



ΑΝΩΤΕΡΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

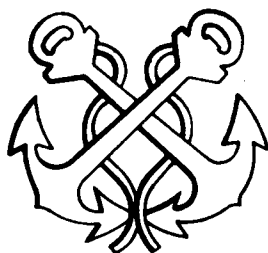
ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

Τόμος Δεύτερος

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Α. ΠΕΡΡΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΔΣΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ



ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
Α.Δ.Σ.Ε.Ν.
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΊΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ιδρυτής και χορηγός του «Ίδρύματος Ευγενίδου», προείδε ενωρίτατα και σχημάτισε τη βαθιά πεποίθηση ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο του έθνους αποτελεί η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας σε συνδυασμό προς την ηθική τους αγωγή.

Την πεποίθησή του αυτή την μετέτρεψε σε γενναία πράξη ευεργεσίας, όταν κληροδότησε σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ίδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, τον Φεβρουάριο του 1956 συνεστήθη το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου την διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Από τη στιγμή εκείνη άρχισαν πραγματοποιούμενοι οι σκοποί που οραματίστηκε ο Ευγένιος Ευγενίδης και συγχρόνως η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου. Το έργο του Ίδρύματος συνέχισε από το 1981 μέχρι το 2000 ο Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης· έκτοτε συνεχίζει αυτό ο κ. Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Κατά την κλιμάκωση των σκοπών του, το Ίδρυμα προέταξε την έκδοση τεχνικών βιβλίων τόσο για λόγους θεωρητικούς όσο και πρακτικούς. Διεπιστώθη πραγματι ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν ορθά θεμέλια στην παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό.

Ειδικότερα, όσον αφορά στα εκπαιδευτικά βιβλία των σπουδαστών των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα ανέλαβε τότε την έκδοσή τους σε πλήρη και στενή συνεργασία με τη Διεύθυνση Ναυτικής Εκπαιδύσεως του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, υπό την εποπτεία του οποίου υπάγονται οι Σχολές αυτές. Η ανάθεση στο Ίδρυμα έγινε με την υπ' αριθ. 61288/5031, της 9ης Αυγούστου 1966, απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και συνεκροτήθη και η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων.

Αποτέλεσμα της συνεργασίας αυτής ήταν η έκδοση της Σειράς Βιβλιοθήκη του Ναυτικού, όπου εξεδόθησαν: α) Για τους μαθητές των Μέσων Ναυτικών Σχολών 30 τόμοι βιβλίων (1967 - 1979). β) Για τις ΑΔΣΕΝ (Ανώτερες Δημόσιες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού) 54 τόμοι (1981 - 2001).

Κύριος σκοπός των εκδόσεων αυτών, των οποίων το περιεχόμενο είναι σύμφωνο με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.

Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.

σύμφωνο με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.

Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.

Με την υπ. αρ. 1168Β' /14.6.99 υπουργική απόφαση το Υπουργείο Εμπορικής Ναυτιλίας ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή και έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων των Ναυτικών Ακαδημιών ήδη η επιτροπή εκδόσεων του Ιδρύματος, στην οποία μετέχει, όπως πάντα, και ο διευθυντής Ναυτικής Εκπαίδευσης του ΥΕΝ, προεκήρυξε συμφώνως προς απόφαση του ΥΕΝ την συγγραφή 15 βιβλίων προς κάλυψη επειγουσών αναγκών των σπουδαστών βάσει των ισχύοντων αναλυτικών προγραμμάτων. Τα βιβλία αυτά έχουν συγγραφεί ήδη και ευρίσκονται στο στάδιο της εκδόσεως.

Οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος εξακολουθούν να καταβάλλουν κάθε προσπάθεια, ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τις δυνατότητες των σπουδαστών. Γι' αυτό έχουν προσεγμένη γλωσσική διατύπωση των κειμένων τους και η διαπραγματέυση των θεμάτων είναι ανάλογη προς τη στάθμη της εκπαίδευσης, για την οποία προορίζονται.

Με την προσφορά στους καθηγητές, στους σπουδαστές της ναυτικής μας εκπαίδευσης και σε όλους τους αξιωματικούς του Ε.Ν. των εκδόσεών του, το Ίδρυμα συμβάλλει στην πραγματοποίηση του σκοπού του ιδρυτή του Ευγενίου Ευγενίδου.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Αλέξανδρος Σταυρόπουλος, ομ. καθηγητής Α.Β.Σ. Πειραιώς, Πρόεδρος.

Ιωάννης Τεγόπουλος, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.

Ιωάννης Τζαβάρας, αντιναύαρχος Λ.Σ. (Ε.Α.).

Δημήτριος Βασιλάκης, πλοίαρχος Λ.Σ., Διευθ. Ναυτ. Εκπ. έ.Ε.Ν.

Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Μανάφης**,

καθηγ. Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Γεώργιος Ανδρεάκος**.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Α. ΠΕΡΡΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΔΣΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΖΑΧΑΡΙΑ Δ. ΤΣΟΥΚΑΛΑ
τ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΔΣΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΑΘΗΝΑ
2006



Α' ΕΚΔΟΣΗ 1993

ISBN 960-337-003-7



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο πρώτος τόμος του βιβλίου περιέχει τα περί συνεχούς ρεύματος και το μαγνητικό πεδίο. Ο δεύτερος τόμος περιλαμβάνει τα σχετικά με τα εναλλασσόμενα ρεύματα και τα όργανα ηλεκτρικών μετρήσεων. Το περιεχόμενο και του δεύτερου αυτού τόμου της «Ηλεκτροτεχνίας» είναι σύμφωνο προς το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος στις ΑΔΣΕΝ.

Η ανάλυση των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος εξετάζεται στα αντίστοιχα κεφάλαια του βιβλίου με δυο τρόπους:

- α) Με τη διανυσματική παράσταση των εναλλασσομένων μεγεθών.
- β) Με τη μέθοδο του μιγαδικού λογιισμού.

Από τη σύγκριση των δυο μεθόδων προκύπτουν τα πλεονεκτήματα του μιγαδικού λογιισμού, που συνοψίζονται στα εξής: ενώ διατηρείται η συντομία της ανυσματικής εκφράσεως προσφέρεται άμεση, σύντομη και κομψή λύση στην ανάλυση των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος.

Θα θέλαμε για άλλη μια φορά να εκφράσουμε τις θερμές μας ευχαριστίες στον καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Σ. Σιμόπουλο για τη σημαντική συμβολή του στην πληρέστερη συγγραφή του βιβλίου.

Κάθε παρατήρηση που θα συμβάλλει στη βελτίωση του κειμένου είναι ευπρόσδεκτη και θα ληφθεί υπόψη κατά τη μελλοντική επανέκδοσή του.

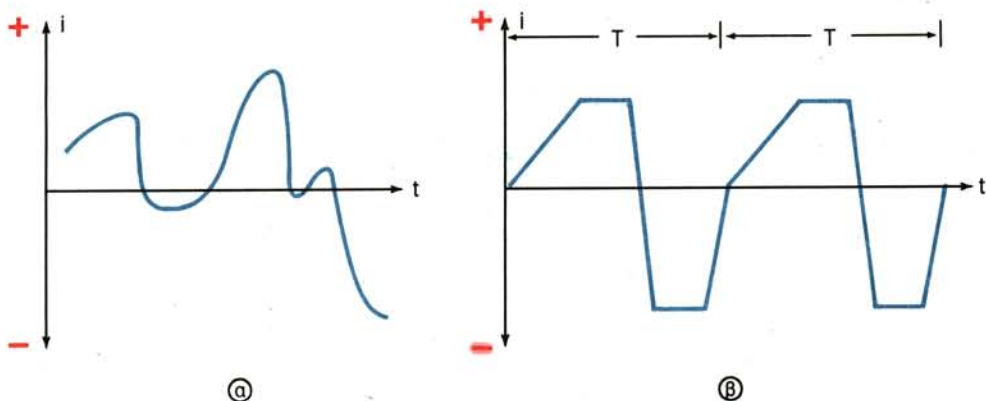
Οι συγγραφείς

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

15.1 Εισαγωγή – Ορισμοί.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τα ρεύματα μονής φοράς (συνεχή), δηλαδή τα ρεύματα των οποίων η φορά δεν μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο. Στο μέρος αυτό του βιβλίου θα ασχοληθούμε με τα **εναλλασσόμενα ρεύματα**, δηλαδή τα ρεύματα των οποίων η φορά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως ορίσαμε στην παράγραφο 5.3.

Τα μεταβαλλόμενα ρεύματα διακρίνονται σε **απεριοδικά μεταβαλλόμενα** [σχ. 15.1α(α)] και **περιοδικά μεταβαλλόμενα** [σχ. 15.1α(β)] αναλόγως του εάν η εξάρτηση από το χρόνο είναι απεριοδική ή περιοδική. Έτσι, λέμε ότι στα περιοδικώς μεταβαλλόμενα ή απλά **περιοδικά ρεύματα** η μορφή της καμπύλης του ρεύματος επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα, η ελάχιστη διάρκεια των οποίων ονομάζεται **περίοδος**, συμβολίζεται με το γράμμα T και μετράται σε δευτερόλεπτα (s).



Σχ. 15.1α.
Μεταβαλλόμενα ρεύματα.
α) Απεριοδικά. β) Περιοδικά.

Τα περιοδικά μεταβαλλόμενα ρεύματα διακρίνονται σε **εναλλασσόμενα** και **μικτά**. Εναλλασσόμενο ονομάζεται ένα περιοδικά μεταβαλλόμενο ρεύμα για το οποίο ισχύει:

$$\int_0^T i(t)dt = 0 \quad (15.1)$$

δηλαδή ένα ρεύμα στο οποίο το εμβαδόν της καμπύλης πάνω από τον άξονα του χρόνου t ισούται με το εμβαδόν της κάτω από τον άξονα t , σε μια περίοδο.

Το σχήμα 15.16 δείχνει ένα εναλλασσόμενο ρεύμα. Η απειροστή επιφάνεια dS είναι ίση με:

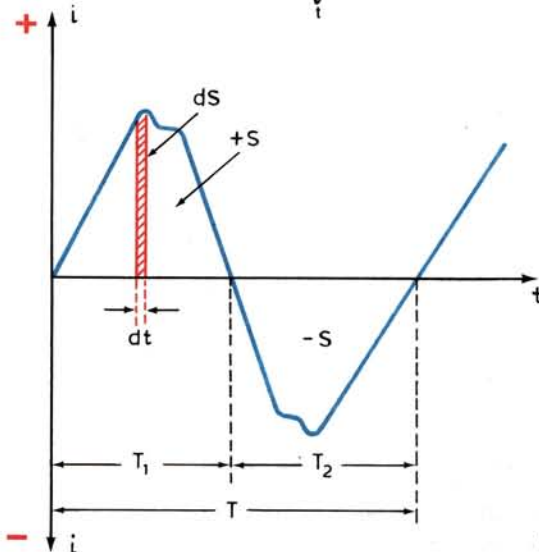
$$dS = idt$$

Είναι όμως εξ' ορισμού $i = \frac{dq}{dt}$ οπότε $dq = idt$

Άρα το εμβαδόν της απειροστής επιφάνειας dS ισούται με το απειροστό φορτίο που μετακινείται σε χρόνο dt και συνεπώς ολόκληρη η επιφάνεια $+S$ που προκύπτει από το άθροισμα όλων των απειροστών επιφανειών dS αποδίδει το συνολικό φορτίο $+q$ που μετακινείται σε χρόνο T_1 προς τη θετική κατεύθυνση.

Όταν το φορτίο $+q$ είναι ίσο προς το φορτίο $-q$ που μετακινείται σε χρόνο $T_2 = T - T_1$ προς την αρνητική κατεύθυνση (επιφάνεια $-S$), δηλαδή τα εμβαδά πάνω και κάτω από τον άξονα των χρόνων σε μια περίοδο είναι ίσα, τότε το ρεύμα ονομάζεται **εναλλασσόμενο**. Φανερό είναι ότι γενικώς ισχύει η σχέση:

$$\int_t^{t+T} idt = 0 \quad (15.2)$$



Σχ. 15.16.
Εναλλασσόμενο ρεύμα.

15.2 Συμπεριφορά των ηλεκτρικών καταναλωτών σε μεταβαλλόμενα ρεύματα.

Όλες οι σχέσεις που αποδείχθηκαν στο δεύτερο μέρος του βιβλίου αυτού, για τα συνεχή ρεύματα (Νόμος του Ohm, Κανόνες του Kirchhoff, Θεωρήματα ηλεκτρικών δικτύων) μπορούν να αποδειχθούν υπό τις ίδιες προϋποθέσεις και συνθήκες, κάτω από τις οποίες αποδείχθηκαν, και για τις **στιγμιαίες τιμές** μεταβαλλομένων ρευμάτων. Έτσι, ανάλογα με τον τύπο του ηλεκτρικού καταναλωτή που διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

– **Ωμική αντίσταση** R που διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$ δημιουργεί στα άκρα της πτώση τάσεως $u(t)$ η οποία κατά τη σχέση (5.10) είναι:

$$u(t) = i(t) \cdot R \quad (15.3)$$

– **Αυτεπαγωγή** L που διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$ δημιουργεί στα άκρα της ΗΕΔ εξ' επαγωγής $e_i(t)$ ή πτώση τάσεως $u(t)$, οι οποίες κατά τη σχέση (14.27) θα είναι:

$$u(t) = - e_i(t) = L \frac{di}{dt} \quad (15.4)$$

– **Χωρητικότητα** C στα άκρα της οποίας επιβάλλεται τάση $u(t)$ θα διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$, το οποίο κατά τις σχέσεις (7.68) και (7.69) θα είναι:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(u \cdot C)}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

δηλαδή
$$i(t) = C \frac{du}{dt} \quad (15.5)$$

Τέλος, η ισχύς που θα καταναλισκείται από έναν καταναλωτή θα είναι σύμφωνα με τα αναπτυσσόμενα στην παράγραφο (5.7):

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{u \cdot dq}{dt} = u(t) \cdot i(t) \quad (15.6)$$

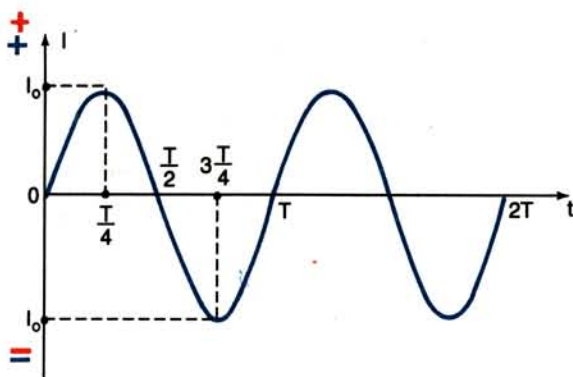
15.3 Αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα.

Αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα ονομάζεται το ρεύμα του οποίου η ένταση παρέχεται σε κάθε χρονική στιγμή από τη σχέση:

$$i = I_0 \eta \mu \omega t \quad (15.7)$$

δηλαδή είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Για το λόγο αυτό το αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα συχνά ονομάζεται και **ημιτονοειδές** εναλλασσόμενο ρεύμα.

Στη συνέχεια του βιβλίου αυτού, για λόγους απλότητας, θα αναφερόμαστε στο αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα με τον όρο «εναλλασσόμενο ρεύμα» (ΕΡ).



Σχ. 15.3.

Αρμονικό (ημιτονοειδές) εναλλασσόμενο ρεύμα.

Το διάγραμμα του σχήματος 15.3 μας δίνει τη μεταβολή του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Στη σχέση ορισμού (15.7), το i είναι η **στιγμιαία τιμή** της εντάσεως. Το I_0 είναι η **μέγιστη τιμή** (κατ' απόλυτη τιμή), που μπορεί να πάρει η ένταση και ονομάζεται **πλάτος** της εντάσεως. Το μέγεθος (γωνία) $\omega t = \varphi$ ονομάζεται **φάση** και μετράται σε ακτίνια (rad). Το μέγεθος ω ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** του ρεύματος και μετράται σε rad/s.

Κύκλος ονομάζεται μια πλήρης εναλλαγή του ρεύματος.

Περίοδος ονομάζεται ο σταθερός χρόνος T , που απαιτείται για να συμπληρώσει το εναλλασσόμενο ρεύμα έναν κύκλο. Αφού το εναλλασσόμενο ρεύμα συμπληρώνει έναν κύκλο σε χρόνο T είναι φανερό ότι σε χρόνο 1 s συμπληρώνει $1/T$ κύκλους.

Ο σταθερός αριθμός των κύκλων στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **συχνότητα** f του εναλλασσόμενου ρεύματος, δηλαδή:

$$f = \frac{1}{T} \quad (15.8)$$

Είναι φανερό, από τη σχέση ορισμού (15.7), ότι αν η φάση αυξηθεί κατά 2π , η στιγμιαία τιμή της εντάσεως παραμένει η ίδια, εφόσον, όπως γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία, ισχύει:

$$I_0 \eta \mu \omega t = I_0 \eta \mu (\omega t + 2\pi)$$

Όμως, όπως γνωρίσαμε στην παράγραφο 15.1, στα περιοδικά ρεύματα η στιγμιαία τιμή του ρεύματος επαναλαμβάνεται, όταν ο χρόνος αυξηθεί κατά T . Άρα ισχύει:

$$\omega t + 2\pi = \omega (t+T)$$

ή

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15.9)$$

οπότε από την (15.8) λαμβάνομε:

$$\omega = 2\pi f \quad (15.10)$$

Η σχέση (15.7) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (15.8) και (15.9) γράφεται:

$$i = I_0 \eta \mu \omega t = I_0 \eta \mu \frac{2\pi}{T} t = I_0 \eta \mu 2\pi f t \quad (15.11)$$

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το εναλλασσόμενο ρεύμα δεν έχει την τιμή μηδέν αλλά κάποια άλλη τιμή, τότε η εξίσωσή του θα είναι:

$$i = I_0 \eta \mu (\omega t + \phi_0) \quad (15.12)$$

Η γωνία ϕ_0 ονομάζεται **αρχική φάση** του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Μονάδες συχνότητας.

Η μονάδα συχνότητας ονομάζεται **Hertz** (1 Hz) και ορίζεται από τη σχέση (15.8):

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Χρησιμοποιούνται επίσης και τα πολλαπλάσια $1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz}$, $1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$ και $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$.

Σε πολλά ξενόγλωσσα βιβλία χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί: *c/s* ή *cps* (cycles per second).

Παράδειγμα 15.3.1.

Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η τιμή ενός εναλλασσόμενου ρεύματος είναι 10 A, μετά δε από χρόνο 0,002 s λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του 20 A. Να υπολογισθούν η κυκλική συχνότητα, η συχνότητα και η περίοδος του ΕΡ.

Αφού για $t = 0$ είναι $i \neq 0$ η εξίσωση του εναλλασσόμενου ρεύματος θα είναι:

$$i = I_0 \eta \mu (\omega t + \phi_0) \quad (1)$$

$$t = 0 \xrightarrow{(1)} 10 = 20 \eta \mu \phi_0 \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Άρα} \quad i = 20 \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \quad (2)$$

$$t = 0,002 \text{ s} \xrightarrow{(2)} 20 = 20 \eta \mu \left(0,002\omega + \frac{\pi}{6} \right) \rightarrow$$

$$\eta \mu \left(0,002\omega + \frac{\pi}{6} \right) = 1 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$0,002\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 0,002\omega = \frac{\pi}{3} \rightarrow \omega = 523,6 \text{ rad/s}$$

$$\text{Είναι} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,012 \text{ s} \quad \text{και} \quad f = \frac{1}{T} = 83,3 \text{ Hz}$$

15.4 Παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος.

Όπως πολύ εύκολα αποδεικνύεται με τη βοήθεια της σχέσεως (15.3), αν στα άκρα ενός ωμικού αντιστάτη επιβληθεί αρμονικά εναλλασσόμενη τάση της μορφής:

$$u = U_0 \eta\mu\omega t \quad (15.13)$$

τότε αυτός διαρρέεται από αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα της μορφής:

$$i = \frac{U_0}{R} \eta\mu\omega t$$

Έτσι, μπορούμε να γενικεύσουμε ότι το αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα παράγεται από αρμονική εναλλασσόμενη τάση της μορφής της σχέσεως (15.13). Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την αρχή της παραγωγής της τάσεως αυτής ή όπως ονομάζεται την **αρχή του εναλλακτήρα**.

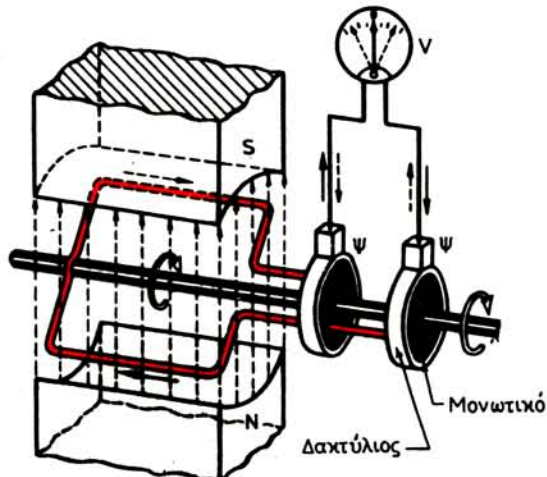
Θεωρούμε αγωγό σε σχήμα πλαισίου, που έχει εμβαδό S και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B (σχ. 15.4a).

Αν περιστρέψουμε το πλαίσιο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα κάθετο στη μαγνητική επαγωγή του πεδίου, τότε η στιγμιαία τιμή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο θα είναι, σύμφωνα με τις σχέσεις (11.20) ή (14.3):

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (15.14)$$

όπου: α η γωνία που σχηματίζουν κάθε χρονική στιγμή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές με το διάνυσμα προσανατολισμού της επιφάνειας του πλαισίου, δηλαδή η κάθετος στην επιφάνεια του πλαισίου.

Εφόσον το πλαίσιο κινείται ισοταχώς η γωνία α που έχει διαγράψει σε χρόνο t (ωt) είναι ίση με τη γωνία α , εφόσον το πλαίσιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ ήταν



Σχ. 15.4a.

Παραγωγή εναλλασσόμενης τάσεως. (Αρχή του εναλλακτήρα).

κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο:

$$a = \omega t$$

Άρα η σχέση (15.14) γίνεται:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sigmaυν\omega t = \Phi_0 \sigmaυν\omega t \quad (15.15)$$

όπου: $\Phi_0 = B \cdot S$ η μέγιστη μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο.

Η σχέση (15.15) δείχνει ότι η μαγνητική ροή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου με πλάτος $\Phi_0 = BS$ και κυκλική συχνότητα ω ίση με τη γωνιακή ταχύτητα του στρεφόμενου πλαισίου.

Σύμφωνα με το νόμο της επαγωγής η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, που αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου θα είναι κατά τη σχέση (14.1):

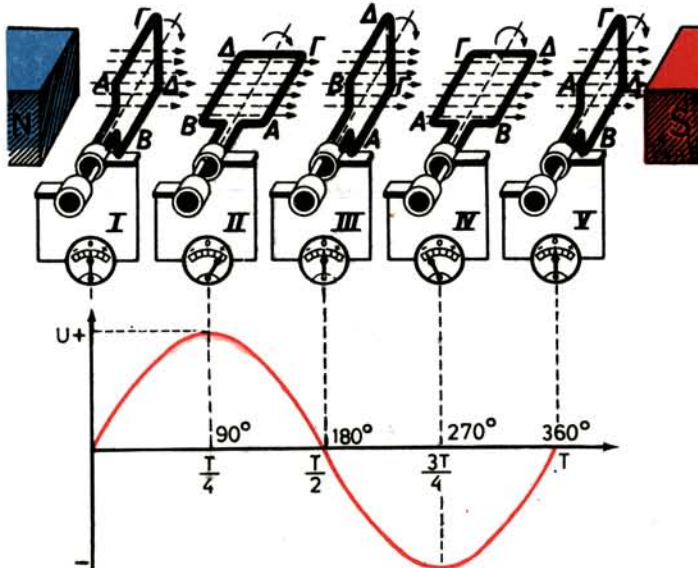
$$u = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \eta\mu\omega t \rightarrow u = U_0 \eta\mu\omega t \quad (15.16)$$

όπου $U_0 = \Phi_0 \omega = B\omega S$ το πλάτος της τάσεως (15.17)

Από τη σχέση (15.16) παρατηρούμε ότι η παραγόμενη τάση είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου. Το μέγεθος u εκφράζει τη στιγμιαία τιμή της τάσεως, το U_0 το πλάτος της τάσεως και η γωνία $a = \omega t$ τη φάση της τάσεως.

Επίσης από τη σχέση (15.16) παρατηρούμε ότι η τάση μηδενίζεται όταν το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου ενώ παίρνει τη μέγιστη τιμή U_0 , όταν το πλαίσιο είναι παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Η θέση του πλαισίου που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, ονομάζεται **ουδέτερη γραμμή**. Στο σχήμα 15.48 παριστάνονται πέντε χαρακτη-



Σχ. 15.48.

Κατά μια στροφή του πλαισίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο παράγεται ένας κύκλος τάσεως.

ριστικές θέσεις του πλαισίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραγόμενης αρμονικής εναλλασσόμενης τάσεως σε έναν πλήρη κύκλο. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, όταν το πλαίσιο διέρχεται από την ουδέτερη γραμμή η τάση αλλάζει φορά.

Στην εξίσωση (15.16) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε αν υπολογίζαμε χωριστά τις ΗΕΔ που αναπτύσσονται στα άκρα των αγωγών ΑΓ και ΒΔ του πλαισίου. Αυτό γίνεται με το παράδειγμα 15.4.1 που ακολουθεί.

Παράδειγμα 15.4.1.

Σπείρα ΑΓΔΒ (σχ. 15.4γ) περιστρέφεται με $n = 50$ στροφές/sec μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, που σχηματίζεται μεταξύ των πόλων διπολικής μηχανής, εντάσεως $B = 1T$. Οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ της σπείρας που τέμνουν τις μαγνητικές γραμμές έχουν μήκος $l = 0,2 m$, ενώ η ακτίνα της περιφέρειας που διαγράφουν είναι $R = 5 cm$. Ζητούνται:

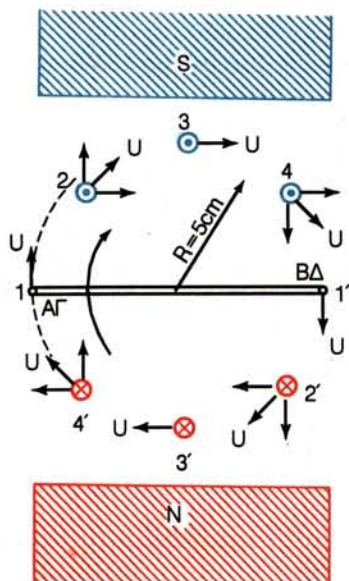
1) Η συχνότητα, η περίοδος και η κυκλική συχνότητα της παραγόμενης εναλλασσόμενης τάσεως.

2) Πόσα ακτίνια και πόσες μοίρες διανύει η σπείρα σε χρόνο α) $t = 0$, β) $t = 1/200 s$, γ) $t = 1/100 s$, δ) $t = 3/200 s$ και ε) $t = 1/50 s$.

3) Η στιγμιαία τιμή της εναλλασσόμενης τάσεως που αναπτύσσεται στα άκρα της σπείρας.

4) Αν πρόκειται για πηνίο που αποτελείται από 30 σπείρες να υπολογισθεί η παραγόμενη εναλλασσόμενη τάση.

5) Να σχεδιασθεί η καμπύλη $u(t)$.



Σχ. 15.4γ.

Σπείρα παραδείγματος 15.4.1.

Λύση.

Θα λύσουμε το παράδειγμα αυτό στηριζόμενοι στο νόμο του Faraday που αναπτύξαμε στην παράγραφο 14.2 (Ηλεκτροτεχνία, τόμος 1ος).

1) Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στον αγωγό ΑΓ στη θέση 1 είναι μηδέν γιατί το άνωσμα της ταχύτητάς του είναι παράλληλο προς τη διεύθυνση του πεδίου (σχ. 15.4γ).

Το ίδιο συμβαίνει και στον αγωγό ΒΔ, δηλαδή η ολική ΗΕΔ στη θέση 1-1' είναι μηδέν (τη θέση 1-1' την ονομάσαμε ουδέτερη γραμμή). Όταν ο αγωγός ΑΓ λάβει τη θέση 2, η επαγωγική ΗΕΔ που θα αναπτυχθεί στα άκρα του θα έχει φορά από τον αναγνώστη προς το επίπεδο της σελίδας. Την ίδια φορά (συμβατική) θα έχει και το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό ΑΓ.

Όταν ο αγωγός ΑΓ λάβει τη θέση 2 ο αγωγός ΒΔ θα λάβει τη θέση 2' και η ΗΕΔ, που θα αναπτυχθεί στα άκρα του, θα έχει φορά από το επίπεδο της σελίδας προς τον αναγνώστη. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι σε κάθε χρονική στιγμή, οι δύο ΗΕΔ (που έχουν το ίδιο μέτρο) προστίθενται και έτσι η σπείρα θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα ορισμένης φοράς.

Όταν ο αγωγός ΑΓ λάβει τις θέσεις 3, 4,... η φορά της ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του παραμένει η ίδια, ενώ στη θέση 1' η ΗΕΔ μηδενίζεται. Στις θέσεις 2', 3', 4',... η ΗΕΔ στον αγωγό ΑΓ αλλάζει φορά, δηλαδή, τώρα είναι από το επίπεδο της σελίδας προς τον αναγνώστη. Επίσης και στον αγωγό ΒΔ που έχει λάβει τις θέσεις 2, 3, 4,... η ΗΕΔ αλλάζει φορά (από τον αναγνώστη προς το επίπεδο της σελίδας). Έτσι το ρεύμα που διαρρέει τώρα τη σπείρα θα έχει φορά αντίθετη από την προηγούμενη.

Τέλος όταν ο αγωγός επανέλθει στη θέση 1, η ΗΕΔ μηδενίζεται. Παρατηρούμε δηλαδή ότι όταν η σπείρα εκτελέσει μια πλήρη στροφή, η ΗΕΔ έχει εκτελέσει έναν κύκλο. Άρα η συχνότητα f της εναλλασσόμενης τάσεως θα είναι ίση με τη συχνότητα n της σπείρας:

$$f = n = 50 \text{ Hz}$$

Η περίοδος T και η κυκλική συχνότητα ω θα είναι:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} \text{ s} = 0,02 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

2) Παρατηρούμε ότι: $\frac{1}{200} \text{ s} = \frac{1}{50 \times 4} \text{ s} = \frac{T}{4}$,

$$\frac{1}{100} \text{ s} = \frac{T}{2}, \quad \frac{3}{200} \text{ s} = \frac{3T}{4} \quad \text{και} \quad \frac{1}{50} \text{ s} = T. \quad \text{Άρα:}$$

α) $t = 0 \rightarrow \alpha = \omega t = 0 \text{ rad ή } 0^\circ$

β) $t = \frac{T}{4} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2} \text{ rad ή } 90^\circ$

γ) $t = \frac{T}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} t = \pi \text{ rad ή } 180^\circ$

$$\delta) \quad t = \frac{3T}{4} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} t = \frac{3\pi}{2} \text{ rad ή } 270^\circ$$

$$\varepsilon) \quad t = T \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi \text{ rad ή } 360^\circ$$

3) Σύμφωνα με το νόμο του Faraday η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΑΓ θα είναι:

$$U_1 = Blv \eta \mu \alpha = Bl \cdot \omega R \eta \mu \omega t = 3,14 \eta \mu \omega t$$

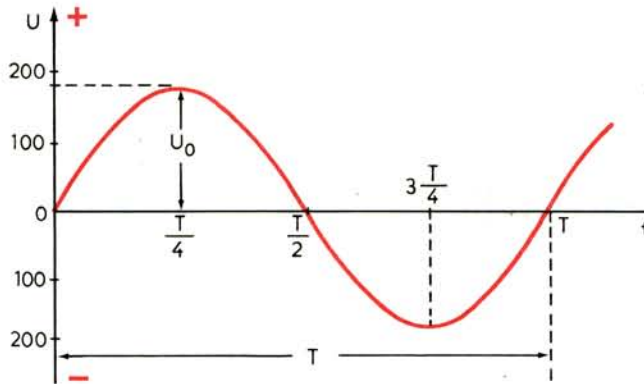
Επειδή η ίδια ΗΕΔ αναπτύσσεται και στον αγωγό ΒΔ συμπεραίνουμε ότι η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα της σπείρας είναι:

$$U = 6,28 \eta \mu \omega t \text{ Volt}$$

4) Όταν έχουμε 30 σπείρες (συνολικά 60 αγωγούς) η ολική ΗΕΔ θα είναι:

$$U = 6,28 \cdot 30 \eta \mu \omega t = 188,4 \eta \mu \omega t \text{ Volt}$$

5) Η καμπύλη $U = f(t)$ απεικονίζεται στο διάγραμμα τού σχήματος 15.45.



Σχ. 15.45.

Σημείωση: Αν η σπείρα περιστρέφεται μεταξύ των πόλων τετραπολικής μηχανής (δύο ζεύγη πόλων, δύο ουδέτερες γραμμές), εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, όταν η σπείρα εκτελεί μια στροφή, η ΗΕΔ συμπληρώνει δύο κύκλους, δηλαδή η συχνότητα f της ΗΕΔ είναι διπλάσια από τη συχνότητα περιστροφής της σπείρας.

Γενικά ισχύει η σχέση:

$$f = P_z \cdot n$$

(1)

όπου: f η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως,

P_z το πλήθος των ζευγών των πόλων του εναλλακτήρα και n η συχνότητα της σπείρας σε στροφές / sec.

Επειδή συνήθως στην πράξη η συχνότητα περιστροφής της σπείρας n δίνεται σε στροφές / min η σχέση (1) γίνεται:

$$f(\text{Hz}) = \frac{P_z n (\text{min}^{-1})}{60}$$

όπου: f η συχνότητα της ΗΕΔ σε Hz.

15.5 Διαφορά φάσεως.

Θεωρούμε τα δύο ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη

$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (15.18)$$

και $i = I_0 \eta \mu \omega t \quad (15.19)$

Αν παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις (15.18) και (15.19) θα πάρουμε τις καμπύλες του σχήματος 15.5α.

Παρατηρούμε ότι τα δύο εναλλασσόμενα μεγέθη παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους και μηδενίζονται επίσης ταυτόχρονα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα δύο εναλλασσόμενα μεγέθη είναι **συμφασικά**, δηλαδή ότι έχουν την ίδια φάση. Ας θεωρήσουμε τώρα τα ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη

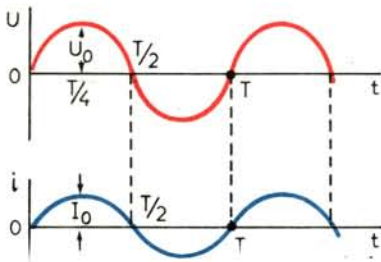
$$U = U_0 \eta \mu \omega t \quad (15.20)$$

και $i = I_0 \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (15.21)$

Είναι φανερό ότι τα δύο παραπάνω μεγέθη δεν είναι συμφασικά. Έτσι, μπορούμε πλέον να σχηματίσουμε τη γωνία που αποτελεί τη διαφορά των δύο φάσεων, δηλαδή:

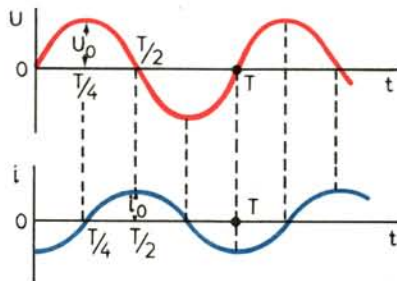
$$\varphi = \omega t - \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα δύο εναλλασσόμενα μεγέθη παρουσιάζουν **διαφορά φάσεως** $\pi/2$ (90°) και ότι η τάση προηγείται της έντασης κατά γωνία $\pi/2$ ή ότι η ένταση έπεται της τάσεως κατά $\pi/2$. Αν παραστήσουμε γραφικά τις εξισώσεις (15.20) και (15.21) θα πάρουμε τις καμπύλες του σχήματος 15.5β.



Σχ. 15.5α.

Μηδενική διαφορά φάσεως μεταξύ δύο εναλλασσομένων μεγεθών.



Σχ. 15.5β.

Διαφορά φάσεως 90° .

Παρατηρούμε ότι όταν η τάση μηδενίζεται η ένταση παίρνει τη μέγιστη τιμή $\pm I_0$ και αντίστοιχα.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου έχουμε τα δύο *ισόσυχνα* αρμονικά μεγέθη:

$$u_1 = U_{01} \eta\mu(\omega t + \varphi_1) \quad (15.22)$$

και
$$u_2 = U_{02} \eta\mu(\omega t + \varphi_2) \quad (15.23)$$

ορίζουμε ως *διαφορά φάσεως* φ τη γωνία:

$$\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (15.24)$$

Αν $\varphi > 0$ τότε το μέγεθος u_1 προηγείται του μεγέθους u_2 ή το μέγεθος u_2 έπεται του μεγέθους u_1 .

Αν $\varphi < 0$ τότε το μέγεθος u_1 έπεται του μεγέθους u_2 ή το μέγεθος u_2 προηγείται του μεγέθους u_1 .

Όπως έχει καταστεί φανερό από τα παραπάνω, αν μεταξύ δύο ισοσύχνων αρμονικών μεγεθών υπάρχει διαφορά φάσεως $\varphi > 0$, τότε πρέπει να παρέλθει χρόνος που να αντιστοιχεί στη γωνία φ , ώστε το δεύτερο μέγεθος να πάρει τιμή αντίστοιχη (π.χ. μέγιστη) με εκείνη που πήρε το πρώτο μέγεθος σε χρόνο μηδέν. Δηλαδή οι τιμές του πρώτου μεγέθους προηγούνται εκείνων του δεύτερου μεγέθους κατά χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί σε γωνία φ .

15.6 Μέση και ενεργός τιμή εναλλασσομένων μεγεθών.

Μέση τιμή ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου μεγέθους ονομάζεται ο μέσος όρος των στιγμιαίων τιμών του σε χρόνο μιας περιόδου. Έτσι, η μέση τιμή ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου ρεύματος $i = i(t)$ παρέχεται από τη σχέση:

$$I_{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (15.25)$$

Αν ως μεταβλητή θεωρηθεί η γωνία φάσεως $\theta = \omega t$ η εξίσωση (15.25) γίνεται:

$$I_{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\theta) d\theta \quad (15.26)$$

Η μέση τιμή ενός εναλλασσόμενου μεγέθους είναι εξ ορισμού ίση με μηδέν, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 15.1 για τα εναλλασσόμενα μεγέθη.

Ενεργός Τιμή ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου μεγέθους ονομάζεται η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών του σε χρόνο μιας περιόδου. Έτσι, η ενεργός τιμή ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου ρεύματος $i = i(t)$ παρέχεται από τη σχέση:

$$I_{\text{EN}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (15.27)$$

Η ενεργός τιμή ενός περιοδικού μεταβαλλόμενου μεγέθους ονομάζεται **μέση τετραγωνική τιμή** (root mean square), συμβολίζεται δε και με το δείκτη rms ή RMS. Π.χ. την ενεργό ένταση συμβολίζουμε ως I_{EN} ή I_{rms} ή I_{RMS} ή και απλά I χωρίς κανένα δείκτη, όπως συνήθως επικρατεί λόγω της σπουδαιότητας του μεγέθους αυτού. Πράγματι αποδεικνύεται εύκολα ότι:

Η ενεργός τιμή I της εντάσεως ενός περιοδικού ρεύματος i που διαρρέει ωμική αντίσταση R είναι ίση προς την ένταση συνεχούς ρεύματος το οποίο διερχόμενο από την ίδια αντίσταση R , επιφέρει στο ίδιο χρονικό διάστημα το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα.

Απόδειξη.

Η θερμότητα Joule που αναπτύσσεται σε αντίσταση R όταν διαρρέεται από συνεχές ρεύμα εντάσεως I σε χρόνο T είναι:

$$Q_1 = I^2 RT \quad (15.28)$$

Αν τροφοδοτήσουμε την ίδια αντίσταση με εναλλασσόμενο ρεύμα $i = i(t)$, η αναπτυσσόμενη θερμότητα σε χρόνο dt θα είναι σύμφωνα με όσα αναπτύσσονται στην παράγραφο 15.2:

$$dQ_2 = i^2(t) R dt$$

και σε χρόνο μιας περιόδου T θα είναι:

$$Q_2 = \int_0^T i^2(t) R dt = R \int_0^T i^2(t) dt \quad (15.29)$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη τη σχέση ορισμού της ενεργούς τιμής (15.27), η (15.29) γίνεται:

$$Q_2 = I^2 \cdot R \cdot T \quad (15.30)$$

οπότε είναι φανερό ότι $Q_1 = Q_2$.

Μετά την παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα της ενεργούς εντάσεως, μπορούμε να δώσουμε ένα ακόμα απλούστερο ορισμό της που επιπλέον ενέχει και φυσική σημασία:

Ενεργός ένταση περιοδικά μεταβαλλόμενου ρεύματος ονομάζεται η ένταση εκείνη του συνεχούς ρεύματος, που προκαλεί την ίδια θερμότητα, όταν διέρχεται από την ίδια ωμική αντίσταση στον ίδιο χρόνο.

Ανάλογα ορίζεται και η ενεργός τάση.

Ενεργός τάση περιοδικά μεταβαλλόμενου ρεύματος ονομάζεται η συνεχής εκείνη τάση, η οποία θα προκαλούσε σε ωμική αντίσταση συνεχές ρεύμα

εντάσεως ίσης προς την ενεργό ένταση.

$$U = U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (15.31)$$

Ας δούμε τώρα πώς εξειδικεύεται η σχέση της ενεργούς τιμής της εντάσεως ενός αρμονικού εναλλασσόμενου ρεύματος της μορφής:

$$i(t) = I_0 \eta \mu \omega t$$

Ας κάνουμε κατ' αρχήν αλλαγή της μεταβλητής από t σε $\theta = \omega t$:

$$i(\theta) = I_0 \eta \mu \theta \quad (15.32)$$

Αν λάβουμε επίσης υπόψη ότι $T = 2\pi/\omega$, τότε από τη σχέση ορισμού (15.27) της ενεργούς εντάσεως λαμβάνουμε:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \eta^2 \omega t dt = \frac{1}{\omega T} \int_0^T I_0^2 \eta^2 \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0^2 \eta^2 \theta d\theta \quad (15.33)$$

$$\text{ή} \quad I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2(\theta) d\theta \quad (15.34)$$

Από την (15.33) έχουμε:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{I_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2 \theta d\theta = \frac{I_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \text{συν}2\theta}{2} d\theta = \\ &= \frac{I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\eta \mu 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{I_0^2}{2} \rightarrow I = I_{\text{EN}} = I_{\text{RMS}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0 \quad (15.35) \end{aligned}$$

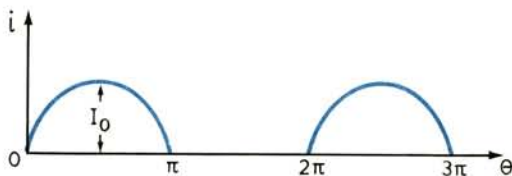
όπου I_0 η μέγιστη τιμή της εντάσεως.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ενεργός τιμή εναλλασσόμενης τάσεως της μορφής $u = U_0 \eta \mu \omega t$ είναι:

$$U = U_{\text{EN}} = U_{\text{RMS}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0,707 U_0 \quad (15.36)$$

Παράδειγμα 15.6.1.

Να υπολογισθεί η μέση κι ενεργός τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος στην απλή ανόρθωση (σχ. 15.6α).



Σχ. 15.6α.
Απλή ανόρθωση.

Είναι $i(\theta) = I_0 \eta \mu \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$
και $i(\theta) = 0$ $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

Άρα
$$I_{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_0 \eta \mu \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\theta =$$

$$= -\frac{I_0}{2\pi} [\sigma \nu \nu \theta]_0^{\pi} \rightarrow I_{\mu} = \frac{I_0}{\pi} = 0,318 I_0$$

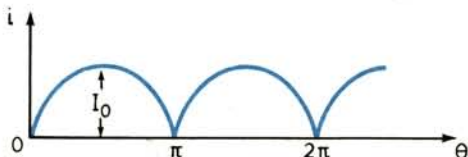
και
$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_0^2 \eta^2 \mu^2 \theta d\theta = \frac{I_0^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \eta^2 \mu^2 \theta d\theta =$$

$$= \frac{I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\eta \mu 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{I_0^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow I = I_{RMS} = \frac{I_0}{2}$$

Παράδειγμα 15.6.2.

Να υπολογισθεί η μέση κι ενεργός τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος στην πλήρη ανόρθωση (σχ. 15.6β).

Είναι $i(\theta) = I_0 \eta \mu \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$
και $i(\theta) = -I_0 \eta \mu \theta$ $\pi \leq \theta \leq 2\pi$



Σχ. 15.6β.
Πλήρης ανόρθωση.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I_{\mu} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_0 \eta \mu \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -I_0 \eta \mu \theta d\theta = \\ &= -\frac{I_0}{2\pi} [\sigma \nu \nu \theta]_0^{\pi} + \frac{I_0}{2\pi} [\sigma \nu \nu \theta]_{\pi}^{2\pi} = \frac{I_0}{\pi} + \frac{I_0}{\pi} \rightarrow I_{\mu} = \frac{2I_0}{\pi} = 0,637 I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_0^2 \eta^2 \mu^2 \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-I_0 \eta \mu \theta)^2 d\theta = \\ &= \frac{I_0^2}{4} + \frac{I_0^2}{4} = \frac{I_0^2}{2} \rightarrow I = I_{RMS} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 15.6.3.

Αγωγός διαρρέεται ταυτόχρονα από συνεχές ρεύμα 4 A και από εναλλασσόμενο ρεύμα της μορφής $3\sqrt{2}$ ημ 314 t. Ζητούνται: α) Η ενεργός ένταση του μικτού ρεύματος. β) Το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο μιας περιόδου.

α) Είναι $i(t) = 4 + 3\sqrt{2} \eta \mu 314 t$

και $i^2(t) = 16 + 18 \eta \mu^2 314 t + 24\sqrt{2} \eta \mu 314 t$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 16 dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T 18 \eta \mu^2 \omega t dt + \frac{1}{T} \int_0^T 24\sqrt{2} \eta \mu \omega t dt = \\ &= 16 + \frac{24\sqrt{2}}{\omega T} \int_0^T \eta \mu \omega t d(\omega t) + \frac{18}{\omega T} \int_0^T \eta \mu^2 \omega t d(\omega t) = \\ &= 16 - \frac{24\sqrt{2}}{\omega t} [\sigma \nu \nu \omega t]_0^T + \frac{18}{\omega T} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\eta \mu 2\omega t}{4} \right]_0^T = \\ &= 16 - \frac{24\sqrt{2}}{\omega T} (\sigma \nu \nu 2\pi - \sigma \nu \nu 0) + \frac{18}{\omega T} \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\eta \mu 2\pi}{4} \right) = \\ &= 16 - 0 + 9 = 25 \rightarrow I = \sqrt{25} = 5 \text{ A} \\ &(\omega T = 2\pi) \end{aligned}$$

$$6) \quad i = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = idt = (4 + 3\sqrt{2} \eta \mu \omega t) dt$$

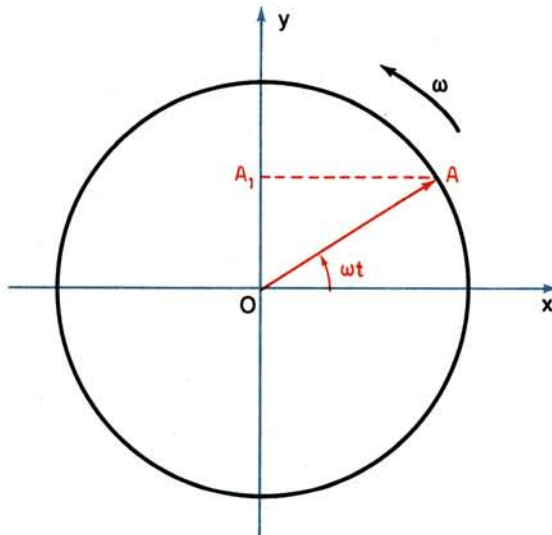
$$\rightarrow q = \int_0^T 4dt + \frac{3\sqrt{2}}{\omega} \int_0^T \eta \mu \omega t dt = 4T - \frac{3\sqrt{2}}{\omega} [\sigma \nu \nu \omega t]_0^T = 4T$$

$$\text{Είναι} \quad \omega = 314 \text{ rad/s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,02 \text{ s}, \quad \text{άρα } q = 4 \cdot 0,02 = 0,08 \text{ C}$$

15.7 Διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών.

Η ημιτονική καμπύλη, όπως αυτή των σχημάτων 15.3α και 15.5α, μας παρέχει έναν τρόπο παραστάσεως των εναλλασσομένων μεγεθών. Η παράσταση αυτή έχει το βασικό πλεονέκτημα, να μας παρέχει σε κάθε χρονική στιγμή την αντίστοιχη στιγμιαία τιμή του εναλλασσόμενου μεγέθους. Αλλά ο τρόπος αυτός της παραστάσεως είναι δύσχρηστος και κοπιαστικός, επί πλέον δε απαιτεί ακριβή γεωμετρική χάραξη. Η ανάγνωση της διαφοράς φάσεως είναι δυσχερής. Επίσης η παράσταση αυτή δεν εξυπηρετεί στις περιπτώσεις που έχουμε να προσθέσουμε γραφικά εναλλασσόμενα μεγέθη. Για τους παραπάνω λόγους συνήθίζεται να παριστάνουμε ένα ημιτονοειδές εναλλασσόμενο μέγεθος συχνότητας f , με **περιστρεφόμενο διάνυσμα** με μέτρο ίσο προς τη μέγιστη τιμή (πλάτος) του εναλλασσόμενου μεγέθους και γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi f$. Τα διαγράμματα που προκύπτουν ονομάζονται περιστρεφόμενα διανυσματικά διαγράμματα ή **πολικά** διαγράμματα και απλουστεύουν πολύ την εργασία της επιλύσεως των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος.

Ας θεωρήσουμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (σχ. 15.7α) και διάνυσμα



Σχ. 15.7α.

Διανυσματική παράσταση εναλλασσόμενου μεγέθους.

\vec{OA} περιστρεφόμενο αντίθετα προς τους δείκτες του ωρολογίου με γωνιακή ταχύτητα ω (πολικό διάνυσμα). Το μέτρο του διανύσματος λαμβάνεται ίσο με το πλάτος U_0 (για παράδειγμα) μιας εναλλασσόμενης τάσεως. Στην αρχή των χρόνων ($t = 0$) το διάνυσμα συμπίπτει με τον άξονα Ox , τον οποίο παίρνουμε σαν άξονα αρχής μετρήσεων των φάσεων, ενώ τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση OA και έχει διαγράψει τη γωνία $\alpha = \omega t$ (πολική γωνία). Η αλγεβρική τιμή της προβολής του περιστρεφόμενου διανύσματος στον άξονα Oy μας παρέχει τη στιγμιαία τιμή της εναλλασσόμενης τάσεως:

$$u = (OA_1) = (OA) \eta\mu\omega t = U_0 \eta\mu\omega t$$

Το διάνυσμα λοιπόν \vec{OA} μας παρέχει όλα τα χαρακτηριστικά της εναλλασσόμενης τάσεως. Το μέτρο του μας παρέχει το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσεως, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μας παρέχει την κυκλική συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως, η γωνία $A'Ox$ μας παρέχει τη φάση και η προβολή του στον άξονα Oy μας παρέχει τη στιγμιαία τιμή της εναλλασσόμενης τάσεως. Εξυπακούεται ότι τα πιο πάνω ισχύουν για το περιστρεφόμενο διάνυσμα κάθε εναλλασσόμενου μεγέθους.

Στην πράξη συνηθίζεται το μήκος του διανύσματος να λαμβάνεται ίσο με την ενεργό τιμή του εναλλασσόμενου μεγέθους (τάσεως, εντάσεως κλπ.), οπότε η προβολή του, για να παριστάνει στιγμιαία τιμή θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί επί $\sqrt{2} = 1,41$.

15.7.1 Πρόσθεση εναλλασσομένων μεγεθών.

Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τις δύο αρμονικές τάσεις $u_1 = U_{10} \eta\mu\omega t$ (15.37) και $u_2 = U_{20} \eta\mu(\omega t + \varphi)$ (15.38) που έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω , αλλά παρουσιάζουν διαφορά φάσεως φ . Το άθροισμα των δύο αυτών ημιτονοειδών μεγεθών, θα είναι:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_{10} \eta\mu\omega t + U_{20} \eta\mu(\omega t + \varphi) \quad (15.39)$$

Με απλές τριγωνομετρικές πράξεις μπορούμε εύκολα να μετασχηματίσουμε την (15.39) ως εξής:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{10} \eta\mu\omega t + U_{20} (\eta\mu\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \eta\mu\varphi) = \\ &= (U_{10} + U_{20} \cos\varphi) \eta\mu\omega t + U_{20} \sin\omega t \eta\mu\varphi \end{aligned} \quad (15.40)$$

$$\text{Αν καλέσουμε:} \quad U_{x0} = U_{10} + U_{20} \cos\varphi \quad (15.41)$$

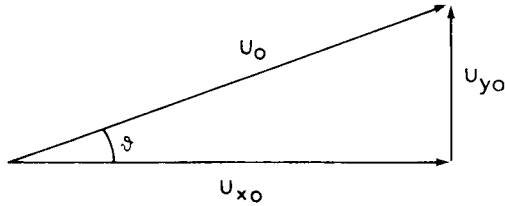
$$\text{και} \quad U_{y0} = U_{20} \eta\mu\varphi \quad (15.42)$$

Τότε η (15.40) γίνεται:

$$u(t) = U_{x0} \eta\mu\omega t + U_{y0} \sin\omega t \quad (15.43)$$

Αν επί πλέον θέσουμε (σχ. 15.76):

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{U_{y0}}{U_{x0}} \quad (15.44)$$



Σχ. 15.76.

Τότε η (15.43) γίνεται:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{x0} (\eta\mu\omega t + \epsilon\phi\theta \sigma\upsilon\nu\omega t) = \frac{U_{x0}}{\sigma\upsilon\nu\theta} (\eta\mu\omega t \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\omega t) = \\ &= \frac{U_{x0}}{\sigma\upsilon\nu\theta} \eta\mu(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (15.45)$$

Τελικά η (15.45) μπορεί να γραφεί ως:

$$u(t) = U_0 \eta\mu(\omega t + \theta) \quad (15.46)$$

όπου
$$\epsilon\phi\theta = \frac{U_{y0}}{U_{x0}} \quad (15.47)$$

και
$$U_0 = \frac{U_{x0}}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \sqrt{U_{x0}^2 + U_{y0}^2} \quad (15.48)$$

Οι παραπάνω σχέσεις (15.46) έως (15.48) ισχύουν και για την **αφαίρεση** των δύο εναλλασσόμενων μεγεθών, αρκεί αντί τις (15.41) και (15.42) να χρησιμοποιήσουμε τις:

$$U_{x0} = U_{10} - U_{20} \sigma\upsilon\nu\phi \quad (15.49)$$

$$U_{y0} = -U_{20} \eta\mu\phi \quad (15.50)$$

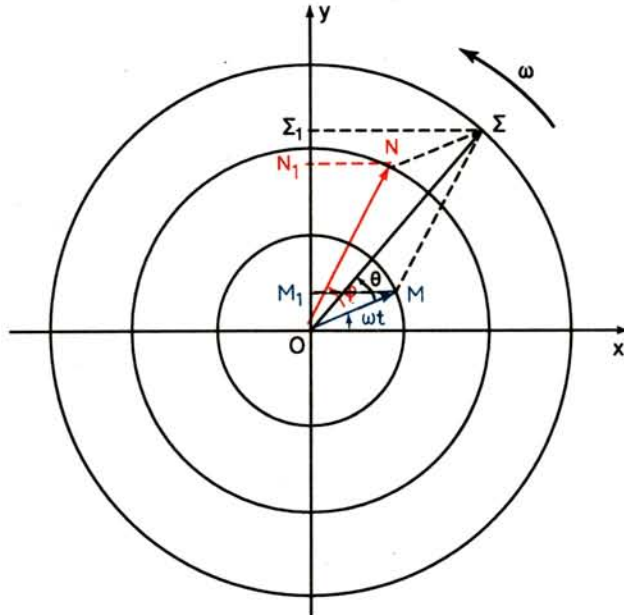
Όπως φαίνεται από την (15.46) το άθροισμα – ή η διαφορά – δύο ισοσύχων ημιτονοειδών εναλλασσόμενων μεγεθών είναι επίσης ένα ισόσυχο ημιτονοειδές εναλλασσόμενο μέγεθος που έχει διαφορά φάσεως θ ως προς το περιστρεφόμενο με φάση ωt μέγεθος. Όμως, η παραπάνω πρόσθεση γίνεται ευκολότερα γραφικά, με τη βοήθεια ενός πολικού διαγράμματος, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θεωρούμε στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 15.7γ δύο περιστρεφόμενα ανύσματα:

– Το \vec{OM} , με μέτρο $(OM) = U_{10}$ που παριστά την τάση $u_1(t)$, και

– το \vec{ON} , με μέτρο $(ON) = U_{20}$ που παριστά την τάση $u_2(t)$.

Και τα δύο ανύσματα περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Το ανύσμα \vec{OM} σχηματίζει τη χρονική στιγμή t γωνία ωt με τον άξονα OX , ενώ το



Σχ. 15.7γ.

Πρόσθεση δύο εναλλασσομένων μεγεθών.

άνυσμα \vec{ON} που προηγείται του \vec{OM} κατά γωνία φ σχηματίζει με τον άξονα Ox τη γωνία $\omega t + \varphi$ (σχ. 15.7γ).

Συνθέτομε τα δύο διανύσματα με τη μέθοδο του παραλληλόγραμμου και προβάλλομε τη συνισταμένη \vec{OS} στον άξονα Oy . Παρατηρούμε ότι:

$$(OS)_1 = (OM)_1 + (ON)_1 = U_{10} \eta \mu \omega t + U_{20} \eta \mu (\omega t + \varphi) = u_1 + u_2$$

δηλαδή η προβολή OS_1 παριστάνει ακριβώς το ζητούμενο άθροισμα των εναλλασσομένων τάσεων u_1 και u_2 .

Είναι επίσης πολύ εύκολο να δείξομε ότι η γωνία την οποία σχηματίζει το άνυσμα \vec{OM} με το άνυσμα \vec{OS} ισούται προς τη γωνία θ της σχέσεως (15.44). Άρα, το άνυσμα \vec{OS} πράγματι αποτελεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα του αθροίσματος των $u_1(t)$ και $u_2(t)$, τη χρονική στιγμή t . Αν τώρα θεωρήσομε ότι τὸ παραλληλόγραμμο $(OMENO)$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το σημείο O , σύμφωνα με τη φορά του βέλους, η γωνία ωt συνέχεια θα αυξάνεται και σε κάθε χρονική στιγμή οι προβολές των ανυσμάτων \vec{OM} και \vec{ON} θα παριστάνουν τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων u_1 και u_2 , ενώ η προβολή της διαγωνίου \vec{OS} θα παριστάνει την αντίστοιχη συνισταμένη τάση. Επίσης από το σχήμα μπορούμε αμέσως να βρούμε το πλάτος (OS) της συνισταμένης τάσεως καθώς και τη διαφορά φάσεως μεταξύ της τάσεως u_1 και της συνισταμένης τάσεως.

Στις επόμενες παραγράφους, αντί να σχεδιάζομε τα πλάτη των εναλλασσομένων μεγεθών θα σχεδιάζομε την ενεργό τιμή. Έτσι το αποτέλεσμα της συνθέσεως παρέχει απευθείας την ενεργό τιμή.

Παράδειγμα 15.7.1.

Τρεις εναλλασσόμενες τάσεις έχουν την ίδια συχνότητα και ενεργές τιμές $U_1 = 300 \text{ V}$, $U_2 = 100 \text{ V}$ και $U_3 = 200 \text{ V}$. Να βρεθεί η συνισταμένη τους αν η U_1 προπορεύεται της U_2 κατά $\pi/2$ και η U_2 της U_3 κατά $\pi/2$.

Αν τοποθετήσουμε την τάση U_2 σε οριζόντιο άξονα, τότε η U_1 επειδή προπορεύεται θα σχηματίζει με την U_2 γωνία $\pi/2$ και θα βρίσκεται αριστερά της (η φορά η αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ωρολογίου, μας δείχνει συμβατικά τη φορά προπορείας), ενώ η τάση U_3 θα σχηματίζει με τη U_2 γωνία $\pi/2$ και θα βρίσκεται δεξιά της (σχ. 15.7δ).

Από το πολικό διάγραμμα προκύπτει:

$$U_1 - U_3 = 300 - 200 = 100 \text{ V}, \quad U^2 = U_2^2 + (U_1 - U_3)^2 = 100^2 + 100^2 \rightarrow$$

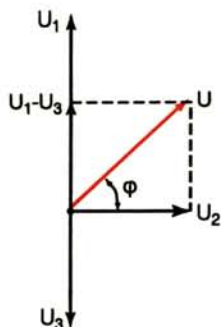
$$U = 100\sqrt{2} = 141 \text{ V} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi\phi = \frac{U_1 - U_3}{U_2} = \frac{100}{100} = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

δηλαδή η συνισταμένη τάση έχει ενεργό τιμή 141 V και προηγείται της U_2 κατά γωνία $\pi/4$.

Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων είναι:

$$u_1 = 300\sqrt{2} \eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad u_2 = 100\sqrt{2} \eta\mu\omega t$$

$$u_3 = 200\sqrt{2} \eta\mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{και} \quad u = 141\sqrt{2} \eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$



Σχ. 15.7δ.

Πολικό διάγραμμα παραδείγματος 15.7.1.

15.8 Ανάλυση κατά Fourier.

Στις παραγράφους που έχουν προηγηθεί δώσαμε τους κυριότερους ορισμούς και ιδιότητες των ημιτονοειδών ή αρμονικών εναλλασσομένων ρευμάτων. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε μεθόδους επίλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων και δικτύων όπου κυκλοφορούν αρμονικά εναλλασσόμενα ρεύματα. Όμως, στην πράξη στα ηλεκτρικά κυκλώματα δυνατόν να κυκλοφορούν εν γένει περίοδικα μεταβαλλόμενα ρεύματα είτε εναλλασσόμενα μη ημιτονοειδή είτε μικτά. Τα πρώτα αναπτύσσονται εφόσον στο κύκλωμα υπάρχουν αρμονικές πηγές τάσεως διαφόρων συχνοτήτων, ενώ τα

δεύτερα οφείλονται στην ύπαρξη – επί πλέον των αρμονικών πηγών – πηγών συνεχούς τάσεως. Τα κυκλώματα αυτά στα οποία κυκλοφορούν μικτά ρεύματα είναι δυνατόν να επιλυθούν με τη βοήθεια των νόμων και των μεθόδων που αφορούν τα αρμονικά εναλλασσόμενα ρεύματα, εφόσον γίνει χρήση της εξής προτάσεως, η διατύπωση της οποίας οφείλεται στον Fourier*:

Οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση, που δεν έχει ημιτονική μορφή, μπορεί να αναλυθεί σε μια σειρά από ημιτονικές συναρτήσεις, που ονομάζονται «αρμονικές» και μια σταθερή ποσότητα, που ονομάζεται «συνεχής συνιστώσα» της περιοδικής συναρτήσεως.

Κάθε περιοδική συνάρτηση λοιπόν $f(\theta)$ που δεν είναι ημιτονική, μπορεί να εκφρασθεί ως το άθροισμα:

- Ενός σταθερού όρου A , που ονομάζεται **συνεχής συνιστώσα**.
- Ενός αθροίσματος ημιτονικών συναρτήσεων με φάσεις $\theta + \theta_1, 2\theta + \theta_2, 3\theta + \theta_3$, κλπ. που ονομάζονται αρμονικές συνιστώσες, δηλαδή:

$$f(\theta) = A + A_1 \eta\mu(\theta + \theta_1) + A_2 \eta\mu(2\theta + \theta_2) + A_3 \eta\mu(3\theta + \theta_3) + \dots + A_n \eta\mu(n\theta + \theta_n) + \dots \quad (15.51)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η ανάλυση της $f(\theta)$ στη σειρά (15.51) είναι ισοδύναμη με την ανάλυση στη σειρά με ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους της μορφής:

$$f(\theta) = A + a_1 \sigma\upsilon\nu \theta + a_2 \sigma\upsilon\nu 2\theta + \dots + a_n \sigma\upsilon\nu n\theta + \dots + \theta_1 \eta\mu \theta + \theta_2 \eta\mu 2\theta + \dots + \theta_n \eta\mu n\theta + \dots \quad (15.52)$$

όπου:

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (15.53)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sigma\upsilon\nu(n\theta) d\theta \quad (15.54)$$

$$\theta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \eta\mu(n\theta) d\theta \quad (15.55)$$

Αν ως μεταβλητή θεωρήσουμε το χρόνο t οι παραπάνω τύποι γίνονται:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (15.56)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sigma\upsilon\nu(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3... \quad (15.57)$$

* Jean Baptiste Joseph Fourier, Γάλλος μαθηματικός, 1768-1830.

$$\theta_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \eta_{\mu}(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3... \quad (15.58)$$

και η $f(t)$ αναλύεται ως εξής:

$$f(t) = A + a_1 \text{ συν } \omega t + a_2 \text{ συν } 2\omega t + \dots + a_n \text{ συν } (n\omega t) + \\ \dots + \theta_1 \eta_{\mu} \omega t + \theta_2 \eta_{\mu} 2\omega t + \dots + \theta_n \eta_{\mu} (n\omega t) + \dots$$

ή

$$f(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ συν } n\omega t + \theta_n \eta_{\mu} n\omega t) \quad (15.59)$$

όπου n είναι η σειρά των ακεραίων αριθμών και a_n, θ_n συντελεστές, γνωστοί ως **συντελεστές Fourier**.

Το ω αποτελεί τη **στοιχειώδη συχνότητα** ή **θεμελιώδη συχνότητα** (ή βασική) της $f(t)$. Τα ακέραια πολλαπλάσια της ω , δηλαδή οι συχνότητες $2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$ ονομάζονται **αρμονικές συχνότητες** της $f(t)$.

Η **συνεχής συνιστώσα** A της $f(t)$ αποτελεί, όπως φαίνεται από τη σχέση (15.55) τη μέση τιμή της $f(t)$ στην περίοδό της. Είναι φανερό ότι αν η $f(t)$ είναι εναλλασσόμενη συνάρτηση τότε εξ' ορισμού η τιμή της συνεχούς συνιστώσας A είναι μηδέν.

Οι περισσότερες συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην πράξη μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier. Οι ικανές συνθήκες, ώστε η $f(t)$ να αναλύεται σε σειρά Fourier, είναι γνωστές ως **συνθήκες του Dirichlet** και είναι οι εξής:

- Η $f(t)$ να έχει μια μόνο τιμή για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου.
- Η $f(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε μια περίοδο T .
- Η $f(t)$ να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδο T .
- Να είναι καθορισμένο, δηλαδή να έχει τιμή διάφορο του μηδενός, το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt \text{ σε μια περίοδο } T.$$

Θα έχομε από την εξίσωση (15.53):

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_0 \eta_{\mu} \theta d\theta \rightarrow A = \frac{U_0}{\pi}$$

Ανάλογα, από την εξίσωση (15.55):

$$\theta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_0 \eta_{\mu} \theta \eta_{\mu}(n\theta) d\theta$$

$$\text{Είναι όμως } \int \eta_{\mu} \theta \eta_{\mu}(n\theta) d\theta = - \int \eta_{\mu}(n\theta) d \text{ συν } \theta = -\eta_{\mu}(n\theta) \text{ συν } \theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \int \sin \theta \, d \eta \mu \, n \theta = - \eta \mu (n \theta) \sin \theta (\theta) + \int n \sin \theta \sin n \theta = \\
& = - \eta \mu (n \theta) \sin \theta + n \int \sin n \theta \, d \eta \mu \, \theta = - \eta \mu (n \theta) \sin \theta + \\
& + n \sin (n \theta) \eta \mu \, \theta - n \int \eta \mu \, \theta \, d \sin n \theta = - \eta \mu (n \theta) \sin \theta + \\
& + n \sin (n \theta) \eta \mu \, \theta + \eta^2 \int \eta \mu \, \theta \, \eta \mu (n \theta) \, d \theta.
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (1 - n^2) \int \eta \mu \, \theta \, \eta \mu (n \theta) \, d \theta = - \eta \mu (n \theta) \sin \theta + n \sin (n \theta) \eta \mu \, \theta$$

$$\text{και } (1 - n^2) \int_0^{\pi} \eta \mu \, \theta \, \eta \mu (n \theta) \, d \theta = 0 \rightarrow \int_0^{\pi} \eta \mu \, \theta \, \eta \mu (n \theta) \, d \theta = 0 \text{ για κάθε } n \text{ εκτός από την τιμή}$$

$n = 1$. Για $n = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{U_0}{\pi} \int_0^{\pi} \eta \mu^2 \theta \, d \theta = \frac{U_0}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \sin 2\theta}{2} \, d \theta = \\
&= \frac{U_0}{2} - \frac{U_0}{\pi} \left[\frac{\eta \mu \, 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \rightarrow \theta_1 = \frac{U_0}{2}
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_0 \eta \mu \, \theta \sin (n \theta) \, d \theta$$

Εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$a_n = 0 \quad \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός}$$

$$\text{και } a_n = - \frac{2U_0}{\pi (n^2 - 1)} \quad \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος.}$$

Άρα η σειρά Fourier για την απλή ανόρθωση έχει την εξής μορφή:

$$u = f(\theta) = U_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \eta \mu \, \theta - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\sin n \theta}{n^2 - 1} \right)$$

15.8.1 Κανόνες για την ανάλυση κατά Fourier.

Η ανάλυση μιας περιοδικής συναρτήσεως σε σειρά Fourier απαιτεί σε πολλές περιπτώσεις επίπονη προσπάθεια. Ωστόσο μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά τους υπολογι-

μοός των συντελεστών της σειράς Fourier αν έχουμε υπόψη μας τους εξής κανόνες, των οποίων η απόδειξη ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού:

α) Αν η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ είναι συνάρτηση **άρτια**, δηλαδή αν ισχύει:

$$f(t) = f(-t)$$

τότε η ανάπτυξη της σε σειρά Fourier δεν έχει ημιτονικές συνιστώσες, δηλ. $\theta_n = 0$.

β) Αν η $f(t)$ είναι συνάρτηση **περιττή**, δηλαδή αν ισχύει: $f(t) = -f(-t)$, **τότε η ανάπτυξη της σε σειρά Fourier δεν έχει συνημιτονικές συνιστώσες**, δηλαδή $a_n = 0$ όπως, επίσης, δεν έχει συνεχή συνιστώσα, δηλαδή $A = 0$.

γ) Αν η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ συγκροτείται από δύο **συμμετρικές ημιπεριόδους**, δηλαδή αν ισχύει:

$$f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

τότε η σειρά Fourier έχει μόνο άρτιες αρμονικές συνιστώσες.

δ) Αν η $f(t)$ συγκροτείται από δύο **αντίθετες ημιπεριόδους** δηλαδή αν ισχύει:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

τότε η σειρά Fourier έχει μόνο περιττές συνιστώσες.

ε) Πολλές φορές είναι πιο εύκολο και χρήσιμο να συνδυάσουμε τους όρους του συνημιτόνου και ημιτόνου σε ένα μόνο όρο π.χ. σε όρο συνημιτόνου. Στην περίπτωση αυτή η σειρά Fourier μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t - \theta_n) \quad (15.60)$$

όπου: $\theta_n = \text{τοξ εφ} \frac{\theta_n}{a_n} \quad (15.61) \quad \text{και} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + \theta_n^2} \quad (15.62)$

Τις σχέσεις (15.60) έως (15.62) μπορούμε να τις αποδείξουμε αν πάρουμε το νιοστό όρο της σειράς και τον γράψουμε:

$$a_n \sin n\omega t + \theta_n \eta\mu n\omega t = a_n \left(\sin n\omega t + \frac{\theta_n}{a_n} \eta\mu n\omega t \right) = a_n (\sin n\omega t + \varepsilon\phi \theta_n \eta\mu n\omega t)$$

όπου: $\varepsilon\phi \theta_n = \frac{\theta_n}{a_n} \quad \text{και} \quad \theta_n = \text{τοξ εφ} \frac{\theta_n}{a_n}$

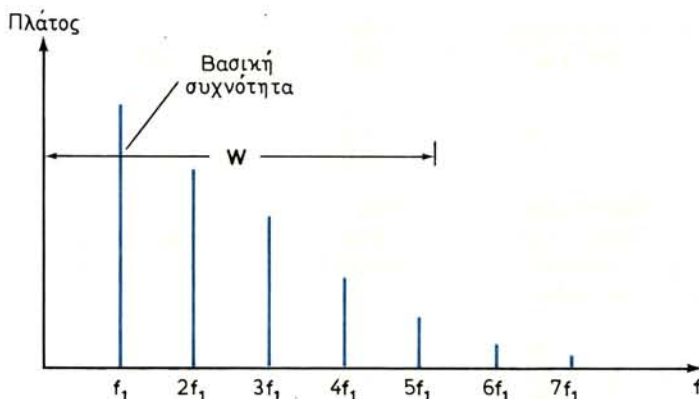
ή $a_n \sin n\omega t + \theta_n \eta\mu n\omega t = \frac{a_n}{\sin \theta_n} \sin(n\omega t - \theta_n) = A_n \sin(n\omega t - \theta_n)$

όπου: $A_n = \frac{a_n}{\sin \theta_n} = \sqrt{a_n^2 + \theta_n^2}$

Η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος σε σειρά Fourier έχει ένα φυσικό περιεχόμενο βαθύτερο. Δηλώνει ότι η ισχύς του περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων που μπορεί να μεταφέρει η κάθε αρμονική συνιστώσα της σειράς. Δηλαδή είναι:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = A^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Η ζώνη των συχνοτήτων, μέσα στην οποία τα πλάτη των αρμονικών συνιστωσών έχουν σημαντική τιμή, είναι το φάσμα W , που μέσα του κατανέμεται η ισχύς του περιοδικού σήματος. Η ισχύς αυτή συγκεντρώνεται στις διακεκριμένες αρμονικές της βασικής συχνότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.8a. Τέτοια φάσματα χαρακτηρίζουν τα περιοδικά σήματα και ονομάζονται **γραμμικά φάσματα**.



Σχ. 15.8a.
Γραμμικό φάσμα περιοδικού σήματος.

15.8.2 Μιγαδική μορφή των σειρών Fourier.

Αν στη σχέση (15.59) αντικαταστήσουμε τα ημίτονα και συνημίτονα με εκθετικές συναρτήσεις, δηλαδή αν θέσουμε:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) \quad (15.63)$$

$$\text{και} \quad \sin n\omega t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \quad (15.64)$$

μετά την εκτέλεση των πράξεων θα έχουμε:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad \text{ή} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad (15.65)$$

όπου:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (15.66)$$

και

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (15.67)$$

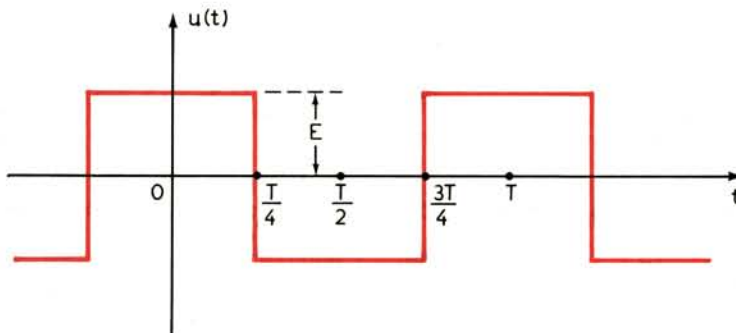
Η (15.65) είναι η **μγαδική** μορφή της σειράς Fourier.

Παράδειγμα 15.8.1.

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η κυματομορφή του σχήματος 15.86 και να σχεδιασθεί το γραμμικό φάσμα των τετραγωνικών παλμών (με το σήμα αυτό μοιάζει η έξοδος των τηλετύπων).

Με απλή παρατήρηση τού σχήματος 15.86 συμπεραίνουμε ότι οι χρονικές συναρτήσεις, που περιγράφουν τον κανονικό τετραγωνικό παλμό, είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} u(t) &= E & 0 \leq t < T/4 \\ u(t) &= -E & T/4 < t < 3T/4 \\ u(t) &= E & 3T/4 < t \leq T \end{aligned}$$



Σχ. 15.86.

Κανονικός τετραγωνικός παλμός.

Η συνάρτηση είναι άρτια γιατί $u(t) = u(-t)$

Επομένως $\theta_n = 0$

Είναι επίσης $u(t) = -u(t + T/2)$

Επομένως έχει μόνο περιττές αρμονικές συνιστώσες.

Είναι επίσης:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 0$$

Ο συντελεστής a_n θα είναι κατά την (15.57):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \text{ συν}(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} E \text{ συν}(n\omega t) dt + \\
&+ \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} -E \text{ συν}(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^T E \text{ συν}(n\omega t) dt = \\
&= \frac{2E}{n\omega T} [\eta\mu(n\omega t)]_0^{T/4} - \frac{2E}{n\omega T} [\eta\mu(n\omega t)]_{T/4}^{3T/4} + \\
&+ \frac{2E}{n\omega T} [\eta\mu(n\omega t)]_{3T/4}^T = \frac{2E}{2\pi n} \eta\mu \frac{\pi n}{2} - \\
&- \frac{2E}{2\pi n} \left(\eta\mu \frac{3\pi n}{2} - \eta\mu \frac{\pi n}{2} \right) + \frac{2E}{2\pi n} \left(\eta\mu 2\pi n - \eta\mu \frac{3\pi n}{2} \right) = \\
&= \frac{4E}{2\pi n} \eta\mu \frac{\pi n}{2} - \frac{4E}{2\pi n} \eta\mu \frac{3\pi n}{2} \Rightarrow \\
a_n &= \frac{4E}{\pi n} \eta\mu \frac{\pi n}{2} \text{ συν } \pi n \quad \text{και θα έχουμε:} \\
a_1 &= \frac{4E}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4E}{3\pi}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{4E}{5\pi}, a_6 = 0, a_7 = -\frac{4E}{7\pi} \dots
\end{aligned}$$

Άρα η σειρά Fourier για τον κανονικό τετραγωνικό παλμό θα έχει την εξής μορφή:

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \left(\text{συν}\omega t - \frac{\text{συν } 3\omega t}{3} + \frac{\text{συν } 5\omega t}{5} - \frac{\text{συν } 7\omega t}{7} + \dots \right)$$

$$\text{ή} \quad u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \text{συν}(n\omega t)$$

Το φάσμα των τετραγωνικών παλμών φαίνεται στο σχήμα 15.8γ.

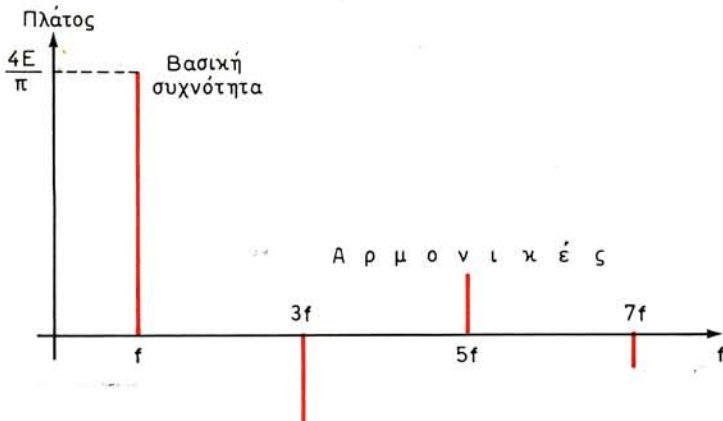
Παράδειγμα 15.8.2.

Να σχεδιασθεί το φάσμα των στενών παλμών που εικονίζονται στο σχήμα 15.8δ. Οι περιοδικοί παλμοί έχουν διάρκεια τ και περίοδο T .

$$\begin{aligned}
\text{Είναι:} \quad u(t) &= E & 0 < t < \tau/2 \\
u(t) &= 0 & \tau/2 < t < T - \tau/2 \\
u(t) &= E & T - \tau/2 < t < T
\end{aligned}$$

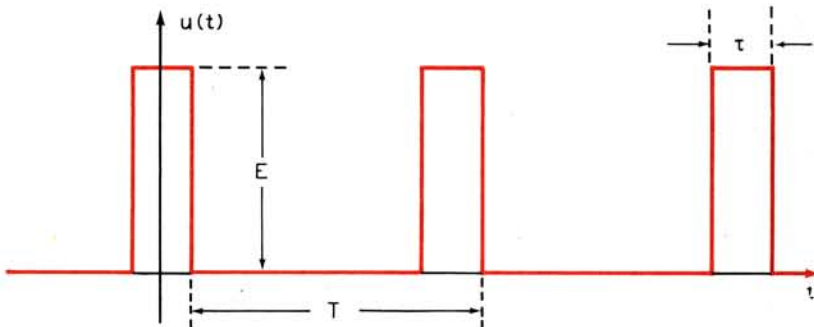
Η συνάρτηση είναι άρτια γιατί $u(t) = u(-t)$.

Επομένως θα είναι $b_n = 0$



Σχ. 15.8γ.

Το φάσμα των τετραγωνικών παλμών.



Σχ. 15.8δ.

Σύντομοι περιοδικοί παλμοί.

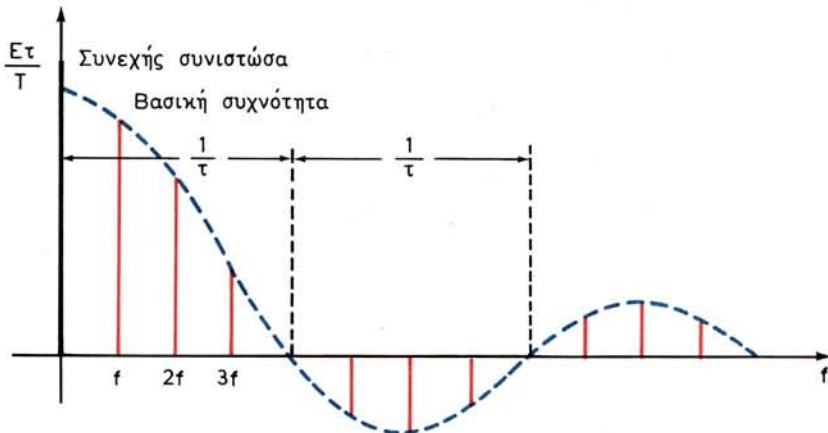
Η συνεχής συνιστώσα θα είναι:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau/2} E dt + \frac{1}{T} \int_{\tau/2}^{T-\tau/2} 0 dt + \frac{1}{T} \int_{T-\tau/2}^T E dt = \frac{E\tau}{2T} + \frac{E\tau}{2T} \rightarrow A = \frac{E\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} E \sin(n\omega t) dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{T} \int_{T-\tau/2}^T E \sin(n\omega t) dt = \frac{2E}{n\omega T} [\eta\mu(n\omega t)]_{T-\tau/2}^{T/2} + \\
 & + \frac{2E}{n\omega T} [\eta\mu(n\omega t)]_{T-\tau/2}^T = \frac{E}{\pi n} \eta\mu \frac{n\omega\tau}{2} + \frac{E}{\pi n} \eta\mu n\omega T - \\
 & - \frac{E}{\pi n} \eta\mu n\omega \left(T - \frac{\tau}{2} \right) = \frac{E}{\pi n} \left[\eta\mu \frac{n\omega\tau}{2} - \eta\mu n\omega \left(T - \frac{\tau}{2} \right) \right] \\
 \rightarrow a_n & = \frac{2E}{\pi n} \eta\mu \frac{n\omega\tau}{2} \quad \text{και θα έχουμε:} \\
 u(t) & = \frac{E\tau}{T} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \eta\mu \frac{n\omega\tau}{2} \sin n\omega t
 \end{aligned}$$

Το φάσμα των στενών παλμών φαίνεται στο σχήμα 15.8ε.



Σχ. 15.8ε.

Το φάσμα των στενών παλμών.

Παράδειγμα 15.8.3.

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η κυματομορφή του σχήματος 15.8στ (τριγωνικός παλμός).

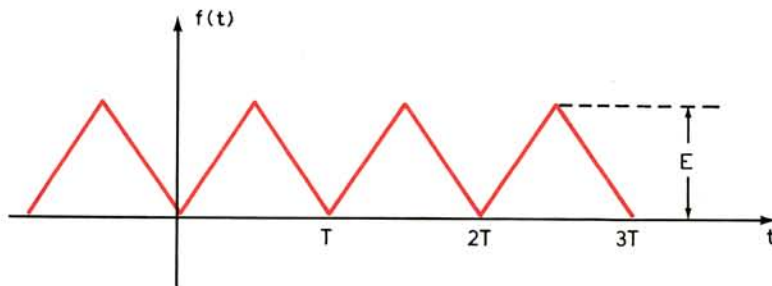
Είναι:

$$f(t) = \frac{2E}{T} t \quad 0 < t < \frac{T}{2}$$

$$f(t) = 2E - \frac{2Et}{T} \quad \frac{T}{2} < t < T$$

Η συνάρτηση είναι άρτια γιατί $f(t) = f(-t)$

Επομένως $b_n = 0$



Σχ. 15.8στ.
Τριγωνικός παλμός.

Η συνεχής συνιστώσα θα είναι:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} t dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left(2E - \frac{2Et}{T} \right) dt = \\
 &= \frac{2E}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T/2} + \frac{2E}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{2E}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/2}^T = \\
 &= \frac{E}{4} + E - \frac{3E}{4} \rightarrow A = \frac{E}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{cosec}(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} t \operatorname{cosec}(n\omega t) dt + \\
 &+ \frac{2}{T} \int_{T/2}^T \left(2E - \frac{2Et}{T} \right) \operatorname{cosec}(n\omega t) dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι: } \int t \operatorname{cosec}(n\omega t) dt &= \frac{1}{n\omega} \int t d\eta\mu(n\omega t) = \frac{t\eta\mu(n\omega t)}{n\omega} - \\
 - \frac{1}{n\omega} \int \eta\mu(n\omega t) dt &= \frac{t\eta\mu(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\operatorname{cosec}(n\omega t)}{n^2 \omega^2}
 \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα καταλήγουμε μετά την εκτέλεση των πράξεων στη σχέση:

$$a_n = -\frac{4E}{\pi^2 n^2} \text{ όταν } n \text{ είναι περιττός}$$

και $a_n = 0$ όταν n είναι άρτιος.

Άρα η σειρά Fourier για τον τριγωνικό παλμό θα έχει την εξής μορφή:

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

Παράδειγμα 15.8.4.

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η κυματομορφή του σχήματος 15.8ζ (πριονωτή τάση).

Είναι $f(x) = \frac{E}{\pi} x \quad 0 < x < \pi$

$f(x) = \frac{E}{\pi} (x - 2\pi) \quad \pi < x < 2\pi$

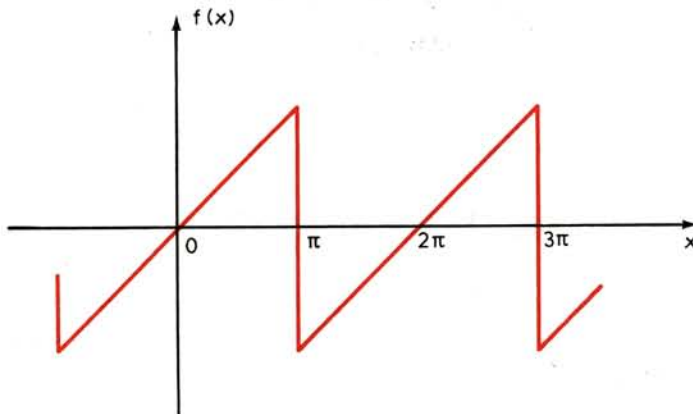
Η συνάρτηση είναι περιττή γιατί $f(x) = -f(-x)$.

Άρα $a_n = 0$

Είναι επίσης $A = 0$

Ο συντελεστής b_n θα είναι:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \eta\mu(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{E}{\pi} x \eta\mu(nx) dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{E}{\pi} (x - 2\pi) \eta\mu(nx) dx = \frac{E}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \eta\mu(nx) dx + \\ &+ \frac{E}{\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} x \eta\mu(nx) dx - \frac{2E}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \eta\mu(nx) dx = \end{aligned}$$



Σχ. 15.8ζ.
Πριονωτή τάση.

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{\pi^2} \int_0^{2\pi} x \eta\mu(nx) dx + \frac{2E}{\pi n} [\sigma\upsilon\nu(nx)]_{\pi}^{2\pi} = \\
&= -\frac{E}{\pi^2 n} \int_0^{2\pi} x d \sigma\upsilon\nu(nx) + \frac{2E}{\pi n} [1 - \sigma\upsilon\nu(\pi n)] = \\
&= -\frac{E}{\pi^2 n} [x \sigma\upsilon\nu(nx)]_0^{2\pi} + \frac{E}{\pi^2 n} \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu(nx) dx + \\
&+ \frac{2E}{\pi n} [1 - \sigma\upsilon\nu(\pi n)] = -\frac{E}{\pi^2 n} 2\pi + 0 + \frac{2E}{\pi n} [1 - \sigma\upsilon\nu(\pi n)] \rightarrow \\
&\rightarrow \theta_n = -\frac{2E \sigma\upsilon\nu(\pi n)}{\pi n}
\end{aligned}$$

θα έχουμε: $\theta_1 = \frac{2E}{\pi}$, $\theta_2 = -\frac{2E}{2\pi}$, $\theta_3 = \frac{2E}{3\pi}$...

Άρα η σειρά Fourier για την πριονωτή τάση έχει την εξής μορφή:

$$f(x) = \frac{2E}{\pi} \left(\eta\mu x - \frac{\eta\mu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 3x}{3} - \frac{\eta\mu 4x}{4} + \dots \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

16.1 Εισαγωγή.

Μετά τις γενικές έννοιες που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με τα εναλλασσόμενα ρεύματα, θα προχωρήσουμε, στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζοντας μεθόδους για την επίλυση σχετικά απλών κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος. Στο κεφάλαιο 18 του βιβλίου θα αναπτύξουμε μεθόδους για την επίλυση συνθετοτέρων κυκλωμάτων. Πάντως, σε κάθε περίπτωση επίλυσης κυκλώματος εναλλασσόμενου ρεύματος πρέπει να έχουμε υπόψη όσα αναφέραμε στην παράγραφο 15.2 του προηγούμενου κεφαλαίου σχετικά με τη συμπεριφορά των ηλεκτρικών καταναλωτών σε μεταβαλλόμενα ρεύματα, όπως αυτά εξειδικεύθηκαν για κάθε ένα από τους τρεις καταναλωτές που συνθέτουν ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος και συγκεκριμένα:

- Τον ωμικό αντιστάτη, με αντίσταση R .
- Το πηνίο με αυτεπαγωγή L .
- Τον πυκνωτή με χωρητικότητα C .

Όταν ένα κύκλωμα περιέχει ένα μόνο από τα παραπάνω στοιχεία ονομάζεται **απλό κύκλωμα**, ενώ όταν περιέχει δύο ή περισσότερα, που συνδέονται κατά έναν οποιονδήποτε τρόπο, ονομάζεται **σύνθετο κύκλωμα**.

Θα εξετάσουμε πρώτα τη συμπεριφορά των απλών κυκλωμάτων στο εναλλασσόμενο ρεύμα και στη συνέχεια θα εξετάσουμε σύνθετα κυκλώματα, στηριζόμενοι στη διανυσματική παράσταση των εναλλασσομένων μεγεθών.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των κυκλωμάτων στο εναλλασσόμενο ρεύμα, σκόπιμο είναι να εισάγουμε δύο γενικές έννοιες, την κρισιμότητα των οποίων θα κατανοήσουμε σε επόμενες παραγράφους.

- Ονομάζουμε **φαινόμενη αντίσταση** ή **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** ενός σύνθετου κυκλώματος στο οποίο εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής U (πλάτους U_0) το πηλίκο:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} \quad (16.1)$$

όπου I η ενεργός τιμή της εντάσεως του ρεύματος (I_0 το πλάτος) με το οποίο τροφοδοτείται το κύκλωμα.

Είναι φανερό ότι το μέγεθος Z έχει διαστάσεις αντιστάσεως και κατά συνέπεια μονάδα μετρήσεως το Ω .

- Ονομάζουμε **συντελεστή ισχύος** του κυκλώματος το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζουν τα στρεφόμενα ανύσματα της τάσεως που εφαρμόζεται στο κύκλωμα και της εντάσεως του ρεύματος που το διαρρέει. Ο συντελεστής ισχύος έχει μεγάλη σημασία στην πράξη, όπως θα αναπτύξουμε σε επόμενες παραγράφους.

16.2 Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση.

Υποθέτουμε ότι στα άκρα ενός ωμικού αντιστάτη R (σχ. 16.2α) εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής:

$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.2)$$

Η αντίσταση R θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα του οποίου η στιγμιαία ένταση είναι:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} \eta \mu \omega t \rightarrow i = I_0 \eta \mu \omega t \quad (16.3)$$

όπου

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (16.4)$$

το πλάτος της εντάσεως.

Από τις σχέσεις (16.2) και (16.3) προκύπτει ότι:

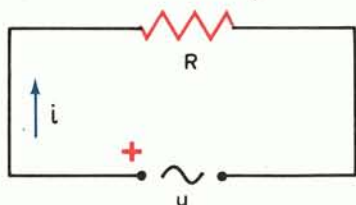
Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν ωμικό αντιστάτη, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, είναι ισόσυχο εναλλασσόμενο μέγεθος, που βρίσκεται σε φάση με την τάση.

Από τη σχέση (16.4) προκύπτει:

$$I\sqrt{2} = \frac{U\sqrt{2}}{R} \rightarrow I = \frac{U}{R}$$

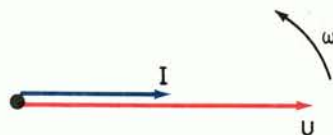
δηλαδή ισχύει ο νόμος του Ohm για τις ενεργές τιμές τάσεως και εντάσεως.

Εφόσον η διαφορά φάσεως είναι μηδέν, το διάνυσμα της τάσεως συμπίπτει με το διάνυσμα της εντάσεως, όπως φαίνεται στο σχήμα (16.2β).



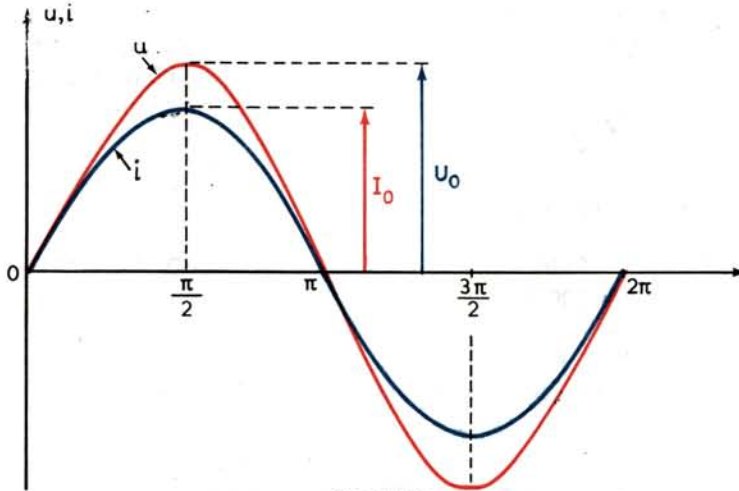
Σχ. 16.2α.

Κύκλωμα που περιέχει μόνο ωμική αντίσταση.



Σχ. 16.2β.

Ανυσματική παράσταση της τάσεως και εντάσεως σε κύκλωμα που περιέχει μόνο ωμική αντίσταση.



Σχ. 16.2γ.

Η εναλλασσόμενη τάση και ένταση στα άκρα ενός ωμικού καταναλωτή (ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη σε φάση).

Στο σχήμα 16.2γ περιστάνεται η μεταβολή των u και i σε συνάρτηση με τη γωνία ωt .

Η ωμική αντίσταση είναι το κατ' εξοχήν παθητικό στοιχείο των κυκλωμάτων, στο οποίο γίνεται πλήρης απορρόφηση της προσφερόμενης ενέργειας. Η ενέργεια που απορροφά ο αντιστάτης μετατρέπεται ολόκληρη σε θερμότητα, η οποία παρέχεται (σε Joule) από τη γνωστή σχέση (15.28):

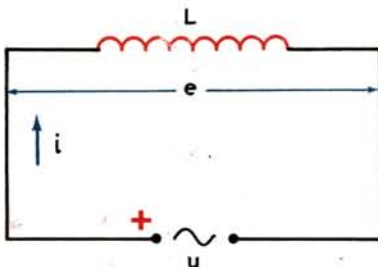
$$Q = I^2 R t$$

16.3 Κύκλωμα που συγκροτείται από ιδανικό πηνίο.

Θεωρούμε ένα πηνίο που έχει αυτεπαγωγή L και αμελητέα ωμική αντίσταση. Το πηνίο αυτό ονομάζεται **ιδανικό** πηνίο.

Υποθέτουμε ότι στα άκρα του ιδανικού πηνίου (σχ. 16.3α) εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής:

$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.5)$$



Σχ. 16.3α.

Κύκλωμα που περιέχει ιδανικό πηνίο.

Εξαιτίας του φαινομένου της αυτεπαγωγής αναπτύσσεται στο πηνίο αυτεπαγωγική ΗΕΔ ε ίση με:

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Σύμφωνα με το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε:

$$u + e = 0 \rightarrow U_o \eta\mu \omega t - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow di = \frac{U_o}{L} \eta\mu \omega t dt \rightarrow$$

$$i = \frac{U_o}{\omega L} \int_0^t \eta\mu \omega t d(\omega t) = -\frac{U_o}{\omega L} \sigma\upsilon\nu \omega t \rightarrow$$

$$i = \frac{U_o}{\omega L} \eta\mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (16.6)$$

Από τις (16.5) και (16.6) προκύπτει ότι:

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα ιδανικό πηνίο, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, είναι ισόσυχο εναλλασσόμενο μέγεθος που έπεται της τάσεως κατά γωνία $\varphi = \pi/2$.

Το πλάτος του ρεύματος είναι:

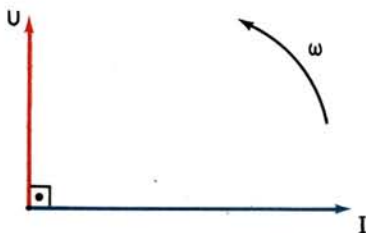
$$I_o = \frac{U_o}{\omega L} \quad (16.7)$$

όπου U_o το πλάτος της τάσεώς του και η ενεργός τιμή:

$$I = \frac{U}{\omega L} \quad (16.8)$$

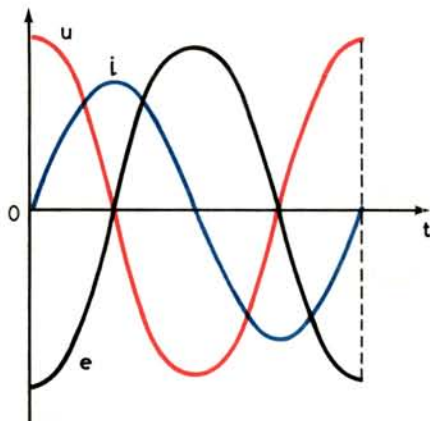
όπου U η ενεργός τιμή της τάσεως.

Το σχήμα 16.36 δίνει το διανυσματικό διάγραμμα της τάσεως και εντάσεως.



Σχ. 16.36.

Ανυσματική παράσταση της τάσεως και εντάσεως σε κύκλωμα που περιέχει μόνο ιδανικό πηνίο.



Σχ. 16.3γ.

Η εναλλασσόμενη τάση, ένταση και η αυτεπαγωγική ΗΕΔ στα άκρα ενός ιδανικού πηνίου. (Ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη. Η τάση παρουσιάζει προπορεία φάσεως κατά 90° από την ένταση και κατά 180° από την αυτεπαγωγική ΗΕΔ).

Στο σχήμα 16.3γ παριστάνεται η μεταβολή των u , e και i σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η αντίσταση που προβάλλει το πηνίο στο εναλλασσόμενο ρεύμα ονομάζεται **επαγωγική αντίσταση** και ορίζεται από τη σχέση:

$$X_L = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U}{I} \quad (16.9)$$

Από τις σχέσεις (16.7) και (16.9) προκύπτει:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (16.10)$$

Η σχέση (16.10) μας δείχνει ότι η επαγωγική αντίσταση δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως και από την αυτεπαγωγή L . (Όταν το πηνίο φέρει πυρήνα ο συντελεστής αυτεπαγωγής L εξαρτάται από τη σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ , που δεν είναι σταθερή). Όπως φαίνεται από τη σχέση (16.10) σε μεγάλες συχνότητες τα πηνία παρουσιάζουν μεγάλη επαγωγική αντίσταση, ενώ για το συνεχές ρεύμα ($\omega = 0$) η επαγωγική αντίσταση είναι μηδέν. Έτσι τα πηνία εμποδίζουν τη διόδο ρευμάτων υψηλής συχνότητας, ενώ επιτρέπουν τη διόδο ρευμάτων χαμηλής συχνότητας. Πηνία που χρησιμοποιούνται για να παρεμποδίζουν τη διέλευση ρευμάτων των οποίων η συχνότητα είναι μεγαλύτερη από μια ορισμένη συχνότητα, ονομάζονται **αποπνικτικά** ή **στραγγαλιστικά** πηνία.

Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε πηνίο που να έχει μεγάλη αυτεπαγωγή, ώστε σε χαμηλή συχνότητα να παρουσιάζει φραγμό στη διέλευση εναλλασσόμενου ρεύματος. Θα πρέπει να είναι εφοδιασμένο με πυρήνα και να αποτελείται από μεγάλο αριθμό σπειρών.

16.3.1 Ισοδύναμο κύκλωμα ενός πραγματικού πηνίου.

Ένα πραγματικό πηνίο παρουσιάζει κατ' αρχήν ωμική αντίσταση R_L η οποία θεωρείται συνδεδεμένη σε σειρά με την αυτεπαγωγή του L , όπως φαίνεται στο σχήμα 16.3δ. Επί πλέον ένα πραγματικό πηνίο εμφανίζει μεταξύ των σπειρών του χωρητικές ιδιότητες, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια συνισταμένη χωρητικότητα C_K , που ονομάζεται κατανεμημένη χωρητικότητα. Έτσι προκύπτει το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 16.3δ.

Το κύκλωμα αυτό θα επιλύσομε σε επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου. Όμως, μπορούμε από τώρα να ορίσομε το λόγο:

$$Q = \frac{X_L}{R_L} = \frac{\omega L}{R_L} \quad (16.11)$$

ο οποίος καθορίζει την ποιότητα του πηνίου και ονομάζεται **συντελεστής ποιότητας**.

Όσο μεγαλύτερη τιμή έχει ο Q τόσο πιο τέλει είναι το πηνίο, γιατί έχει μικρότερες απώλειες.

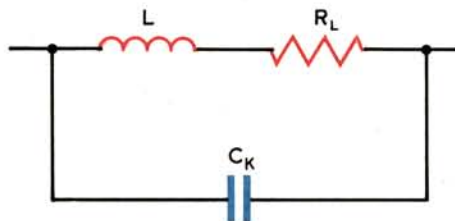
Γενικά, για να εμφανίζει ένα πηνίο καθαρά αυτεπαγωγικό χαρακτήρα πρέπει να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

$$R_L \ll \omega L \quad \text{και} \quad \frac{1}{\omega C_K} \gg \omega L$$

Ο συντελεστής ποιότητας παραμένει πρακτικά σταθερός συναρτήσει της συχνότητας και χαρακτηρίζει κάθε πηνίο. Αυτό συμβαίνει γιατί με την αύξηση της συχνότητας αυξάνει βέβαια το X_L αλλά αυξάνει και το R_L το οποίο παίρνει την ονομασία «ενεργός αντίσταση» (R_{EN}).

Με βάση το R_{EN} υπολογίζονται οι απώλειες του πηνίου σε θερμότητα, σκέδαση, δινορρεύματα, επιδερμικό φαινόμενο, υστέρηση, οι οποίες αυξάνουν με την αύξηση της συχνότητας και δίνονται από τη σχέση:

$$P = I^2 R_{EN}$$



Σχ. 16.3δ.

Ισοδύναμο κύκλωμα πραγματικού πηνίου.

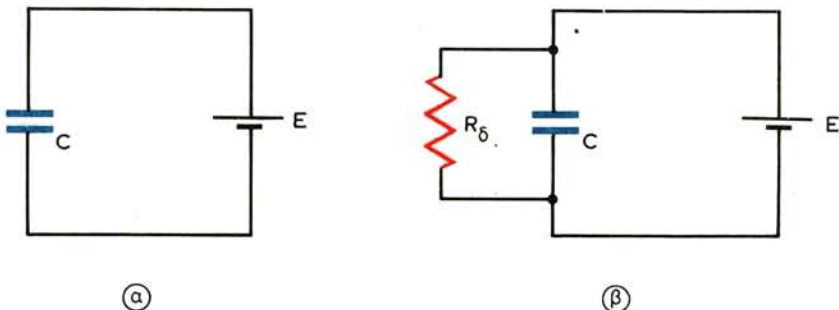
16.4 Κύκλωμα που συγκροτείται από ιδανικό πυκνωτή.

Αν στα άκρα ενός, αρχικά αφόρτιστου, πυκνωτή εφαρμόσουμε μια συνεχή τάση, τότε ο πυκνωτής θα φορτισθεί, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην παράγραφο 7.9 της Ηλεκτροτεχνίας του Α' τόμου, εκδόσεως Ιδρύματος Ευγενίδου. Όπως μάλιστα διαπιστώσαμε με τη βοήθεια της σχέσεως (7.75) και του σχήματος 7.9γ το ρεύμα φορτίσεως μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, και θεωρητικά μηδενίζεται σε άπειρο χρόνο από την έναρξη της φορτίσεως. Πρακτικά όμως παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής εξακολουθεί να διαρρέεται από ένα πολύ μικρό, αλλά σταθερής εντάσεως ρεύμα, συνεχώς μετά τη φόρτισή του. Το ρεύμα αυτό οφείλεται στις έστω και πολύ ασθενείς ιδιότητες αγωγιμότητας του διηλεκτρικού του πυκνωτή και ονομάζεται **ρεύμα διαρροής**. Αντίστοιχα, η ωμική αντίσταση διηλεκτρικού του πυκνωτή ονομάζεται **αντίσταση διαρροής** και σε ένα ισοδύναμο κύκλωμα, όπως αυτό του σχήματος 16.4α, θεωρείται συνδεδεμένη παράλληλα προς τη χωρητικότητα C του πυκνωτή.

Αν τώρα στα άκρα του ίδιου πυκνωτή εφαρμόσουμε εναλλασσόμενη τάση, θα παρατηρήσουμε ότι το διηλεκτρικό θερμαίνεται. Η θέρμανση αυτή οφείλεται σε ενέργεια που εκλύεται εντός του διηλεκτρικού εξαιτίας της παλινδρομικής κινήσεως των ηλεκτρονικών τροχιών. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται «ενέργεια απωλειών διηλεκτρικής υστερήσεως» και μπορεί να θεωρηθεί ως αποδιδόμενη σε ωμική αντίσταση R_{δ} συνδεδεμένη σε σειρά με τη χωρητικότητα, όπως φαίνεται στο ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 16.4β(β). Η αντίσταση R_{δ} ονομάζεται **αντίσταση απωλειών διηλεκτρικής υστερήσεως** και η τιμή της είναι συνάρτηση της συχνότητας της εναλλασσόμενης τάσεως η οποία εφαρμόζεται στον πυκνωτή.

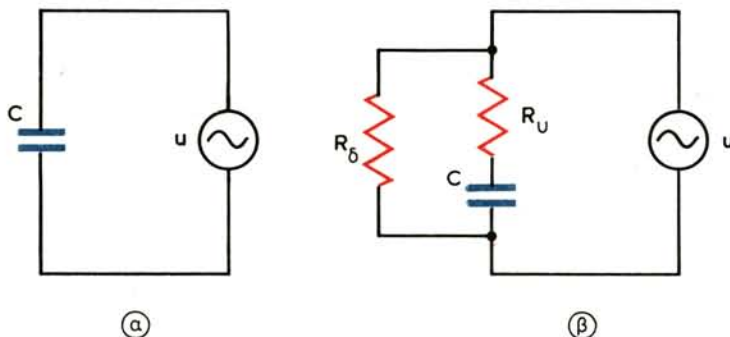
Θα εξετάσουμε, στη συνέχεια, τη συμπεριφορά σε εναλλασσόμενη τάση ενός **ιδανικού πυκνωτή**, δηλαδή ενός πυκνωτή ο οποίος έχει μηδενική αντίσταση διαρροής και μηδενική αντίσταση απωλειών διηλεκτρικής υστερήσεως. Υποθέτουμε λοιπόν ότι στα άκρα ενός ιδανικού πυκνωτή (σχ. 16.4γ) εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής:

$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.12)$$



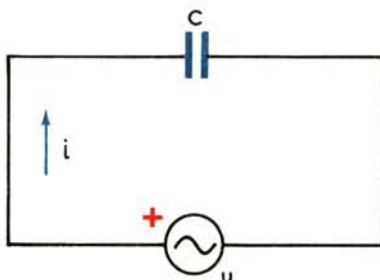
Σχ. 16.4α.

Εφαρμογή συνεχούς τάσεως στα άκρα πραγματικού πυκνωτή: α) Συγκροτούμενο κύκλωμα. β) Ισοδύναμο κύκλωμα (R_{δ} : Αντίσταση διαρροής).



Σχ. 16.46.

Εφαρμογή εναλλασσόμενης τάσεως στα άκρα πραγματικού πυκνωτή: α) Συγκροτούμενο κύκλωμα. β) Ισοδύναμο κύκλωμα (R_{δ} : Αντίσταση διαρροής, R_u : Αντίσταση απωλειών διηλεκτρικής υστερήσεως).



Σχ. 16.4γ.

Κύκλωμα που περιέχει ιδανικό πυκνωτή.

Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t είναι, σύμφωνα με τη σχέση (7.69):

$$q(t) = C \cdot u = C \cdot U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.13)$$

δηλαδή μεταβάλλεται και αυτό αρμονικά με το χρόνο.

Συνεπώς ο πυκνωτής θα φορτίζεται και θα εκφορτίζεται διαδοχικά, οπότε το κύκλωμα θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα η στιγμιαία τιμή του οποίου θα είναι:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\omega U_0 \sigma \nu \nu \omega t \rightarrow i = C\omega U_0 \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (16.14)$$

Από τις (16.13) και (16.14) προκύπτει ότι:

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα φορτίσεως ενός ιδανικού πυκνωτή, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, είναι ισόσυχνο εναλλασσόμενο μέγεθος που προηγείται της τάσεως κατά γωνία $\varphi = \pi/2$.



Σχ. 16.4δ.

Ανυσματική παράσταση της τάσεως και εντάσεως σε κύκλωμα που περιέχει μόνο ιδανικό πυκνωτή.

Το πλάτος του ρεύματος είναι:

$$I_0 = C \omega U_0 \quad (16.15)$$

και η ενεργός του τιμή:

$$I = C \omega U \quad (16.16)$$

Το σχήμα 16.4δ δίνει το διανυσματικό διάγραμμα των ενεργών τιμών της τάσεως και εντάσεως.

Στο σχήμα 16.4ε παριστάνεται η μεταβολή των u , i και q σε συνάρτηση με το χρόνο.

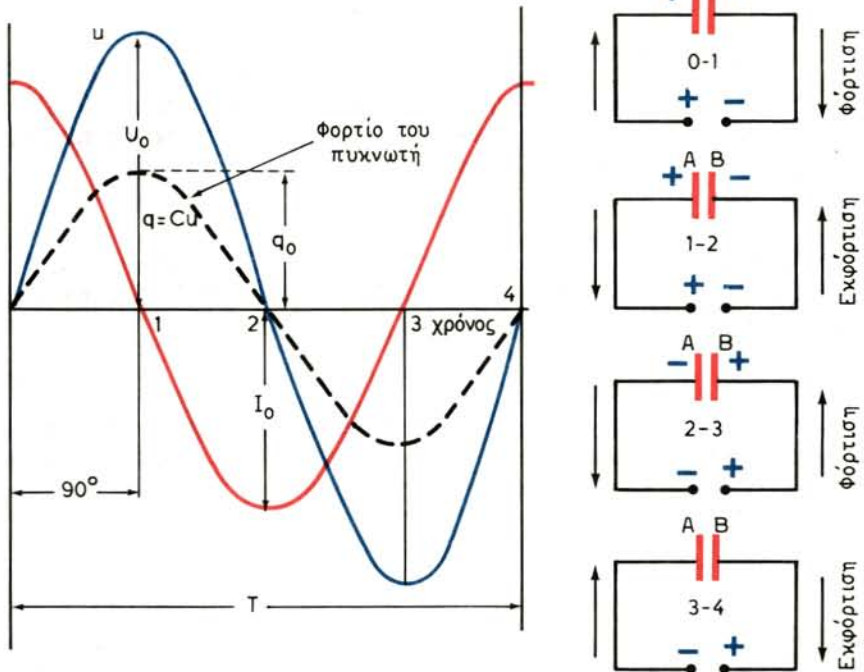
Η αντίσταση που προβάλλει ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο ρεύμα ονομάζεται **χωρητική αντίσταση** και ορίζεται από τη σχέση:

$$X_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I} \quad (16.17)$$

Από τις σχέσεις (16.15) και (16.17) προκύπτει:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (16.18)$$

Η σχέση (16.18) μας δείχνει ότι η χωρητική αντίσταση δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως. Σε υψηλές συχνότητες η χωρητική αντίσταση είναι μικρή, ενώ σε χαμηλές συχνότητες μεγάλη. Για το συνεχές ρεύμα ($\omega = 0$) η χωρητική αντίσταση είναι άπειρη. Τέλος θα πρέπει να τονίσουμε ότι η «διέλευση» εναλλασσόμενου ρεύματος από τον πυκνωτή οφείλεται σε διαδοχικές φορτίσεις και εκφορτίσεις του πυκνωτή (σχ. 16.4ε), δηλαδή στην παλινδρομική κίνηση που εκτελούν τα ηλεκτρόνια μέσα στους αγωγούς, που συνδέουν τους οπλισμούς του πυκνωτή και όχι στη διέλευση φορτίων μέσα από το διηλεκτρικό (μέσα στο διηλεκτρικό, όπως έχουμε εξηγήσει, έχουμε μόνο ρεύμα μετατοπίσεως).

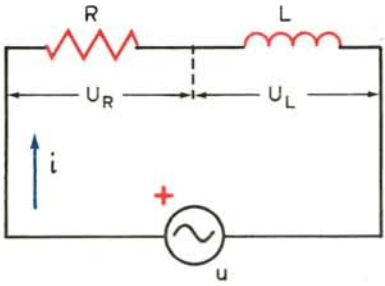


Σχ. 16.4ε.

Η εναλλασσόμενη τάση, ένταση και φορτίο στα άκρα ενός ιδανικού πυκνωτή. (Ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη - Η τάση και το φορτίο έχουν την ίδια φάση - Η ένταση προηγείται της τάσεως κατά γωνία $\phi = \pi/2$).

16.5 Κύκλωμα που συγκροτείται από πηνίο και ωμική αντίσταση σε σειρά.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά, σε εναλλασσόμενη διέγερση, ενός κυκλώματος με πηνίο αυτεπαγωγής L και αντίσταση R σε σειρά, όπως αυτό του σχήματος 16.5α. Το κύκλωμα αυτό αποτελεί επίσης το ισοδύναμο κύκλωμα ενός πραγματικού πηνίου του οποίου η ωμική αντίσταση (R) δεν είναι αμελητέα. Μάλιστα, η αντίσταση αυτή ονομάζεται **αντίσταση απωλειών** του πηνίου.



Σχ. 16.5α.
Κύκλωμα RL σειράς.

Αν στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόσουμε εναλλασσόμενη τάση της μορφής

$$u = U_0 \eta \mu \omega t$$

το ρεύμα i που διαρρέει το κύκλωμα προκαλεί στα άκρα του αντιστάτη R μια πτώση τάσεως u_R (ενεργός τιμή U_R) και στα άκρα του πηνίου μια πτώση τάσεως u_L (ενεργός τιμή U_L). Σε κάθε χρονική στιγμή η τάση u (ενεργός τιμή U) που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος είναι:

$$u = u_R + u_L \quad (16.19)$$

Αλλά, σύμφωνα με τις σχέσεις που αναπτύξαμε στην παράγραφο 16.2, η πτώση τάσεως στα άκρα της ωμικής αντιστάσεως εξαρτάται από την ένταση του ρεύματος που τη διαρρέει, σύμφωνα με τη σχέση:

$$u_R = \sqrt{2} I R \eta \mu \omega t \quad (16.20)$$

Ενώ, αντίστοιχα, σύμφωνα με τις σχέσεις που αναπτύξαμε στην παράγραφο 16.3, η πτώση τάσεως στα άκρα του πηνίου εξαρτάται από την ένταση του ρεύματος που το διαρρέει, σύμφωνα με τη σχέση:

$$u_L = \sqrt{2} I X_L \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (16.21)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (16.19), (16.20) και (16.21) διαπιστώνουμε ότι η τάση u στα άκρα του καταναλωτή είναι άθροισμα δύο ισοσύχνων εναλλασσομένων τάσεων. Συνεπώς, στηριζόμενοι σε όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 15.7.1 σχετικά με την πρόσθεση εναλλασσομένων μεγεθών, συμπεραίνουμε ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα της τάσεως u προκύπτει ως άθροισμα των δύο ισοσύχνων περιστρεφομένων ανυσμάτων των τάσεων:

- u_R , με ενεργό τιμή $U_R = I \cdot R$ που έχει την ίδια φάση με τη φάση της εντάσεως.
- u_L , με ενεργό τιμή $U_L = I \cdot X_L$ το οποίο προηγείται του ανύσματος της εντάσεως κατά γωνία ίση με $\pi/2$.

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (σχ. 16.58).

Από το διάγραμμα του σχήματος 16.58 προκύπτει για την ενεργό τιμή U της τάσεως u :

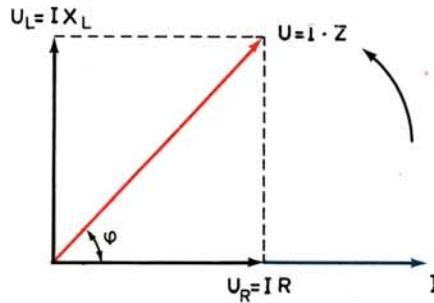
$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = I^2 R^2 + I^2 X_L^2 \rightarrow U = I \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (16.22)$$

Η **φαινόμενη αντίσταση** ή **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** Z παρέχεται από τη σχέση (16.1), δηλαδή:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I} \quad (16.23)$$

Από τις σχέσεις (16.22) και (16.23) προκύπτει:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (16.24)$$



Σχ. 16.56.

Πολικό διάγραμμα για κύκλωμα RL σειράς.

Από το ίδιο διάγραμμα (16.56) προκύπτει ότι η τάση U προηγείται του ρεύματος I κατά γωνία φ που δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{IX_L}{IR} \rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad (16.25)$$

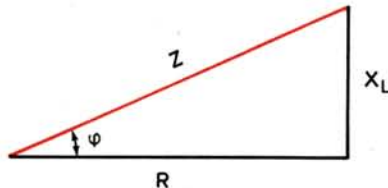
$$\rightarrow \varphi = \text{τοξ} \varepsilon\varphi \frac{X_L}{R} \quad (16.26)$$

Τέλος, ο **συντελεστής ισχύος** του κυκλώματος είναι:

$$\text{συν } \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{IR}{IZ} \rightarrow \text{συν } \varphi = \frac{R}{Z} \quad (16.27)$$

Από τη σχέση (16.24) προκύπτει ότι μπορούμε να παραστήσουμε τη σύνθετη αντίσταση Z ως υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές την ωμική αντίσταση R και την επαγωγική αντίσταση $X_L = \omega L$ (σχ. 16.5γ).

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η γωνία φ του σχήματος 16.5γ παριστάνει τη διαφορά φάσεως, τάσεως και εντάσεως.



Σχ. 16.5γ.

Η σύνθετη αντίσταση Z , ως συνισταμένη της ωμικής αντίστασεως R και της επαγωγικής αντίστασεως X_L σε κύκλωμα RL σειράς.

Παράδειγμα 16.5.1.

Πηγίο ωμικής αντιστάσεως R και αυτεπαγωγής L τροφοδοτείται: α) Με συνεχή τάση. β) Με εναλλασσόμενη τάση συχνότητας 50 Hz (σχ. 16.5δ). Οι ενδείξεις των θερμικών οργάνων (βολτομέτρου, αμπερομέτρου) στην πρώτη περίπτωση είναι 100 V και $12,5\text{ A}$ και στη δεύτερη περίπτωση είναι 40 V και 4 A . Να προσδιοριστούν τα στοιχεία R και L του πηνίου.

Στην περίπτωση (α) το βολτόμετρο δείχνει τη συνεχή τάση, που εφαρμόζεται στα άκρα του συστήματος και το αμπερόμετρο την ένταση του συνεχούς ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

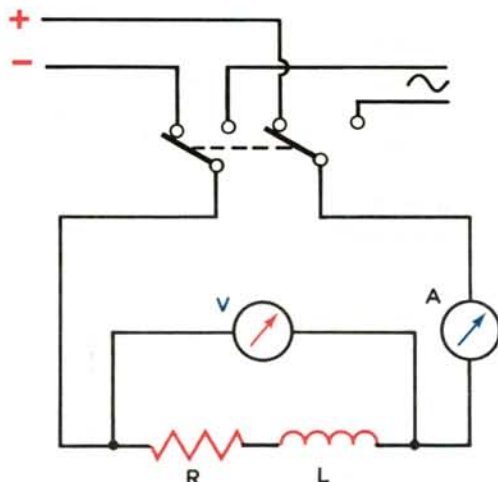
Η ωμική αντίσταση R του πηνίου θα είναι:

$$R = \frac{U_{\Sigma\text{YN}}}{I_{\Sigma\text{YN}}} = \frac{100}{12,5} = 8\ \Omega$$

Στην περίπτωση (β) το βολτόμετρο δείχνει την ενεργό τάση και το αμπερόμετρο την ενεργό αντίσταση του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Θα έχουμε από τη σχέση (16.24):

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \rightarrow \frac{40}{4} = \sqrt{8^2 + X_L^2} \rightarrow X_L = 6\ \Omega$$

$$\text{Είναι} \quad X_L = 2\pi fL \rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{6}{314}\text{ H} \rightarrow L = 19,1\text{ mH}$$



Σχ. 16.5δ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.5.1.

Παράδειγμα 16.5.2.

Δύο πηνία με αυτεπαγωγές $L_1 = 1 \text{ mH}$ και $L_2 = 3 \text{ mH}$ συνδέονται σε σειρά. Τα μαγνητικά πεδία των πηνίων είναι ομόρροπα και ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι $M = 1 \text{ mH}$. Η αντίσταση απωλειών των πηνίων είναι $R = 8 \Omega$. Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής $U = 100 \text{ V}$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Ζητούνται: α) Η τάση U_L . β) Η διαφορά φάσεως μεταξύ των τάσεων U και U_L (σχ. 16.5ε).

Η ισοδύναμη αυτεπαγωγή L των πηνίων είναι (σχέση 14.71):

$$L = L_1 + L_2 + 2M = 1 + 3 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ mH}$$

Άρα

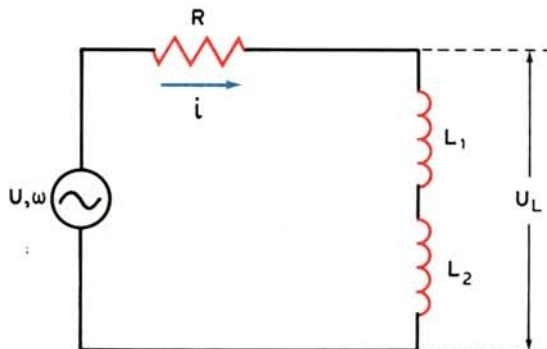
$$X_L = \omega L = 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 6 \Omega$$

και

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 10 \Omega$$

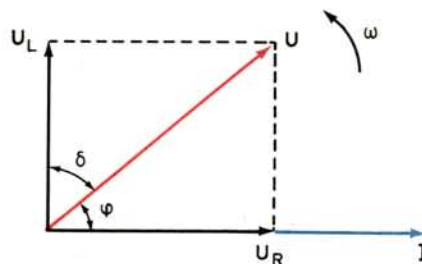
οπότε
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A} \quad \text{και} \quad U_L = IX_L = 10 \cdot 6 = 60 \text{ V}$$

Στο σχήμα 16.5στ έχει σχεδιαστεί το πολικό διάγραμμα.



Σχ. 16.5ε.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.5.2.



Σχ. 16.5στ.

Πολικό διάγραμμα τάσεων του κυκλώματος του σχήματος 16.5ε.

Παρατηρούμε ότι η U_L προηγείται της U κατά γωνία:

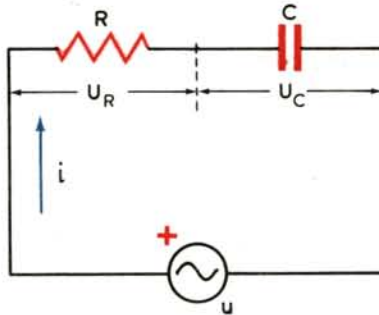
$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Είναι
$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{6}{8} = \frac{3}{7} \rightarrow \varphi = 36,9^\circ$$

Άρα
$$\delta = 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ$$

16.6 Κύκλωμα που συγκροτείται από πυκνωτή και ωμική αντίσταση σε σειρά.

Θα μελετήσουμε, στη συνέχεια, τη συμπεριφορά σε εναλλασσόμενη διέγερση, ενός κυκλώματος με ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας C και αντιστάτη R σε σειρά, όπως αυτό του σχήματος 16.6α. Η μελέτη θα γίνει με συλλογισμούς ανάλογους με εκείνους που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο 16.5 κατά τη μελέτη του κυκλώματος RL σειράς.



Σχ. 16.6α.
Κύκλωμα RC σειράς.

Αν στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόσουμε εναλλασσόμενη τάση της μορφής:

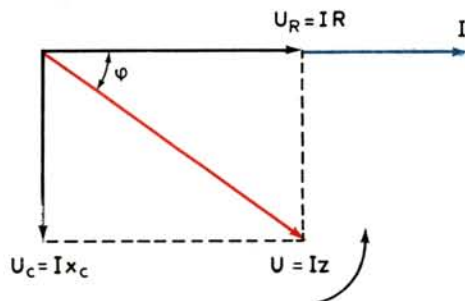
$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.28)$$

το ρεύμα i που διαρρέει το κύκλωμα προκαλεί στα άκρα του αντιστάτη R μια πτώση τάσεως u_R (ενεργός τιμή U_R) και στα άκρα του πυκνωτή μια πτώση τάσεως u_C (ενεργός τιμή U_C). Σε κάθε χρονική στιγμή η τάση u που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος είναι:

$$u = u_R + u_C \quad (16.29)$$

Το περιστρεφόμενο άνυσμα της τάσεως u προκύπτει ως άθροισμα των δύο ισοσύχων περιστρεφομένων ανυσμάτων:

- Της τάσεως U_R , με ενεργό τιμή $U_R = IR$, που έχει την ίδια φάση, τη φάση της εντάσεως.
- Της τάσεως u_C , με ενεργό τιμή $U_C = IX_C$, η οποία έπεται του ανύσματος της εντάσεως κατά γωνία ίση με $\pi/2$.



Σχ. 16.66.

Πολικό διάγραμμα για κύκλωμα RC σειράς.

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (σχ. 16.66).

Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει για την ενεργό τιμή U της τάσεως u :

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2 R^2 + I^2 X_C^2 \rightarrow U = I \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (16.30)$$

Η **φαινόμενη αντίσταση** ή **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** παρέχεται από τη σχέση (16.1), δηλαδή:

$$Z = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U}{I} \quad (16.31)$$

Από τις (16.30) και (16.31) προκύπτει:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (16.32)$$

Από το ίδιο διάγραμμα (16.66) προκύπτει ότι η τάση έπεται της εντάσεως κατά γωνία φ που παρέχεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{IX_C}{IR} \rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR} \quad (16.33)$$

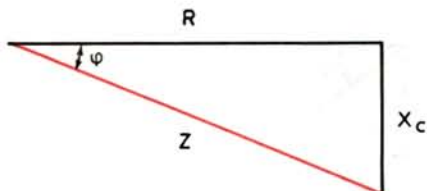
και

$$\varphi = \text{τοξ}\varepsilon\varphi \frac{X_C}{R} \quad (16.34)$$

Είναι επίσης

$$\text{συν}\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{IR}{IZ} \rightarrow \text{συν}\varphi = \frac{R}{Z} \quad (16.35)$$

Από τη σχέση (16.32) προκύπτει ότι μπορούμε να παραστήσουμε τη σύνθετη



Σχ. 16.6γ.

Η σύνθετη αντίσταση Z , ως συνισταμένη της ωμικής αντιστάσεως R και της χωρητικής αντιστάσεως X_C σε κύκλωμα RC σειράς.

αντίσταση Z ως υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές την ωμική αντίσταση R και τη χωρητική αντίσταση $X_C = 1/\omega C$ (σχ. 16.6γ).

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η γωνία φ του σχήματος 16.6γ παριστάνει τη διαφορά φάσεως, τάσεως και εντάσεως.

Παράδειγμα 16.6.1.

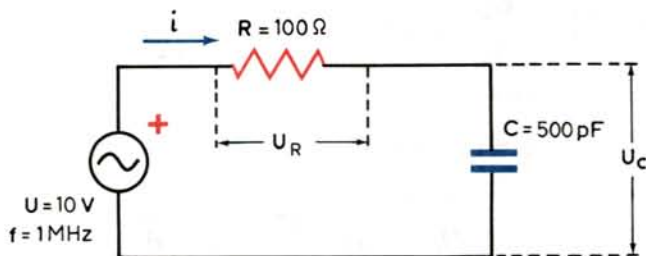
Ένα κύκλωμα αποτελείται από αντιστάτη $R = 100 \Omega$ και πυκνωτή χωρητικότητας $C = 500 \text{ pF}$ σε σειρά (σχ. 16.6δ). Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής $U = 10 \text{ V}$ και συχνότητας $f = 1 \text{ MHz}$. Να υπολογισθούν:

- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.
- Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα (ενεργός τιμή).
- Η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως.
- Οι τάσεις U_R και U_C .

$$a) \quad X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-12}} = 318 \Omega$$

$$\text{Άρα} \quad Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{100^2 + 318^2} = 334 \Omega$$

$$b) \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{334} = 0,03 \text{ A} = 30 \text{ mA}$$



Σχ. 16.6δ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.6.1.

$$\gamma) \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{X_C}{R} = \frac{318}{100} = 3,18 \rightarrow \phi = 72,5^\circ$$

$$\delta) \quad U_R = IR = 0,03 \cdot 100 = 3 \text{ V} \quad \text{και} \\ U_C = IX_C = 0,03 \cdot 318 = 9,54 \text{ V}$$

Παράδειγμα 16.6.2.

Στα άκρα κυκλώματος RC σε σειρά εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $u = 250 \eta\mu(300t + \frac{\pi}{6})$. Η στιγμιαία τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι $i = 5 \eta\mu(300t + \frac{\pi}{2})$. Να υπολογισθούν τα στοιχεία R και C του κυκλώματος.

Από τις συναρτήσεις $u = u(t)$ και $i = i(t)$ προκύπτουν:

$$U_o = 250 \text{ V}, \quad I_o = 5 \text{ A}, \quad \omega = 300 \text{ rad/s}$$

$$\text{και} \quad \phi = \left(300t + \frac{\pi}{2} \right) - \left(300t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Είναι} \quad Z = \frac{U_o}{I_o} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \rightarrow R^2 + X_C^2 = 2500 \quad (1)$$

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{X_C}{R} \rightarrow \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} = \frac{X_C}{R} = \sqrt{3} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$R^2 + 3R^2 = 2500 \rightarrow 4R^2 = 2500 \rightarrow R = 25 \Omega$$

Από τη (2) προκύπτει:

$$X_C = R\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

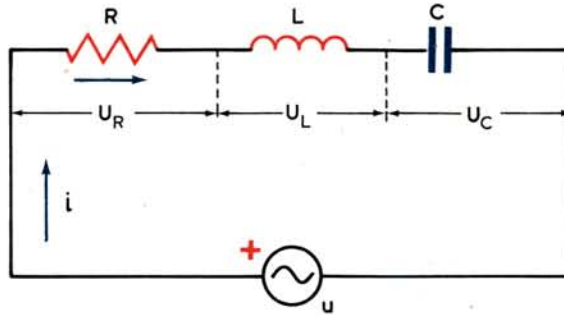
$$\text{Είναι} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{300 \cdot C}$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{1}{300 \cdot C} = 25\sqrt{3} \rightarrow C = \frac{1}{300 \cdot 25\sqrt{3}} \text{ F} \rightarrow C = 77 \mu\text{F}$$

16.7 Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική, επαγωγική και χωρητική αντίσταση σε σειρά.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά, σε εναλλασσόμενη διέγερση, ενός σύνθετου κυκλώματος με αντιστάτη R , πηνίο αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C σε σειρά, όπως αυτό του σχήματος 16.7α.

Ο αντιστάτης R μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί την αντίσταση απωλειών



Σχ. 16.7α.

Κύκλωμα RLC σειράς.

του πηνίου. Η τάση $u = U_o$ ημωτ που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος είναι:

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (16.36)$$

Με σκέψεις ανάλογες εκείνων που αναπτύξαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους καταλήγουμε ότι το περιστρεφόμενο άνωμα της τάσεως u προκύπτει ως άθροισμα των τριών ισοσύχνων περιστρεφόμενων ανυσμάτων των τάσεων:

- u_R , με ενεργό τιμή $U_R = I R$, που έχει την ίδια φάση με τη φάση της εντάσεως του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- u_L , με ενεργό τιμή $U_L = I X_L$, η οποία προηγείται της εντάσεως κατά γωνία ίση με $\pi/2$.
- u_C , με ενεργό τιμή $U_C = I X_C$, η οποία έπεται της εντάσεως κατά γωνία ίση με $\pi/2$.

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων (σχ. 16.7β).

Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει για την ενεργό τιμή της τάσεως U :

$$\begin{aligned} U^2 &= U_R^2 + (U_L - U_C)^2 = I^2 R^2 + (I X_L - I X_C)^2 = \\ &= I^2 [R^2 + (X_L - X_C)^2] \rightarrow U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned} \quad (16.37)$$

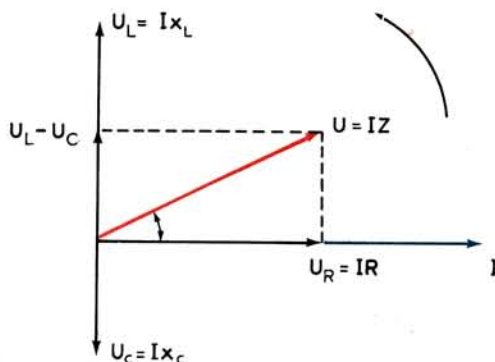
Η **φαινόμενη αντίσταση** ή **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** παρέχεται από τη σχέση (16.1), δηλαδή:

$$Z = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U}{I} \quad (16.38)$$

Από τις (16.37) και (16.38) προκύπτει:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (16.39)$$

Η διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως και εντάσεως δίδεται από τη σχέση:



Σχ. 16.76.
Πολικό κύκλωμα RLC σειράς.

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} \rightarrow \varepsilon\phi\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (16.40)$$

και

$$\phi = \text{τοξ } \varepsilon\phi\phi \frac{X_L - X_C}{R} \quad (16.41)$$

Ο **συντελεστής ισχύος** του κυκλώματος είναι:

$$\text{συν}\phi = \frac{U_R}{U} = \frac{IR}{IZ} \rightarrow \text{συν}\phi = \frac{R}{Z} \quad (16.42)$$

Από τη σχέση (16.40) προκύπτουν τα εξής:

α) Όταν $X_L > X_C \rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 > \frac{1}{LC} \rightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ τότε $\varepsilon\phi\phi > 0 \rightarrow$

$\phi > 0$ που σημαίνει ότι η τάση προηγείται της εντάσεως του ρεύματος (όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 16.76). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά**.

β) Όταν $X_L < X_C \rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ τότε $\varepsilon\phi\phi < 0 \rightarrow \phi < 0$

που σημαίνει ότι η ένταση του ρεύματος προηγείται της τάσεως. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά**.

Επειδή $X_L < X_C$ θα είναι και $IX_L < IX_C \rightarrow U_L < U_C$ οπότε η συνισταμένη τάση U θα βρίσκεται κάτω από τον άξονα της εντάσεως I , που σημαίνει ακριβώς ότι το ρεύμα προηγείται της τάσεως.

γ) Όταν $X_L = X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ τότε $\varepsilon\phi\phi = 0 \rightarrow \phi = 0$.

Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα παρουσιάζει **ωμική συμπεριφορά**. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ιδιαίτερα στην επόμενη παράγραφο.

Παράδειγμα 16.7.1.

Κύκλωμα αποτελείται από αντιστάτη $R=100 \Omega$, πηνίο αυτεπαγωγής $L=0,2 \text{ H}$ και πυκνωτή χωρητικότητας $C = 20 \mu\text{F}$ σε σειρά. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $u = 220 \sqrt{2} \eta\mu 314 t$ (σχ. 16.7γ).
Να βρεθούν:

- Το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα.
- Οι τάσεις U_R , U_L και U_C .
- Η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως.
- Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος.
- Να σχεδιασθεί το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και να διατυπωθούν οι συναρτήσεις που παρέχουν τις στιγμιαίες τιμές i , u_R , u_L και u_C .

$$\text{α) Είναι } U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{220 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V} \quad \text{και} \quad \omega = 314 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Άρα } X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159 \Omega \quad \text{και} \quad X_L = \omega L = 314 \cdot 0,2 = 62,8 \Omega$$

$$\text{οπότε } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{100^2 + 96,2^2} \rightarrow Z = 138,8 \Omega$$

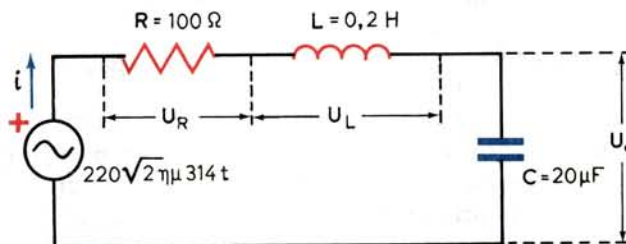
$$\text{και} \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{138,8} = 1,59 \text{ A}$$

$$\text{β) } U_R = IR = 1,59 \cdot 100 = 159 \text{ V}$$

$$U_L = IX_L = 1,59 \cdot 62,8 = 100 \text{ V}$$

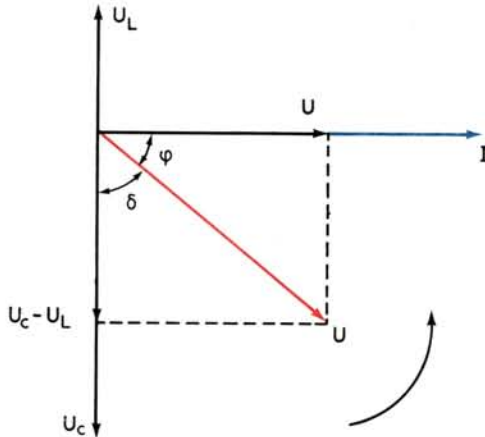
$$\text{και} \quad U_C = IX_C = 1,59 \cdot 159 = 253 \text{ V}$$

$$\text{γ) } \epsilon\phi\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-96,2}{100} = -0,962 \rightarrow \phi = -43,54^\circ$$



Σχ. 16.7γ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.7.1.

**Σχ. 16.7δ.**

Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων του κυκλώματος του σχήματος 16.7γ.

Το αρνητικό πρόσημο της γωνίας σημαίνει ότι το ρεύμα προηγείται της τάσεως, δηλαδή το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά.

$$\delta) \quad \text{συν}\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{100}{138,8} = 0,720$$

ε) Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων φαίνεται στο σχήμα 16.7δ.

Οι στιγμιαίες τιμές σύμφωνα και με το παραπάνω διάγραμμα παρέχονται από τις σχέσεις:

$$i = I_0 \eta\mu(\omega t + \varphi) = 1,59 \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 43,54^\circ)$$

$$u_R = U_R \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + \varphi) = 159 \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 43,54^\circ)$$

$$u_C = U_C \sqrt{2} \eta\mu(\omega t - \delta) = 253 \sqrt{2} \eta\mu(\omega t - 46,46^\circ)$$

$$u_L = U_L \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 90^\circ + \varphi) = 100 \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 133,54^\circ)$$

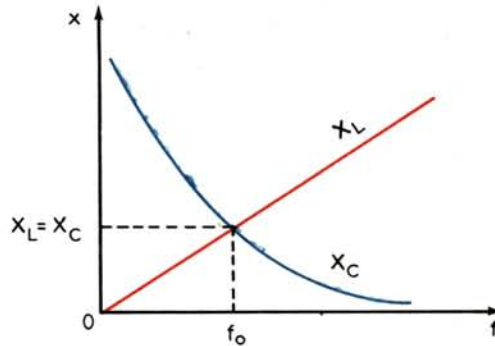
16.7.1 Συντονισμός σειράς.

Θα μελετήσουμε τώρα και πάλι το κύκλωμα R, L, C σειράς της προηγούμενης παραγράφου 16.7 (σχ. 16.7α). Θα υποθέσουμε όμως ότι η πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος έχει μεν σταθερή τάση, αλλά υπάρχει η δυνατότητα να μεταβάλλουμε τη συχνότητα της f ή την κυκλική συχνότητα ω του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Με τη μεταβολή της συχνότητας της πηγής, μεταβάλλεται τόσο η επαγωγική αντίσταση του πηνίου:

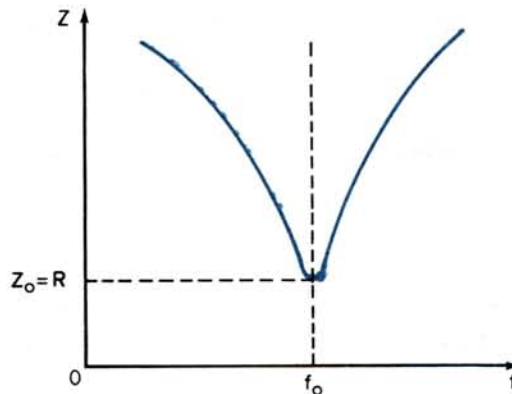
$$X_L = \omega L = 2\pi fL \quad (16.43)$$

όσο και η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή:



Σχ. 16.7ε.

Μεταβολή της επαγωγικής αντιστάσεως (X_L) και της χωρητικής αντιστάσεως (X_C) με τη συχνότητα.



Σχ. 16.7στ.

Μεταβολή της σύνθετης αντιστάσεως κυκλώματος RLC σειράς με τη συχνότητα.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (16.44)$$

Καθώς η συχνότητα αυξάνει η X_L αυξάνει γραμμικά ενώ η X_C μειώνεται παραβολικά (σχ. 16.7ε).

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος RLC σειράς εξαρτάται επίσης από τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος, όπως εύκολα προκύπτει από τις σχέσεις (16.39), (16.43) και (16.44). Στο σχήμα 16.7στ αποδίδεται παραστατικά η εξάρτηση αυτή. Όπως φαίνεται και από το σχήμα η τιμή της σύνθετης αντιστάσεως στις χαμηλές συχνότητες είναι μεγάλη και εξαρτάται περισσότερο από τη X_C . Γι' αυτό και το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά οπότε το ρεύμα προηγείται της τάσεως. Στις υψηλές συχνότητες η σύνθετη αντίσταση παίρνει πάλι μεγάλες τιμές και επειδή εξαρτάται περισσότερο από τη X_L , το

κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά οπότε το ρεύμα έπεται της τάσεως.

Σε μια ενδιάμεση χαρακτηριστική συχνότητα f_0 η σύνθετη αντίσταση γίνεται ελάχιστη και ίση με $Z_0 = R$ οπότε το κύκλωμα παρουσιάζει ωμική συμπεριφορά.

Αυτό συμβαίνει όταν οι δύο αντιστάσεις X_L και X_C γίνουν μεταξύ τους ίσες, όπως απλά προκύπτει από τη σχέση (16.39). Στην περίπτωση αυτή λοιπόν ισχύει:

$$X_L = X_C \rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(16.45) ή

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

(16.46)

Η ω_0 ονομάζεται **κυκλική ιδιοσυχνότητα** και η f_0 **ιδιοσυχνότητα** του κυκλώματος ή **συχνότητα συντονισμού**.

Οι εξισώσεις (16.45) και (16.46) ονομάζονται εξισώσεις του **Thomson**.

Στη συχνότητα συντονισμού συμβαίνουν ορισμένα χαρακτηριστικά φαινόμενα και συγκεκριμένα:

α) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος γίνεται **ελάχιστη** και ίση με R :

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \quad (16.47)$$

γιατί $X_L = X_C$

β) Το κύκλωμα παρουσιάζει καθαρά ωμική συμπεριφορά και η τάση είναι συμφασική με το ρεύμα αφού:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0}{R} = 0 \rightarrow \phi = 0$$

γ) Αφού η σύνθετη αντίσταση γίνεται ελάχιστη η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα γίνεται **μέγιστη** αποκτώντας ενεργό τιμή ίση με:

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (16.48)$$

δ) Η ενεργός τάση $U_L = I_0 X_L$ και $U_C = I_0 X_C$ γίνονται ίσες ενώ τα αντίστοιχα ανύσματα των στιγμιαίων τιμών είναι αντίθετα. Έτσι, η τάση U που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος γίνεται ίση με την τάση στα άκρα της ωμικής αντιστάσεως:

$U = U_R$

(16.49)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι για μια ορισμένη τιμή f_0 της συχνότητας της εναλλασσόμενης τάσεως, η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος περιορίζεται στην ωμική του αντίσταση και το ρεύμα γίνεται μέγιστο και βρίσκεται σε φάση με την τάση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο κύκλωμα είναι **συντονισμένο ή ότι βρίσκεται σε συντονισμό με την πηγή τροφοδοτήσεως**.

Επειδή το ρεύμα γίνεται μέγιστο οι τάσεις στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές (υπερτάσεις).

Το πηλίκο της ενεργούς τιμής της τάσεως U_L (ή U_C) προς την ενεργό τιμή της τάσεως U , σε κατάσταση συντονισμού, ονομάζεται συντελεστής υπερτάσεως:

$$\text{Συντελεστής υπερτάσεως} = \frac{U_L}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Αλλά το πηλίκο $\frac{\omega_0 L}{R}$ ισούται προς το συντελεστή ποιότητας σε κατάσταση συντονισμού ενός πραγματικού πηνίου, που ορίσαμε με τη σχέση (16.11). Άρα η **κατάσταση συντονισμού** ισχύει για το **συντελεστή ποιότητας**:

$$Q = \frac{\text{Επαγωγική αντίσταση πηνίου κατά το συντονισμό}}{\text{ωμική αντίσταση απωλειών πηνίου}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{U_L}{U} \quad (16.50)$$

Ας επενθυμίσουμε ότι στην παράγραφο 16.3.1 είχαμε τονίσει ότι ο συντελεστής ποιότητας Q , που γενικότερα ορίζεται από τη σχέση (16.11), δηλαδή:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi f L}{R} \quad (16.51)$$

παραμένει πρακτικά σταθερός μέσα σε μεγάλη περιοχή συχνοτήτων, γύρω από τη συχνότητα συντονισμών.

Ο συντελεστής ποιότητας Q είναι καθαρός αριθμός και στην πράξη παίρνει συνήθως τιμές μεταξύ 10 και 300. Από την (16.50) προκύπτουν οι σχέσεις που ισχύουν σε κατάσταση συντονισμού:

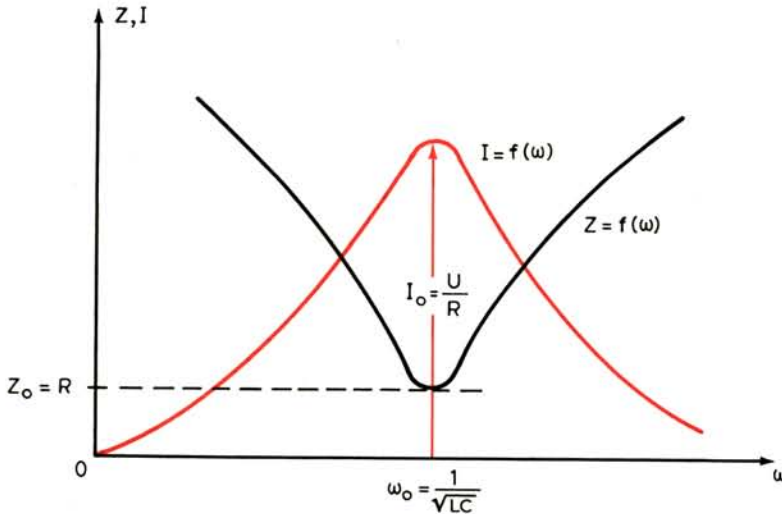
$$U_L = U_C = QU \quad (16.52)$$

$$Q = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{L}{\sqrt{L}\sqrt{C}} \rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} \quad (16.53)$$

16.7.2 Καμπύλες συντονισμού - Ζώνη διελεύσεως.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή των καμπυλών $Z = f(\omega)$ και $I = f(\omega)$ στο κύκλωμα RLC σειράς που μελετάμε στην παράγραφο αυτή. Οι γραφικές αυτές απεικονίσεις γίνονται με τη βοήθεια της σχέσεως (16.39) για τη σύνθετη αντίσταση, δηλαδή:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (16.54)$$



Σχ. 16.7ζ.

Καμπύλες συντονισμού κυκλώματος RLC σειράς.

και της σχέσεως (16.38) για την ενεργό τιμή της εντάσεως, δηλαδή:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (16.55)$$

με την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία U , R , L και C παραμένουν σταθερά, ενώ μεταβάλλεται μόνον η κυκλική συχνότητα ω . Προκειμένου να κάνουμε τη χάραξη αυτή παρατηρούμε ότι:

Για $\omega \rightarrow 0$ έχουμε $Z \rightarrow \infty$ και $I \rightarrow 0$

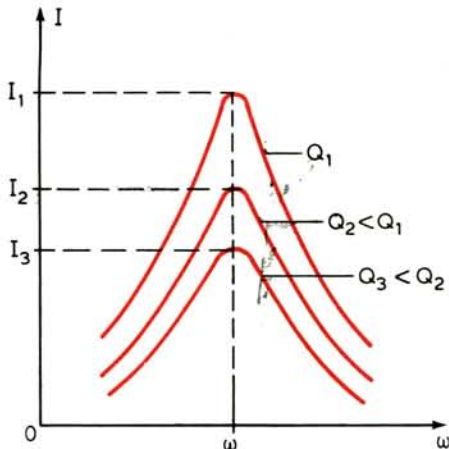
Για $\omega = \omega_0$ έχουμε $Z_0 = R$ και $I_0 = \frac{U}{R}$

Για $\omega \rightarrow \infty$ έχουμε $Z \rightarrow \infty$ και $I \rightarrow 0$

Στο σχήμα 16.7ζ έχουν κατασκευασθεί οι $Z = f(\omega)$ και $I = f(\omega)$ που ονομάζονται **καμπύλες συντονισμού**.

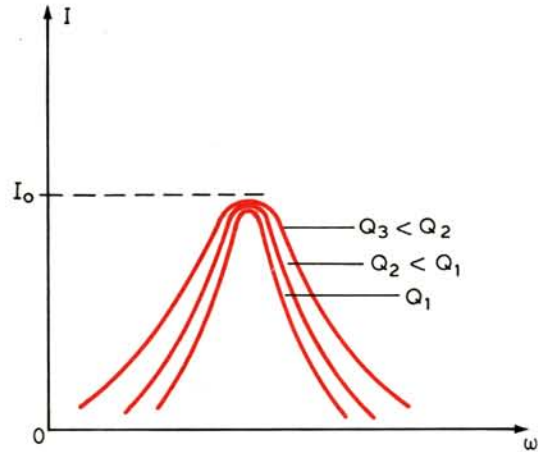
Στο σχήμα 16.7η έχουμε κατασκευάσει μια δέσμη από καμπύλες συντονισμού με παράμετρο το συντελεστή ποιότητας Q κρατώντας το λόγο L/C σταθερό. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η τιμή της ωμικής αντιστάσεως R και επομένως μεγαλώνει το Q , τόσο αυξάνει το ρεύμα I ενώ οι καμπύλες συντονισμού γίνονται πιο οξείες και πιο στενές.

Στο σχήμα 16.7θ έχουμε κατασκευάσει μια ακόμη δέσμη από καμπύλες συντονισμού και πάλι με παράμετρο το συντελεστή ποιότητας Q , αλλά κρατώντας, τη φορά αυτή, την τιμή της αντιστάσεως R σταθερά, ενώ μεταβάλλουμε το λόγο L/C .



Σχ. 16.7η.

Καμπύλες συντονισμού σε κύκλωμα RLC σειράς με παράμετρο το συντελεστή ποιότητας Q , ενώ ο λόγος L/C κρατείται σταθερός:



Σχ. 16.7θ.

Καμπύλες συντονισμού σε κύκλωμα RLC σειράς με παράμετρο το συντελεστή ποιότητας Q , ενώ η τιμή της αντίστασης R παραμένει σταθερή.

Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες συντονισμού γίνονται επίσης πιο οξείες και στενές όσο αυξάνει ο λόγος L/C και ο συντελεστής ποιότητας Q . Άρα:

Η μορφή της καμπύλης συντονισμού εξαρτάται αποκλειστικά από το συντελεστή ποιότητας.

Ιδιαίτερη σημασία στην πράξη έχει το πόσο στενή είναι η καμπύλη συντονισμού στην περιοχή κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Ένα μέτρο του εύρους της καμπύλης συντονισμού αποτελεί το μέγεθος **ζώνη διελύσεως** ή **ζώνη συντονισμού** Δf , του κυκλώματος που ορίζεται ως η ζώνη συχνοτήτων που τοποθετείται συμμετρικά, περί τη συχνότητα συντονισμού f_0 μέχρις ότου η ενεργός τιμή της εντάσεως του ρεύματος μειωθεί στο $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης της τιμής (I_0). Έτσι, η ζώνη συντονισμού στην καμπύλη του σχήματος 16.7ι είναι:

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad (16.56)$$

Οι συχνότητες f_1 και f_2 ορίζονται από τα δύο σημεία της καμπύλης στα οποία το ρεύμα I έχει τιμή ίση προς:

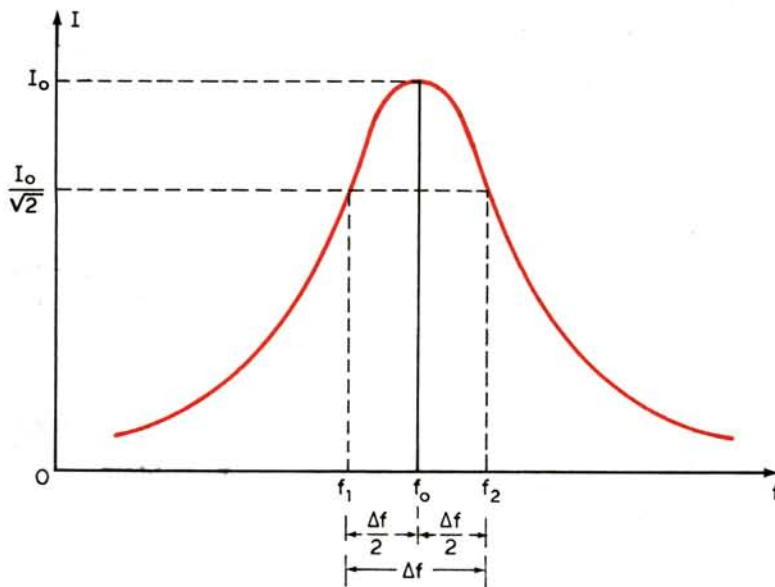
$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0$$

Αποδεικνύεται απλά ότι οι συχνότητες f_1 και f_2 προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$f_2 = f_0 + \frac{f_0}{2Q} \quad (16.57) \quad \text{και} \quad f_1 = f_0 - \frac{f_0}{2Q} \quad (16.58)$$

Άρα

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} \quad (16.59)$$



Σχ. 16.71.

Καθορισμός της ζώνης συντονισμού Δf σε καμπύλη συντονισμού.

Από τις σχέσεις (16.50) και (16.59) προκύπτει:

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L}$$

(16.60)

16.7.3 Επιλογή συχνότητας.

Σύμφωνα με όσα μέχρι τώρα έχουμε αναπτύξει γνωρίζουμε ότι το ρεύμα του κυκλώματος RLC σειράς γίνεται μέγιστο (I_0) για συχνότητα f ίση προς τη συχνότητα συντονισμού f_0 . Επιπλέον, από το σχήμα 16.71 παρατηρούμε ότι για περιοχή συχνοτήτων πολύ κοντά στη συχνότητα f_0 το ρεύμα εξακολουθεί και έχει αρκετά αυξημένες τιμές, ενώ σε συχνότητες που απέχουν περισσότερο της f_0 μειώνονται σημαντικά. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο εξής πρακτικό συμπέρασμα σχετικά με τα κυκλώματα RLC σειράς:

Αν τροφοδοτήσουμε το κύκλωμα με ένα πλήθος εναλλασσομένων τάσεων διαφορετικών συχνοτήτων στο κύκλωμα αναπτύσσονται εναλλασσόμενες εντάσεις αντιστοιχών συχνοτήτων. Από αυτές μια είναι μέγιστη, εκείνη με συχνότητα f_0 , τη συχνότητα συντονισμού. Την ικανότητα αυτή των κυκλωμάτων ονομάζουμε **επιλογή**.

Ας δούμε μια περίπτωση εφαρμογής της ικανότητας επιλογής των κυκλωμάτων RLC σειράς:

Στις τηλεπικοινωνίες, από το πλήθος συχνοτήτων που διεγείρουν την κεραία του δέκτη, πρέπει να επιλέξουμε μία, την επιθυμητή, για να έλθουμε σε επαφή με τον αντίστοιχο πομπό. Για το σκοπό αυτό εκμεταλλευόμαστε την ικανότητα επιλογής του συντονισμένου κυκλώματος και με ένα μεταβλητό πυκνωτή (ή

μεταβλητό πηνίο), επιδιώκουμε να μεταβάλλουμε την f_0 του κυκλώματος ώστε ο δέκτης να συντονίζεται και να επιλέγει κάθε φορά το σήμα του πομπού που μας ενδιαφέρει. Είναι φανερό ότι για να είναι καλύτερη η επιλογή και να ξεχωρίζει καλύτερα η f_0 θα πρέπει η καμπύλη συντονισμού να είναι όσο το δυνατόν οξύτερη. Όπως είδαμε η οξύτητα εξαρτάται από το Q . Γι' αυτό το Q ονομάζεται και **συντελεστής επιλεκτικότητας**.

Παράδειγμα 16.7.2.

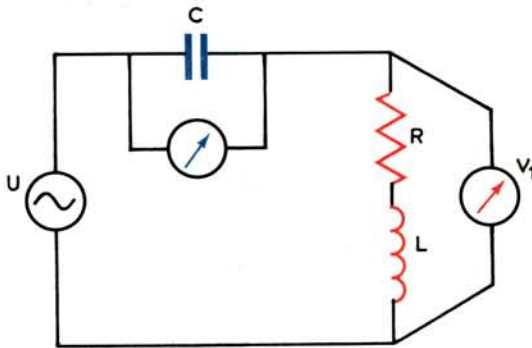
Το κύκλωμα RLC σειράς του σχήματος 16.7α βρίσκεται σε συντονισμό. Αν οι ενδείξεις των βολτομέτρων είναι $V_1 = 130 \text{ V}$ και $V_2 = 120 \text{ V}$ ζητούνται:

- Το πολικό διάγραμμα των διεγέρσεων του κυκλώματος.
 - Η τάση στα άκρα του κυκλώματος.
 - Ο συντελεστής ποιότητας.
- α) Το βολτόμετρο V_1 δείχνει την ενεργό τάση U_{RL} και το V_2 δείχνει την ενεργό τάση U_C στα άκρα του πυκνωτή. Στο συντονισμό είναι $U_L = U_C$ και $U_R = U$. Το σχήμα 16.7β δείχνει το πολικό διάγραμμα.
- β) Από το σχήμα 16.7β προκύπτει:

$$U_{RL}^2 = U_R^2 + U_L^2 = U_R^2 + U_C^2 \rightarrow$$

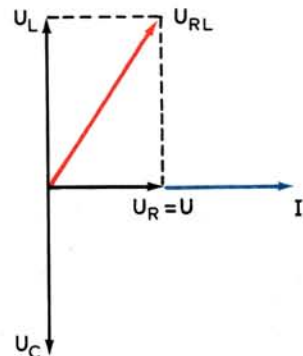
$$U_R = U = \sqrt{U_{RL}^2 - U_C^2} = \sqrt{130^2 - 120^2} = 50 \text{ V}$$

$$\gamma) \quad Q = \frac{U_L}{U} = \frac{120}{50} = 2,4$$



Σχ. 16.7α.

Κύκλωμα του παραδείγματος 16.7.2.

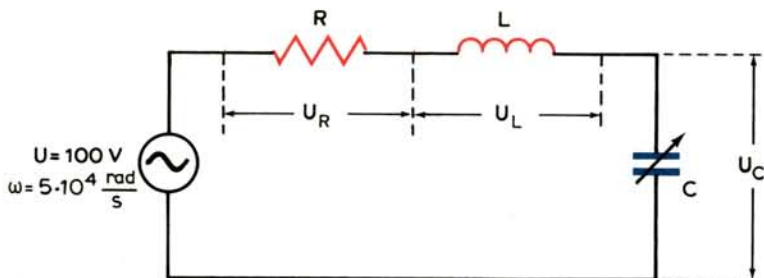


Σχ. 16.7β.

Πολικό διάγραμμα του κυκλώματος του σχήματος 16.7α.

Παράδειγμα 16.7.3.

Ένα κύκλωμα RLC σειράς αποτελείται από τον αντιστάτη $R = 5 \Omega$, το πηνίο αυτεπαγωγής $L = 1 \text{ mH}$ και μεταβλητό πυκνωτή. Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής $U = 100 \text{ V}$ και $\omega = 50.000 \text{ rad/s}$ (σχ. 16.7γ). Ζητούνται:



Σχ. 16.7γ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.7.3.

- α) Για ποια τιμή της χωρητικότητας C έχουμε συντονισμό.
 β) Ο συντελεστής ποιότητας Q .
 γ) Οι πτώσεις τάσεως U_R , U_L και U_C .
 δ) Η ζώνη συντονισμού Δf του κυκλώματος.
 α) Στο συντονισμό είναι $X_L = X_C$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{25 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}} \text{ F} \rightarrow C = 0,4 \mu\text{F}$$

$$\beta) \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{10^{-3}}{0,4 \cdot 10^{-6}}} \rightarrow Q = 10$$

$$(\text{Επίσης}) \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L\omega}{R} = \frac{10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^4}{5} = 10$$

$$\gamma) \quad U_R = U = 100 \text{ V} \quad \text{και} \quad U_L = U_C = Q \cdot U = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ V}$$

$$\delta) \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{\omega}{2\pi Q} = \frac{5 \cdot 10^4}{6,28 \cdot 10} = 795,8 \text{ Hz}$$

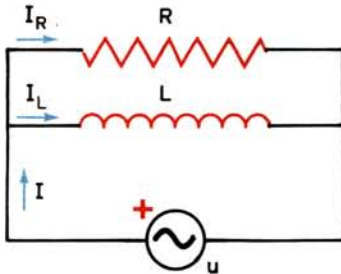
16.8 Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση και πηνίο σε παράλληλη σύνδεση.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά σε εναλλασσόμενη διέγερση ενός κυκλώματος με πηνίο αυτεπαγωγής L και αντιστάτη R σε παράλληλη σύνδεση, όπως αυτό που παριστάνεται στο σχήμα 16.8α.

Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση u με ενεργό τιμή U και κυκλική συχνότητα ω , δηλαδή:

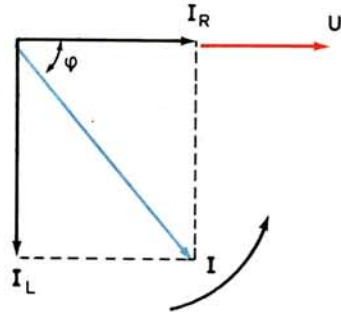
$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (16.61)$$

Είναι φανερό ότι τόσο ο αντιστάτης όσο και το πηνίο τίθενται υπό την εναλλασσόμενη τάση u , άρα σύμφωνα με τα αναφερόμενα στις παραγράφους 16.2 και 16.3. Ο αντιστάτης διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα εντάσεως:



Σχ. 16.8α.

Κύκλωμα RL σε παράλληλη σύνδεση.



Σχ. 16.8β.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος RL σε παράλληλη σύνδεση.

$$i_R = \sqrt{2} \frac{U}{R} \eta \mu \omega t = \sqrt{2} I_R \eta \mu \omega t \quad (16.62)$$

Ενώ το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα εντάσεως:

$$i_L = \sqrt{2} \frac{U}{X_L} \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} I_L \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (16.63)$$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε τον α΄ Κανόνα Kirchhoff στον κόμβο Α του κυκλώματος, για τις στιγμιαίες τιμές των εναλλασσομένων εντάσεων, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην παράγραφο 15.2, λαμβάνομε για το ρεύμα της πηγής, εντάσεως i :

$$i = i_R + i_L \quad (16.64)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (16.62), (16.63) και (16.64) διαπιστώνομε ότι η ένταση i της πηγής είναι άθροισμα δύο ισοσύχνων εναλλασσομένων εντάσεων. Συνεπώς, στηριζόμενοι σε όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 15.7.1 σχετικά με την πρόσθεση εναλλασσομένων μεγεθών, συμπεραίνομε ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα της εντάσεως i προκύπτει ως άθροισμα δύο ισοσύχνων περιστρεφόμενων ανυσμάτων των εντάσεων ρεύματος:

α) i_R , με ενεργό τιμή $I_R = \frac{U}{R}$, που έχει την ίδια φάση με τη φάση της τάσεως u .

β) i_L , με ενεργό τιμή $I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}$, το οποίο έπεται του ανύσματος της τά-

σεως u κατά γωνία ίση με $\pi/2$.

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζομε το πολικό διάγραμμα (ανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων) που παρουσιάζεται στο σχήμα 16.8β.

Από το διάγραμμα 16.8β προκύπτει για την ενεργό τιμή I της εντάσεως i :

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}} \quad (16.65)$$

Επίσης
$$\epsilon\phi\phi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{U/X_L}{U/R} \rightarrow \epsilon\phi\phi = \frac{R}{X_L} \quad (16.66)$$

Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος είναι:

$$Z = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}} \rightarrow Z = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (16.67)$$

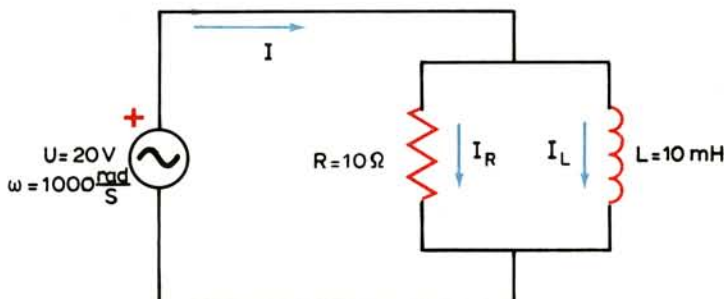
Είναι επίσης
$$\text{συν}\phi = \frac{I_R}{I} = \frac{U/R}{U/Z} \rightarrow \text{συν}\phi = \frac{Z}{R} \quad (16.68)$$

Σημείωση: Στα παράλληλα κυκλώματα, επειδή η ίδια τάση U εφαρμόζεται στα άκρα κάθε κλάδου, τοποθετούμε σε οριζόντιο (κατά σύμβαση) άξονα την τάση U και μετά τοποθετούμε τα ρεύματα που διαρρέουν τους διάφορους κλάδους του κυκλώματος. Κατασκευάζουμε δηλαδή το ανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων. Στα κυκλώματα σειράς, όπως είδαμε, τοποθετούμε σε οριζόντιο άξονα το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα και μετά τις τάσεις στα άκρα κάθε στοιχείου, κατασκευάζουμε δηλαδή το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων.

Παράδειγμα 16.8.1.

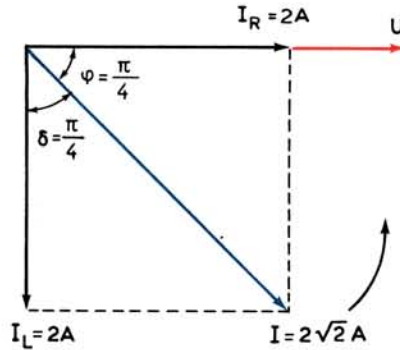
Ένα κύκλωμα αποτελείται από τον αντιστάτη $R = 10 \Omega$ και το πηνίο αυτεπαγωγής $L = mH$ που συνδέονται παράλληλα (σχ. 16.8γ). Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $u = 20\sqrt{2}$ ημ $1000 t$. Να βρεθούν οι στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων που διαρρέουν τον αντιστάτη, το πηνίο και το κύκλωμα καθώς και η διαφορά φάσεως μεταξύ των ρευμάτων I και I_L .

Είναι:
$$U = \frac{U_o}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20 \text{ V και } \omega = 1000 \text{ rad/s.}$$



Σχ. 16.8γ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.8.1.



Σχ. 16.85.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος σχήματος 16.8γ.

$$\text{Άρα } I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{20}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ A}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

$$\text{και } I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = 2\sqrt{2} \text{ A}$$

Στο σχήμα 16.85 έχει σχεδιαστεί το πολικό διάγραμμα.

$$\text{Είναι } \epsilon\phi\phi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \text{ και } \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Άρα } i_R = I_R \sqrt{2} \eta\mu\omega t = 2\sqrt{2} \eta\mu 1000 t$$

$$i_L = I_L \sqrt{2} \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \eta\mu\left(1000 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

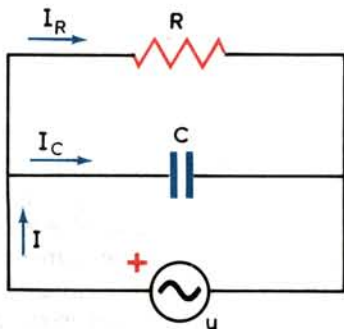
$$\text{και } i = I \sqrt{2} \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \eta\mu\left(1000 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

16.9 Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση και πυκνωτή, σε παράλληλη σύνδεση.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά σε εναλλασσόμενη διέγερση ενός κυκλώματος με πυκνωτή χωρητικότητας C και αντιστάτη R σε παράλληλη σύνδεση, όπως αυτό που παριστάνεται στο σχήμα 16.9α.

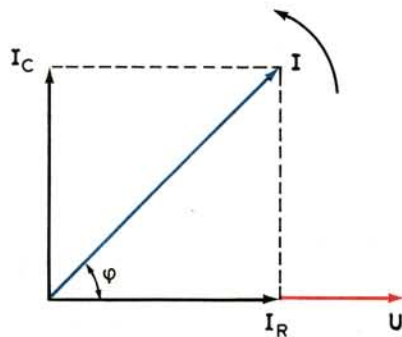
Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή U και κυκλική συχνότητα ω , δηλαδή:

$$u = U_0 \eta\mu\omega t$$



Σχ. 16.9α.

Κύκλωμα RC σε παράλληλη σύνδεση.



Σχ. 16.9β.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος RC σε παράλληλη σύνδεση.

Με συλλογισμούς ανάλογους προς εκείνους που αναπτύξαμε στην παράγραφο 16.8, κατά τη μελέτη του κυκλώματος RL σε παράλληλη σύνδεση, καταλήγουμε ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα της εντάσεως i του κλάδου της πηγής προκύπτει ως άθροισμα δύο ισοσύχνων περιστρεφόμενων ανυσμάτων των εντάσεων ρεύματος:

$$\text{α) } i_R, \text{ με ενεργό τιμή } I_R = \frac{U}{R}, \text{ που έχει την ίδια φάση με τη φάση της τάσεως } u.$$

$$\text{β) } i_C, \text{ με ενεργό τιμή } I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C, \text{ το οποίο προηγείται του ανύσματος της}$$

$$\text{τάσεως } u \text{ κατά γωνία ίση με } \frac{\pi}{2}.$$

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε το πολικό διάγραμμα (ανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων) που φαίνεται στο σχήμα 16.9β.

Από το διάγραμμα 16.9β προκύπτει:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \quad (16.69)$$

$$\text{Επίσης} \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{U/X_C}{U/R} \rightarrow \boxed{\varepsilon\phi\phi = \frac{R}{X_C}} \quad (16.70)$$

Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος είναι:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}} \rightarrow \boxed{Z = \frac{RX_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}} \quad (16.71)$$

Είναι επίσης:
$$\text{συνφ} = \frac{I_R}{I} = \frac{U/R}{U/Z} \rightarrow \boxed{\text{συνφ} = \frac{Z}{R}} \quad (16.72)$$

16.10 Κύκλωμα που συγκροτείται από πηνίο και πυκνωτή.

Θα συνεχίσουμε με τη μελέτη ενός κυκλώματος που συγκροτείται από πυκνωτή και πηνίο, που συνδέονται παράλληλα, αλλά όμως δεν μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανικά στοιχεία. Έτσι, θεωρούμε ότι στο ισοδύναμο κύκλωμα της συνδεσμολογίας (σχ. 16.10α) υφίσταται και ωμική αντίσταση R η οποία αποτελεί τη συνολική αντίσταση απωλειών του κυκλώματος (πηνίου και πυκνωτή). Η αντίσταση αυτή ονομάζεται «κατανεμημένη» και θεωρείται συνδεδεμένη σε σειρά με την αυτεπαγωγή L , όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 16.3.1.

Και το κύκλωμα αυτό θα αναλυθεί με τη βοήθεια συλλογισμών αντιστοιχών προς εκείνους που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες δύο παραγράφους. Έτσι καταλήγουμε στο ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα του κλάδου της πηγής προκύπτει ως άθροισμα δύο ισοσύχνων περιστρεφόμενων ανυσμάτων των εντάσεων ρεύματος:

α) i_C , με ενεργό τιμή:

$$i_C = \frac{U}{X_C} \quad (16.73)$$

το οποίο προηγείται του ανύσματος της τάσεως u κατά γωνία ίση με $\pi/2$.

β) i_L , με ενεργό τιμή:

$$i_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (16.74)$$

το οποίο έπεται του ανύσματος της τάσεως κατά γωνία που παρέχεται από τη σχέση:

$$\epsilon\phi_{\phi_L} = \frac{X_L}{R} \quad (16.75)$$

ή
$$\phi_L = \text{τοξ}\epsilon\phi = \frac{X_L}{R} \quad (16.76)$$

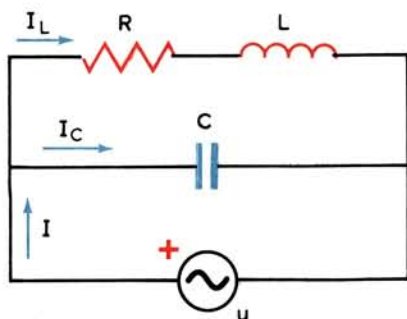
Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε το πολικό διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα 16.10β.

Από το διάγραμμα 16.10β προκύπτει:

$$(OA) = i_C - (OB) \rightarrow I \eta\mu\phi = i_C - i_L \eta\mu\phi_L \quad (16.77)$$

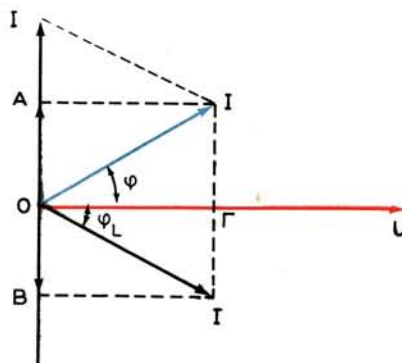
$$(OG) = i_L \text{συνφ}_L \rightarrow I \text{συνφ} = i_L \text{συνφ}_L \quad (16.78)$$

$$\text{όπου } \text{συνφ}_L = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (16.79) \quad \text{και} \quad \eta\mu\phi_L = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (16.80)$$



Σχ. 16.10α.

Κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση.



Σχ. 16.10β.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος LC σε παράλληλη σύνδεση.

Διαιρώντας κατά μέλη τις (16.77) και (16.78) λαμβάνουμε:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{I_C - I_L \eta\mu\phi_L}{I_L \sigma\upsilon\nu\phi_L} \quad (16.81)$$

Αν, τώρα, αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση (16.81) τις τιμές των ενεργών εντάσεων I_C και I_L από τις (16.74) και (16.75) αντίστοιχα καθώς και τις τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων της γωνίας ϕ_L από τις σχέσεις (16.79) και (16.80) λαμβάνουμε:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{R^2 + X_L (X_L - X_C)}{R X_C} \quad (16.82)$$

Από τις σχέσεις (16.81) ή (16.82) υπολογίζεται η διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως και εντάσεως του ρεύματος του κλάδου της πηγής. Η ενεργός τιμή της εντάσεως του ρεύματος I στον κλάδο της πηγής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I^2 = (O\Gamma)^2 + (OA)^2 = I_L^2 \sigma\upsilon\nu^2\phi_L + (I_C - I_L \eta\mu\phi_L)^2$$

$$\text{ή } I^2 = I_C^2 + I_L^2 - 2 I_C I_L \eta\mu\phi_L \quad (16.83)$$

Από τη σχέση (16.83) προκύπτει:

$$I^2 = \frac{U^2}{X_C^2} + \frac{U^2}{R^2 + X_L^2} - \frac{2U^2 X_L}{X_C (R^2 + X_L^2)} =$$

$$= U^2 \left(\frac{R^2 + X_L^2}{X_C^2 (R^2 + X_L^2)} + \frac{X_C^2}{X_C^2 (R^2 + X_L^2)} - \frac{2X_L X_C}{X_C^2 (R^2 + X_L^2)} \right)$$

$$\rightarrow \frac{U^2}{I^2} = \frac{(R^2 + X_L^2) X_C^2}{R^2 + X_L^2 + X_C^2 - 2X_L X_C}$$

$$\text{Άρα: } Z = \frac{U}{I} = \frac{X_C \sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (16.84)$$

Επειδή η τιμή της αντιστάσεως R είναι μικρή σε σχέση με την X_L , δηλαδή $R^2 \ll X_L^2$ η σχέση (16.84) γράφεται προσεγγιστικά:

$$Z = \frac{X_C X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \rightarrow Z = \frac{L/C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (16.85)$$

16.10.1 Παράλληλος συντονισμός (αντισυντονισμός).

Παρατηρώντας τη σχέση (16.85) καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Αν τα στοιχεία του κυκλώματος L και C είναι δεδομένα, τότε ο λόγος L/C παραμένει σταθερός. Έτσι, αν μεταβάλλουμε την κυκλική συχνότητα ω της πηγής τροφοδοσίας, τότε μεταβάλλεται ο παρανομαστής της σχέσεως (16.85) όπως ακριβώς μεταβάλλεται με τη συχνότητα η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος RLC σειράς (σχέση 16.39). Αυτό μας οδηγεί στο να εξετάσουμε, όπως ακριβώς κάναμε στην παράγραφο 16.8, τις συνέπειες της συνθήκης:

$$X_L = X_C \quad \text{ή της ισοδυνάμεώς της} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

που ικανοποιείται όταν το κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνθεση, τροφοδοτείται με κυκλική συχνότητα:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (16.86)$$

$$\text{ή συχνότητα: } f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (16.87)$$

Στην περίπτωση λοιπόν που ικανοποιούνται οι συνθήκες (16.86) ή (16.87) στο κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση, οι οποίες είναι αντίστοιχες προς τις συνθήκες (16.45) και (16.46) που κυκλώματος RLC σειράς, λέμε ότι το κύκλωμα είναι **συντονισμένο** ή ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό με την πηγή τροφοδοτήσεως. Η ω_o ονομάζεται κυκλική ιδιοσυχνότητα και η f_o **ιδιοσυχνότητα** ή **συχνότητα συντονισμού** του κυκλώματος. Μάλιστα, για να γίνεται αντιδιαστολή της έννοιας του συντονισμού στο κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση από το αντίστοιχο φαινόμενο στο κύκλωμα RLC σειράς χρησιμοποιούμε τον όρο **παράλληλος συντονισμός** ή **αντισυντονισμός** για να αναφερόμαστε στην κατάσταση συντονισμού στο κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση.

Στην περίπτωση που σ' ένα κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση, έχουμε **κατάσταση συντονισμού** (παράλληλος συντονισμός) παρατηρούνται τα εξής χαρακτηριστικά φαινόμενα:

- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος γίνεται **μέγιστη**, αποκτώντας τιμή ίση με:

$$Z_o = \frac{L}{RC} \quad (16.88)$$

όπως προκύπτει αμέσως από τη σχέση (16.85).

Από τη σχέση (16.88) προκύπτει:

$$Z_o = \frac{L\omega_o}{RC\omega_o} = \frac{Q}{C\omega_o} = QL\omega_o \quad (16.89)$$

όπου $Q = \frac{L\omega_o}{R}$

ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος σε κατάσταση συντονισμού.

Από τη σχέση (16.86) προκύπτει ότι στο συντονισμό η σύνθετη αντίσταση γίνεται Q φορές μεγαλύτερη από την επαγωγική (ή χωρητική) αντίσταση. Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται **φαινόμενο της υπεραντιστάσεως** στον παράλληλο συντονισμό.

- β) Το κύκλωμα παρουσιάζει πρακτικά καθαρά ωμική συμπεριφορά και η τάση είναι συμφασική με το ρεύμα, αφού από τη σχέση (16.82) για $X_L = X_C$ προκύπτει:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{X_L} \quad (16.90)$$

και αν λάβουμε υπόψη ότι $R \ll X_L$ έχουμε:

$$\epsilon\phi\phi \approx 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \phi \approx 0$$

Από την παραπάνω συνθήκη, σε συνδυασμό με τη σχέση (16.88) συμπεραίνουμε ότι η σύνθετη αντίσταση κατά τον αντισυντονισμό Z_o έχει χαρακτηριστικά ωμικής αντιστάσεως. Η αντίσταση αυτή δεν είναι πλέον ίση με την ωμική αντίσταση απωλειών, όπως συμβαίνει στο κύκλωμα συντονισμού σειράς (όπου άλλωστε, έχει μικρή τιμή), αλλά απεναντίας προκύπτει ως μια μεγάλη ωμική αντίσταση που ονομάζεται **δυναμική αντίσταση**.

- γ) Αφού η σύνθετη αντίσταση γίνεται μέγιστη, η ένταση του ρεύματος του κλάδου της πηγής γίνεται ελάχιστη αποκτώντας ενεργό τιμή ίση με:

$$I_o = \frac{U}{Z_o} = \frac{URC}{L} \quad (16.91)$$

- δ) Οι ενεργές τιμές των ρευμάτων I_C και I_L γίνονται μεταξύ τους ίσες, ενώ τα αντίστοιχα ανύσματα των στιγμιαίων τιμών είναι αντίθετα, αφού από την τάση (16.74) λαμβάνουμε:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = UC\omega_o \quad (16.92)$$

ενώ από την (16.75) εφόσον $R \ll X_L$:

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega_0 L} = UC\omega_0 \quad (16.93)$$

Τέλος, από τη σχέση (16.80) προκύπτει:

$$\eta\mu\phi_L \approx \frac{X_L}{X_L} = 1 \rightarrow \phi_L \approx \frac{\pi}{2}$$

πράγμα που συνεπάγεται σύμφωνα με το σχήμα 16.106, ότι τα ανύσματα i_L και i_C είναι αντίθετα.

Από την (16.91) προκύπτει:

$$QI_0 = \frac{L\omega_0}{R} \cdot \frac{URC}{L} = UC\omega_0 = \frac{U}{\omega_0 L} \quad (16.94)$$

Από τις (16.92), (16.93) και (16.94) προκύπτει:

$$I_L = I_C = QI_0 \quad (16.95)$$

Από τη σχέση (16.95) συμπεραίνουμε ότι στον αντισυντονισμό το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο του πηνίου (ή του πυκνωτή) γίνεται κατά Q φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο της πηγής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φαινόμενο της υπερεντάσεως** και είναι αντίστοιχο του φαινομένου της υπερτάσεως στο συντονισμό σειράς.

16.10.2 Καμπύλες παράλληλου συντονισμού (αντισυντονισμού) – Ζώνη διελεύσεως.

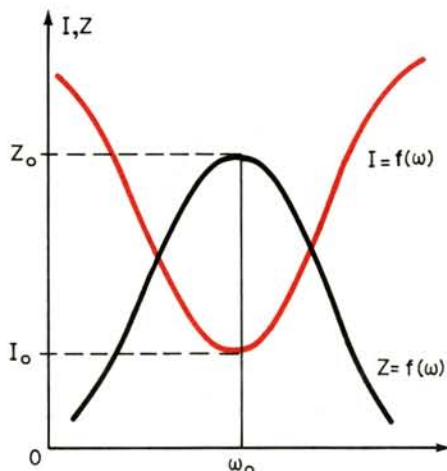
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή των καμπυλών $Z = f(\omega)$ και $I = f(\omega)$ στο κύκλωμα LC σε παράλληλη σύνδεση, που μελετάμε στην παράγραφο αυτή. Οι γραφικές αυτές απεικονίσεις γίνονται με τη βοήθεια της σχέσεως (16.85) για τη σύνθετη αντίσταση, δηλαδή:

$$Z = \frac{L/C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{L/C}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (16.96)$$

και για την ενεργό τιμή της εντάσεως της σχέσεως:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{UC}{L} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (16.97)$$

με την προϋπόθεση ότι $R^2 \ll X_L^2$ και ότι τα στοιχεία U , R , L και C παραμένουν σταθερά, ενώ μεταβάλλεται μόνον η κυκλική συχνότητα ω . Προκειμένου να κάνουμε τη χάραξη αυτή, παρατηρούμε ότι:



Σχ. 16.10γ.

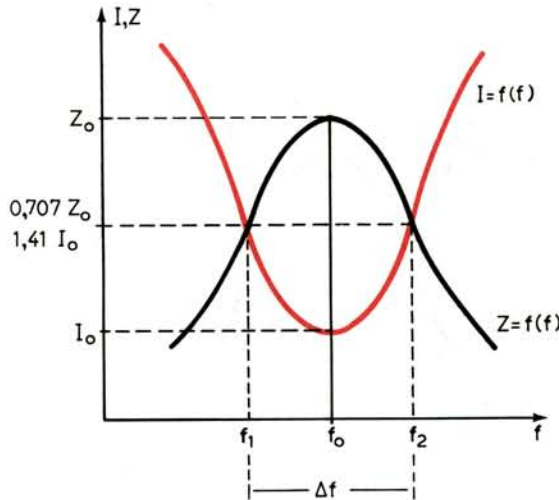
Καμπύλες παράλληλου συντονισμού (αντισυντονισμού).

Για $\omega \rightarrow 0$	έχομε	$I \rightarrow \infty$	και $Z \rightarrow 0$
Για $\omega = \omega_0$	έχομε	$I_0 = \frac{URC}{L}$	και $Z_0 = \frac{L}{RC}$
Για $\omega \rightarrow \infty$	έχομε	$I \rightarrow \infty$	και $Z \rightarrow 0$

Το σχήμα 16.10γ δείχνει τις καμπύλες συντονισμού για το παράλληλο κύκλωμα LC. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες αυτές είναι «κατοπτρικές» σε σχέση με τις αντίστοιχες καμπύλες του συντονισμού σειράς (σχ. 16.7ζ).

Από το σχήμα 16.10γ προκύπτει ότι η σύνθετη αντίσταση καθίσταται μέγιστη μόνο στη συχνότητα f_0 καθώς και σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων πολύ κοντά σ' αυτή. Την ιδιότητα της υπεραντιστάσεως του κυκλώματος, δηλαδή της απότομης αυξήσεως της αντιστάσεως του κυκλώματος γύρω από τη συχνότητα συντονισμού εκμεταλλευόμαστε, τη φορά αυτή, για να κατασκευάζουμε «κυκλώματα φραγμού». Αυτά είναι κυκλώματα τα οποία αν τροφοδοτηθούν με ένα πλήθος εναλλασσομένων τάσεων διαφόρων συχνοτήτων αναπτύσσονται σ' αυτά ρεύματα αξιόλογης εντάσεως σε περιοχές συχνοτήτων αρκετά μακριά από τη συχνότητα συντονισμού. Εξυπακούεται ότι και στα κυκλώματα αυτά μας ενδιαφέρει η καμπύλη συντονισμού να είναι οξεία, κάτι που και πάλι εξαρτάται από το συντελεστή ποιότητας του κυκλώματος, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

Η **ζώνη συντονισμού** ή ζώνη διελεύσεως του παράλληλου κυκλώματος LC ορίζεται ως η ζώνη συχνοτήτων που τοποθετείται συμμετρικά περί τη συχνότητα συντονισμού f_0 μέχρις ότου η ενεργός τιμή της εντάσεως του ρεύματος αυξηθεί στο $\sqrt{2}$ της ελάχιστης τιμής της (I_0). Έτσι, η ζώνη συντονισμού στην καμπύλη του σχήματος 16.10δ είναι:



Σχ. 16.10δ.

Καθορισμός της ζώνης συντονισμού Δf σε καμπύλη αντισυντονισμού.

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad (16.98)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{R}{2\pi L} \quad (16.99)$$

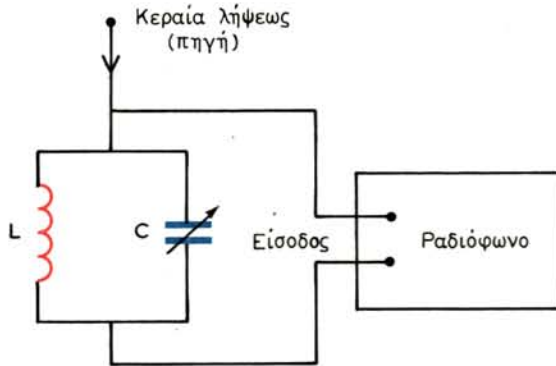
Ας προσθέσουμε, τέλος, ότι η ζώνη συντονισμού μπορεί να καθορισθεί και από τη συνθήκη της μείωσης της σύνθετης αντιστάσεως στο $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής της (Z_0).

16.10.3 Επιλογή.

Όσα αναφέραμε για τη δυνατότητα επιλογής στο κύκλωμα σειράς μπορεί να επεκταθούν και στο παράλληλο κύκλωμα. Οι ικανότητες επιλογής των δύο κυκλωμάτων εξετάζονται και καθορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Το παράλληλο κύκλωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. ως κύκλωμα επιλογής στην είσοδο ενός ραδιοφώνου (σχ. 16.10ε).

Το κύκλωμα παρουσιάζει σημαντική αντίσταση και δίνει σημαντική τάση στην είσοδο του ραδιοφώνου, μόνο για τα σήματα του πομπού που εκπέμπονται με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος. Οι συχνότητες όλων των άλλων πομπών βρίσκουν στο κύκλωμα μικρή αντίσταση και συνεπώς δίνουν αμελητέα τάση στην είσοδο του ραδιοφώνου. Στην πράξη βέβαια τα κυκλώματα εισόδου είναι πιο πολύπλοκα και αποτελούνται από περισσότερα συντονισμένα κυκλώματα.

Τα συντονισμένα κυκλώματα δεν χρησιμοποιούνται μόνο για το σκοπό της επιλογής. Τα χρησιμοποιούμε επίσης κάθε φορά που θέλουμε π.χ. να αφήσουμε



Σχ. 16.10ε.

Κύκλωμα επιλογής ραδιοφωνικού δέκτη.

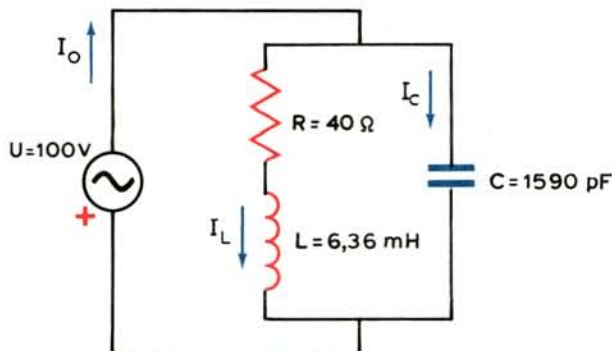
να περάσει μια ορισμένη ζώνη συχνοτήτων και συγχρόνως να αποκλείσουμε τις συχνότητες που βρίσκονται έξω από τη ζώνη αυτή. Τα κυκλώματα, λοιπόν, αυτά είναι ένα είδος φίλτρου. Είναι ειδικότερα φίλτρα ζώνης συχνοτήτων, τα οποία εξυπηρετούν ποικίλους και σημαντικούς σκοπούς.

Παράδειγμα 16.10.1.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 16.10στ όπου: $R = 40 \Omega$, $L = 6,36 \text{ mH}$, $C = 1590 \text{ pF}$. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή $U = 100 \text{ V}$.

Να βρεθούν:

- Η ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος.
- Ο συντελεστής ποιότητας Q .
- Η σύνθετη αντίσταση Z_0 και το ρεύμα I_0 στο συντονισμό.
- Τα ρεύματα I_L και I_C στο συντονισμό.
- Η ζώνη Δf καθώς και οι πλευρικές συχνότητες f_1 και f_2 .



Σχ. 16.10στ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.10.1.

$$\alpha) f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{6,36 \cdot 10^{-3} \cdot 1590 \cdot 10^{-12}}} \text{ Hz} \rightarrow f_0 = 50 \text{ kHz}$$

$$\beta) Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 6,36 \cdot 10^{-3}}{40} \rightarrow Q=50$$

$$\gamma) Z_0 = \frac{L}{RC} = \frac{6,36 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 1590 \cdot 10^{-12}} = 10^5 \Omega \rightarrow Z_0 = 100 \text{ K}\Omega$$

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{100}{10^5} = 10^{-3} \text{ A} \rightarrow I_0 = 1 \text{ mA}$$

$$\delta) I_L = I_C = QI_0 = 50 \text{ mA}$$

$$\epsilon) \Delta f = \frac{f_0}{Q} = 1 \text{ kHz}$$

$$f_1 = f_0 - \frac{f_0}{2Q} = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 50 - 0,5 = 49,5 \text{ kHz}$$

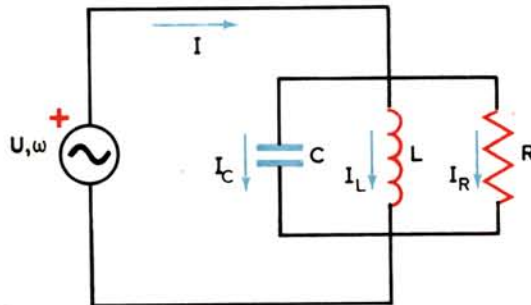
$$f_2 = f_0 + \frac{f_0}{2Q} = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 50 + 0,5 = 50,5 \text{ kHz}$$

Παράδειγμα 16.10.2.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 16.10ζ. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή U και κυκλική συχνότητα ω . Ζητούνται:

α) Το πολικό διάγραμμα.

β) Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.



Σχ. 16.10ζ.

Κύκλωμα παραδείγματος 16.10.2.

γ) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

δ) Η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως.

ε) Τα παραπάνω μεγέθη σε κατάσταση συντονισμού.

α) Εφόσον και τα τρία στοιχεία του κυκλώματος R, L, C είναι συνδεδεμένα παράλληλα προς την πηγή, με σκέψεις ανάλογες προς εκείνες που διατυπώσαμε στην παράγραφο 16.10, καταλήγουμε στο ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα του κλάδου της πηγής προκύπτει ως άθροισμα τριών ισοσύχνων περιστρεφόμενων ανυσμάτων των εντάσεων ρεύματος:

1) i_C , με ενεργό τιμή:

$$I_C = \frac{U}{X_C}$$

το οποίο προηγείται του ανύσματος της τάσεως u κατά γωνία ίση με $\frac{\pi}{2}$

2) i_L , με ενεργό τιμή:

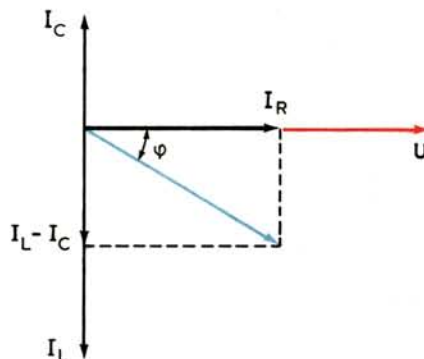
$$I_L = \frac{U}{X_L}$$

το οποίο έπεται του ανύσματος της τάσεως u κατά γωνία ίση με $\frac{\pi}{2}$

3) i_R , με ενεργό τιμή: $I_R = \frac{U}{R}$ συμφασικού της τάσεως u .

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς κατασκευάζουμε στο σχήμα 16.10η το πολικό διάγραμμα.

β) Από το πολικό διάγραμμα προκύπτει:



Σχ. 16.10η.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος του σχήματος 16.10ζ.

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \rightarrow$$

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2} \quad (1)$$

γ) Από την (1) προκύπτει:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}} \quad (2)$$

$$\delta) \quad \text{εφφ} = \frac{I_L - I_C}{I_R} = R \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (3)$$

$$\epsilon) \text{ Όταν } I_L = I_C \rightarrow \frac{U}{X_L} = \frac{U}{X_C} \rightarrow X_L = X_C \rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}, \text{ δηλαδή}$$

$$\text{όταν η κυκλική συχνότητα της τάσεως πάρει την τιμή } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{τότε το ρεύμα γίνεται ελάχιστο: } I_{\min} = \frac{U}{R}$$

η σύνθετη αντίσταση μέγιστη: $Z_{\max} = R$, οπότε η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως γίνεται μηδέν: $\text{εφφ} = 0 \rightarrow \phi = 0$

Παράδειγμα 16.10.3.

Το παράλληλο κύκλωμα LC ενός ραδιοφώνου αποτελείται από μεταβλητό πυκνωτή και από πηνίο αυτεπαγωγής 100 μΗ. Να υπολογισθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή για να συντονίζεται το κύκλωμα σε όλη την περιοχή των μεσαίων κυμάτων (μήκος κύματος από 200 m μέχρι 600 m). Η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3,10^8$ m/s.

Το μήκος κύματος, όπως είναι γνωστό, είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.

Επειδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα φωτός c (στο κενό ή τον αέρα) θα έχουμε:

$$\text{ταχύτητα} = \frac{\text{απόσταση}}{\text{περίοδος}} \rightarrow c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (1)$$

Η συχνότητα συντονισμού παρέχεται από τη σχέση:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) υπολογίζομε τη χωρητικότητα του πυκνωτή:

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 LC^2} \quad \text{όπου} \quad 200 \leq \lambda \leq 600$$

Για τις ακραίες τιμές $\lambda_1 = 200 \text{ m}$ και $\lambda_2 = 600 \text{ m}$ θα έχουμε:

$$C_{\min} = \frac{200^2}{4\pi^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ F} \rightarrow C_{\min} = 112,7 \text{ pF}$$

και

$$C_{\max} = \frac{600^2}{4\pi^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ F} \rightarrow C_{\max} = 1013,2 \text{ pF}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΙΣΧΥΣ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

17.1 Στιγμιαία ισχύς σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος.

Έστω καταναλωτής που παρουσιάζει σύνθετη αντίσταση Z όταν τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσεως $u(t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 17.1α. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, αν η τάση στα άκρα του καταναλωτή είναι:

$$u = U_0 \eta \mu \omega t \quad (17.1)$$

τότε, ο καταναλωτής θα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, η στιγμιαία τιμή του οποίου θα είναι:

$$i = I_0 \eta \mu(\omega t - \varphi) \quad (17.2)$$

όπου φ η διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως και εντάσεως.

Η ισχύς την οποία κάποια χρονική στιγμή t θα παρέχει η πηγή στον καταναλωτή, δηλαδή **η στιγμιαία ισχύς**, υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (15.6), ως:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_0 I_0 \eta \mu \omega t \cdot \eta \mu(\omega t - \varphi) \quad (17.3)$$

$$\text{Ισχύει όμως} \quad \eta \mu \omega t \eta \mu(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\text{συν} \varphi - \text{συν}(2\omega t - \varphi)] \quad (17.4)$$

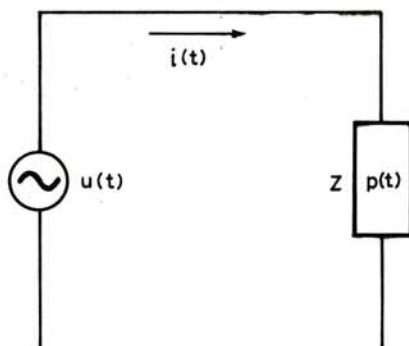
οπότε από τις (17.3) και (17.4) προκύπτει:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{U_0 I_0}{2} [\text{συν} \varphi - \text{συν}(2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI [\text{συν} \varphi - \text{συν}(2\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad (17.5)$$

Στο σχήμα 17.16 παριστάνεται γραφικά η μεταβολή της τάσεως u , του ρεύματος i και της ισχύος p με το χρόνο t .

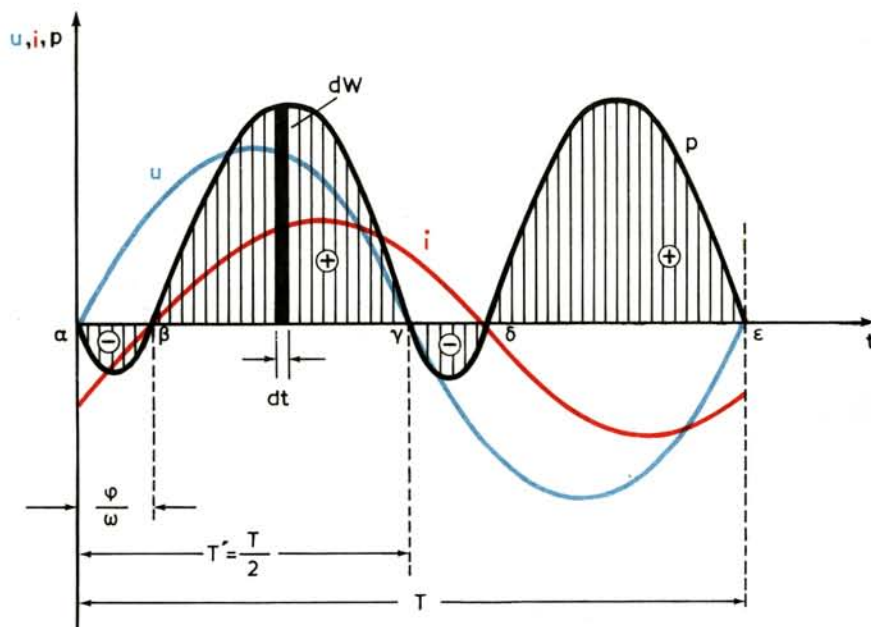
Τόσο από μελέτη της σχέσεως (17.5) όσο και από εποπτεία στο σχήμα 17.16 προκύπτουν τα εξής σημαντικά συμπεράσματα:

- α) Η στιγμιαία ισχύς που παρέχεται από την πηγή στον καταναλωτή αποτελείται από ένα χρονικά σταθερό όρο ($UI \text{συν} \varphi$) και ένα ημιτονοειδή όρο διπλάσιας συχνότητας. Άρα, η ισχύς μεταβάλλεται περιοδικά και μάλιστα με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας της τάσεως. Δηλαδή όταν η τάση



Σχ. 17.1α.

Κύκλωμα πηγής - καταναλωτή εναλλασσόμενου ρεύματος.



Σχ. 17.1β.

Στιγμιαία τάση, ένταση και ισχύς καταναλωτή που τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος.

- πραγματοποιεί μισό κύκλο (χρόνος $\gamma - \alpha = T/2$) τότε η ισχύς πραγματοποιεί ένα κύκλο (χρόνος $\gamma - \alpha = T$).
- β) Σε ορισμένες χρονικές στιγμές (π.χ. α, β, γ, δ, ε... στο σχήμα 17.1β) η στιγμιαία ισχύς γίνεται μηδέν γιατί είναι μηδέν η τιμή της τάσεως u ή της εντάσεως i .
- γ) Υπάρχουν χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η στιγμιαία ισχύς λαμβάνει

θετικές τιμές (π.χ. χρονικά διαστήματα β-γ, δ-ε) ενώ υπάρχουν άλλες χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η στιγμιαία ισχύς λαμβάνει αρνητικές τιμές (π.χ. χρονικά διαστήματα α-β, γ-δ κλπ). Από φυσική πλευρά αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν χρονικά διαστήματα κατά τα οποία η πηγή παρέχει ισχύ στον καταναλωτή (θετικές τιμές στιγμιαίας ισχύος) ενώ υπάρχουν άλλα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία ο καταναλωτής επιστρέφει τμήμα της ισχύος που έχει απορροφήσει, πίσω στην πηγή (αρνητικές τιμές στιγμιαίας ισχύος).

Η **μέση τιμή της ισχύος** που παρέχεται στον καταναλωτή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου θα είναι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγράφου 15.6:

$$P_{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (17.6)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση της στιγμιαίας ισχύος (17.5) στην (17.6) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} P_{\mu} &= \frac{1}{T} \int_0^T UI [\sin\varphi - \sin(2\omega t - \varphi)] dt = \\ &= UI \sin\varphi - \frac{UI}{T} \int_0^T \sin(2\omega t - \varphi) dt \end{aligned}$$

Επειδή όμως, όπως πολύ εύκολα αποδεικνύεται, ισχύει:

$$\int_0^T \sin(2\omega t - \varphi) dt = 0$$

έχομε τελικά για τη **μέση τιμή** της ισχύος σε μια περίοδο:

$$P_{\mu} = UI \sin\varphi \quad (17.7)$$

Από την παραπάνω σχέση (17.7) παρατηρούμε ότι εφόσον $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ θα έχουμε $0 \leq \sin\varphi \leq 1$, δηλαδή $P_{\mu} \geq 0$. Άρα, τελικά **παρέχεται** στον καταναλωτή ισχύς κατά τη διάρκεια της περιόδου, άσχετα αν υπάρχουν διαστήματα κατά τα οποία ο καταναλωτής επιστρέφει ισχύ στην πηγή.

Η στοιχειώδης ενέργεια dW που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα, σε στοιχειώδη χρόνο dt είναι:

$$dW = pdt = uidt \quad (17.8)$$

Η ενέργεια σε χρόνο μιας περιόδου είναι:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^T u i dt = \int_0^T \frac{U_o I_o}{2} \text{ συν } \varphi dt - \\
 &- \int_0^T \frac{U_o I_o}{2} \text{ συν } (2\omega t - \varphi) dt = \frac{U_o I_o}{2} \text{ συν } \varphi \cdot T - \\
 &- \frac{U_o I_o}{2} \int_0^T \text{ συν } (2\omega t - \varphi) dt \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\eta \quad W = \frac{U_o I_o T}{2} \text{ συν } \varphi = UI T \text{ συν } \varphi \quad (17.9)$$

17.2 Πραγματική, φαινόμενη και άεργη ισχύς – Συντελεστής ισχύος.

Θα προχωρήσουμε τώρα δίνοντας ορισμένους κρίσιμους ορισμούς που αφορούν την ισχύ σε κυκλώματα που τροφοδοτούνται με εναλλασσόμενο ρεύμα (ΕΡ).

1) Ονομάζουμε **πραγματική ισχύ** ή **ενεργό ισχύ** το πηλίκο της ενέργειας που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου, δια της περιόδου και συμβολίζουμε:

$$P = \frac{W}{T} \quad (17.10)$$

Από τις (17.9) και (17.10) προκύπτει:

$$P = \frac{U_o I_o}{2} \text{ συν } \varphi = UI \text{ συν } \varphi \quad (17.11)$$

Από τις (17.7) και (17.11) προκύπτει:

$$P = P_\mu$$

δηλαδή η πραγματική ισχύς είναι εξ ορισμού ίση με τη μέση τιμή της ισχύος που παρέχεται στο κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου. Ως μονάδα μετρήσεως της πραγματικής ισχύος χρησιμοποιείται η γνωστή μονάδα της ισχύος, δηλαδή το Watt (W).

Υπενθυμίζουμε ότι ορίσαμε στην παράγραφο 16.1 ως **συντελεστή ισχύος** (συνφ) των κυκλωμάτων που τροφοδοτούνται με εναλλασσόμενο ρεύμα, το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζουν τα στρεφόμενα ανύσματα της τάσεως που εφαρμόζεται στο κύκλωμα και της εντάσεως του ρεύματος που το διαρρέει.

Στις παραγράφους του κεφαλαίου 16 υπολογίσαμε την τιμή του συντελεστή ισχύος για διάφορα κυκλώματα Ε.Ρ. Ας υπενθυμίσουμε, π.χ., ότι για το κύκλωμα RLC σειράς ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\text{συν}\phi = \frac{R}{Z}$$

όπου R η ωμική αντίσταση και Z η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει σε ένα κύκλωμα ΕΡ όταν η τάση τροφοδοσίας **βρίσκεται σε φάση** ($\phi = 0$) με την ένταση που το διαρρέει:

α) Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος είναι ίσος με 1 ($\text{συν}\phi = 1$).

β) Η στιγμιαία τιμή της ισχύος είναι πάντα θετική, δηλαδή το κύκλωμα **απορροφά συνεχώς** ενέργεια χωρίς ποτέ να επιστρέφει ενέργεια στην πηγή. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα από την εξίσωση (17.3) από την οποία παίρνουμε:

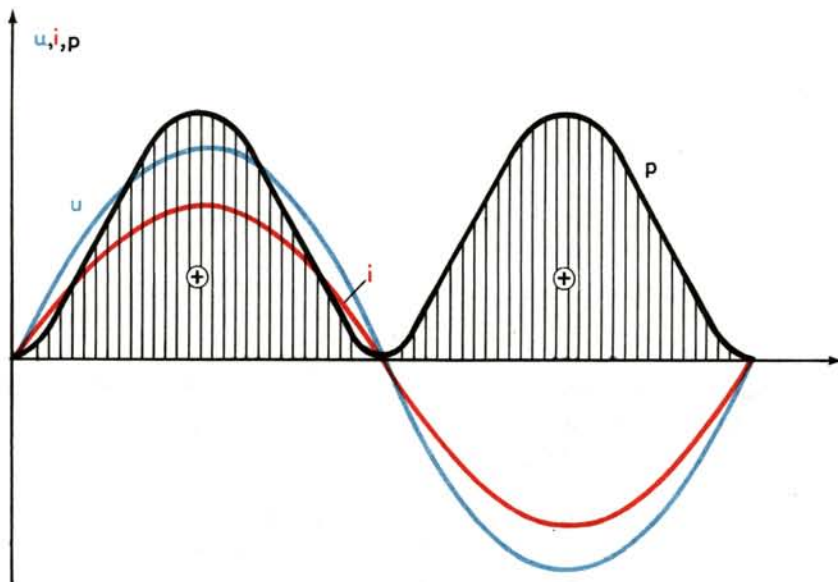
$$p(t) = U_0 I_0 \eta \mu^2 \omega t \geq 0 \quad (17.12)$$

Επαληθεύεται δε επίσης από το σχήμα 17.2α στο οποίο έχουμε χαράξει τις στιγμιαίες τιμές των μεγεθών u , i , p στην περίπτωση που εξετάζουμε ($\phi = 0$, $\text{συν}\phi = 1$).

γ) Από τη σχέση (17.11) προκύπτει ότι όταν $\phi = 0$:

$$P = U \cdot I$$

δηλαδή τότε ο καταναλωτής απορροφά τη μέγιστη δυνατή ισχύ από την πηγή, με δοσμένη την τιμή της τάσεως U και της εντάσεως I .



Σχ. 17.2α.

Στιγμιαία τάση, ένταση και ισχύς καταναλωτή που έχει $\text{συν}\phi = 1$ ($\phi = 0$).

2) Ονομάζουμε **φαινόμενη ισχύ** το γινόμενο των ενεργών τιμών της τάσεως και εντάσεως ενός κύκλωματος EP, και συμβολίζουμε:

$$P_{\phi} = U \cdot I \quad (17.13)$$

Ως μονάδα μετρήσεως της φαινόμενης ισχύος χρησιμοποιούμε το 1 VA (βολταμπέρ) για να διακρίνομε το μέγεθος αυτό από το μέγεθος «πραγματική ισχύς» που έχει τις ίδιες διαστάσεις.

Από την ανάπτυξη που έχει προηγηθεί προκύπτει ότι η φαινόμενη ισχύς είναι η μέγιστη ισχύς που θα μπορούσε να απορροφήσει ένα κύκλωμα EP από την πηγή που το τροφοδοτεί, αν ο συντελεστής ισχύος του ήταν ίσος με 1.

3) Ονομάζουμε, τέλος, **άεργη ισχύ** το γινόμενο:

$$P_a = UI \eta \mu \phi \quad (17.14)$$

Και το μέγεθος αυτό έχει διαστάσεις ισχύος, αλλά στην πραγματικότητα δεν εκφράζει κάποια καταναλισκόμενη ισχύ που παράγει έργο. Γι' αυτό ονομάζεται **άεργη ισχύς** και μετράται με τη μονάδα VAR για να διακρίνεται από την πραγματική και τη φαινόμενη ισχύ ($r = \text{reactive power} = \text{άεργη ισχύς}$).

Ας παρατηρήσομε ότι όταν $\phi = \pi/2$ ή $-\pi/2$ τότε από την (17.3) έχουμε:

$$p(t) = \bar{+} \frac{U_o I_o}{2} \eta \mu 2\omega t$$

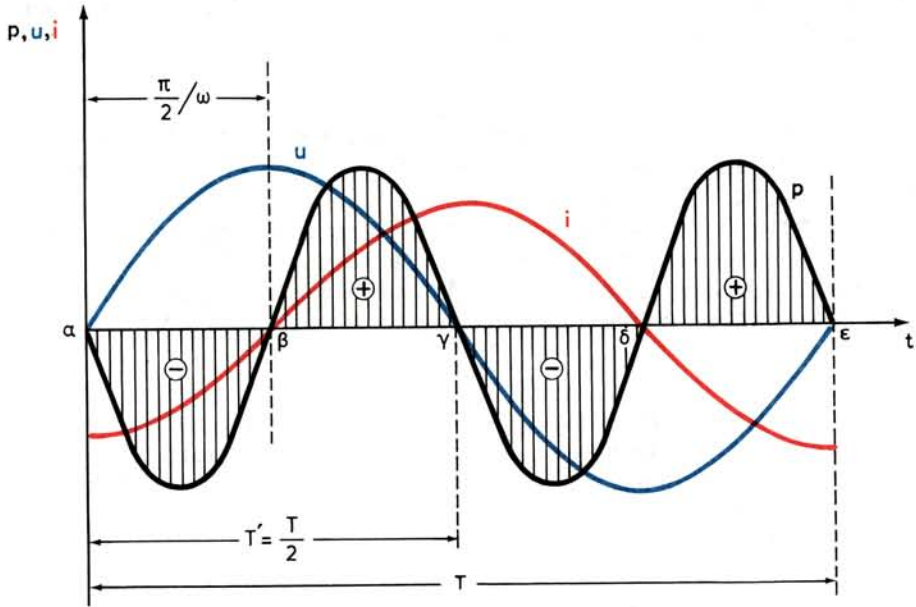
Η γραφική παράσταση των μεταβολών των μεγεθών u , i και p με το χρόνο t δίνεται στην περίπτωση αυτή στο σχήμα 17.26. Και από το σχήμα προκύπτει ότι η ισχύς μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας της τάσεως. Στη μια ημιπερίοδο παίρνει αρνητικές τιμές και στην άλλη θετικές. Επειδή τα εμβαδά είναι μεταξύ τους ίσα, προκύπτει ότι η μέση ισχύς (πραγματική) θα είναι μηδέν (όπως προκύπτει και από τη σχέση $P = UI \cos \phi$ αν θέσομε $\sin \phi = 0$).

Η συνθήκη $\phi = \pm \pi/2$ ικανοποιείται όταν στο κύκλωμα υπάρχει ιδανικό πηνίο ή ιδανικός πυκνωτής: Στη μια ημιπερίοδο η πηγή παρέχει στο πηνίο ή στον πυκνωτή ενέργεια, που μετατρέπεται σε ενέργεια μαγνητικού ($1/2 Li^2$) ή ηλεκτρικού ($1/2 Cu^2$) πεδίου, ενώ στην άλλη ημιπερίοδο το πηνίο ή ο πυκνωτής επιστρέφει την ίδια ενέργεια στην πηγή.

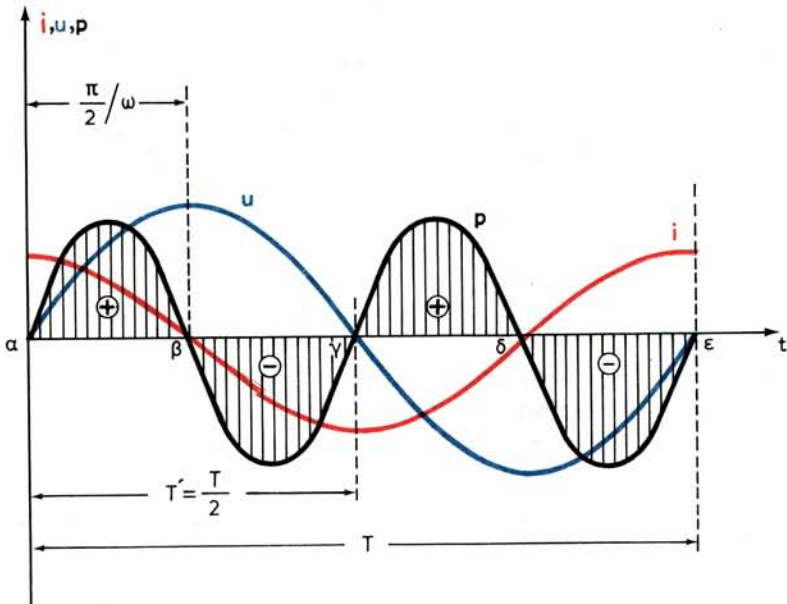
Μετά τους παραπάνω τρεις ορισμούς της πραγματικής, της φαινόμενης και της άεργης ισχύος που εισάγαμε, μπορούμε να επανέλθομε στη σχέση (17.5) που παρέχει τη στιγμιαία ισχύ στο σύστημα και να τη μετασχηματίσομε κατάλληλα:

$$p(t) = UI [\sin \phi - \sin (2\omega t + \phi)] = UI \sin \phi [1 - \sin 2\omega t] + UI \eta \mu \phi \sin 2\omega t = P (1 - \sin 2\omega t) + P_a \eta \mu 2\omega t \quad (17.15)$$

Από τους όρους β' μέλους της εξίσωσης (17.15) ο πρώτος $P (1 - \sin 2\omega t)$ είναι πάντοτε θετικός, η μέση του τιμή παριστά την πραγματική ισχύ και ονομάζεται **στιγμιαία ισχύς δράσεως**. Ο δεύτερος όρος $P_a \eta \mu 2\omega t$ είναι εναλλασσόμενος, θετικός και αρνητικός, και παριστά ισχύ που άλλοτε παρέχεται από την πηγή προς τον καταναλωτή, ενώ άλλοτε επιστρέφει από τον καταναλωτή στην πηγή.



α



β

Σχ. 17.26.

Στιγμιαία τάση, ένταση και ισχύς καταναλωτή που παρουσιάζει φασική απόκλιση
 α) $\varphi = \pi/2$, β) $\varphi = -\pi/2$.

Η μέση της τιμή είναι μηδέν. Η ισχύς αυτή ονομάζεται **στιγμιαία ισχύς αντιδράσεως**.

17.2.1 Ισχύς συντονισμένου κυκλώματος.

Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς η πραγματική ισχύς που παρέχει η πηγή σε κατάσταση συντονισμού ($\varphi = 0$) είναι:

$$P = UI_0 \cos \varphi = UI_0 = I_0^2 R \quad (17.16)$$

δηλαδή το κύκλωμα απορροφά αποκλειστικά πραγματική ισχύ από την πηγή, που καταναλώνεται στην ωμική του αντίσταση R ($P_a = 0$). Επειδή το ρεύμα είναι μέγιστο έπεται ότι και η πραγματική ισχύς είναι μέγιστη. Άρα:

Όταν ένα κύκλωμα είναι συντονισμένο μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή πραγματική ισχύς από την πηγή στην ωμική αντίσταση του κυκλώματος.

Στο εσωτερικό του κυκλώματος υπάρχει αποταμιευμένη ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου. Η ενέργεια αυτή συγκεντρώνεται περιοδικά εναλλάξ στο πηνίο και στον πυκνωτή. Αυτή η αιώρηση (ταλάντωση) της ενέργειας ανάμεσα στη μαγνητική μορφή (πηνίο) και την ηλεκτρική μορφή (πυκνωτής) θυμίζει αντίστοιχα φαινόμενα που συμβαίνουν σε ένα εκκρεμές: η ενέργεια του εκκρεμούς περνά διαδοχικά από την κινητική στη δυναμική μορφή. Γι' αυτό το συντονισμένο κύκλωμα ονομάζεται και **κυμαινόμενο** κύκλωμα. Η ταλάντωση έχει συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος. Το παράλληλο κύκλωμα LC συμπεριφέρεται στο συντονισμό σαν να περιλαμβάνει αποκλειστικά έναν ωμικό αντιστάτη $Z_0 = L/RC$. Στον αντιστάτη αυτόν καταναλώνεται η ενέργεια που προσφέρει η πηγή. Η ενέργεια αυτή καλύπτει τις απώλειες Joule του κυκλώματος. Στο εσωτερικό του κυκλώματος έχουμε πάλι ταλάντωση της ενέργειας όπως στο κύκλωμα συντονισμού σειράς. Και στις δύο περιπτώσεις ο ρόλος της πηγής είναι να εξισορροπεί τις απώλειες ισχύος του κυμαινόμενου κυκλώματος και να συντηρεί τα εναλλασσόμενα ρεύματα που κυκλοφορούν στο κύκλωμα.

Παράδειγμα 17.2.1.

Στα άκρα πηνίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $u = 220\sqrt{2} \eta\mu 314 t$. Η ενεργός τιμή της εντάσεως του ρεύματος που το διαρρέει είναι $I = 10$ A. Αν η πραγματική ισχύς που καταναλώνει το πηνίο είναι 880 W ζητούνται:

- Ο συντελεστής ισχύος.
 - Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.
- α) Από τη μορφή της τάσεως προκύπτει:

$$U = 220 \text{ V} \quad \text{και} \quad \omega = 314 \text{ rad/s}$$

$$\text{Είναι} \quad P = UI \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{UI} \rightarrow \cos \varphi = \frac{880}{220 \cdot 10} = 0,4$$

- Εστω R η ωμική αντίσταση απωλειών του πηνίου (Αν το πηνίο ήταν ιδανικό θα έπρεπε η πραγματική ισχύς να ήταν μηδέν) θα έχουμε:

$$\text{συνφ} = \frac{R}{Z} \quad (1) \quad \text{και} \quad Z = \frac{U}{I} \quad (2)$$

$$\text{Από τη (2) προκύπτει:} \quad Z = \frac{220}{10} = 22 \, \Omega$$

$$\text{και από την (1): } R = Z \text{συνφ} = 22 \cdot 0,4 = 8,8 \, \Omega$$

$$\text{Είναι } Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \rightarrow Z^2 = R^2 + X_L^2 \rightarrow X_L^2 = 22^2 - 8,8^2 \rightarrow \omega^2 L^2 = 22^2 - 8,8^2 \rightarrow$$

$$L = \sqrt{\frac{22^2 - 8,8^2}{314^2}} \quad H = 64,1 \, \text{mH}$$

Παράδειγμα 17.2.2.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 17.2γ. Οι ενδείξεις των βολτομέτρων είναι $U_1 = 180 \, \text{V}$, $U_2 = 200 \, \text{V}$ και $U_3 = 100 \, \text{V}$. Ζητούνται:

α) Ο συντελεστής ισχύος του πηνίου.

β) Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος.

α) Κατασκευάζουμε το πολικό διάγραμμα (σχ. 17.2δ).

Οι ενδείξεις των οργάνων παρέχουν: Η V_1 την ενεργό τάση στα άκρα του κυκλώματος ($V_1 = U = 180 \, \text{V}$), η V_2 την τάση U_{RL} στα άκρα του πηνίου ($V_2 = U_{RL} = 200 \, \text{V}$) και η V_3 την τάση U_C ($V_3 = U_C = 100 \, \text{V}$). Από το πολικό διάγραμμα προκύπτει:

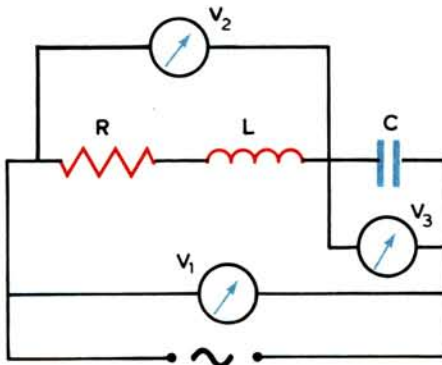
$$U_{RL}^2 = U_R^2 + U_L^2 \quad (1)$$

$$\text{και} \quad U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

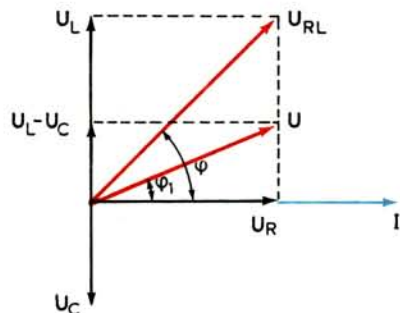
$$U_{RL}^2 - U^2 = U_L^2 - (U_L - U_C)^2 = 2U_L U_C - U_C^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow U_L = \frac{U_{RL}^2 - U^2 + U_C^2}{2U_C} = \frac{4 \cdot 10^4 - 18^2 \cdot 10^2 + 10^4}{2 \cdot 10^2} =$$



Σχ. 17.2γ.

Κύκλωμα παραδείγματος 17.2.2.



Σχ. 17.2δ.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος σχήματος 17.2γ.

$$= 2 \cdot 10^2 - 9 \cdot 18 + 50 \rightarrow U_L = 88 \text{ V}$$

οπότε η (1) δίνει:

$$U_R^2 = U_{RL}^2 - U_L^2 \rightarrow U_R = \sqrt{200^2 - 88^2} = 179,6 \text{ V}$$

Ο συντελεστής ισχύος του πηνίου είναι:

$$\text{συνφ} = \frac{U_R}{U_{RL}} = \frac{179,6}{200} = 0,9$$

β) Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος είναι:

$$\text{συνφ}_1 = \frac{U_R}{U} = \frac{179,6}{180} \approx 1$$

Παράδειγμα 17.2.3.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 17.2ε όπου: $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $L = 0,3 \text{ H}$
 $C = 30 \mu\text{F}$, $U = 220 \text{ V}$ και $f = 50 \text{ Hz}$

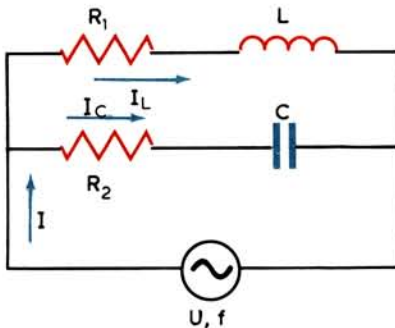
Ζητούνται:

- α) Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος.
 β) Η πραγματική ισχύς.

α) Κατασκευάζουμε το πολικό διάγραμμα (σχ. 17.2στ). Προβάλλουμε το ρεύμα I στον άξονα U και στον άξονα y ($y \perp u$). Γνωρίζουμε ότι η προβολή της συνισταμένης δύο ανυσμάτων σε ένα άξονα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών των συνιστωσών. Άρα:

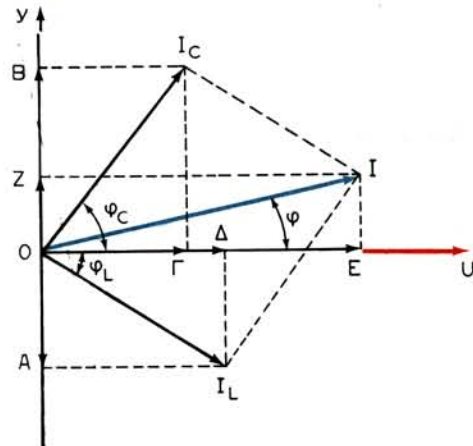
$$(OZ) = (OB) - (OA) = I_C \eta\mu\phi_C - I_L \eta\mu\phi_L \quad (1)$$

και $(OE) = (OG) + (OD) = I_C \sigma\eta\nu\phi_C + I_L \sigma\eta\nu\phi_L \quad (2)$



Σχ. 17.2ε.

Κύκλωμα παραδείγματος 17.2.3.



Σχ. 17.2στ.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος σχήματος 17.2ε.

οπότε

$$I = \sqrt{(OZ)^2 + (OE)^2} = \sqrt{(I_C \eta_{\mu\phi_C} - I_L \eta_{\mu\phi_L})^2 + (I_C \sigma_{\mu\phi_C} + I_L \sigma_{\mu\phi_L})^2} \quad (3)$$

$$\text{και} \quad \sigma_{\mu\phi} = \frac{(OE)}{I} = \frac{I_C \sigma_{\mu\phi_C} + I_L \sigma_{\mu\phi_L}}{I} \quad (4)$$

$$\text{Είναι} \quad X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,3 = 94,2 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106,1 \Omega$$

$$Z_L = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 + 94,2^2} = 137,4 \Omega$$

$$Z_C = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{80^2 + 106,1^2} = 132,9 \Omega$$

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{220}{137,4} = 1,60 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{220}{132,9} = 1,66 \text{ A}$$

$$\sigma_{\mu\phi_L} = \frac{R_1}{Z_L} = \frac{100}{137,4} = 0,728$$

$$\sigma_{\mu\phi_C} = \frac{R_2}{Z_C} = \frac{80}{132,9} = 0,602$$

$$\eta_{\mu\phi_L} = \frac{X_L}{Z_L} = \frac{94,2}{137,4} = 0,686$$

$$\eta_{\mu\phi_C} = \frac{X_C}{Z_C} = \frac{106,1}{132,9} = 0,798$$

Με αντικατάσταση στις (1) και (2) έχουμε:

$$(OZ) = 1,66 \cdot 0,798 - 1,6 \cdot 0,686 = 0,227$$

$$\text{και} \quad (OE) = 1,66 \cdot 0,602 + 1,6 \cdot 0,728 = 2,164$$

$$\text{και η (3) δίνει: } I = \sqrt{0,227^2 + 2,164^2} = 2,18 \text{ A}$$

Με αντικατάσταση στην (4) προκύπτει:

$$\sigma_{\mu\phi} = \frac{2,164}{2,18} = 0,993$$

$$\text{θ) } P = U I \sigma_{\mu\phi} = 220 \cdot 2,18 \cdot 0,993 = 476 \text{ W.}$$

17.3 Τρίγωνο ισχύος καταναλωτή.

Μετά την εισαγωγή των τριών ορισμών σχετικά με την απορροφούμενη ισχύ σε κυκλώματα ΕΡ στην παράγραφο 17.2, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε παρουσιάζοντας μια γεωμετρική κατασκευή που αποδίδει παραστατικά τα υπόψη μεγέθη, που ορίσαμε με τις σχέσεις:

$$P = U \cdot I \cos\varphi$$

$$P_{\varphi} = UI$$

και

$$P_a = UI \eta\mu\varphi$$

από τις οποίες προφανώς προκύπτει και η:

$$P_{\varphi} = \sqrt{P^2 + P_a^2} \quad (17.17)$$

που παρέχει τη φαινόμενη ισχύ συναρτήσει της ενεργούς και της άεργης ισχύος.

Ονομάζεται **τρίγωνο ισχύος** ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτεινούσα του οποίου ισούται προς τη φαινόμενη ισχύ ενός καταναλωτή, οι δε κάθετες πλευρές προς τις τιμές της πραγματικής και της άεργης ισχύος αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 17.3α.

Από το τρίγωνο ισχύος προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η φασική απόκλιση (φ) τόσο μεγαλύτερη είναι η άεργος ισχύς (P_a) και τόσο μικρότερη η πραγματική ισχύς (P) που καταναλώνεται σε μια κατανάλωση υπό σταθερή φαινόμενη ισχύ ($P_{\varphi}^2 = P^2 + P_a^2$).

Αν διαιρέσουμε κάθε πλευρά του τριγώνου ισχύος με την τάση U μπορούμε να κατασκευάσουμε το **τρίγωνο των ρευμάτων** (σχ. 17.3β).

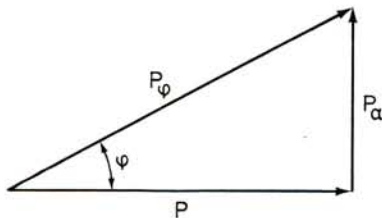
Από το τρίγωνο αυτό προκύπτει ότι το ρεύμα I είναι το γεωμετρικό άθροισμα δύο συνιστώσων. Της συνιστώσας:

$$I_B = I \cos\varphi \quad (17.18)$$

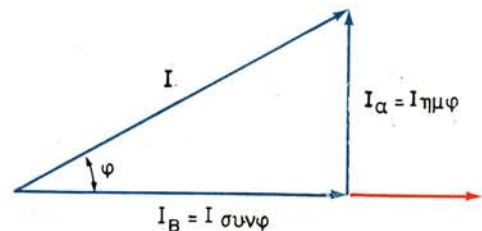
που ονομάζεται **βαττικό ρεύμα** και της συνιστώσας:

$$I_a = I \eta\mu\varphi \quad (17.19)$$

που ονομάζεται **άεργο ρεύμα**.



Σχ. 17.3α.
Τρίγωνο ισχύος.



Σχ. 17.3β.
Τρίγωνο ρευμάτων.

17.4 Βελτίωση του συντελεστή ισχύος.

Από τη σχέση $P = UI \cos\phi$ προκύπτει:

$$I = \frac{P}{U \cos\phi} \quad (17.20)$$

Από τη σχέση (17.20) βλέπουμε ότι για σταθερή πραγματική (μέση) ισχύ και τάση τροφοδοτήσεως η ένταση του ρεύματος είναι αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή ισχύος. Αν π.χ. χρησιμοποιήσουμε για μια ορισμένη εργασία (π.χ. για άντληση νερού) δύο κινητήρες της αυτής ισχύος και τάσεως τροφοδοτήσεως, αλλά με διαφορετικούς συντελεστές ισχύος, ο κινητήρας με το μικρότερο συντελεστή ισχύος θα απορροφήσει από το δίκτυο ρεύμα μεγαλύτερης εντάσεως. Αυτό συνεπάγεται αύξηση των θερμικών απωλειών (I^2R), μεγαλύτερη πτώση τάσεως στη γραμμή μεταφοράς και ελάττωση του βαθμού αποδόσεως της εγκαταστάσεως.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια συσκευή (ή, κατά προέκταση, ένα ηλεκτρικό δίκτυο) συμφέρει να λειτουργεί με το μικρότερο δυνατό συντελεστή ισχύος. Ας σημειωθεί ότι η ΔΕΗ επιβάλλει στους καταναλωτές που παρουσιάζουν χαμηλό συντελεστή ισχύος πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

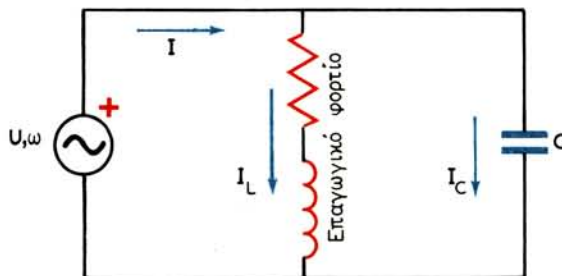
Για να βελτιώσουμε (αυξήσουμε) το συντελεστή ισχύος μιας συσκευής, συνδέουμε παράλληλα προς τη συσκευή ένα πυκνωτή. Για να βρούμε την κατάλληλη τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πρώτος τρόπος: Χρησιμοποίηση πολικού διαγράμματος. Στο σχήμα 17.4a έχει σχεδιασθεί επαγωγικό φορτίο στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή U και κυκλική συχνότητα ω . Ο συντελεστής ισχύος του φορτίου είναι $\cos\phi_1$. Για να τον αυξήσουμε συνδέουμε παράλληλα προς το φορτίο ένα πυκνωτή χωρητικότητας C .

Από το πολικό διάγραμμα (σχ. 17.4b) προκύπτει ότι το ρεύμα I του κλάδου της πηγής έπεται της τάσεως κατά γωνία $\phi_2 < \phi_1$, δηλαδή ο συντελεστής ισχύος αυξάνεται.

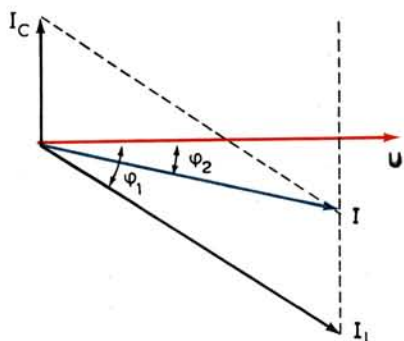
Το ρεύμα I_C που διαρρέει τον πυκνωτή είναι:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad (17.21)$$



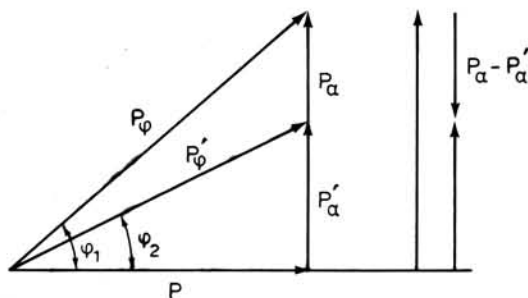
Σχ. 17.4a.

Βελτίωση $\cos\phi$ καταναλωτή με παράλληλη σύνδεση πυκνωτή.



Σχ. 17.46.

Πολικό διάγραμμα κυκλώματος του σχήματος 17.4α.



Σχ. 17.4γ.

Τρίγωνο ισχύος κυκλώματος του σχήματος 17.4α.

Από το πολικό διάγραμμα προκύπτει:

$$I_C = I_L \eta \mu \phi_1 - I \eta \mu \phi_2 \quad (17.22)$$

Μετά από τη σύνδεση του πυκνωτή η μέση ισχύς του κυκλώματος δεν μεταβάλλεται, επειδή η τάση τροφοδοτήσεως είναι η αυτή, δηλαδή:

$$P = U I_L \cos \phi_1 = U I \cos \phi_2 \quad (17.23)$$

Από τις (17.21), (17.22) και (17.23) προκύπτει:

$$C = \frac{P (\epsilon \phi \phi_1 - \epsilon \phi \phi_2)}{\omega U^2} \quad (17.24)$$

Δεύτερος τρόπος: Χρησιμοποίηση τριγώνου ισχύος. Κατασκευάζομε το τρίγωνο ισχύος με πλευρές τη μέση ισχύ P , τη φαινόμενη P_ϕ και την άεργη P_α (σχ. 17.4γ).

Από το τρίγωνο αυτό προκύπτει:

$$P_\alpha = P \epsilon \phi \phi_1 \quad (17.25)$$

Μετά από τη σύνδεση του πυκνωτή, επειδή η μέση ισχύς μένει η ίδια και ο συντελεστής ισχύος αυξάνεται, το νέο τρίγωνο ισχύος έχει μικρότερη φαινόμενη ισχύ P_ϕ , ενώ η διαφορά $P_\alpha - P'_\alpha$ θα πρέπει να είναι η άεργη ισχύς του παράλληλου πυκνωτή (αφού η πραγματική ισχύς P μένει η ίδια, ο πυκνωτής απορροφά μια χωρητική άεργη ισχύ που αφαιρείται από την επαγωγική άεργη ισχύ του φορτίου).

$$\text{Άρα} \quad P_\alpha - P'_\alpha = U I_C \eta \mu \frac{\pi}{2} = \frac{U^2}{X_C} = U^2 \omega C \quad (17.26)$$

$$\text{και} \quad P'_\alpha = P \epsilon \phi \phi_2 \quad (17.27)$$

Από τις (17.25), (17.26) και (17.27) προκύπτει:

$$C = \frac{P (\epsilon\phi\phi_1 - \epsilon\phi\phi_2)}{\omega U^2} \quad (17.28)$$

Σημείωση: Μία έμμεση μέτρηση του συντελεστή ισχύος ενός φορτίου μπορεί να γίνει με αμπερόμετρο, βολτόμετρο και βαττόμετρο:

$$\begin{aligned} \text{συν}\phi &= \frac{UI \text{ συν}\phi}{UI} = \frac{\text{μέση ισχύς}}{\text{φαινόμενη}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{συν}\phi &= \frac{\text{ένδειξη βαττομέτρου}}{\text{ένδειξη βολτομέτρου} \times \text{ένδειξη αμπερομέτρου}} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 17.4.1.

Κινητήρας με επαγωγική συμπεριφορά έχει πραγματική ισχύ 3675 W και λειτουργεί με εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής 220 V και συχνότητας 50 Hz. Ο συντελεστής ισχύος του κινητήρα είναι 0,75. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με τον κινητήρα, για να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος του και να γίνει 0,85 (σχ. 17.4α).

$$\text{Είναι} \quad \text{συν}\phi_1 = 0,75 \rightarrow \phi_1 = 41;5 \rightarrow \epsilon\phi\phi_1 = 0,8847$$

$$\text{και} \quad \text{συν}\phi_2 = 0,85 \rightarrow \phi_2 = 31;8 \rightarrow \epsilon\phi\phi_2 = 0,62$$

(Για τον υπολογισμό της $\epsilon\phi\phi_1$ και της $\epsilon\phi\phi_2$ μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε

$$\text{και τη σχέση:} \quad \epsilon\phi^2 \phi = \frac{\eta\mu^2 \phi}{\text{συν}^2 \phi} \rightarrow \epsilon\phi\phi = \frac{\sqrt{1 - \text{συν}^2 \phi}}{\text{συν}\phi}$$

Η χωρητικότητα C του παράλληλου πυκνωτή βρίσκεται από τη σχέση (17.24).

$$\begin{aligned} C &= \frac{P (\epsilon\phi\phi_1 - \epsilon\phi\phi_2)}{2\pi f \cdot U^2} = \frac{3675 (0,8847 - 0,62)}{314,220^2} = \\ &= 63,5 \cdot 10^{-6} \text{ F} \rightarrow C = 63,5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 17.4.2.

Επαγωγικό φορτίο ισχύος 1200 W έχει συντελεστή ισχύος 0,6. Όταν συνδεόμαστε παράλληλα με το φορτίο ένα πυκνωτή, ο συντελεστής ισχύος γίνεται 0,9. Ζητούνται:

α) Η φαινόμενη ισχύς μετά τη διόρθωση του συντελεστή ισχύος.

β) Η άεργη ισχύς του πυκνωτή (σχ. 17.4α).

α) Από το τρίγωνο ισχύος (σχ. 17.4γ) προκύπτει ότι η φαινόμενη ισχύς P_ϕ , πριν από τη σύνδεση του πυκνωτή, είναι:

$$P_\phi = \frac{P}{\text{συν}\phi_1} = \frac{1200}{0,6} = 2000 \text{ VA}$$

Μετά από τη σύνδεση του πυκνωτή γίνεται:

$$P_{\phi}' = \frac{P}{\text{συν}\phi_2} = \frac{1200}{0,9} = 1333 \text{ VA}$$

6) Η άεργη ισχύς του πυκνωτή είναι:

$$P_{\alpha} - P_{\alpha}' = \sqrt{P_{\phi}^2 - P^2} - \sqrt{P_{\phi}'^2 - P^2} \rightarrow$$

$$P_{\alpha} - P_{\alpha}' = \sqrt{4 \cdot 10^6 - 1.44 \cdot 10^6} - \sqrt{1333^2 - 1.44 \cdot 10^6} \rightarrow$$

$$P_{\alpha} - P_{\alpha}' = 1020 \text{ VAr}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΩΟ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

18.1 Εισαγωγή.

Αντικειμενικός σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η επίλυση, στη μόνιμη κατάσταση, κυκλωμάτων που τροφοδοτούνται με εναλλασσόμενο ρεύμα. Ήδη, από την παράγραφο 15.2 έχουμε αναφέρει ότι όλοι οι νόμοι και οι σχέσεις που αποδείχτηκαν στο δεύτερο τόμο του βιβλίου για τα συνεχή ρεύματα (Νόμος του Ohm, Κανόνες του Kirchhoff, Θεωρήματα ηλεκτρικών δικτύων) αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για τις **στιγμιαίες τιμές** μεταβαλλομένων – και συνεπώς και εναλλασσομένων – ρευμάτων. Στα πλαίσια του κεφαλαίου 16 επιλύσαμε, κάνοντας χρήση της πιο πάνω αρχής, ορισμένα σχετικά απλά κυκλώματα ΕΡ. Όμως, η μέθοδος του ανυσματικού λογισμού που χρησιμοποιήσαμε, μολονότι σχετικά απλή, αδυνατεί να εξυπηρετήσει στη γενικότερη περίπτωση επιλύσεως συνθετοτέρων κυκλωμάτων. Στην πράξη την επίλυση κυκλωμάτων ΕΡ διευκολύνει, όπως θα καταφανεί διεξοδικά στη συνέχεια, η χρησιμοποίηση της **μεθόδου του μιγαδικού λογισμού**. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό αφού πρώτα υπενθυμίσουμε τις βασικές αρχές του μιγαδικού λογισμού, θα δείξουμε πώς μπορούμε να επιλύουμε με το μιγαδικό λογισμό κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος. Θα μας δοθεί, τέλος, η ευκαιρία να εμπεδώσουμε τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού με αρκετά παραδείγματα κυκλωμάτων ΕΡ που θα επιλύσουμε.

18.2 Στοιχεία μιγαδικού λογισμού.

Ορίζεται, κατ' αρχήν, ως **φανταστικός αριθμός** η τετραγωνική ρίζα ενός οποιουδήποτε αρνητικού πραγματικού αριθμού. Π.χ. οι $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-12}$, $\sqrt{-5}$ είναι φανταστικοί αριθμοί. Συμβολίζουμε την τετραγωνική ρίζα του -1 ως:

$$j = \sqrt{-1}$$

ονομάζουμε δε την ποσότητα αυτή ως **φανταστική μονάδα**. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στα βιβλία των μαθηματικών χρησιμοποιείται το σύμβολο «i» για τη φανταστική μονάδα. Στα βιβλία ηλεκτροτεχνίας χρησιμοποιούμε το σύμβολο j ώστε να γίνεται διάκριση από το σύμβολο της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος.

Εύκολα προκύπτει ότι: $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$ κ.λπ.

Ο οποιοσδήποτε φανταστικός αριθμός μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της φανταστικής μονάδας ως εξής:

$$\sqrt{-\beta} = \sqrt{-1} \sqrt{\beta} = j\beta$$

Αν a, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν, ονομάζομε **μιγαδικό αριθμό** z τον αριθμό που έχει μορφή:

$$z = a + j\beta \quad (18.1)$$

Ο αριθμός a αποτελεί το **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z , ενώ ο $j\beta$ το **φανταστικό μέρος**.

Επειδή για $\beta = 0$ είναι $z = a + j0$ και για $a = 0$ είναι $z = 0 + j\beta$ συμπεραίνομε ότι κάθε αριθμός πραγματικός ή φανταστικός μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι δύο μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = a_1 + j\beta_1 \quad \text{και} \quad z_2 = a_2 + j\beta_2$$

να είναι μεταξύ τους ίσοι, είναι:

$$a_1 = a_2 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_2$$

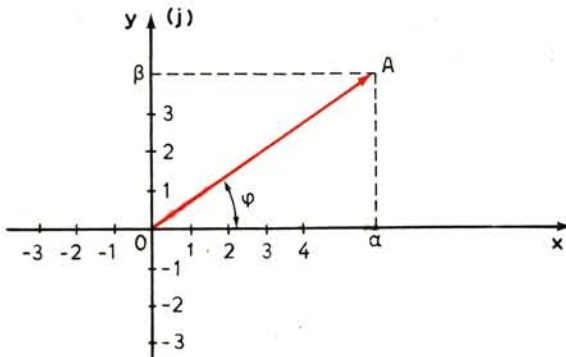
Διατύπωση ανισοτήτων μεταξύ μιγαδικών αριθμών δεν έχει νόημα.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί ονομάζονται **συζυγείς** αν έχουν ίσα πραγματικά μέρη, ενώ τα φανταστικά τους μέρη διαφέρουν κατά το πρόσημο. Π.χ. οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = a_1 + j\beta_1 \quad \text{και} \quad z_2 = a_1 - j\beta_1$$

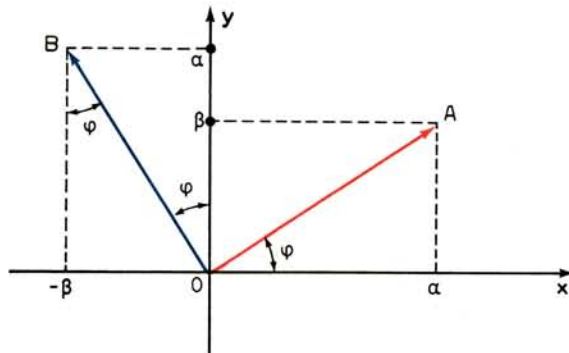
είναι συζυγείς.

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + j\beta$ μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά ως εξής: Σε επίπεδο ορίζομε ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων, όπου χρησιμοποιείται η ίδια μονάδα μετρήσεως και για τους δύο άξονες. Στον άξονα τετμημένων (x) απεικονίζομε το πραγματικό μέρος a του μιγαδικού αριθμού, ενώ στον άξονα των τεταγμένων (y) απεικονίζομε το φανταστικό μέρος $j\beta$ ή σωστότερα μήκος ίσο προς το συντελεστή β του φανταστικού μέρους, όπως φαίνεται στο σχήμα 18.2α. Το επίπεδο αυτό στο οποίο



Σχ. 18.2α.

Μιγαδικό διάνυσμα στο επίπεδο του Gauss.



Σχ. 18.26.

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί j .

απεικονίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί ονομάζεται κατ' άλλους **μιγαδικό επίπεδο**, κατ' άλλους **επίπεδο Gauss** και κατά τρίτους **επίπεδο Argand**.

Το σημείο O , της αρχής των συντεταγμένων και το σημείο $A(a, \beta)$ ορίζουν ένα διάνυσμα OA το οποίο λέμε ότι παριστάνει στο επίπεδο Gauss το μιγαδικό αριθμό $z = a + j\beta$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πολλαπλασιάζουμε το μιγαδικό αριθμό $z = a + j\beta$ επί j . Τότε προκύπτει ο μιγαδικός αριθμός $z' = ja - \beta = -\beta + ja$ ο οποίος παριστάνεται στο σχήμα 18.26 ως διάνυσμα OB . Εύκολα προκύπτει ότι τα διανύσματα OA (a, β) και OB ($-\beta, a$) είναι μεταξύ τους κάθετα. Άρα, πολλαπλασιασμός επί $-j$ στρέφει το αρχικό άνυσμα κατά γωνία ίση με $-\pi/2$. Γι' αυτό ο παράγοντας j ονομάζεται και **στροφέας 90° ($\pi/2$)**.

Ορίζουμε ως **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + j\beta$, τον πραγματικό θετικό αριθμό:

$$|z| = \sqrt{a^2 + \beta^2} \quad (18.2)$$

Είναι φανερό ότι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $|z|$ ισούται προς το μέτρο OA του ανύσματος που τον παριστά στο επίπεδο Gauss, δηλαδή:

$$\rho = |z| \quad (18.3)$$

Ονομάζουμε **όρισμα** ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + j\beta$ τη γωνία φ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\varphi = \text{τοξ εφ} \frac{\beta}{a} \quad (18.4)$$

Από απλή εποπτεία στο σχήμα 18.2α προκύπτει ότι το όρισμα μιγαδικού αριθμού είναι γωνία εξ ορισμού ίση προς την κλίση του ανύσματος που τον παριστά στο επίπεδο Gauss.

18.2.1 Μορφές γραφής μιγαδικών αριθμών.

Η μορφή γραφής μιγαδικών αριθμών:

$$Z = a + j\beta \quad (18.5)$$

την οποία ήδη έχουμε εισάγει ονομάζεται **ορθογώνια** ή **καρτεσιανή μορφή**. Θα γνωρίσουμε, στη συνέχεια, μερικούς ακόμη τρόπους γραφής μιγαδικών οι οποίες, όπως θα διαπιστώσουμε σύντομα, διευκολύνουν το λογισμό.

Από τις σχέσεις (18.2) και (18.4) ή από απ' ευθείας εποπτεία στο σχήμα 18.2α προκύπτουν οι σχέσεις:

$$a = \rho \cos \varphi \quad (18.6) \quad \text{και} \quad \beta = \rho \sin \varphi \quad (18.7)$$

Από τις (18.5), (18.6) και (18.7) προκύπτει:

$$z = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (18.8)$$

Η μορφή γραφής μιγαδικού αριθμού, σύμφωνα με τη σχέση (18.8) ονομάζεται **τριγωνομετρική μορφή**, παρέχει δε εμφανώς το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού.

Από τη σχέση (18.8) παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi} &= -\rho \sin \varphi + j \rho \cos \varphi = \rho j \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{j} \right) = \\ &= \rho j (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \text{γιατί} \quad -\frac{1}{j} = j \end{aligned}$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{dz}{d\varphi} = jz \rightarrow \frac{dz}{z} = j d\varphi \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{z} = j\varphi + C \rightarrow \ln z = j\varphi + C \quad (18.9)$$

Για $\varphi = 0$ η (18.8) δίνει $z = \rho$ και η (18.9) δίνει:

$$\ln z = \ln \rho = C$$

$$\text{Άρα} \quad \ln z = j\varphi + \ln \rho \rightarrow \ln z - \ln \rho = j\varphi \rightarrow$$

$$\ln \frac{z}{\rho} = j\varphi \rightarrow \frac{z}{\rho} = e^{j\varphi} \rightarrow$$

$$\boxed{z = \rho e^{j\varphi}} \quad (18.10)$$

όπου φ το όρισμα σε ακτίνια (rad).

Η μορφή γραφής μιγαδικών αριθμών σύμφωνα με τη σχέση (18.10) ονομάζεται **εκθετική μορφή** και από την (18.10) ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να ορισθεί συναρτήσει του μέτρου του και του ορίσματος του, συνηθίζεται δε να συμβολίζεται, χάριν συντομίας, επίσης:

$$z = \rho \angle \varphi \quad (18.11)$$

Η μορφή γραφής μιγαδικού αριθμού σύμφωνα με τη σχέση (18.11) ονομάζεται **πολική μορφή**.

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να παρασταθεί υπό τις εξής τέσσερις μορφές:

$$\text{καρτεσιανή μορφή} \quad z = a + j\beta \quad (18.12)$$

$$\text{τριγωνομετρική μορφή} \quad z = \rho (\cos\varphi + j\eta\mu\varphi) \quad (18.13)$$

$$\text{εκθετική μορφή} \quad z = \rho e^{j\varphi} \quad (\varphi = \text{rad}) \quad (18.14)$$

$$\text{πολική μορφή} \quad z = \rho \angle \varphi \quad (18.15)$$

Ας δούμε τώρα, πώς υλοποιούνται οι πιο πάνω μορφές γραφής μιγαδικού αριθμού σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω λοιπόν μιγαδικός αριθμός:

$$z = 40 + 30j$$

Το μέτρο του είναι:

$$\rho = |z| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$$

Επειδή $a = 40 > 0$ και $\beta = 30 > 0$ το αντίστοιχο διάνυσμα θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Το όρισμά του είναι:

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{a} = \frac{30}{40} = 0,75 \rightarrow \varphi = 36,9^\circ \text{ ή}$$

$$\varphi = 180^\circ + 36,9^\circ = 216,9^\circ \text{ (Η τιμή αυτή απορρίπτεται)}$$

$$\text{Επειδή} \quad 36,9^\circ = 2\pi \cdot \frac{36,9}{360} = 0,643 \text{ rad}$$

θα έχουμε σύμφωνα με την (18.13):

$$z = 50 (\cos 36,9^\circ + j\eta\mu 36,9^\circ)$$

σύμφωνα με την (18.14):

$$z = 50 e^{j0,643}$$

και σύμφωνα με την (18.15):

$$z = 50 \angle 36,9^\circ$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με μια τελευταία παρατήρηση:

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο συζυγής $z^* = a - j\beta$ του μιγαδικού αριθμού $z = a + j\beta = \rho \angle \varphi$ μπορεί να γραφεί ως:

$$z^* = a - j\beta = \rho (\cos\varphi - j\eta\mu\varphi) = \rho e^{-j\varphi} = \rho \angle -\varphi \quad (18.16)$$

18.2.2 Πράξεις επί των μιγαδικών αριθμών.

Θα ολοκληρώσουμε τη σύντομη αυτή ανασκόπηση στοιχείων του μιγαδικού λογισμού ορίζοντας τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών και παρουσιάζοντας την πλέον εύχρηστη μορφή τους για την πραγματοποίηση κάθε μιας από αυτές. Σε κάθε περίπτωση αριθμητικής πράξεως θα θεωρήσουμε, χάριν συντομίας, ότι εμπλέκονται δύο μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = a_1 + j\beta_1 = \rho_1 e^{j\varphi_1} = \rho_1 \angle \varphi_1$$

και

$$z_2 = a_2 + j\beta_2 = \rho_2 e^{j\varphi_2} = \rho_2 \angle \varphi_2$$

α) Πρόσθεση.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί μπορεί να προστεθούν, όπου βρίσκονται στην καρτεσιανή τους μορφή, ως εξής:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(\beta_1 + \beta_2) \quad (18.17)$$

δηλαδή προστίθενται χωριστά τα πραγματικά και χωριστά τα φανταστικά μέρη για να σχηματισθεί ένας νέος μιγαδικός αριθμός.

β) Αφαίρεση.

Αντίστοιχα με ότι συμβαίνει στην πρόσθεση, δύο μιγαδικοί αριθμοί μπορεί να αφαιρεθούν, όταν βρίσκονται στην καρτεσιανή τους μορφή, ως εξής:

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(\beta_1 - \beta_2) \quad (18.18)$$

δηλαδή αφαιρούνται χωριστά τα πραγματικά και χωριστά τα φανταστικά μέρη για να σχηματισθεί ένας νέος μιγαδικός αριθμός.

γ) Πολλαπλασιασμός.

Ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών σε καρτεσιανή μορφή οδηγεί στην εξής, σχετικά δύσχρηστη, σχέση:

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + j\beta_1)(a_2 + j\beta_2) = a_1 a_2 + ja_1 \beta_2 + ja_2 \beta_1 - \beta_1 \beta_2 = \\ &= (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2) + j(a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1) \end{aligned} \quad (18.19)$$

Όμως, ο πολλαπλασιασμός γίνεται πολύ ευκολότερα αν χρησιμοποιηθεί η εκθετική μορφή:

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\varphi_1} \rho_2 e^{j\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (18.20)$$

ή η πολική μορφή:

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2 \quad (18.21)$$

Από τη σχέση (18.21) προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός

$$z = z_1 z_2$$

όπου

$$z_1 = \rho_1 \angle \varphi_1$$

και

$$z_2 = 1 \angle \varphi_2$$

δηλαδή

$$z = \rho_1 \angle \varphi_1 + \varphi_2 \quad (18.22)$$

συνεπάγεται **στροφή** του ανύσματος που παριστά το μιγαδικό αριθμό z_1 κατά γωνία φ_2 .

Τέλος, επίσης από τη σχέση (18.21) προκύπτει ότι κατά την ύψωση σε δύναμη μιγαδικού αριθμού, λαμβάνομε:

$$z^y = z.z \dots z = \rho^y \angle y\varphi \quad (18.23)$$

δ) Διαίρεση.

Για να διαιρεθούν δύο μιγαδικοί αριθμοί, όταν βρίσκονται σε καρτεσιανή μορφή, χρειάζεται να πολλαπλασιασθεί αριθμητής και παρονομαστής επί το συζυγή του παρονομαστή:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + j\beta_1}{a_2 + j\beta_2} = \frac{(a_1 + j\beta_1)(a_2 - j\beta_2)}{(a_2 + j\beta_2)(a_2 - j\beta_2)} = \\ &= \frac{a_1a_2 + \beta_1\beta_2 + j(a_2\beta_1 - a_1\beta_2)}{a_2^2 + \beta_2^2} \end{aligned}$$

ή

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + \beta_1\beta_2}{a_2^2 + \beta_2^2} + j \frac{a_2\beta_1 - a_1\beta_2}{a_2^2 + \beta_2^2} \quad (18.24)$$

Όμως, η διαίρεση γίνεται πολύ ευκολότερα αν χρησιμοποιηθεί η εκθετική μορφή:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\varphi_1}}{\rho_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (18.25)$$

ή η πολική μορφή:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2 \quad (18.26)$$

18.3 Διατύπωση ημιτονοειδών συναρτήσεων με εκθετικές – Μιγαδική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών.

Έστω ότι σε ένα κύκλωμα υφίσταται ημιτονοειδής διέγερση – τάσεως ή εντάσεως – της μορφής:

$$a(t) = A \eta\mu(\omega t + \varphi) \quad (18.27)$$

Όπως αμέσως προκύπτει από τις σχέσεις (18.13) και (18.14) η διέγερση αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$a(t) = \Phi M [A e^{j(\omega t + \varphi)}] \quad (18.28)$$

όπου με το σύμβολο $\Phi M[z]$ συμβολίζουμε το συντελεστή του φανταστικού μέρους του μιγαδικού αριθμού z .

Άρα ο μιγαδικός αριθμός

$$z = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (18.29)$$

ή το άνυσμά του στο επίπεδο Gauss μπορεί να αποτελεί *παραστατικό μέγεθος* της ημιτονοειδούς διεγέρσεως $a(t)$. Επιπροσθέτως η προβολή του ανύσματος αυτού στον άξονα των τεταγμένων (άξονας φανταστικού μέρους) παρέχει το μέτρο της στιγμιαίας τιμής του στρεφόμενου ανύσματος της ημιτονοειδούς διεγέρσεως $a(t)$.

Από τη σχέση (18.29) προκύπτει η:

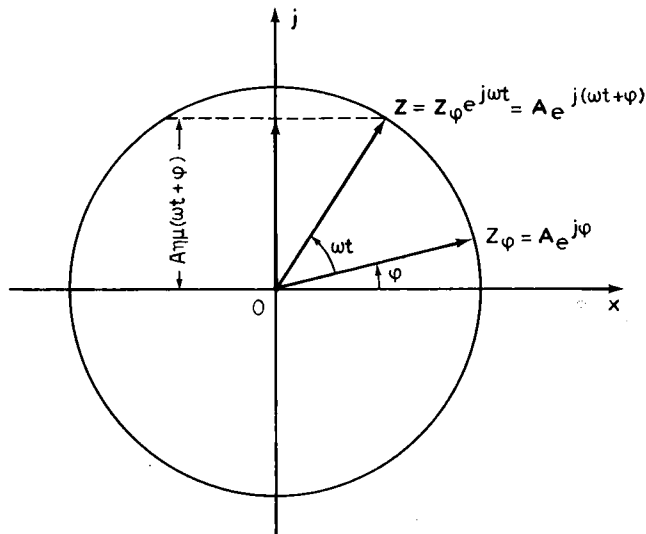
$$z = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad (18.30)$$

που σημαίνει ότι ο μιγαδικός αριθμός z γράφεται ως γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού

$$z_{\varphi} = A e^{j\varphi} \quad (18.31)$$

επί το μιγαδικό αριθμό με μέτρο 1 : $e^{j\omega t}$.

Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός αριθμός z_{φ} προσδιορίζει πλήρως τη διεγερση, διότι πολλαπλασιαζόμενος επί τον $e^{j\omega t}$, που εξαρτάται από τη συχνότητα της εναλλασσόμενης διεγέρσεως και τη χρονική στιγμή αναφοράς, παρέχει – μέσω του συντελεστή του φανταστικού του μέρους – τις στιγμιαίες τιμές της διεγέρσεως $a(t)$. Ας προσθέσουμε, τέλος, ότι σύμφωνα με τα αναφερθέντα στην παράγραφο 18.2.2(γ) αν το άνυσμα του μιγαδικού z_{φ} στραφεί κατά γωνία ωt παρέχει το μιγαδικό αριθμό z ο οποίος, τελικά, παριστά τη διεγερση $a(t)$, όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα 18.3.



Σχ. 18.3.

Παράσταση ημιτονοειδούς διεγέρσεως $a = A \eta\mu(\omega t + \varphi)$ στο επίπεδο Gauss.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε σε συνδυασμό και με όσα έχουμε αναπτύξει στο κεφάλαιο 16 σχετικά με τα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, καταλήγουμε στα εξής πρακτικά συμπεράσματα, χρήσιμα για την επίλυση κυκλωμάτων ΕΡ με τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού:

α) Το στρεφόμενο διάνυσμα μιας ημιτονοειδούς διεγέρσεως, τάσεως:

$$u(t) = U_0 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

ή εντάσεως

$$i(t) = I_0 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο Gauss είτε από ένα **στρεφόμενο διάνυσμα** αντίστοιχο μιγαδικού αριθμού με μέτρο U_0 ή I_0 αντίστοιχα και όρισμα $(\omega t + \varphi)$ είτε – χάριν απλότητας – από ένα **σταθερό άνυσμα** αντίστοιχο μιγαδικού αριθμού με το ίδιο μέτρο αλλά όρισμα φ . Επί πλέον, στην πράξη συνηθίζεται ως **μέτρο** του σταθερού αυτού ανύσματος να λαμβάνεται η **ενεργός τιμή** της αντίστοιχης διεγέρσεως. Ο μιγαδικός αριθμός ο οποίος παριστάνεται από το παραπάνω σταθερό άνυσμα μέτρου U ή I και ορίσματος φ ονομάζεται **παραστατικός μιγάδας** της αντίστοιχης διεγέρσεως $u(t)$ ή $i(t)$.

β) Ο παραστατικός μιγάδας που αντιστοιχεί σε διέγερση, π.χ.

$$u(t) = \sqrt{2} U \eta\mu(\omega t + \varphi) \quad (18.32)$$

μπορεί να εμφανίζεται με μια από τις μορφές:

$$\bar{u} = U_x + j U_y \quad (18.33)$$

$$\bar{u} = U (\sigma\upsilon\upsilon\varphi + j \eta\mu\varphi) \quad (18.34)$$

$$\bar{u} = U e^{j\varphi} \quad (18.35)$$

$$\bar{u} = U \underline{\varphi} \quad (18.36)$$

Δηλαδή, συμπερασματικά, με το συμβολισμό $\bar{u} = U \underline{\varphi}$ εννοούμε το μιγαδικό αριθμό u , το μέτρο του οποίου ισούται με την ενεργό τιμή της τάσεως:

$$u = \sqrt{2} U \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

και το όρισμά του με τη φάση της φ .

γ) Με το μετασχηματισμό μιας ημιτονοειδούς διεγέρσεως στον παραστατικό της μιγάδα παύουν να εμφανίζονται τα μεγέθη της συχνότητας (ω) και του χρόνου (t). Αυτό διότι εννοείται ότι ο μετασχηματισμός όλων των **ισοσύχνων** διεγέρσεων ενός κυκλώματος αναφέρεται στην **ίδια χρονική στιγμή**. Ας επισημάνουμε επίσης ότι στις περιπτώσεις αναλύσεως κυκλωμάτων ΕΡ στη μόνιμη κατάσταση η συχνότητα των αναπτυσσομένων διεγέρσεων (τάσεων - εντάσεων) είναι η ίδια με την συχνότητα της πηγής, όπως αναλυτικά αποδείξαμε στο κεφάλαιο 16. Γι' αυτό και ο μετασχηματισμός μιας διεγέρσεως σε παραστατικό μιγάδα αναφέρεται και ως μετασχηματισμός στο **πεδίο της συχνότητας**.

δ) Ο μετασχηματισμός μιας ημιτονοειδούς διεγέρσεως (σχέση 18.27) σε μιγα-

δικό αριθμό (σχέσεις 18.29 ή 18.31) παρέχει μεγάλη ευκολία στο λογισμό, όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να διαπιστώσουμε διεξοδικά στις παραγράφους που ακολουθούν.

Αυτό πρακτικά οφείλεται στην απλοποίηση των εκφράσεων και των υπολογισμών, όταν χρησιμοποιούνται εκθετικές συναρτήσεις αντί των τριγωνομετρικών.

Ας ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή με την επισήμανση ότι οι ισόσυχνες ημιτονοειδείς διεγέρσεις αν και **μεταβάλλονται χρονικά** είναι εφικτό να παρίστανται στο επίπεδο Gauss από σταθερά ανύσματα μιγαδικών αριθμών που αναφέρονται όλα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται αποκλειστικά για λόγους ευκολίας στους υπολογισμούς. Το διάνυσμα του παραστατικού μιγάδα **δεν είναι το ίδιο** με το στρεφόμενο διάνυσμα της ημιτονοειδούς διεγέρσεως αλλά αποτελεί **παραστατικό της διάνυσμα** που αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η οποία συνήθως λαμβάνεται ως $t = 0$.

Παράδειγμα 18.3.1.

→ Να μετατραπεί σε πολική μορφή η καρτεσιανή μορφή του διανύσματος
 $A = 60 + 80j$.

Είναι
$$\rho = |\vec{A}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

και
$$\epsilon\phi\phi = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \rightarrow \phi = 53,1^\circ$$

Επομένως
$$\vec{A} = 100 \angle 53,1^\circ$$

Παράδειγμα 18.3.2.

Να μετατραπεί σε καρτεσιανή μορφή η πολική μορφή του διανύσματος

→
$$\vec{A} = 35 \angle -25^\circ$$

Είναι
$$\begin{aligned} \vec{A} &= 35 \cos(-25^\circ) + j35 \eta\mu(-25^\circ) = \\ &= 35 \cdot 0,905 - j35 \cdot 0,425 \rightarrow \vec{A} = 31,8 - j14,8 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 18.3.3.

Να διατυπωθούν σε πολική και καρτεσιανή μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί που αποτελούν παραστατικά διανύσματα των χρονικών συναρτήσεων:

α) $u(t) = \sqrt{2} \eta\mu\omega t$.

β) $u(t) = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\omega t$.

α) Σύμφωνα με όσα ήδη έχουμε αναφέρει στο εδάφιο β της παραγράφου αυτής, σχέσεις (18.32) έως (18.36), παραστατικό διάνυσμα της

$$u(t) = \sqrt{2} \eta\mu \omega t$$

αποτελεί, σε πολική μορφή: $\bar{u} = 1 \angle 0^\circ$

Η καρτεσιανή του μορφή προκύπτει από την τριγωνομετρική, ως:

$$\bar{u} = 1 (\text{συν } 0^\circ + j\eta\mu 0^\circ) = (1 + j \cdot 0) \text{ V}$$

β) Η χρονική διεγερση: $u(t) = \sqrt{2}$ συνωτ

$$\text{γράφεται: } u(t) = \sqrt{2} \text{ συν}\omega t = \sqrt{2} \eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Άρα η πολική μορφή του αντίστοιχου μιγαδικού αριθμού είναι:

$$\bar{u} = 1 \angle 90^\circ$$

και η καρτεσιανή:

$$\bar{u} = 1(\text{συν } 90^\circ + j \eta\mu 90^\circ) = (0 + j) \text{ V}$$

Παράδειγμα 18.3.4.

Να μετατραπούν σε πολική και καρτεσιανή μορφή οι χρονικές συναρτήσεις:

α) $u(t) = 20\eta\mu(\omega t + 80^\circ)$

β) $i(t) = 2 \text{ συν}(1000t + \pi/4)$

α) Σύμφωνα με τις σχέσεις (18.32) έως (18.36) προκύπτει:

$$u(t) = 20 \eta\mu(\omega t + 80^\circ) = \frac{20}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 80^\circ) = 14,4 \sqrt{2} \eta\mu(\omega t + 80^\circ)$$

Άρα η πολική μορφή του αντίστοιχου παραστατικού μιγαδικού ανύσματος θα είναι:

$$\bar{u} = 14,4 \angle 80^\circ$$

Ενώ η καρτεσιανή του μορφή:

$$\bar{u} = 14,4 (\text{συν } 80^\circ + j \eta\mu 80^\circ) = 2,50 + j 14,18 \text{ V}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} i(t) &= 2 \text{ συν} \left(1000t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \eta\mu \left(1000t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \sqrt{2} \eta\mu \left(1000t + \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Άρα η πολική μορφή του αντίστοιχου παραστατικού μιγαδικού ανύσματος θα είναι:

$$\bar{i} = \sqrt{2} \angle \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \angle 135^\circ$$

ενώ η καρτεσιανή του μορφή:

$$\bar{i} = \sqrt{2} (\text{συν } 135^\circ + j \eta\mu 135^\circ) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (-1 + j) \text{ A}$$

Παράδειγμα 18.3.5.

Να μετατραπεί σε πολική μορφή η καρτεσιανή μορφή του διανύσματος $\bar{i} = (4 + 3j) \text{ A}$ και να βρεθεί η αντίστοιχη χρονική συνάρτηση αν η περίοδος της είναι $628 \mu\text{s}$.

$$\text{Είναι } |\bar{i}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ A} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi\phi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4} \rightarrow \phi = 36,9^\circ$$

Άρα:

$$\text{Πολική μορφή: } \bar{i} = 5 \angle 36,9^\circ \text{ A}$$

Χρονική συνάρτηση: Υπολογίζουμε πρώτα την κυκλική συχνότητα ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{628 \cdot 10^{-6}} = 10.000 \text{ rad/s}$$

Άρα:

$$i(t) = I_0 \eta\mu(\omega t + \phi) = 5 \sqrt{2} \eta\mu(10.000 t + 36,9^\circ)$$

18.4 Σύνθετη μιγαδική αντίσταση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος.

Προκειμένου να προχωρήσουμε, στην επόμενη παράγραφο, στη διατύπωση νόμων και θεωρημάτων για την επίλυση κυκλωμάτων, όταν αυτά τροφοδοτούνται από ημιτονοειδείς ισόσυχνες διεγέρσεις, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού, πρέπει να εισάγουμε πρώτα τη μέθοδο της αναπαράστασης των χαρακτηριστικών των κυκλωματικών στοιχείων (ωμικών αντιστάσεων, αυτεπαγωγών, χωρητικοτήτων) στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή να ορίσουμε τη σύνθετη **μιγαδική αντίσταση ενός κυκλώματος**.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι στα άκρα κυκλώματος εφαρμόζεται τάση:

$$u = U_0 \eta\mu(\omega t + \phi_1) \quad (18.37)$$

$$\text{ή} \quad \bar{u} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \angle \phi_1 = U \angle \phi_1 \quad (18.38)$$

με αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως:

$$i = I_0 \eta\mu(\omega t + \phi_2) \quad (18.39)$$

$$\text{ή} \quad \bar{i} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \angle \phi_2 = I \angle \phi_2 \quad (18.40)$$

όπου \bar{u} , \bar{i} , τα αντίστοιχα παραστατικά διανύσματα των μιγαδικών αριθμών της τάσεως και της εντάσεως σε πολική μορφή.

Ονομάζουμε **σύνθετη μιγαδική αντίσταση** ενός καταναλωτή που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενο ρεύμα, το πηλίκο:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{u}}{\bar{i}} \quad (18.41)$$

το οποίο, σύμφωνα με τις σχέσεις ορισμού (18.38) και (18.40), μπορεί να γραφεί υπό τις εξής μορφές:

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} \frac{|\varphi_1|}{|\varphi_2|} = \frac{U}{I} \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{|\varphi|} = \frac{U}{I} \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \quad (18.42)$$

όπου $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ η διαφορά φάσεως **τάσεως - εντάσεως** στον καταναλωτή.

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση (18.42) η σύνθετη μιγαδική αντίσταση καταναλωτή είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο προς το πηλίκο της ενεργούς τάσεως προς την ενεργό ένταση του καταναλωτή και όρισμα ίσο με τη διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως στον καταναλωτή.

Παρατηρούμε επίσης, ότι το διάνυσμα της σύνθετης μιγαδικής αντιστάσεως στο επίπεδο Gauss **δεν περιστρέφεται**, όπως συμβαίνει με τα παραστατικά διανύσματα της τάσεως και της εντάσεως, εφόσον ορίζεται ως το πηλίκο δύο ισοσύχνων διανυσμάτων, που αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή.

Θα υπολογίσουμε, στη συνέχεια, τη σύνθετη μιγαδική αντίσταση μερικών χαρακτηριστικών καταναλωτών. Πριν προχωρήσουμε όμως, ας παρατηρήσουμε – αν και θα επανέλθουμε σε επόμενη παράγραφο – ότι η σχέση (18.41) αποτελεί τον αντίστοιχο **νόμο του Ohm** για ημιτονοειδείς εναλλασσόμενες διεγέρσεις, που διατυπώνεται χρησιμοποιώντας τα παραστατικά διανύσματα της τάσεως και εντάσεως καθώς και τη σύνθετη μιγαδική αντίσταση του καταναλωτή.

18.4.1 Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ωμικού καταναλωτή.

Τη συμπεριφορά ωμικού καταναλωτή σε εναλλασσόμενο ρεύμα έχουμε ήδη εξετάσει στην παράγραφο 16.2.

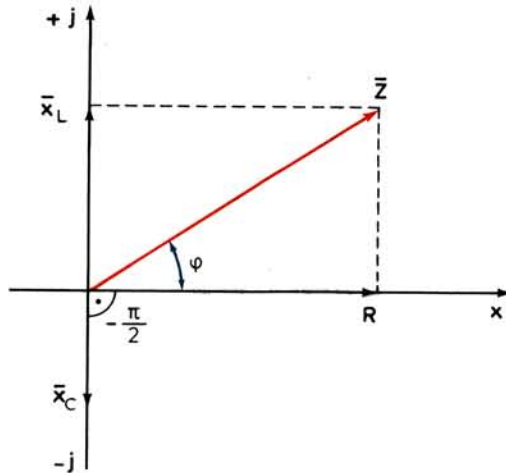
Σύμφωνα με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε ισχύει ο νόμος του Ohm για τις ενεργές τιμές τάσεως - εντάσεως, ενώ η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως είναι μηδέν. Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (18.42) η σύνθετη μιγαδική αντίσταση θα είναι:

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} = R \quad (18.43)$$

Δηλαδή: **η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ενός ωμικού καταναλωτή είναι πραγματικός αριθμός με τιμή ίση προς την ωμική αντίσταση του καταναλωτή**. Στο επίπεδο του Gauss η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ωμικού καταναλωτή παριστάνεται με διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του πραγματικού θετικού ημιάξονα (σχ. 18.4).

18.4.2 Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πηνίου.

Τη συμπεριφορά ιδανικού πηνίου σε εναλλασσόμενο ρεύμα έχουμε εξετάσει στην παράγραφο 16.3. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε οι ενεργές τιμές τάσεως - εντάσεως συνδέονται με τη σχέση (16.9), ενώ το ισόσυχνο της τάσεως διάνυσμα της εντάσεως έπεται κατά γωνία $\varphi = \pi/2$. Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (18.42) η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ενός ιδανικού πηνίου θα είναι:



Σχ. 18.4.

Παράσταση ωμικής (R), αυτεπαγωγικής (X_L) και χωρητικής (X_C) αντιστάσεως στο επίπεδο Gauss.

$$\bar{Z} = \bar{X}_L = \frac{U}{I} \frac{\begin{matrix} |0^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix}}{\begin{matrix} |90^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix}} = \frac{U}{I} \begin{matrix} |90^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix} = X_L e^{j\pi/2} = jX_L = j\omega L \quad (18.44)$$

όπου X_L η επαγωγική αντίσταση του πηνίου (σχέση 16.10).

Από τις παραπάνω εκφράσεις, της σχέσεως (18.44), που παρέχουν τη σύνθετη μιγαδική αντίσταση ενός ιδανικού πηνίου, προκύπτει ότι:

Η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πηνίου \bar{X}_L είναι θετικός φανταστικός αριθμός με μέτρο ίσο προς την επαγωγική αντίσταση του πηνίου. Στο επίπεδο Gauss η σύνθετη μιγαδική επαγωγική αντίσταση παριστάνεται με διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του θετικού ημιιάξονα των φανταστικών αριθμών (σχ. 18.4α).

18.4.3 Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πυκνωτή.

Τη συμπεριφορά ιδανικού πυκνωτή σε εναλλασσόμενο ρεύμα έχουμε εξετάσει στην παράγραφο 16.4. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε οι ενεργές τιμές τάσεως - εντάσεως συνδέονται με τη σχέση (16.17), ενώ το ισόσυχο της τάσεως διάνυσμα της εντάσεως προηγείται κατά γωνία $\varphi = \pi/2$. Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (18.42) η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ενός ιδανικού πυκνωτή θα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{Z} = \bar{X}_C &= \frac{U}{I} \frac{\begin{matrix} |0^\circ \\ \hline 90^\circ \end{matrix}}{\begin{matrix} |90^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix}} = \frac{U}{I} \begin{matrix} |90^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix} = X_C \begin{matrix} |90^\circ \\ \hline -90^\circ \end{matrix} \\ &= X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C = -\frac{j}{\omega C} \end{aligned} \quad (18.45)$$

όπου X_C η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή (σχέση 16.18).

Από τις παραπάνω εκφράσεις, της σχέσεως (18.45), που παρέχουν τη σύνθετη μιγαδική αντίσταση ενός ιδανικού πυκνωτή, προκύπτει ότι:

Η σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πυκνωτή X_C είναι αρνητικός φανταστικός αριθμός με μέτρο ίσο προς τη χωρητική αντίσταση του πυκνωτή. Στο επίπεδο Gauss η σύνθετη μιγαδική αντίσταση παριστάνεται με διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα των φανταστικών αριθμών (σχ. 18.4).

18.4.4 Σύνθετη μιγαδική αντίσταση κυκλώματος που περιέχει ωμικές, επαγωγικές και χωρητικές αντιστάσεις.

Στην περίπτωση ενός τέτοιου σύνθετου κυκλώματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σύνθετη μιγαδική αντίσταση είτε μεμονωμένων κλάδων της είτε και του συνολικού κυκλώματος, στηριζόμενοι στις εξής απλές παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός της σύνθετης μιγαδικής αντιστάσεως (σχέση 18.41) μας επέτρεψε να διατυπώσουμε το νόμο του Ohm σε κυκλώματα όπου αναπτύσσονται ημιτονοειδείς διεγέρσεις.
- Οι σχέσεις που προέκυψαν στην παράγραφο 5.9, σχετικά με τη συνδεσμολογία αντιστάσεων κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος **επεκτείνονται** και στην περίπτωση των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος, εφόσον αναπτύχθηκαν με βάση το νόμο του Ohm και την αρχή διατήρησης των ηλεκτρικών φορτίων.
- Κατά την επέκταση των παραπάνω σχέσεων, που ισχύουν για το συνεχές ρεύμα, σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, φροντίζουμε ώστε:
 - Τα μεγέθη των συνεχών τάσεων και εντάσεων, αναφερόμενα σε μια **συγκεκριμένη** χρονική στιγμή, να αντικαθίστανται από τα παραστατικά διανύσματα των αντιστοίχων ημιτονοειδών μεγεθών υπό μια από τις μορφές γραφής που εισήχθησαν στην παράγραφο 18.21.
 - Οι ωμικές αντιστάσεις κλάδων ή βρόχων να αντικαθίστανται από σύνθετες μιγαδικές αντιστάσεις καταναλωτών – ωμικών αντιστάσεων, αυτεπαγωγικών αντιστάσεων, χωρητικών αντιστάσεων – που συγκροτούν το κύκλωμα, οι οποίες υπολογίζονται από τις σχέσεις (18.43), (18.44) και (18.45) αντίστοιχα.

Σε **κύκλωμα σειράς RLC**, για παράδειγμα, η σύνθετη μιγαδική αντίσταση είναι:

$$\bar{Z} = R + \bar{X}_L + \bar{X}_C = R + jX_L - jX_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (18.46)$$

Το μέτρο της είναι:

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (18.47)$$

και το όρισμά της ϕ προκύπτει από την:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (18.48)$$

που αποτελεί και τη διαφορά φάσεως **τάσεως - εντάσεως** στο κύκλωμα, σύμφωνα με τη σχέση ορισμού (18.42) της μιγαδικής αντιστάσεως.

Ας υπενθυμίσουμε ότι αν:

$90^\circ > \phi > 0^\circ$ ($\epsilon\phi\phi > 0$): Η τάση προηγείται της εντάσεως και το κύκλωμα παρουσιάζει **επαγωγική συμπεριφορά**.

$0^\circ > \phi > -90^\circ$ ($\epsilon\phi\phi < 0$): Η τάση έπεται της εντάσεως και το κύκλωμα παρουσιάζει **χωρητική συμπεριφορά**.

$\phi = 0$ ($\epsilon\phi\phi = 0$): Τα διανύσματα τάσεως - εντάσεως είναι συγγραμμικά και το κύκλωμα παρουσιάζει **ωμική συμπεριφορά**.

Πριν ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή ας δώσουμε ένα ακόμη χρήσιμο ορισμό:

Ονομάζουμε **σύνθετη μιγαδική αγωγιμότητα** καταναλωτή που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενο ρεύμα, το πηλίκο:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{i}}{\bar{u}} \quad (18.49)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (18.41) και (18.49) καταλήγουμε στην:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad (18.50)$$

δηλαδή η σύνθετη μιγαδική αγωγιμότητα προκύπτει ως το αντίστροφο της σύνθετης μιγαδικής αντιστάσεως, σε αναλογία με ό,τι συμβαίνει για τα αντίστοιχα μεγέθη στο συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα (σχέση 5.24).

18.5 Νόμοι και θεωρήματα επιλύσεως κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος.

Μπορούμε ήδη να προχωρήσουμε στη διατύπωση νόμων και θεωρημάτων για την επίλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού, που αποτελεί άλλωστε τον αντικειμενικό σκοπό του κεφαλαίου. Η εργασία που έχουμε να κάνουμε είναι αρκετά απλή δοθέντος ότι δεν θα εισάγουμε νέους νόμους ή θεωρήματα, αλλά βασικά θα επεκτείνουμε κατάλληλα όσα αναπτύξαμε για το συνεχές ρεύμα (κεφ. 7 και 8) κάνοντας πλέον χρήση των αντιστοίχων μιγαδικών μεγεθών. Αφετηρία για τους συλλογισμούς που θα επιτρέψουν αυτή την επέκταση αποτελούν οι απλές παρατηρήσεις που κάναμε στην αρχή της παραγράφου 18.4.4 οι οποίες – συνοπτικά – επιτρέπουν τη διατύπωση του νόμου του Ohm σε κυκλώματα όπου αναπτύσσονται ισόσυχνες ημιτονοειδείς διεγέρσεις, εφόσον ακολουθηθούν οι συμβάσεις που εισήχθησαν εκεί, σχετικά με την αντικατάσταση των εμπλεκόμενων φυσικών μεγεθών, δηλαδή:

- Οι συνεχείς τάσεις και εντάσεις αντικαθίστανται από τα παραστατικά διανύσματα των μιγαδικών αριθμών των αντιστοίχων φυσικών μεγεθών.
- Οι ωμικές αντιστάσεις κλάδων ή βρόχων αντικαθίστανται από τα διανύσματα των συνθέτων μιγαδικών αντιστάσεων των καταναλωτών από τους οποίους συγκροτούνται, οι οποίες – κατά περίπτωση – υπολογίζονται από τις σχέσεις (18.40), (18.44) και (18.45).

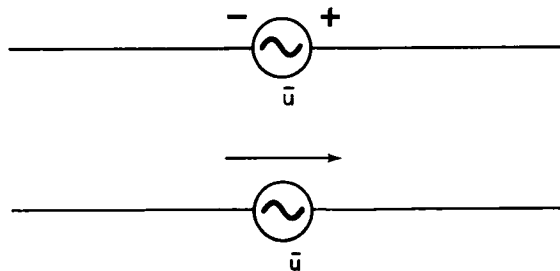
Θα διευκολύνει αρκετά τη συνέχεια της αναπτύξεως αν αναλύσουμε περισσότερο τις παραπάνω δύο προτάσεις καταλήγοντας στα εξής πρακτικά συμπεράσματα:

1) Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 18.3 τα ισόσυχνα εναλλασσόμενα μεγέθη που **μεταβάλλονται χρονικά** μπορεί να παρίστανται από στρεφόμενα ανύσματα μιγαδικών αριθμών που αναφέρονται όμως σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ώστε να αποτελούν έτσι σταθερά **παραστατικά διανύσματα** των υπόψη μεγεθών. Θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε όλα τα παραστατικά διανύσματα των ημιτονοειδών διεγέρσεων ενός κυκλώματος (HEΔ, πτώσεων τάσεως, εντάσεως) **να αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή**, η οποία συνήθως λαμβάνεται ως $t = 0$.

2) Στα κυκλώματα των εναλλασσομένων ρευμάτων δεν συμβολίζουμε τις στιγμιαίες τιμές των διεγέρσεων, αλλά τα αντίστοιχά τους παραστατικά διανύσματα **με συμβατική φορά** που θεωρείται ότι έχουν τη χρονική στιγμή αναφοράς. Αυτό δεν δημιουργεί καμία σύγχυση δοθέντος ότι οι φορές αυτές αποτελούν **στιγμιαίες ενδείξεις** τής φοράς ισοσύχνας στρεφομένων μεγεθών, που αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή.

3) Οι HEΔ των πηγών εναλλασσόμενου ρεύματος συμβολίζονται στα κυκλώματα όπως φαίνεται στο σχήμα 18.5α, με **συμβατική πολικότητα** που αποτελεί την πραγματική πολικότητα της πηγής κατά τη χρονική στιγμή αναφοράς όλων των υπολοίπων ημιτονοειδών διεγέρσεων του κυκλώματος. Το βέλος δείχνει την κατεύθυνση από το – προς το + μέσα στην πηγή.

4) Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 18.4 οι καταναλωτές (ωμικές αντιστάσεις, αυτεπαγωγές, χωρητικότητες) ενός κυκλώματος αναπτύσσουν «αντίσταση» όταν τίθενται υπό ημιτονοειδείς διεγέρσεις. Οι «αντιστάσεις» αυτές υπολογίζονται ως μιγαδικοί αριθμοί έτσι ώστε να ισχύει ο νόμος του Ohm για τα παραστατικά διανύσματα των ημιτονοειδών διεγέρσεων, αποτελούν δε σταθερά διανύσματα που ονομάζονται **σύνθετη μιγαδική αντίσταση** του κατα-



Σχ. 18.5α.

Συμβολισμός HEΔ πηγών εναλλασσόμενου ρεύματος.

ναλωτή. Ο υπολογισμός τους γίνεται σύμφωνα με τις σχέσεις (18.43), (18.44), (18.45) και (18.46) κατά περίπτωση.

5) Όπου, στα θεωρήματα, νόμους και σχέσεις του συνεχούς ρεύματος υπάρχει η έννοια «αλγεβρικό άθροισμα» αντικαθίσταται από την ισοδύναμή της, στο επίπεδο Gauss, «διανυσματικό άθροισμα».

6) Οι σχέσεις (5.47) και (5.54) που αναπτύχθηκαν για τη συνδεσμολογία ωμικών αντιστάσεων στο συνεχές ρεύμα επεκτείνονται και για **συνδεσμολογία συνθέτων μιγαδικών αντιστάσεων** κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος, εφόσον η απόδειξή τους στηρίχθηκε στο νόμο του Ohm και την αρχή διατήρησης των ηλεκτρικών φορτίων. Εξυπακούεται ότι τα αλγεβρικά αθροίσματα αντικαθίστανται από διανυσματικά αθροίσματα μιγαδικών αριθμών.

Με βάση τις παραπάνω σκέψεις καθώς και την υπόμνηση για την ισχύ – σε κάθε περίπτωση – της αρχής της διατήρησης των ηλεκτρικών φορτίων, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διατύπωση των νόμων και των θεωρημάτων που επιτρέπουν την επίλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος, στις παραγράφους που ακολουθούν.

18.5.1 Νόμος του Ohm.

Στο νόμο αυτό και στην ισχύ του στο εναλλασσόμενο ρεύμα αναφερθήκαμε ήδη αρκετές φορές σ' αυτό το κεφάλαιο. Επανερχόμαστε όμως, για λόγους πληρότητας της ύλης της παραγράφου αυτής, στη διατύπωση του νόμου του Ohm σε μιγαδική μορφή:

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} \quad (18.51)$$

όπου \bar{i} : το παραστατικό διάνυσμα του μιγαδικού αριθμού της ημιτονοειδούς εντάσεως ρεύματος ή για συντομία το **μιγαδικό ρεύμα**.
 \bar{u} : το παραστατικό διάνυσμα του μιγαδικού αριθμού της ημιτονοειδούς τάσεως ή για συντομία η **μιγαδική τάση**.
 \bar{Z} : η σύνθετη μιγαδική αντίσταση κλάδου του κυκλώματος που τίθεται υπό τάση \bar{u} .

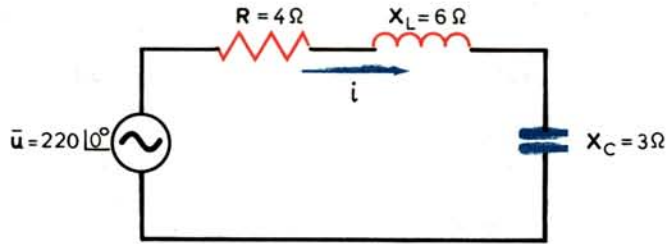
Παράδειγμα 18.5.1.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5θ(α) όπου:

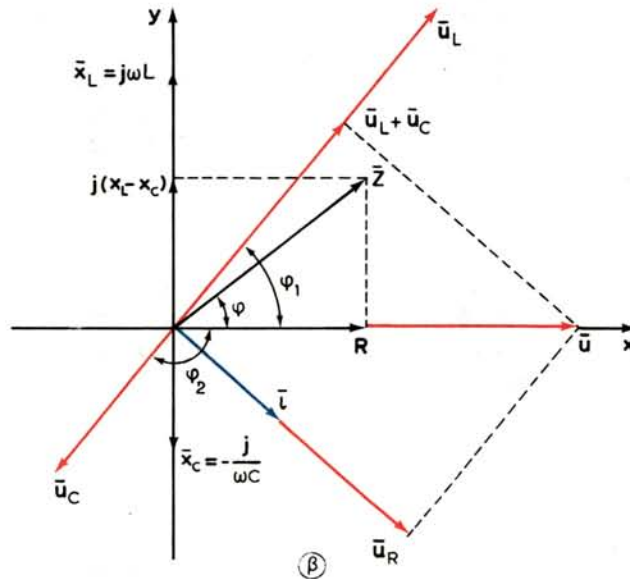
$$R = 4 \Omega, X_L = \omega L = 6 \Omega, X_C = \frac{1}{\omega C} = 3 \Omega$$

και η τάση στην αρχή των φάσεων ($t = 0$) είναι $\bar{u} = U = 220 \text{ V}$. Ζητούνται:

- Η μιγαδική αντίσταση \bar{Z} του κυκλώματος.
 - Το ρεύμα \bar{i} που διαρρέει το κύκλωμα.
 - Οι μιγαδικές τάσεις \bar{u}_R , \bar{u}_L και \bar{u}_C .
 - Η διανυσματική παράσταση των παραπάνω μεγεθών στο επίπεδο Gauss.
- α) Κατά τα αναφερόμενα στην παράγραφο 18.4.4 η σύνθετη μιγαδική αν-



α



β

Σχ. 18.56.

(α) Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.1. (β) Ανυσματική παράσταση μεγεθών του κυκλώματος.

τίσταση του κυκλώματος θα είναι (σχέση 18.46):

$$\bar{Z} = R + \bar{X}_L + \bar{X}_C = R + jX_L - jX_C = 4 + j3\Omega$$

Το μέτρο της \bar{Z} είναι: $|\bar{Z}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\Omega$

και το όρισμά της: $\epsilon\phi\phi = \frac{3}{4} \rightarrow \phi = 36,9^\circ$

β) Σύμφωνα με το νόμο του Ohm, σχέση (18.51) έχουμε:

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 \angle 36,9^\circ} \rightarrow \bar{i} = 44 \angle -36,9^\circ \text{ A}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος έπεται της τάσεως το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά.

- γ) Εφόσον καθένας καταναλωτής διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $\bar{i} = 44 \angle -36,9^\circ$ Α μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση στα άκρα του με βάση το νόμο του Ohm:

$$\bar{u}_R = R\bar{i} = 4 \cdot 44 \angle -36,9^\circ = 176 \angle -36,9^\circ \text{ V}$$

$$\bar{u}_L = \bar{i} X_L = 44 \angle -36,9^\circ \cdot 6j =$$

$$= 44 \angle -36,9^\circ \cdot 6 \angle 90^\circ = 264 \angle 53,1^\circ \text{ V}$$

$$\bar{u}_C = \bar{i} X_C = 44 \angle -36,9^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ = 132 \angle -126,9^\circ \text{ V}$$

Παρατηρούμε ότι η \bar{u}_L προηγείται της τάσεως \bar{u} κατά γωνία $\phi_1 = 53,1^\circ$ ενώ η \bar{u}_C έπεται κατά γωνία $\phi_2 = -126,9^\circ$.

- δ) Στο σχήμα 18.5β(β) φαίνεται η διανυσματική παράσταση των παραπάνω μεγεθών στο επίπεδο του Gauss.

Παράδειγμα 18.5.2.

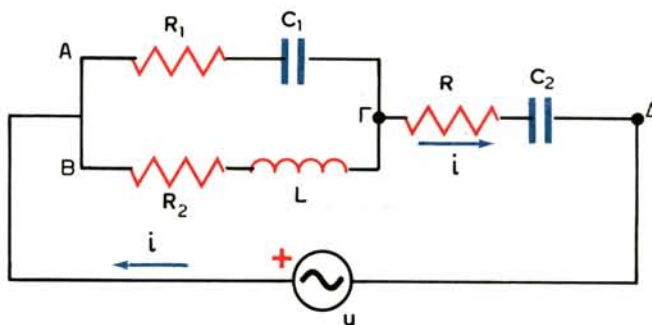
Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5γ όπου:

$$R_1 = 2 \Omega, \quad R_2 = 5 \Omega, \quad R_3 = 4 \Omega, \quad \omega L = 1 \Omega, \quad \frac{1}{\omega C_1} = 3 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = 5 \Omega \text{ και } \bar{u} = U = 220 \text{ V (στην αρχή των φάσεων)}$$

Ζητούνται:

- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.
- Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.
- Η συμπεριφορά του κυκλώματος.



Σχ. 18.5γ.

Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.2.

$$\alpha) \text{ Είναι: } \bar{Z}_{A\Gamma} = R_1 + \bar{X}_{C1} = 2 - 3j = 3,61 \angle -56,3^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_{B\Gamma} = R_2 + \bar{X}_L = 5 + j = 5,10 \angle 11,3^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_{\Gamma\Delta} = R_3 + \bar{X}_{C2} = 4 - 5j = 6,4 \angle -51,3^\circ \Omega$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } \bar{Z} &= \frac{\bar{Z}_{A\Gamma} \bar{Z}_{B\Gamma}}{\bar{Z}_{A\Gamma} + \bar{Z}_{B\Gamma}} + \bar{Z}_{\Gamma\Delta} = \frac{(2 - 3j)(5 + j)}{2 - 3j + 5 + j} + 4 - 5j = \\ &= \frac{13 - 13j}{7 - 2j} + 4 - 5j = \frac{(13 - 13j)(7 + 2j)}{(7 - 2j)(7 + 2j)} + 4 - 5j = \\ &= (2,2 - 1,22j) + 4 - 5j \rightarrow \bar{Z} = 6,2 - 6,22j \end{aligned}$$

$$\text{Το μέτρο της είναι: } |\bar{Z}| = \sqrt{6,2^2 + 6,22^2} \approx 8,8 \Omega$$

$$\text{και το όρισμά της: } \epsilon\phi\phi = \frac{-6,22}{6,2} \approx -1 \rightarrow \phi = -45^\circ$$

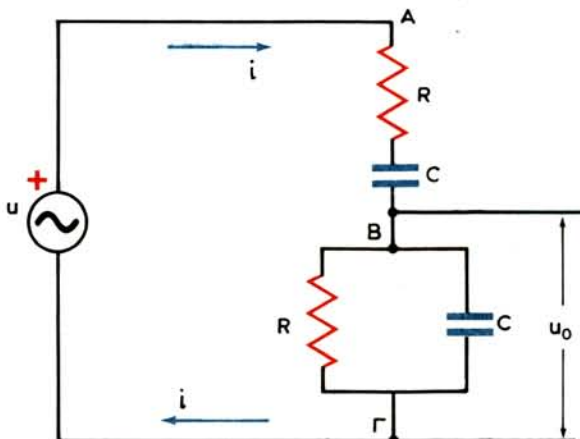
$$\beta) \quad \bar{i} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} = \frac{220}{8,8 \angle -45^\circ} = 25 \angle 45^\circ \text{ A}$$

δηλαδή η ενεργός του τιμή είναι $I = 25 \text{ A}$.

γ) Παρατηρούμε ότι η φάση της εντάσεως προηγείται της φάσεως της τάσεως (κατά γωνία ίση με 45°) επομένως το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά.

Παράδειγμα 18.5.3.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5δ. Σε ποια συχνότητα f η τάση εξόδου u_o βρίσκεται σε φάση με την τάση εισόδου u ;



Σχ. 18.5δ.
Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.3.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_1 = R - \frac{j}{\omega C} \quad \text{και} \quad \bar{Z}_{BF} = \bar{Z}_2 = \frac{R \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{R - \frac{j}{\omega C}} \rightarrow \\ \rightarrow \bar{Z}_2 = -\frac{jR}{Z_1 \omega C} \end{aligned} \quad (1)$$

Επειδή οι δύο τάσεις βρίσκονται σε φάση, ο λόγος τους:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_o} = \frac{U \angle \varphi}{U_o \angle \varphi} = \frac{U}{U_o}$$

είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Είναι} \quad \bar{u} = \bar{i}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \quad \text{και} \quad \bar{u}_o = \bar{i}Z_2$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{\bar{u}}{\bar{u}_o} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} + 1 = \frac{U}{U_o} \quad (2)$$

δηλαδή θα πρέπει ο λόγος $\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

Από την (1) προκύπτει:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = j \frac{Z_1^2 \omega C}{R} = j \frac{\omega^2 C^2 R^2 - 1 - j2\omega CR}{R\omega C} \rightarrow$$

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = 2 + j \left(\frac{\omega^2 C^2 R^2 - 1}{\omega RC} \right)$$

$$\text{και θα πρέπει:} \quad \omega^2 C^2 R^2 - 1 = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{RC} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\text{Στη συχνότητα αυτή η (2) δίνει:} \quad \frac{U}{U_o} = 2 + 1 = 3 \rightarrow U = 3U_o$$

18.5.2 Κανόνες του Kirchhoff.

Οι δύο αυτοί κανόνες οι οποίοι θεωρητικά – τουλάχιστον – επιτρέπουν την επίλυση κάθε κυκλώματος, όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 7.2 για το

συνεχές ρεύμα, διατυπώνονται, στην περίπτωση κυκλώματος όπου αναπτύσσονται ημιτονοειδείς διεγέρσεις, ως εξής:

1ος Κανόνας Kirchhoff ή πρόταση των κόμβων.

Το διανυσματικό άθροισμα των παραστατικών μιγαδικών διανυσμάτων των εντάσεων των ρευμάτων που αναφέρονται σε ένα κόμβο ενός δικτύου είναι ίσο με μηδέν:

$$\sum_{\nu=1}^n \bar{i}_{\nu} = 0 \quad (18.52)$$

2ος κανόνας Kirchhoff ή πρόταση των βρόχων.

Σε κάθε βρόχο κυκλώματος το διανυσματικό άθροισμα των παραστατικών μιγαδικών διανυσμάτων των ΗΕΔ των πηγών είναι ίσο προς το διανυσματικό άθροισμα των παραστατικών μιγαδικών διανυσμάτων των πτώσεων τάσεως στους κλάδους του υπόψη βρόχου:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu} \bar{u}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^m \bar{i}_{\mu} \cdot \bar{Z}_{\mu} \quad (18.53)$$

Προκειμένου να επιλυθεί κύκλωμα ΕΡ με τους δύο κανόνες Kirchhoff πρέπει να εφαρμόζονται όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 7.3, σχετικά με τη διαμόρφωση του συστήματος των εντάσεων των κλάδων του κυκλώματος καθώς και τα συμπεράσματα της παραγράφου 18.5. Αλλά την εφαρμογή των κανόνων Kirchhoff για την επίλυση κυκλώματος ΕΡ θα μας δοθεί η ευκαιρία να την εμπειδώσουμε καλύτερα στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Τέλος, ως παρατηρήσαμε ότι αναλογικά επεκτείνονται στο ΕΡ οι μέθοδοι:

- Των βροχικών εντάσεων, που αναπτύξαμε στην παράγραφο 7.5, και
- των κομβικών τάσεων, που αναπτύξαμε στην παράγραφο 7.6 εφόσον στηρίζονται αποκλειστικά στο δεύτερο και πρώτο κανόνα του Kirchhoff, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 18.5.4.

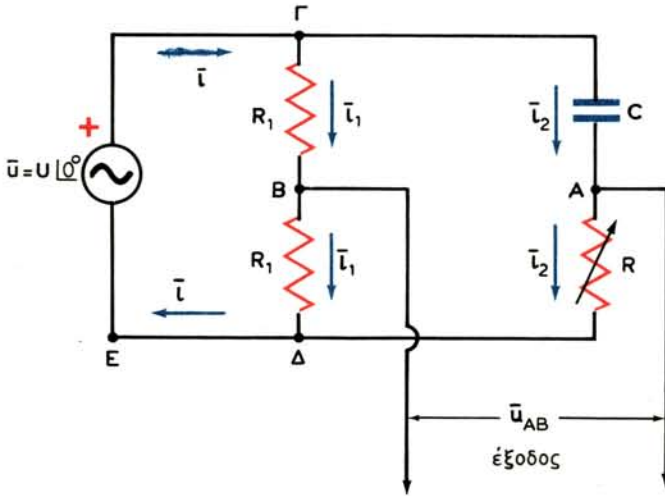
Το κύκλωμα του σχήματος 18.5ε είναι ένα «κύκλωμα διαφοράς φάσεως» που έχει την ικανότητα να μεταβάλλει τη φάση της τάσεως εξόδου από 0° - 180° , χωρίς να αλλάζει το μέτρο της. Τα μεγέθη, U , R , C και ω θεωρούνται γνωστά. Να δειχθεί ότι η τάση εξόδου \bar{u}_{AB} παραμένει σταθερή κατά μέτρο για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής αντιστάσεως R .

Για να υπολογισθεί η τάση \bar{u}_{AB} πρέπει προηγουμένως να υπολογισθούν οι εντάσεις των ρευμάτων i_1 και i_2 , δηλαδή να επιλυθεί το κύκλωμα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 18.5ε το απλό αυτό κύκλωμα έχει $\mu = 2$ κόμβους και $\lambda = 3$ κλάδους. Έτσι, λαμβάνομε:

- α) $\kappa - 1 = 1$ εξίσωση από τον α' κανόνα Kirchhoff, στον κόμβο Γ:

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 \quad (1)$$

- β) $\lambda - \kappa + 1 = 2$ εξισώσεις από τον β' κανόνα Kirchhoff, στους βρόχους:



Σχ. 18.5ε.
Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.4.

$$\Gamma\Delta\Delta\Gamma: \bar{u} = \bar{i}_1 R_1 + \bar{i}_1 R_1 = 2\bar{i}_1 R_1 \quad (2)$$

$$\Gamma\Delta\Delta\Gamma: \bar{u} = \bar{i}_2 X_C + \bar{i}_2 R \quad (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) λαμβάνομε:

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{2R_1} \quad \text{και} \quad \bar{i}_2 = \frac{\bar{u}}{R - jX_C}$$

Πλέον, η ζητούμενη διαφορά δυναμικού \bar{u}_{AB} μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\bar{u}_{AB} = \bar{u}_{A\Gamma} + \bar{u}_{\Gamma B} = \bar{u}_{\Gamma B} - \bar{u}_{\Gamma A} \quad (4)$$

$$\text{όπου } \bar{u}_{\Gamma B} = \bar{i}_1 R_1 = \frac{\bar{u}}{2} = \frac{U}{2} \angle 0^\circ \quad (5) \quad \text{και} \quad \bar{u}_{\Gamma A} = \bar{i}_2 X_C = -j \frac{UX_C}{R - jX_C} \quad (6)$$

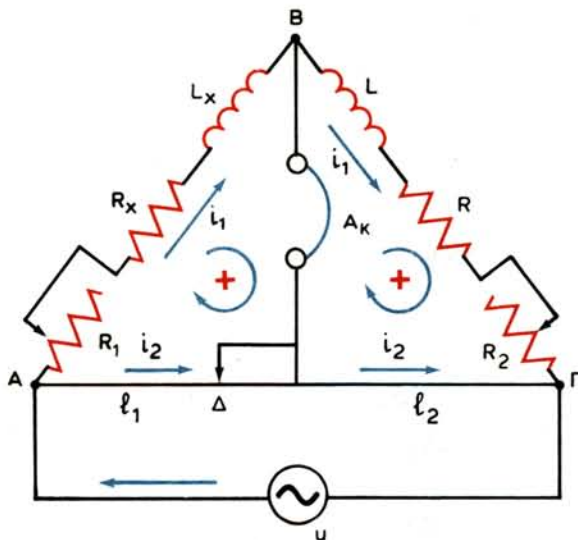
Από τις (4), (5) και (6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{AB} &= U \left(\frac{1}{2} + \frac{jX_C}{R - jX_C} \right) = U \left(\frac{1}{2} + \frac{X_C}{-j(R - jX_C)} \right) = \\ &= U \left(\frac{1}{2} + \frac{X_C}{-Rj - X_C} \right) = U \left(\frac{1}{2} - \frac{X_C}{Rj + X_C} \right) = \\ &= U \left(\frac{1}{2} - \frac{X_C(X_C - Rj)}{R^2 + X_C^2} \right) = U \left(\frac{1}{2} - \frac{X_C^2 - RX_Cj}{R^2 + X_C^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= U \left(\frac{1}{2} - \frac{X_C^2}{R^2 + X_C^2} + \frac{RX_C}{R^2 + X_C^2} j \right) \rightarrow \\
 |\bar{U}_{AB}| &= U_{AB} = U \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{X_C^2}{R^2 + X_C^2} \right)^2 + \frac{R^2 X_C^2}{(R^2 + X_C^2)^2}} = \\
 &= U \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{X_C^4}{(R^2 + X_C^2)^2} - \frac{X_C^2}{R^2 + X_C^2} + \frac{R^2 X_C^2}{(R^2 + X_C^2)^2}} = \\
 &= U \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{X_C^4 + R^2 X_C^2}{(R^2 + X_C^2)^2} - \frac{X_C^2(R^2 + X_C^2)}{(R^2 + X_C^2)^2}} = U \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow \\
 U_{\epsilon\xi} &= U_{AB} = \frac{U}{2} = \text{σταθερό.}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 18.5.5.

Η διάταξη του σχήματος 18.5στ αποτελεί γέφυρα εναλλασσόμενου ρεύματος με χορδή η οποία συγκροτείται ανάλογα με τη γέφυρα του Σ.Ρ. που μελετήσαμε στην παράγραφο 7.7.2, με αντικειμενικό σκοπό τον προσδιορισμό των ηλεκτρικών χαρακτηριστικών είτε πηνίου (συντελεστής αυτεπαγωγής, ωμική αντίσταση), όπως στην περίπτωση μας, είτε πυκνωτή. Το πηνίο με άγνωστη αυτε-



Σχ. 18.5στ.

Γέφυρα εναλλασσόμενου ρεύματος.

παγωγής (L_x) και ωμική αντίσταση (R_x) συνδέεται στον κλάδο AB σε σειρά με το ροοστάτη R_1 , ενώ στον κλάδο ΒΓ συνδέονται σε σειρά πηνίο γνωστής αυτεπαγωγής L και ωμικής αντιστάσεως R καθώς και ροοστάτης R_2 . Η ισορροπία της γέφυρας διαπιστώνεται με ζεύγος ακουστικών που συνδέονται στο διαγώνιο κλάδο ΒΔ, εφόσον στα ακουστικά δεν ακούγεται ήχος. Θα προσδιορίσουμε τα μεγέθη L_x , R_x του πηνίου από τις συνθήκες ισορροπίας της γέφυρας, που όπως θα δούμε είναι τώρα δύο.

Όταν η γέφυρα ισορροπεί ο κλάδος ΒΔ δεν διαρρέεται από ρεύμα. Θα έχουμε:

$$0 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_{AB} - \bar{I}_2 \cdot R_{\Delta\Delta} \quad (1)$$

$$\text{και} \quad 0 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_{B\Gamma} - \bar{I}_2 \cdot R_{\Delta\Gamma} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\bar{Z}_{AB}}{\bar{Z}_{B\Gamma}} = \frac{R_{\Delta\Delta}}{R_{\Delta\Gamma}} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow$$

$$\frac{R_1 + R_x + j\omega L_x}{R_2 + R + j\omega L} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow (R_1 + R_x) I_2 + j\omega L_x I_2 = (R_2 + R) I_1 + j\omega L I_1 \quad (3)$$

Υπενθυμίζουμε (παράγρ. 18.2) ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δύο μιγαδικοί αριθμοί να είναι ίσοι μεταξύ τους είναι η ισότητα των πραγματικών και φανταστικών μερών μεταξύ τους, αντίστοιχα. Άρα από την (3) λαμβάνουμε:

$$(R_1 + R_x) I_2 = (R_2 + R) I_1 \quad (4)$$

$$\omega L_x I_2 = \omega L I_1 \quad (5)$$

Είναι φανερό ότι από τις **δύο συνθήκες ισορροπίας** που προέκυψαν από την επίλυση του συγκροτηθέντος κυκλώματος εξασφαλίζουν τον προσδιορισμό των δύο μεγεθών L_x και R_x του πηνίου από τις σχέσεις:

$$L_x = L \frac{I_1}{I_2} \quad \text{και} \quad R_x = \frac{I_1}{I_2} (R_2 + R) - R_1$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να συγκροτήσουμε γέφυρα για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας πυκνωτή.

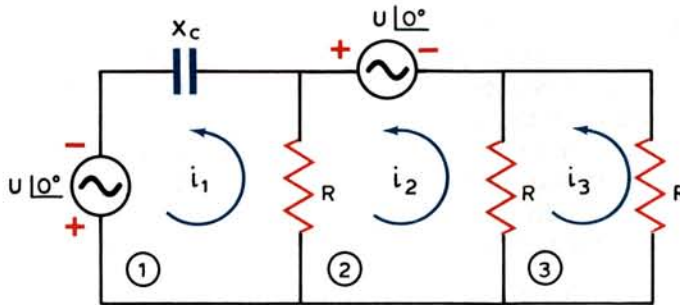
Παράδειγμα 18.5.6.

Στο δίκτυο του σχήματος 18.5ζ είναι $R = 1 \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 4 \Omega \quad \text{και} \quad \bar{u} = U \angle 0^\circ = 37 \angle 0^\circ$$

Να γραφούν οι εξισώσεις των βρόχων και να υπολογισθεί η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το βρόχο 1.

Οι εξισώσεις των τριών βρόχων, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην παράγραφο 7.5, είναι:



Σχ. 18.5ζ.

Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.6.

$$(R - jX_C)\bar{i}_1 - R\bar{i}_2 + 0 \cdot \bar{i}_3 = U \quad (1)$$

$$-R\bar{i}_1 + 2R\bar{i}_2 - R\bar{i}_3 = U \quad (2)$$

$$0 \cdot \bar{i}_1 - R\bar{i}_2 + R\bar{i}_3 = 0 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) υπολογίζουμε τα ρεύματα \bar{i}_1 , \bar{i}_2 και \bar{i}_3 .

Το ρεύμα \bar{i}_1 που διαρρέει το βρόχο 1 είναι:

$$\bar{i}_1 = \frac{\begin{vmatrix} U & -R & 0 \\ U & 2R & -R \\ 0 & -R & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R - 4j & -R & 0 \\ -R & 2R & -R \\ 0 & -R & R \end{vmatrix}} = \frac{2R^2U + R^2U - R^2U}{2R^2(R - 4j) - R^3 + R^2 - 4Rj} =$$

$$= \frac{2R^2U}{R^3 + R^2 - 4j(2R^2 + R)} = \frac{2 \cdot 37}{2 - 12j} = \frac{37}{1 - 6j} = \frac{37(1 + 6j)}{1^2 + 6^2} \rightarrow$$

$$\bar{i}_1 = 1 + 6j \text{ A}$$

Η ενεργός τιμή της εντάσεως είναι:

$$I_1 = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \approx 6,1 \text{ A}$$

18.5.3 Θεωρήματα ηλεκτρικών δικτύων E.P.

Όλα τα θεωρήματα της ηλεκτροτεχνίας που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 8 του βιβλίου ισχύουν και στο εναλλασσόμενο ρεύμα, όπως άλλωστε είχαμε αναφέρει και στην εισαγωγή του παραπάνω κεφαλαίου. Κατά την εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών στο εναλλασσόμενο ρεύμα πρέπει πάντοτε να έχουμε υπόψη και να εφαρμόζουμε αυστηρά όσα αναφέραμε στην παράγραφο 18.5 και ιδιαίτερα τα 6 πρακτικά συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε. Αυτό θα μας

εξασφαλίσει τη σωστή επέκταση σε κυκλώματα ΕΡ των θεωρημάτων:

- Του Κεηηnelly.
- Της επαλληλίας ή υπερθέσεως.
- Του Thevenin.
- Του Norton, και
- της αμοιβαιότητας ή μεταθέσεως όπως άλλωστε θα διαπιστώσουμε και σε παραδείγματα που ακολουθούν.

Τέλος, ως προς την εφαρμογή του θεωρήματος μέγιστης μεταφοράς ισχύος στο ΕΡ θα επανέλθουμε αναλυτικά στην παράγραφο 18.5.4.

Παράδειγμα 18.5.7.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5η(α) όπου: $\bar{u} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $R_3 = R = 2\Omega$, $X_C = 5\Omega$ και $X_L = 2\Omega$. Να υπολογισθεί η τάση u_{RL} στο φορτίο του πηνίου (R , X_L) με το θεώρημα του Thevenin.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Thevenin όπως αυτό αναπτύσσεται στην παράγραφο 8.4.1.

α) Υπολογισμός \bar{e}_T .

Υπολογίζουμε πρώτα την τάση μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β μετά την αφαίρεση του φορτίου, δηλαδή του πηνίου (R , X_L), όπως φαίνεται στο σχήμα 18.5η (β):

$$\bar{e}_T = \bar{u}_{AB} = \bar{u}_{AG} - \bar{u}_{BG} \quad (1)$$

Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες R_2 και R_4 υπολογίζονται απλά:

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{R_1 + R_2} = \frac{10 \angle 0^\circ}{10} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\bar{i}_2 = \frac{\bar{u}}{R_3 + R_4 + X_C} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 - 5j} = \frac{10(5 + 5j)}{50} = 1 + j = 1,41 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Άρα $\bar{u}_{AG} = \bar{i}_1 R_2 = 5 \angle 0^\circ \text{ V}$

και $\bar{u}_{BG} = \bar{i}_2 R_4 = 3 + 3j \text{ V}$

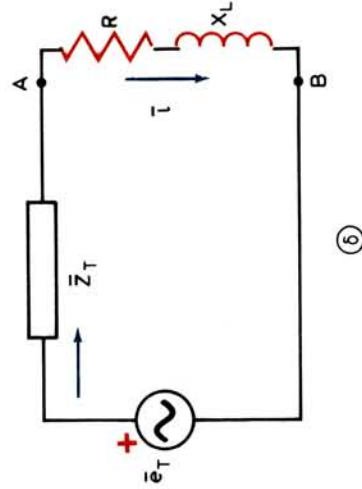
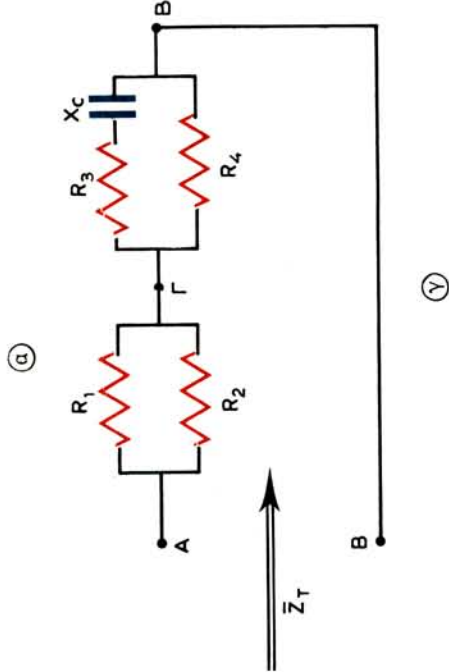
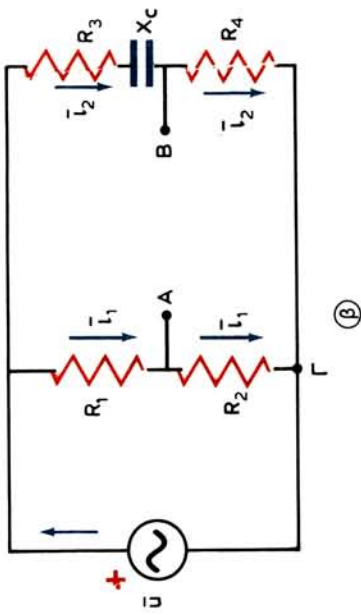
οπότε $\bar{e}_T = \bar{u}_{AB} = 5 - 3 - 3j = 2 - 3j \text{ V} = 3,61 \angle -56,31^\circ \text{ V}$

β) Υπολογισμός \bar{Z}_T .

Για να υπολογίσουμε την \bar{Z}_T αποσυνδέουμε το φορτίο (R , X_L) από το κύκλωμα και βραχυκυκλώνουμε την πηγή. Έτσι, προκύπτει το δίκτυωμα του σχήματος 18.5η(γ), η σύνθετη αντίσταση του οποίου \bar{Z}_{AB} ισούται με την \bar{Z}_T :

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{AG} + \bar{Z}_{GB} \rightarrow$$

$$\bar{Z}_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 (R_3 - jX_C)}{R_3 + R_4 - jX_C} =$$



Σχ. 18.5η.
 α) Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.6. β) Κύκλωμα για τον υπολογισμό της τάσεως \bar{e}_T . γ) Δικτύωμα του κυκλώματος για τον υπολογισμό της Z_T . δ) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

$$= 2,5 + \frac{3(2 - 5j)}{5 - 5j} = 2,5 + \frac{3(2 - 5j)(5 + 5j)}{50} =$$

$$= 2,5 + \frac{3(7 - 3j)}{10} = \frac{25 + 21 - 9j}{10} \rightarrow$$

$$\bar{Z}_T = 4,6 - 0,9 \Omega$$

Έτσι, καταλήγουμε στο ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin [σχ. 18.5η(δ)] από το οποίο έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{RL} = \bar{i}(R + jX_L) &= \frac{\bar{e}_T}{Z_T + R + X_L j} (R + jX_L) = \\ &= \frac{(2 - 3j)(2 + 2j)}{4,6 - 0,9j + 2 + 2j} = \frac{10 - 2j}{6,6 + 1,10j} = \frac{10,2 \angle -11,3^\circ}{6,70 \angle 9,5^\circ} \rightarrow \\ \rightarrow \bar{u}_{RL} &= 1,5 \angle -20,8^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 18.5.8.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5θ(α) όπου $\bar{u} = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$ και $R_1 = R = X_L = X_C = X_{C1} = 50 \Omega$.

Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R με το θεώρημα του Norton.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Norton όπως αυτό αναπτύσσεται στην παράγραφο 8.4.2. Θεωρούμε ως φορτίο την αντίσταση R και τον πυκνωτή C σε σειρά με αυτήν.

α) Υπολογισμός \bar{Z}_T .

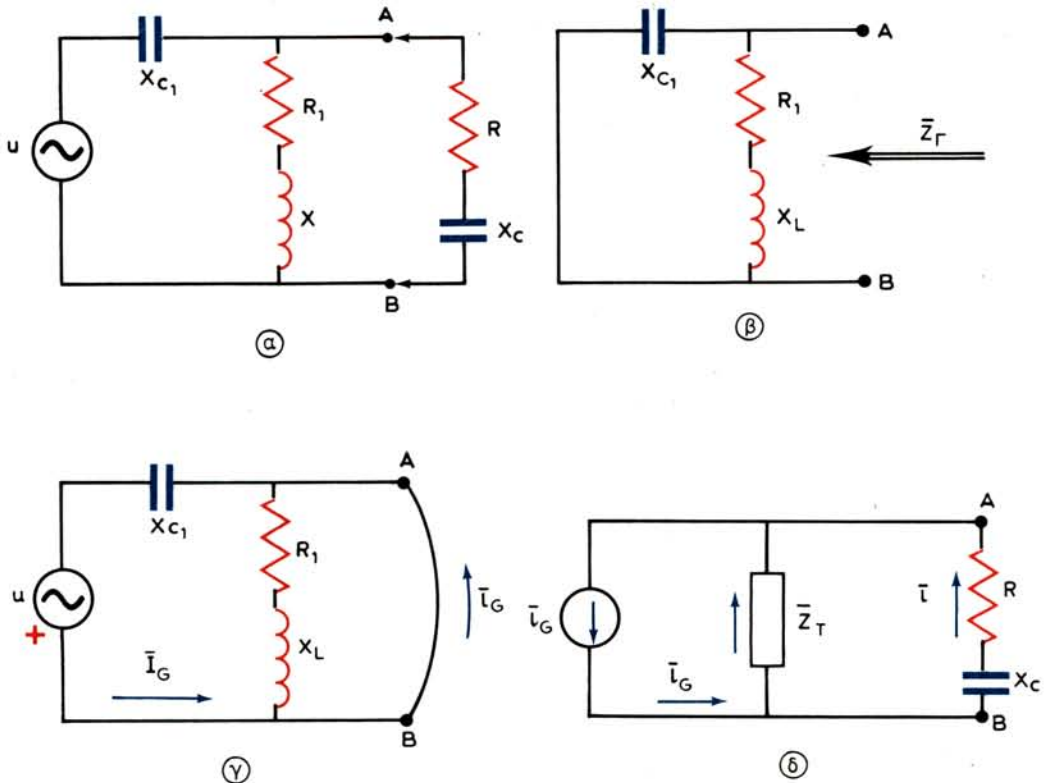
Αποσυνδέουμε το φορτίο (R, X_C) από το κύκλωμα και βραχυκυκλώνουμε την πηγή. Έτσι, προκύπτει το δικτύωμα του σχήματος 18.5θ(β), η σύνθετη αντίσταση του οποίου \bar{Z}_T ισούται με την \bar{Z}_{AB} και υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_L &= R_1 + jX_L = 5 + 5j \Omega \\ \bar{Z}_T &= \frac{\bar{Z}_L \bar{X}_{C1}}{\bar{Z}_L + \bar{X}_{C1}} = \frac{-5j(5 + 5j)}{5 + 5j - 5j} = 5 - 5j \Omega \end{aligned}$$

β) Υπολογισμός \bar{i}_G .

Η \bar{i}_G είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο AB , όταν βραχυκυκλωθούν οι ακροδέκτες A και B [σχ. 18.5θ(γ)]. Τότε, όμως, ο κλάδος R_1, L δεν διαρρέεται από ρεύμα.

$$\bar{i}_G = \frac{\bar{u}}{X_{C1}} = \frac{50 \angle 0^\circ}{-5j} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle -90^\circ} \rightarrow \bar{i}_G = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$$



Σχ. 18.50.

α) Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.7. β) Δικτύωμα του κυκλώματος για τον υπολογισμό της \bar{Z}_T . γ) Κύκλωμα για τον υπολογισμό του ρεύματος \bar{i}_G . δ) Ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

Έτσι, καταλήγουμε στο ισοδύναμο κύκλωμα Norton [σχ. 18.50(δ)], από το οποίο έχουμε:

$$\bar{i} = \bar{i}_G \frac{\bar{Z}_T}{\bar{Z}_T + R + \bar{X}_C} = 10 \angle 90^\circ \frac{5 - 5j}{5 - 5j + 5 - 5j} = 10 \angle 90^\circ \frac{5 - 5j}{10 - 10j} = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

18.5.4 Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (θεώρημα προσαρμογής).

Θα εξετάσουμε τώρα πώς επεκτείνεται το θεώρημα της προσαρμογής στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Ας υπενθυμίσουμε ότι το θεώρημα αυτό, που για το ΣΡ αναπτύξαμε στην παράγραφο 8.6, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη σύνθετη αντίσταση \bar{Z}_L φορτίου, έτσι ώστε η ισχύς που αποδίδεται στο φορτίο αυτό από πηγή εναλλασσόμενης τάσεως, γνωστής εσωτερικής αντιστάσεως, να είναι η μέγιστη δυνατή.

Θεωρούμε, λοιπόν φορτίο: $\bar{Z}_L = R_L + jX_L$ που τροφοδοτείται από πηγή σταθερής τάσεως:

$$\bar{u} = U \angle 0^\circ$$

γνωστής εσωτερικής αντιστάσεως:

$$\bar{Z} = R + jX$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 18.5i.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν κάνουμε καμία παραδοχή ως προς το πρόσημο των αλγεβρικών αριθμών X_L και X , πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί – κατ' αρχήν – να είναι θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν. Άλλωστε, αντικείμενό μας αποτελεί ο υπολογισμός των R_L και X_L , ώστε με δεδομένα τα R και X , να εξασφαλίσουμε ότι στο φορτίο καταναλίσκεται η μέγιστη δυνατή ισχύς.

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z} + \bar{Z}_L} = \frac{\bar{u}}{(R + R_L) + j(X + X_L)}$$

Άρα

$$|\bar{i}| = \frac{|\bar{u}|}{|(R + R_L) + j(X + X_L)|} \rightarrow$$

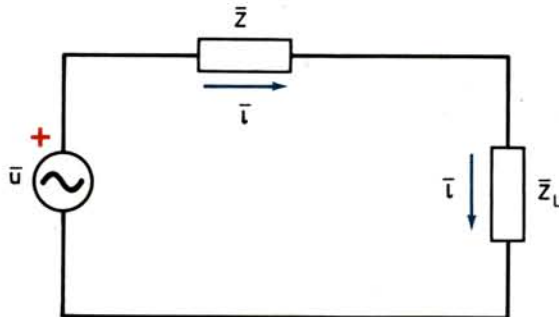
$$I = \frac{U}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (X + X_L)^2}}$$

Εξυπακούεται ότι μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση της πραγματικής ισχύος η οποία, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην παράγραφο 17.2 υπολογίζεται εν γένει από τη σχέση:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\phi$$

Στον υπόψη καταναλωτή \bar{Z}_L πραγματική ισχύς απορροφάται μόνο από την αντίσταση R_L , άρα θα έχουμε:

$$P_L = U_R \cdot I = I^2 R_L = \frac{U^2}{(R + R_L)^2 + (X + X_L)^2} \quad (18.54)$$



Σχ. 18.5i.

Κύκλωμα πηγής εναλλασσόμενης τάσεως – τροφοδοτούμενου φορτίου.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (18.54) με δεδομένα τα χαρακτηριστικά της πηγής η καταναλισκόμενη ισχύς είναι συνάρτηση των R_L και X_L του φορτίου, δηλαδή:

$$P_L = f(R_L, X_L)$$

Άρα, η ισχύς P_L γίνεται μέγιστη όταν:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \quad (18.55) \quad \text{και} \quad \frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \quad (18.56)$$

Από την (18.55) προκύπτει:

$$(R + R_L)^2 + (X + X_L)^2 - 2(R + R_L)R_L = 0 \quad (18.57)$$

Από την (18.56) προκύπτει:

$$2(X + X_L) = 0 \rightarrow X = -X_L \quad (18.58)$$

Έτσι η (18.57) δίνει πλέον:

$$(R + R_L)^2 - 2(R + R_L)R_L = 0 \rightarrow R = R_L \quad (18.59)$$

Επομένως, η \bar{Z}_L θα πρέπει να είναι ίση με: $\bar{Z}_L = R - jX = \bar{Z}^*$ (18.60) δηλαδή **για να έχουμε τη μέγιστη ισχύ στο φορτίο θα πρέπει η σύνθετη αντίσταση του φορτίου να γίνει ίση με τη συζυγή εσωτερική αντίσταση της πηγής.**

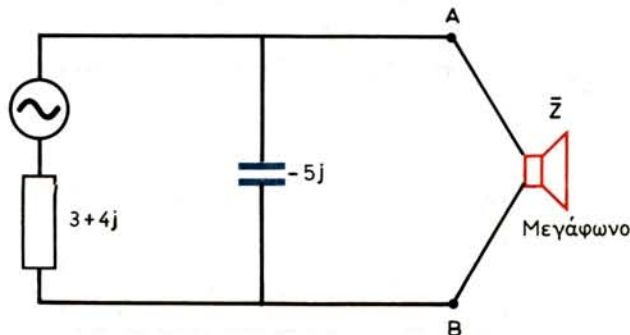
Είναι φανερό ότι η μέγιστη αυτή ισχύς είναι:

$$P_{\max} = I^2 R_L = I^2 R \quad (18.61)$$

Παράδειγμα 18.5.9.

Στα άκρα A και B της συνδεσμολογίας του σχήματος 18.5ια συνδέεται μεγάφωνο. Να υπολογισθεί η σύνθετη αντίστασή του, ώστε να καταναλώνει τη μέγιστη ισχύ.

Η συζυγής αντίσταση της πηγής είναι $3-4j$. Αν $\bar{Z} = R + jX$ η αντίσταση του μεγαφώνου, σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος, θα πρέπει για τη συνολική αντίσταση πυκνωτή-μεγαφώνου να ισχύει:



Σχ. 18.5ια.
Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.8.

$$\frac{(R + jX)(-5j)}{R + jX - 5j} = 3 - 4j \rightarrow$$

$$\rightarrow -5Rj + 5X = 3R + 3jX - 15j - 4Rj + 4X - 20$$

$$\rightarrow -Rj + X = 3R - 20 + j(3X - 15)$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε:

$$X = 3R - 20 \quad (1)$$

$$R = 15 - 3X \quad (2)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$R = 7,5 \, \Omega \text{ και } X = 2,5 \, \Omega$$

Άρα

$$\bar{Z} = 7,5 + 2,5j \, \Omega$$

Παράδειγμα 18.5.10.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.5iβ(a) όπου: $R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 3 \, \Omega$, $X_L = 5 \, \Omega$, $X_C = 4 \, \Omega$, $\bar{u}_1 = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\bar{u}_2 = 25 \angle 90^\circ \text{ V}$. Το φορτίο \bar{Z}_ϕ αποτελείται από μεταβλητή ωμική και φαινόμενη αντίσταση. Ζητούνται:

α) Για ποια τιμή της \bar{Z}_ϕ παρατηρείται η μέγιστη ισχύς;

β) Ποια η τιμή της μέγιστης ισχύος;

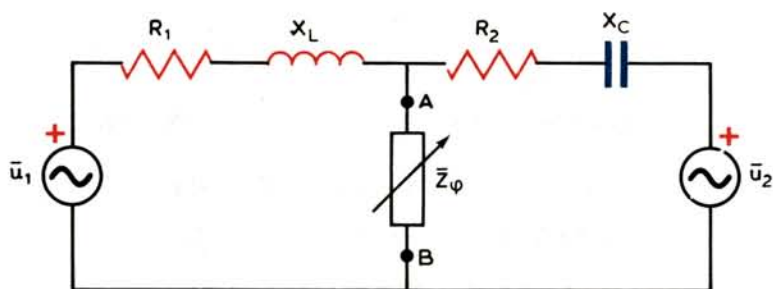
α) Μετασχηματίζουμε το παραπάνω κύκλωμα σε ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin [σχ. 18.5iβ(β)]. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης ισχύος θα πρέπει η \bar{Z}_ϕ να είναι ίση με τη συζυγή αντίσταση της πηγής: $\bar{Z}_T^* = \bar{Z}_\phi$. Η \bar{Z}_T είναι η αντίσταση \bar{Z}_{AB} αν αφαιρεθεί το φορτίο και βραχυκυκλωθούν οι πηγές. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_T &= \frac{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} = \frac{(5 + 5j)(3 - 4j)}{5 + 5j + 3 - 4j} = \frac{35 - 5j}{8 + j} \\ &= \frac{5(7 - j)(8 - j)}{65} = \frac{55 - 15j}{13} \rightarrow \bar{Z}_T = (4,23 - j 1,15) \, \Omega \end{aligned}$$

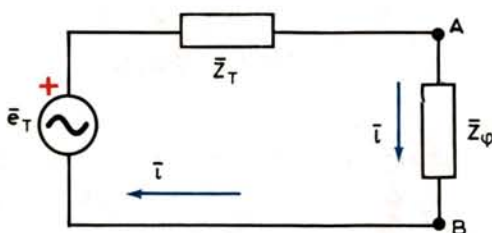
οπότε $\bar{Z}_\phi = (4,23 + j 1,15) \, \Omega$

β) Η \bar{e}_T είναι η τάση \bar{u}_{AB} αν αφαιρεθεί το φορτίο \bar{Z}_ϕ . Θα έχουμε:

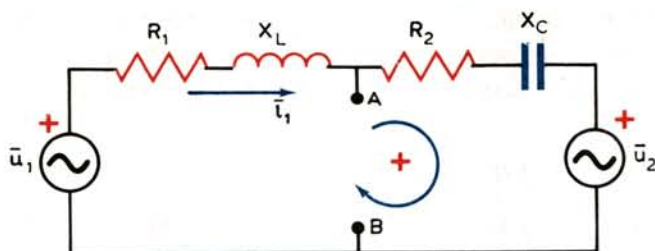
$$\begin{aligned} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 &= \bar{i}_1 (R_1 + jX_L + R_2 - jX_C) \rightarrow \\ \bar{i}_1 &= \frac{50 - 25j}{8 + j} = \frac{25(2 - j)(8 - j)}{65} = \\ &= \frac{5(15 - 10j)}{13} \rightarrow \bar{i}_1 = \frac{25(3 - 2j)}{13} \text{ A} \end{aligned}$$



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 18.516.

- α) Κύκλωμα παραδείγματος 18.5.10. β) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.
 γ) Κύκλωμα για τον υπολογισμό της τάσεως \bar{e}_T .

οπότε

$$\begin{aligned} \bar{e}_T &= \bar{u}_{AB} = \bar{u}_1 - \bar{i}_1 (R_1 + jX_L) = \\ &= 50 - \frac{25(3 - 2j)(5 + 5j)}{13} = 50 - \frac{25(25 + 5j)}{13} = \\ &= \frac{650 - 625 - 125j}{13} \rightarrow \bar{e}_T = \frac{25(1 - 5j)}{13} \text{ V} \end{aligned}$$

Το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο \bar{Z}_ϕ [σχ. 18.56(θ)] είναι:

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}_T}{\bar{Z}_\phi + \bar{Z}_T} = \frac{25(1 - 5j)}{13 \cdot 8,46} = \frac{25}{110} - \frac{125}{110}j$$

$$\rightarrow \bar{i} = \frac{5}{22} - \frac{25}{22}j \text{ A}$$

Επειδή μόνο η ωμική αντίσταση του φορτίου καταναλώνει ισχύ θα έχουμε σύμφωνα και με τη σχέση (18.61):

$$P_{\max} = I^2 R_\phi = \left[\left(\frac{5}{22} \right)^2 + \left(\frac{25}{22} \right)^2 \right] \cdot 4,23 =$$

$$= \frac{(25 + 625)}{484} \cdot 4,23 \rightarrow P_{\max} = 5,68 \text{ W}$$

18.6 Ανάλυση εξειδικευμένων κυκλωμάτων ΕΡ με τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού.

Από τα κυκλώματα που έχουμε μέχρι τώρα αναλύσει έχει ήδη καταφανεί η ευκολία την οποία παρέχει ο μιγαδικός λογισμός έναντι του ανυσματικού λογισμού που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο 16 για την ανάλυση κυκλωμάτων.

Αν συγκρίνομε π.χ. την ανάλυση ενός κυκλώματος RLC σε σειρά της παραγράφου 16.7 με εκείνη της παραγράφου 18.4.4, και τα πλεονεκτήματα του μιγαδικού λογισμού θα γίνουν προφανή: ενώ διατηρείται η συντομία της ανυσματικής εκφράσεως προσφέρεται μια άμεση, σύντομη και κομψή λύση.

Θεωρήσαμε λοιπόν σκόπιμο να παρουσιάσουμε στη συνέχεια την ανάλυση δύο χαρακτηριστικών περιπτώσεων κυκλωμάτων ΕΡ με τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού. Αυτό, διότι η μελέτη της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων αυτών έχει πολύ μεγάλη σημασία, ιδιαίτερα σε θέματα Ραδιοηλεκτρολογίας.

18.6.1 Συζευγμένα κυκλώματα.

Ας θεωρήσουμε δύο κυκλώματα, τα πηνία των οποίων βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη (σχ. 18.6α). Ας υπενθυμίσουμε, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 14.8, ότι όταν το ένα από τα δύο κυκλώματα (πρωτεύον) διαρρέεται από ρεύμα μεταβαλλόμενης εντάσεως, τότε στο άλλο κύκλωμα (δευτερεύον) αναπτύσσεται ΗΕΔ αμοιβαίας επαγωγής που παρέχεται από τη σχέση (14.59).

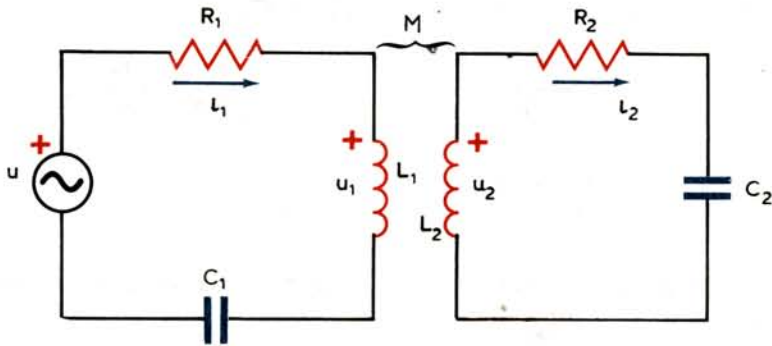
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το πρωτεύον κύκλωμα τροφοδοτείται με πηγή εναλασσόμενης τάσεως:

$$u(t) = U_0 \eta \mu \omega t \quad (18.62)$$

Τότε, το πρωτεύον κύκλωμα θα διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως:

$$i_1(t) = I_0 \eta \mu(\omega t + \phi) \quad (18.63)$$

Αν ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων είναι M , τότε η ΗΕΔ αμοιβαίας επαγωγής που αναπτύσσεται στο δευτερεύον, είναι:



Σχ. 18.6α.
Κυκλώματα από σύζευξη.

$$u_2(t) = -M \frac{di_1}{dt} = -M I_0 \sin(\omega t + \varphi) = -M I_0 \eta \mu \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (18.64)$$

με την πόλωση που σημειώνεται στο σχήμα 18.6α.

Οι πολικές μορφές των χρονικών συναρτήσεων (18.62) και (18.63) είναι:

$$\bar{i}_1 = I_1 e^{j\varphi} \quad (18.64) \quad \text{και} \quad \bar{u}_2 = -M I_1 \omega e^{j(\varphi + \pi/2)} \quad (18.65)$$

Η (18.65) γράφεται:

$$\bar{u}_2 = -M I_1 \omega e^{j\varphi} e^{+j\pi/2} = -M I_1 \omega e^{j\varphi} (j) \quad (18.66)$$

γιατί

$$e^{+j\pi/2} = j$$

Από τις (18.64) και (18.66) προκύπτει:

$$\bar{u}_2 = -j\omega M I_1 \quad (18.67)$$

Το ρεύμα \bar{i}_2 που διαρρέει το δευτερεύον είναι:

$$\bar{i}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{-j\omega M I_1}{\bar{Z}_2} \quad (18.68)$$

όπου $\bar{Z}_2 = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)$ η σύνθετη αντίσταση του δευτερεύοντος

Εφόσον, όμως, το δευτερεύον διαρρέεται από ρεύμα, αναμένεται με τη σειρά του να αναπτύξει μια ΗΕΔ εξ' επαγωγής στο πρωτεύον η οποία υπολογίζεται κατ' αναλογίαν της (18.67) ως:

$$\bar{u}_1 = -j\omega M \bar{i}_2 \quad (18.69)$$

με πόλωση όπως φαίνεται στο σχήμα 18.6α.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα του πρωτεύοντος έχουμε:

$$\bar{u} + \bar{u}_1 = \bar{Z}_1 \bar{i}_1 \rightarrow \bar{u} - j\omega M \frac{-j\omega M \bar{i}_1}{\bar{Z}_2} = \bar{Z}_1 \bar{i}_1 \rightarrow \bar{u} = \bar{i}_1 \left(\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} \right) \rightarrow$$

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}} \quad (18.70)$$

όπου $\bar{Z}_1 = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)$ η σύνθετη αντίσταση του πρωτεύοντος

Αν δεν υπήρχε δευτερεύον το ρεύμα \bar{i}_1 θα ήταν:

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}_1}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η παρουσία του δευτερεύοντος έχει σαν αποτέλεσμα την εισαγωγή στο πρωτεύον μιας πρόσθετης αντιστάσεως.

$$\bar{Z}_6 = \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} \quad (18.71)$$

Η αντίσταση \bar{Z}_6 ονομάζεται **σύνθετη αντίσταση συζεύξεως**.

Για τον ίδιο λόγο και στην αντίσταση του δευτερεύοντος \bar{Z}_2 προστίθεται και μια αντίσταση $\omega^2 M^2 / \bar{Z}_1$, την οποία εισάγει το πρωτεύον στο δευτερεύον.

Όπως φαίνεται λοιπόν, με τα κυκλώματα που βρίσκονται σε σύζευξη είναι δυνατόν να μεταφέρεται ενέργεια από το πρωτεύον στο δευτερεύον. Έτσι, τα κυκλώματα αυτά βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στους ραδιοφωνικούς δέκτες.

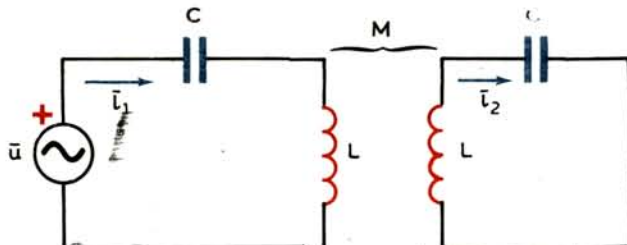
Παράδειγμα 18.6.1.

Τα δύο κυκλώματα του σχήματος 18.66 βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη με συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $M = 60 \mu\text{H}$. Η τάση στο πρωτεύον είναι $\bar{u} = 10 \angle 0^\circ \text{V}$ και η συχνότητά της $f = 1/\pi \text{MHz}$. Η αυτεπαγωγή των πηνίων είναι $L = 300 \mu\text{H}$ και η χωρητικότητα των πυκνωτών $C = 1000 \text{pF}$.

Ζητούνται:

- Το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον \bar{i}_1 .
- Το ρεύμα που διαρρέει το δευτερεύον \bar{i}_2 .
- Ο συντελεστής συζεύξεως.

Από την (18.70) έχουμε:



Σχ. 18.66.

Κυκλώματα παραδείγματος 18.6.1.

$$\alpha) \quad \bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{z}_2}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου} \quad \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z} &= j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = j \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right) = \\ &= j \left(2 \cdot 10^6 \cdot 300 \cdot 10^{-6} - \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^6 \cdot 10^3} \right) = 100 j \end{aligned}$$

και η (1) δίνει:

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 &= \frac{10}{100 j + \frac{4 \cdot 10^{12} \cdot 36 \cdot 10^{-10}}{100 j}} = \frac{10}{100 j + \frac{144}{j}} = \frac{10 j}{44} \rightarrow \\ \bar{i}_1 &= 0,227 \angle 90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Από την (18.68) έχουμε:

$$\begin{aligned} \beta) \quad \bar{i}_2 &= -j \frac{M \bar{i}_1}{\bar{z}_2} \\ \bar{i}_2 &= -j \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot 10^{-6}}{100 j} \cdot \frac{10 j}{44} = \frac{12}{44} (-j) \rightarrow \\ \bar{i}_2 &= 0,273 \angle -90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

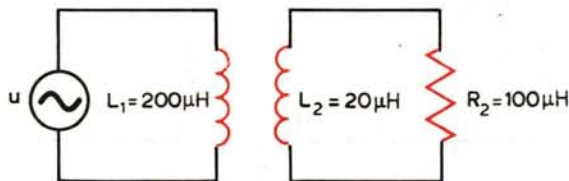
Από την (14.67) έχουμε:

$$\gamma) \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{60}{300} = 0,2$$

Παράδειγμα 18.6.2.

Ο συντελεστής συζεύξεως των δύο κυκλωμάτων του σχήματος 18.6γ είναι $k = 0,1$. Αν η συχνότητα της τάσεως u είναι $f = 1 \text{ MHz}$ να υπολογιστεί η αντίσταση του πρωτεύοντος.

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad M &= k \sqrt{L_1 L_2} = 0,1 \sqrt{200 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} \rightarrow M = 6,3 \mu\text{H} \\ \bar{z}_1 &= \bar{X}_{L_1} = j2\pi f L_1 = j2\pi \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \rightarrow \bar{z}_1 = j \cdot 1257 \Omega \\ \bar{z}_2 &= R_2 + j2\pi f L_2 = 100 + j2\pi \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \rightarrow \bar{z}_2 = 100 + j \cdot 126 \Omega \end{aligned}$$



Σχ. 18.6γ.

Κυκλώματα παραδείγματος 18.6.2.

Επομένως η αντίσταση του πρωτεύοντος είναι:

$$\begin{aligned}\bar{z}_\pi &= \bar{z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 + \frac{4\pi^2 f^2 M^2}{\bar{z}_2} = j 1257 + \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{12} \cdot 6,3^2 \cdot 10^{-12}}{100 + j 126} = \\ &= j 1257 + \frac{1567}{100 + j 126} \rightarrow \bar{z}_\pi = (6,1 + j 1249) \Omega\end{aligned}$$

18.6.2 Συντονισμένα κυκλώματα.

Με τον όρο «συντονισμένα κυκλώματα» αναφερόμαστε σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος τα οποία βρίσκονται σε **κατάσταση συντονισμού**. Ας υπενθυμίσουμε ότι κυκλώματα σε κατάσταση συντονισμού έχουμε ήδη μελετήσει στις παραγράφους 16.7.1 (συντονισμός σειράς) και 16.10.1 (παράλληλος συντονισμός). Στις παραγράφους αυτές είχαμε καθορίσει τη συνθήκη συντονισμού ($X_L = X_C$) των δύο αυτών απλών κυκλωμάτων και είχαμε επίσης διερευνήσει τις συνέπειές της στη συμπεριφορά των λοιπών μεγεθών του κυκλώματος. Θα προχωρήσουμε πλέον, δίνοντας ένα γενικότερο ορισμό για την κατάσταση συντονισμού ενός **διπολικού κυκλώματος**, δηλαδή ενός κυκλώματος το οποίο καταλήγει και τροφοδοτείται από δύο ακροδέκτες:

*Λέμε ότι ένα διπολικό κύκλωμα, που οπωσδήποτε περιλαμβάνει πηνία και πυκνωτές, βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού όταν η στιγμιαία τιμή της ημιτονοειδούς τάσεως και η στιγμιαία τιμή της ισσούχνου ημιτονοειδούς εντάσεως στους ακροδέκτες του βρίσκονται σε **φάση**. Ο συντονισμός επιτυγχάνεται σε μια ορισμένη συχνότητα που ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού**.*

Ας κάνουμε τώρα, με αφορμή τον παραπάνω ορισμό, ορισμένες πρακτικές παρατηρήσεις:

- Αν το κύκλωμα δεν περιλαμβάνει πηνία ή δεν περιλαμβάνει πυκνωτές τότε η συνθήκη συντονισμού δεν μπορεί να ικανοποιηθεί.
- Αν το κύκλωμα περιέχει μόνον ωμικές αντιστάσεις, η συνθήκη, βέβαια, ικανοποιείται αλλά η κατάσταση δεν ονομάζεται συντονισμός.
- Ο συντονισμός επιτυγχάνεται σε μια μόνον τιμή της συχνότητας. Όταν η τιμή της συχνότητας μεταβληθεί, η συνθήκη συντονισμού παύει να ικανοποιείται και τα φαινόμενα συντονισμού δεν παρατηρούνται πλέον. Επομένως, ο συντονισμός εξαρτάται από τη μεταβολή της σύνθετης αντιστάσεως του διπολικού κυκλώματος σαν συνάρτηση της συχνότητας ή όπως λέμε ο συντονισμός συνδέεται με την **απόκριση συχνότητας** του κυκλώματος.

δ) Αν η σύνθετη αντίσταση του κατά Thevenin ισοδύναμου κυκλώματος είναι:

$$\bar{Z}_T = R_T + \bar{X}_{LT} + \bar{X}_{CT} = R_T + jX_{LT} + jX_{CT} \quad (18.72)$$

τότε η κατάσταση συντονισμού εξασφαλίζεται όταν:

$$X_{LT} = X_{CT} \quad (18.73)$$

δηλαδή όταν η επαγωγική αντίσταση του κατά Thevenin ισοδύναμου κυκλώματος γίνει ίση με τη χωρητική.

- Τέλος, στην κατάσταση συντονισμού το κύκλωμα δεν απαιτεί καθόλου άεργη ισχύ, αλλά απορροφά μόνον πραγματική.

Από όσα προαναφέραμε σχετικά με τα φαινόμενα που παρατηρούνται όταν ένα κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, σε συνδυασμό με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 16.7.3 σχετικά με την ικανότητα επιλογής συχνότητας κυκλωμάτων που βρίσκονται σε κατάσταση συντονισμού καταδεικνύεται η σπουδαιότητα την οποία παρουσιάζει η αναζήτηση της συνθήκης συντονισμού σε ένα διπολικό κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος. Η αναζήτηση της συνθήκης αυτής μπορεί να γίνει είτε με τη μέθοδο του ανυσματικού λογισμού που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 16 (παράγραφο 16.7.1 για το

συντονισμό σειράς και παράγραφο 16.10.1 για τον παράλληλο συντονισμό) είτε με τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού που αναπτύξαμε στο παρόν κεφάλαιο. Έτσι, υπό μορφή εφαρμογής θα αναζητήσουμε την κατάσταση συντονισμού σε ένα συνδυασμένο διπολικό κύκλωμα όπου υπάρχει ένα κύκλωμα συντονισμού σειράς και ένα κύκλωμα παράλληλο συντονισμού συνδεδεμένα σε σειρά. Το κύκλωμα αυτό, που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο ονομάζεται κύκλωμα **πολλαπλού συντονισμού**.

18.6.3 Πολλαπλός συντονισμός.

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 18.65 και έστω ω_1 η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος σειράς και ω_2 η συχνότητα συντονισμού του παράλληλου κυκλώματος ($\omega_1 < \omega_2$).

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος σειράς είναι:

$$\bar{Z}_\sigma = \bar{X}_L + \bar{X}_C = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = jZ_\sigma \quad (18.74)$$

και η σύνθεση αγωγιμότητά του:

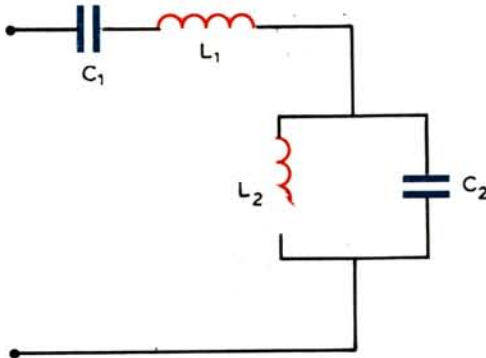
$$\bar{Y}_\sigma = \frac{1}{\bar{Z}_\sigma} = \frac{1}{j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)} = \frac{j}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1} \quad (18.75)$$

Η σύνθετη αγωγιμότητα του παράλληλου κυκλώματος είναι:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\pi &= \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 = \frac{1 + j^2\omega^2 L_2 C_2}{j\omega L_2} = \\ &= \frac{1 - \omega^2 L_2 C_2}{j\omega L_2} = \frac{(1 - \omega^2 L_2 C_2)j}{-\omega L_2} = \left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} \right) j \end{aligned} \quad (18.76)$$

και η σύνθετη αντίστασή του:

$$\bar{Z}_\pi = \frac{1}{\bar{Y}_\pi} = \frac{1}{j \left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} \right)} = \frac{j}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} = j\bar{Z}_\pi \quad (18.77)$$



Σχ. 18.65.
Κύκλωμα πολλαπλού συντονισμού.

Η συνολική αντίσταση του διπολικού αυτού κυκλώματος προκύπτει ως άθροισμα των (18.74) και (18.77):

$$\bar{Z} = \bar{Z}_\sigma + \bar{Z}_\pi = j(\bar{Z}_\sigma + \bar{Z}_\pi) = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{j}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} \quad (18.78)$$

Ενώ η συνολική σύνθετη αγωγιμότητα προκύπτει αντίστοιχα ως:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{Y}_\sigma \bar{Y}_\pi}{\bar{Y}_\sigma + \bar{Y}_\pi} \quad (18.79)$$

Εφόσον στο κύκλωμα **δεν υπάρχουν ωμικές αντιστάσεις**, η σύνθετη αντίσταση \bar{Z} έχει μόνο φανταστικό μέρος και η κατάσταση συντονισμού εξασφαλίζεται όταν το μέτρο της σύνθετης αντιστάσεως γίνει μηδέν ή όταν το μέτρο της σύνθετης αγωγιμότητας γίνει άπειρο. Το μέτρο της Z προκύπτει πολύ απλά, ως:

$$Z = \frac{\frac{L_1}{L_2} - \omega^2 L_1 C_2 - \frac{1}{\omega^2 C_1 L_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} \quad (18.80)$$

Μελετώντας τη σχέση (18.80) μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής απλά συμπεράσματα:

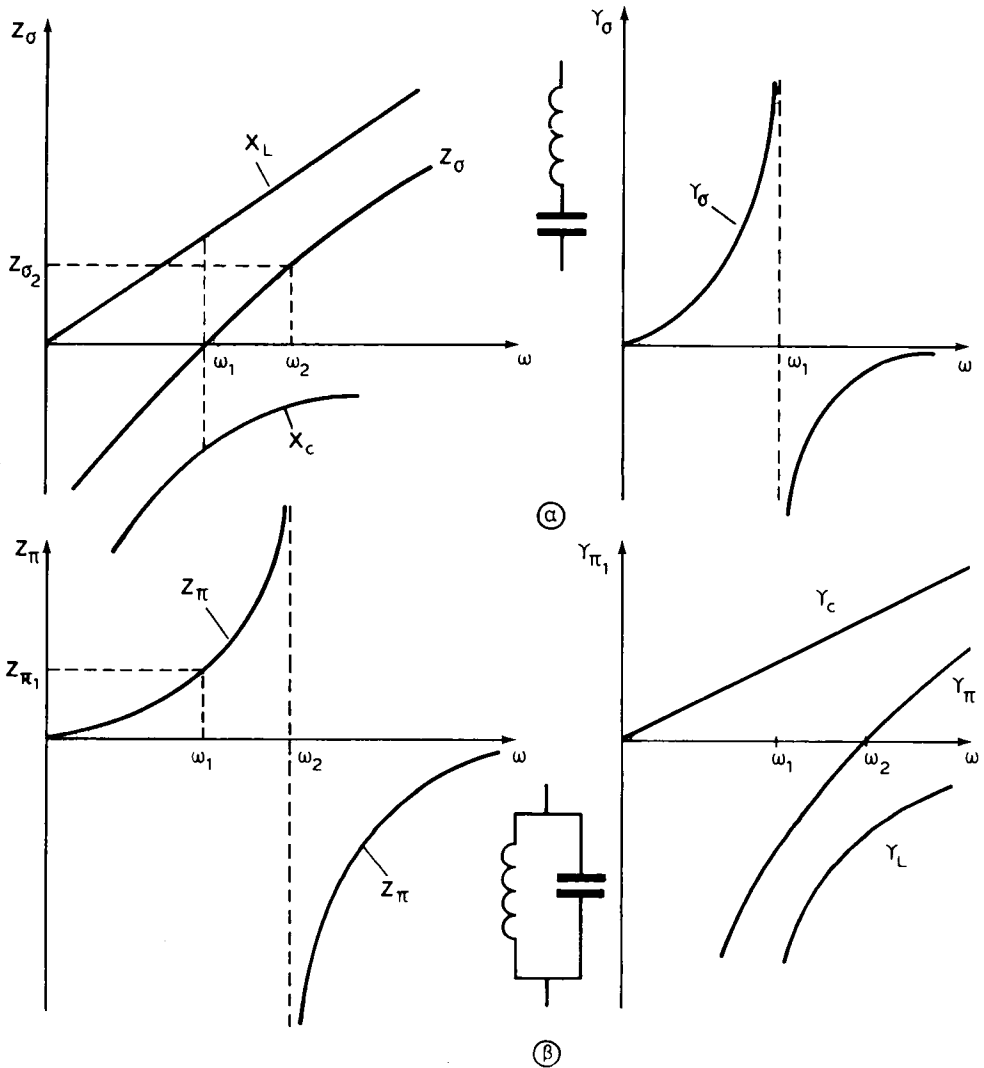
- Για $\omega = \omega_2 = \sqrt{L_2 C_2}$ το μέτρο της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος καθίσταται άπειρο.
- Κατά τη λύση της (18.80) μπορεί να προκύψουν μέχρι 4 ρίζες της ω . Βέβαια, πιθανόν ορισμένες από αυτές να απορρίπτονται αν δεν προκύψουν μέσα στο πεδίο ορισμού της ω ($0 < \omega < \infty$).

Αλλά ίσως θα ήταν επαγωγικότερο να μελετήσουμε τη μεταβολή της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα, δηλαδή την απόκριση της συχνότητας του κυκλώματος, με τη βοήθεια των γραφικών απεικονίσεων των σχημάτων 18.6ε και 18.6στ.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 18.6ε για συχνότητες $0 \leq \omega \leq \omega_1$ το κύκλωμα σειράς (α) παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά ($-\infty < Z_\sigma \leq 0$) ενώ το παράλληλο κύκλωμα (β) παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά ($Z_{\pi_1} \geq Z_\pi \geq 0$).

Έτσι, στο διάστημα $0 \leq \omega \leq \omega_1$ υπάρχει μια συχνότητα στην οποία τα μέτρα των συνθέτων αντιστάσεων του κυκλώματος σειράς και του παράλληλου κυκλώματος γίνονται ίσα κατά το μέγεθος και αντίθετα κατά το πρόσημο, άρα συχνότητα στην οποία παρατηρείται συντονισμός. Για συχνότητες $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ και τα δύο κυκλώματα παρουσιάζουν επαγωγική συμπεριφορά άρα αποκλείεται να παρατηρηθεί κατάσταση συντονισμού. Στο σχήμα 18.6στ (α) χαράζουμε τις καμπύλες των συνθέτων αντιστάσεων Z_σ (σειράς) και Z_π (παράλληλου) και τις προσθέτουμε οπότε προκύπτει η καμπύλη της σύνθετης αντιστάσεως του κυκλώματος Z στο διάστημα $0 \leq \omega \leq \omega_2$. Αντίστοιχα, στο σχήμα 18.6στ(β) χαράζουμε την καμπύλη της σύνθετης αγωγιμότητας του κυκλώματος, στο ίδιο διάστημα.

Όπως, τώρα, φαίνεται από το σχήμα 18.6ε για συχνότητες $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$ το κύκλωμα σειράς (α) παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά ($Z_{\sigma_2} \geq Z_\sigma > \infty$) ενώ το παράλληλο κύκλωμα (β) παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά ($-\infty < Z_\pi \leq 0$). Έτσι, στο διάστημα $\omega_2 \leq \omega < \infty$ υπάρχει μια άλλη συχνότητα που παρατηρείται και πάλι συντονισμός. Στο



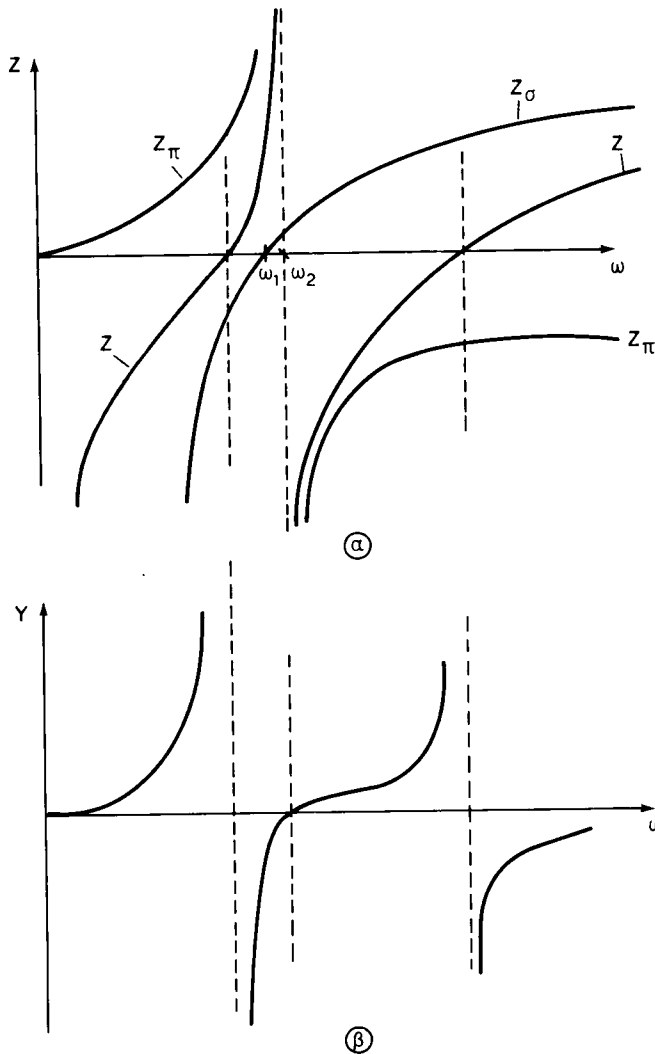
Σχ. 18.6ε.

Καμπύλες σύνθετης αντιστάσεως (Z) και σύνθετης αγωγιμότητας (Y) κυκλωμάτων (α) συντονισμού σειράς (β) παράλληλου συντονισμού ($\omega_1 < \omega_2$).

σχήμα 18.6στ χαράζουμε τις καμπύλες της σύνθετης αντιστάσεως και της σύνθετης αγωγιμότητας και στην υπόψη περιοχή συχνοτήτων.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η καμπύλη $Z = f(\omega)$ ονομάζεται καμπύλη αποκρίσεως της συχνότητας του κυκλώματος. Η συχνότητα συντονισμού όπου μηδενίζεται η αντίσταση του κυκλώματος ονομάζεται **μηδενικό** ή **κατάσταση μηδενισμού** ενώ η συχνότητα όπου η αντίσταση γίνεται άπειρη ονομάζεται **πόλος**.

Οι πόλοι στην καμπύλη αποκρίσεως συχνότητας συμβολίζονται με σταυρό ενώ τα μηδενικά με κύκλο. Είναι αυτονόητο ότι οι πόλοι και τα μηδενικά ενός κυκλώματος μπορεί να υπολογίζονται αναλυτικά, όπως π.χ. με την επίλυση της εξίσωσης (18.80)



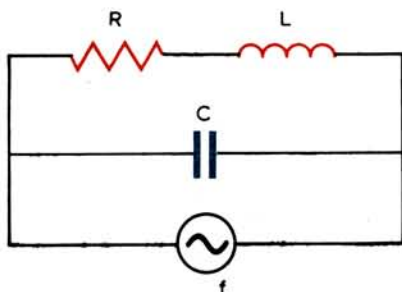
Σχ. 18.6στ.

Καμπύλες (α) σύνθετης αντιστάσεως και (β) σύνθετης αγωγιμότητας κυκλώματος πολλαπλού συντονισμού ($\omega_1 < \omega_2$).

στην περίπτωση του κυκλώματος που εξετάζουμε. Έχουν όμως αναπτυχθεί μέθοδοι και μετασχηματισμοί με τη βοήθεια των οποίων η εργασία απλουστεύεται όταν μάλιστα έχουμε να επιλύσουμε συνθετότερα κυκλώματα. Όμως, η ανάπτυξη των μεθόδων αυτών ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού.

Παράδειγμα 18.6.3.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18.6ζ όπου $R = 4,8 \Omega$, $L = 88 \mu\text{H}$ και $C = 375 \text{ pF}$. Ζητούνται:



Σχ. 18.6ζ.
Κύκλωμα παραδείγματος 18.6.3.

- α) Ποια τιμή πρέπει να πάρει η συχνότητα της τάσεως, ώστε η αντίσταση του κυκλώματος να έχει καθαρά ωμικό χαρακτήρα.
 β) Η αντίσταση Z_0 στο συντονισμό.
 γ) Ο συντελεστής ποιότητας Q .
 δ) Η ζώνη συχνοτήτων $\Delta f = f_2 - f_1$ καθώς και οι πλευρικές συχνότητες f_1 και f_2 στις οποίες η αντίσταση Z του κυκλώματος παίρνει την τιμή $0,707 Z_0$.
 α) Η σύνθετη αντίσταση \bar{Z} του κυκλώματος είναι:

$$\bar{Z} = \frac{-\frac{j}{\omega C} (R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}}{R \left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)\right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{Z} = \frac{L}{RC} \frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)} \quad (1)$$

Για να έχει η \bar{Z} καθαρά ωμικό χαρακτήρα $\left(Z = Z_0 = \frac{L}{RC} \right)$ θα πρέπει η κυκλική

συχνότητα της τάσεως να πάρει τιμή ω_0 ώστε να ισχύει:

$$1 - j\frac{R}{\omega_0 L} = 1 + j\left(\frac{\omega_0 L}{R} - \frac{1}{\omega_0 RC}\right) \rightarrow$$

$$-\frac{R}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0 L}{R} - \frac{1}{\omega_0 CR} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$\rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{88 \cdot 10^{-6} \cdot 375 \cdot 10^{-12}} - \frac{4,8^2}{88^2 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\rightarrow f_0 = 870,4 \text{ kHz}$$

$$\beta) \quad Z_o = \frac{L}{RC} = \frac{88 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 375 \cdot 10^{-12}} \rightarrow Z_o = 48,8 \text{ k}\Omega$$

$$\gamma) \quad Q = \frac{2\pi f_o L}{R} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 876,4 \cdot 10^3 \cdot 88 \cdot 10^{-6}}{4,8} \approx 100$$

$$\delta) \quad \Delta f = \frac{f_o}{Q} = \frac{876,4}{100} = 8,764 \text{ kHz}$$

$$f_2 = f_o + \frac{\Delta f}{2} = 876,4 + 4,382 = 880,78 \text{ kHz}$$

$$f_1 = f_o - \frac{\Delta f}{2} = 876,4 - 4,382 = 872 \text{ kHz}$$

Παράδειγμα 18.6.4.

Τα δύο κυκλώματα του σχήματος 18.6η όπου λειτουργούν ανεξάρτητα έχουν την ίδια συχνότητα συντονισμού ω_o . Να δείχθει ότι:

α) Το ρεύμα που διαρρέει το δευτερεύον γίνεται μέγιστο (κρίσιμη σύζευξη) όταν επιπλέον ισχύει: $\omega_o^2 M^2 = R_1 R_2$.

β) Η κρίσιμη τιμή του συντελεστή συζεύξεως είναι: $k = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}$

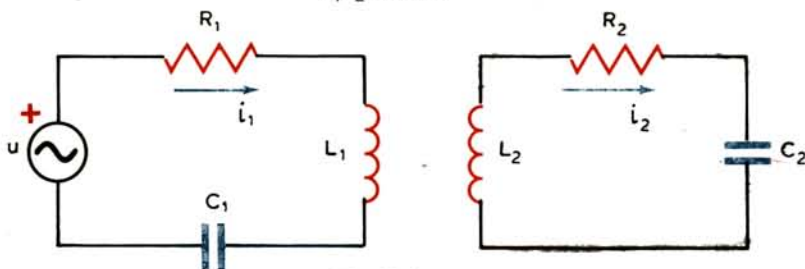
$$\alpha) \text{ Το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον είναι: } \bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}} \quad (1)$$

$$\text{Η επαγόμενη τάση στο δευτερεύον είναι: } \bar{u}_2 = -j\omega M \bar{i}_1 \quad (2)$$

$$\text{Το ρεύμα που διαρρέει το δευτερεύον είναι: } \bar{i}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\bar{Z}_2} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\bar{i}_2 = -j \frac{\omega M \bar{u}}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 M^2} \quad (4)$$



Σχ. 18.6η.
Κυκλώματα παραδείγματος 18.6.4.

$$\text{Είναι} \quad \bar{Z}_1 = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \quad (5)$$

$$\text{και} \quad \bar{Z}_2 = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \quad (6)$$

Από τις (4), (5) και (6) προκύπτει:

$$\bar{I}_2 = -j \frac{\omega M \bar{u}}{\left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right]} \omega^2 M^2 \quad (7)$$

Αν $\bar{u} = U \angle 0^\circ$ (στην αρχή των φάσεων) και:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \text{έχουμε:}$$

$$\bar{I}_2 = -j \frac{\omega M U}{R_1 R_2 + \omega^2 M^2} = -j \frac{U}{\frac{R_1 R_2}{\omega M} + \omega M}$$

Για να γίνει το ρεύμα μέγιστο θα πρέπει ο παρονομαστής να γίνει ελάχιστος.

Επειδή $\frac{R_1 R_2}{\omega_0 M}$, $\omega_0 M = R_1 R_2$ σταθερό.

θα πρέπει $\frac{R_1 R_2}{\omega_0 M} = \omega_0 M \rightarrow \omega_0^2 M^2 = R_1 R_2$.

$$\theta) \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M \omega}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega L_1 \omega L_2}{M^2 \omega^2}}} \rightarrow$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega L_1 \omega L_2}{R_1 R_2}}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ

ΤΡΙΦΑΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

19.1 Εισαγωγή - Ορισμοί.

Η ηλεκτρική ισχύς που παράγεται στους Ηλεκτρικούς Σταθμούς μεταφέρεται σχεδόν αποκλειστικά σε συστήματα εναλλασσόμενου ρεύματος. Η συχνότητα των ρευμάτων αυτών είναι 50 Hz στην Ευρώπη και 60 Hz στη Β. Αμερική. Ο κύριος λόγος της εκτεταμένης χρήσεως του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ότι η τάση μετασχηματίζεται εύκολα, λόγω της χρονικής μεταβολής που παρουσιάζει, στα επιθυμητά για τις διάφορες απαιτήσεις επίπεδα. Βασική απαίτηση για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας σε μεγάλες αποστάσεις είναι η ανύψωση της τάσεως, ώστε να ελαττωθεί η απαιτούμενη ένταση για ορισμένη ισχύ και να μειώνεται έτσι η απώλεια ισχύος στη γραμμή για δεδομένη διατομή των αγωγών. Ας υπενθυμίσουμε ότι η απώλεια ισχύος ΔP σε γραμμή δύο αγωγών, μήκους l , ειδικής αντιστάσεως ρ και διατομής S είναι:

$$\Delta P = R_{\gamma\rho} I^2 = \left(\rho \frac{2l}{S} \right) \left(\frac{P}{U} \right)^2 \quad (19.1)$$

όπου U η τάση της γραμμής.

Σήμερα, η τάση των γεννητριών στους σταθμούς παραγωγής είναι 10-20 kV, ανυψώνεται αμέσως με μετασχηματιστές στα 60-750 kV και μεταφέρεται με τις γραμμές μεταφοράς υψηλής τάσεως στα κέντρα καταναλώσεως. Εκεί με τους μετασχηματιστές των υποσταθμών διανομής υποβιβάζεται στα 3-30 kV και μεταφέρεται με τις γραμμές διανομής μέσης τάσεως κοντά στους καταναλωτές. Στη συνέχεια υποβιβάζεται στα 220 V/380 V με τους μετασχηματιστές διανομής και διανέμεται με τις γραμμές χαμηλής τάσεως στους καταναλωτές.

Όλα τα δίκτυα εναλλασσόμενου ρεύματος που εξετάσαμε μέχρι τώρα ήταν **μονοφασικά** (σχ. 19.1α). Στα συστήματα αυτά υπάρχει μια μονοφασική γεννήτρια παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος, όπως αυτή την οποία γνωρίσαμε στην παράγραφο 15.4, η οποία παράγει ημιτονοειδή τάση της μορφής



Σχ. 19.1α.
Μονοφασικό σύστημα Ε.Ρ.

$$u = U_0 \eta \mu \omega t$$

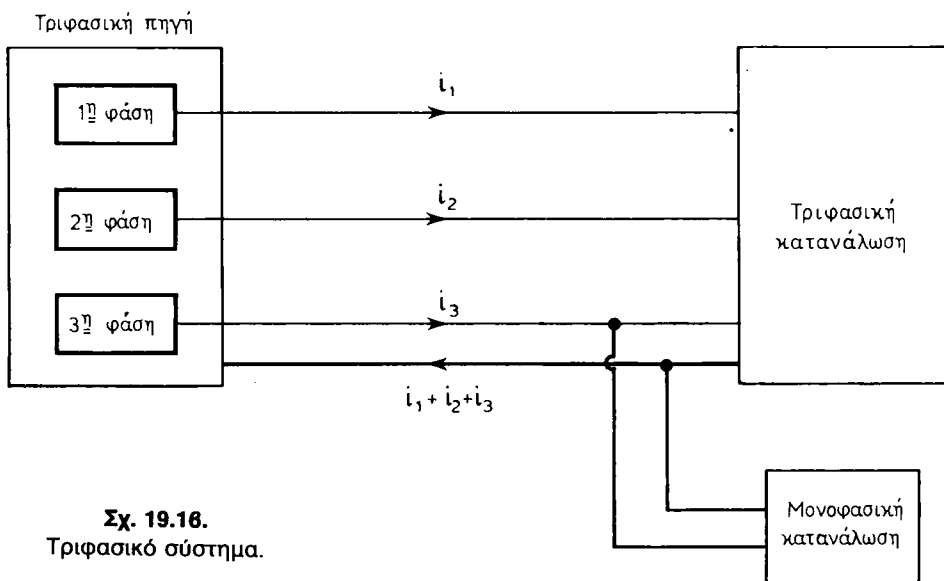
Η πηγή αυτή τροφοδοτεί μέσω γραμμής δύο αγωγών έναν καταναλωτή που και αυτός ονομάζεται μονοφασικός.

Η χρονική όμως, μεταβολή της εναλλασσόμενης τάσεως δημιουργεί και προβλήματα: η στιγμιαία ισχύς (σχέση 17.3, σχήμα 17.16) δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο. Κατά συνέπεια η ροπή στρέψεως ενός κινητήρα που τροφοδοτείται από μονοφασική γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος υφίσταται αντίστοιχες διακυμάνσεις που συνεπάγονται δυσμενείς επιπτώσεις φορτίσεως για τον άξονά του.

Για να αποφευχθούν οι διακυμάνσεις της στιγμιαίας ισχύος στη συσκευή καταναλώσεως πρέπει η συσκευή αυτή να τροφοδοτείται ταυτόχρονα και από άλλες πηγές. Οι πηγές αυτές πρέπει να παρέχουν τάση του ίδιου πλάτους και της ίδιας συχνότητας, αλλά να παρουσιάζουν μεταξύ τους κατάλληλα υπολογισμένες διαφορές φάσεως ώστε έτσι οι διακυμάνσεις ισχύος να αλληλοεξουδετερώνονται ώστε η στιγμιαία ισχύς στη συσκευή καταναλώσεως να είναι κατά το δυνατόν σταθερή. Η τελική διάταξη αποτελείται από περισσότερα του ενός κυκλώματα κάθε ένα από τα οποία τροφοδοτείται από πηγή που έχει διαφορετική φάση.

Έτσι το κάθε κύκλωμα ονομάζεται **φάση** και όλη η διάταξη ονομάζεται **πολυφασικό σύστημα**.

Στο σχήμα 19.16 παρουσιάζεται το διάγραμμα **τριφασικού συστήματος**. Το σύστημα αυτό, που θα μας απασχολήσει αποκλειστικά στη συνέχεια γιατί είναι ευρύτατα διαδεδομένο, αποτελείται από τρεις πηγές οι οποίες ανά δύο παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 120° μεταξύ τους. Στην παράγραφο 19.2 θα παρουσιάσουμε την αρχή λειτουργίας της τριφασικής γεννήτριας. Οι γραμμές μεταφοράς στο πολυφασικό σύστημα είναι μια για κάθε φάση, ενώ για λόγους οικονο-



Σχ. 19.16.
Τριφασικό σύστημα.

μίας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε κοινό αγωγό για την επιστροφή του ρεύματος και των τριών φάσεων, όπως αναλυτικά θα αναπτύξουμε. Οι εντάσεις των ρευμάτων στα διάφορα κυκλώματα του συστήματος έχουν διαφορές φάσεως μεταξύ τους. Επομένως, η μέγιστη τιμή του ρεύματος στον κοινό αγωγό επιστροφής, που ονομάζεται **ουδέτερος**, θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των μεγίστων τιμών των ρευμάτων στα κυκλώματα των τριών φάσεων. Εξυπακούεται ότι από μια από τις φάσεις ενός πολυφασικού συστήματος μπορεί να τροφοδοτείται και ένας ή περισσότεροι μονοφασικοί καταναλωτές. Αλλά με τους τρόπους συνθέσεως ενός καταναλωτή σε τριφασικό σύστημα θα ασχοληθούμε εκτενώς σε επόμενες παραγράφους.

Τα πλεονεκτήματα των πολυφασικών συστημάτων έναντι των μονοφασικών μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

- 1) Η μονοφασική ισχύς είναι εναλλασσόμενη. Η πολυφασική ισχύς είναι σταθερή, όταν το πολυφασικό σύστημα φορτίζεται συμμετρικά.
- 2) Οι πολυφασικές μηχανές παράγουν μεγαλύτερη ισχύ έναντι μονοφασικών του ίδιου κόστους.
- 3) Οι πολυφασικές μηχανές έχουν μεγαλύτερο βαθμό αποδόσεως από ό,τι οι μονοφασικές.
- 4) Τα πολυφασικά δίκτυα μεταφοράς πλεονεκτούν έναντι των μονοφασικών από άποψη οικονομίας του αγωγίμου υλικού. Έτσι, για την ίδια ισχύ μεταφοράς, απόσταση μεταφοράς και ποιότητα αγωγίμου υλικού, απαιτείται 25% λιγότερο υλικό για τριφασικό δίκτυο από ό,τι για μονοφασικό.
- 5) Μονοφασικές συσκευές μπορεί να λειτουργήσουν και σε πολυφασικά συστήματα, εφόσον συνδεθούν κατάλληλα σε δύο από τους αγωγούς του δικτύου.

Για όλους τους παραπάνω λόγους τα πολυφασικά και ιδιαίτερα τα **τριφασικά συστήματα** χρησιμοποιούνται σήμερα κατ' αποκλειστικότητα για τη μεταφορά και διανομή ηλεκτρικής ενέργειας. Επί πλέον τριφασικοί κινητήρες χρησιμοποιούνται ευρύτατα σήμερα, ακόμη και από μικρούς καταναλωτές. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα γνωρίσουμε λοιπόν τα τριφασικά συστήματα και θα μάθουμε τρόπους υπολογισμού τριφασικών δικτύων.

19.2 Παραγωγή τριφασικού ρεύματος.

Σύμφωνα με τους γενικούς ορισμούς που δώσαμε στην παράγραφο 19.1:

Ονομάζουμε τριφασικό ρεύμα ένα σύστημα τριών μονοφασικών ρευμάτων που έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια συχνότητα, αλλά παρουσιάζουν ανά δύο διαφορά φάσεως 120° .

Οι εξισώσεις των τριών ρευμάτων θα είναι:

$$i_1 = I_0 \eta \mu \omega t \quad (19.2)$$

$$i_2 = I_0 \eta \mu (\omega t - 120^\circ) \quad (19.3)$$

$$i_3 = I_0 \eta \mu (\omega t - 240^\circ) = I_0 \eta \mu (\omega t + 120^\circ) \quad (19.4)$$

Το άθροισμα των τριών ρευμάτων είναι μηδέν:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = I_0 [\eta \mu \omega t + 2 \eta \mu \omega t \text{ συν } (120)] =$$

$$= i_0 (\eta \mu \omega t - \eta \mu \omega t) \rightarrow$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (19.5)$$

Το αποτέλεσμα αυτό διαπιστώνεται και από το σχήμα 19.2α, το οποίο παριστάνει γραφικά τις εξισώσεις (19.2), (19.3) και (19.4).

Είναι φανερό ότι ένα σύστημα τριών μονοφασικών ρευμάτων παράγεται από ένα σύστημα τριών μονοφασικών τάσεων του ίδιου πλάτους, της ίδιας συχνότητας αλλά που παρουσιάζουν ανά δύο διαφορά φάσεως 120° . Οι εξισώσεις των τριών τάσεων στις οποίες οφείλεται το τριφασικό ρεύμα των εξισώσεων (19.2), (19.3) και (19.4) είναι:

$$u_1 = U_0 \eta \mu (\omega t + \varphi) \quad (19.6)$$

$$u_2 = U_0 \eta \mu (\omega t + \varphi - 120^\circ) \quad (19.7)$$

$$u_3 = U_0 \eta \mu (\omega t + \varphi - 240^\circ) \quad (19.8)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις συνιστούν μια **τριφασική τάση**.

Το σχέδιο του σχήματος 19.2β μας δείχνει πώς παράγεται μια τριφασική τάση: Τρία πηνία στρέφονται γύρω από τον ίδιο άξονα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Τα πηνία έχουν τις ίδιες διαστάσεις, τον ίδιο αριθμό σπειρών, έχουν προσαρμοσθεί στον ίδιο άξονα αλλά είναι μετατοπισμένα κατά 120° το ένα ως προς το άλλο.

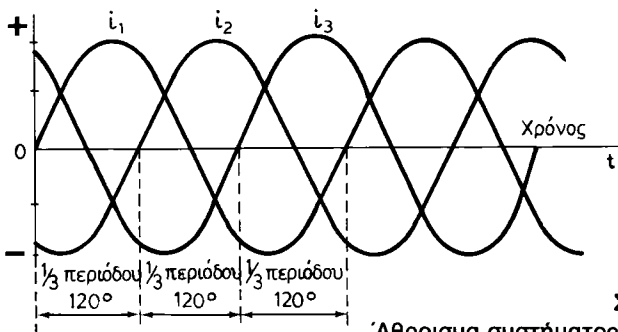
Επειδή μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε πηνίο θα αναπτύσσεται στα άκρα του επαγωγική ΗΕΔ, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 15.4. Έτσι θα αναπτύσσονται τρεις ΗΕΔ που θα έχουν την ίδια συχνότητα, το ίδιο πλάτος (αφού τα τρία πηνία είναι πανομοιότυπα και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα) αλλά με φασική απόκλιση της μιας ως προς την άλλη 120° .

Επομένως οι εξισώσεις των τριών ΗΕΔ, όταν το σύστημα περιστρέφεται κατά τη φορά του βέλους, είναι:

$$u_1 = U_0 \eta \mu \omega t \quad (19.9)$$

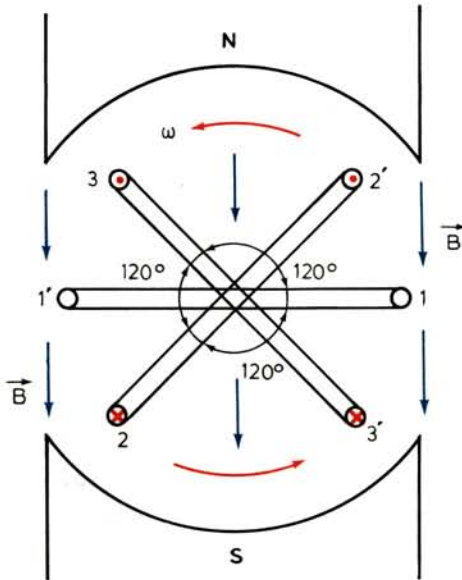
$$u_2 = U_0 \eta \mu (\omega t - 120^\circ) \quad (19.10)$$

$$u_3 = U_0 \eta \mu (\omega t - 240^\circ) \quad (19.11)$$



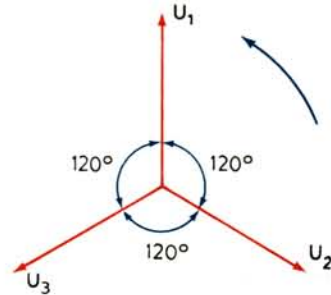
Σχ. 19.2α.

Άθροισμα συστήματος τριών μονοφασικών ρευμάτων.



Σχ. 19.26.

Αρχή παραγωγής τριφασικής τάσεως.



Σχ. 19.2γ.

Διανυσματικό διάγραμμα τριφασικής τάσεως.

οπότε ισχύει πάλι η σχέση:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (19.12)$$

Το σχήμα 19.2γ δείχνει το διανυσματικό διάγραμμα των ενεργών τιμών των τριών τάσεων ($U_1 = U_2 = U_3$).

Τα τρία πηνία ονομάζονται **φάσεις** του συστήματος.

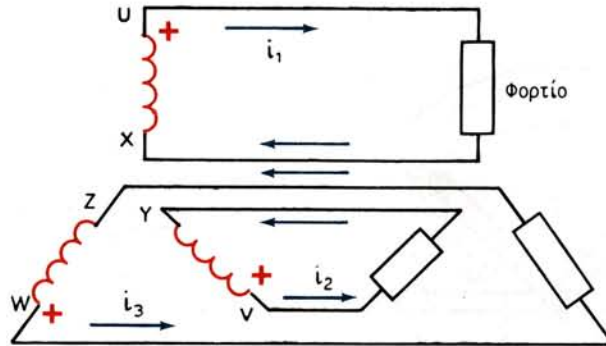
19.3 Σύνδεση των φάσεων σε τριφασικό σύστημα.

Η σύνδεση* φάσεων της γεννήτριας μεταξύ τους και προς τους καταναλωτές που τροφοδοτούνται μπορεί να γίνει κατά δύο τρόπους:

- **Ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα** ονομάζεται το σύστημα κατά το οποίο δεν επιτρέπεται η σύνδεση των φάσεων μεταξύ τους, οπότε προβλέπεται ιδιαίτερος αγωγός επιστροφής για κάθε φάση.
- **Αλληλένδετο τριφασικό σύστημα** ονομάζεται το σύστημα κατά το οποίο επιτρέπεται η σύνδεση των φάσεων μεταξύ τους οπότε είτε προβλέπεται ένας μόνον αγωγός επιστροφής (ουδέτερος αγωγός) είτε δεν προβλέπεται καθόλου.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των δύο αυτών συστημάτων ας αναφέρουμε ότι στην Ελλάδα, αλλά και σε πολλές άλλες χώρες, τις αρχές των φάσεων

*Παλαιότερα αντί του όρου αυτού χρησιμοποιούνταν ο όρος **ζεύξη**. Τον όρο αυτό μπορεί ακόμη κάποιος να συναντήσει στη βιβλιογραφία ή σε κανονισμούς της ΔΕΗ.



Σχ. 19.3α.
Ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα.

στην πλευρά της πηγής τις παριστάνομε με τα γράμματα U, V, W και τις απολήξεις τους προς την πλευρά του καναλωτή με X, Y, Z αντίστοιχα.

α) Ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα.

Σε κάθε φάση μπορούμε να συνδέσουμε ένα φορτίο, όπως φαίνεται στο σχήμα 19.3α. Παίρνουμε έτσι τρία ανεξάρτητα μονοφασικά κυκλώματα. Το σύστημα αυτό των τριών ανεξαρτήτων φάσεων, που είναι μετατοπισμένες μεταξύ τους κατά 120° ονομάζεται **ανεξάρτητο τριφασικό**. Αν τα τρία φορτία είναι όμοια τότε τα τρία ρεύματα i_1 , i_2 και i_3 θα έχουν την ίδια ενεργό τιμή και την ίδια φασική απόκλιση ως προς τις τάσεις u_1 , u_2 και u_3 , θα παρουσιάζουν δηλαδή μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° . Πράγματι αν $Z = Z \angle \varphi$ είναι η σύνθετη αντίσταση του φορτίου και φ_1 , $\varphi_2 = \varphi_1 - 120^\circ$, $\varphi_3 = \varphi_1 - 240^\circ$ τα ορίσματα των τριών τάσεων u_1 , u_2 και u_3 θα έχουμε:

$$\underline{i}_1 = \frac{U_1 e^{j\varphi_1}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U_1}{Z} \angle \varphi_1 - \varphi$$

$$\underline{i}_2 = \frac{U_2 \angle \varphi_2}{Z \angle \varphi} = \frac{U_2}{Z} \angle (\varphi_1 - \varphi) - 120^\circ$$

και

$$\underline{i}_3 = \frac{U_3 \angle \varphi_3}{Z \angle \varphi} = \frac{U_3}{Z} \angle (\varphi_1 - \varphi) - 240^\circ$$

Επειδή $i_1 = i_2 = i_3$ θα είναι και $I_1 = I_2 = I_3$. Το άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των τριών ρευμάτων είναι πάντοτε μηδέν ($i_1 + i_2 + i_3 = 0$). Το ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα δε χρησιμοποιείται στην πράξη γιατί το κόστος κατασκευής είναι μεγάλο (απαιτούνται 6 δακτύλιοι, 6 ψήκτρες και 6 αγωγοί μεταφοράς της ηλ. ενέργειας) και η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας αντιοικονομική.

β) Αλληλένδετο τριφασικό σύστημα.

Στην πράξη οι φάσεις συνδέονται μεταξύ τους γι' αυτό και τα συστήματα ονομάζονται αλληλένδετα. Στην περίπτωση αυτή οι αγωγοί μεταφοράς περιορί-

ζονται σε τρεις ή τέσσερις ανάλογα με τον τρόπο συνδέσεως των φάσεων. Υπάρχουν δύο τρόποι συνδέσεως των φάσεων:

- Η αστεροειδής σύνδεση ή **σύνδεση κατ' αστέρα** και,
- η τριγωνική σύνδεση ή **σύνδεση κατά τρίγωνο**.

Λόγω της απουσίας της που παρουσιάζουν, θα μελετήσουμε τους δύο αυτούς τρόπους συνδέσεως των τριφασικών συστημάτων κατά περίπτωση, στις παραγράφους που ακολουθούν.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των τρόπων συνδέσεως των φάσεων της γεννήτριας μεταξύ τους, ας δώσουμε μερικούς γενικούς ορισμούς, που αφορούν και τις δύο συνδέσεις:

Φασική τάση: ονομάζεται η τάση στα άκρα κάθε τυλίγματος (πηνίου) της γεννήτριας, δηλαδή η τάση στα άκρα κάθε φάσεως.

Φασική ένταση ρεύματος ή φασικό ρεύμα: ονομάζεται το ρεύμα που διαρρέει κάθε τύλιγμα της γεννήτριας, δηλαδή κάθε φάση.

Πολική τάση ή τάση γραμμής: ονομάζεται η τάση μεταξύ δύο αγωγών συνδέσεως γεννήτριας και καταναλωτή, οι οποίοι αναχωρούν από δύο διαδοχικά τυλίγματα της γεννήτριας.

Ένταση ρεύματος γραμμής ή ρεύμα γραμμής: ονομάζεται το ρεύμα που διαρρέει κάθε αγωγό συνδέσεως γεννήτριας και καταναλωτή, (εξαιρούμενου του ρεύματος του ουδέτερου αγωγού). Αρκετές φορές για τα ρεύματα γραμμής χρησιμοποιείται – κατ' αναλογία προς της τάσεις – ο όρος «πολικά ρεύματα».

19.3.1 Σύνδεση κατ' αστέρα.

Στη σύνδεση κατ' αστέρα συνδέονται αγωγίμα οι απολήξεις X, Y, Z των τριών φάσεων σε ένα κοινό σημείο O, που ονομάζεται ουδέτερος κόμβος. Από τις αρχές U, V, W των φάσεων αναχωρούν τρεις γραμμές που χαρακτηρίζονται με τα γράμματα R, S, T ενώ ο ουδέτερος κόμβος συνδέεται με τον αγωγό N που ονομάζεται **ουδέτερος αγωγός** (σχ. 19.38).

Εκτός από τα πηνία του τριφασικού εναλλακτήρα στην πράξη έχει επικρατήσει και οι αγωγοί τροφοδοτήσεως R, S, T να ονομάζονται φάσεις.

Στο σύστημα αυτό παρατηρούμε ότι έχουμε 4 αγωγούς αντί 6 του ανεξάρτητου συστήματος. Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε στη διάθεσή μας για τη σύνδεση των φορτίων δύο τάσεις:

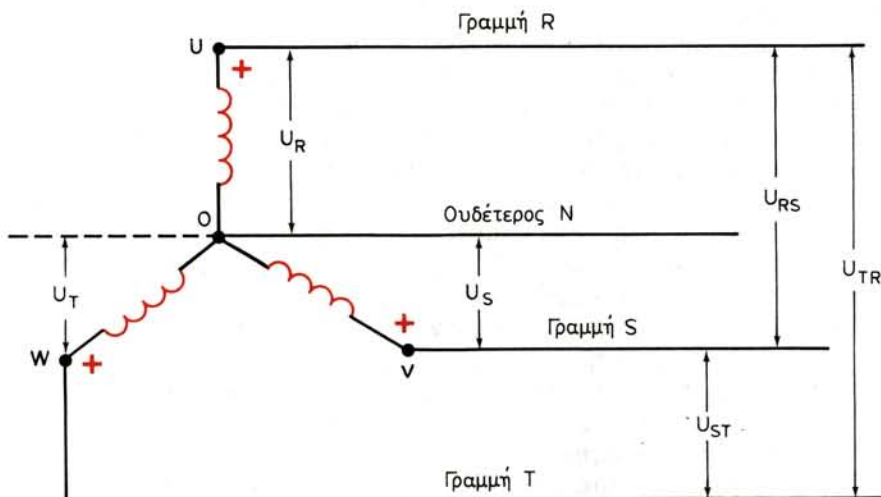
α) Τη φασική τάση U_{ϕ} .

Η φασική τάση είναι η τάση που επικρατεί μεταξύ κάθε αγωγού R, S, T και του ουδέτερου αγωγού N, δηλαδή είναι η τάση στα άκρα της αντίστοιχης φάσεως.

$$U_{\phi} = U_R = U_S = U_T \quad (19.13)$$

Οι τρεις φασικές τάσεις παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° , όπως στο ανεξάρτητο σύστημα. Ένα τέτοιο σύστημα τάσεων ονομάζεται συμμετρικό τριφασικό σύστημα. Το άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των φασικών τάσεων είναι μηδέν.

$$u_R + u_S + u_T = 0$$



Σχ. 19.36.

Συνδεσμολογία των τριών φάσεων κατ' αστέρα.

β) Την πολική τάση $U_{π}$

Πολική τάση ονομάζεται η τάση μεταξύ δύο φάσεων, δηλαδή η u_{RS} , u_{ST} και u_{TR} .

Από το σχήμα 19.36 προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_{RS} &= u_U - u_V = (u_U - u_o) + (u_o - u_V) = \\ &= (u_U - u_o) - (u_V - u_o) \rightarrow \end{aligned}$$

$$u_{RS} = u_R - u_S \quad (19.14)$$

Είναι όμως: $u_R = U_R \sqrt{2} \eta \mu \omega t \quad (19.15)$

$$u_S = U_S \sqrt{2} \eta \mu (\omega t - 120^\circ) \quad (19.16)$$

και $U_R = U_S = U_\phi \quad (19.17)$

Από τις (19.14) έως (19.17) προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_{RS} &= U_\phi \sqrt{2} [\eta \mu \omega t - \eta \mu (\omega t - 120^\circ)] = \\ &= 2U_\phi \sqrt{2} [\sigma \nu \nu (\omega t - 60^\circ) \eta \mu 60^\circ] \rightarrow \\ u_{RS} &= \sqrt{3} \sqrt{2} U_\phi \eta \mu (\omega t + 30^\circ) \quad (19.18) \end{aligned}$$

Από την (19.18) προκύπτει ότι η πολική τάση u_{RS} έχει ενεργό τιμή:

$$U_{RS} = U_\phi \sqrt{3} \quad (19.19)$$

και προηγείται της φασικής τάσεως u_R κατά 30° .

Με ανάλογη εργασία καταλήγουμε και στις εκφράσεις των άλλων δύο πολικών τάσεων:

$$u_{ST} = \sqrt{3} \sqrt{2} U_{\phi} \eta \mu (\omega t - 90^\circ) \quad (19.20)$$

$$u_{TR} = \sqrt{3} \sqrt{2} U_{\phi} \eta \mu (\omega t - 210^\circ) \quad (19.21)$$

Δηλαδή ισχύει για την πολική τάση:

$$U_{\Pi} = U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = \sqrt{3} U_{\phi} \quad (19.22)$$

Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και με τη βοήθεια του μιγαδικού λογισμού. Είναι:

$$\bar{u}_{RS} = \bar{u}_R - \bar{u}_S \quad (19.23)$$

Αν θεωρήσουμε την \bar{u}_R στον πραγματικό άξονα ($\bar{u}_R = U_R \angle 0^\circ$) η (19.23) γίνεται:

$$\bar{u}_{RS} = U_R - U_R e^{-j \frac{2\pi}{3}} = U_R (1 - e^{-j \frac{2\pi}{3}}) =$$

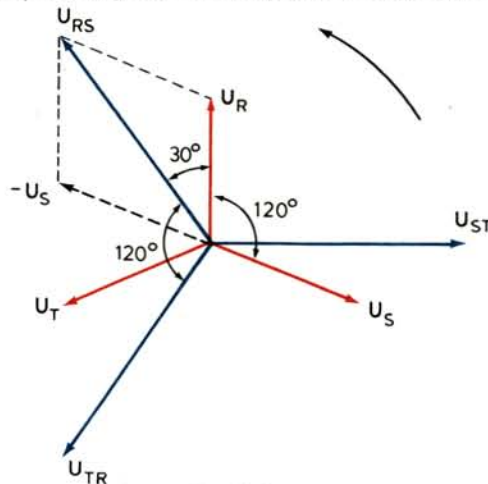
$$= U_R \left(\frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow$$

$$\bar{u}_{RS} = U_R \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (19.24)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα οι τρεις πολικές τάσεις είναι κατά μέτρο ίσες ($U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = U_{\Pi}$), παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° και προπορεύονται αντίστοιχα των U_R , U_S , U_T κατά 30° . Μεταξύ πολικής και φασικής τάσεως υπάρχει η σχέση:

$$U_{\Pi} = \sqrt{3} U_{\phi} \approx 1,73 U_{\phi} \quad (19.25)$$

Το σχήμα 19.3γ παρουσιάζει το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων.



Σχ. 19.3γ.

Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων σε σύνδεση κατ' αστέρα. Είναι $\bar{U}_{RS} = \bar{U}_R - \bar{U}_S$, $U_{ST} = U_S - U_T$ και $U_{TR} = U_T - U_R$.

Το ρεύμα που παρέχει η ΔΕΗ στους καταναλωτές έχει φασική τάση $U_{\phi} = 220 \text{ V}$ και πολική τάση $U_{\Pi} = 220 \sqrt{3} = 380 \text{ V}$.

Τα φορτία μπορούν να συνδεθούν είτε μεταξύ μιας φάσεως και του ουδέτερου αγωγού (τάση 220 V) είτε μεταξύ δύο φάσεων (τάση 380 V) όπως φαίνεται στο σχήμα 19.3δ.

Το σχήμα 19.3ε(α) δείχνει τρία φορτία που έχουν συνδεθεί μεταξύ μιας φάσεως και του ουδέτερου αγωγού και έχουν σύνθετες αντιστάσεις \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 και \bar{Z}_3 .

Παρατηρούμε ότι το ρεύμα που διαρρέει κάθε γραμμή μεταφοράς είναι ίσο με το ρεύμα της αντίστοιχης φάσεως.

Αν $Z_1 = Z_2 = Z_3$ τότε τα ρεύματα που διαρρέουν τις γραμμές μεταφοράς έχουν την ίδια ενεργό τιμή:

$$I_R = I_S = I_T = I_{\phi} \quad (19.26)$$

και την ίδια φασική απόκλιση ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$) ως προς τις τάσεις U_R , U_S και U_T [σχ. 19.3ε(β)].

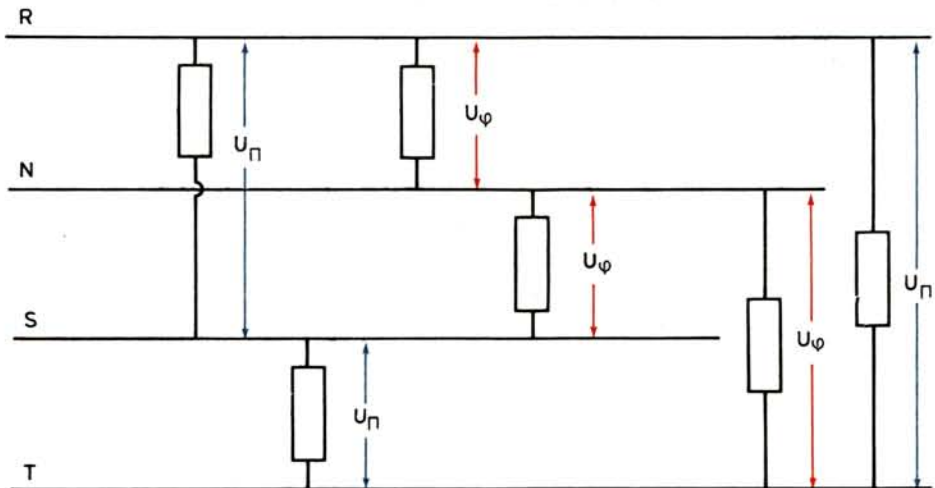
Τα τρία ρεύματα παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° και το άθροισμα των στιγμιαίων τιμών τους είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα ονομάζεται ισορροπημένο.

Επειδή
$$i_N = i_R + i_S + i_T = 0$$

θα είναι και
$$\bar{I}_N = \bar{I}_R + \bar{I}_S + \bar{I}_T = 0 \quad (19.27)$$

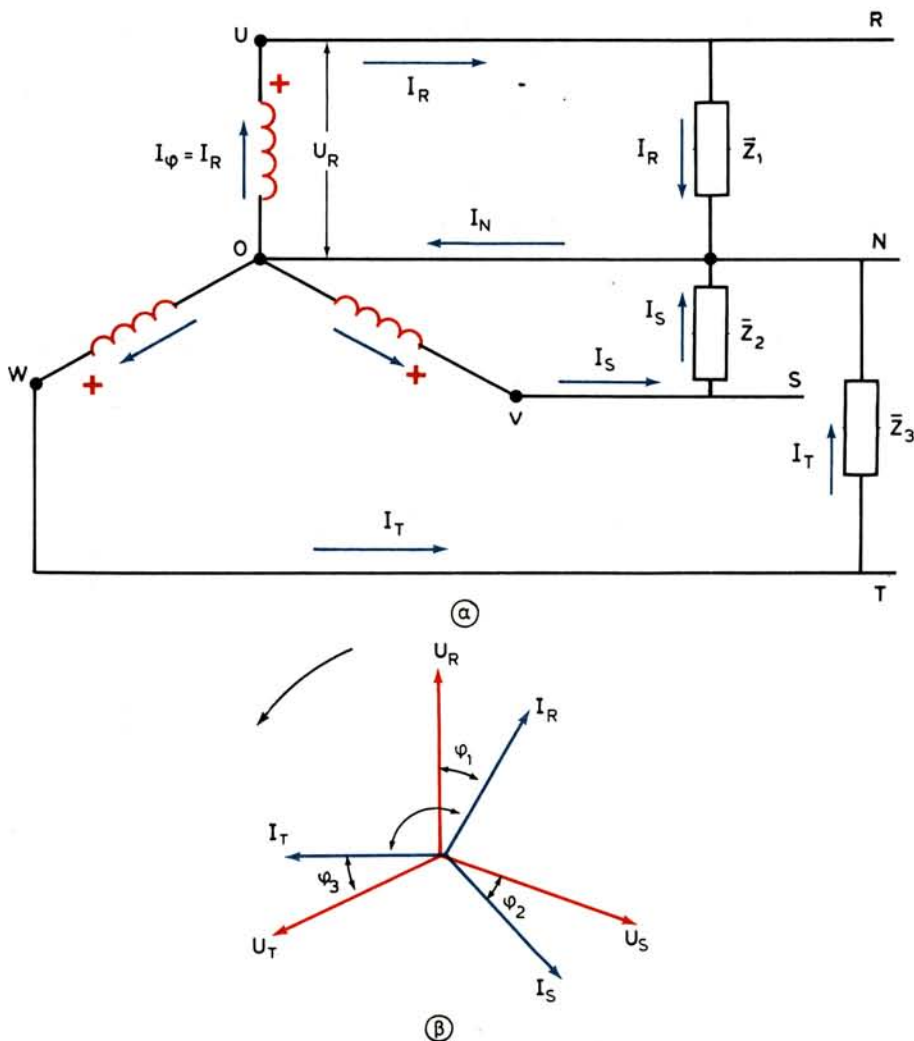
δηλαδή στην περίπτωση ισορροπημένου συστήματος, ο ουδέτερος αγωγός δε διαρρέεται από ρεύμα οπότε μπορεί να αφαιρεθεί από το σύστημα.

Αν και η ΔΕΗ επιδιώκει ομοιόμορφη κατανομή των φορτίων στις τρεις φάσεις, ωστόσο αυτό δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί εντελώς στα δίκτυα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Έτσι τοποθετείται και ουδέτερος αγωγός, ο



Σχ. 19.3δ.

Σύνδεση φορτίων σε τριφασικό σύστημα κατ' αστέρα.



Σχ. 19.3ε.

(α) Σύνδεση φορτίων σε τριφασικό σύστημα κατ' αστέρα. (β) Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων σε σύνδεση κατ' αστέρα. Σε συμμετρική φόρτιση είναι $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

οποίος συνήθως γειώνεται. Ο αγωγός αυτός όμως διαρρέεται από ρεύμα εξισορροπήσεως, που είναι αρκετά μικρότερο από τα ρεύματα των γραμμών. Μπορεί επομένως να έχει μικρότερη διατομή από τους υπόλοιπους τρεις και έτσι να εξασφαλίζεται μεγαλύτερη οικονομία.

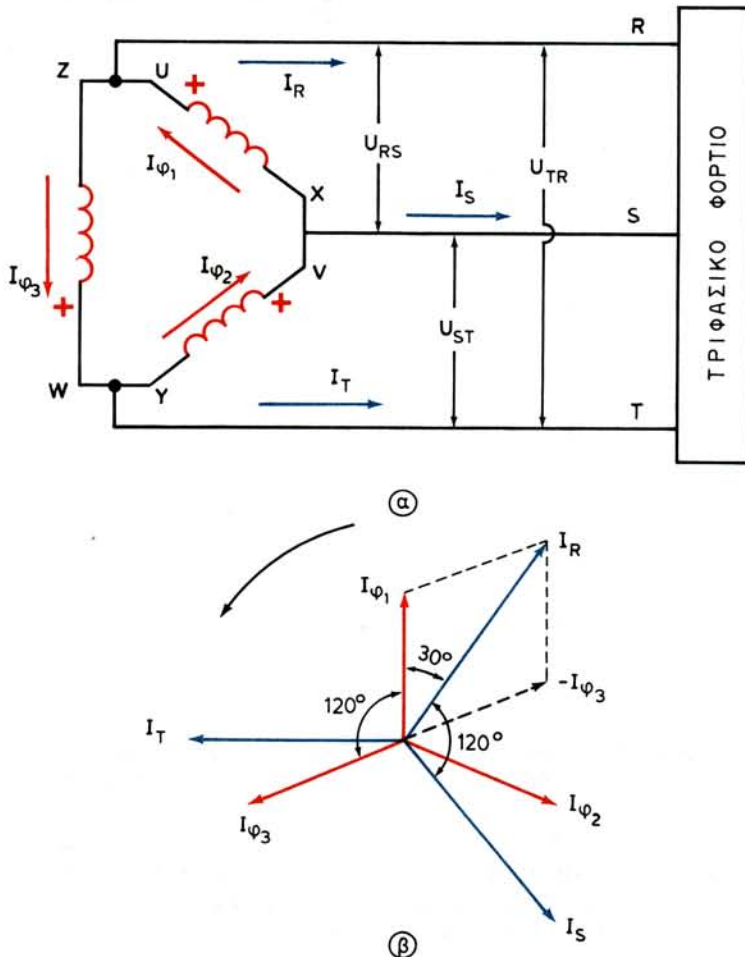
19.3.2 Σύνδεση κατά τρίγωνο.

Στην τριγωνική σύνδεση, συνδέεται αγωγίμα το τέλος της πρώτης φάσεως με

την αρχή της δεύτερης, το τέλος της δεύτερης με την αρχή της τρίτης και το τέλος της τρίτης με την αρχή της πρώτης. Έτσι, τρεις γραμμές R, S, T τροφοδοτήσεως των φορτίων αναχωρούν από τους τρεις κόμβους που σχηματίστηκαν [σχ. 19.3στ (α)]. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα η τάση μεταξύ δύο γραμμών συμπίπτει με την αντίστοιχη φασική τάση. Εφόσον οι τρεις φάσεις της γεννήτριας είναι όμοιες, οι τρεις πολικές τάσεις είναι ίσες αλλά παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° (συμμετρικό σύστημα):

$$U_{\Pi} = U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = U_{\phi} \quad (19.28)$$

Όταν το σύστημα δεν τροφοδοτεί φορτίο τότε ηλεκτρικό ρεύμα δεν κυκλοφορεί στο τρίγωνο των φάσεων, υπό την προϋπόθεση ότι τα τρία τυλίγματα έχουν εντελώς όμοια κατασκευή. Στην περίπτωση αυτή οι τρεις φασικές τάσεις



Σχ. 19.3στ.

(α) Συνδεσμολογία των τριών φάσεων κατά τρίγωνο. (β) Διανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων σε σύνδεση κατά τρίγωνο. Είναι: $I_R = I_{\phi_1} - I_{\phi_3}$, $I_S = I_{\phi_2} - I_{\phi_1}$ και $I_T = I_{\phi_3} - I_{\phi_2}$.

έχουν την ίδια ενεργό τιμή και παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσεως 120° οπότε το άθροισμά τους σε κάθε χρονική στιγμή είναι μηδέν.

Ο όρος της πανομοιότυπης κατασκευής των τυλιγμάτων της γεννήτριας επιβαρύνει το κόστος κατασκευής της μηχανής και αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα απέναντι στη σύνδεση κατ' αστέρα, που δεν απαιτεί τόσο αυστηρή ομοιομορφία.

Στο τριγωνικό σύστημα δεν υπάρχει ουδέτερος αγωγός γι' αυτό και έχουμε στη διάθεσή μας τάσεις μιας μόνον τιμής σε αντίθεση με το αστεροειδές σύστημα όπου, όπως είδαμε, έχουμε στη διάθεσή μας τάσεις δύο διαφορετικών τιμών.

Όταν το σύστημα τροφοδοτεί φορτίο, τότε ρεύμα διαρρέει τις γραμμές τροφοδοτήσεως R, S, T και τις περιελίξεις των φάσεων. Όταν τα φορτία είναι όμοια (συμμετρική φόρτιση) τα ρεύματα γραμμής I_R , I_S και I_T είναι ίσα μεταξύ τους $I_R = I_S = I_T = I_Y$. Επίσης, ίσα μεταξύ τους είναι και τα ρεύματα των φάσεων I_{φ_1} , I_{φ_2} και I_{φ_3} ($I_{\varphi_1} = I_{\varphi_2} = I_{\varphi_3} = I_\varphi$). Τα φασικά ρεύματα παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 120° και η σχέση τους με τα ρεύματα των γραμμών προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} i_{\varphi_1} &= i_R + i_{\varphi_3} \rightarrow i_R = i_{\varphi_1} - i_{\varphi_3} = \\ &= I_0 [\eta \mu \omega t - \eta \mu (\omega t - 240^\circ)] = 2I_0 \sin (\omega t - 120^\circ) \eta \mu 120^\circ \\ \rightarrow i_R &= \sqrt{3} I_0 \eta \mu (\omega t - 30^\circ) = \sqrt{3} \sqrt{2} I_\varphi \eta \mu (\omega t - 30^\circ) \end{aligned} \quad (19.29)$$

Από τη σχέση (19.29) προκύπτει ότι το ρεύμα γραμμής i_R έχει ενεργό τιμή:

$$I_R = \sqrt{3} I_\varphi \quad (19.30)$$

και έπεται του φασικού ρεύματος I_{φ_1} κατά γωνία 30° .

Με ανάλογη εργασία καταλήγουμε και στις εκφράσεις των άλλων δύο ρευμάτων γραμμής:

$$i_S = \sqrt{3} \sqrt{2} I_\varphi \eta \mu (\omega t - 90^\circ) \quad (19.31)$$

$$i_T = \sqrt{3} \sqrt{2} I_\varphi \eta \mu (\omega t - 210^\circ) \quad (19.32)$$

Δηλαδή αν τα φορτία είναι όμοια, ισχύει για τα ρεύματα γραμμής:

$$I_Y = I_R = I_S = I_T = \sqrt{3} I_\varphi \quad (19.33)$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και με τη βοήθεια του μιγαδικού λογισμού. Δηλαδή είναι:

$$\bar{I}_R = \bar{I}_{\varphi_1} - \bar{I}_{\varphi_3} \quad (19.34)$$

Αν θεωρήσουμε την \bar{I}_{φ_1} στον πραγματικό άξονα ($\bar{I}_{\varphi_1} = I_{\varphi_1} \angle 0^\circ$) η (19.34) γίνεται:

$$\begin{aligned} I_R &= I_{\varphi_1} - I_{\varphi_3} e^{-j \frac{4\pi}{3}} = I_{\varphi_1} (1 - e^{-j \frac{4\pi}{3}}) = \\ &= I_{\varphi_1} \left(\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \bar{I}_R = I_{\varphi_1} \sqrt{3} \angle -30^\circ \end{aligned}$$

Το σχήμα 19.3στ(β) παρουσιάζει το διανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων, σε περίπτωση συμμετρικής φορτίσεως της μηχανής.

19.4 Σύνδεση των φορτίων σε τριφασικό σύστημα.

Μεταξύ των αγωγών τριφασικού συστήματος διανομής χαμηλής τάσεως (220/380 V), που η ΔΕΗ παρέχει σε σύνδεση κατά τρίγωνο, συνδέονται τα φορτία των μικρών καταναλωτών είτε αυτά είναι μονοφασικά είτε είναι τριφασικά.

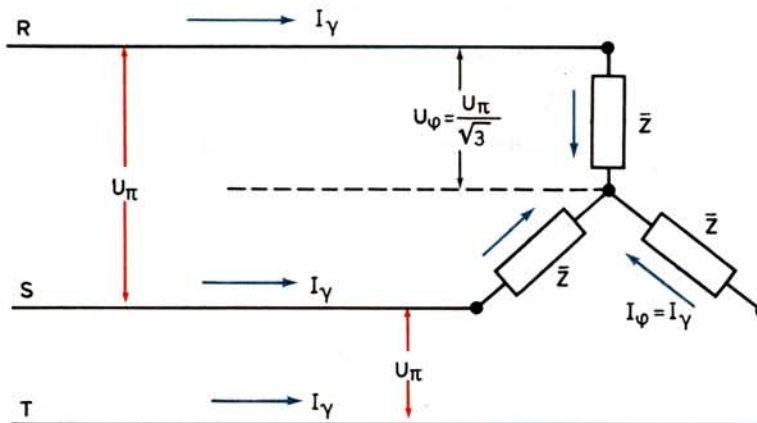
Στις μικρές οικιακές εγκαταστάσεις παρέχεται κατά κανόνα η μια φάση και ο ουδέτερος αγωγός. Σε μεγαλύτερους καταναλωτές παρέχονται και οι τρεις φάσεις καθώς και ο ουδέτερος, είτε προκειμένου να συνδεθούν τριφασικά φορτία (π.χ. 3φ κινητήρες) είτε προκειμένου να συνδεθούν μονοφασικά φορτία μεγάλης συνολικής ισχύος.

Σ' ένα σύστημα διανομής κατ' αστέρα μετά ουδέτερου, όπως αυτό της ΔΕΗ, οι καταναλώσεις (φορτία) βρίσκονται σε διάφορες θέσεις στο δίκτυο διανομής, οπότε η συμμετρική κατανομή των φορτίων, αν και καταβάλλεται φροντίδα, δεν επιτυγχάνεται τελείως. Έτσι, ο ουδέτερος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα. Βεβαίως, όπως τονίσαμε στην παράγραφο 19.3.1 το ρεύμα αυτό είναι πάρα πολύ μικρό και πρακτικά αμελητέο. Εξάλλου, ο ουδέτερος κόμβος του δικτύου διανομής στην αφετηρία του, στον υποσταθμό διανομής, γειώνεται. Έτσι, το δυναμικό των διαφόρων σημείων του ουδέτερου αγωγού ως προς τον ουδέτερο κόμβο (γη) δεν υπερβαίνει τα λίγα βολτ και έτσι ο ουδέτερος αγωγός είναι πάντα προσιτός χωρίς κίνδυνο ηλεκτροπληξίας. Σήμερα η ΔΕΗ επιβάλλει στους νέους της καταναλωτές τη γείωση του ουδέτερου σε κατάλληλο ηλεκτρόδιο γειώσεως και στο σημείο παροχής ρεύματος στον καταναλωτή.

Οι καταναλώσεις συνδέονται στο τριφασικό δίκτυο κατ' αστέρα ή κατά τρίγωνο, ανεξάρτητα από τον τρόπο συνδέσεως των φάσεων της γεννήτριας ή του μετασχηματιστή διανομής.

Το σχήμα 19.4α δείχνει τη σύνδεση καταναλωτών **κατ' αστέρα σε τριφασικό σύστημα χωρίς ουδέτερο αγωγό**.

Το ρεύμα σε κάθε φάση του καταναλωτή είναι ίσο προς το ρεύμα της γραμμής που τροφοδοτεί τον καταναλωτή. Αν οι καταναλωτές παρουσιάζουν διαφο-



Σχ. 19.4α.

Σύνδεση καταναλωτών κατ' αστέρα.

ρετικά χαρακτηριστικά (ασύμμετρη φόρτιση) τότε χρειάζεται ανάλυση του δικτύου, με μια από τις μεθόδους που γνωρίσαμε στο κεφάλαιο 18, για να υπολογίσουμε, με δεδομένη την πολική τάση της γραμμής, τις φασικές εντάσεις και τις φασικές τάσεις. Αν οι καταναλωτές είναι όμοιοι (συμμετρική φόρτιση) τότε όλες οι φάσεις διαρρέονται από ρεύμα ίσης ενεργούς τιμής:

$$I_{\phi} = I_{\gamma} \quad (19.35)$$

οπότε η φασική τάση στα άκρα κάθε καταναλωτή είναι:

$$U_{\phi} = \frac{U_{\pi}}{\sqrt{3}} \quad (19.36)$$

Σε σύστημα με **ουδέτερο αγωγό** (σχ. 19.3ε) η τάση στα άκρα των καταναλωτών είναι ίση με τη φασική τάση του συστήματος, ενώ το ρεύμα που τους διαρρέει είναι και πάλι ίσο με το ρεύμα γραμμής. Σχετικά με τη φόρτιση (συμμετρική ή όχι) έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 19.3.1.

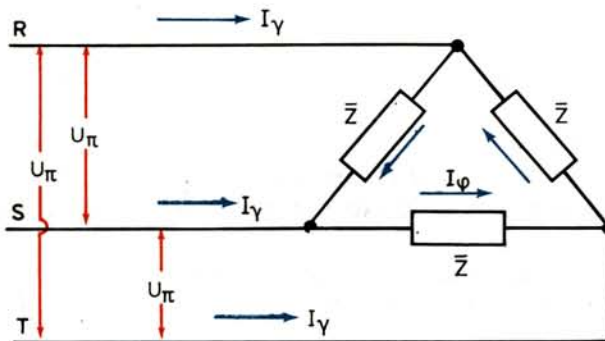
Το σχήμα 19.46 δείχνει τη σύνδεση καταναλωτών **κατά τρίγωνο**. Παρατηρούμε ότι η τάση στα άκρα κάθε καταναλωτή είναι ίση με την πολική τάση:

$$U_{\phi} = U_{\pi} \quad (19.37)$$

Αν η φόρτιση είναι συμμετρική, τότε κατ' αναλογία με όσα έχουν αναπτυχθεί στην παράγραφο 19.3.2, προκύπτει ότι όλες οι φάσεις του καταναλωτή διαρρέονται από ρεύμα ίσης ενεργούς τιμής που συνδέεται με το ρεύμα γραμμής με τη σχέση:

$$I_{\phi} = \frac{I_{\gamma}}{\sqrt{3}} \quad (19.38)$$

Οι φάσεις των τριών φασικών ρευμάτων προηγούνται των φάσεων των ρευμάτων γραμμής κατά 30° . Το διανυσματικό τους διάγραμμα είναι όμοιο με εκείνο του σχήματος 19.3στ(θ).



Σχ. 19.46.

Σύνδεση καταναλωτών κατά τρίγωνο.

Αν η φόρτιση δεν είναι συμμετρική τότε πρέπει να γίνει ανάλυση του δικτύου με μια από τις μεθόδους του κεφαλαίου 18.

Παράδειγμα 19.4.1.

Να αποδειχθεί ότι όταν τρεις όμοιες περιελίξεις, π.χ. οι περιελίξεις του στάτη ασύγχρονου τριφασικού κινητήρα, συνδεθούν κατ' αστέρα το ρεύμα που διαρρέει τις γραμμές μεταφοράς είναι ίσο με το $1/3$ του ρεύματος που τις διαρρέει, όταν οι περιελίξεις συνδεθούν κατά τρίγωνο (σχ. 19.4γ).

Αν Z είναι το μέτρο της σύνθετης αντιστάσεως κάθε φάσεως τότε το ρεύμα που διαρρέει τις γραμμές στη σύνδεση κατ' αστέρα είναι:

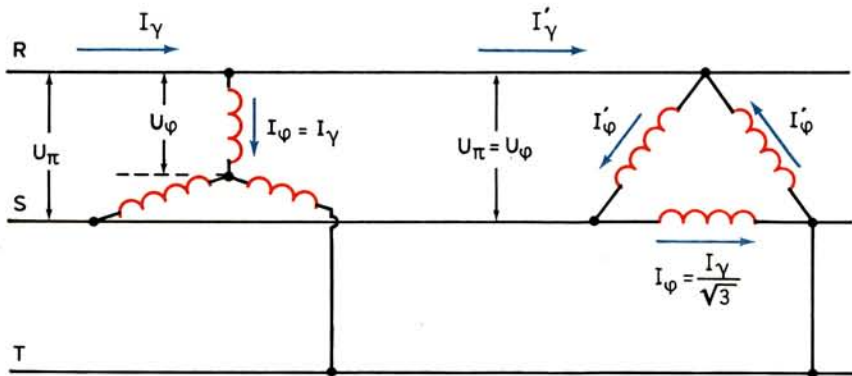
$$I_Y = I_\phi = \frac{U_\phi}{Z} = \frac{U_\pi}{\sqrt{3} Z} \quad (1)$$

Στη σύνδεση κατά τρίγωνο είναι:

$$I'_Y = \sqrt{3} I'_\phi = \sqrt{3} \frac{U_\pi}{Z} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$I_Y = \frac{I'_Y}{3} \quad (3)$$



Σχ. 19.4γ.

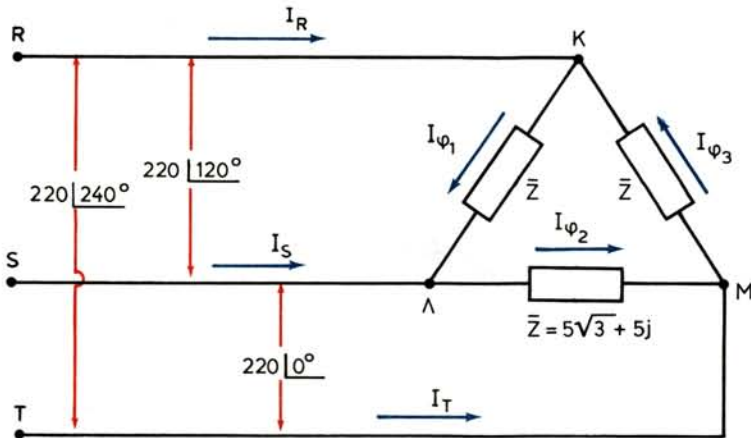
Τριφασικό σύστημα παραδείγματος 19.4.1.

Παράδειγμα 19.4.2.

Τρεις όμοιες σύνθετες αντιστάσεις συνδέονται κατά τρίγωνο και τροφοδοτούνται από συμμετρικό τριφασικό σύστημα τριών αγωγών όπως δείχνει το σχήμα 19.4δ. Ζητούνται:

- Τα ρεύματα γραμμής I_R , I_S και I_T (ενεργός τιμή).
- Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων.

$$\alpha) \text{ Είναι } \bar{I}_{\phi_1} = \frac{\bar{U}_{RS}}{Z} = \frac{220 \angle 120^\circ}{5\sqrt{3} + 5j} = \frac{220 \angle 120^\circ}{10 \angle 30^\circ}$$



Σχ. 19.45.
Τριφασικό σύστημα παραδείγματος 19.4.2.

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{i}_{\varphi_1} &= 22 \angle 90^\circ \text{ A} \\ \bar{i}_{\varphi_2} &= \frac{\bar{u}_{ST}}{\bar{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle 30^\circ} \rightarrow \bar{i}_{\varphi_2} = 22 \angle -30^\circ \text{ A} \\ \bar{i}_{\varphi_3} &= \frac{\bar{u}_{TR}}{\bar{Z}} = \frac{220 \angle 240^\circ}{10 \angle 30^\circ} = 22 \angle 210^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

δηλαδή $I_{\varphi_1} = I_{\varphi_2} = I_{\varphi_3} = 22 \text{ A}$

Σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε (κόμβος Κ):

$$\bar{i}_R + \bar{i}_{\varphi_3} = \bar{i}_{\varphi_1} \rightarrow \bar{i}_R = \bar{i}_{\varphi_1} - \bar{i}_{\varphi_3} \quad (1)$$

Είναι $\bar{i}_{\varphi_1} = 22 \angle 90^\circ = 22j \text{ A}$

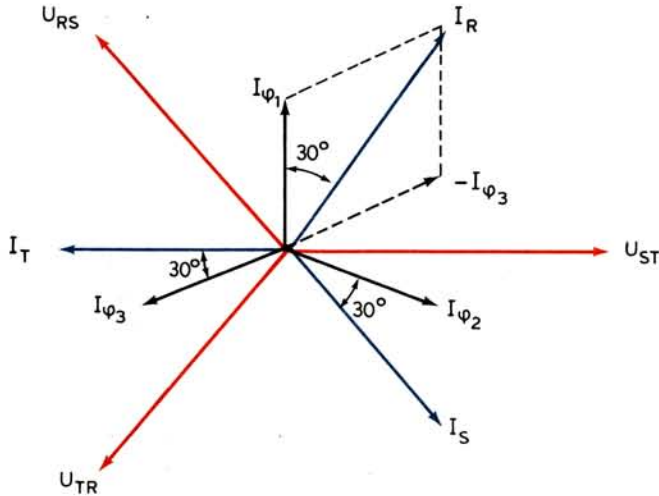
και
$$\begin{aligned} \bar{i}_{\varphi_3} &= 22 \angle 210^\circ = 22 (\cos 210^\circ + j \sin 210^\circ) = \\ &= 22 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = -11\sqrt{3} - 11j \text{ A} \end{aligned}$$

και η (1) δίνει: $\bar{i}_R = 22j + 11\sqrt{3} + 11j = 11\sqrt{3} + 33j = 22\sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ A}$

Από τις σχέσεις: $\bar{i}_S = \bar{i}_{\varphi_2} - \bar{i}_{\varphi_1}$ και $\bar{i}_T = \bar{i}_{\varphi_3} - \bar{i}_{\varphi_2}$ (κόμβοι Λ και Μ αντίστοιχα) με όμοιο τρόπο προκύπτει:

$$\bar{i}_S = 22\sqrt{3} \angle -60^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad \bar{i}_T = 22\sqrt{3} \angle 180^\circ \text{ A}$$

Παρατηρούμε ότι οι φάσεις των πολικών ρευμάτων $\bar{i}_R, \bar{i}_S, \bar{i}_T$ έπονται των αντιστοίχων φάσεων των φασικών ρευμάτων $i_{\varphi_1}, i_{\varphi_2}, i_{\varphi_3}$ κατά 30° (γενική ιδιότητα που ισχύει για ισορροπημένο τριφασικό σύστημα).



Σχ. 19.4ε.

Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων παραδείγματος 19.4.2.

Παρατηρούμε επίσης ότι το ρεύμα γραμμής (πολικό ρεύμα) είναι ίσο με το φασικό επί $\sqrt{3}$

$$I_R = I_S = I_T = 22\sqrt{3} = 38 \text{ V}$$

β) Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων φαίνεται στο σχήμα 19.4ε.

Παράδειγμα 19.4.3.

Τρεις αντιστάσεις $\bar{Z}_1 = -6j \Omega$, $\bar{Z}_2 = 6 \Omega$ και $\bar{Z}_3 = 6j \Omega$ συνδέονται κατά τρίγωνο και τροφοδοτούνται από συμμετρικό τριφασικό σύστημα 4 αγωγών όπως δείχνει το σχήμα 19.4στ. Ζητούνται:

- Τα ρεύματα στους αγωγούς της γραμμής.
 - Το ρεύμα που διαρρέει τον ουδέτερο.
 - Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων.
- α) Τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις είναι ίσα με τα ρεύματα που διαρρέουν τις γραμμές. Θα έχουμε:

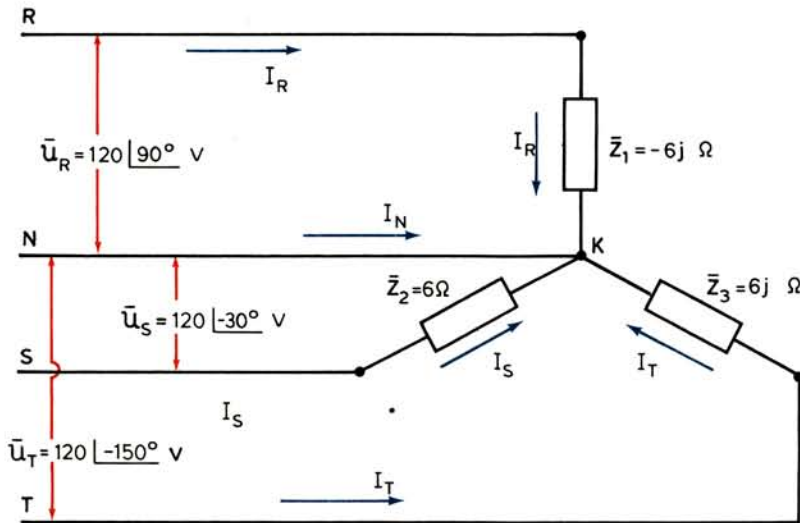
$$\bar{i}_R = \frac{\bar{u}_R}{\bar{Z}_1} = \frac{120 \angle 90^\circ}{6 \angle -90^\circ} = 20 \angle -180^\circ = -20 \text{ A}$$

$$\bar{i}_S = \frac{\bar{u}_S}{\bar{Z}_2} = \frac{120 \angle -30^\circ}{6} = 20 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\bar{i}_T = \frac{\bar{u}_T}{\bar{Z}_3} = \frac{120 \angle -150^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 20 \angle -240^\circ \text{ A}$$

δηλαδή

$$I_R = I_S = I_T = 20 \text{ A}$$



Σχ. 19.4στ.

Τριφασικό σύστημα παραδείγματος 19.4.3.

β) Το ρεύμα στον ουδέτερο αγωγό υπολογίζεται από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff (κόμβος K). Θα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{i}_N + \bar{i}_R + \bar{i}_S + \bar{i}_T &= 0 \rightarrow \bar{i}_N = -(\bar{i}_R + \bar{i}_S + \bar{i}_T) = \\ &= -[-20 + 20(\cos(-30) + j \eta \mu(-30)) + 20(\cos(-240) + j \eta \mu(-240))] = \\ &= -\left[-20 + 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) + 20\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \right] = \\ &= 20 + 10j - 10\sqrt{3} + 10 - 10\sqrt{3}j \rightarrow \\ \bar{i}_N &= 30 - 10\sqrt{3} + j(10 - 10\sqrt{3}) \text{ A} \end{aligned}$$

Η ενεργός του τιμή είναι:

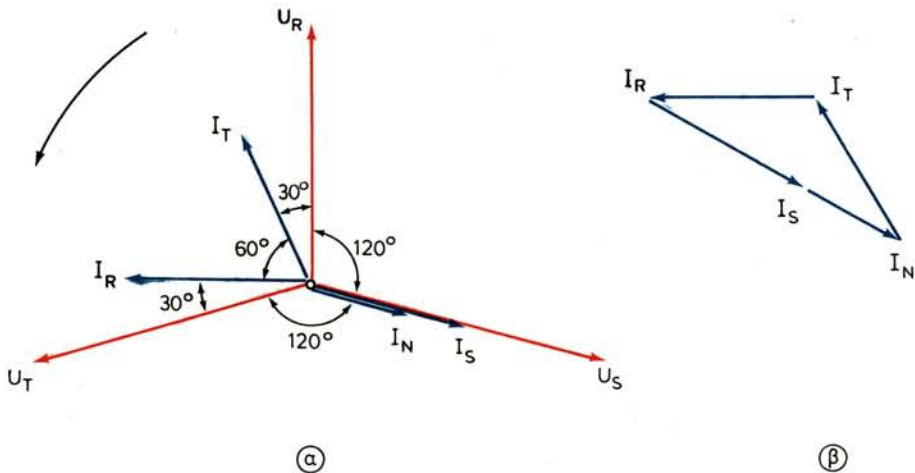
$$I_N = \sqrt{(30 - 10\sqrt{3})^2 + (10 - 10\sqrt{3})^2} = 14,6 \text{ A}$$

και το όρισμά του είναι:

$$\text{εφφ} = \frac{10 - 10\sqrt{3}}{30 - 10\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \phi = -30^\circ$$

γ) Στο σχήμα 19.4ζ(α) έχει σχεδιαστεί το διανυσματικό διάγραμμα. Το πολύγωνο των ρευμάτων [σχ. 19.4ζ(β)] είναι κλειστό.



Σχ. 19.4ζ.

α) Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων παραδείγματος 19.4.3. β) Πολύγωνο των ρευμάτων.

19.5 Ισχύς τριφασικών συστημάτων.

Όπως σε οποιοδήποτε δίκτυο έτσι και στα τριφασικά δίκτυα ισχύει η αρχή της διατηρήσεως της ενέργειας. Σύμφωνα με την αρχή αυτή θα πρέπει η συνολική στιγμιαία ενέργεια (ισχύς) που καταναλίσκεται από τους καταναλωτές του τριφασικού συστήματος να ισούται προς το άθροισμα των στιγμιαίων ενεργειών (ισχύων) των τριών μονοφασικών κυκλωμάτων που συγκροτούν τον καταναλωτή τριφασικού συστήματος, δηλαδή προς το άθροισμα των στιγμιαίων ενεργειών (ισχύων) που καταναλίσκονται στις φάσεις του καταναλωτή.

Έστω λοιπόν τριφασικός καταναλωτής συνδεδεμένος είτε κατ' αστέρα είτε κατά τρίγωνο. Η στιγμιαία ισχύς του δικτύου σύμφωνα με τα παραπάνω και όσα επίσης αναφέρονται στην παράγραφο 17.1, θα είναι:

$$p = \sum_{v=1}^3 u_{\varphi v} \cdot i_{\varphi v} \quad (19.39)$$

όπου $u_{\varphi v}$ και $i_{\varphi v}$ η φασική τάση και η φασική ένταση της v -φάσεως.

Σε οποιοδήποτε όμως κύκλωμα η αρχή διατηρήσεως της ισχύος, νοουμένης ως στιγμιαίας, θα πρέπει να συνεπάγεται σύμφωνα με όσα αναπτύσσονται στην παράγραφο 17.2, σχέση (17.15) τις εξής δύο αρχές:

- Την αρχή διατηρήσεως της ενεργούς ισχύος και
- την αρχή διατηρήσεως της άεργης ισχύος.

Εφόσον και οι δύο αυτές ισχύεις αποτελούν συνιστώσες της στιγμιαίας ισχύος που καταναλίσκεται στο τριφασικό σύστημα.

Συνεπώς, η πραγματική ή **ενεργός ισχύς** που καταναλίσκεται σε τριφασικό σύστημα είναι:

$$P = \sum_{v=1}^3 U_{\varphi v} \cdot I_{\varphi v} \cos \varphi_v \quad (19.40)$$

όπου $U_{\varphi v}$, $I_{\varphi v}$ οι ενεργές τιμές της φασικής τάσεως και εντάσεως της v -φάσεως, και φ_v η γωνία φασικής αποκλίσεως μεταξύ της φασικής τάσεως και της φασικής εντάσεως στη v -φάση.

Η **άεργη ισχύς** που καταναλίσκεται στο δίκτυο είναι:

$$P_a = \sum_{v=1}^3 U_{\varphi v} \cdot I_{\varphi v} \eta \mu \varphi_v \quad (19.41)$$

Η **συνολική ισοδύναμη φαινόμενη ισχύς** υπολογίζεται έτσι ώστε να είναι εφικτή η κατασκευή τριγώνου ισχύος για το τριφασικό σύστημα, σύμφωνα με την (17.17):

$$P_{\varphi} = \sqrt{P^2 + P_a^2} \quad (19.42)$$

Τέλος, ο συνολικός ισοδύναμος συντελεστής ισχύος (ΣI) του τριφασικού συστήματος ορίζεται κατά τα γνωστά ως:

$$\Sigma I = \frac{P}{P_{\varphi}} \quad (19.43)$$

Όπως φαίνεται, όλες οι σχετικές με την ισχύ σχέσεις (19.39) έως (19.43) είναι ανεξάρτητες του χρόνου συνδέσεως των φάσεων του συστήματος. Στην παράγραφο 19.5.1 που ακολουθεί θα εξειδικεύσουμε τις σχέσεις αυτές στην περίπτωση συμμετρικού τριφασικού συστήματος με συμμετρική κατανάλωση.

19.5.1 Ισχύς συμμετρικών τριφασικών συστημάτων.

α) Στιγμιαία ισχύς.

Έστω U_o , U_{φ} και I_o , I_{φ} το πλάτος και η ενεργός τιμή της φασικής τάσεως και του φασικού ρεύματος σε συμμετρικό τριφασικό σύστημα με συμμετρικό φορτίο και φ η διαφορά φάσεως μεταξύ φασικής τάσεως και φασικού ρεύματος.

Η στιγμιαία ισχύς μιας φάσεως, της R , είναι:

$$\begin{aligned} p_R(t) &= u_R i_R = U_o \eta \mu \omega t \cdot I_o \eta \mu (\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_o I_o}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \rightarrow \end{aligned}$$

$$P_R = U_{\varphi} I_{\varphi} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \quad (19.44)$$

Θα είναι επίσης για τις άλλες δύο φάσεις:

$$p_s(t) = U_{\varphi} I_{\varphi} [\cos \varphi - \cos (2(\omega t - 120) - \varphi)]$$

$$p_r(t) = U_{\varphi} I_{\varphi} [\cos \varphi - \cos (2(\omega t + 120) - \varphi)]$$

Η ολική στιγμιαία ισχύς του τριφασικού συστήματος είναι σύμφωνα με την (19.39):

$$p(t) = p_r + p_s + p_t$$

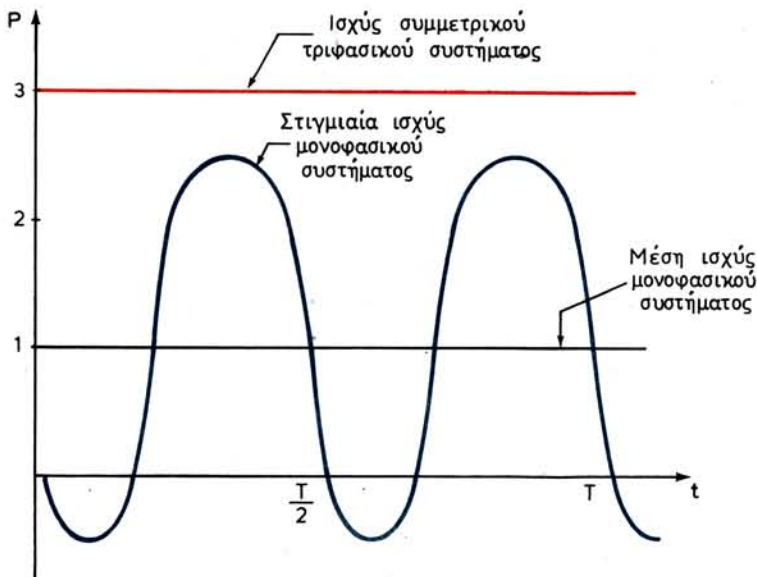
$$\begin{aligned} \text{ή} \quad p(t) &= 3U_\phi I_\phi \cos\phi - U_\phi I_\phi [\sin(2\omega t - \phi) + \\ &+ \sin[2(\omega t - 120) - \phi] + \sin[2(\omega t + 120) - \phi]] = \\ &= 3U_\phi I_\phi \cos\phi - U_\phi I_\phi [\sin(2\omega t - \phi) + \\ &+ 2 \sin(2\omega t - \phi) \sin 240^\circ] = \\ &= 3U_\phi I_\phi \cos\phi - U_\phi I_\phi [\sin(2\omega t - \phi) - \sin(2\omega t - \phi)] \\ &\rightarrow \boxed{p(t) = 3U_\phi I_\phi \cos\phi} \end{aligned} \quad (19.45)$$

Η σχέση (19.45) δείχνει ότι η ολική στιγμιαία ισχύς σε τριφασικό σύστημα δεν εξαρτάται από το χρόνο αλλά είναι σταθερή, σε αντίθεση με τη στιγμιαία ισχύ των μονοφασικών συστημάτων, η οποία μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο (σχέση 17.5). Η παραπάνω σύγκριση δίδεται γραφικά στο σχήμα 19.5α.

Η σχέση (19.45) παρέχει, όπως θα δούμε παρακάτω και την πραγματική ισχύ του τριφασικού συστήματος.

θ) Πραγματική, φαινόμενη και άεργη ισχύς.

Σε ισορροπημένο (συμμετρικό) σύστημα οι ενεργές τιμές των μεγεθών I_ϕ , U_ϕ



Σχ. 19.5α.

Μεταβολή της ολικής στιγμιαίας ισχύος συμμετρικού συστήματος και μεταβολή της στιγμιαίας ισχύος και της μέσης ισχύος μονοφασικού συστήματος.

και συνφ είναι ίδιες και στις τρεις φάσεις. Άρα η πραγματική ισχύς του συμμετρικού τριφασικού συστήματος είναι σύμφωνα με τη σχέση (19.40) τριπλάσια της πραγματικής ισχύος μιας φάσεως:

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\phi = 3RI_{\phi}^2 \quad (19.46)$$

όπου R το ωμικό (πραγματικό) μέρος της σύνθετης αντιστάσεως $\bar{Z} = R + jX$ του φορτίου σε κάθε φάση.

Η άεργη ισχύς είναι κατά την (19.41):

$$P_{\alpha} = 3U_{\phi} I_{\phi} \eta\mu\phi = 3XI_{\phi}^2 \quad (19.47)$$

όπου X το φανταστικό μέρος της σύνθετης αντιστάσεως.

Τέλος, η φαινόμενη ισχύς είναι κατά την (19.42):

$$P_{\phi} = \sqrt{P^2 + P_{\alpha}^2} = 3\sqrt{U_{\phi}^2 I_{\phi}^2 \cos^2\phi + U_{\phi}^2 I_{\phi}^2 \eta\mu^2\phi} \rightarrow$$

$$P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \quad (19.48)$$

Ας δούμε τώρα πώς τροποποιούνται οι σχέσεις (19.46), (19.47) και (19.48) αν αντί των φασικών τάσεων χρησιμοποιήσουμε πολικές τάσεις και αντί των φασικών εντάσεων εντάσεις γραμμής.

Στη σχέση (19.46), αν πρόκειται για σύνδεση κατ' αστέρα είναι:

$$U_{\phi} = \frac{U_{\pi}}{\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad I_{\phi} = I_{\gamma}$$

κι αν πρόκειται για σύνδεση κατά τρίγωνο είναι:

$$U_{\phi} = U_{\pi} \quad \text{και} \quad I_{\phi} = \frac{I_{\gamma}}{\sqrt{3}}$$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε:

$$P = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} \cos\phi \quad (19.49)$$

Θα είναι επίσης:

$$P_{\alpha} = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} \sqrt{3} \eta\mu\phi \quad (19.50)$$

και

$$P_{\phi} = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} \quad (19.51)$$

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι η ισχύς του τριφασικού ρεύματος είναι ανεξάρτητη από τη σύνδεση που χρησιμοποιείται. Επισημαίνουμε όμως ότι η γωνία ϕ που υπεισέρχεται στις σχέσεις (19.49) και (19.50) είναι η γωνία φασικής αποκλίσεως μεταξύ *φασικής τάσεως* και *φασικής εντάσεως*.

γ) Συντελεστής ισχύος.

Σύμφωνα με τον ορισμό του συντελεστή ισχύος στα τριφασικά συστήματα (19.43), ο οποίος άλλωστε βρίσκεται σε συνέπεια με τον αντίστοιχο ορισμό των μονοφασικών συστημάτων, σε συνδυασμό και με τις σχέσεις (19.46) και (19.48) λαμβάνουμε:

$$\Sigma I = \frac{P}{P_{\phi}} = \text{συν}\phi \quad (19.52)$$

Δηλαδή ο συντελεστής ισχύος ενός συμμετρικού τριφασικού συστήματος είναι ίσος προς το συντελεστή ισχύος μιας φάσεως.

δ) Διόρθωση του συντελεστή ισχύος.

Η διόρθωση του συντελεστή ισχύος γίνεται όπως και στα μονοφασικά συστήματα (παράγραφος 17.4) με τη διαφορά ότι απαιτούνται τρεις πυκνωτές σε σύνδεση κατ' αστέρα ή κατά τρίγωνο.

Στη σύνδεση κατ' αστέρα [σχ. 19.56(α)] το τρίγωνο ισχύος κατασκευάζεται με πλευρές την πραγματική ισχύ P , τη φαινόμενη P_{ϕ} και την άεργη P_{α} [σχ. 19.56(β)] μιας φάσεως.

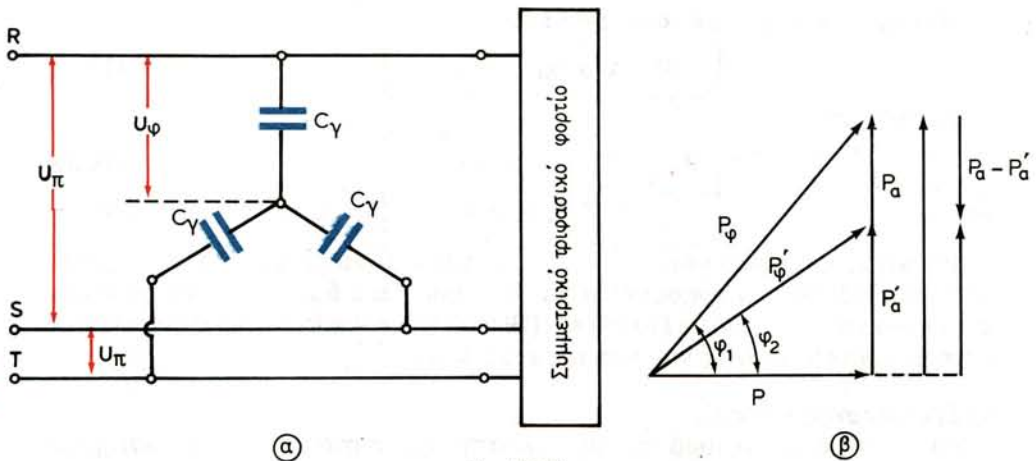
Μετά από τη σύνδεση του πυκνωτή, επειδή η μέση ισχύς μένει η ίδια και ο συντελεστής ισχύος του επαγωγικού φορτίου Z αυξάνεται, το νέο τρίγωνο ισχύος έχει μικρότερη φαινόμενη ισχύ P'_{ϕ} . Η πραγματική ισχύς μένει η ίδια ενώ η διαφορά $P_{\alpha} - P'_{\alpha}$ παριστάνει την άεργη ισχύ του παράλληλου πυκνωτή. Άρα:

$$P_{\alpha} - P'_{\alpha} = \frac{U_{\phi}^2}{X_C} = U_{\phi}^2 \omega C_Y \rightarrow \quad (19.53)$$

$$P \epsilon\phi\phi_1 - P \epsilon\phi\phi_2 = \frac{U_{\pi}^2}{3} = \omega C_Y \rightarrow$$

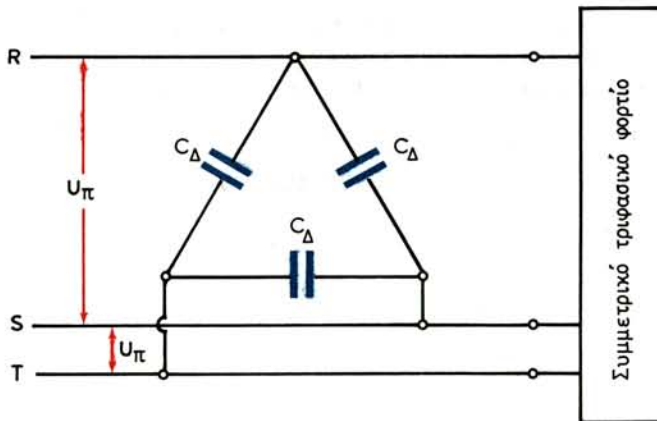
$$C_Y = \frac{3P (\epsilon\phi\phi_1 - \epsilon\phi\phi_2)}{\omega U_{\pi}^2} \quad (19.54)$$

όπου P η πραγματική ισχύς μιας φάσεως.



Σχ. 19.56.

- α) Διόρθωση του συντελεστή ισχύος συμμετρικού 3φ συστήματος κατά αστέρα.
β) Τρίγωνα ισχύος.



Σχ. 19.5γ.

Διόρθωση του συντελεστή ισχύος συμμετρικού 3φ συστήματος κατά τρίγωνο.

Στη σύνδεση κατά τρίγωνο (σχ. 19.5γ) τα τρίγωνα ισχύος παραμένουν τα ίδια όπως στην περίπτωση συνδέσεως κατ' αστέρα.

Η άεργη ισχύς είναι:

$$P_a - P'_a = U_{\pi}^2 \omega C_{\Delta} \quad (19.55)$$

οπότε προκύπτει:

$$P \epsilon\phi_1 - P \epsilon\phi_2 = U_{\pi}^2 \omega C_{\Delta}$$

ή

$$C_{\Delta} = \frac{P (\epsilon\phi_1 - \epsilon\phi_2)}{\omega U_{\pi}^2} \quad (19.56)$$

όπου P η πραγματική ισχύς μιας φάσεως.

Όπως προκύπτει από την ανάλυση που προηγήθηκε, οι απαιτούμενοι τρεις πυκνωτές μπορούν να συνδεθούν σε αστέρα ή, τελείως ισοδύναμα, σε τρίγωνο ανεξάρτητα της συνδέσεως του συμμετρικού τριφασικού φορτίου. Συγκρίνοντας όμως τις σχέσεις (19.54) και (19.56) προκύπτει ότι:

$$C_{\Delta} = \frac{C_Y}{3} \quad (19.57)$$

δηλαδή, στην τριγωνική σύνδεση των πυκνωτών χρειάζονται πυκνωτές με χωρητικότητα που είναι τρεις φορές μικρότερη από την απαιτούμενη στη σύνδεση κατ' αστέρα. Στην τριγωνική σύνδεση, όμως, οι πυκνωτές πρέπει να αντέχουν σε τάση μεγαλύτερη κατά 73%.

Παράδειγμα 19.5.1.

Τρία όμοια φορτία με συντελεστή ισχύος 0,85 (επαγωγικό) συνδέονται κατά αστέρα και τροφοδοτούνται από τριφασικό εναλλακτήρα με ρεύμα 60 A (ενερ-

γός τιμή). Αν η πολική τάση (ενεργός τιμή) είναι 380 V να βρεθούν:

α) Η μέση, άεργη και φαινόμενη ισχύς.

β) Η ωμική και επαγωγική αντίσταση του φορτίου (σχ. 19.4α).

$$\alpha) P = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} \cos \varphi = \sqrt{3} 380 \cdot 60 \cdot 0,85 \text{ W} \rightarrow P = 33,57 \text{ kW}$$

$$P_{\alpha} = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} \eta \mu \varphi = \sqrt{3} 380 \cdot 60 \cdot 0,527 \text{ VA} \rightarrow P_{\alpha} = 20,80 \text{ kVA}$$

$$P_{\varphi} = \sqrt{3} U_{\pi} I_{\gamma} = \sqrt{3} 380 \cdot 60 \text{ VA} \rightarrow P_{\varphi} = 39,5 \text{ kVA}$$

$$\beta) P = 3R I_{\varphi}^2 = 3R I_{\gamma}^2 \rightarrow R = \frac{P}{3I_{\gamma}^2} \rightarrow$$

$$R = \frac{33 \cdot 570}{3 \cdot 60^2} = 3,11 \Omega$$

$$P_{\alpha} = 3X_L I_{\varphi}^2 = 3X_L \cdot I_{\pi}^2 \rightarrow X_L = \frac{P_{\alpha}}{3I_{\pi}^2} \rightarrow$$

$$X_L = \frac{20 \cdot 800}{3 \cdot 60^2} = 1,93 \Omega$$

Η σύνθετη αντίσταση του φορτίου θα είναι:

$$\bar{Z}_Y = R + j \cdot X_L = (3,11 + j1,93) \Omega$$

Παράδειγμα 19.5.2.

Τρία όμοια φορτία με συντελεστή ισχύος 0,75 (επαγωγικό) συνδέονται κατ' αστέρα και τροφοδοτούνται από τριφασικό εναλλακτήρα ($U_{\pi} = 2000 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$). Για να διορθωθεί ο συντελεστής ισχύος και να γίνει 0,85 συνδέονται παράλληλα με τα φορτία τρεις πυκνωτές. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα και η άεργη ισχύς κάθε πυκνωτή αν η ισχύς του τριφασικού καταναλωτή είναι 100 kW (σχ. 19.5β).

Σύμφωνα με τη σχέση (19.53) είναι:

$$C_Y = \frac{3P (\epsilon \varphi \varphi_1 - \epsilon \varphi \varphi_2)}{\omega U_{\pi}^2} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\cos \varphi_1 = 0,75 \rightarrow \epsilon \varphi \varphi_1 = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}}{\cos \varphi_1} = 0,8827$$

$$\cos \varphi_2 = 0,85 \rightarrow \epsilon \varphi \varphi_2 = 0,62$$

$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$ οπότε η (1) δίνει:

$$C_Y = \frac{3.100.000 (0,8827 - 0,62)}{314 \cdot 4 \cdot 10^6} \text{ F}$$

$$\rightarrow C = 62,6 \mu\text{F}$$

Η άεργη ισχύς του πυκνωτή είναι:

$$P_a - P'_a = P_C = U_\phi^2 \cdot \omega C = \frac{2\pi f C \cdot U_\pi^2}{3} \rightarrow$$

$$P_C = \frac{314 \cdot 62,6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^6}{3} \text{ VAR}$$

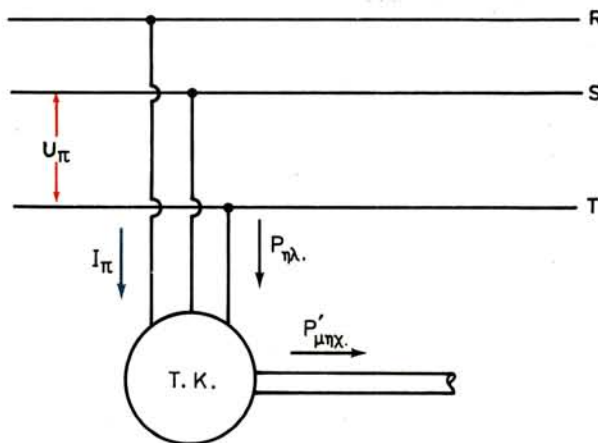
$$\rightarrow P_C = 26,2 \text{ kVAR}$$

Παράδειγμα 19.5.3.

Τριφασικός κινητήρας παρέχει στον άξονά του ισχύ $P_{\mu\eta\chi} = 45 \text{ kW}$ όταν τροφοδοτείται από τριφασικό δίκτυο πολικής τάσεως $U_\pi = 380 \text{ V}$ και συχνότητας $f = 50 \text{ Hz}$ όπως δείχνει το σχήμα 19.5δ. Ο συντελεστής ισχύος του κινητήρα είναι $0,9$ και ο βαθμός αποδόσεώς του $\eta = 0,9$. Να βρεθούν:

- Η ενεργός τιμή του ρεύματος I_Y στους αγωγούς τροφοδοτήσεως.
- Η μέση, φαινόμενη και άεργη ισχύς που απορροφά ο κινητήρας ($\eta\mu\phi = 0,435$).

$$\text{α) } \eta = \frac{P_{\mu\eta\chi}}{P_{\eta\lambda}} \rightarrow P_{\eta\lambda} = \frac{P_{\mu\eta\chi}}{\eta} = \frac{45}{0,9} = 50 \text{ kW}$$



Σχ. 19.5δ.

Συνδεσμολογία κινητήρα παραδείγματος 19.5.3.

$$P_{\eta\lambda} = \sqrt{3} U_{\pi} I_Y \cos\varphi \rightarrow I_Y = \frac{P_{\eta\lambda}}{\sqrt{3} U_{\pi} \cos\varphi} =$$

$$= \frac{50 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,9} \rightarrow I_Y = 84,4 \text{ A}$$

6)

$$P_{\mu} = 50 \text{ kW}$$

$$P_{\phi} = \sqrt{3} U_{\pi} I_Y = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 84,4 \text{ VA} \rightarrow P_{\phi} = 55,55 \text{ kVA}$$

$$P_{\alpha} = \sqrt{3} U_{\pi} I_Y \eta \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 84,4 \cdot 0,435 \text{ VAR}$$

$$\rightarrow P_{\alpha} = 24,2 \text{ kVAR}$$

19.6 Μετατροπή τριγώνου σε ισοδύναμο αστέρα.

Θεωρούμε μια τριγωνική διάταξη από όμοιες σύνθετες αντιστάσεις $\bar{Z}_{\Delta} = R_{\Delta} + jX_{\Delta} = Z_{\Delta}$ [σχ. 19.6α (α)] μια αστεροειδής διάταξη από όμοιες σύνθετες αντιστάσεις $\bar{Z}_Y = R_Y + jX_Y = Z_Y$ [σχ. 19.6α (β)] που τροφοδοτούνται από το ίδιο τριφασικό δίκτυο.

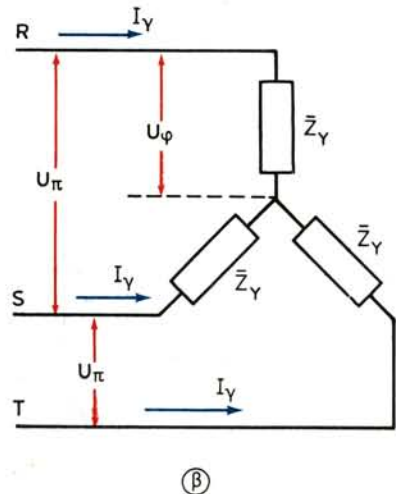
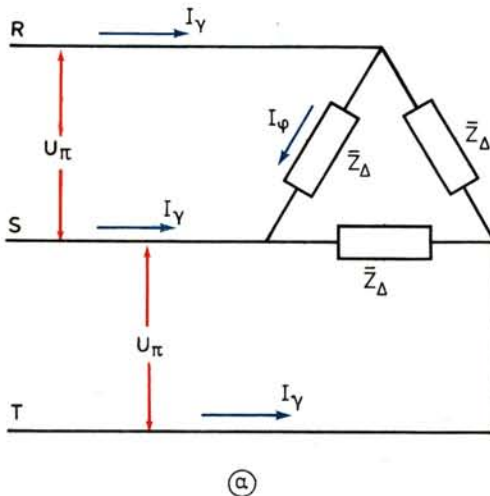
Οι δύο τριφασικές διατάξεις ονομάζονται ισοδύναμες όταν με τις αυτές πολικές τάσεις U_{π} έχουμε τα ίδια ρεύματα γραμμής I_Y , τον ίδιο συντελεστή ισχύος $\cos\varphi$ και τις ίδιες πραγματικές ισχύες.

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό, οι συντελεστές ισχύος είναι ίσοι θα πρέπει:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

Η σχέση των μέτρων Z_{Δ} και Z_Y βρίσκεται ως εξής:

Η ισχύς της τριγωνικής διατάξεως είναι:



Σχ. 19.6α.

Ισοδύναμες διατάξεις (α) κατά τρίγωνο και (β) κατά αστέρα.

$$P_{\Delta} = \sqrt{3} U_{\pi} I_Y \text{ συν}\varphi \quad (19.58)$$

όπου
$$I_Y = \sqrt{3} I_{\phi} = \sqrt{3} \frac{U_{\pi}}{Z_{\Delta}} \quad (19.59)$$

Από τις (19.58) και (19.59) προκύπτει:

$$P_{\Delta} = \frac{3 U_{\pi}^2 \text{ συν}\varphi}{Z_{\Delta}} \quad (19.60)$$

Η ισχύς που απορροφά η διάταξη κατ' αστέρα είναι:

$$P_Y = \sqrt{3} U_{\pi} I_Y \text{ συν}\varphi \quad (19.61)$$

Είναι
$$U_{\pi} = \sqrt{3} U_{\phi} \quad (19.62)$$

και
$$I_Y = \frac{U_{\phi}}{Z_Y} \quad (19.63)$$

Από τις (19.60), (19.61) και (19.62) προκύπτει:

$$P_Y = \frac{U_{\pi}^2 \text{ συν}\varphi}{Z_Y} \quad (19.64)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να είναι $P_{\Delta} = P_Y \quad (19.65)$

Από τις σχέσεις (19.60), (19.64) και (19.65) προκύπτει:

$$Z_{\Delta} = 3 Z_Y \quad (19.66)$$

Όμοια σχέση προκύπτει και για τις ωμικές αντιστάσεις:

$$\text{συν}\varphi_1 = \frac{R_{\Delta}}{Z_{\Delta}} = \frac{R_{\Delta}}{3Z_Y} \quad (19.67)$$

$$\text{συν}\varphi_2 = \frac{R_Y}{Z_Y} \quad (19.68)$$

$$\text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2 \quad (19.69)$$

Από τις σχέσεις (19.67), (19.68) και (19.69) προκύπτει:

$$R_{\Delta} = 3R_Y \quad (19.70)$$

Είναι
$$Z_{\Delta} = \sqrt{R_{\Delta}^2 + X_{\Delta}^2} \quad (19.71)$$

και
$$Z_Y = \sqrt{R_Y^2 + X_Y^2} \quad (19.72)$$

Από τις (19.70), (19.71) και (19.72) προκύπτει:

$$X_{\Delta} = 3X_Y \quad (19.73)$$

Παράδειγμα 19.6.1.

Τρία όμοια φορτία συνδέονται κατά τρίγωνο και τροφοδοτούνται από συμμετρικό τριφασικό σύστημα με τη βοήθεια τριών αγωγών που καθένας έχει αντίσταση $Z_Y = (4/3 + j)\Omega$. Η αντίσταση κάθε φορτίου είναι $(8 + 6j)\Omega$ και η τάση στα άκρα της 600 V. Να υπολογισθεί η ενεργός τιμή της πολικής τάσεως της πηγής τροφοδοσίας (σχ. 19.6β).

Η ενεργός τιμή του φασικού ρεύματος είναι:

$$I_\phi = \frac{U_\phi}{Z_\Delta} = \frac{600}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{600}{10} = 60 \text{ A}$$

Τα ρεύματα I_R , I_S και I_T είναι:

$$I_R = I_S = I_T = I_n = I_\phi \sqrt{3} = 60 \sqrt{3} \text{ A}$$

Μετατρέπομε το τρίγωνο σε ισοδύναμο αστέρα [σχ. 19.6γ (α)]

$$\text{Είναι} \quad \bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} = \frac{8}{3} + \frac{6}{3}j \Omega$$

Η σύνθετη αντίσταση \bar{Z} [σχ. 19.6γ(β)] είναι:

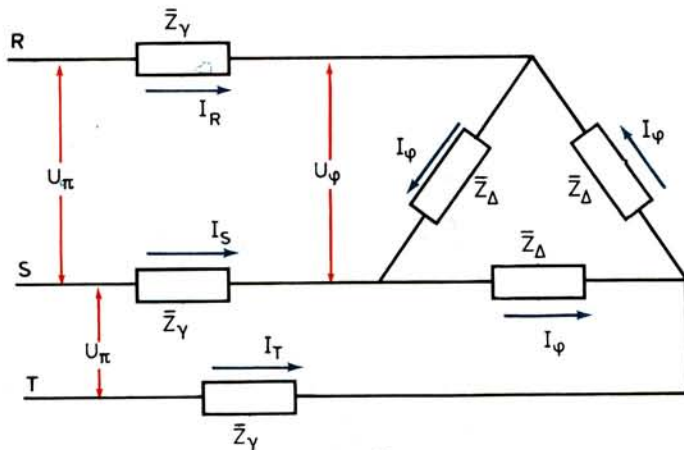
$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \bar{Z}_Y + \bar{Z}_Y = \frac{4}{3} + j + \frac{8}{3} + \frac{6}{3}j = \\ &= \frac{12}{3} + 3j = 4 + 3j \Omega \rightarrow Z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Omega \end{aligned}$$

Η τάση στα άκρα κάθε φορτίου είναι:

$$U = I_Y Z = 60 \sqrt{3} \cdot 5 = 300 \sqrt{3}$$

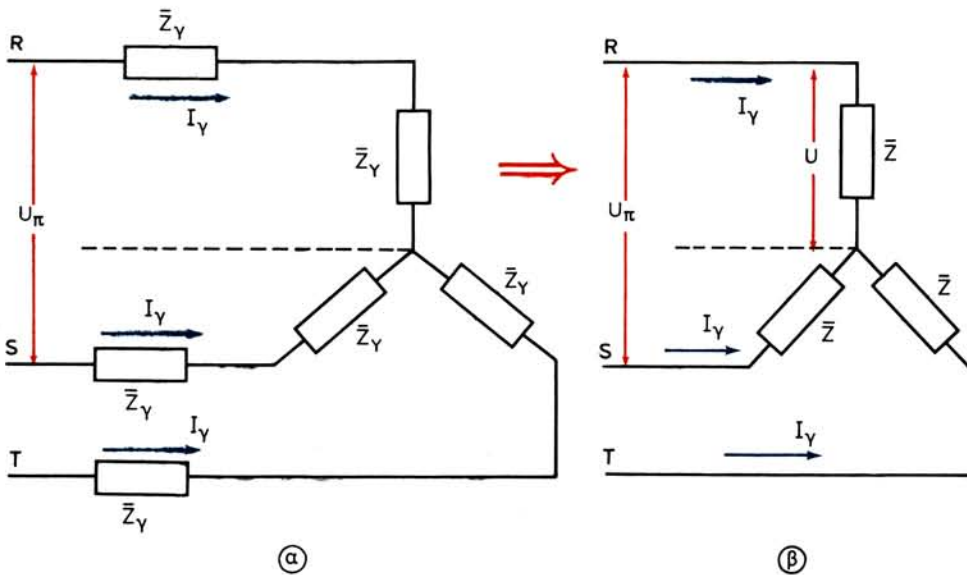
οπότε

$$U_n = U \sqrt{3} = 300 \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 900 \text{ V}$$



Σχ. 19.6β.

Τριφασικό σύστημα παραδείγματος 19.6.1.



Σχ. 19.6γ.

α) Ισοδύναμο κατά αστέρα 3φ συστήματος σχήμα 19.6β. β) Ισοδύναμο τροφοδοτούμενο δικτύωμα.

Παράδειγμα 19.6.2.

Θεωρούμε ότι οι σύνθετες αντιστάσεις στο τρίγωνο και τον αστέρα είναι ίσες (σχ. 19.6α). Να αποδειχθεί ότι η τριγωνική διάταξη απορροφά τριπλάσια ισχύ από την αστεροειδή.

Από τις σχέσεις (19.60) και (19.64) προκύπτει:

$$\frac{P_{\Delta}}{P_Y} = \frac{\frac{3U_{\pi}^2}{Z_{\Delta}} \cos\varphi}{\frac{U_{\pi}^2}{Z_Y} \cos\varphi} = 3 \rightarrow P_{\Delta} = 3P_Y$$

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ ΟΡΓΑΝΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

20.1 Εισαγωγή.

Για την εποπτεία των διαφόρων ηλεκτρικών μεγεθών σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο ή σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι απαραίτητη η μέτρησή τους με κατάλληλο όργανο.

Ας υπενθυμίσουμε ότι **μέτρηση** είναι η διαδικασία συγκρίσεως ενός μεγέθους με ένα άλλο, που ονομάζεται **πρότυπο**, το οποίο συνήθως λαμβάνεται ως μονάδα. Το **αποτέλεσμα** της μετρήσεως είναι ένας αριθμός που προκύπτει ως ο λόγος της τιμής του μετρούμενου μεγέθους δια της τιμής του πρότυπου.

Η σύγκριση που συνεπάγεται μια μέτρηση, είναι δυνατό να γίνει κατά δύο τρόπους, οι οποίοι καθορίζουν και το είδος της μετρήσεως:

- **Άμεση σύγκριση** που γίνεται με τη βοήθεια απλού βαθμονομημένου οργάνου. Π.χ. με βολτόμετρο εναλλασσόμενου ρεύματος μπορούμε να μετρήσουμε αμέσως την τάση του δικτύου της ΔΕΗ, ενώ με ωμόμετρο μπορούμε να μετρήσουμε πρόχειρα μια ωμική αντίσταση.
- **Έμμεση σύγκριση** με τη βοήθεια μεθόδου η οποία συγκροτείται από πλήθος οργάνων, κυκλωματικών στοιχείων ή άλλων βοηθητικών συσκευών. Π.χ. με τη συγκρότηση μιας γέφυρας Wheatstone (παράγραφο 7.7 και παράδειγμα 18.5.5) μπορούμε να υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ισορροπίας, την τιμή μιας ωμικής αντιστάσεως, μιας αυτεπαγωγής ή μιας χωρητικότητας.

Τα κυριότερα ηλεκτρικά όργανα, τα οποία θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι:

- Τα **βολτόμετρα** για τις μετρήσεις τάσεων.
- Τα **αμπερόμετρα** για τις μετρήσεις εντάσεων.
- Τα **γαλβανόμετρα** για τις μετρήσεις με μεγάλη ακρίβεια, ρευμάτων μικρών εντάσεων.
- Τα **ωμόμετρα** για τις μετρήσεις ωμικών αντιστάσεων.
- Τα **βαττόμετρα** για τις μετρήσεις ηλεκτρικών ισχύων.
- Οι **μετρητές ηλεκτρικής ενέργειας**.
- Τα **συχνόμετρα** για τις μετρήσεις της συχνότητας εναλλασσομένων ορ-

γάνων.

Όλα τα παραπάνω όργανα έχουν κατασκευασθεί και εξακολουθούν σε πολλές περιπτώσεις ακόμα να κατασκευάζονται, με διάφορες τεχνικές οι οποίες εκμεταλλεύονται ήδη γνωστές μας ιδιότητες του ηλεκτρισμού. Έτσι, θα γνωρίσομε την αρχή λειτουργίας χαρακτηριστικών τύπων ηλεκτρικών οργάνων όπως:

- **Όργανα στρεφόμενου πλαισίου** και **όργανα με διασταυρωμένα πηνία**, η λειτουργία των οποίων στηρίζεται στις δυνάμεις Laplace.
- **Ηλεκτροδυναμόμετρα**, η λειτουργία των οποίων στηρίζεται στο νόμο των Biot και Savart και στις δυνάμεις Laplace.
- **Όργανα μαλακού σιδήρου**, η αρχή λειτουργίας των οποίων είναι παρεμφορής προς εκείνη των ηλεκτρομαγνητών.
- **Θερμικά όργανα**, η αρχή λειτουργίας των οποίων στηρίζεται στα θερμικά αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος.

Όλα τα παραπάνω όργανα φέρουν περιστρεφόμενο δείκτη ο οποίος, αφού ενεργοποιηθεί κατάλληλα από το υπό μέτρηση ηλεκτρικό μέγεθος, μετακινείται μπροστά από κλίμακα. Στην κλίμακα έχουν χαραχθεί υποδιαίρεσεις και αριθμοί ώστε να είναι αμέσως εφικτή η ανάγνωση της τιμής του μετρούμενου μεγέθους. Ένα όργανο μπορεί να έχει περισσότερες από μια κλίμακες. Η επιλογή μιας κλίμακας γίνεται συνήθως με τη βοήθεια περιστροφικού διακόπτη που φέρουν τα όργανα.

Η περιοχή τιμών που αναγράφεται στις κλίμακες αποτελεί την **περιοχή μετρήσεως** του οργάνου. Εξυπακούεται ότι αν το όργανο έχει περισσότερες από μια κλίμακες, τότε η συνολική περιοχή μετρήσεως του οργάνου εκτείνεται σε όλο το εύρος των περιοχών που καθορίζουν οι επί μέρους κλίμακες. Επειδή στα όργανα με δείκτη και κλίμακα, όπως διεξοδικά θα γνωρίσομε στη συνέχεια, η γωνία περιστροφής του δείκτη μεταβάλλεται αναλογικά με τη μεταβολή του υπό μέτρηση ηλεκτρικού μεγέθους, τα όργανα ονομάζονται **αναλογικά**.

Ας αναφέρομε επίσης και μια αρκετά σύγχρονη κατηγορία ηλεκτρικών οργάνων που χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο: τα **ηλεκτρονικά ψηφιακά όργανα**. Είναι εργαστηριακά όργανα μεγάλης ακρίβειας, σχετικά υψηλού κόστους, τα οποία παρέχουν το αποτέλεσμα της μετρήσεως σε **ψηφιακή μορφή**, δηλαδή παρέχουν σε φωτεινή οθόνη τα ψηφία του αριθμού τα οποία συγκροτούν το αποτέλεσμα της μετρήσεως. Η αρχή λειτουργίας τους είναι αρκετά πολύπλοκη και πάντως ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού.

Πριν όμως προχωρήσομε στην περιγραφή των οργάνων και των μεθόδων είναι απαραίτητο να εισάγομε δύο ακόμη ορισμούς σχετικούς με τα όργανα των μετρήσεων:

Ονομάζομε **ευαισθησία** (sensitivity) οργάνου το λόγο της μεταβολής της γωνίας περιστροφής του δείκτη του προς την αντίστοιχη μεταβολή του μετρούμενου μεγέθους. Έτσι, η ευαισθησία εκφράζεται σε μοίρες ή ακτίνια ανά μονάδα ηλεκτρικού μεγέθους, π.χ. αμπερόμετρο με ευαισθησία $1^\circ/\text{A}$ ή βολτόμετρο με ευαισθησία $0,1^\circ/\text{V}$. Η ευαισθησία οργάνου με δεδομένη κλίμακα καθίσταται τόσο μεγαλύτερη όσο μικραίνει η περιοχή λειτουργίας του. Π.χ. ένα βολτόμετρο με κλίμακα 120° στην περιοχή λειτουργίας 0-300 V έχει ευαισθησία $0,4^\circ/\text{V}$ ενώ στην περιοχή λειτουργίας 0-1kV η ευαισθησία του γίνεται $0,12^\circ/\text{V}$. Η

επιλογή ενός οργάνου με βάση την ευαισθησία του γίνεται ανάλογα με το είδος των μετρήσεων που θα εξυπηρετήσει. Π.χ. αν πρόκειται να κάνουμε ραδιοτεχνικής φύσεως μετρήσεις εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος χρειαζόμαστε μιλλιαμπερόμετρο μεγάλης ευαισθησίας, π.χ. $1^\circ/\text{mA}$ ενώ για βιομηχανικές εφαρμογές μας αρκεί αμπερόμετρο ευαισθησίας π.χ. $0,01^\circ/\text{mA}$. Σε αρκετές περιπτώσεις η ευαισθησία του οργάνου δίνεται και αντίστροφα, δηλαδή ως ο λόγος της μεταβολής του μετρούμενου μεγέθους προς τη γωνία περιστροφής. Στην περίπτωση π.χ. των δύο παραπάνω οργάνων η ευαισθησία με βάση το δεύτερο ορισμό θα ήταν $1 \text{ mA}/1^\circ$ και $100 \text{ mA}/1^\circ$ αντίστοιχα. Τέλος, σε αρκετές περιπτώσεις στην πράξη αναφερόμεθα στην **ευαισθησία ολόκληρης της κλίμακας** ενός οργάνου δίνοντας την τιμή του μετρούμενου μεγέθους που αντιστοιχεί στη μέγιστη απόκλιση του δείκτη του οργάνου, παραλείποντας όμως την αναφορά στη γωνία μέγιστης αποκλίσεως. Π.χ. λέμε ότι αμπερόμετρο που έχει ένταση μέγιστης αποκλίσεως 100 mA έχει και ευαισθησία 100 mA και εννοούμε ότι, αν π.χ. η γωνία μέγιστης αποκλίσεως είναι 90° , η ευαισθησία του είναι $90^\circ/100 \text{ mA}$ ή $0,9^\circ/\text{mA}$. Επειδή, λοιπόν, όπως βλέπουμε έχει επικρατήσει να δίνεται η ευαισθησία των οργάνων κατά ποικίλους τρόπους είναι εντελώς απαραίτητο, όταν αναφερόμεθα στην τιμή της, να τη συνοδεύουμε και από τις μονάδες μετρήσεως από όπου μπορεί να συμπεραίνεται και ο ορισμός της. Πάντως, σε κάθε περίπτωση μεταξύ δύο οργάνων με ίδιες γωνίες αποκλίσεως του δείκτη τους, **πλέον ευαίσθητο** είναι εκείνο του οποίου το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως είναι μικρότερο.

Ονομάζουμε **ακρίβεια** (accuracy) την απόκλιση της ενδείξεως του οργάνου από την αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Η ακρίβεια των οργάνων δίνεται συνήθως ως ποσοστό επί τοις % της ενδείξεώς του. Για τις εργαστηριακές μετρήσεις ακρίβειας απαιτούνται όργανα με ακρίβεια $0,01\text{-}1\%$ ενώ για βιομηχανικές μετρήσεις αρκούν όργανα με ακρίβεια της τάξεως του $1\text{-}5\%$.

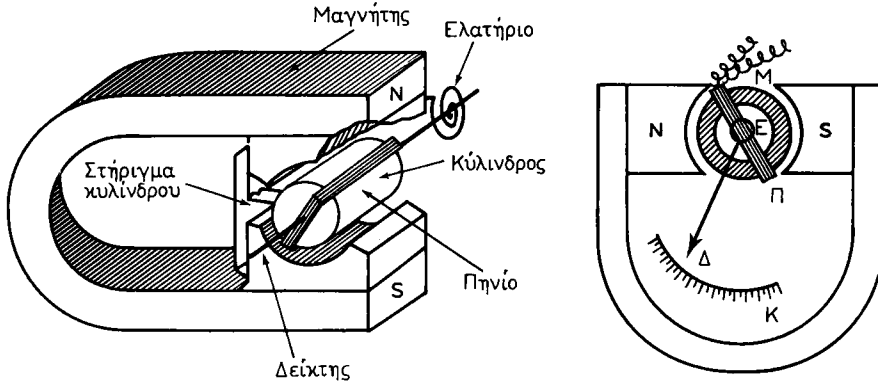
20.2 Κατηγορίες ηλεκτρικών οργάνων ανάλογα με την αρχή λειτουργίας τους.

Θα μελετήσουμε, στις παραγράφους που ακολουθούν, τις κυριότερες κατηγορίες ηλεκτρικών οργάνων, ανάλογα με την αρχή λειτουργίας τους και, κατ' ακολουθίαν, την κατασκευή τους. Ας υπενθυμίσουμε ότι τις τέσσερις κατηγορίες αναλογικών οργάνων τις οποίες θα αναπτύξουμε, έχουμε ήδη εισάγει στην προηγούμενη παράγραφο.

20.2.1 Όργανα με στρεφόμενο πλαίσιο.

Τα όργανα με στρεφόμενο πλαίσιο, που ονομάζονται και όργανα **τύπου Deprez d' Arsonval** χρησιμεύουν κατ' αρχήν στη μέτρηση της εντάσεως ή της τάσεως κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος. Η λειτουργία τους στηρίζεται στο ζεύγος δυνάμεων Laplace που εξασκούνται σε πλαίσιο, το οποίο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, θέμα που μελετήσαμε στην παράγραφο 11.6 (σχ. 20.2α).

Το κινητό πηνίο Π (σχήματος πλαισίου) περιβάλλει κύλινδρο από μαλακό σίδηρο, που βρίσκεται στο χώρο μεταξύ των πόλων πεταλοειδούς μαγνήτη NS. Τα πέλματα των οπλισμών του μαγνήτη διαμορφώνονται ως κυλινδρικές επιφάνειες



Σχ. 20.2α.

Όργανο με στρεφόμενο πλαίσιο (πηνίο).

νεις ώστε στο διάκενο αέρα που σχηματίζεται μεταξύ των πελμάτων και του κυλίνδρου να υφίσταται ακτινωτό μαγνητικό πεδίο πρακτικά σταθερής μαγνητικής επαγωγής.

Ο κύλινδρος στερεώνεται σε άξονα τα άκρα του οποίου διαμορφώνονται σε ακίδες, οι οποίες στηρίζονται σε ειδικά έδρανα (ρουμπίνια ή άλλους πολύτιμους λίθους). Πάνω στον άξονα είναι στερεωμένος λεπτός δείκτης ο οποίος κινείται μπροστά από βαθμολογημένη κλίμακα. Μεταξύ του άξονα και του ακίνητου μέρους, στερεώνεται σπειροειδές ελατήριο Ε, που συγκρατεί το πηνίο στη θέση ισορροπίας. Με στροφή του ελατηρίου αυτού, μέσω ειδικού μοχλού ο οποίος είναι προσιτός στο χειριστή του οργάνου, επιτυγχάνεται ώστε όταν το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα ο δείκτης του οργάνου να βρίσκεται μπροστά από το μηδέν της κλίμακας του.

Το ελατήριο αυτό δρα **επανατακτικά**, δηλαδή αν εξαιτίας κάποιας ροπής το πλαίσιο στραφεί κατά γωνία θ , το ελατήριο ασκεί σ' αυτό ροπή M_ϵ η οποία τείνει να το επαναφέρει στη θέση ηρεμίας. Η **επανατακτική ροπή** των ελατηρίων είναι ανάλογη της γωνίας στροφής, δηλαδή όπως γνωρίζουμε από τη Μηχανική ισχύει:

$$M_\epsilon = D\theta \quad (20.1)$$

όπου D η σταθερά του ελατηρίου.

Αν, λοιπόν, από το πηνίο περάσει ρεύμα εντάσεως I , ασκείται σ' αυτό ροπή εξ αιτίας των δυνάμεων Laplace που αναπτύσσονται στις παράλληλες προς τον άξονα του πλαισίου πλευρές, η οποία σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 11.6 και επειδή λόγω του ακτινωτού πεδίου το άνυσμα της επαγωγής είναι συνεχώς κάθετο πάνω στο διάνυσμα $\vec{\eta}$ που είναι κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου, υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (11.10) και $\varphi = 90^\circ$ ως:

$$M_k = k_1 I \quad (20.2)$$

Υπό την επίδραση των δύο παραπάνω στρεπτικών ροπών οι οποίες δρουν

αντίθετα επί του πλαισίου, το πλαίσιο κινείται διαγράφοντας γωνία θ και ισορροπεί στη θέση εκείνη όπου οι δύο αυτές αντίθετες ροπές καταστούν, ως προς το μέτρο τους ίσες, δηλαδή:

$$M_k = M_e \quad (20.3)$$

Από τις σχέσεις (20.1) και (20.3) προκύπτει ότι η γωνία στροφής του πλαισίου, και συνεπώς και του δείκτη που στρέφεται μαζί του, είναι:

$$\theta = \frac{k_1}{D} I = kI \quad (20.4)$$

δηλαδή ανάλογη προς την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

Επειδή η ροπή που στρέφει το πηνίο εξαρτάται από τη φορά του ρεύματος, το όργανο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας για μετρήσεις σε εναλλασσόμενο ρεύμα. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν συνδεθεί σε σειρά προς το πηνίο του οργάνου ανορθωτικό στοιχείο. Ας σημειώσουμε πάντως ότι υπάρχουν καταλληλότεροι τύποι οργάνων για μετρήσεις εναλλασσομένων μεγεθών.

Η μέγιστη ένταση ρεύματος που μπορεί να μετρήσει το όργανο εξαρτάται από τη διατομή του σύρματος του πηνίου και από την κατασκευή του ελατηρίου.

Η αντίσταση του σύρματος του πηνίου (r_o) ονομάζεται και «εσωτερική αντίσταση του οργάνου». Αν το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως του δείκτη είναι I_o τότε με κατάλληλη βαθμολόγηση της κλίμακας του οργάνου μπορούμε με αυτό να μετράμε κάθε ρεύμα μεταξύ 0 και I_o A.

Η βαθμολόγηση της κλίμακας του οργάνου γίνεται με τη βοήθεια προτύπων οργάνων μεγάλης ακρίβειας. Κατασκευάζονται και όργανα που έχουν το μηδέν στη μέση της κλίμακας τους, ώστε να είναι με αυτά εφικτή η μέτρηση αντίθετης φοράς χωρίς αλλαγή της συνδεσμολογίας. Τα όργανα αυτά χρησιμοποιούνται σε μόνιμες εγκαταστάσεις (δηλ. σε ηλεκτρικούς πίνακες). Αν δεν φέρουν κλίμακα με το μηδέν στη μέση, τότε ενδεχομένως διαθέτουν διακόπτη δύο θέσεων ώστε να μπορούν να μετράνε ρεύματα αντίθετης φοράς.

Αν στο όργανο εφαρμόσουμε τάση $U = r_o I_o$ θα έχουμε προφανώς πάλι πλήρη απόκλιση του δείκτη. Μπορούμε συνεπώς να μετράμε με το όργανο αυτό και τάσεις, συνεχούς ρεύματος, μεταξύ 0 και U_o Volt. Έτσι, λοιπόν, βλέπουμε ότι το όργανο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως βολτόμετρο.

Τα συνήθη όργανα με στρεφόμενο πλαίσιο κατασκευάζονται για ρεύματα μέγιστης αποκλίσεως δείκτη μεταξύ 10 μ A και 100 mA. Θα γνωρίσουμε, σε επόμενη παράγραφο, τον τρόπο με τον οποίο είναι εφικτό να επεκτείνουμε την περιοχή μετρήσεως ενός οργάνου – αμπερομέτρου ή βολτομέτρου – προς τα πάνω. Αν όμως θέλουμε να μετρήσουμε ρεύματα πολύ ασθενούς τάξεως μέχρι 10^{-11} A ή – αντίστοιχα – τάσεις μέχρι 10^{-8} V, τότε χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή του οργάνου με κινητό πηνίο, το οποίο ονομάζεται **γαλθανόμετρο**. Τα γαλθανόμετρα συχνά χρησιμοποιούνται ως δείκτες μηδενισμού του ρεύματος σε γέφυρες ή άλλες διατάξεις. Κατασκευάζονται σε δύο τύπους:

- **Γαλθανόμετρα με δείκτη** κατασκευής όμοιας με του οργάνου Deprez d' Arsonval, που ήδη περιγράψαμε, αλλά με ειδική επιλογή των υλικών του

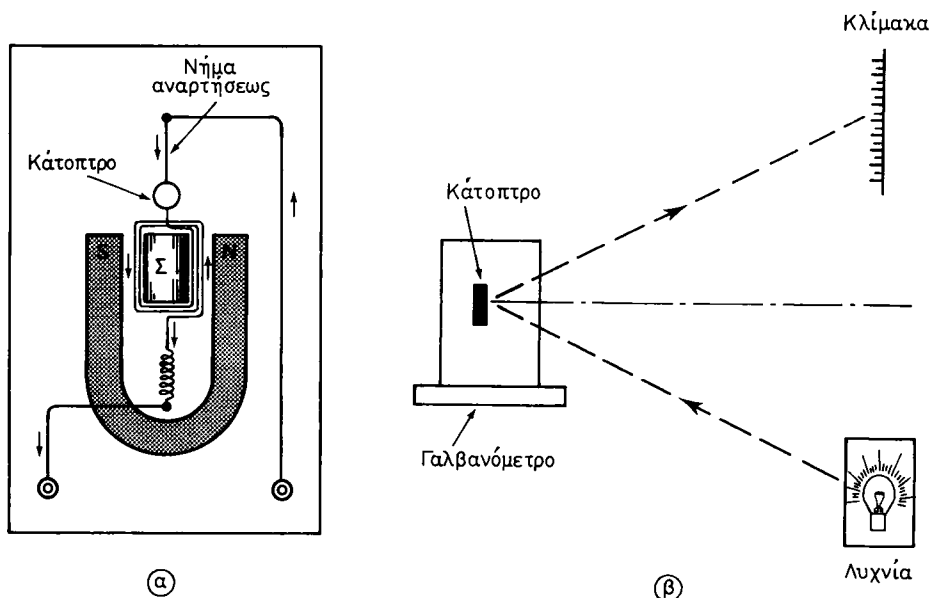
σύρματος του πηνίου, ώστε να ελαχιστοποιούνται οι πτώσεις τάσεως σ' αυτό, και των εδράνων εδράσεως του πηνίου ώστε να ελαχιστοποιούνται οι αντιστάσεις λόγω τριβών. Η ευαισθησία τους φθάνει μέχρι τα 10^{-6} A/1°.

– **Κατοπτρικά γαλβανόμετρα** κατασκευής παρεμφερούς με εκείνη των γαλβανομέτρων με δείκτη με μερικές, όμως, παραλλαγές. Συγκεκριμένα, στα κατοπτρικά γαλβανόμετρα το πλαίσιο αναρτάται με ειδικό νήμα (από χαλκό, άργυρο ή φωσφορούχο ορείχαλκο), το οποίο χρησιμεύει και ως άξονας περιστροφής του κινητού πλαισίου [σχ. 20.26(a)].

Ο δείκτης του οργάνου έχει αντικατασταθεί από μικρό κάτοπτρο που προσαρμόζεται στον άξονα περιστροφής και φωτίζεται με λεπτή δέσμη φωτός [σχ. 20.26(β)].

Η ακτίνα που προσπίπτει στο κάτοπτρο ανακλάται και έτσι σχηματίζεται το είδωλο της σχισμής πάνω σε κλίμακα που βρίσκεται συνήθως σε απόσταση 1-2 μέτρων. Όταν από το πλαίσιο περάσει ρεύμα, αυτό περιστρέφεται και παρασύρει σε περιστροφή και το μικρό κάτοπτρο· έτσι η ακτίνα που ανακλάται περιστρέφεται κατά γωνία διπλάσια της γωνίας κατά την οποία περιστρέφεται το κάτοπτρο, με αποτέλεσμα να μετατοπίζεται το είδωλο στην κλίμακα.

Εξ αιτίας τόσο της βελτιώσεως του συστήματος αναρτήσεως του πηνίου όσο και της αντικαταστάσεως του δείκτη (η κίνηση του οποίου στον αέρα προκαλεί σημαντικές τριβές) από κάτοπτρο, η ευαισθησία των γαλβανομέτρων αυτών είναι σημαντικά αυξημένη έναντι των προηγούμενων, φθάνει δε τα 10^{-11} A/1°.



Σχ. 20.26.

α) Κατοπτρικό γαλβανόμετρο. β) Μέθοδος παρατηρήσεως.

20.2.2 Όργανα με διασταυρωμένα πηνία.

Παραλλαγή των οργάνων με στρεφόμενο πλαίσιο αποτελούν τα όργανα με **διασταυρωμένα πηνία** ή **όργανα πηλίκου** τα οποία, όπως θα γνωρίσουμε σε επόμενη παράγραφο, χρησιμοποιούνται συχνά ως ωμόμετρα. Αρχή λειτουργίας τους αποτελούν, πάλι, οι δυνάμεις Laplace που ασκούνται σε πλαίσιο που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο μόνιμου μαγνήτη. Όμως, τώρα έχουμε τις εξής διαφοροποιήσεις στην κατασκευή των οργάνων με διασταυρωμένα πηνία (σχ. 20.2γ):

- α) Τα πέλματα των οπλισμών του μαγνήτη είναι επίπεδα ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται να είναι ομογενές.
- β) Δεν υπάρχουν επανατακτικά ελατήρια.
- γ) Έχουμε δύο πηνία τα πλαίσια των οποίων είναι προσαρμοσμένα κάθετα μεταξύ τους σε κοινό άξονα.

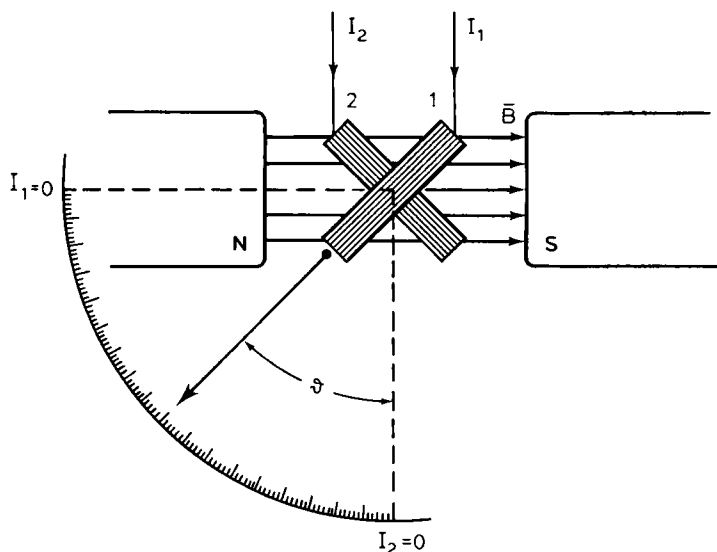
Τα δύο πηνία είναι τυλιγμένα έτσι ώστε οι ροπές που αναπτύσσονται στα δύο πλαίσια να είναι αντίθετες. Αν το πηνίο 1 διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I_1 , τότε η μηχανική ροπή που αναπτύσσεται είναι κατά τη σχέση (11.10):

$$M_1 = k_1 I_1 \eta \mu \theta \quad (20.5)$$

Ομοίως, η ροπή του δεύτερου πλαισίου, όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I_2 , είναι:

$$M_2 = k_2 I_2 \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = k_2 I_2 \eta \cos \theta \quad (20.6)$$

Είναι φανερό ότι αν $I_1 = 0$ και $I_2 \neq 0$ ο δείκτης αποκλίνει ώστε να καταστεί



Σχ. 20.2γ.

Όργανο με διασταυρωμένα πηνία.

παράλληλος προς τις δυναμικές γραμμές, ενώ αντίστροφα αν $I_1 \neq 0$ και $I_2 = 0$ ο δείκτης καθίσταται κάθετος προς τις δυναμικές γραμμές. Αν, τέλος $I_1 \neq 0$ και $I_2 \neq 0$ το σύστημα του πηνίου στρέφεται κατά γωνία θ μέχρις ότου οι δυο ροπές M_1 και M_2 καταστούν κατά μέτρο ίσες, οπότε ηρεμεί. Τότε ισχύει:

$$M_1 = M_2$$

ή $k_1 I_1 \eta \mu \theta = k_2 I_2 \sigma \nu \theta$

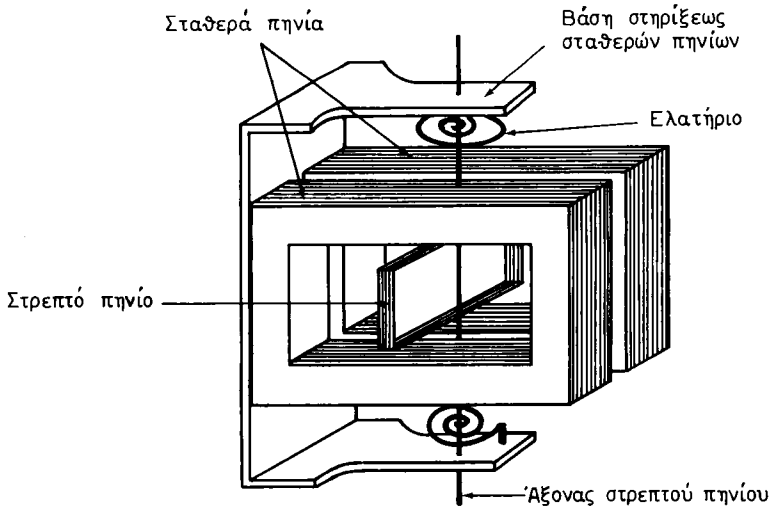
ή $\frac{I_2}{I_1} = k \epsilon \phi \theta$ (20.7)

Μπορούμε, λοιπόν, με τα όργανα αυτά να μετράμε, με κατάλληλη βαθμολογία της κλίμακάς τους, λόγο δύο ρευμάτων. Αλλά θα επανέλθουμε, σε επόμενη παράγραφο, να γνωρίσουμε και άλλες εφαρμογές των οργάνων διασταυρωμένων πηνίων.

20.2.3 Ηλεκτροδυναμόμετρα.

Τα ηλεκτροδυναμόμετρα ή *ηλεκτροδυναμικά όργανα* χρησιμεύουν στη μέτρηση της εντάσεως, της τάσεως αλλά και της ισχύος κυκλωμάτων τόσο συνεχούς όσο και εναλλασσόμενου ρεύματος. Η αρχή λειτουργίας των ηλεκτροδυναμομέτρων είναι η ίδια με εκείνη των οργάνων με στρεφόμενο πλαίσιο, με τη διαφορά ότι εδώ το μαγνητικό πεδίο δεν παράγεται από μόνιμο μαγνήτη αλλά από ηλεκτρομαγνήτη. Έτσι, τα ηλεκτροδυναμόμετρα αποτελούνται από ένα πηνίο που στρέφεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το ρεύμα το οποίο διαρρέει ένα ζεύγος σταθερών πηνίων (σχ. 20.2δ).

Στον άξονα του στρεπτού πηνίου προσαρμύζονται επανατακτικά ελατήρια, ούτως ώστε, όταν από το σύστημα των δύο πηνίων (στρεπτό, σταθερό) δεν



Σχ. 20.2δ.
Ηλεκτροδυναμόμετρο.

διέρχεται ρεύμα, το στρεπτό πηνίο να ισορροπεί σε ορισμένη θέση. Τότε, ο δείκτης του οργάνου, που στερεώνεται επί του στρεπτού πηνίου δείχνει το μηδέν της κλίμακας. Τα επανατακτικά ελατήρια χρησιμοποιούνται πολλές φορές και ως αγωγοί τροφοδοσίας του στρεπτού πηνίου.

Αν τροφοδοτήσουμε με συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I_1 τα σταθερά πηνία και εντάσεως I_2 το στρεπτό πηνίο, τότε, σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 12.5 σχετικά με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών, παρατηρούμε ότι το στρεπτό πηνίο στρέφεται και τείνει να καταστήσει το επίπεδο των σπειρών του παράλληλο προς το επίπεδο των σπειρών των σταθερών πηνίων. Μαζί με το στρεπτό πηνίο στρέφεται και ο δείκτης του οργάνου κατά γωνία θ η οποία, όπως θα αποδείξουμε αμέσως είναι ανάλογη με το γινόμενο $I_1 \cdot I_2$ των ρευμάτων που διαρρέουν τα πηνία.

Πράγματι, το στρεπτό πηνίο ισορροπεί, αφού στραφεί κατά γωνία θ , υπό την επίδραση δύο ροπών:

- Της ροπής λόγω των δυνάμεων Laplace που αναπτύσσονται σ' αυτό και οι οποίες υπολογίζονται με βάση τη σχέση (12.30) ως:

$$M_k = k_1 I_1 I_2 \quad (20.8)$$

όπου k_1 σταθερά.

- Της επανατακτικής ροπής των ελατηρίων, η οποία όπως γνωρίζουμε από τη Μηχανική, είναι:

$$M_e = D\theta \quad (20.9)$$

όπου D σταθερά των ελατηρίων.

Στη θέση ισορροπίας είναι $M_k = M_e$, δηλαδή:

$$\theta = k I_1 I_2 \quad (20.10)$$

όπου $k = \frac{k_1}{D}$ σταθερά.

Αν τα πηνία τροφοδοτηθούν από ισόσυχνα εναλλασσόμενα ρεύματα:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \eta \mu \omega t \quad (20.11)$$

$$\text{και } i_2 = \sqrt{2} I_2 \eta \mu (\omega t + \varphi) \quad (20.12)$$

τότε, η στιγμιαία τιμή της ροπής λόγω δυνάμεων Laplace είναι:

$$m_k(t) = 2 k, I_1 I_2 \eta \mu \omega t \eta \mu (\omega t + \varphi) \quad (20.13)$$

Λόγω της αδράνειας του το στρεπτό πηνίο δεν μπορεί να παρακολουθήσει τις μεταβολές της κινούσας ροπής m_k αλλά καταλαμβάνει μία θέση ισορροπίας που εξαρτάται από τη μέση τιμή της m_k :

$$M_k = \frac{1}{T} \int_0^T m_k dt = k_2 I_1 I_2 \text{ συν}\varphi \quad (20.14)$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας $M_k = M_e$ και τις σχέσεις (20.9) και (20.14) προκύπτει:

$$\theta = k I_1 I_2 \sin \varphi \quad (20.15)$$

Από τις σχέσεις (20.10) και (20.15) μπορεί να προκύψουν τα εξής συμπεράσματα σχετικά με τη λειτουργία των ηλεκτροδυναμικών οργάνων:

α) Αν το σύστημα των πηνίων (στρεπτό, σταθερό) συνδεσμοποιηθεί σε σειρά ($I_1 = I_2 = I$, $\varphi = 0$) τότε:

$$\theta = k I^2 \quad (20.16)$$

δηλαδή η απόκλιση θ του δείκτη είναι ανάλογη του τετραγώνου της τιμής του συνεχούς ρεύματος ή της ενδεικνύμενης του εναλλασσόμενου που κατά περίπτωση τροφοδοτείται στο όργανο. Στην περίπτωση αυτή το όργανο μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως αμπερόμετρο είτε ως βολτόμετρο. Όμως, σε κάθε περίπτωση η κλίμακα είναι βαθμολογημένη **ανομοιόμορφα** με πυκνές υποδιαιρέσεις στην αρχή, λόγω του εκθέτη 2 στη σχέση (20.16).

β) Αν το ένα από τα δύο πηνία τροφοδοτηθεί με το ρεύμα (I) – συνεχές ή εναλλασσόμενο – ενός καταναλωτή ενώ το άλλο τεθεί υπό τη διαφορά δυναμικού (U) υπό την οποία βρίσκεται ο καταναλωτής, τότε η απόκλιση του δείκτη θ θα δίνεται, σύμφωνα με τη σχέση (20.15):

$$\theta = k \cdot I \cdot \frac{U}{r_0} \sin \varphi = k' U I \sin \varphi \quad (20.17)$$

όπου r_0 η αντίσταση του πηνίου που τίθεται υπό την τάση U .

Όπως βλέπουμε, από τη σχέση (20.17), στην περίπτωση της συνδεσμολογίας αυτής το ηλεκτροδυναμόμετρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μετρητής ισχύος – συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος – δηλαδή ως **βαττόμετρο**. Είναι φανερό ότι τα ηλεκτροδυναμικά όργανα όταν χρησιμοποιούνται ως βαττόμετρα έχουν ομοιόμορφη κλίμακα.

20.2.4 Όργανα μαλακού σιδήρου.

Τα όργανα μαλακού σιδήρου ή και **όργανα μετά κινητού σιδήρου** χρησιμοποιούνται ως αμπερόμετρα ή βολτόμετρα συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος αδιακρίτως. Η αρχή λειτουργίας είναι παρεμφερής με εκείνη των ηλεκτρομαγνητών, που γνωρίσαμε στην παράγραφο 13.10 και στο παράδειγμα 14.7.2. Συγκεκριμένα, η κίνηση του δείκτη των οργάνων αυτών οφείλεται στη δύναμη F που ασκείται σε μαλακό σιδηρομαγνητικό υλικό όταν βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο, επαγωγής B .

Για τη δύναμη αυτή, σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στο παράδειγμα 14.7.2, ισχύει:

$$F = k_1 B^2 \quad (20.18)$$

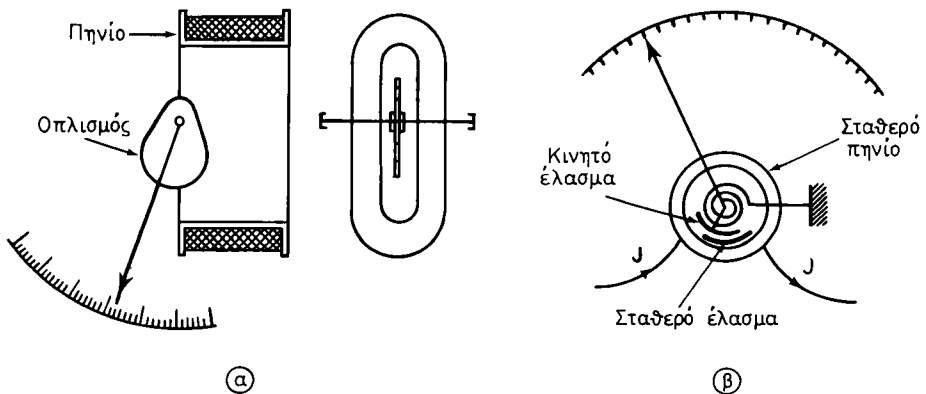
όπου k_1 σταθερά.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο, επαγωγής B , οφείλεται σε πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I , τότε, εφόσον $B = k_2 I$, από την (20.18) λαμβάνομε:

$$F = kI^2 \quad (20.19)$$

Στην ίδια σχέση καταλήγομε, πολύ απλά, και για τη μέση τιμή της δύναμης που ασκείται στο μαλακό σιδηρομαγνητικό υλικό αν το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενδεικνύμενης τιμής I .

Σε ένα τύπο οργάνου μαλακού σιδήρου, που ονομάζεται **πεπλατυσμένος** ή **ελκτικός** μέσα στο μαγνητικό πεδίο ενός πεπλατυσμένου πηνίου που τροφοδοτείται από το υπό μέτρηση ρεύμα [σχ. 20.2ε(α)] μπορεί να περιστρέφεται, λόγω έλξεως, σπλισμός από μαλακό σιδηρομαγνητικό υλικό. Επί του σπλισμού στερεώνεται και ο δείκτης του οργάνου. Σε ένα δεύτερο τύπο, που ονομάζεται **κυκλικός** ή **απωστικός** μέσα σε κυκλικό πηνίο τοποθετούνται δύο κυκλικά ελάσματα από το ίδιο μαλακό σιδηρομαγνητικό υλικό [σχ. 20.2ε(β)]. Το ένα είναι σταθερό ενώ το άλλο έχει δυνατότητα περιστροφής περί άξονα ο οποίος φέρει και το δείκτη. Κατά τη δίοδο ρεύματος από το πηνίο τα δύο ελάσματα μαγνητίζονται ομόρροπα και συνεπώς απωθούνται, με αποτέλεσμα την απόκλιση του δείκτη.



Σχ. 20.2ε.

Όργανα μαλακού σιδήρου: α) Ελκτικός τύπος. β) Απωστικός τύπος.

20.2.5 Θερμικά όργανα.

Η σύνθετη αντίσταση των ηλεκτροδυναμικών οργάνων ή των οργάνων μετά κινητού σιδήρου είναι συνάρτηση της συχνότητας του εναλλασσόμενου ρεύματος με τα οποία τροφοδοτούνται προκειμένου να μετρηθούν. Για το λόγο αυτό οι κατασκευαστές τους ορίζουν την περιοχή συχνοτήτων μέσα στην οποία το σφάλμα τους είναι μικρότερο από μια ανεκτή τιμή. Σε κάθε περίπτωση τα όργανα αυτά είναι κατάλληλα για μέτρηση ρευμάτων βιομηχανικών συχνοτήτων (< 500 Hz). Για τη μέτρηση τάσεων και εντάσεων ακουστικών συχνοτήτων (100 - 20.000 Hz) και συχνοτήτων ραδιοτηλεπικοινωνίας ($10^5 - 10^9$ Hz) χρησιμο-

ποιούνται άλλοι τύποι οργάνων, όπως είναι τα **θερμικά όργανα** τα οποία θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή.

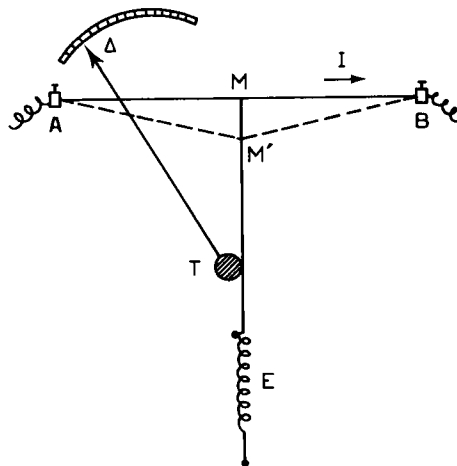
Στα θερμικά όργανα γίνεται εκμετάλλευση της θερμότητας Joule που εκλύεται κατά τη δίοδο ρεύματος από μια αντίσταση και η οποία ισούται προς I^2R όπου I η τιμή της εντάσεως του συνεχούς ρεύματος ή η ενδεικνύμενη τιμή της εντάσεως του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει αγωγό, ωμικής αντιστάσεως R .

Με βάση την αρχή αυτή κατασκευάζονται δύο τύποι θερμικών οργάνων:

- Τα όργανα θερμικής διαστολής και
- τα θερμοηλεκτρικά όργανα.

Στο εσωτερικό των **οργάνων θερμικής διαστολής** υπάρχει τεντωμένος αγωγός AB (σχ. 20.2στ), ο οποίος όταν διαρρέεται από ρεύμα I διαστέλλεται εξαιτίας της εκλυόμενης θερμότητας Joule. Η διαστολή του σύρματος μετατρέπεται σε στροφή του δείκτη του οργάνου με τη βοήθεια νήματος MTE από μονωτικό υλικό, που διατηρείται τεντωμένο με τη βοήθεια του ελατηρίου E . Το νήμα αυτό συνδέεται με το μέσο M του αγωγού και διέρχεται από μικρή τροχαλία T . Όταν το σύρμα επιμηκυνθεί το νήμα επιβραχύνεται, η τροχαλία στρέφεται (επιδρά το ελατήριο) και ο δείκτης Δ μετακινείται οπότε μας δείχνει την ένταση (ή τάση) του ρεύματος που διαρρέει το σύρμα. Επειδή η θερμότητα δεν εξαρτάται από τη φορά του ρεύματος (είναι ανάλογη του I^2) το όργανο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μετρήσεις στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Η βαθμολόγηση της κλίμακας είναι ανομοιόμορφη γιατί η εκτροπή του δείκτη εξαρτάται από το τετράγωνο της εντάσεως του ρεύματος.

Τα **θερμοηλεκτρικά όργανα** φέρουν επίσης σύρμα που θερμαίνεται από το ηλεκτρικό ρεύμα που το διαρρέει. Όμως, αντί του συστήματος νήματος - δείκτη, διαθέτουν θερμοηλεκτρικό ζεύγος (παράγρ. 3.4) η επαφή του οποίου βρίσκεται σε επαφή με το σύρμα. Έτσι, το θερμοηλεκτρικό ζεύγος παρέχει θερμοηλεκτρική τάση ανάλογη της θερμοκρασίας του σύρματος και, συνεπώς,



Σχ. 20.2στ.

Όργανο θερμικής διαστολής.

ανάλογη του τετραγώνου της εντάσεως ρεύματος (I^2) που το διαρρέει. Η θερμοηλεκτρική τάση, αφού ενισχυθεί, μετριέται με βολτόμετρο, το οποίο μπορεί και να βαθμολογηθεί απ' ευθείας στις μονάδες τάσεως ή εντάσεως ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας του οργάνου.

20.3 Αμπερόμετρα - Γαλβανόμετρα.

Όπως ήδη, στην προηγούμενη παράγραφο γνωρίσαμε, όλοι οι τύποι κατασκευής ηλεκτρικών οργάνων μπορεί να χρησιμοποιηθούν – κατ' αρχήν – ως αμπερόμετρα για τη μέτρηση της εντάσεως του ρεύματος σε ένα κύκλωμα. Αν π.χ. θέλουμε να μετρήσουμε το ρεύμα που διαρρέει έναν αντιστάτη R συνδεδεμένο **σε σειρά** ένα αμπερόμετρο (σχ. 20.3α). Σημειώνουμε ότι το όργανο πρέπει να συνδέεται με την ορθή πολικότητα σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Λανθασμένη σύνδεση προκαλεί αντίθετη εκτροπή του δείκτη που μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τη στρέβλωσή του.

Το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο AB **πριν συνδεθεί** το αμπερόμετρο, είναι:

$$I' = \frac{U_{AB}}{R} \quad (20.20)$$

Μετά τη σύνδεση του αμπερομέτρου και εφόσον η διαφορά δυναμικού U_{AB} διατηρείται σταθερή, το ρεύμα γίνεται:

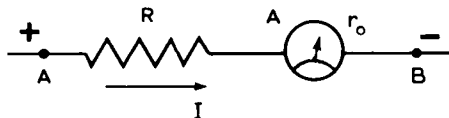
$$I = \frac{U_{AB}}{R + r_o} \quad (20.21)$$

όπου r_o η εσωτερική αντίσταση του οργάνου.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η εισαγωγή του οργάνου μεταβάλλει την ένταση του ρεύματος που θέλουμε να μετρήσουμε.

Η μεταβολή αυτή είναι τόσο μικρότερη, όσο η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου r_o είναι μικρότερη. Άρα, **τα αμπερόμετρα πρέπει να κατασκευάζονται με όσο το δυνατόν μικρότερη εσωτερική αντίσταση.**

Τα γαλβανόμετρα, όπως γνωρίσαμε στην παράγραφο 20.2.1, είναι ευαίσθητα όργανα με εξαιρετικά μικρή εσωτερική αντίσταση και χρησιμεύουν για τη μέτρηση ρευμάτων πολύ χαμηλής εντάσεως ($10^{-11} - 10^{-6}$ A). Ιδιαίτεροι τύποι γαλβανομέτρων χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση ηλεκτρικού φορτίου καθώς επίσης και για τη μέτρηση μαγνητικής ροής· το τελευταίο ονομάζεται **βαλλιστικό γαλβανόμετρο.**



Σχ. 20.3α.

Αμπερόμετρο συνδεδεμένο σε σειρά με αντιστάτη R .

20.3.1 Επέκταση της περιοχής μετρήσεως αμπερομέτρου.

Γνωρίζομε ήδη ότι από την κατασκευή του το αμπερόμετρο μπορεί να μετρά ρεύμα στην περιοχή $0-I_0$ Α όπου I_0 το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως του οργάνου. Στην πράξη η κατασκευή των αμπερομέτρων (μικρή εσωτερική αντίσταση) περιορίζει αισθητά την τιμή I_0 σε λίγα mA. Έτσι, συνήθως αναγκαζόμαστε να επεκτείνουμε, με επιπλέον εξωτερική συνδεσμολογία, την περιοχή μετρήσεως του οργάνου. Για το σκοπό αυτό συνδέομε παράλληλα προς το όργανο μια ωμική αντίσταση R_s (σχ. 20.36).

Η αντίσταση R_s πρέπει να είναι μικρότερη από την εσωτερική αντίσταση του οργάνου και ονομάζεται **αντίσταση διακλαδώσεως** ή **Shunt**.

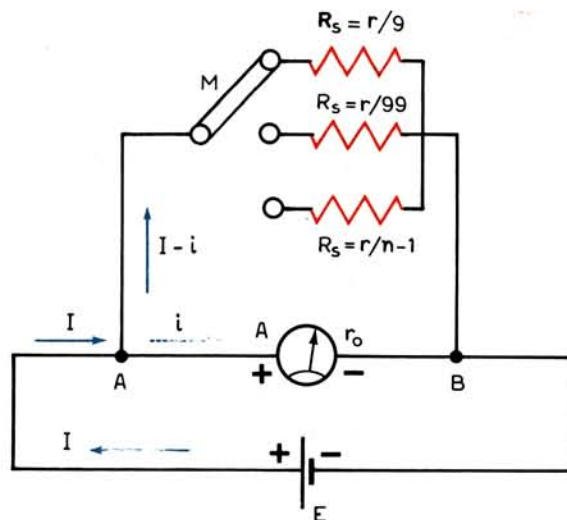
Έτσι, το συνολικό ρεύμα I που θέλομε να μετρήσομε διακλαδίζεται στον κόμβο Α και το μεγαλύτερο μέρος του $I-i$ διέρχεται από την παράλληλη αντίσταση R_s , ενώ ένα μικρό μέρος του i , που πρέπει να είναι μικρότερο από το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως I_0 του οργάνου, διέρχεται από το όργανο. Θα έχομε λοιπόν:

$$U_{AB} = ir_0 = (I - i) R_s \rightarrow I = \frac{R_s + r_0}{R_s} \cdot i = \left(\frac{r_0}{R_s} + 1 \right) i \quad (20.22)$$

όπου: I η ένταση του προς μέτρηση ρεύματος,
 i η ένταση που διαρρέει το αμπερόμετρο,
 r_0 η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου και
 R_s η αντίσταση διακλαδώσεως (Shunt).

Τη σχέση (20.22) μπορούμε να θέσομε και υπό τη μορφή:

$$I = ni \quad (20.23)$$



Σχ. 20.36.

Επέκταση της περιοχής μετρήσεως αμπερομέτρου.

Ο συντελεστής

$$n = \frac{I}{i} = \frac{r_o}{R_s} + 1$$

(20.24)

ονομάζεται πολλαπλασιαστική δύναμη της διακλαδώσεως.

Από την (20.24) προκύπτει:

$$R_s = \frac{r_o}{n - 1}$$

(20.25)

Με τη βοήθεια της σχέσεως (20.25) μπορούμε να επιλέγουμε την τιμή της αντιστάσεως διακλαδώσεως ώστε η πολλαπλασιαστική της δύναμη να είναι δεδομένη. Π.χ. αν θέλουμε να μετράει το όργανο δεκαπλάσια ρεύματα από την ευαισθησία του, δηλαδή $n = 10$, θα πρέπει η Shunt να έχει τιμή:

$$R_s = \frac{r_o}{9}$$

$$\text{Για } n = 100 \rightarrow R_s = r_o/99$$

$$\text{Για } n = 1000 \rightarrow R_s = r_o/999 \text{ κ.λ.π.}$$

Αρκετά αμπερόμετρα, κυρίως αυτά που προορίζονται για μετρήσεις ρουτίνας, έχουν ενσωματωμένη στο κιβώτιό τους διάταξη προτύπων αντιστάσεων διακλαδώσεως, όπως αυτή του σχήματος 20.3β. Τα όργανα αυτά στην όψη τους φέρουν περιστροφικό διακόπτη για την επιλογή της επιθυμητής αντιστάσεως διακλαδώσεως και κατ' ακολουθίαν της περιοχής μετρήσεως του οργάνου η οποία βέβαια αντιστοιχεί σε μια από τις κλίμακές του. Η επιλογή της κατάλληλης περιοχής, πριν αρχίσει η μέτρηση, πρέπει να γίνεται ως εξής:

Από την ισχύ και την τάση λειτουργίας του καταναλωτή μπορούμε να εκτιμήσουμε, κατά κάποιο τρόπο, το ρεύμα που πρόκειται να μετρήσουμε. Σε περιπτώσεις αμφιβολίας προχωρούμε δοκιμαστικά αρχίζοντας τη μέτρηση με τη **μεγαλύτερη κλίμακα**. Αν η ένδειξη είναι μικρή προχωρούμε στην αμέσως μικρότερη κλίμακα. Τελικά εκτελούμε τη μέτρηση στην περιοχή εκείνη στην οποία ο δείκτης ισορροπεί στη μέση περίπου της κλίμακας του οργάνου.

Παράδειγμα 20.3.1.

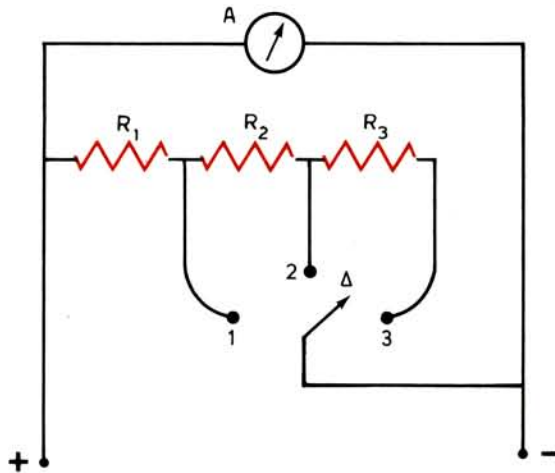
Αμπερόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση $r_o = 4 \Omega$ και περιοχή μετρήσεως $0 \div 10 \text{ mA}$. Να υπολογισθούν οι τιμές των αντιστάσεων R_1 , R_2 και R_3 ώστε το ρεύμα που μπορεί να μετρηθεί στην παρακάτω διάταξη του σχήματος 20.3γ να είναι:

$$0,1 \text{ A} - 1 \text{ A} - 5 \text{ A}$$

Γνωρίζουμε ότι γενικά για την αντίσταση διακλαδώσεως ισχύει:

$$R = \frac{r_o}{n - 1} \quad \text{και} \quad n = \frac{I}{i}$$

δηλαδή όταν η R αυξάνεται το n ελαττώνεται. Επομένως όταν φέρομε το



Σχ. 20.3γ.

Διάταξη παραδείγματος 20.3.1.

διακόπτη στη θέση 3 η περιοχή μετρήσεως πρέπει να είναι $0 \div 0,1$ A οπότε θα ισχύει:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r_o}{n - 1} \quad \text{όπου} \quad n = \frac{100\text{mA}}{10\text{mA}} = 10$$

$$\text{Άρα:} \quad R_1 + R_2 + R_3 = \frac{4}{9} \Omega = 444 \text{ m}\Omega \quad (1)$$

Όταν φέρουμε το διακόπτη στη θέση 2 η περιοχή μετρήσεως πρέπει να είναι $0 \div 1$ A οπότε θα ισχύει:

$$R_1 + R_2 = \frac{r_o}{n - 1} \quad \text{όπου} \quad n = \frac{1000}{10} = 100$$

$$\text{Άρα:} \quad R_1 + R_2 = \frac{4}{99} \Omega \approx 40 \text{ m}\Omega \quad (2)$$

Για τη θέση 1 η περιοχή μετρήσεως πρέπει να είναι $0 \div 5$ A με

$$n = \frac{I}{i} = \frac{5000}{10} = 500$$

$$\text{οπότε:} \quad R_1 = \frac{r_o}{n - 1} = \frac{4}{499} \Omega \approx 8 \text{ m}\Omega$$

Από τις (2) και (1) προκύπτει ότι:

$$R_2 = 32 \text{ m}\Omega \quad \text{και} \quad R_3 = 404 \text{ m}\Omega$$

20.4 Βολτόμετρα.

Τα βολτόμετρα είναι όργανα με τα οποία μετράμε τη διαφορά δυναμικού (τάση) μεταξύ δύο σημείων ενός κυκλώματος. Αν π.χ. θέλουμε να μετρήσουμε την τάση στα άκρα του αντιστάτη R_1 συνδέουμε **παράλληλα** προς τον αντιστάτη ένα βολτόμετρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 20.4α.

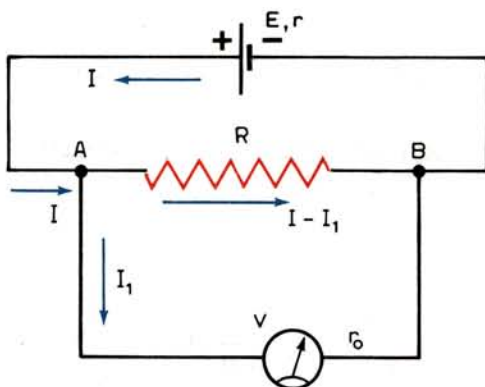
Ας υπενθυμίσουμε ότι στην παράγραφο 20.2, όπου αναπτύξαμε τους τύπους των οργάνων ηλεκτρικών μετρήσεων από πλευράς τρόπου κατασκευής, είχαμε αναφέρει ότι – τουλάχιστον θεωρητικά – με οποιοδήποτε όργανο εσωτερικής αντιστάσεως r_o με το οποίο μετράμε εντάσεις ηλεκτρικού ρεύματος, στην περιοχή $0 - I_o$ A μπορούμε να μετράμε και τάσεις στην περιοχή $0 - U_o$, όπου:

$$U_o = r_o I_o \quad (20.26)$$

Έτσι, εφόσον το όργανο βαθμολογηθεί σε μονάδες τάσεως (Volt) μπορεί να χρησιμοποιείται ως βολτόμετρο. Βέβαια, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η περιοχή μετρήσεως ενός βολτομέτρου, όπως προκύπτει από την (20.26) είναι εξαιρετικά μικρή διότι τόσο η εσωτερική αντίσταση των οργάνων είναι πολύ μικρή όσο και το μέγιστο επιτρεπτό ρεύμα μέγιστης τους αποκλίσεως. Αλλά, θα γνωρίσουμε στη συνέχεια, πως – πολύ απλά – συνδέοντας σε σειρά με την εσωτερική αντίσταση του οργάνου μια πολύ μεγάλη πρότυπη ωμική αντίσταση μπορούμε να επεκτείνουμε την περιοχή μετρήσεως του οργάνου όταν λειτουργεί ως βολτόμετρο.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι το βολτόμετρο – όπως και το αμπερόμετρο – πρέπει να συνδέεται με την ορθή πολικότητα σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Λανθασμένη σύνδεση προκαλεί αντίθετη εκτροπή του δείκτη και μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τη στρέβλωσή του.

Ας μελετήσουμε, τώρα, με τη βοήθεια του σχήματος 20.4α τις διαταραχές που προκαλεί η σύνδεση του βολτομέτρου σ' ένα κύκλωμα. Το ρεύμα που παρέχει η πηγή, εσωτερικής αντιστάσεως r , στον αντιστάτη R πριν συνδεθεί με το βολτόμετρο, είναι:



Σχ. 20.4α.

Βολτόμετρο συνδεμένο παράλληλα προς αντιστάτη R .

$$I' = \frac{E}{R + r}$$

και συνεπώς η διαφορά δυναμικού στα άκρα του καταναλωτή R:

$$U'_{AB} = I'R = \frac{E}{1 + \frac{r}{R}} \quad (20.27)$$

Μετά τη σύνδεση του βολτομέτρου, η πηγή παρέχει στο σύστημα καταναλωτή - βολτομέτρου ρεύμα εντάσεως I:

$$I = \frac{E}{R_o} \quad (20.28)$$

όπου R_o η ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας καταναλωτή - βολτομέτρου:

$$R_o = \frac{Rr_o}{R + r_o} = \frac{R}{\frac{R}{r_o} + 1} \quad (20.29)$$

Άρα, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του καταναλωτή, την οποία δείχνει το βολτόμετρο, θα είναι:

$$U_{AB} = I'R_o = \frac{E}{1 + \frac{r}{R_o}} \quad (20.30)$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (20.27) και (20.30) οι οποίες παρέχουν τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του καταναλωτή πριν και μετά τη σύνδεση του βολτομέτρου, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- α) Αν η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι $r = 0$, τότε η σύνδεση του βολτομέτρου δεν δημιουργεί καμία διαταραχή στο κύκλωμα.
- β) Αν η εσωτερική αντίσταση της πηγής δεν είναι αμελητέα, τότε, επειδή $R_o < R$ η τάση $U_{AB} < U'_{AB}$, δηλαδή το βολτόμετρο δείχνει μικρότερη τάση από εκείνη που επικρατούσε στα άκρα του καταναλωτή πριν από τη σύνδεσή του.
- γ) Αν η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίσταση του καταναλωτή ($r_o \gg R$),

τότε $\frac{R}{r_o} \rightarrow 0$, οπότε $R_o \rightarrow R$, $I \rightarrow I'$ και $U_{AB} \rightarrow U'_{AB}$, δηλαδή η μεταβολή της τάσεως στα άκρα του καταναλωτή λόγω της συνδέσεως του βολτομέ-

τρού είναι πάρα πολύ μικρή και μάλιστα τόσο μικρότερη όσο η τιμή της r_o είναι μεγαλύτερη.

Άρα τα βολτόμετρα πρέπει να κατασκευάζονται με όσο το δυνατόν μεγάλη εσωτερική αντίσταση.

20.4.1 Επέκταση της περιοχής μετρήσεως βολτομέτρου.

Η κλίμακα ενός αμπερομέτρου, π.χ. ενός μιλιαμπερομέτρου, όπως είδαμε, μπορεί να βαθμολογηθεί σε μονάδες τάσεως (Volt). Η τάση όμως που μπορεί να μετρήσει το όργανο είναι πάρα πολύ μικρή οπότε η μέτρηση δεν έχει πρακτική αξία. Αν π.χ. το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως ενός οργάνου είναι $I_o = 1 \text{ mA}$ και η εσωτερική του αντίσταση $r_o = 10 \Omega$ τότε το όργανο θα μπορούσε να μετρήσει τάσεις μέχρι $U_o = I_o r_o = 10 \text{ mV}$.

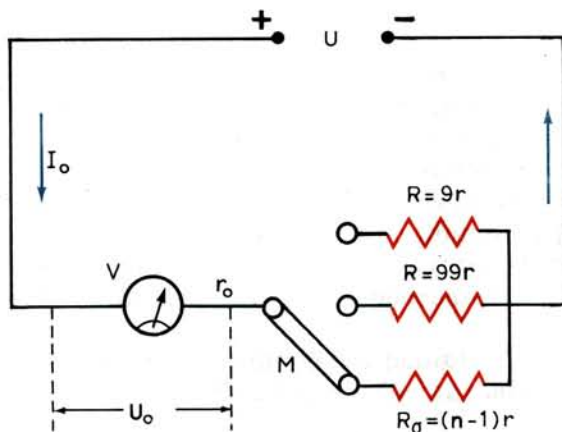
Για να μετρήσουμε μεγαλύτερες τάσεις, πρέπει να συνδέσουμε σε σειρά προς το όργανο, μια κατάλληλη αντίσταση R_o που ονομάζεται **αντίσταση σειράς** ή **πολλαπλασιαστής** (σχ. 20.46). Αν U η μέγιστη τάση που θέλουμε να μετράει το όργανο, r_o η εσωτερική του αντίσταση και I_o το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως που μπορεί να μετρήσει, τότε σύμφωνα με το νόμο του Ohm θα έχουμε:

$$I_o = \frac{U}{R_o + r_o} \rightarrow R_o = \frac{U}{I_o} - r_o \quad (20.31)$$

Για να μετατρέψουμε π.χ. το μιλιαμπερόμετρό μας σε βολτόμετρο που να μετράει μέγιστη τάση 10 V θα πρέπει να συνδέσουμε σε σειρά προς το όργανο μια αντίσταση ίση με:

$$R_o = \frac{10}{10^{-3}} - 10 = 9990 \Omega$$

Με τη σύνδεση αυτή η κλίμακα του οργάνου πολλαπλασιάζεται επί 1000.



Σχ. 20.46.

Επέκταση της περιοχής μετρήσεως βολτομέτρου.

Γενικά, αν:

U η προς μέτρηση τάση,
u η τάση υπό την οποία τίθεται το βολτόμετρο,
 r_o η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου, και
 R_σ η αντίσταση σειράς (πολλαπλασιαστής),

τότε με απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm λαμβάνομε:

$$\frac{u}{r_o} = \frac{U}{R_\sigma + r_o}$$

$$\eta \quad U = \left(\frac{R_\sigma}{r_o} + 1 \right) u \quad (20.32)$$

Τη σχέση (20.32) μπορούμε να θέσουμε και υπό τη μορφή:

$$U = nu \quad (20.33)$$

$$\text{Ο συντελεστής} \quad n = \frac{U}{u} = \frac{R_\sigma}{r_o} + 1 \quad (20.34)$$

ονομάζεται πολλαπλασιαστική δύναμη της αντιστάσεως R_σ .

Από την (20.34) προκύπτει:

$$R_\sigma = (n - 1) r_o \quad (20.35)$$

Με τη βοήθεια της σχέσεως (20.35) μπορούμε να επιλέγομε την τιμή της αντιστάσεως σειράς ενός βολτομέτρου ώστε η πολλαπλασιαστική της δύναμη να είναι δεδομένη. Π.χ. αν θέλομε να μετράει το όργανο δεκαπλάσιες τάσεις από την ευαισθησία του, δηλαδή $n = 10$, θα πρέπει η R_σ να έχει τιμή $R_\sigma = 9r_o$.

$$\text{Για} \quad n = 100 \rightarrow R_\sigma = 99 r_o$$

$$\text{Για} \quad n = 1000 \rightarrow R_\sigma = 999 r_o \text{ κ.λ.π.}$$

Τα βολτόμετρα, **ως επί το πλείστον**, διαθέτουν ενσωματωμένη στο κιβώτιό τους διάταξη προτύπων αντιστάσεων σειράς, όπως αυτή του σχήματος 20.4β. Στην περίπτωση αυτή, στην πρόσοψή τους φέρουν περιστροφικό διακόπτη για την επιλογή της επιθυμητής αντιστάσεως σειράς και κατ' ακολουθίαν της περιοχής μετρήσεως του οργάνου, η οποία βέβαια αντιστοιχεί σε μια από τις κλίμακές του.

Για την **ευαισθησία των βολτομέτρων** εκτός των ορισμών που δώσαμε στην παράγραφο 20.1 χρησιμοποιείται συχνά και ο εξής ορισμός:

$$\varepsilon = \frac{1}{I_o} = \frac{R_\sigma + r_o}{U_o} \quad (20.36)$$

δηλαδή συχνά δίνεται και ως το αντίστροφο του ρεύματος μέγιστης αποκλίσεως του οργάνου. Προς αποφυγή συγχύσεως με λοιπούς ορισμούς της ευαισθησίας όταν χρησιμοποιείται ο παραπάνω ορισμός η τιμή της ευαισθησίας

παρέχεται σε μονάδες Ω/V . Είναι φανερό ότι, εφόσον το ρεύμα μέγιστης αποκλίσεως οργάνου που χρησιμοποιείται ως βολτόμετρο είναι σταθερό, ασχέτως της τιμής της αντιστάσεως σειράς που χρησιμοποιείται – αν χρησιμοποιείται – η ευαισθησία ενός βολτομέτρου είναι η ίδια σε όλες τις κλίμακες του οργάνου. Στις βιομηχανικές μετρήσεις, όπου οι συχνότητες των ρευμάτων είναι χαμηλές και συνεπώς οι εσωτερικές αντιστάσεις των πηγών εξαιρετικά μικρές, μετρήσεις με βολτόμετρα ευαισθησίας μέχρι $100\Omega/V$ είναι ανεκτές. Σε ραδιο-τηλεπικοινωνιακές μετρήσεις όπου οι εσωτερικές αντιστάσεις των πηγών – λόγω υψηλών συχνοτήτων – είναι μεγάλες απαιτούνται βολτόμετρα μεγάλης ευαισθησίας, στην περιοχή $1000 - 20.000 \Omega/V$.

Παράδειγμα 20.4.1.

Βολτόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση $r_o = 10 \Omega$ και περιοχή μετρήσεως $0 \div 300 mV$. Να υπολογιστούν οι R_1 , R_2 και R_3 στη διάταξη του σχήματος 20.4γ ώστε το όργανο να μπορεί να μετρήσει τάσεις $3 V - 30 V - 300 V$.

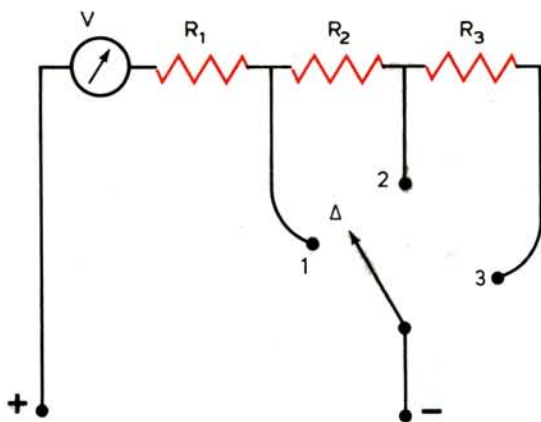
$$\text{Είναι } R_o = (n - 1) r_o \quad \text{και} \quad n = \frac{U}{u}$$

δηλαδή όταν η R_o αυξάνει, αυξάνεται και το n . Επομένως όταν φέρομε το διακόπτη στη θέση 1, η περιοχή μετρήσεως είναι $0 \div 3 V$ και θα ισχύει:

$$R_1 = (n - 1) r_o \quad \text{όπου} \quad n = \frac{3000}{300} = 10$$

Άρα $R_1 = 9 \cdot 10 = 90 \Omega$.

Για τη θέση 2 η περιοχή μετρήσεως είναι $0 \div 30 V$ με $n = \frac{U}{u} = 100$ οπότε:



Σχ. 20.4γ.
Διάταξη παραδείγματος 20.4.1.

$$R_1 + R_2 = 99 \cdot 10 = 990 \Omega \rightarrow$$

$$R_2 = 990 - 90 = 900 \Omega$$

Για τη θέση 3 η περιοχή μετρήσεως είναι $0 \div 300 \text{ V}$ με $n = \frac{U}{u} = 1000$

Παράδειγμα 20.4.2.

Στο κύκλωμα του σχήματος 20.45 η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 1 A και του βολτομέτρου 160 V. Η συστοιχία των συσσωρευτών έχει ΗΕΔ 171 V και αμελητέα εσωτερική αντίσταση. Ζητούνται οι εσωτερικές αντιστάσεις των οργάνων. Δίνεται $R_1 = 10 \Omega$ και $R_2 = 200 \Omega$.

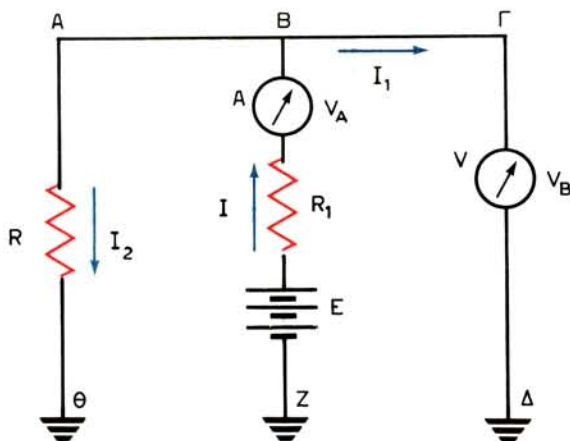
$$\text{Είναι } U_{\Gamma\Delta} = U_{BZ} = U_{A\Theta} = 160 \text{ V}$$

$$\text{οπότε } I_2 = \frac{U_{A\Theta}}{R_2} = \frac{160}{200} = 0,8 \text{ A και } I_1 = I - I_2 = 0,2 \text{ A}$$

$$\text{Άρα } r_B = \frac{U_{\Gamma\Delta}}{I_1} = \frac{160}{0,2} = 800 \Omega$$

$$U_{BZ} = E - I(R_1 + r_A) \rightarrow r_A = \frac{E - U_{BZ}}{I} - R_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow r_A = \frac{171 - 160}{1} - 10 = 1 \Omega$$



Σχ. 20.45.

Κύκλωμα παραδείγματος 20.4.2.

Παράδειγμα 20.4.3.

Στο κύκλωμα του σχήματος 20.4ε το σημείο α έχει συνδεθεί με το θετικό πόλο πηγής. Η ένδειξη του βολτομέτρου είναι 100 V και η εσωτερική του αντίσταση 10 kΩ. Να υπολογισθεί το δυναμικό του σημείου α. Δίνεται $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$ και $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$.

Το ρεύμα που διαρρέει το όργανο είναι:

$$I_1 = \frac{U_B}{r_o} = \frac{100}{10 \cdot 10^3} \quad A = 10 \text{ mA}$$

Το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο R_3 είναι:

$$I_2 = \frac{U_B}{R_3} = \frac{100}{20 \cdot 10^3} \quad A = 5 \text{ mA}$$

Άρα

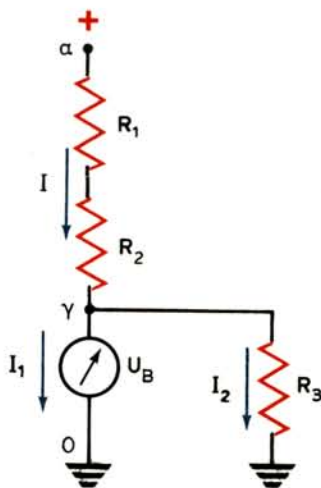
$$I = I_1 + I_2 = 15 \text{ mA}$$

οπότε

$$U_a - U_\gamma = I (R_1 + R_2) = 15 \cdot 40 = 600 \text{ V}$$

και

$$U_a = U_a - U_o = (U_a - U_\gamma) + (U_\gamma - U_o) = 700 \text{ V}$$



Σχ. 20.4ε.

Κύκλωμα παραδείγματος 20.4.3.

20.5 Ωμόμετρα.

Αν θέλουμε σύντομες αλλά πρόχειρες μετρήσεις ωμικών αντιστάσεων χρησιμοποιούμε απλά όργανα που ονομάζουμε **ωμόμετρα**. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα περιγράψουμε δύο απλούς τύπους ωμομέτρων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται συχνά στην πράξη.

20.5.1 Ωμόμετρα με στρεφόμενο πλαίσιο.

Τα ωμόμετρα με στρεφόμενο πλαίσιο συγκροτούνται από ένα κοινό όργανο με στρεφόμενο πλαίσιο, σε κύκλωμα με μια πηγή συνεχούς ρεύματος αμελητέας εσωτερικής αντιστάσεως και ένα ροοστάτη, όπως φαίνεται στο σχήμα 20.5α. Μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β συνδεσμοποιείται μια ωμική αντίσταση προκειμένου να μετρηθεί. Η ένταση ρεύματος του μιλιαμπερομέτρου θα είναι τότε:

$$I = \frac{E}{R_{AB} + R_{\pi} + r_o} \quad (20.37)$$

όπου: E η ΗΕΔ της πηγής, αμελητέας εσωτερικής αντιστάσεως,
 r_o η εσωτερική αντίσταση του οργάνου,
 R_{π} το τμήμα της αντιστάσεως του ροοστάτη που διαρρέεται από ρεύμα,
 και R_{AB} η άγνωστης τιμής ωμική αντίσταση.
 Από τη σχέση (20.37) προκύπτει:

$$R_{AB} = \frac{E}{I} - (R_{\pi} + r_o) \quad (20.38)$$

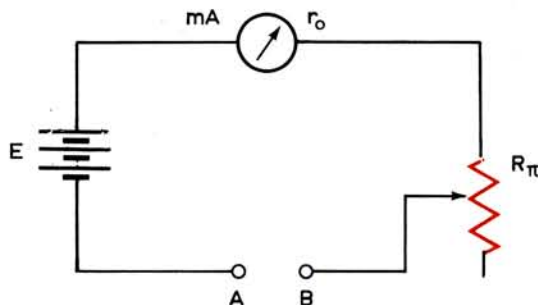
Το μιλιαμπερόμετρο βαθμολογείται απευθείας σε μονάδες αντιστάσεως (Ω) ως εξής:

Βραχυκυκλώνομε τις επαφές Α και Β οπότε στο κύκλωμα κυκλοφορεί ρεύμα εντάσεως:

$$I_0 = \frac{E}{R_{\pi} + r_o} \quad (20.39)$$

όπου r_o η αντίσταση του μιλιαμπερομέτρου και R_{π} η αντίσταση που παρεμβάλλεται με το ροοστάτη.

Ρυθμίζομε με το ροοστάτη στη συνέχεια την τιμή της αντιστάσεως R_{π} , έτσι ώστε η ένταση αυτή I_0 να είναι ίση με την ένταση μέγιστης αποκλίσεως I_0 του



Σχ. 20.5α.

Σχηματική παράταξη ωμομέτρου.

οργάνου. Έτσι, όταν ο δείκτης, στην κλίμακα των εντάσεων, δείχνει τη μέγιστη ένταση, τότε στην κλίμακα της αντιστάσεως πρέπει να δείχνει 0 Ω. Την τιμή, λοιπόν, 0 Ω, αντιστοιχούμε στη μέγιστη τιμή της εντάσεως.

Αν π.χ. το μιλιαμπερόμετρο που χρησιμοποιούμε έχει $r_o = 5 \Omega$ και $I_o = 10 \text{ mA}$, η δε ΗΕΔ της πηγής είναι $E = 2 \text{ V}$, τότε η αντίσταση R_{π} θα έχει τιμή:

$$R_{\pi} = \frac{E}{I_o} - r_o = \frac{2}{10 \cdot 10^{-3}} - 5 = 195 \Omega$$

Είναι φανερό ότι με τη βοήθεια του ροοστάτη μπορούμε να αντισταθμίζουμε κατά θούληση την πτώση της ΗΕΔ της πηγής λόγω της γηράνσεώς της, επιδιώκοντας κάθε φορά η ένδειξη του ωμομέτρου, με θραχυκυκλωμένους τους ακροδέκτες του, να είναι 0 Ω.

Αν τώρα συνδέσουμε μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β μια πρότυπη αντίσταση π.χ. 10 Ω τότε στο κύκλωμα θα κυκλοφορήσει ρεύμα εντάσεως:

$$I = \frac{E}{R_{\pi} + r_o + R_{AB}} = \frac{2}{210} \text{ A} = 9,5 \text{ mA}$$

Κάτω από την ένδειξη των 9,5 mA, που μας δείχνει ο δείκτης σημειώνουμε την ένδειξη 10 Ω (σχ. 20.56).

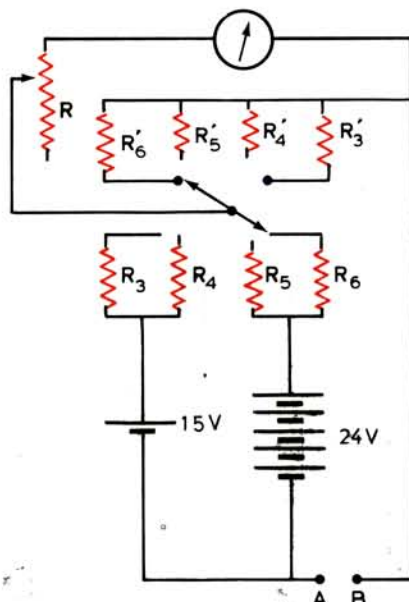
Στη συνέχεια συνδέουμε στους ακροδέκτες Α, Β διαδοχικά πρότυπες αντιστάσεις των 30, 50, 100, 150... Ohm και σημειώνουμε κάτω από τις ενδείξεις του οργάνου τις τιμές των αντιστοιχών αντιστάσεων. Έτσι, έχουμε μια νέα βαθμολόγηση της κλίμακας του οργάνου, με την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των αντιστάσεων, που συνδέονται στους ακροδέκτες Α και Β του οργάνου, απευθείας σε Ohm.

Για να μπορούμε να μετράμε αντιστάσεις από την τιμή των μερικών Ohm, μέχρι την τιμή των μερικών MΩ, δηλαδή όταν χρειαζόμαστε περισσότερες από μία κλίμακες, χρησιμοποιούμε δύο πηγές, από ξηρά στοιχεία, με κατάλληλους διαιρέτες τάσεως, όπως π.χ. φαίνεται στο σχήμα 20.5γ.

Η ακρίβεια των ωμομέτρων αυτών δεν είναι πολύ μεγάλη, αλλά, όπως είπαμε, είναι πολύ εύχρηστα στις περιπτώσεις που δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια. Το ωμόμετρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν δοκιμαστικό, δηλαδή ως όργανο



Σχ. 20.56.
Κλίμακα ωμομέτρου.



Σχ. 20.5γ.

Συγκρότηση ωμομέτρου πολλών περιοχών.

για να ελέγχομε αν δύο σημεία Γ και Δ κυκλώματος βρίσκονται σε βραχυκύκλωση ή όχι: Αν κατά τη σύνδεση των ακροδεκτών Α και Β του οργάνου με τα σημεία Γ και Δ το όργανο δείχνει μηδέν Ohm, τότε τα δύο σημεία βρίσκονται σε βραχυκύκλωση.

Σημειώνουμε επίσης ότι πριν από κάθε μέτρηση με το ωμόμετρο πρέπει να γίνεται η ρύθμιση του μηδενός της κλίμακας των Ohm, με τη βοήθεια του ροοστάτη που διαθέτει.

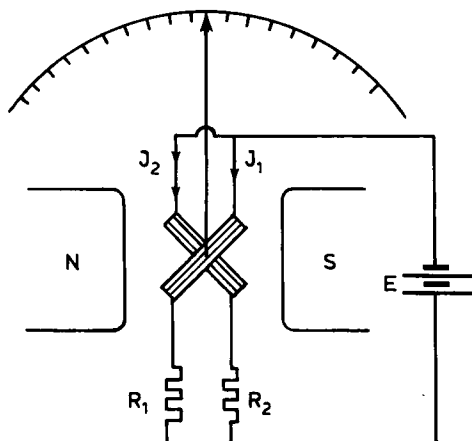
20.5.2 Ωμόμετρα με διασταυρωμένα πηνία - Ωμόμετρο Megger.

Τα όργανα με διασταυρωμένα πηνία χρησιμοποιούνται ως ωμόμετρα εφόσον συνδεσμοποιηθούν σε διάταξη όπως αυτή του σχήματος 20.5δ, και χρησιμοποιούνται κυρίως για τη μέτρηση μεγάλων αντιστάσεων. Αν οι αντιστάσεις των πηνίων είναι αμελητέες μπροστά από τις αντιστάσεις R_1 και R_2 τότε, με μεγάλη προσέγγιση ισχύει:

$$I_1 = \frac{E}{R_1} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{E}{R_2}$$

οπότε από τη σχέση (20.7) λαμβάνουμε:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = k \epsilon \phi \theta \quad (20.39)$$



Σχ. 20.5δ.
Ωμόμετρο με διασταυρωμένα πηνία.

Αν συνδέσουμε στη θέση της αντιστάσεως R_1 μια αντίσταση άγνωστης τιμής R_x , τότε από την (20.39) έχομε:

$$R_x = k' \epsilon\phi\theta \quad (20.40)$$

Μπορούμε, λοιπόν, να βαθμολογήσουμε το όργανο σε Ω . Είναι σκόπιμο να τονίσουμε ότι η λειτουργία του παρόντος ωμομέτρου είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση της πηγής, αντίθετα με ό,τι συνέβαινε στα ωμόμετρα στρεφόμενου πλαισίου όπου μικρή μεταβολή της ΗΕΔ της πηγής συνεπάγονταν μεταβολή στη βαθμολόγηση του οργάνου. Τέλος, ας επισημάνουμε ότι οι αντιστάσεις R_1 και R_2 λειτουργούν ταυτόχρονα και προστατευτικά για τα πηνία έναντι ενδεχομένων υπερτάσεων της πηγής.

Μια ειδική κατασκευή ωμομέτρου με διασταυρωμένα πηνία που χρησιμοποιείται πολύ στην πράξη αποτελεί το **ωμόμετρο Megger**.

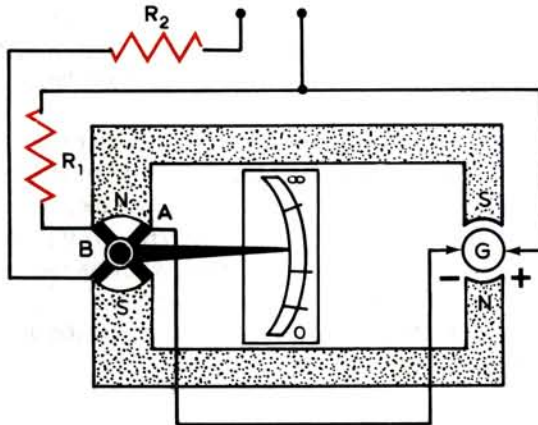
Το όργανο αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση μεγάλων αντιστάσεων (της τάξεως των $M\Omega$) και είναι κατάλληλο για τον έλεγχο της αντιστάσεως μονώσεως των ηλεκτρικών μηχανών και των ηλεκτρικών εγκαταστάσεων.

Αποτελείται από δύο ευθύγραμμους μαγνήτες που καταλήγουν σε αντίθετους πόλους με κυλινδρικά διαμορφωμένα πέλματα (σχ. 20.5ε).

Μέσα στο ένα ζεύγος των μαγνητικών πόλων τοποθετούνται τα πηνία Α και Β που φέρουν το δείκτη του οργάνου. Τα πηνία είναι στερεά συναρμολογημένα μεταξύ τους και μπορούν να στρέφονται μαζί ελεύθερα, με έδρανα από πολύτιμους λίθους. Το ρεύμα διαβιβάζεται στα πηνία με τόσο ευλύγιστους αγωγούς ώστε ο δείκτης να μπορεί να πάρει μια οποιαδήποτε θέση όταν το όργανο δεν λειτουργεί.

Το όργανο τροφοδοτείται συνήθως από χειροκίνητη γεννήτρια G , που βρίσκεται μέσα στο άλλο ζεύγος των μαγνητικών πόλων.

Το πηνίο Β συνδέεται σε σειρά με την προστατευτική αντίσταση R_1 και τη γεννήτρια. Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι ανάλογο της τάσεως της γεννήτριας με συνέπεια και η ροπή στρέψεως που εξασκείται σ' αυτό να είναι ανάλογη της τάσεως, γι' αυτό ονομάζεται και **πηνίο τάσεως**. Το πηνίο Α συνδέεται σε σειρά με την προστατευτική αντίσταση R_2 και τη γεννήτρια. Το ένα



Σχ. 20.5ε.
Ωμόμετρο Megger.

άκρο της R_2 και ο θετικός πόλος της πηγής καταλήγουν στους ακροδέκτες του οργάνου, στους οποίους συνδέεται η αντίσταση R_x που θέλουμε να μετρήσουμε. Έτσι από το πηνίο A, την αντίσταση R_2 και την R_x διέρχεται το ίδιο ρεύμα που παρέχει η γεννήτρια. Το ρεύμα αυτό είναι αντιστρόφως ανάλογο της R_x με συνέπεια η ροπή που εξασκείται στο πηνίο A να είναι ανάλογη του ρεύματος της γεννήτριας, γι' αυτό ονομάζεται και **πηνίο ρεύματος**. Όπως γνωρίζουμε, οι φορές των ρευμάτων στα δύο πηνία είναι τέτοιες, ώστε οι αντίστοιχες ροπές να τείνουν να στρέψουν το κινητό μέρος του οργάνου κατ' αντίθετες φορές. Όταν οι ακροδέκτες του οργάνου είναι ανοικτοί, κυκλοφορεί ρεύμα μόνο στο πηνίο B και, εξαιτίας της ροπής που εξασκείται σ' αυτό, το σύστημα των πηνίων στρέφεται οπότε η βελόνα δείχνει το άπειρο της κλίμακας. Η R_2 έχει τέτοια τιμή ώστε όταν βραχυκυκλωθούν ($R_x = 0$) οι ακροδέκτες του οργάνου, το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο A να εξασκεί σ' αυτό ροπή μεγαλύτερη από τη ροπή που εξασκείται στο πηνίο B και η βελόνα να δείχνει το μηδέν της κλίμακας. Αν συνδέσουμε στους ακροδέκτες του οργάνου μια άγνωστη αντίσταση R_x , το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο A έχει μικρότερη τιμή, οπότε η ροπή που εξασκείται στο πηνίο ελαττώνεται και η βελόνα δείχνει την τιμή της αντιστάσεως.

Για τον έλεγχο των μονώσεων μιας συσκευής ο ένας ακροδέκτης του οργάνου (σημειωμένος γη) συνδέεται στο μεταλλικό κιβώτιο της συσκευής (σασί) και ο άλλος στο αγώγιμο μέρος του εξαρτήματος, του οποίου απαιτείται ο έλεγχος της μονώσεως. Π.χ. για τον έλεγχο της μονώσεως του επαγωγίμου γεννήτριας συνεχούς ρεύματος, ο ακροδέκτης γη του οργάνου συνδέεται στον άξονα του επαγωγίμου και άλλος στο συλλέκτη.

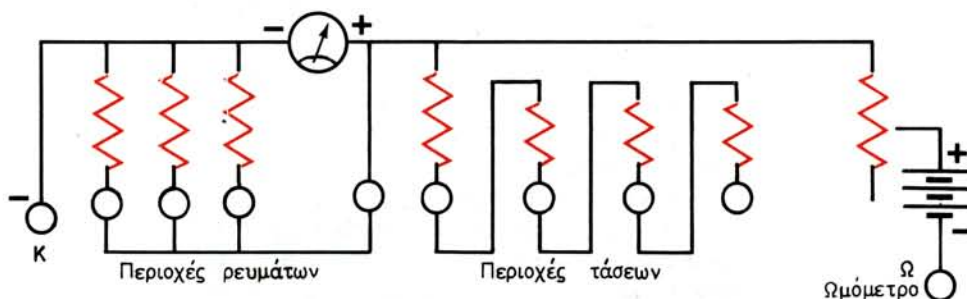
20.6 Πολύμετρα.

Τα πολύμετρα είναι όργανα με τα οποία μπορούμε να μετρήσουμε τόσο την τάση όσο και την ένταση στο συνεχές ή/και στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Επιπλέον, με τους περισσότερους τύπους πολυμέτρων γίνεται μέτρηση και ωμικών αντιστάσεων. Ως πολύμετρα, παλαιότερα, κατασκευάζονταν όργανα με στρεφόμενο πλαίσιο, ενώ σήμερα χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερα

ηλεκτρονικά - ψηφιακά όργανα. Στην περίπτωση που το πολύμετρο είναι όργανο στρεφόμενου πλαισίου, τότε για μετρήσεις σε εναλλασσόμενα ρεύματα χρησιμοποιείται ξηρός ανορθωτής που συνδεσμοποιείται μέσα στο κιβώτιο του οργάνου.

Τα πολύμετρα διαθέτουν συνήθως ποικιλία περιοχών μετρήσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 20.6α. Με τους κύκλους, στο σχήμα, συμβολίζουμε συνηθισμένους ακροδέκτες (μπόρνες). Με τα διπλά ημικύκλια συμβολίζουμε ακροδέκτες οι οποίοι είναι διαχωρισμένοι σε δυο μισά που βραχυκυκλώνονται όταν εισάγουμε ένα μεταλλικό στέλεχος (μπανάνα). Οι τιμές των αντιστάσεων υπολογίζονται σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στις παραγράφους 20.3.1 και 20.4.1

Τα πολύμετρα είναι πολύ χρήσιμα αλλά και εύχρηστα όργανα. Πολλές φορές ονομάζονται **AVO**, από τα αρχικά των λέξεων **A**mpere, **V**olt, **O**hm.



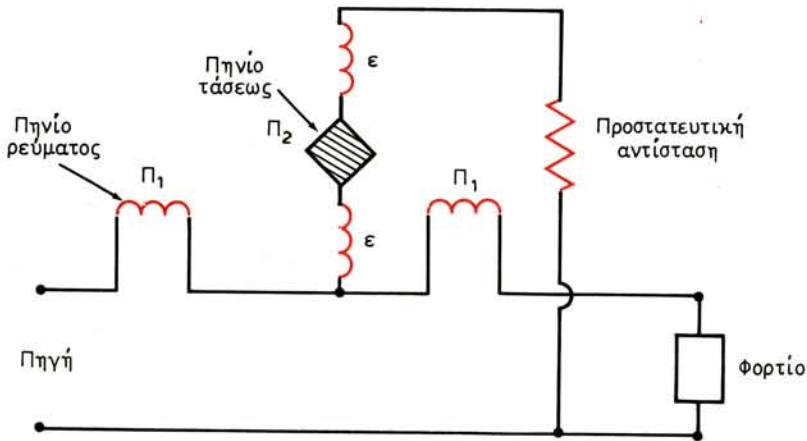
Σχ. 20.6α.

Σχηματικό διάγραμμα κυκλώματος πολυμέτρου.

20.7 Βαττόμετρα.

Με τον όρο **βαττόμετρα** αναφερόμαστε στα ηλεκτρικά όργανα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ηλεκτρικής ισχύος – συνεχούς ή εναλλασσόμενης – που απορροφάται από καταναλωτή. Στην απλούστερη περίπτωση η ισχύς ενός καταναλωτή που τροφοδοτείται από συνεχές ρεύμα ($P = U \cdot I$) μπορεί να υπολογισθεί μετά από μέτρηση της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του καταναλωτή καθώς και της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος που τον διαρρέει. Μπορούμε, όμως, να μετρήσουμε και απευθείας την ισχύ αν διαμορφώσουμε κατάλληλα ένα ηλεκτροδυναμόμετρο, σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 20.2.3(β). Στην περίπτωση αυτή τα πηνία του οργάνου, που ονομάζονται βαττόμετρο, διαμορφώνονται και συνδεσμοποιούνται όπως φαίνεται στο σχήμα 20.7α.

Τα ακίνητα πηνία Π_1 του οργάνου αποτελούνται από μικρό αριθμό σπειρών σύρματος μεγάλης σχετικά διατομής, ώστε να έχουν σχετικά μικρή αντίσταση, και συνδέονται σε σειρά με το δίκτυο της καταναλώσεως του ρεύματος. Το κινητό πηνίο Π_2 αποτελείται από μεγάλο αριθμό σπειρών σύρματος μικρής σχετικά διατομής και συνδέεται παράλληλα με το δίκτυο καταναλώσεως. Όπως έχουμε γνωρίσει, η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν τα σταθερά πηνία είναι ανάλογη του ρεύματος καταναλώσεως, ενώ το ρεύμα του στρεπτού



Σχ. 20.7α.
Βαττόμετρο.

πηνίου είναι ανάλογο προς την τάση της καταναλώσεως. Έτσι η ροπή στρέψεως που εξασκείται στο στρεπτό πηνίο είναι ανάλογη προς το γινόμενο της τάσεως επί την ένταση του ρεύματος καταναλώσεως, δηλαδή ανάλογη προς την ισχύ.

Το στρεπτό πηνίο διατηρείται με τη βοήθεια ελατηρίου σε σταθερή θέση. Ο δείκτης του οργάνου έχει συνδεθεί με το στρεπτό πηνίο και κινείται μπροστά από κλίμακα που έχει βαθμολογηθεί σε Watt.

Όταν πηνία τροφοδοτούνται από εναλλασσόμενο ρεύμα, τότε η απόκλιση του δείκτη είναι ανάλογη της καταναλισκόμενης πραγματικής ισχύος, σύμφωνα με τη σχέση (20.17).

Οι μετρήσεις ισχύος που γίνονται με τα βαττόμετρα δεν είναι μεγάλης ακρίβειας για τους εξής, κυρίως, λόγους:

- Οι πτώσεις τάσεως στα πηνία είναι σημαντικές με αποτέλεσμα την αλλοίωση των υπό μέτρηση μεγεθών.
- Τα κινητά πηνία των ηλεκτροδυναμικών οργάνων υπόκεινται σε αξιόλογες ηλεκτροστατικές δυνάμεις που αλλοιώνουν την ένδειξη, κυρίως όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ σταθερού και κινητού πηνίου είναι σημαντική.

Έτσι, τα βαττόμετρα χρησιμοποιούνται σπάνια στο συνεχές ρεύμα όπου η μέτρηση της ισχύος γίνεται εύκολα και με ακρίβεια με βολτόμετρο / αμπερόμετρο. Αντίθετα, στο εναλλασσόμενο ρεύμα όπου δεν προσφέρονται εναλλακτικές λύσεις τα βαττόμετρα χρησιμοποιούνται συχνά.

20.8 Μετρητές ηλεκτρικής ενέργειας.

Η μέτρηση της ηλεκτρικής ενέργειας που απορροφά καταναλωτής, συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος γίνεται με δύο, κυρίως, τύπους μετρητών:

- Τον ηλεκτροδυναμικό ή βαττομετρικό.
- Τον επαγωγικό.

20.8.1 Ηλεκτροδυναμικός ή βαττομετρικός μετρητής.

Η αρχή λειτουργίας του είναι παρόμοια με εκείνη του ηλεκτροδυναμικού βαττομέτρου. Συγκεκριμένα, ένας ηλεκτροδυναμικός μετρητής (σχ. 20.8α) αποτελείται από δύο σταθερά πηνία Π_1 και Π_2 , τα οποία συνδέονται σε σειρά με την κατανάλωση. Τα πηνία έχουν λίγες σπείρες και το τύλιγμά τους αποτελείται από σύρμα μεγάλης διατομής. Το κινητό μέρος συγκροτείται από πλήθος πηνίων που σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες. Τα άκρα των πηνίων αυτών συνδέονται με κατάλληλη διάταξη που ονομάζεται συλλέκτης. Ο συλλέκτης συνδέεται παράλληλα προς την κατανάλωση. Στο κύκλωμα παρεμβάλλεται και η προστατευτική αντίσταση R . Ο συλλέκτης εξασφαλίζει την παροχή ρεύματος, κάθε φορά, σε ένα μόνο πηνίο και συγκεκριμένα σε εκείνο, το επίπεδο των σπειρών του οποίου είναι περίπου παράλληλο προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργούν τα ακίνητα πηνία.

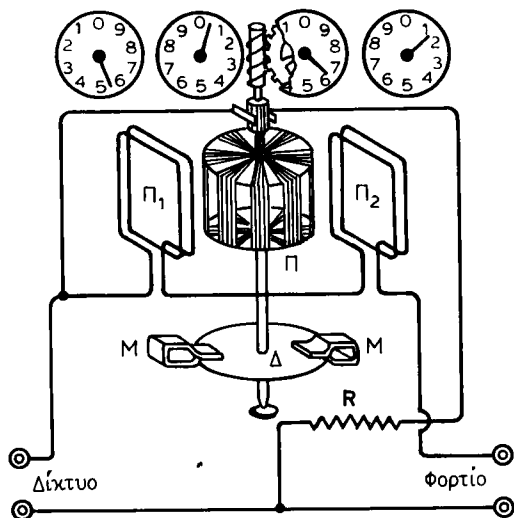
Ο άξονας του κινητού μέρους φέρει δίσκο αλουμινίου Δ , ο οποίος στρέφεται μέσα στο διάκενο πεταλοειδών μονίμων μαγνητών M . Επίσης ο άξονας φέρει ατέρμονα κοχλία, ο οποίος θέτει σε κίνηση σύστημα οδοντωτών τροχών, κατάλληλο για την καταμέτρηση των στροφών του δίσκου.

Οι δυνάμεις Laplace που εξασκούνται στο κινητό μέρος του συστήματος, δημιουργούν ροπή στρέψεως, η οποία είναι ανάλογη προς το γινόμενο της τάσεως επί το ρεύμα της καταναλώσεως, δηλαδή ανάλογη προς την ισχύ.

Έτσι το σύστημα των πηνίων του κινητού μέρους παρασύρεται σε περιστροφή με ταχύτητα περιστροφής ανάλογη προς την ισχύ της καταναλώσεως.

Όταν ο δίσκος Δ περιστρέφεται τότε δημιουργούνται ρεύματα Foucault και επομένως θα εξασκούνται δυνάμεις Laplace, οι οποίες δημιουργούν μια δεύτερη μηχανική ροπή αντίρροπη της πρώτης (κανόνας του Lenz). Από την επίδραση των δύο αντιρρόπων μηχανικών ροπών, το κινητό μέρος αποκτά τελικά μια οριακή γωνιακή ταχύτητα, που είναι ανάλογη προς την ισχύ της καταναλώσεως.

Ο ηλεκτροδυναμικός μετρητής είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και σε δίκτυα



Σχ. 20.8α.
Ηλεκτροδυναμικός μετρητής.

εναλλασσόμενης τάσεως, πρακτικά όμως χρησιμοποιείται μόνο στο συνεχές ρεύμα.

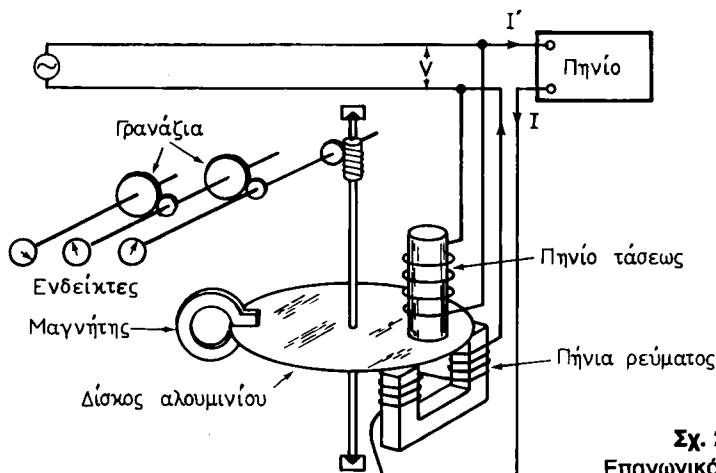
20.8.2 Επαγωγικός μετρητής.

Οι επαγωγικοί μετρητές ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ενέργειας κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος.

Ένας επαγωγικός μετρητής (σχ. 20.86) αποτελείται:

- Από δύο σταθερά πηνία με σιδηροπυρήνα (πηνία ρεύματος) από τα οποία διέρχεται το ρεύμα της καταναλώσεως και από ένα τρίτο επίσης σταθερό πηνίο (πηνίο τάσεως), το οποίο τίθεται υπό την τάση της καταναλώσεως.
- Από ένα δίσκο αλουμινίου, ο οποίος στρέφεται γύρω από άξονα, έτσι ώστε να διέρχεται από το διάκενο των πηνίων καθώς και τους πόλους μόνιμου μαγνήτη και από ένα μηχανικό σύστημα καταμετρήσεως των στροφών του δίσκου.

Τα δύο σταθερά πηνία παρουσιάζουν αμελητέα επαγωγική αντίσταση οπότε η εναλλασσόμενη μαγνητική ροή που δημιουργείται, έχει την ίδια φάση με το ρεύμα της καταναλώσεως. Το πηνίο τάσεως παρουσιάζει μεγάλη επαγωγική αντίσταση και αμελητέα ωμική, οπότε το ρεύμα που το διαρρέει, άρα και η εναλλασσόμενη μαγνητική ροή που δημιουργείται, έπεται της τάσεως κατά 90° . Επειδή ο δίσκος βρίσκεται μέσα σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο, που δημιουργείται από το ένα πηνίο, θα αναπτύσσονται ρεύματα Foucault. Τα ρεύματα αυτά ρέουν μέσα στο μαγνητικό πεδίο του άλλου πηνίου και επομένως θα εξασκούνται σ' αυτά δυνάμεις Laplace. Οι δυνάμεις αυτές συγκροτούν ζεύγος, η ροπή του οποίου θέτει το δίσκο σε περιστροφή. Συγχρόνως όμως αναπτύσσεται στο δίσκο και δεύτερη μηχανική ροπή, αντίρροπη από την πρώτη, η οποία οφείλεται στην επίδραση του πεδίου του μόνιμου μαγνήτη στα διανορεύματα του δίσκου. Από την επίδραση των δύο αντιρρόπων μηχανικών ροπών ο δίσκος τελικά αποκτά μια οριακή γωνιακή ταχύτητα, που είναι ανάλογη προς την ισχύ της καταναλώσεως. Τελικά ο αριθμός των στροφών που εκτελεί ο δίσκος, μέσα σε ορισμένο χρονικό διάστημα, είναι ανάλογος προς την ηλεκτρική ενέργεια



Σχ. 20.86.
Επαγωγικός μετρητής.

που παρέχεται στην κατανάλωση και ο μετρητής μετράει αυτή την ενέργεια απευθείας σε kWh.

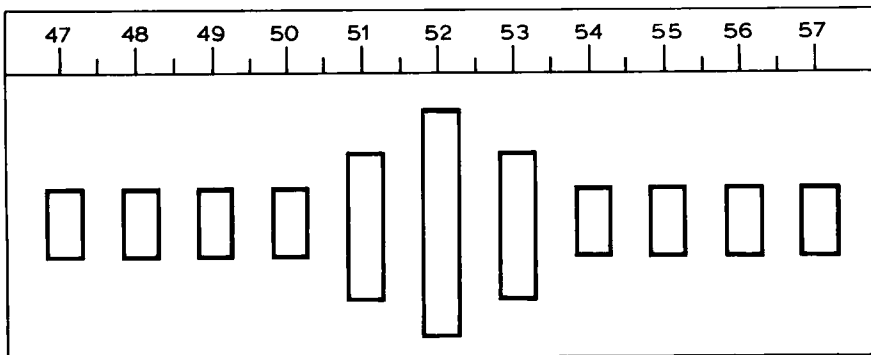
20.9 Συχνόμετρα.

Για τη μέτρηση των βιομηχανικών συχνοτήτων, μέχρι μερικές χιλιάδες Hz, υπάρχουν αρκετά όργανα (συχνόμετρο κινητού σιδήρου, ηλεκτροδυναμικό συχνόμετρο, επαγωγικό συχνόμετρο, ηλεκτρονικό συχνόμετρο) ή μέθοδοι με γέφυρες (π.χ. γέφυρα Wien). Η ανάπτυξη, όμως, των παραπάνω συχνομέτρων ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού. Σκόπιμο όμως είναι να παρουσιάσουμε ένα ενδεικτικό όργανο που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη ως συχνόμετρο στην περιοχή συχνοτήτων 15 έως 600 Hz, το **συχνόμετρο με γλωσσίδες ή με παλλόμενα ελάσματα**.

Τα συχνόμετρα με γλωσσίδες αποτελούνται από σειρά λεπτών χαλυβδίνων γλωσσίδων, που έχουν το ίδιο πλάτος και πάχος, αλλά διαφορετικό μήκος. Το ένα άκρο των γλωσσίδων στερεώνεται σε μεταλλική βάση, ενώ το άλλο άκρο τους μπορεί να πάλλεται ελεύθερα με ορισμένη ιδιοσυχνότητα. Εξαιτίας του διαφορετικού μήκους τους οι γλωσσίδες έχουν διαφορετική ιδιοσυχνότητα και τοποθετούνται στη μεταλλική βάση έτσι ώστε η ιδιοσυχνότητά τους να αυξάνει κατά 0,25 μέχρι 1 Hz από τη μια γλωσσίδα στην άλλη. Οι γλωσσίδες βρίσκονται μέσα σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ηλεκτρομαγνήτη.

Ο ηλεκτρομαγνήτης τροφοδοτείται από εναλλασσόμενο ρεύμα τη συχνότητα του οποίου πρόκειται να μετρήσουμε. Οι δυνάμεις που εξασκούνται από τον ηλεκτρομαγνήτη στις γλωσσίδες τις θέτουν σε εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αλλά υπάρχει κάθε φορά μια μόνο γλωσσίδα, η ιδιοσυχνότητα της οποίας συμπίπτει με τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος (συντονισμός). Η γλωσσίδα αυτή θα πάλλεται με το μεγαλύτερο πλάτος. Οι δύο γλωσσίδες που βρίσκονται δεξιά και αριστερά της πάλλονται με μικρότερο πλάτος, ενώ το πλάτος των υπολοίπων γλωσσίδων είναι ανεπαίσθητο (σχ. 20.9).

Μπροστά από τις γλωσσίδες υπάρχει βαθμολογημένη κλίμακα. Το άκρο της γλωσσίδας που βρίσκεται σε συντονισμό δείχνει απευθείας τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος σε Hz.

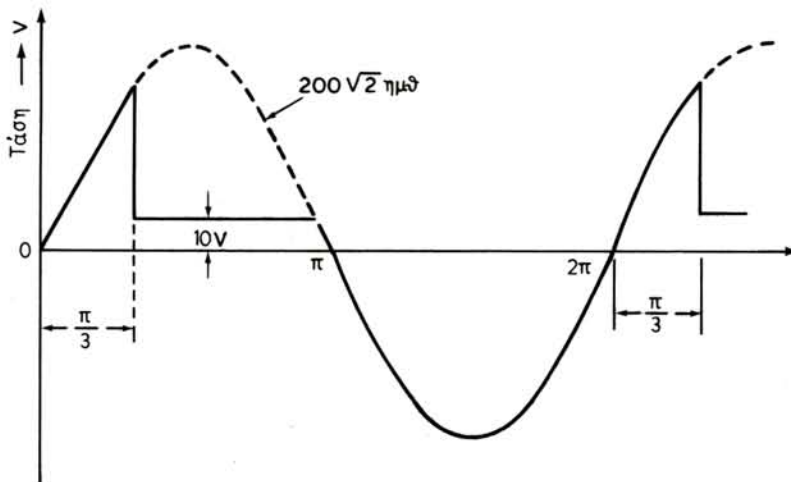


Σχ. 20.9α.

Ένδειξη συχνόμετρου με παλλόμενα ελάσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

1) Το σχήμα 1 απεικονίζει την τάση που επικρατεί στα άκρα μιας λυχνίας θύρατρων. Η πτώση τάσεως στα άκρα της λυχνίας όταν η λυχνία άγει είναι 10 V. Η τάση πολώσεως της θύρατρων είναι τέτοια ώστε η αγωγιμότητα αρχίζει 60° ($\pi/3$) από την εκκίνηση κάθε κύκλου. Να υπολογισθεί η ενεργός τιμή της τάσεως στα άκρα της λυχνίας.

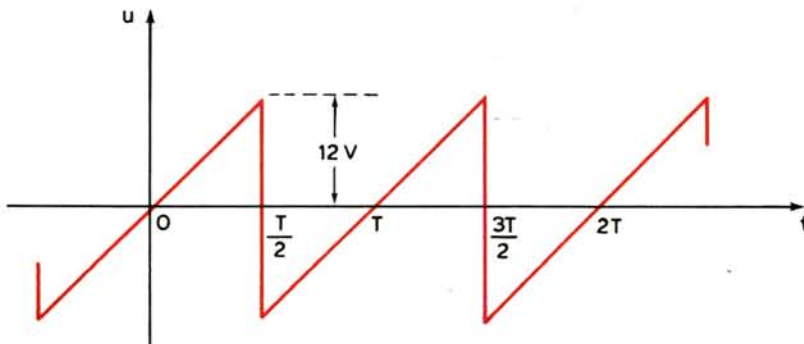


Σχ. 1.

Απάντηση: $U_{RMS} = 155 \text{ V}$

2) Το σχήμα 2 παριστάνει μια πριονωτή τάση. Να υπολογισθεί η ενεργός τιμή της.

Απάντηση: $U_{RMS} = 4\sqrt{3} \text{ V}$

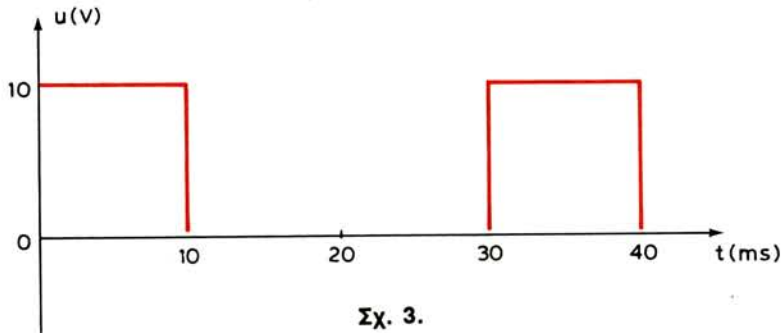


Σχ. 2.

3) Πηνίο αποτελούμενο από 200 σπείρες περιστρέφεται με συχνότητα 20 στροφές/sec μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 0,2 \text{ T}$ γύρω από άξονα που είναι κάθετος στη διεύθυνση του πεδίου. Αν το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι 100 cm^2 να υπολογισθεί το πλάτος της τάσεως που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου.

Απάντηση: $U_0 = 50,24 \text{ V}$

4) Το σχήμα 3 παριστάνει μια σειρά κανονικών τετραγωνικών παλμών. Να υπολογισθεί η μέση και ενεργός τιμή της τάσεως.



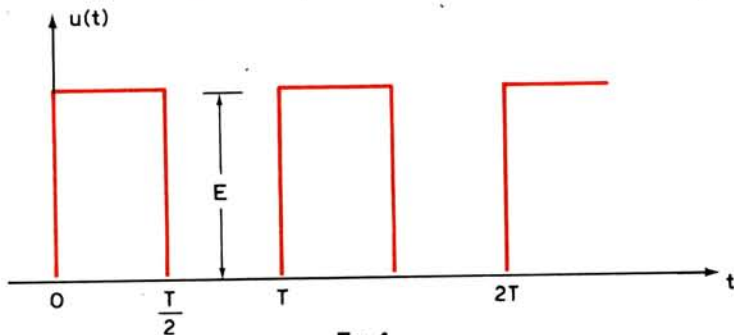
Απάντηση: $U_{\mu} = \frac{10}{3} \text{ V}$ $U_{\text{RMS}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ V}$

5) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η κυματομορφή που εικονίζεται στο σχήμα 4.

Απάντηση:

$$A = \frac{E}{2}, \quad a_n = 0, \quad b_n = 0 \text{ όταν } n = \text{άρτιος και } b_n = \frac{2E}{\pi n} \text{ όταν } n = \text{περιττός.}$$

$$u(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\eta\mu \omega t + \frac{\eta\mu 3\omega t}{3} + \frac{\eta\mu 5\omega t}{5} + \dots \right)$$



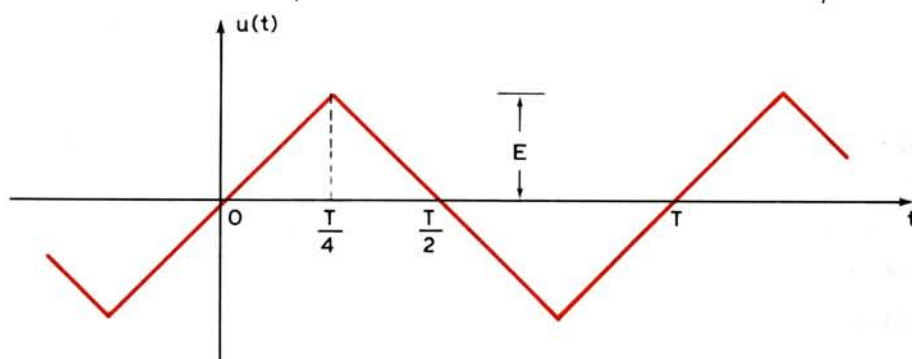
6) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η κυματομορφή που εικονίζεται στο σχήμα 5.

Απάντηση:

$$A = a_n = 0, \quad \theta_n = 0 \text{ όταν } n = \text{άρτιος και}$$

$$b_n = \frac{8E}{\pi^2 n^2} \eta\mu \frac{\pi n}{2} \text{ όταν } n = \text{περιττός.}$$

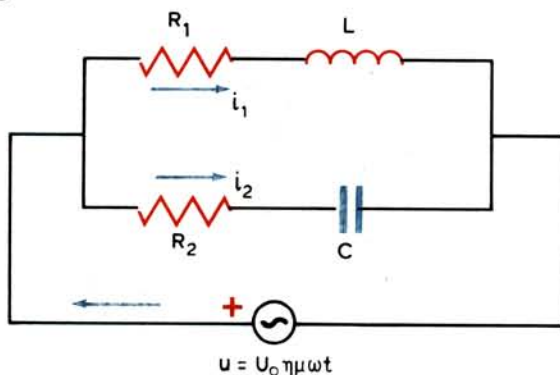
$$u(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left(\eta\mu\omega t - \frac{\eta\mu 3\omega t}{9} + \frac{\eta\mu 5\omega t}{25} - \frac{\eta\mu 7\omega t}{49} + \dots \right)$$



Σχ. 5.

7) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 6, το οποίο τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $u = U_0 \eta\mu\omega t$. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των στοιχείων R_1 , R_2 , L και C του κυκλώματος, ώστε τα ρεύματα i_1 και i_2 να παρουσιάζουν διαφορά φάσεως 90° για οποιαδήποτε συχνότητα της τάσεως.

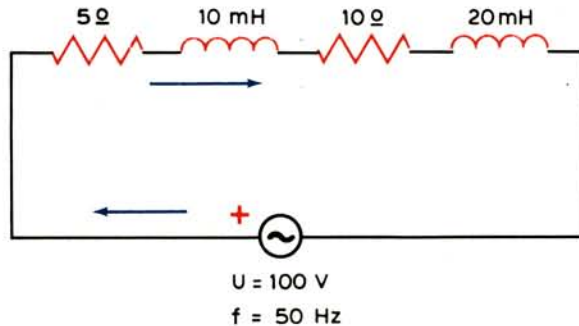
Απάντηση: $\frac{L}{C} = R_1 R_2$



Σχ. 6.

8) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7. Να υπολογισθεί η ενεργός τιμή του ρεύματος I καθώς και η εφφ (φ η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως).

Απάντηση: $I = 5,65 \text{ A}$, $\varepsilon\varphi\varphi = 0,628$

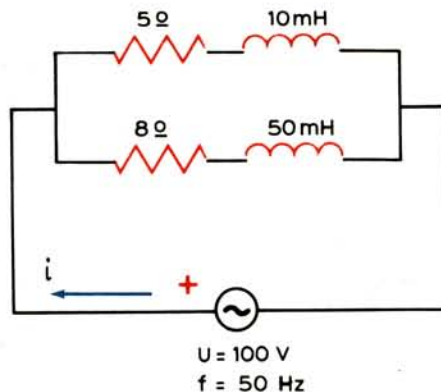


Σχ. 7.

9) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 8 (Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής $M = 0$). Ζητούνται:

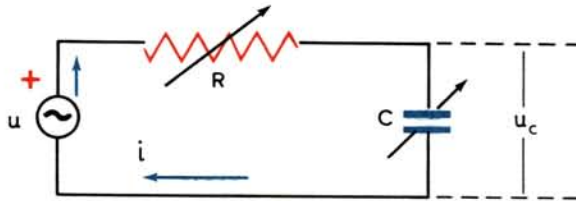
- (α) Η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει την πηγή.
- (β) Η διαφορά φάσεως τάσεως - εντάσεως.
- (γ) Η μέση και φαινόμενη ισχύς.

Απάντηση: (α) $I = 22,7 \text{ A}$, (β) $\varepsilon\varphi\varphi = 0,8469 \rightarrow \varphi = 40^\circ$, (γ) $P = 1738,8 \text{ W}$, $P_\varphi = 2270 \text{ V}\cdot\text{A}$



Σχ. 8.

10) Το κύκλωμα του σχήματος 9 αποτελεί ένα κύκλωμα διαφοράς φάσεως μεταξύ της τάσεως εισόδου u και της τάσεως εξόδου u_c . Οι τιμές των R και C είναι πάντα ρυθμισμένες έτσι ώστε το μέτρο της συνολικής (σε σειρά) αντιστάσεώς τους να είναι $5 \text{ k}\Omega$. Η συχνότητα της τάσεως εισόδου είναι 1000 Hz . Να προσδιορισθούν οι τιμές των R και C έτσι ώστε η διαφορά φάσεως μεταξύ u και u_c να είναι ίση με $\pi/6$ (30°).



Σχ. 9.

Απάντηση: $R = 2,5 \text{ k}\Omega$, $C = 37 \text{ nF}$.

11) Στο κύκλωμα του σχήματος 9 είναι: $R = 10 \text{ }\Omega$, $C = 75 \text{ }\mu\text{F}$ και $i = 1,5 \text{ συν } 1000 t$. Ζητούνται: α) Η σύνθετη (μικαδική) αντίσταση. β) Οι τάσεις u_R , u_C και u .

Απάντηση: α) $\bar{Z} = 10 - j 13,33 = 16,67 \angle -53^\circ$

$$\beta) u_R = 15 \text{ συν } \omega t, u_C = 20 \text{ συν} \left(1000 t - \frac{\pi}{2} \right) = 20 \text{ ημ } 1000 t$$

$$\text{και } u = 25 \text{ συν} (1000 t - 53^\circ)$$

12) Στο κύκλωμα του σχήματος 10 είναι $R = 10 \text{ }\Omega$ και $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $u = 200\sqrt{2} \text{ ημ } 1000 t$. Ζητούνται:

- α) Για ποια τιμή της L έχουμε συντονισμό.
 β) Οι τάσεις U_R , U_L και U_C (ενεργές τιμές).
 γ) Η ζώνη διαβάσεως $\Delta f = f_2 - f_1$.

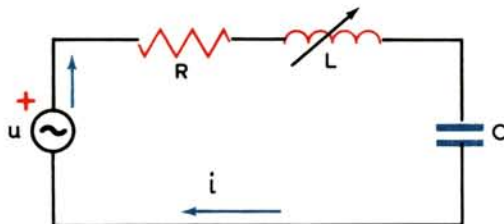
Απάντηση: (α) $L = 0,1 \text{ H}$, (β) $U_R = 200 \text{ V}$, $U_L = U_C = QU = 2000$ ($Q = 10$), (γ) $\Delta f \approx 16 \text{ Hz}$

13) Στο κύκλωμα του σχήματος 10 είναι: $R = 15 \text{ }\Omega$, $L = 35 \text{ mH}$, $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$ και $i = 1 \text{ συν } 1000 t$. Ζητούνται:

- (α) Η σύνθετη (μικαδική) αντίσταση του κυκλώματος.
 (β) Οι τάσεις u_R , u_L , u_C και u .

Απάντηση: (α) $\bar{Z} = 15 + 15j = 21,2 \angle 45^\circ$, (β) $u_R = 15 \text{ συν } 1000 t$, $u_L = 35 \text{ συν} (1000 t + 90^\circ)$

$$u_C = 20 \text{ συν} (1000 t - 90^\circ) \quad \text{και} \quad u = 21,2 \text{ συν} (1000 t + 45^\circ).$$



Σχ. 10.

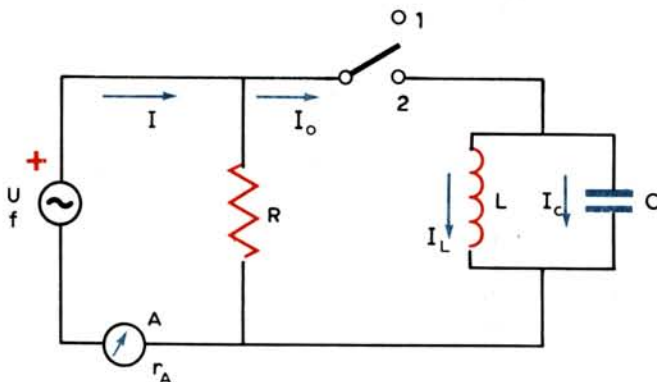
14) Στο κύκλωμα του σχήματος 11 η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι η ίδια και για τις δύο θέσεις του διακόπτη. Πώς εξηγείται αυτό;

Απάντηση: Στη θέση 1 η ένδειξη του οργάνου θα είναι η τιμή $I = \frac{U}{R + r_A}$

Αν η συχνότητα της τάσεως είναι ίση με $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ τότε στη θέση 2 θα έχουμε:

$$X_L = \omega L = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad \text{και} \quad I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{X_C} = I_C$$

δηλαδή $I_0 = I_L - I_C = 0$ ($Z = \infty$). Επομένως η ένδειξη του οργάνου θα είναι η ίδια.



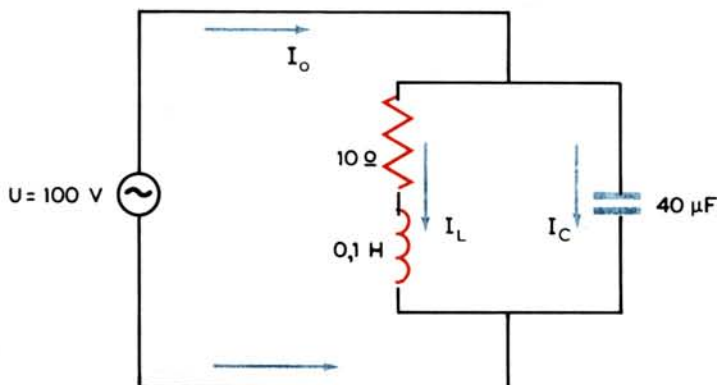
Σχ. 11.

15) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 12. Ζητούνται: α) Η ω_0 και ο συντελεστής ποιότητας Q .

(β) Η σύνθετη αντίσταση Z_0 (στο συντονισμό) καθώς και το ρεύμα I_0 που διαρρέει το κύκλωμα.

(γ) Τα ρεύματα I_L και I_C .

(δ) Η ζώνη $\Delta f = f_2 - f_1$ όπου η Z γίνεται $0,707 Z_0$.



Σχ. 12.

Απάντηση: (α) $\omega_o = 500 \text{ rad/s}$, $Q = 5$, (β) $Z_o = 250 \Omega$, $I_o = 0,4 \text{ A}$, (γ) $I_L = I_C = QI_o = 2 \text{ A}$,
(δ) $\Delta f = f_2 - f_1 \approx 16 \text{ Hz}$.

16) Ωμικός καταναλωτής 50 W/100 V πρόκειται να λειτουργήσει σε εναλλασσόμενο ρεύμα 200 V/50 Hz. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή που πρέπει να συνδεθεί σε σειρά με τον καταναλωτή.

Απάντηση: $C = 9,1 \mu\text{F}$

17) Φορτίο λειτουργεί με τάση $U = 220 \text{ V}$ και απορροφά μέση ισχύ $P = 10 \text{ kW}$. Αν ο συντελεστής ισχύος είναι $\cos\phi = 0,85$ ($\eta\mu\phi = 0,527$) ζητούνται:

- (α) Η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το φορτίο.
(β) Η ωμική αντίσταση του φορτίου.
(γ) Η άεργος ισχύς P_a .
(δ) Η μιγαδική φαινόμενη ισχύς \bar{P}_ϕ .
(ε) Η επαγωγική αντίσταση του φορτίου X_L .

Απάντηση: (α) $P \equiv UI \cos\phi \rightarrow I = 53,45 \text{ A}$, (β) $P = I^2 R \rightarrow R = 3,5 \Omega$, (γ) $P_a = UI \eta\mu\phi = 6,19 \text{ kVAR}$, (δ) $\bar{P}_\phi = P + jP_a = 10 + j6,19 \text{ kVA}$.

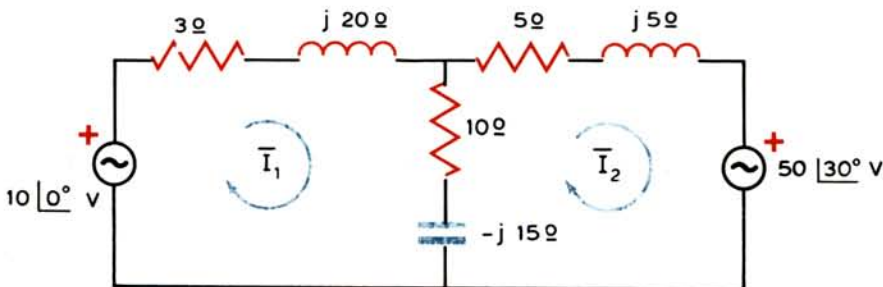
(ε) $P_a = UI \eta\mu\phi = I^2 X_L \rightarrow X_L = \frac{P_a}{I^2} = 2,17 \text{ V}$, δηλαδή $\bar{Z}_L = R + jX_L = (3,5 + j 2,17) \Omega$

18) Ο συντελεστής ισχύος επαγωγικού κινητήρα 5 kW είναι 0,75. Ο κινητήρας λειτουργεί με εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής 220 V και συχνότητας 50 Hz. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή, που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με τον κινητήρα, για να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος και να γίνει 0,9.

Απάντηση: $C = 130 \mu\text{F}$

19) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 13. Να υπολογισθούν τα βροχικά ρεύματα \bar{I}_1 και \bar{I}_2 .

Απάντηση: $\bar{I}_1 = -0,864 + j 1,369 \text{ A} = 1,619 \angle 122,94^\circ$
 $\bar{I}_2 = 1,486 - j 0,881 \text{ A} = 1,727 \angle -149,34^\circ$



Σχ. 13.

20) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 14. Ζητούνται: (α) Οι αγωγιμότητες των κλάδων $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$

(β) Τα ρεύματα \bar{I}_1, \bar{I}_2 και \bar{I}_3 των κλάδων σε καρτεσιανή και πολική μορφή.

Απάντηση: (α) $\bar{Y}_1 = 0,098 - j 0,082 = 0,1277 \angle -39,8^\circ \text{ S}$

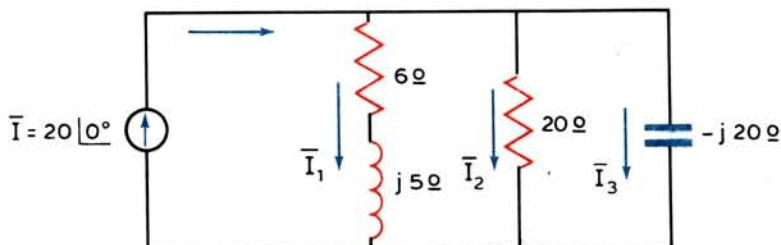
$$\bar{Y}_2 = 0,05 \text{ S}, \quad \bar{Y}_3 = j 0,05 = 0,05 \angle 90^\circ$$

οπότε $\bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = 0,148 - j 0,032$

$$(β) \bar{I}_1 = 14,94 - j 7,85 = 16,877 \angle -27,72^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 6,445 + j 1,395 = 6,604 \angle 12,2^\circ$$

$$\bar{I}_3 = -1,395 + j 6,455 = 6,604 \angle 102,2^\circ$$



Σχ. 14.

21) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 15. Ζητούνται:

(α) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος Z .

(β) Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα i .

(γ) Τα ρεύματα $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ και \bar{i}_4 .

(δ) Οι τάσεις u_{AB} και $u_{B\Gamma}$.

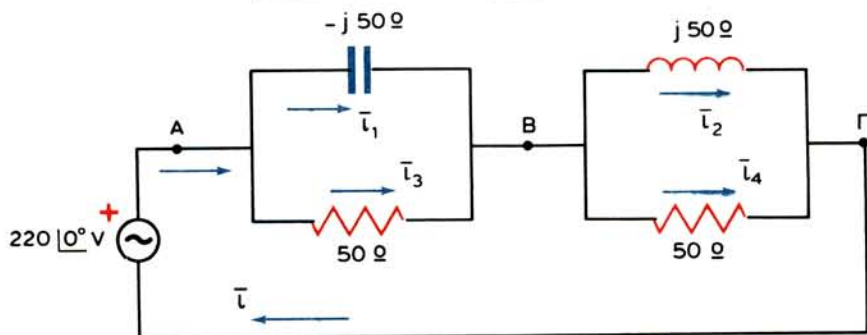
Απάντηση: (α) $\bar{Z} = 50 \angle 0^\circ \Omega$

$$(β) \bar{i} = 4,4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$(γ) \bar{i}_1 = 3,11 \angle 45^\circ \text{ A}, \quad \bar{i}_2 = 3,11 \angle -45^\circ \text{ A},$$

$$\bar{i}_3 = 3,11 \angle -45^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad \bar{i}_4 = 3,11 \angle 45^\circ \text{ A}$$

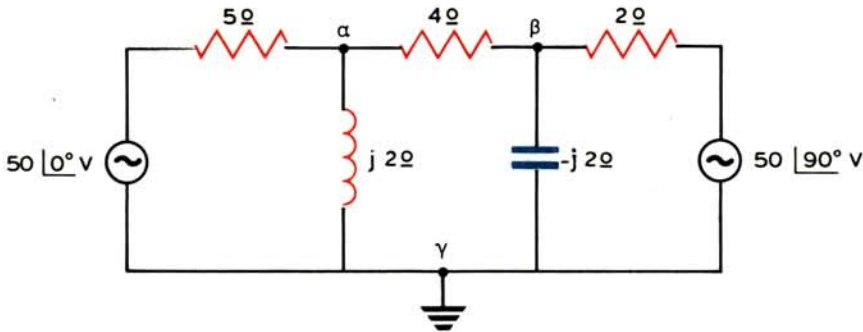
$$(δ) \bar{u}_{AB} = 155,5 \angle -45^\circ \text{ V}, \quad \bar{u}_{B\Gamma} = 155,5 \angle 45^\circ \text{ V}$$



Σχ. 15.

22) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 16. Να βρεθούν τα δυναμικά στα σημεία α και β με τη μέθοδο των κομβικών τάσεων.

Απάντηση: $\bar{U}_\alpha = 24,7 \angle 72,25^\circ \text{ V}$, $\bar{U}_\beta = 33,6 \angle 53,75^\circ \text{ V}$



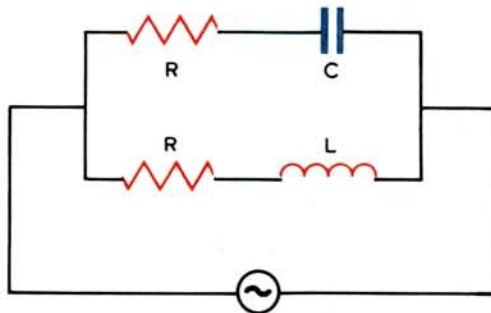
Σχ. 16.

23) Να βρεθεί σχέση μεταξύ των R, L και C ώστε το κύκλωμα του σχήματος 17 να έχει σύνθετη αντίσταση ίση με R.

Απάντηση:

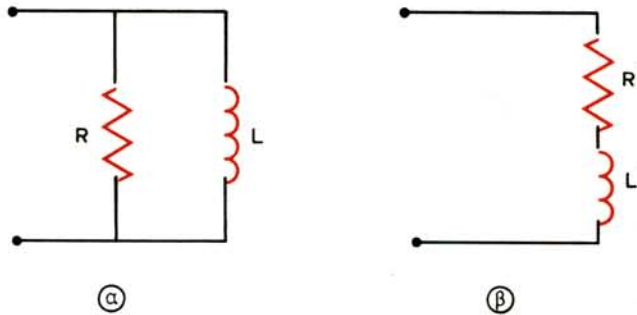
Όταν: $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα ($Z = R$). Το κύκλωμα αυτό βρίσκει εφαρμογή σ' έναν ηλεκτρονόμο που έχει αντίσταση πηνίου R και αυτεπαγωγή L. Αν τοποθετήσουμε παράλληλα ένα κλάδο R, C με

$R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ τότε το ισοδύναμο κύκλωμα είναι μια ωμική αντίσταση κι έτσι δεν δημιουργείται σπινθήρας στις επαφές του ηλεκτρονόμου λόγω αυτεπαγωγής.



Σχ. 17.

24) Να βρεθούν οι σχέσεις που πρέπει να ισχύουν μεταξύ των R, L, ω, R' και L' ώστε τα δυο δικτυώματα να έχουν σε μια συχνότητα ω την ίδια σύνθετη αντίσταση (σχ. 18). Σαν εφαρμογή να υπολογισθεί ο συντελεστής ποιότητας του δικτυώματος α.



Σχ. 18.

Απάντηση:

$$\text{Θα πρέπει: } R' + j\omega L' = \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L} \rightarrow R' = \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \text{ και}$$

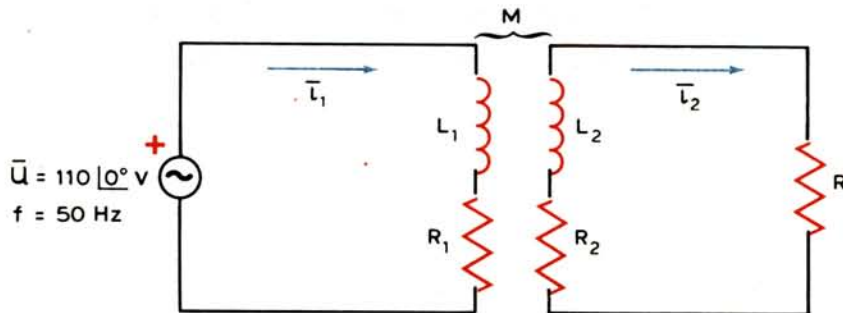
$$L' = \frac{LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}, Q = \frac{\omega L'}{R'} = \frac{R}{\omega L}$$

25) Τα δύο κυκλώματα του σχήματος 19 παρουσιάζουν αμοιβαία επαγωγή $M = 4 \text{ H}$. Είναι επίσης $R_1 = 10 \Omega$, $L_1 = 2 \text{ H}$, $R_2 = 100 \Omega$, $L_2 = 10 \text{ H}$ και $R = 100 \Omega$ (η αντίσταση φέρτου στο δευτερεύον). Ζητούνται:

(α) Η σύνθετη αντίσταση του πρωτεύοντος \bar{Z}_π .

(β) Τα ρεύματα \bar{i}_1 και \bar{i}_2 .

(γ) Η τάση στα άκρα του δευτερεύοντος \bar{u}_2 .

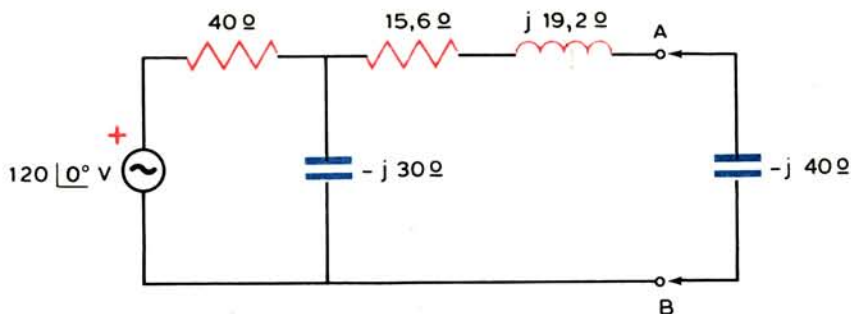


Σχ. 19.

Απάντηση: (α) $\bar{Z}_\pi = 41,9 + j128 = 134,7 \angle 72^\circ$ (β) $\bar{i}_1 = 0,817 \angle -72^\circ$, $\bar{i}_2 = 0,326 \angle -68^\circ$

(γ) $\bar{u}_2 = 32,6 \angle -68^\circ$

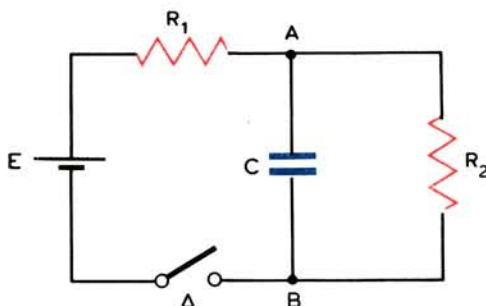
26) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 20. Να καθορισθεί το ισodύναμο κατά Thevenin κύκλωμα μεταξύ των ακροδεκτών A και B και να υπολογισθεί το ρεύμα και η τάση στο φορτίο.



Σχ. 20.

Απάντηση: $\bar{u}_T = 72 \angle -53,1^\circ \text{ V}$, $\bar{Z}_T = 30 \angle 0^\circ \Omega$
 $\bar{i} = 1,44 \angle 0^\circ \text{ A}$ και $\bar{u}_C = 57,6 \angle -90^\circ \text{ V}$

27) Να υπολογισθεί η τάση U_C στα άκρα του πυκνωτή από τη στιγμή που κλείνομε το κύκλωμα του σχήματος 21 με το διακόπτη Δ. Ο πυκνωτής αρχικά δεν έφερε φορτία.



Σχ. 21.

Απάντηση: Υπολογίζουμε το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin μεταξύ των ακροδεκτών A και B.

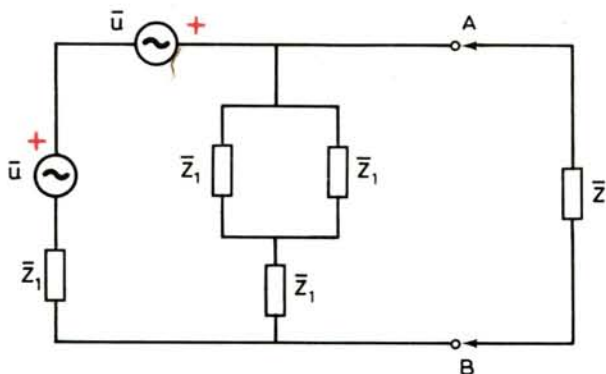
$$E_T = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \quad \text{και} \quad R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{οπότε} \quad U_C = E_T \left(1 - e^{-\frac{t}{R_T C}} \right)$$

Χωρίς το θεώρημα Thevenin έπρεπε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$E = CR_1 \frac{dU_C}{dt} + U_C \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

(Να λυθεί με αρχικές συνθήκες $t = 0$, $U_C = 0$).

28) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 22. Να υπολογισθεί η τάση \bar{u}_{AB} . (α) Με το θεώρημα Thevenin. (β) Με το θεώρημα του Norton.



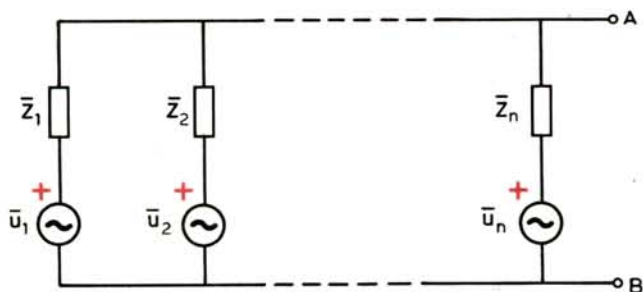
Σχ. 22.

Απάντηση: $\bar{u}_{AB} = \bar{u} \frac{6\bar{Z}}{5\bar{Z} + 3\bar{Z}_1}$

29) Θεώρημα MILLMAN:

Να αποδειχθεί ότι η τάση \bar{u}_{AB} μεταξύ των ακροδεκτών A και B του κυκλώματος του σχήματος 23 είναι ίση με:

$$\bar{u}_{AB} = \frac{\sum_{K=1}^n \bar{u}_K \cdot \bar{Y}_K}{\sum_{K=1}^n \bar{Y}_K} \quad \text{όπου} \quad \bar{Y}_K = \frac{1}{\bar{Z}_K} \text{ η αγωγιμότητα του κλάδου } K$$

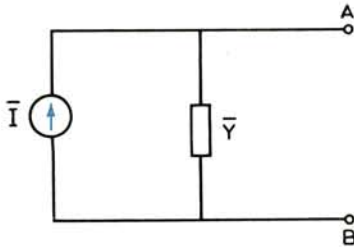


Σχ. 23.

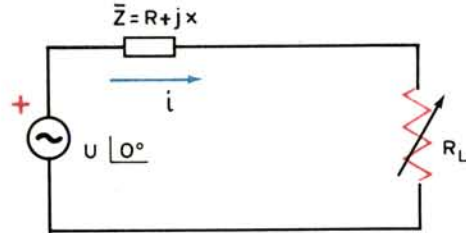
Απάντηση: Μετατρέπουμε τις πηγές τάσεως σε πηγές ρεύματος και καταλήγουμε στο κύκλωμα 24 όπου: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ και $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

$$\text{Θα έχουμε: } \bar{u}_{AB} = \bar{I} \cdot \bar{Z} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{u}_1 \bar{Y}_1 + \bar{u}_2 \bar{Y}_2 + \dots + \bar{u}_n \bar{Y}_n}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \dots + \bar{Y}_n}$$

Το θεώρημα ισχύει και για το συνεχές ρεύμα.



Σχ. 24.



Σχ. 25.

30) Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος 25. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να μεταφέρεται η μέγιστη ισχύς στο φορτίο.

Απάντηση:

$$\text{Είναι: } P = I^2 R_L = \frac{U^2 R_L}{(R + R_L)^2 + X^2}$$

$$\text{Θα πρέπει } \frac{dP}{dR_L} = 0 \xrightarrow{\text{τελικά}} R_L = \sqrt{R^2 + X^2} = |\bar{Z}|$$

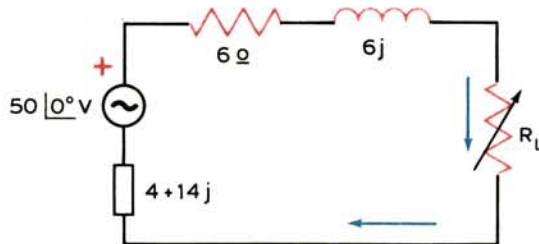
31) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 26. Ζητούνται:

(α) Για ποια τιμή της R_L μεταφέρεται η μέγιστη ισχύς στο φορτίο.

(β) Η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

(γ) Η τιμή της μέγιστης ισχύος.

Απάντηση: (α) $R_L = 22,4 \Omega$, (β) $I = 1,31 \text{ A}$, (γ) $P = I^2 R_L = 38,5 \text{ W}$



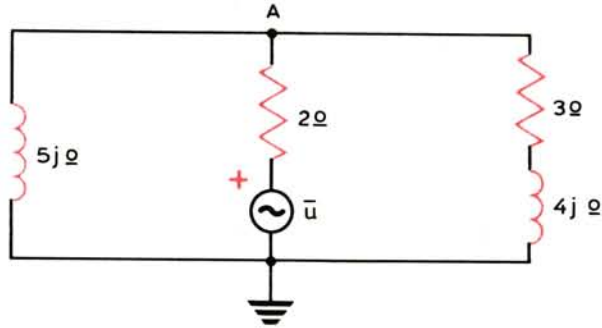
Σχ. 26.

32) Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος 27. Να υπολογισθεί η \bar{u} ώστε το δυναμικό στο σημείο A να είναι $50 \angle 0^\circ \text{ V}$.

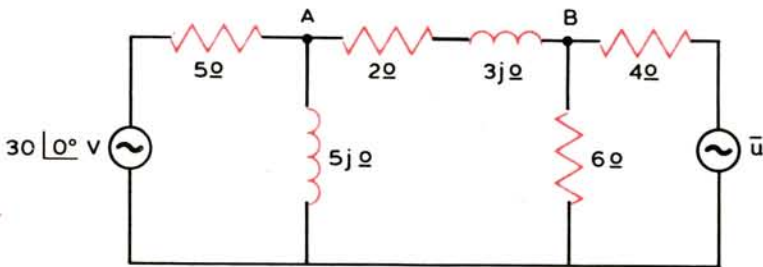
Απάντηση: $\bar{u} = 71,6 \angle -30,2^\circ \text{ V}$

33) Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος 28. Να υπολογισθεί η τάση \bar{u} ώστε το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο AB να είναι μηδέν.

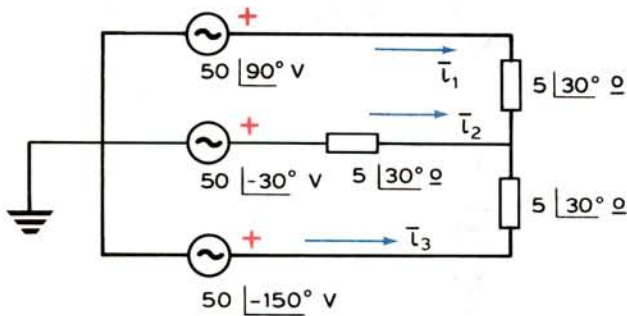
Απάντηση: $\bar{u} = 35,4 \angle 45^\circ \text{ V}$



Σχ. 27.



Σχ. 28.



Σχ. 29.

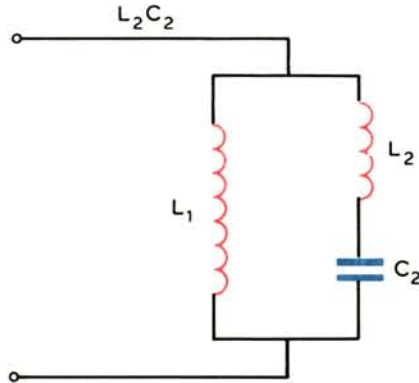
34) Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος 29. Να υπολογισθούν τα ρεύματα \bar{i}_1 , \bar{i}_2 και \bar{i}_3 .

Απάντηση: $\bar{i}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$, $\bar{i}_2 = 10 \angle -60^\circ \text{ A}$ και $\bar{i}_3 = 10 \angle 180^\circ \text{ A}$

35) Να υπολογισθεί η σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z(s)$ του δικτυώματος του σχήματος 30.

Απάντηση:

$$Z(s) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} s \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \omega_p^2} \quad \text{όπου} \quad \omega_z^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \quad \text{και} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{C_2 (L_1 + L_2)}$$



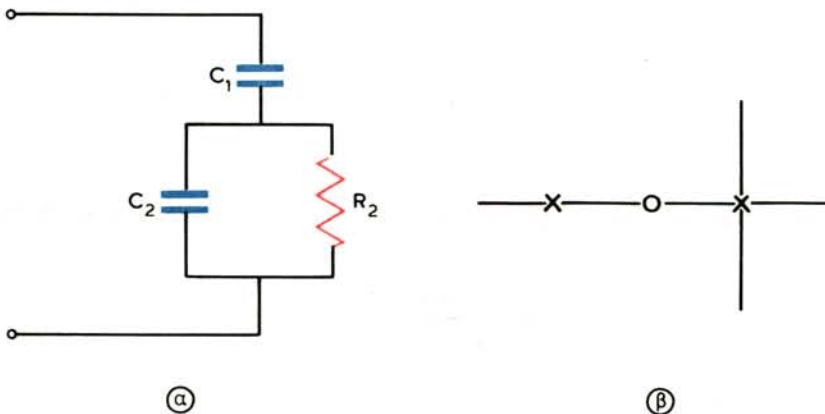
Σχ. 30.

36) Δίδεται το δικτύωμα του σχήματος 31 (α). Να υπολογισθεί η $Z(s)$ και να γίνει η τοποθέτηση των πόλων και των ριζών (μηδενικών) στο επίπεδο s .

Απάντηση:

$$Z(s) = K \frac{s + a_2}{s(s + a_1)} \quad \text{όπου} \quad K = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, \quad a_1 = \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{και} \quad a_2 = \frac{1}{R_2 (C_1 + C_2)}$$

Η τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών στο επίπεδο s φαίνεται στο σχήμα 31 (β).

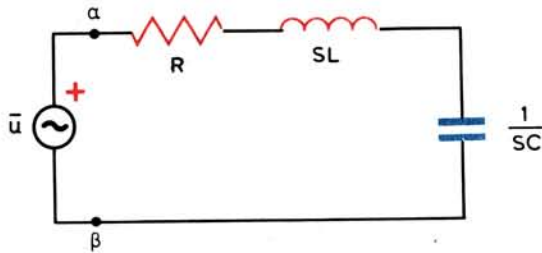


Σχ. 31.

37) Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 32. Να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

Απάντηση:

$$H(s) = Y_{\alpha\beta}(s) = \frac{1}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

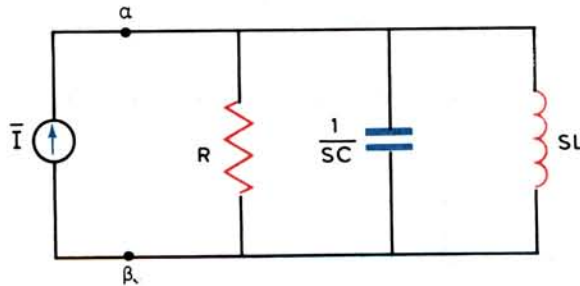


Σχ. 32.

38) Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος 33. Να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

Απάντηση: Το κύκλωμα έχει δύο ακροδέκτες και η διέγερση είναι πηγή ρεύματος. Επομένως:

$$H(s) = Z_{ab} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

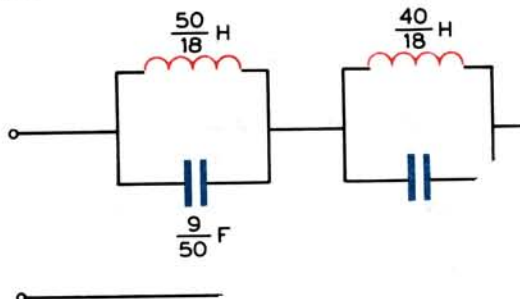


Σχ. 33.

39) Να κατασκευασθεί κύκλωμα του οποίου η σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z(s)$ να είναι ίση με:

$$Z(s) = 50 \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 2)(s^2 + 20)}$$

Απάντηση: Σχήμα 34.



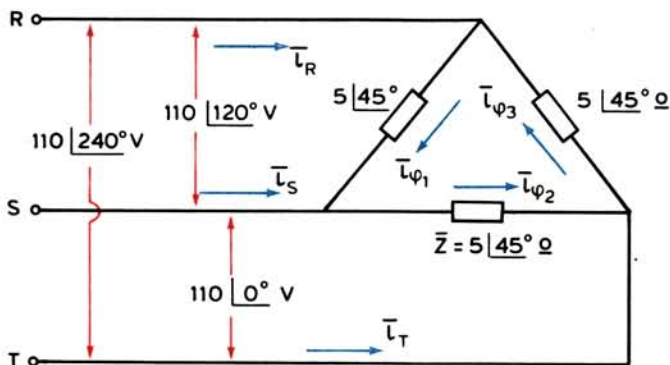
Σχ. 34.

40) Συμμετρικό τριφασικό σύστημα τριών αγωγών τροφοδοτεί τρεις όμοιες σύνθετες αντιστάσεις (σχ. 35) Ζητούνται:

- (α) Τα μιγαδικά ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις.
 (β) Τα ρεύματα που διαρρέουν τις γραμμές μεταφοράς.

Απάντηση: α) $\bar{i}_{\varphi_1} = 5,7 + j 21,2$, $\bar{i}_{\varphi_2} = 15,5 - j 15,55$, $\bar{i}_{\varphi_3} = -21,2 - j 5,7$

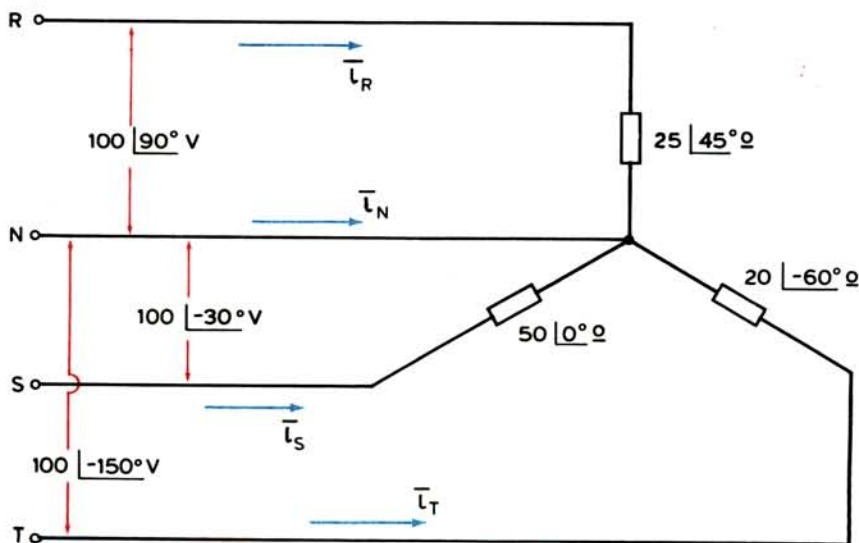
(β) $\bar{i}_R = 38,1 \angle 45^\circ$, $\bar{i}_S = 38,1 \angle -75^\circ$, $\bar{i}_T = 38,1 \angle 165^\circ$



Σχ. 35.

41) Ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα τεσσάρων αγωγών τροφοδοτεί τρεις σύνθετες αντιστάσεις (σχ. 36) Ζητούνται:

- (α) Τα ρεύματα που διαρρέουν τις γραμμές μεταφοράς.
 (β) Η μέση ισχύς σε κάθε φορτίο.
 (γ) Η άεργη ισχύς σε κάθε φορτίο.



Σχ. 36.

Απάντηση:

$$(\alpha) \bar{i}_R = 4 \angle 45^\circ, \bar{i}_s = 2 \angle -30^\circ, \bar{i}_T = 5 \angle -90^\circ, \bar{i}_N = 5,55 \angle 124,8^\circ$$

$$(\beta) P_R = 283 \text{ W}, P_s = 200 \text{ W}, P_T = 250 \text{ W}$$

$$(\gamma) P_{R,αερ} = 283 \text{ VAR}, P_{s,αερ} = 0, P_{T,αερ} = -433 \text{ VAR}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

15.1	Εισαγωγή - Ορισμοί.....	1
15.2	Συμπεριφορά των ηλεκτρικών καταναλωτών σε μεταβαλλόμενα ρεύματα	3
15.3	Αρμονικό εναλλασσόμενο ρεύμα.....	3
15.4	Παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος.....	6
15.5	Διαφορά φάσεως	11
15.6	Μέση κι ενεργός τιμή εναλλασσομένων μεγεθών	12
15.7	Διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών	17
15.7.1	Πρόσθεση εναλλασσομένων μεγεθών.....	18
15.8	Ανάλυση κατά Fourier	21
15.8.1	Κανόνες για την ανάλυση κατά Fourier.....	24
15.8.2	Μιγαδική μορφή των σειρών Fourier.....	26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

16.1	Εισαγωγή.....	34
16.2	Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση	35
16.3	Κύκλωμα που συγκροτείται από ιδανικό πηνίο	36
16.3.1	Ισοδύναμο κύκλωμα ενός πραγματικού πηνίου	39
16.4	Κύκλωμα που συγκροτείται από ιδανικό πυκνωτή.....	40
16.5	Κύκλωμα που συγκροτείται από πηνίο και ωμική αντίσταση σε σειρά.....	43
16.6	Κύκλωμα που συγκροτείται από πυκνωτή και ωμική αντίσταση σε σειρά.....	48
16.7	Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική, επαγωγική και χωρητική αντίσταση σε σειρά	51
16.7.1	Συντονισμός σειράς	55
16.7.2	Καμπύλες συντονισμού - Ζώνη διελεύσεως	58
16.7.3	Επιλογή συχνότητας	61
16.8	Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση και πηνίο σε παράλληλη σύνδεση	63
16.9	Κύκλωμα που συγκροτείται από ωμική αντίσταση και πυκνωτή, σε παράλληλη σύνδεση	66
16.10	Κύκλωμα που συγκροτείται από πηνίο και πυκνωτή	68
16.10.1	Παράλληλος συντονισμός (αντισυντονισμός).....	70
16.10.2	Καμπύλες παράλληλου συντονισμού (αντισυντονισμού)- Ζώνη διελεύσεως	72
16.10.3	Επιλογή	74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΙΣΧΥΣ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

17.1	Στιγμιαία ισχύς σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος	80
17.2	Πραγματική, φαινόμενη και άεργη ισχύς- Συντελεστής ισχύος	83
17.2.1	Ισχύς συντονισμένου κυκλώματος	87
17.3	Τρίγωνο ισχύος καταναλωτή	91
17.4	Βελτίωση του συντελεστή ισχύος	92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

18.1	Εισαγωγή	96
18.2	Στοιχεία μιγαδικού λογισμού	96
18.2.1	Μορφές γραφής μιγαδικών αριθμών	98
18.2.2	Πράξεις επί των μιγαδικών αριθμών	101
18.3	Διάτύπωση ημιτονοειδών συναρτήσεων με εκθετικές - Μιγαδική	102
18.4	Σύνθετη μιγαδική αντίσταση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος	107
18.4.1	Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ωμικού καταναλωτή	108
18.4.2	Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πηνίου	108
18.4.3	Σύνθετη μιγαδική αντίσταση ιδανικού πυκνωτή	109
18.4.4	Σύνθετη μιγαδική αντίσταση κυκλώματος που περιέχει ωμικές, επαγωγικές και χωρητικές αντιστάσεις	110
18.5	Νόμοι και θεωρήματα επιλύσεως κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος	111
18.5.1	Νόμος του Ohm	113
18.5.2	Κανόνες του Kirchhoff	117
18.5.3	Θεωρήματα ηλεκτρικών δικτύων Ε.Ρ.	122
18.5.4	Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (θεώρημα προσαρμογής)	126
18.6	Ανάλυση εξειδικευμένων κυκλωμάτων Ε.Ρ. με τη μέθοδο του μιγαδικού λογισμού	131
18.6.1	Συζευγμένα κυκλώματα	131
18.6.2	Συντονισμένα κυκλώματα	135
18.6.3	Πολλαπλός συντονισμός	136

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ

ΤΡΙΦΑΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

19.1	Εισαγωγή-Ορισμοί	143
19.2	Παραγωγή τριφασικού ρεύματος	145
19.3	Σύνδεση των φάσεων σε τριφασικό σύστημα	147
19.3.1	Σύνδεση κατ' αστέρα	149
19.3.2	Σύνδεση κατά τρίγωνο	153

19.4	Σύνδεση των φορτίων σε τριφασικό σύστημα	156
19.5	Ισχύς τριφασικών συστημάτων	162
19.5.1	Ισχύς συμμετρικών τριφασικών συστημάτων	163
19.6	Μετατροπή τριγώνου σε ισοδύναμο αστέρα.....	170

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ

ΟΡΓΑΝΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

20.1	Εισαγωγή	174
20.2	Κατηγορίες ηλεκτρικών οργάνων ανάλογα με την αρχή	176
	λειτουργίας τους.....	176
20.2.1	Όργανα με στρεφόμενο πλαίσιο	176
20.2.2	Όργανα με διασταυρωμένα πηνία	180
20.2.3	Ηλεκτροδυναμόμετρα	181
20.2.4	Όργανα μαλακού σιδήρου	183
20.2.5	Θερμικά όργανα	184
20.3	Αμπερόμετρα - Γαλβανόμετρα.....	186
20.3.1	Επέκταση της περιοχής μετρήσεως αμπερομέτρου.....	187
20.4	Βολτόμετρα	190
20.4.1	Επέκταση της περιοχής μετρήσεως βολτομέτρου	192
20.5	Ωμόμετρα.....	196
20.5.1	Ωμόμετρα με στρεφόμενο πλαίσιο	197
20.5.2	Ωμόμετρα με διασταυρωμένα πηνία - Ωμόμετρο Megger	199
20.6	Πολύμετρα	201
20.7	Βαττόμετρα.....	202
20.8	Μετρητές ηλεκτρικής ενέργειας.....	203
20.8.1	Ηλεκτροδυναμικός η βαττομετρικός μετρητής	204
20.8.2	Επαγωγικός μετρητής	205
20.9	Συχνόμετρα.....	206

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ.....	207
-------------------------------	-----