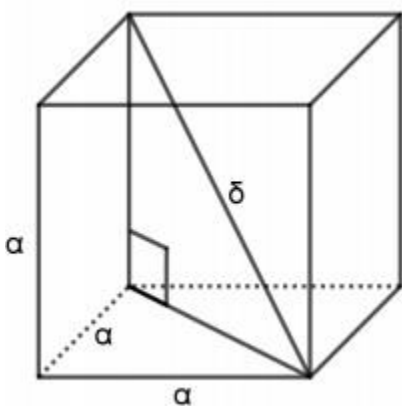
Εμβαδόν Ολικής Επιφάνειας:

$$E_{ολ} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

Όγκος:

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

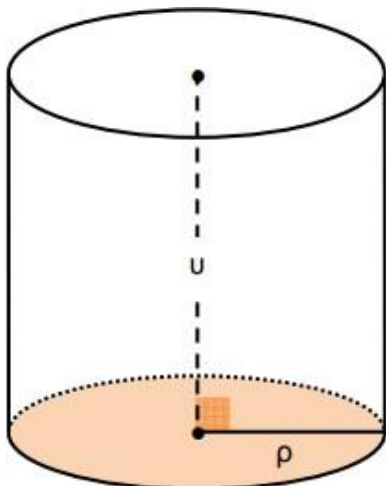
## Κύβος



$$E_{ολ} = 6\alpha^2$$

$$V = \alpha^3$$

## Κύλινδρος



Εμβαδόν Παράπλευρης επιφάνειας:

$$E_{\pi} = \text{Περίμετρος βάσης} \cdot \upsilon = 2\pi\rho \cdot \upsilon$$

Εμβαδόν Ολικής επιφάνειας:

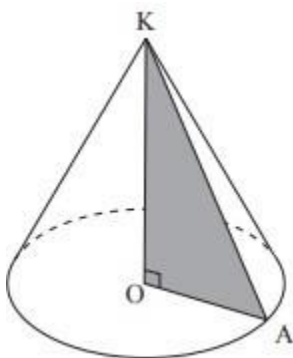
$$E_{ολ} = 2E_{βάσης} + E_{\pi} = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho \cdot \upsilon$$

Όγκος:

$$V = E_{βάσης} \cdot \upsilon = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$$

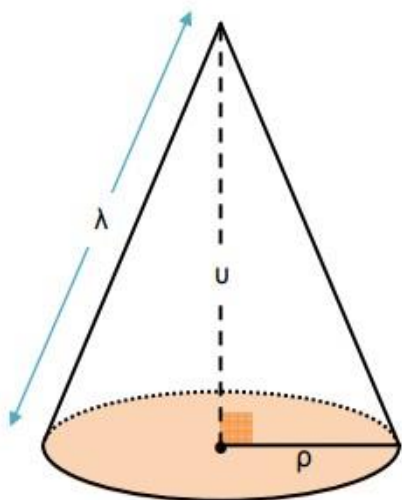
## Κώνος

**Κώνος** λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.



Η κυρτή επιφάνεια που παράγεται από την υποτείνουσα KA λέγεται **παράπλευρη** ή **κυρτή** επιφάνεια του κώνου.

Η τυχαία θέση της KA λέγεται **γενέτειρα** του κώνου, και τη συμβολίζουμε  $\lambda$ .



Εμβαδόν Κυρτής επιφάνειας:

$$Eκ = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$$

Εμβαδόν Ολικής επιφάνειας:

$$Eολ = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + Eκ = \pi\rho^2 + \pi\rho \cdot \lambda$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$$

## Πυραμίδα

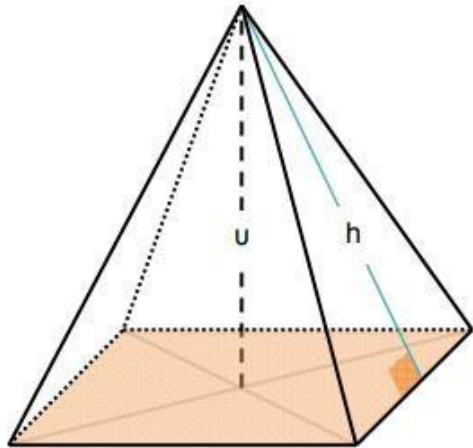
Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Το πολύγωνο λέγεται **βάση** της πυραμίδας, ενώ τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ και απέναντι πλευρές τις πλευρές της βάσης λέγονται **παράπλευρες έδρες**. Το σύνολο των παράπλευρων εδρών λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια** της πυραμίδας. Η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική κτλ., αν η βάση είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κτλ.

Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας κάθετα στο επίπεδο της βάσης λέγεται **ύψος** της πυραμίδας.

Μία πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου. Σε μία κανονική πυραμίδα, οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους και το ύψος κάθε παράπλευρης έδρας που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας λέγεται **απόστημα** ή **παράπλευρο ύψος** της κανονικής πυραμίδας.

### ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ



Εμβαδόν Παράπλευρης επιφάνειας:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \text{Περίμετρος βάσης} \cdot h$$

Εμβαδόν Ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = E_{\beta} + E_{\pi}$$

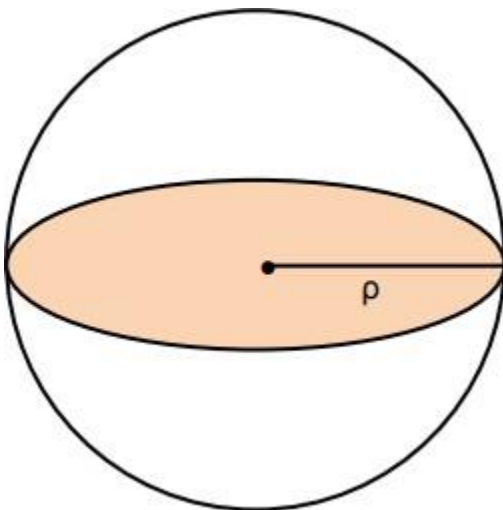
Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_{\beta} \cdot \upsilon$$

## Σφαίρα

---

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.



Εμβαδόν επιφάνειας:

$$E = 4 \pi \rho^2$$

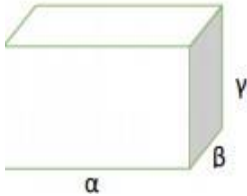
Όγκος:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \rho^3$$

## Ασκήσεις:

1)

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 3 cm, πλάτος 4 cm και ύψος 5 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



$$\alpha = 3 \text{ cm}, \beta = 4 \text{ cm} \text{ και } \gamma = 5 \text{ cm}$$

$$E_{\text{ολ}} = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 24 + 30 + 40 = 94 \text{ cm}^2$$

$$V = \alpha\beta\gamma = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθού πρίσματος του οποίου το ύψος είναι 8 cm και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm, αντίστοιχα.

**Λύση:**

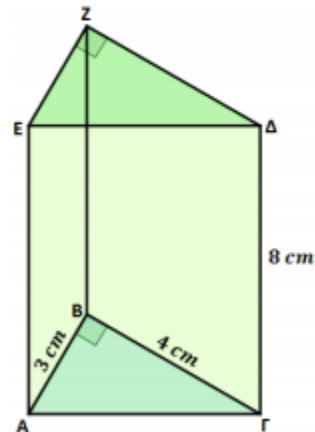
Υπολογίζουμε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ :

$$(A\Gamma)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow (A\Gamma)^2 = 25 \Rightarrow A\Gamma = \sqrt{25} \Rightarrow A\Gamma = 5 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του ορθού πρίσματος είναι:

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon = (3 + 4 + 5) \cdot 8 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$$



- 3) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 7 cm, 6 cm και 5 cm. Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ( $130\text{cm}^2$ )  
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ( $214\text{cm}^2$ )  
γ) τον όγκο ( $210\text{cm}^3$ )

4)

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4 m, πλάτος 3 m και όγκο  $120 \text{ m}^3$ . Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας. ( $10\text{m}$ ,  $164\text{m}^2$ )

- 5) Μια κλειστή δεξαμενή πλοίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 9μ, 8μ και 6,5μ περιέχει 420 κυβ. μ. πετρέλαιο. Να βρεθούν:  
α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.  
β) πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει η δεξαμενή.

- 6) Ένας κύλινδρος έχει ύψος 10 εκατοστά και ακτίνα βάσης 4 εκατοστά. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και ο όγκος του.
- 7) Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με  $175 \cdot \pi \text{ m}^3$ . Αν το ύψος του είναι ίσο με 7 m, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
- 8) Μια κυλινδρική δεξαμενή έχει ύψος 6 m και ακτίνα βάσης 4m. Αν η δεξαμενή έχει μέσα  $200 \text{ m}^3$  πετρέλαιο, πόσο εποπλέον πετρέλαιο χωράει;