ΑΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ - ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

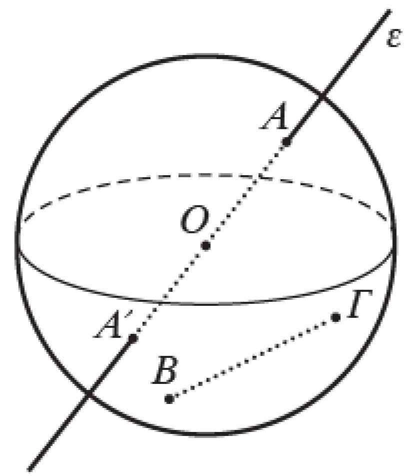
ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Επιμέλεια: Παναγιώτα Λάλου

1. ΣΦΑΙΡΑ

Σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Ο. Το σημείο Ο είναι το κέντρο της σφαίρας και η σταθερή απόσταση R των σημείων από το Ο λέγεται ακτίνα. Η σφαίρα συμβολίζεται (Ο, R)

Τα βασικά χαρακτηριστικά σημεία μιας σφαίρας είναι:



α) Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Ο της σφαίρας τέμνει τη σφαίρα σε 2 **αντιδιαμετρικά σημεία** Α και Α'.

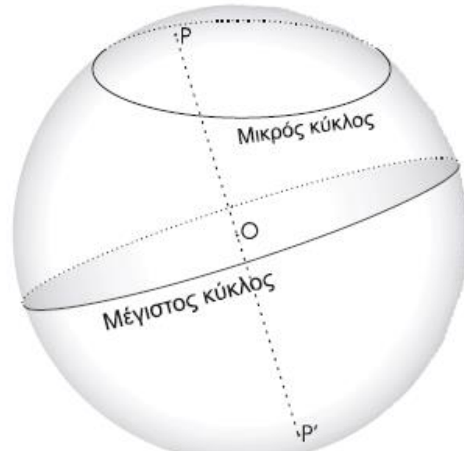
β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ' ονομάζεται **διάμετρος** της σφαίρας και έχει μήκος ίσο με 2R.

γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ που ενώνει 2 σημεία Β και Γ της σφαίρας ονομάζεται χορδή.

Κύκλοι σφαίρας

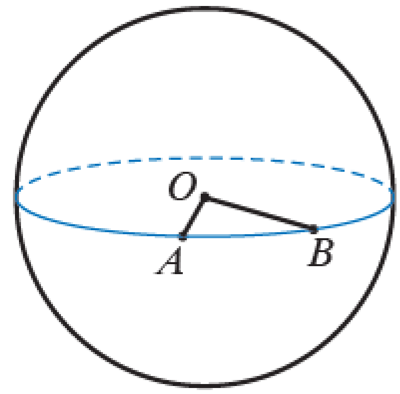
α) **Μέγιστος κύκλος** σφαίρας ονομάζεται ο κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Ο μέγιστος κύκλος έχει κέντρο, το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα, την ακτίνα της σφαίρας.

β) **Μικρός κύκλος** σφαίρας ονομάζεται κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της.



Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι αλλά μόνο ένας μέγιστος, που ορίζει και τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών.

Απόσταση 2 σημείων A και B πάνω στη σφαίρα, ονομάζεται το μικρότερο από τα 2 τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία. Η απόσταση αυτή είναι ίση με την επίκεντρη γωνία AOB.



Άξονας – πόλοι κύκλου

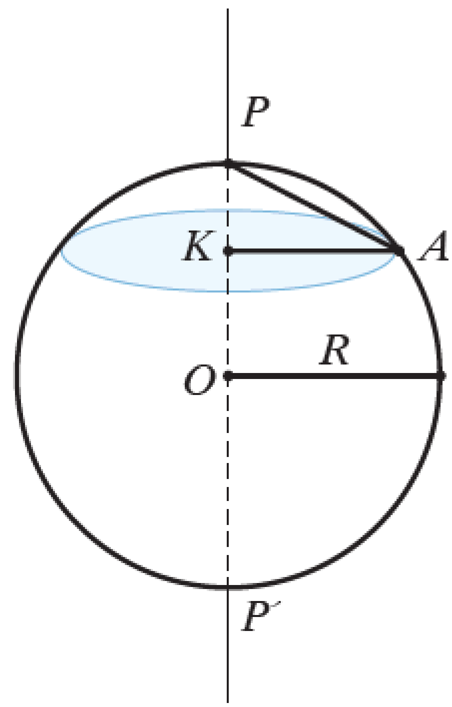
α) Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας ενός κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδο ενός κύκλου ονομάζεται **άξονας** του κύκλου.

β) Τα σημεία που τέμνει ο άξονας την σφαίρα (P και P’) ονομάζονται **πόλοι** του κύκλου.

γ) Ο μέγιστος κύκλος που είναι κάθετος στη διάμετρο PP’, ονομάζεται **ισημερινός κύκλος** του σημείου P.

δ) Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου ονομάζεται **πολική απόσταση** του κύκλου. (στο σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα PA)

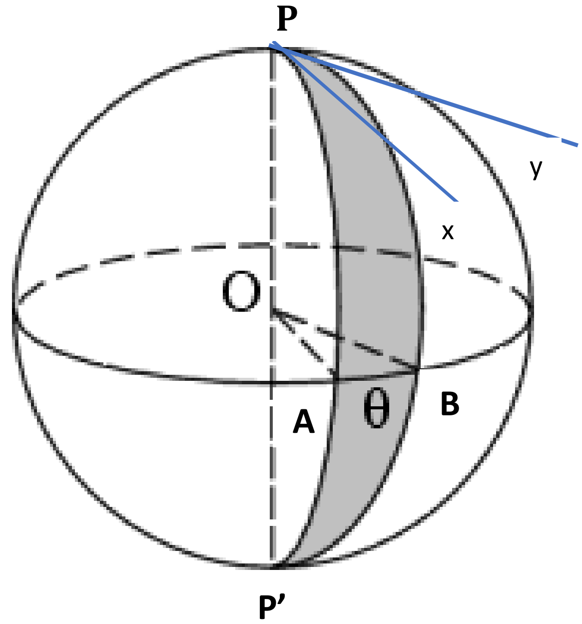
ε) Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται **σφαιρική ακτίνα** του κύκλου. (στο σχήμα το τόξο $\widehat{PA}$)



Σφαιρική γωνία

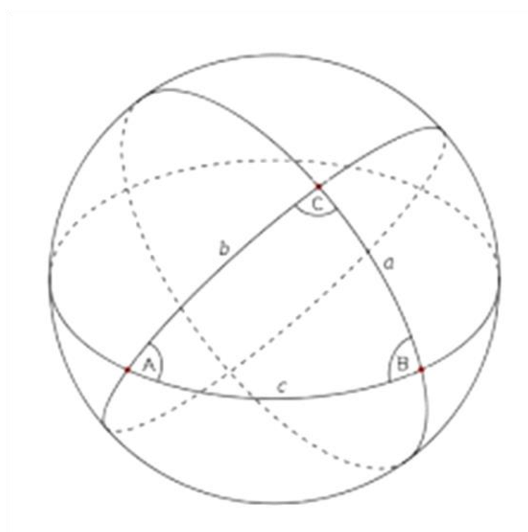
Σφαιρική γωνία ονομάζεται το μέρος της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ δύο τόξων μέγιστων κύκλων, που τέμνονται σε κάποιο σημείο αυτής. Τα τόξα αυτά ονομάζονται πλευρές της γωνίας, και ένα από τα σημεία τομής τους ονομάζεται κορυφή της γωνίας. Η σφαιρική γωνία με κορυφή σημείο P έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\widehat{P}y$ όπου Px , Py οι εφαπτομένες των πλευρών της γωνίας στη κορυφή P. Επίσης είναι ίσο με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου του P που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της. Δηλαδή ισχύει:

$$x\widehat{P}y = \widehat{AB} = \widehat{AOB} = \theta$$

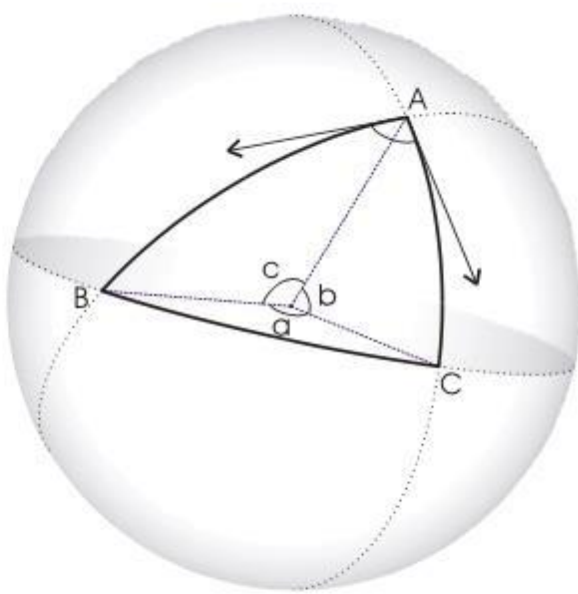


2. ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τόξων 3 μέγιστων κύκλων που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Χαρακτηριστικά σφαιρικού τριγώνου



1) Τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων Α, Β, Γ ονομάζονται κορυφές.

2) Τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ ονομάζονται πλευρές του σφαιρικού τριγώνου. Οι πλευρές συμβολίζονται και με μικρά γράμματα $\boldsymbol{\gamma, \alpha, \beta}$ αντίστοιχα.

3) Κάθε πλευρά είναι τόξο μικρότερο του ημικυκλίου, δηλαδή είναι μικρότερη από 180°. Το μέτρο της πλευράς είναι το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

4) Οι γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο οι 3 μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται *γωνίες του σφαιρικού τριγώνου* και ίδιο μέτρο με τις δίεδρες γωνίες Α, Β, Γ. Ισοδύναμα, οι γωνίες Α, Β και Γ είναι οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε κορυφή του σφαιρικούτριγώνου.

5) Αν *α, β, γ* οι πλευρές σφαιρικού τριγώνουΑΒΓ σε μοίρες, τότε:

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma<360^\circ}$$

6) Αν Α, Β, Γ, οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, σε μοίρες τότε:

$$\boldsymbol{180^\circ < A + B + \Gamma < 540^\circ}$$

7) Απέναντι από ανισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.

8) Κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων

9) Δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι ίσες αν και μόνον αν οι απέναντι προς αυτές τις πλευρές γωνίες είναι ίσες.

Είδη σφαιρικών τριγώνων

Είδη σφαιρικών τριγώνων.

Ορθογώνιο	Αν μια σφαιρική γωνία του είναι ίση με μια ορθή γωνία (90°).
Δισορθογώνιο	Αν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90°.
Τρισορθογώνιο	Αν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90°.
Ισόπλευρο	Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.
Ισοσκελές	Αν δύο πλευρές του είναι ίσες.
Σκαληνό	Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
Ορθόπλευρο	Αν μια πλευρά του έχει μέτρο ίσο με 90°.
Δισορθόπλευρο	Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90°.
Τρισορθόπλευρο	Αν τρεις πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90°.
Τυχόν (ή πλάγιο ή κοινό)	Αν δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90°.

Θεμελειώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα

1. **Νόμος Συνημιτόνων για τις Πλευρές**

$$συν\ α = συν\ β\ \cdot συν\ γ + ημ\ β\ \cdot ημ\ γ\ \cdot συν\ Α$$

$$συν\ β = συν\ α\ \cdot συν\ γ + ημ\ α\ \cdot ημ\ γ\ \cdot συν\ Β$$

$$συν\ γ = συν\ α\ \cdot συν\ β + ημ\ α\ \cdot ημ\ β\ \cdot συν\ Γ$$

2. **Νόμος Συνημιτόνων για τις Γωνίες**

$$\sigma\upsilon\nu\ A = -\sigma\upsilon\nu\ B \cdot \sigma\upsilon\nu\ \Gamma + \eta\mu\ B \cdot \eta\mu\ \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\ \alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\ B = -\sigma\upsilon\nu\ A \cdot \sigma\upsilon\nu\ \Gamma + \eta\mu\ A \cdot \eta\mu\ \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\ \beta$$

$$\sigma\upsilon\nu\ \Gamma = -\sigma\upsilon\nu\ A \cdot \sigma\upsilon\nu\ B + \eta\mu\ A \cdot \eta\mu\ B \cdot \sigma\upsilon\nu\ \gamma$$

3. **Νόμος Ημιτόνων**

$$\frac{\eta\mu\ A}{\eta\mu\ \alpha} = \frac{\eta\mu\ B}{\eta\mu\ \beta} = \frac{\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ \gamma}$$

4. Αναλογικοί τύποι του Napier

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}} = \sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Αν είναι γνωστά **τρία** από τα βασικά στοιχεία ενός τριγώνου μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα. Η διαδικασία αυτή λέγεται επίλυση σφαιρικού τριγώνου.

3.1 Επίλυση ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν δέκα βασικοί τύποι με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, αν γνωρίζουμε δυο στοιχεία του πλήν της ορθής γωνίας, οι οποίοι είναι οι εξής:

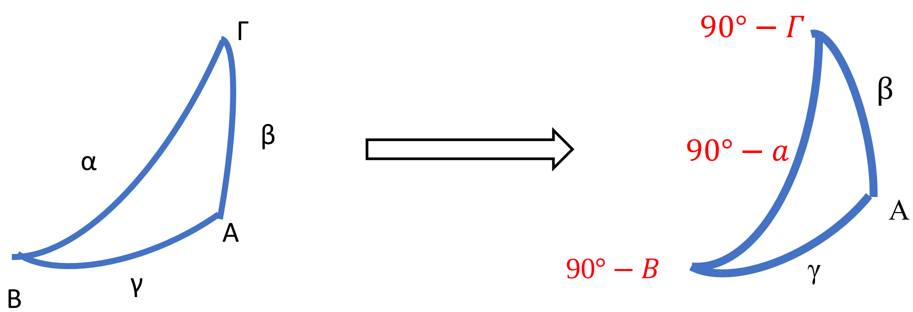
Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ όπου Α=90° ισχύουν:

1. (α) $ημβ = ημα \cdot ημB$
2. (α) $ημγ = ημα \cdot ημΓ$
3. (α) $συνα = συνβ \cdot συνγ$
4. (α) $συνΓ = συνγ \cdot ημB$
5. (α) $συνB = συνβ \cdot ημΓ$

1. (β) $ημβ = εφγ \cdot σφΓ$
2. (β) $ημγ = εφβ \cdot σφB$
3. (β) $συνα = σφB \cdot σφΓ$
4. (β) $συνΓ = εφβ \cdot σφα$
5. (β) $συνB = εφγ \cdot σφα$

ΚΑΝΟΝΕΣ Napier

Ωστόσο, επειδή η απνομνημόνευση των δέκα αυτών τύπων των ορθογώνιων σφαιρικών τριγώνων είναι κάπως δύσκολη, ο Napier επινόησε ενα μνημονικό τέχνασμα με το οποίο μπορούμε να βρίσκουμε οποιονδήποτε απο αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς ο οποίος μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση. Το τέχνασμα αυτό αποτελείται απο δυο κανόνες οι οποίοι ονομάζονται Κανόνες του Napier



Στην παραπάνω διάταξη κάθε στοιχείο έχει δυο προσκείμενα και δυο αντικέιμενα στοιχεία. Για παράδειγμα:

i) για το στοιχείο 90° -Γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90° -α και β και τα αντικείμενα τα 90° -Β και γ

ii) για το στοιχείο γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90° -Β και β και τα αντικείμενα τα 90° -α και 90° -Γ

1[ος] κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκειμένων στοιχείων του.

2[ος] κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικειμένων στοιχείων του.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Για το στοιχείο **β:**

1[ος] Νόμος: $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90° - \Gamma) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$

2[ος] Νόμος: $\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90° - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - B) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Για το στοιχείο $\boldsymbol{90° - B}$ **:**

1[ος] Νόμος: $\eta\mu(90° - B) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90° - \alpha) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$

2[ος] Νόμος: $\eta\mu(90° - B) = \sigma\upsilon\nu(90° - \Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$

Θεωρήματα Τεταρτημορίων

1ο θεώρημα:

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τριγωνο, κάθε γωνία, (εκτός της ορθής) και η απέναντι της πλευρά , ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο. (Δηλ B<90° $\Leftrightarrow \beta < 90°$ και B>90° $\Leftrightarrow \beta > 90°$)

2^o θεώρημα:

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, μια πλευρά που είναι απέναντι από οξεία γωνία είναι μικρότερη ή ίση της γωνίας ενώ μια πλευρά που είναι απέναντι από αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη ή ίση της γωνίας.

3^o θεώρημα:

Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ:

i) Αν η υποτείνουσα α έχει πέρας στο 1^o τεταρτημόριο τότε και οι πλευρές β,γ έχουν πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο (και οι δύο στο 1^o ή και οι δύο στο 2^o) και αντίστροφα.

ii) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο 2^o τεταρτημόριο τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

Παρατηρήσεις:

Σε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο οι γωνίες εκτός της ορθής δεν είναι πάντα οξείες.

Επίσης η υποτείνουσα δεν είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά.

Μεθοδολογία επίλυσης ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου

1^O) Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο κυκλώνοντας τα γνωστά στοιχεία.

2^o) Εφαρμόζουμε τους κανόνες Napier, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να πάρουμε 3 σχέσεις, οι οποίες να έχουν μόνο ένα άγνωστο στοιχείο. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχείο που υπολογίστηκε για τον υπολογισμό άλλου στοιχείου.

3^o) Χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα Τεταρτημορίων.

4ο) Γράφουμε τον τύπο ελέγχου: εφαρμόζουμε τον κανόνα Napier που συνδέει τα τρία άγνωστα στοιχεία.

Χρήσιμοι τύποι από επίπεδη τριγωνομετρία

Παραπληρωματικές γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(180° - \omega) = \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(180° - \omega) = -\sigma\varphi\omega \end{cases}$$

Συμπληρωματικές γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(90° - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(90° - \omega) = \eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(90° - \omega) = \sigma\varphi\omega \\ \sigma\varphi(90° - \omega) = \varepsilon\varphi\omega \end{cases}$$

Αντίθετες γωνίες

$$\begin{cases} \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega \end{cases}$$

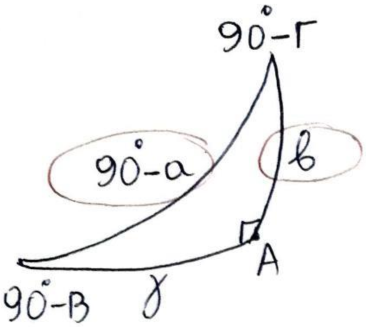
Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°:

Να επιλυθεί το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A=90°$, $α=75°$ και $β=46°$

Λύση



Για τη γωνία Γ:

$ημ(90°-Γ) = εφ(90°-α) \cdot εφβ \Leftrightarrow$

$συνΓ = σφα \cdot εφβ \Leftrightarrow$

$συνΓ = \dfrac{εφβ}{εφα} \Leftrightarrow συνΓ = \dfrac{εφ46°}{εφ75°} \Leftrightarrow$

$συνΓ = 0{,}278$ άρα $Γ = συν^{-1}0{,}278 = 73{,}859°$

Για τη γωνία Β: $ημβ = συν(90°-α) \cdot συν(90°-B) \Leftrightarrow$

$ημβ = ημα \cdot ημB \Leftrightarrow$

$ημ46° = ημ75° \cdot ημB \Leftrightarrow$

$0{,}719 = 0{,}966 \cdot ημB \Leftrightarrow$

$ημB = \dfrac{0{,}719}{0{,}966} = 0{,}744$

Άρα $B = ημ^{-1}0{,}744 = 48{,}073$ ή $B = 180° - 48{,}073°$ απορρίπτεται διότι $β < 90°$

Για τη πλευρά γ: $ημ(90°-α) = συνβ \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$συνα = συνβ \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$συν75° = συν46° \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$0{,}259 = 0{,}695 \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$συνγ = \dfrac{0{,}259}{0{,}695} = 0{,}373$

Άρα $γ = συν^{-1}0{,}373 = 68{,}099°$

Τύπος ελέγχου: $ημ(90°-Γ) = συν(90°-B) \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$συνΓ = ημB \cdot συνγ \Leftrightarrow$

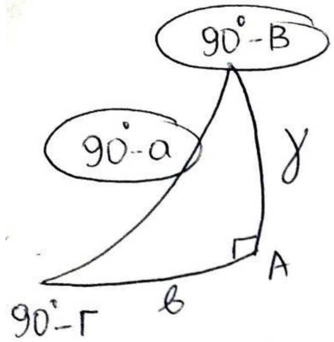
$συν73{,}859 = ημ48{,}073 \cdot συν68{,}099 \Leftrightarrow$

$0{,}278 = 0{,}744 \cdot 0{,}373$

που ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με
$A=90^\circ$, $\alpha=62^\circ$, $B=125^\circ$



Λύση

Για τη γ: $\eta\mu(90^\circ-B)=\varepsilon\varphi(90^\circ-\alpha)\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu B=\sigma\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 125^\circ=\dfrac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi 62^\circ} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\gamma=\sigma\upsilon\nu 125^\circ\cdot\varepsilon\varphi 62^\circ \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\gamma=(-0,573)\cdot 1,881$

$\varepsilon\varphi\gamma=-1,078$

$\varepsilon\varphi^{-1}(1,078)=47,15^\circ$ Άρα $\gamma=180^\circ-47,15^\circ=132,85^\circ$

Για τη πλευρα β: $\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^\circ-B) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu B \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta=\eta\mu 62^\circ\cdot\eta\mu 125^\circ \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta=0,883\cdot 0,819 \Leftrightarrow \eta\mu\beta=0,723$

$\beta=\eta\mu^{-1}0,723=46,303^\circ$ ή $\beta=180^\circ-46,303^\circ=133,69^\circ$

Απορρίπτεται διότι $B>90^\circ$

Για τη γωνια Γ: $\eta\mu(90^\circ-\alpha)=\varepsilon\varphi(90^\circ-\Gamma)\cdot\varepsilon\varphi(90^\circ-B) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon\varphi B} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\varepsilon\varphi\Gamma\cdot\varepsilon\varphi B=1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\varepsilon\varphi B} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1}{0,469\cdot(-1,428)}=-1,493$

$\varepsilon\varphi^{-1}1,493=56,186^\circ$ Άρα $\Gamma=180^\circ-56,186^\circ=123,814^\circ$

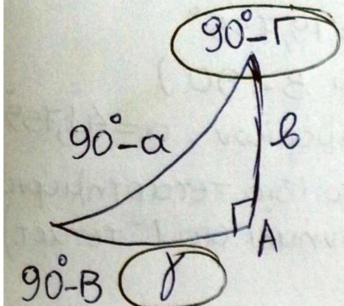
Τυπος Ελέγχου: $\eta\mu\beta=\varepsilon\varphi(90^\circ-\Gamma)\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$\eta\mu\beta=\dfrac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow 0,723=\dfrac{-1,078}{-1,493}$

Που ισχυει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3°:

Να επιλυθεί το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με:
$A=90^\circ$, $\gamma=40^\circ$, $\Gamma=75^\circ$



Λύση:

Για τη πλευρά β:

$$\eta\mu\beta=\varepsilon\varphi(90^\circ-\Gamma)\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\beta=\sigma\varphi\Gamma\cdot\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\beta=\frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\beta=\frac{\varepsilon\varphi 40^\circ}{\varepsilon\varphi 75^\circ} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\beta=\frac{0{,}839}{3{,}732}=0{,}225$$

Άρα $\beta=\eta\mu^{-1}0{,}225=13{,}003^\circ$ ή $\beta=180^\circ-13{,}003^\circ=166{,}997^\circ$
(Δεν μπορώ ν' απορρίψω καμία περίπτωση βάση των Θεωρ. Τεταρτημορίων)

Για τη γωνία Β:

$$\eta\mu(90^\circ-\Gamma)=\sigma\upsilon\nu(90^\circ-B)\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu 75^\circ=\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu 40^\circ \Leftrightarrow$$
$$0{,}259=\eta\mu B\cdot 0{,}766 \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu B=\frac{0{,}259}{0{,}766}=0{,}338$$

Άρα $B=19{,}755^\circ$ ή $B=180^\circ-19{,}755^\circ=160{,}245^\circ$
(Δεν μπορώ ν' απορρίψω καμία περίπτωση)

Για τη πλευρά α:

$$\eta\mu\gamma=\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\Gamma) \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\gamma=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 40^\circ=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu 75^\circ \Leftrightarrow$$
$$0{,}643=\eta\mu\alpha\cdot 0{,}966 \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\alpha=\frac{0{,}643}{0{,}966}=0{,}666$$

Άρα $\alpha=41{,}759^\circ$ ή $\alpha=180^\circ-41{,}759^\circ=138{,}241^\circ$

Περιπτώσεις:

- **1η περίπτωση:** Αν $b = 13{,}003^\circ$ τότε από 1ο Θεωρ. Τεταρτημορίων θα είναι $B = 19{,}755^\circ$ (διότι $b < 90^\circ$ άρα και $B < 90^\circ$) και από 3ο Θεωρ. Τεταρτημορίων: $\alpha = 41{,}759^\circ$ (διότι οι b, γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο οπότε η πλευρά α, θα ανήκει στο 1ο τεταρτ.)

Άρα: 1η ΛΥΣΗ: $b = 13{,}003^\circ$, $B = 19{,}755^\circ$, $\alpha = 41{,}759^\circ$

- **2η περίπτωση:** Αν $b = 166{,}997^\circ$ τότε από 1ο Θεωρ. Τεταρτημορ. θα είναι $B = 160{,}245^\circ$ και από 3ο Θεωρ. Τεταρτημορίων θα είναι $\alpha = 138{,}241^\circ$ (διότι οι πλευρές b, γ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια, οπότε η υποτείνουσα θα ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο)

Άρα: 2η ΛΥΣΗ: $b = 166{,}997^\circ$, $B = 160{,}245^\circ$, $\alpha = 138{,}241^\circ$

Τύπος ελέγχου: $\eta\mu b = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - B) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha)$

$\eta\mu b = \eta\mu B \cdot \eta\mu\alpha$

1η λύση: $\eta\mu 13{,}003^\circ = \eta\mu 19{,}755^\circ \cdot \eta\mu 41{,}759^\circ \Leftrightarrow$

$0{,}225 = 0{,}338 \cdot 0{,}666$ (που ισχύει)

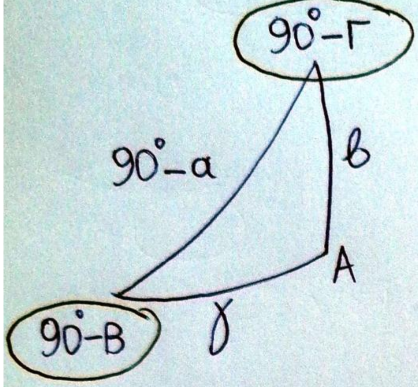
2η λύση: $\eta\mu 166{,}997^\circ = \eta\mu 160{,}245^\circ \cdot \eta\mu 138{,}241^\circ$

$0{,}225 = 0{,}338 \cdot 0{,}666$ που ισχύει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4°

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με:

$A=90^\circ$, $B=50^\circ$ και $\Gamma=150^\circ$



Λύση:

Για τη πλευρά α:

$$\eta\mu(90^\circ-\alpha)=\varepsilon\varphi(90^\circ-B)\cdot\varepsilon\varphi(90^\circ-\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{\varepsilon\varphi B}\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{\varepsilon\varphi 50^\circ\cdot\varepsilon\varphi 150^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{1{,}192\cdot(-0{,}577)} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{-0{,}688}=-1{,}453$$ Αδύνατο

διότι $-1\leq\sigma\upsilon\nu\alpha\leq 1$

Άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με

$A=90^\circ$ $B=50^\circ$, $\Gamma=150^\circ$

3.2 Επίλυση τυχαίου σφαιρικού τριγώνου

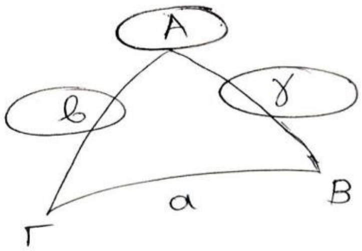
1η περίπτωση: ***Αν δίνονται 2 πλευρές και η περιεχόμενη γωνία, π.χ:*** ***β, γ, Α***

Τότε: ***α) Νόμος Συνημιτόνων για τη πλευρά α***

Β) Νόμος Συνημιτόνων για τις γωνίες Β, Γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A=50^\circ$, $\beta=65^\circ$, $\gamma=72^\circ$



Λύση

Πλευρά α:

Απο Ν. Συνημιτόνων για πλευρές:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 65^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 72^\circ + \eta\mu 65^\circ\cdot\eta\mu 72^\circ\,\sigma\upsilon\nu 50^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0{,}423\cdot 0{,}309 + 0{,}906\cdot 0{,}951\cdot 0{,}643$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0{,}685$$

$$\alpha = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}685 = 46{,}764^\circ$$

Γωνιά Β: Εφαρμόζω Ν. Συνημιτόνων για πλευρές, για τη β:

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\sigma\upsilon\nu 65^\circ - \sigma\upsilon\nu 46{,}764^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 72^\circ}{\eta\mu 46{,}764^\circ\cdot\eta\mu 72^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{0{,}423 - 0{,}685\cdot 0{,}309}{0{,}729\cdot 0{,}951} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \frac{0{,}211}{0{,}693} = 0{,}304$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}304 = 72{,}302^\circ$$

Για τη Γ: Ομοίως, απο Ν. Συνημιτόνων για τη πλευρά γ:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 72^\circ - \sigma\upsilon\nu 46{,}764^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 65^\circ}{\eta\mu 46{,}764^\circ\cdot\eta\mu 65^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{0{,}309 - 0{,}685\cdot 0{,}423}{0{,}729\cdot 0{,}906} = \frac{0{,}019}{0{,}66} = 0{,}029$$

Άρα $\Gamma = 88{,}338^\circ$

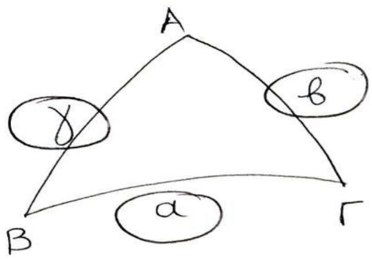
$2^η$ περίπτωση: ***Αν δίνονται οι 3 πλευρές του, π.χ: α, β, γ***

Τότε: Νόμος Συνημιτόνων για πλευρές.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>:

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $α=110^\circ$, $β=76^\circ$, $γ=70^\circ$

<u>Λύση</u>:



Για τη <u>γωνιά Α</u>:

Απο Ν. Συνημιτόνων για πλευρές:

$$συνα = συνβ \cdot συνγ + ημβ \cdot ημγ \cdot συνΑ \Leftrightarrow$$

$$συνα - συνβ \cdot συνγ = ημβ \cdot ημγ \cdot συνΑ \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{συνα - συνβ \cdot συνγ}{ημβ \cdot ημγ} \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{συν110^\circ - συν76^\circ \cdot συν70^\circ}{ημ76^\circ \cdot ημ70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{-0{,}342 - 0{,}242 \cdot 0{,}342}{0{,}97 \cdot 0{,}94} \Leftrightarrow$$

$$συνΑ = \frac{-0{,}425}{0{,}912} = -0{,}466$$

$συν^{-1} 0{,}466 = 62{,}225$ αρα $Α = 180^\circ - 62{,}225^\circ = 117{,}775^\circ$

Για τη <u>γωνιά Β</u>, απο Ν. Συνημιτόνων: (ομοιως)

$$συνΒ = \frac{συνβ - συνα \cdot συνγ}{ημα \cdot ημγ} \Leftrightarrow$$

$$συνΒ = \frac{συν76^\circ - συν110^\circ \cdot συν70^\circ}{ημ110^\circ \cdot ημ70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$συνΒ = \frac{0{,}242 - (-0{,}342) \cdot 0{,}342}{0{,}94 \cdot 0{,}94}$$

$$συνΒ = \frac{0{,}359}{0{,}884} = 0{,}406$$ αρα $Β = συν^{-1} 0{,}406 = 66{,}05^\circ$

Για τη <u>γωνιά Γ</u>: $συνΓ = \frac{συνγ - συνα \cdot συνβ}{ημα \cdot ημβ} \Leftrightarrow$

$$συνΓ = \frac{συν70^\circ - συν110^\circ \cdot συν76^\circ}{ημ110^\circ \cdot ημ76^\circ} \Leftrightarrow$$

$$συνΓ = \frac{0{,}342 - (-0{,}342) \cdot 0{,}242}{0{,}94 \cdot 0{,}97} = 0{,}466 \rightarrow Γ = 62{,}225^\circ$$

3η περίπτωση: ***Αν δίνονται οι 3 γωνίες του, π.χ: Α, Β, Γ***

Τότε: Νόμος Συνημιτόνων για γωνίες.

Παραδ: Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγ. ΑΒΓ, όταν δίνονται οι γωνίες του: $A=106°$ $B=79°$, $Γ=62°$.

Λύση

$συνA = -συνB\,συνΓ + ημB \cdot ημΓ \cdot συνα \Leftrightarrow$

$$συνα = \frac{συνA + συνB \cdot συνΓ}{ημB \cdot ημΓ} \Leftrightarrow$$

$$συνα = \frac{συν106° + συν79° \cdot συν62°}{ημ79° \cdot ημ62°} \Leftrightarrow$$

$$συνα = \frac{-0,276 + 0,191 \cdot 0,469}{0,982 \cdot 0,883} \Leftrightarrow συνα = \frac{-0,186}{0,867}$$

$\Leftrightarrow συνα = -0,215$

Άρα $α = 180° - 77,584° \Leftrightarrow α = 102,416°$

$$συνβ = \frac{συνB + συνΓ \cdot συνA}{ημΓ \cdot ημA} \Leftrightarrow συνβ = \frac{συν79° + συν62° \cdot συν106°}{ημ62° \cdot ημ106°}$$

$$\Leftrightarrow συνβ = \frac{0,191 + 0,469 \cdot (-0,276)}{0,883 \cdot 0,961} \Leftrightarrow συνβ = \frac{0,062}{0,849} = 0,073$$

Άρα: $β = 85,814°$

$$συνγ = \frac{συνΓ + συνA \cdot συνB}{ημA \cdot ημB} \Leftrightarrow συνγ = \frac{συν62° + συν106° \cdot συν79°}{ημ106° \cdot ημ79°}$$

$$συνγ = \frac{0,469 + (-0,276) \cdot 0,191}{0,883 \cdot 0,982} \Leftrightarrow συνγ = \frac{0,416}{0,867} = 0,48$$

Άρα $γ = 61,315°$.

4^{η} περίπτωση:

Αν δίνονται μία πλευρά και οι 2 προσκείμενες γωνίες του, π.χ: α, Β, Γ

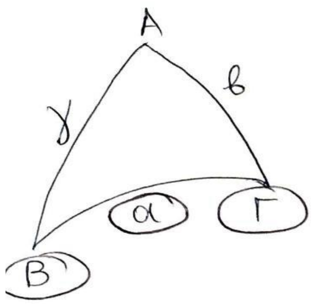
Τότε: ***α) Νόμος Συνημιτόνων για γωνίες για να βρώ την απέναντι γωνία Α***

β) Νόμος Συνημιτόνων για γωνίες για να βρω τις β, γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $α=71,94^\circ$, $Β=24,7^\circ$ και $Γ=50,44^\circ$

Λύση



Για τη γωνία Α:

Απο Ν. Συνημιτόνων για γωνίες:

$συνΑ = -συνΒ \cdot συνΓ + ημΒ \cdot ημΓ \cdot συνα \Leftrightarrow$

$συνΑ = -συν24,7 \cdot συν50,44^\circ + ημ24,7 \cdot ημ50,44 \cdot συν71,94^\circ$

$συνΑ = -0,909 \cdot 0,637 + 0,418 \cdot 0,771 \cdot 0,31 \Leftrightarrow$

$συνΑ = -0,479$

$συν^{-1}0,479 = 61,38^\circ$ Άρα $Α = 180^\circ - 61,38^\circ = 118,62^\circ$

Πλευρά β:

$συνΒ = -συνΑ \cdot συνΓ + ημΑ \cdot ημΓ \cdot συνβ \Leftrightarrow$

$$συνβ = \frac{συνΒ + συνΑ \cdot συνΓ}{ημΑ \cdot ημΓ} \Leftrightarrow$$

$$συνβ = \frac{0,909 + 0,637 \cdot (-0,479)}{0,878 \cdot 0,771} = \frac{0,604}{0,677} = 0,892$$

$β = συν^{-1}0,892 = 26,87^\circ$

Πλευρά γ:

$συνΓ = -συνΑ \cdot συνΒ + ημΑ \cdot ημΒ \cdot συνγ \Leftrightarrow$

$$συνγ = \frac{συνΓ + συνΑ \cdot συνΒ}{ημΑ \cdot ημΒ} \Leftrightarrow$$

$$συνγ = \frac{0,637 + (-0,479) \cdot 0,909}{0,878 \cdot 0,418} = \frac{0,202}{0,367} = 0,55$$

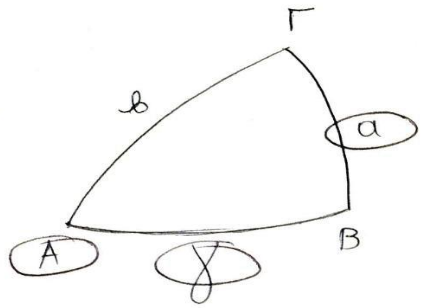
$γ = συν^{-1}0,55 = 56,633^\circ$

5η περίπτωση: ***Αν δίνονται 2 πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες, : α, γ, Α***

Τότε: ***α) Νόμος Ημιτόνων για γωνίες για τη γωνία Γ***
β) Αναλογικοί τύποι Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A=30^\circ$, $\alpha=40^\circ$ κ' $\gamma=100^\circ$



Λύση

Νόμος Ημιτόνων:

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 40^\circ} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu 100^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{0{,}5}{0{,}643} = \frac{\eta\mu \Gamma}{0{,}985} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \Gamma = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}985}{0{,}643} = 0{,}766$$

Άρα $\Gamma = \eta\mu^{-1} 0{,}766 \simeq 50^\circ$ ή $\Gamma \simeq 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

Επειδή $\gamma > \alpha$ θα πρέπει να είναι και $\Gamma > A$. που ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις. Άρα δεκτές και οι δύο.

Αναλογικοί Τύποι Napier:

• 1η περίπτωση: $\Gamma = 50^\circ$

$$\varepsilon\varphi\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi\frac{40^\circ+100^\circ}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{30^\circ+50^\circ}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{30^\circ-50^\circ}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-10^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{b}{2} = 2{,}747 \cdot \frac{0{,}766}{0{,}985} = 2{,}136$$

Άρα $\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi^{-1} 2{,}136 \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 64{,}913 \Leftrightarrow b = 129{,}826^\circ$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sigma\varphi\frac{A+\Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sigma\varphi\frac{30^\circ+50^\circ}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{40^\circ-100^\circ}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{40^\circ+100^\circ}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sigma\varphi 40^\circ\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(-30^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 40^\circ}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{0{,}866}{0{,}839\cdot 0{,}342} = 3{,}017$$

Άρα $\frac{B}{2} = \varepsilon\varphi^{-1}3{,}017 = 71{,}662^\circ \Leftrightarrow B = 143{,}324^\circ$

- 2^{η} περίπτωση: $\underline{\underline{\Gamma = 130^\circ}}$ $\quad \varepsilon\varphi\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi 70^\circ\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 80^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-50^\circ)} = \ldots = 0{,}743$$

$$\frac{b}{2} = \varepsilon\varphi^{-1}0{,}743 = 36{,}612^\circ \Rightarrow b = 73{,}224^\circ$$

κ

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sigma\varphi\frac{A+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 80^\circ}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(-30^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{0{,}866}{0{,}671\cdot 0{,}342} = 3{,}782$$

$$\frac{B}{2} = \varepsilon\varphi^{-1}3{,}782 = 75{,}189^\circ \Leftrightarrow B = 150{,}378^\circ$$

Άρα 2 ΛΥΣΕΙΣ: α) $\Gamma = 50^\circ$, $b = 129{,}826^\circ$, $B = 143{,}324^\circ$

β) $\Gamma = 130^\circ$, $b = 73{,}224^\circ$, $B = 150{,}378^\circ$

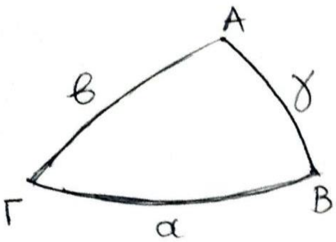
$6^η$ περίπτωση:

Αν δίνονται 2 γωνίες και μία από τις απέναντι πλευρά, π.χ: α, Α, Γ

Τότε: ***α) Νόμος Ημιτόνων για γωνίες για τη πλευρά γ***
β) Αναλογικοί τύποι Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A=86°$, $α=24°$ και $Γ=14°$



Λύση:

Απο Νόμο Ημιτόνων:

$$\frac{ημA}{ημα}=\frac{ημΓ}{ημγ} \Leftrightarrow \frac{ημ86°}{ημ24°}=\frac{ημ14°}{ημγ} \Leftrightarrow \frac{0{,}998}{0{,}407}=\frac{0{,}242}{ημγ}$$

$$\Leftrightarrow ημγ=0{,}097$$

Άρα $γ=ημ^{-1}0{,}097=5{,}567°$ ή $γ=180°-5{,}567°=174{,}433°$

↳ Απορρίπτεται διότι $Γ<A$ άρα και $γ<α$

Αναλογικοί τύποι Napier:

$$εφ\frac{β}{2}=εφ\frac{α+γ}{2}\cdot\frac{συν\frac{A+Γ}{2}}{συν\frac{A-Γ}{2}} \Longleftrightarrow εφ\frac{β}{2}=εφ\frac{24°+5{,}567°}{2}\cdot\frac{συν\frac{86°+14°}{2}}{συν\frac{86°-14°}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$εφ\frac{β}{2}=εφ14{,}784\cdot\frac{συν50°}{συν36°} \Longleftrightarrow εφ\frac{β}{2}=0{,}264\cdot\frac{0{,}643}{0{,}809}=0{,}21$$

Άρα $\frac{β}{2}=εφ^{-1}0{,}21 \Leftrightarrow \frac{β}{2}=11{,}86° \Longleftrightarrow β=23{,}72°$

$$εφ\frac{B}{2}=σφ\frac{A+Γ}{2}\cdot\frac{συν\frac{α-γ}{2}}{συν\frac{α+γ}{2}} \Longleftrightarrow εφ\frac{B}{2}=σφ50°\cdot\frac{συν9{,}217}{συν14{,}784°} \Leftrightarrow$$

$$εφ\frac{B}{2}=\frac{1}{εφ50}\cdot\frac{0{,}987}{0{,}967} \Leftrightarrow εφ\frac{B}{2}=\frac{1}{1{,}192}\cdot1{,}021 \Leftrightarrow εφ\frac{B}{2}=0{,}857$$

Άρα $\frac{B}{2}=εφ^{-1}0{,}857 \Leftrightarrow \frac{B}{2}=40{,}597° \Leftrightarrow B=81{,}194°$

4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

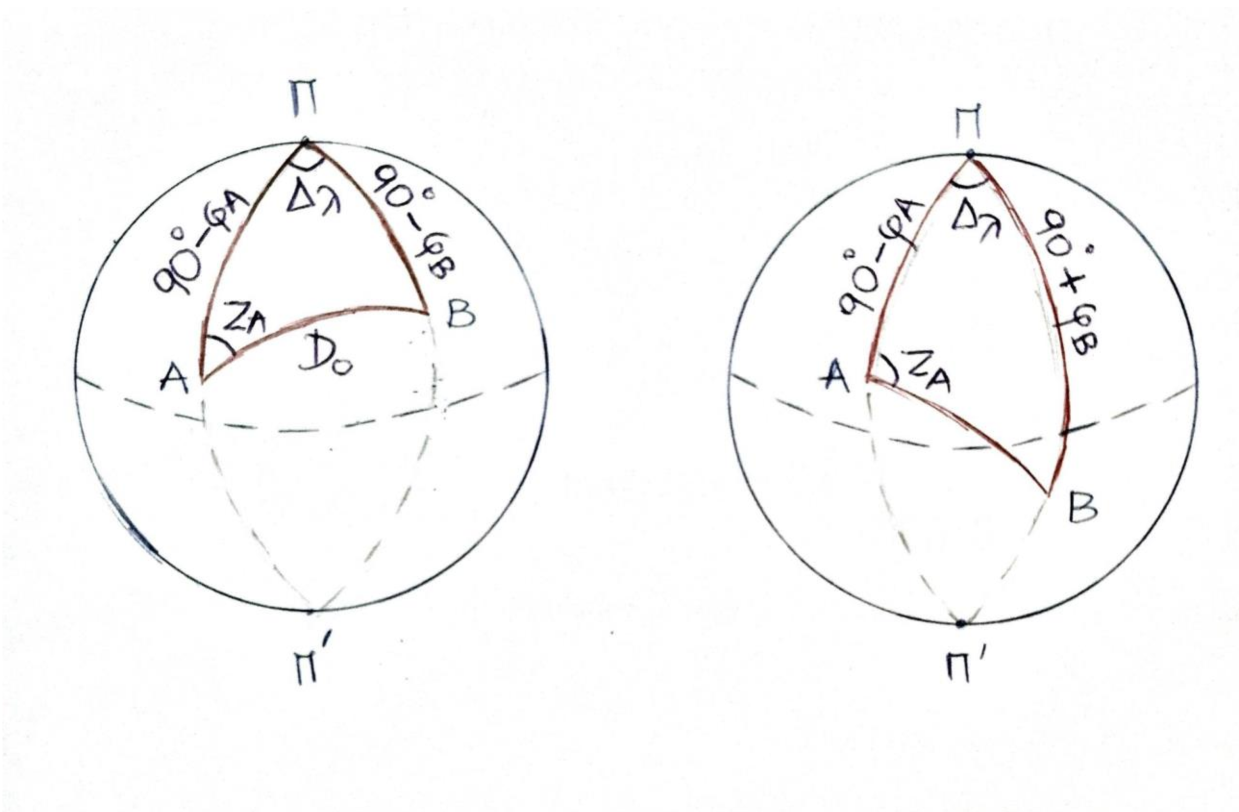
4.1 Ορθοδρομία

Το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει 2 τόπους ονομάζεται **ορθοδρομία ή ορθοδρομικό τόξο.**

Ανάμεσα σε 2 τόπους υπάρχουν άπειρα τόξα που τους συνδέουν. Το μικρότερο τόξο που τους ενώνει είναι το ορθοδρομικό τόξο.

Στον ορθοδρομικό πλου η πορεία του πλοίου μεταβάλλεται συνεχώς.

Ο υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου γίνεται με την επίλυση του παρακάτω σφαιρικού τριγώνου ΑΠΒ το οποίο ονομάζεται **τρίγωνο ορθοδρομίας.**



A: Σημείο αναχώρησης Α(φ_A , λ_A)

B: Σημείο προορισμού Β(φ_B , λ_B)

Π: Ο πλησιέστερος πόλος στο σημείο αναχώρησης

Πλευρά ΠΑ: $\boxed{\boldsymbol{ΠΑ=90^\circ - \varphi_A}}$

Πλευρά ΠΒ: $\boxed{\boldsymbol{ΠΒ = \begin{cases} 90^\circ - \varphi_B, \ αν\ \varphi_A , \varphi_B\ ομώνυμα \\ 90^\circ + \varphi_B, \ αν\ \varphi_A , \varphi_B\ ετερώνυμα \end{cases}}}$

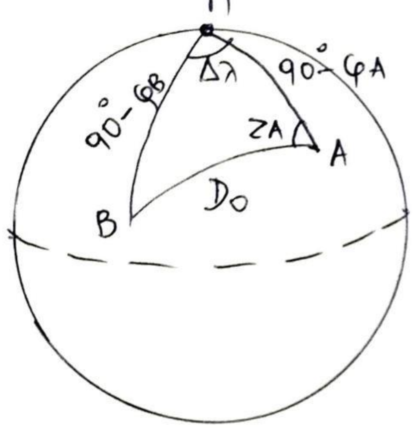
Γωνία ΑΠΒ ή Δλ: $\boxed{\boldsymbol{Δλ = \begin{cases} |\lambda_A - \lambda_B|, \ αν\ \lambda_A , \lambda_B\ ομώνυμα \\ \lambda_A + \lambda_B, \ αν\ \lambda_A , \lambda_B\ ετερώνυμα \end{cases}}}$

Πλευρά $AB = D_O$: Η απόσταση του ορθοδρομικού πλού σε ν.μ

Γωνία $A = Z_A$: Η αρχική ορθοδρομική πορεία.

ΑΣΚ: Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο Α με $A(\varphi_A = 53°N, \lambda_A = 173°E)$ έως ένα σημείο Β με $B(\varphi_B = 4°51'N, \lambda_B = 127°24'E)$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πορεία του.

Λύση



$$ΠA = 90° - \varphi_A = 90° - 53° = 37°$$

$$ΠB = 90° - \varphi_B = 90° - 4°51' = 85,15°$$

$$Δλ = |\lambda_A - \lambda_B| = 173° - 127°24' = $$
$$= 173° - 127,4° = 45,6°$$

Εφαρμόζω Ν. Συνημιτόνων για πλευρές στο ΒΠΑ:

$$συν D_o = συν ΠA \cdot συν ΠB + ημ ΠA \cdot ημ ΠB \cdot συν Δλ \Leftrightarrow$$

$$συν D_o = συν 37° \cdot συν 85,15° + ημ 37° \cdot ημ 85,15° \cdot συν 45,6° \Leftrightarrow$$

$$συν D_o = 0,799 \cdot 0,085 + 0,602 \cdot 0,996 \cdot 0,7$$

$$συν D_o = 0,488$$

Άρα $D_o = \cos^{-1} 0,488 = 60,791° = (60,791 \cdot 60)' = 3.647,46'$

ή $D_o = 3.647,46$ ν.μ

$$συν ΠB = συν ΠA \cdot συν D_o + ημ ΠA \cdot ημ D_o \cdot συν Z_A \Leftrightarrow$$

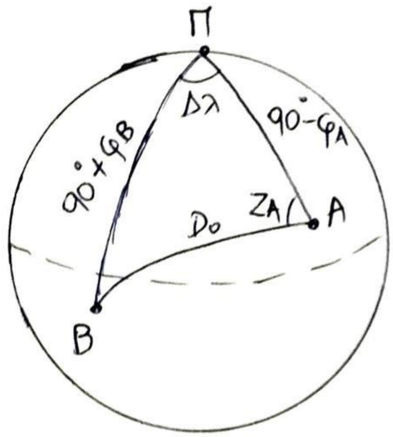
$$συν Z_A = \frac{συν ΠB - συν ΠA \cdot συν D_o}{ημ ΠA \cdot ημ D_o} \Leftrightarrow$$

$$συν Z_A = \frac{0,085 - 0,799 \cdot 0,488}{0,602 \cdot 0,873} \Leftrightarrow συν Z_A = -0,58$$

Άρα $\cos^{-1} 0,58 = 54,55°$ Άρα $Z_A = 180° - 54,55° = 125,45°$

ΑΣΚ: Δίνονται οι συντεταγμένες λιμανιού εκκίνησης ενός πλοίου ($\varphi_A = 08°14'N$, $\lambda_A = 98°40'E$) και του λιμανιού άφιξης ($\varphi_B = 7°27'S$, $\lambda_B = 68°30'E$). Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση $D_o = \widehat{AB}$ και η αρχική πορεία.

Λύση:



$$A\Pi = 90° - \varphi_A = 90° - 8°14' = 90° - 8{,}233 = 81{,}767°$$

$$\Pi B = 90° + \varphi_B = 90° + 7°27' = 90° + 7{,}45 = 97{,}45°$$

$$\Delta_\lambda = A\Pi B = |\lambda_A - \lambda_B| = 98°40' - 68°30' =$$
$$= 98{,}667 - 68{,}5 = 30{,}167°$$

$$\sigma\upsilon\nu D_o = \sigma\upsilon\nu(A\Pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(B\Pi) + \eta\mu(A\Pi) \cdot \eta\mu(B\Pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\lambda \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu D_o = \sigma\upsilon\nu 81{,}767° \cdot \sigma\upsilon\nu 97{,}45° + \eta\mu 81{,}767° \cdot \eta\mu 97{,}45° \cdot \sigma\upsilon\nu 30{,}167° \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu D_o = 0{,}143 \cdot (-0{,}13) + 0{,}99 \cdot 0{,}992 \cdot 0{,}865$$

$$\sigma\upsilon\nu D_o = 0{,}8304$$

Άρα $D_o = \cos^{-1} 0{,}8304 = 33{,}86°$

$D_o = (33{,}86 \cdot 60)' = 2031{,}6'$ ή $\boxed{D_o = 2031{,}6 \text{ ν.μ}}$

$$\sigma\upsilon\nu \Pi B = \sigma\upsilon\nu D_o \cdot \sigma\upsilon\nu \Pi A + \eta\mu D_o \cdot \eta\mu \Pi A \cdot \sigma\upsilon\nu Z_A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_A = \frac{\sigma\upsilon\nu \Pi B - \sigma\upsilon\nu D_o \cdot \sigma\upsilon\nu \Pi A}{\eta\mu D_o \cdot \eta\mu \Pi A} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_A = \frac{-0{,}13 - 0{,}8304 \cdot 0{,}143}{0{,}557 \cdot 0{,}99} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu Z_A = \frac{-0{,}249}{0{,}551} = -0{,}452 \implies \sigma\upsilon\nu^{-1} 0{,}452 = 63{,}128°$$

Άρα $Z_A = 180° - 63{,}128° = 116{,}872°$

4.2 Πλους επί παραλλήλου

Όταν το πλοίο πλέει επάνω στον ίδιο παράλληλο, από έναν τόπο Α έως έναν τόπο Β, οι 2 τόποι έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος (του παραλλήλου) και διαφορετικά μήκη λ_1 , λ_2, και η πορεία του πλοίου είναι σταθερή ή προς Ανατολή ή προς Δύση.

Έστω ***u* η απόσταση** η απόσταση (ΑΒ) που διανύει το πλοίο σε ν.μ.

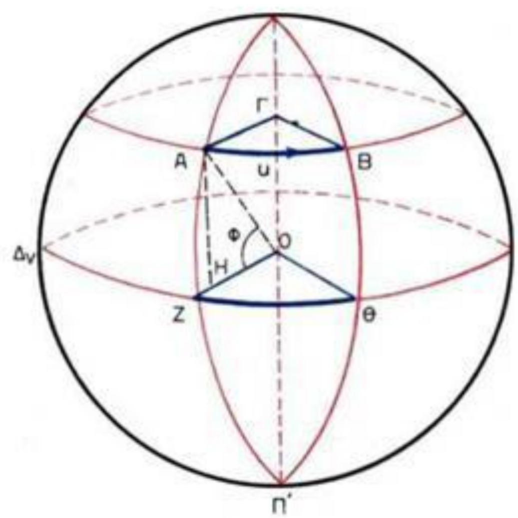
Φέρνω $AH \perp OZ$.

Ισχύει $Z\hat{O}A = \varphi$

(ίση με το γ. π. των Α και Β)

Επειδή $Z\hat{O}\Theta = A\hat{\Gamma}B$ τα τόξα ΖΘ και ΑΒ είναι ανάλογα με τις ακτίνες τους. Άρα:

$$\frac{\widehat{Z\Theta}}{\widehat{AB}} = \frac{OZ}{A\Gamma} = \frac{AO}{OH} = \tau\varepsilon\mu\varphi$$



(Ισχύει $\frac{AO}{OH} = \tau\varepsilon\mu\varphi$ από το ορθογώνιο τριγωνο ΑΗΟ)

Άρα έχουμε καταλήξει:

$$\frac{\widehat{Z\Theta}}{\widehat{AB}} = \tau\varepsilon\mu\varphi \iff \widehat{Z\Theta} = \widehat{AB}\cdot\tau\varepsilon\mu\varphi \iff \boldsymbol{\Delta\lambda = u\cdot\tau\varepsilon\mu\varphi} \iff \Delta\lambda = u\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \iff \boldsymbol{u = \Delta\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\boldsymbol{u = \Delta\lambda\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

Το μήκος τόξου ενός παραλλήλου ισούται με το γινόμενο του αντίστοιχου τόξου του ισημερινού (Δλ) επί το συνημίτονο του γεωγραφικού πλάτους του παραλλήλου

ή

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\lambda = u\cdot\tau\varepsilon\mu\varphi}}$$

Η Διαφορά Μήκους (σε πρώτα λεπτά) = Μήκος τόξου × τέμνουσα του γεωγραφικού πλάτους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Ένα πλοίο που βρίσκεται σε τόπο Α ($\varphi_A = 44°\ 33'N$) πλέει κατά 55 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο. Να βρεθεί η διαφορά μήκους.

Λύση

φ=φ_A=44° 33′=44,55°

$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{55}{0{,}713} \Leftrightarrow \Delta\lambda = 77{,}139'$ ή $\Delta\lambda = 1°17{,}139'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Ένα πλοίο που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο πλέει για 750 ναυτικά μίλια στον ίδιο παράλληλο. Εάν Α ($\lambda_A = 39°\ 15'W$) είναι το σημείο εκκίνησης και Β ($\lambda_B = 56°\ 45'W$) το σημείο άφιξης, να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων Α και Β και να γίνει σχήμα.

Λύση

$\Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_B| = 56°\ 45'$ -39° 15′=17° 30′=

(17 · 60)′+30’=1050’ ή $\Delta\lambda$ =1050 ν.μ

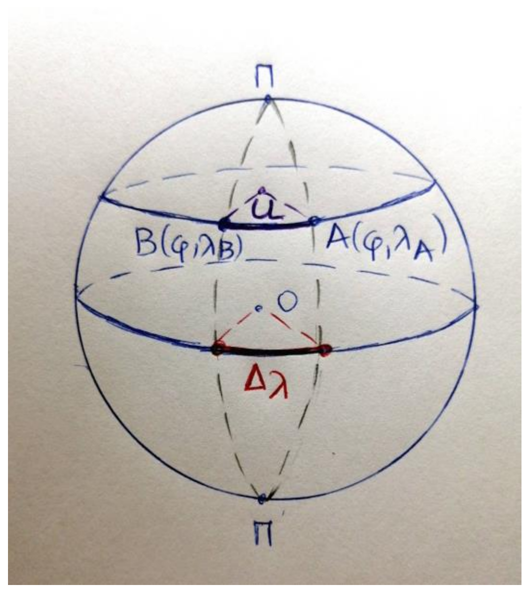
$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{u}{\Delta\lambda} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{750}{1050} \Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}714$

Άρα: $\varphi = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}714 = 44{,}439°$ ή $44°26'$

Επομένως οι γεωγραφικές συντεταγμένες είναι:

Α ($\varphi_A = 44°26'N,\ \lambda_A = 39°\ 15'W$)

Β ($\varphi_B = 44°26'N,\ \lambda_B = 56°\ 45'W$)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο Α ($\varphi_A = 50°N$) για 600,2 ν.μ ανατολικά στον ίδιο παράλληλο έως ένα σημείο Β ($\lambda_B = 144°\ 3'W$). Να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων.

Λύση

$u = \Delta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{600{,}2}{0{,}643} \Leftrightarrow \Delta\lambda = 933{,}437'$ ή $\Delta\lambda$ =933,437ν.μ

$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B \Leftrightarrow 933{,}437' = \lambda_A - 144°\ 3' \Leftrightarrow 933{,}437' = \lambda_A - 8643' \Leftrightarrow$
$\lambda_A = 8643' + 933{,}437' \Leftrightarrow \lambda_A = 9576{,}437'$ =159,607° ή 159° 36,42′

Άρα: A ($\varphi_A = 50°N,\ \lambda_A = 159°\ 36{,}42'W$)

B ($\varphi_B = 50°N,\ \lambda_B = 144°\ 3'W$)