ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

4ο μάθημα: Γραμμικές Εξισώσεις - Γραμμικά Συστήματα

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

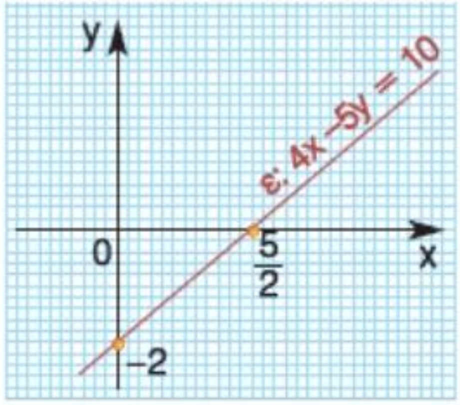
ΟΡΙΣΜΟΙ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- **Γραμμική** εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής αx + βy = γ,π.χ. $3x + 2y = 7$.
- **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης αx + βy = γ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (1, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3\cdot1 + 2\cdot2 = 7$.

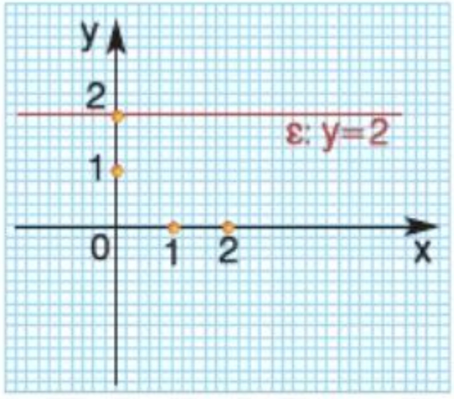
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

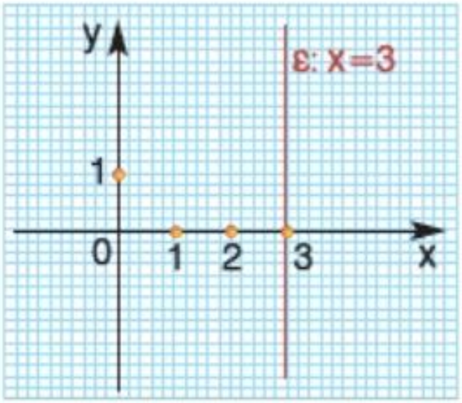
- Η γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία ε, αν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.



Αν $α \neq 0$ και $β \neq 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $αx+βy=γ$ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.



Αν $α=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $y=κ$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή τον άξονα $x'x$.



Αν $β=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $x=κ$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ ή τον άξονα $y'y$.

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο Μ(3, 4) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: \alpha x - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot \alpha - 4 = 0$.

- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο Μ(0, -2) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma):\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

- **Λύση** του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (2, -1) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}, \quad \text{αφού} \quad \begin{cases} 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 4 \\ 2 - 3\cdot(-1) = 5 \end{cases}$$

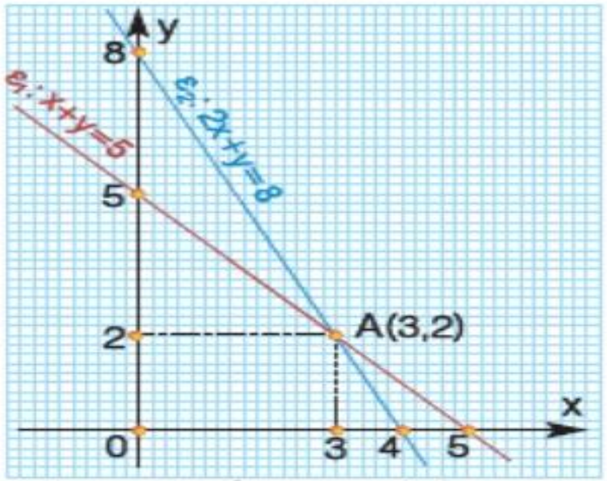
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

- **α) Γραφικά**

Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.



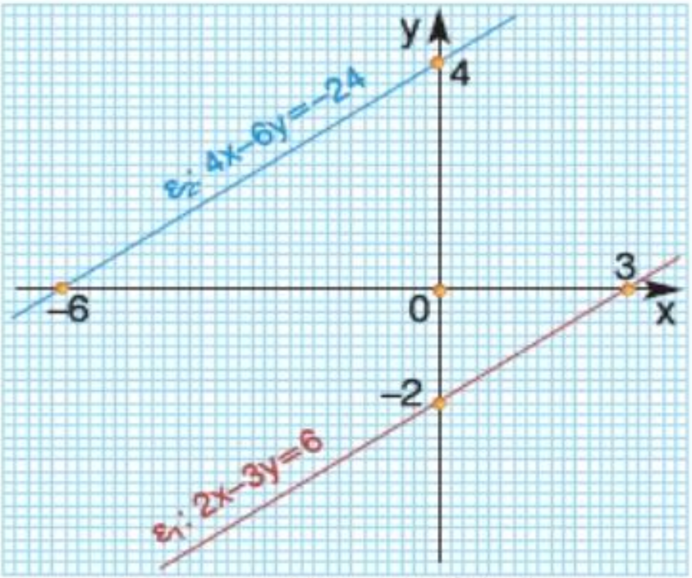
Αν οι ε_1, ε_2 **τέμνονται** σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους. Π.χ.

το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (3, 2)$.

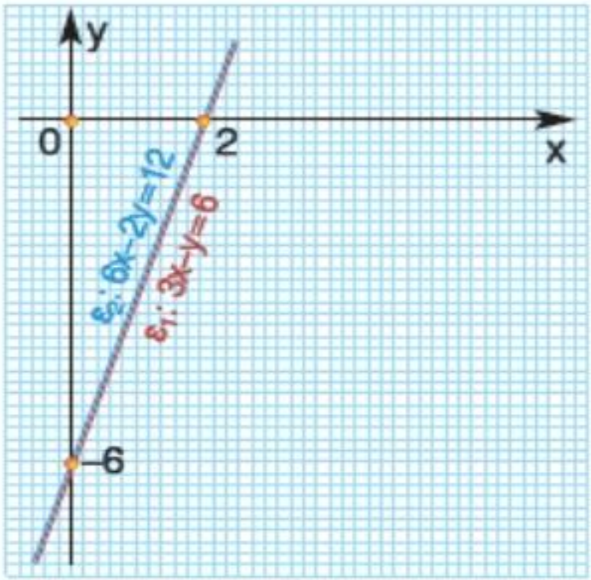
ΕΠΙΛΥΣΗ

α) Γραφικά

Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.



Αν οι ε_1, ε_2 είναι **παράλληλες** τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αν οι ε_1, ε_2 **ταυτίζονται**, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

ΕΠΙΛΥΣΗ

β) Αλγεβρικά

I) Μέθοδος της αντικατάστασης

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

I) Μέθοδος της αντικατάστασης

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

I) Μέθοδος της αντικατάστασης

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύουμε.

$$3(2y + 6) + 4y = 8 \Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8$$
$$\Leftrightarrow 10y = -10$$
$$\Leftrightarrow y = -1$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

I) Μέθοδος της αντικατάστασης

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

Ι) Μέθοδος της αντικατάστασης

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Δηλαδή:

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο :

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

I) Μέθοδος της αντικατάστασης

Τέλος:

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή κάνουμε πολλά βήματα μέχρι να λύσουμε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να κάνουμε λάθος στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή να κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**.

Στο συγκεκριμένο σύστημα, για $x = 4$ και $y = -1$, έχουμε :

1η εξίσωση: $4 - 2(-1) = 6$

2η εξίσωση: $3 \cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

II) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ

II) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ ΄έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

δηλαδή, ισοδύναμα:

$$\begin{cases} -3x + 6y = -18 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

II) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$-3x + 6y + 3x + 4y = -18 + 8 \Leftrightarrow 10y = -10 \Leftrightarrow y = -1 \,.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

II) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

$$x - 2(-1) = 6 \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4\,.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

II) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Τέλος:

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12^o.**

Λύση

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.**

Λύση

Αν ω, φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε $\omega + \varphi = 180^\circ$. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και $\omega = 3\varphi + 12^\circ$. Για να βρούμε τις γωνίες ω, φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3\varphi + 12^\circ + \varphi = 180^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3\varphi + \varphi = 180^\circ - 12^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.**

Λύση

$$\begin{cases} 4\varphi = 168^\circ \\ \omega = 3\varphi + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 3 \cdot 42^\circ + 12^\circ \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \varphi = 42^\circ \\ \omega = 138^\circ \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι $\omega = 138^\circ$ και $\varphi = 42^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

2 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Λύση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

2 **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} (x+2y)+y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}$

Λύση

$\begin{cases} 4+y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=7-4 \\ x+2y=4 \end{cases}$

ή $\begin{cases} y=3 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=3 \\ x+2\cdot 3=4 \end{cases}$

$\begin{cases} y=3 \\ x+6=4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=3 \\ x=4-6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι x = -2, y = 3, δηλαδή το ζεύγος (x, y) = (-2, 3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} - \dfrac{x+y}{8} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{y-3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3 **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} - \dfrac{x+y}{8} = 1 \\[2mm] \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{y-3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{3x-y}{2} - 8 \cdot \dfrac{x+y}{8} = 8 \cdot 1 \\[2mm] 10 \cdot \dfrac{2x-1}{5} + 10 \cdot \dfrac{y-3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3 **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} - \dfrac{x+y}{8} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{y-3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

ή $\begin{cases} 4(3x-y)-(x+y)=8 \\ 2(2x-1)+5(y-3)=20 \end{cases}$

$\begin{cases} 12x-4y-x-y=8 \\ 4x-2+5y-15=20 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 12x-4y-x-y=8 \\ 4x-2+5y=20 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3 **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} - \dfrac{x+y}{8} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{y-3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

ή $\begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $11x + 4x = 8 + 37$ ή $15x = 45$ ή $x = 3$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$4 \cdot 3 + 5y = 37$ ή $12 + 5y = 37$ ή $5y = 25$ ή $y = 5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση $x + y = 126$

Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ 0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90 \quad \cdot(-2) \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x + y = 126 \\ -x - 2y = -180 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε y - 2y = 126 - 180 ή -y = -54 ή y = 54. Αντικαθιστούμε την τιμή y = 54 στην πρώτη εξίσωση και έχουμε: x + 54 = 126 ή x = 126 - 54 ή x = 72. Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{4} = 3 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} - y = 1 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2} + \dfrac{2y+1}{3} = 3 \\ \dfrac{x+4}{3} - \dfrac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2) Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3) Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y=7 \\ \dfrac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1 \end{cases}$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4) Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2} + \dfrac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \dfrac{x+6}{3} - \dfrac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} = 4 - \dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2} - 3 = \dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

1) Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

2) Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R = \alpha T + \beta$. Αν στους 20° C η αντίσταση ήταν 0,4 Ω και στους 80° C η αντίσταση ήταν 0,5 Ω , να βρείτε τα α και β .

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

3) Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

4) Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

5) Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

6) Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ ΄ αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

7) Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα προβλήματα:

8) Σ ΄ ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α΄ θέσης κοστίζει 18 € και της Β΄ θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ ΄ ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη