ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2ο μάθημα

Τριγωνομετρία Επανάληψη

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Α. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί στο Ορθογώνιο Τρίγωνο

$ημ\,B = \dfrac{απέναντι\ κάθετη}{υποτείνουσα} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ}$
$συν\,B = \dfrac{προσκείμενη\ κάθετη}{υποτείνουσα} = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$
$εφ\,B = \dfrac{απέναντι\ κάθετη}{προσκείμενη\ κάθετη} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$
$σφ\,B = \dfrac{προσκείμενη\ κάθετη}{απέναντι\ κάθετη} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Στη διεθνή βιβλιογραφία ισχύουν οι εξής διεθνείς συμβολισμοί:

$\eta\mu x = sinx$	$\sigma\upsilon\nu x = cosx$	$\varepsilon\varphi x = tanx$	$\sigma\varphi x = cotx$

$\tau o\xi\eta\mu x = arcsinx$	$\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x = arcosx$	$\tau o\xi\sigma\varepsilon\varphi x = arctanx$	$\tau o\xi\sigma\varphi x = arcotx$

$\frac{1}{\sin x} = cscx$	$\frac{1}{\cos x} = secx$	$\frac{1}{\tan x} = \cot x$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

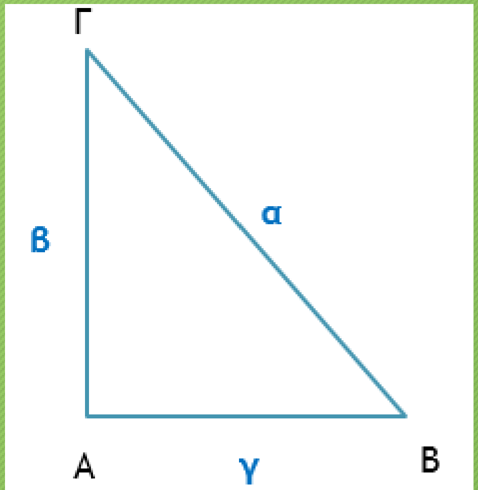
Β. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$	2. $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$
3. $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, με $\eta\mu\, x \neq 0$	4. $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$

Γ. Οι τιμές των Τριγωνομετρικών Αριθμών

$sin\, x \ \in [-1{,}1]$	$cos\, x \ \in [-1{,}1]$
$tan\, x \in \ \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$	$cot\, x \in \ \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Δ. Πυθαγόρειο Θεώρημα



Εύρεση της υποτείνουσας: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha > \beta, \gamma$
Εύρεση των καθέτων πλευρών: $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ε. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνιών

x	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0
$\cot x$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

ΣΤ. Μονάδες Μέτρησης Γωνιών

1. Μοίρες (^{o}): Η 1^o έχει 60΄ και κάθε 1΄ έχει 60΄΄.

2. Ακτίνια (rad)

Μετατροπή:

$$a^\circ = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

όταν γνωρίζουμε τη γωνία σε ακτίνια και θέλουμε να τη μετατρέψουμε σε μοίρες.

$$x\, rad = a^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

όταν γνωρίζουμε τη γωνία σε μοίρες και θέλουμε να τη μετατρέψουμε σε ακτίνια.

ΣΤ. Μονάδες Μέτρησης Γωνιών

$$\alpha^\circ = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$x\,rad = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Ασκήσεις :

1. Να μετατραπούν οι γωνίες σε rad:

$\hat{x} = 30^\circ$

$\hat{x} = 45^\circ$

$\hat{x} = 50^\circ$

$\hat{x} = 75^\circ$

ΣΤ. Μονάδες Μέτρησης Γωνιών

$$\alpha^\circ = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$x\, rad = a^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

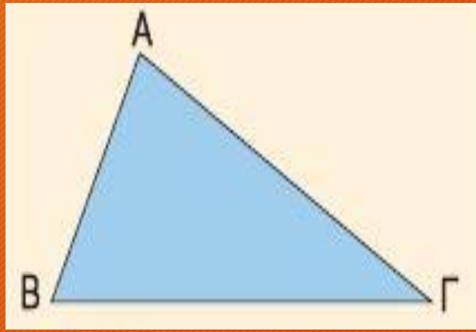
Ασκήσεις :

2. Να μετατραπούν οι γωνίες σε μοίρες (degrees):

$\hat{x} = 1\, rad$	
$\hat{x} = 3{,}14\, rad$	
$\hat{x} = 2\, rad$	
$\hat{x} = 5\, rad$	

Ζ. Επίλυση τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:



1. **Νόμος Ημιτόνων:** $$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin \Gamma} = 2 \cdot R$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου

2. **Νόμος Συνημιτόνων:**

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\, cosA \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad cosA = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\, cosB \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad cosB = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\, cos\Gamma \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad cos\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ /ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την επίλυση τριγώνου:

- Αν γνωρίζουμε <u>2 γωνίες και μία πλευρά</u> ή <u>δύο πλευρές και μία γωνία</u> εκτός της περιεχόμενης χρησιμοποιούμε τον <u>Νόμο των Ημιτόνων</u>.
- Αν γνωρίζουμε <u>2 πλευρές και την περιεχόμενη γωνία</u> ή <u>3 πλευρές</u> χρησιμοποιούμε των <u>Νόμο των Συνημιτόνων</u>.
- Πιο εύκολες πράξεις έχει ο Νόμος των Ημιτόνων, αλλά όταν ζητούμε τις γωνίες προτιμούμε τον Νόμο των Συνημιτόνων, διότι αν το συνημίτονο είναι θετικό η γωνία είναι οξεία, αλλιώς είναι αμβλεία.

Λυμένα Παραδείγματα:

1) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 15,\ \hat{A} = 43°,\ \hat{B} = 82°$.

Λύση:

Με τη βοήθεια του Νόμου των Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} \Leftrightarrow \frac{15}{\eta\mu 43°} = \frac{\beta}{\eta\mu 82°} \Leftrightarrow \frac{15}{0{,}682} = \frac{\beta}{0{,}990} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 0{,}990 \cdot \frac{15}{0{,}682} \Leftrightarrow \beta \simeq 21{,}774 \Leftrightarrow \beta \simeq 22$$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ /ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Λυμένα Παραδείγματα:

1) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 15,\ \hat{A} = 43°,\ \hat{B} = 82°$.

Λύση (συνέχεια):

$$\hat{\Gamma} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 43° - 82° = 55°$$

Με τη βοήθεια,πάλι του Νόμου των Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{15}{\eta\mu 43°} = \frac{\gamma}{\eta\mu 55°} \Leftrightarrow \frac{15}{0{,}682} = \frac{\gamma}{0{,}819} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = 0{,}819 \cdot \frac{15}{0{,}682} \Leftrightarrow \gamma \simeq 18{,}013 \Leftrightarrow \gamma \simeq 18¶$$

Λυμένα Παραδείγματα:

2) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 35,\ \beta = 20,\ \gamma = 42$.

Λύση:

Με τη βοήθεια του Νόμου των Συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\hat{A} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{20^2 + 42^2 - 35^2}{2 \cdot 20 \cdot 42} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\widehat{A} \simeq 0{,}559 \Leftrightarrow \widehat{A} \simeq 56^\circ$$

Λυμένα Παραδείγματα:

2) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 35,\ \beta = 20,\ \gamma = 42$.

Λύση (συνέχεια):

Με τη βοήθεια,πάλι του Νόμου των Συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\, \sigma\upsilon\nu\hat{B} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{35^2 + 42^2 - 20^2}{2\cdot 35\cdot 42} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\widehat{B} \simeq 0{,}880 \Leftrightarrow \widehat{B} \simeq 28^\circ$$

Και έτσι: $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 56^\circ - 28^\circ = 96^\circ$

3) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\alpha = 23,\ \beta = 31,\ \hat{B} = 35°$.

Λύση:

3) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\alpha = 23,\ \beta = 31,\ \hat{B} = 35°$.

Λύση:

Με τη βοήθεια του Νόμου των Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{31}{\eta\mu 35°} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{31}{0{,}574} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\hat{A} = 0{,}574 \cdot \frac{23}{31} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{A} \simeq 0{,}426 \Leftrightarrow \hat{A} \simeq 25° \text{ ή } 180° - 25° = 155°$$

Όμως η απέναντι πλευρά από την γωνία $\hat{A}$ δεν είναι η μεγαλύτερη του τριγώνου (αφού $\beta = 31 > 23 = \alpha$) και συνεπώς η γωνία $\hat{A}$ δεν είναι αμβλεία και άρα $\hat{A} = 25°$.

3) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\alpha = 23,\ \beta = 31,\ \hat{B} = 35°$.

Λύση (συνέχεια):

Συνεπώς:

$$\hat{\Gamma} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 25° - 35° = 120°$$

Και με τη βοήθεια του Νόμου των Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{31}{\eta\mu 35°} = \frac{\gamma}{\eta\mu 120°} \Leftrightarrow \frac{31}{0{,}574} = \frac{\gamma}{0{,}866} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = 0{,}866 \cdot \frac{31}{0{,}574} \Leftrightarrow \gamma \simeq 46{,}77 \Leftrightarrow \gamma \simeq 47$$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\beta = 20,\ \gamma = 42,\ \hat{A} = 56°$.

Λύση:

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\beta = 20,\ \gamma = 42,\ \hat{A} = 56^\circ$.

Λύση:

Από το Νόμο των Συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\hat{A} \Leftrightarrow \alpha^2 = 20^2 + 42^2 - 2\cdot 20\cdot 42\cdot \sigma\upsilon\nu 56^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 400 + 1764 - 939{,}12 \Leftrightarrow \alpha^2 \simeq 1224{,}88 \Leftrightarrow \alpha^2 \simeq 1225 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \simeq 35$$

Εδώ προτιμούμε τον Νόμο των Συνημιτόνων γιατί δεν έχουμε επαρκή δεδομένα για να ξέρουμε ποια είναι η μεγαλύτερη πλευρά ή γωνία.

4) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\beta = 20,\ \gamma = 42,\ \hat{A} = 56^\circ$

Λύση (συνέχεια):

Εφαρμόζοντας πάλι το Νόμο των Συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \sigma\upsilon\nu\hat{B} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{35^2 + 42^2 - 20^2}{2 \cdot 35 \cdot 42} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} \simeq 0{,}880 \Leftrightarrow \hat{B} \simeq 28^\circ$$

Και άρα:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 56^\circ - 28^\circ = 96^\circ$$

5) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\alpha = 24,\ \gamma = 33,\ \hat{A} = 42°$.

<u>Λύση:</u>

5) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με: $\alpha = 24,\ \gamma = 33,\ \hat{A} = 42°$.

<u>Λύση:</u>

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να επιλυθούν τα τρίγωνα:

   i) ΑΒΓ με $\beta = 120,\ \gamma = 44,\ \hat{B} = 57°$.

   ii) ΑΒΓ με $\alpha = 32,\ \gamma = 48,\ \hat{B} = 125{,}2°$.

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2) Να επιλυθούν τα τρίγωνα:

i) ΑΒΓ με $\beta = 35,\ \hat{B} = 57°,\ \hat{\Gamma} = 48°$.

ii) ΑΒΓ με $\alpha = 75,\ \beta = 30,\ \gamma = 53$.

iii) ΑΒΓ με $\alpha = 45,\ \beta = 67,\ \hat{\Gamma} = 50°$.

iv) ΑΒΓ με $\beta = 83,\ \gamma = 105,\ \hat{\Gamma} = 78°$.

v) ΑΒΓ με $\alpha = 55,\ \hat{B} = 45°,\ \hat{\Gamma} = 95°$.

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3) Να τραπούν σε ακτίνια οι γωνίες:

$5° =$	$150° =$	$25° =$	$48° =$
$7° =$	$115° =$	$72° =$	$120° =$

4) Να τραπούν οι γωνίες από ακτίνια σε μοίρες:

$\frac{\pi}{3}\ rad =$	$\frac{\pi}{4}\ rad =$	$\frac{\pi}{16}\ rad =$
$\frac{\pi}{5}\ rad =$	$\frac{5\pi}{3}\ rad =$	$\frac{5\pi}{12}\ rad =$
$3\ rad =$	$1{,}45\ rad =$	$2{,}5\ rad =$

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

ΚΑΛΗ ΞΕΚΟΥΡΑΣΗ
ΚΑΙ
ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ!!!