ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

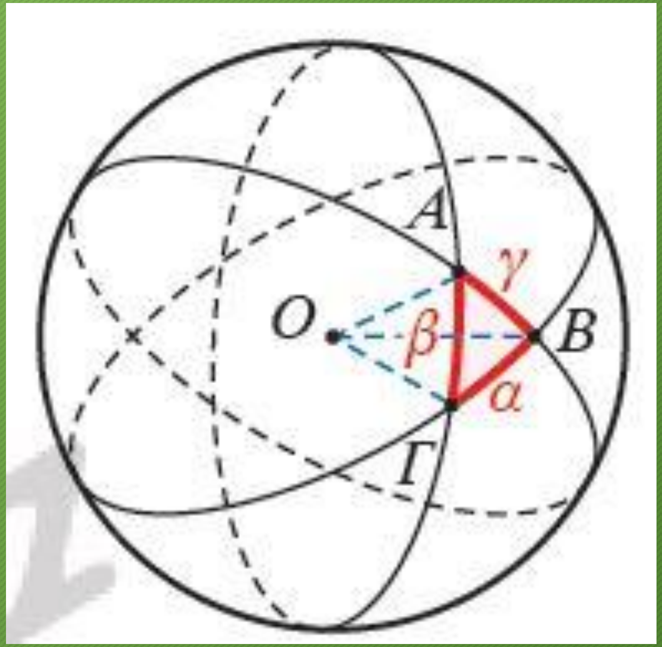
2ο μάθημα

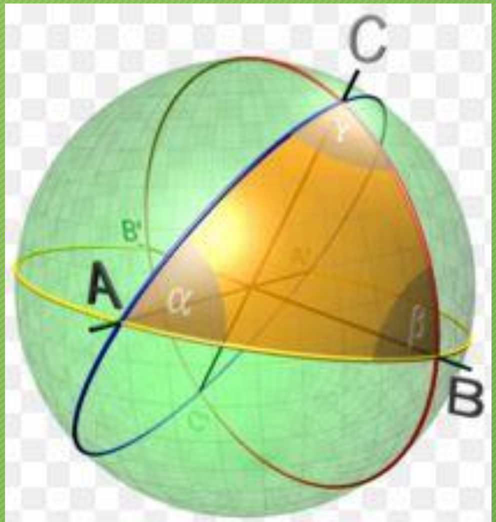
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

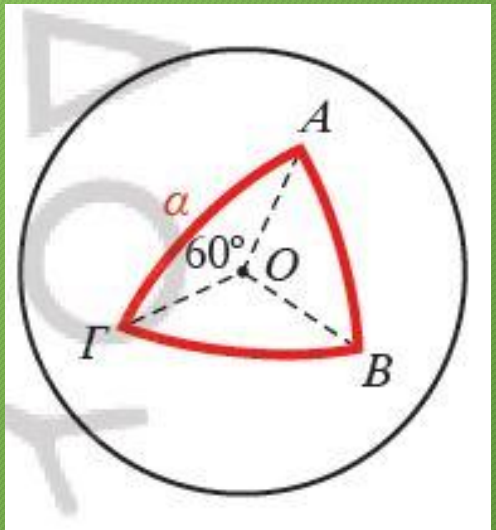
ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σφαιρικά Τρίγωνα

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από τα τόξα τριών μέγιστων κύκλων, που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο







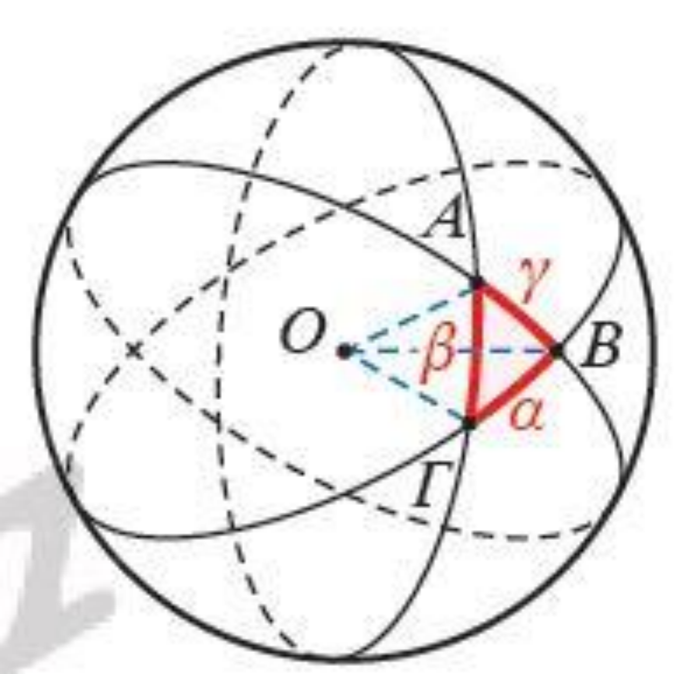
Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σφαιρικά Τρίγωνα

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε το κέντρο της σφαίρας με τα σημεία Α, Β, Γ θα έχουμε την τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ στην οποία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο (ΑΒΓ).

Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου (ΑΒΓ) είναι: $(\widehat{AB}) = \gamma$, $(\widehat{B\Gamma}) = \alpha$, $(\widehat{A\Gamma}) = \beta$ και έχουν το ίδιο μέτρο με τις αντίστοιχες επίπεδες γωνίες (έδρες) της τρίεδρης γωνίας, δηλαδή: $A\hat{O}B = \gamma, B\hat{O}\Gamma = \alpha, \Gamma\hat{O}A = \beta$.

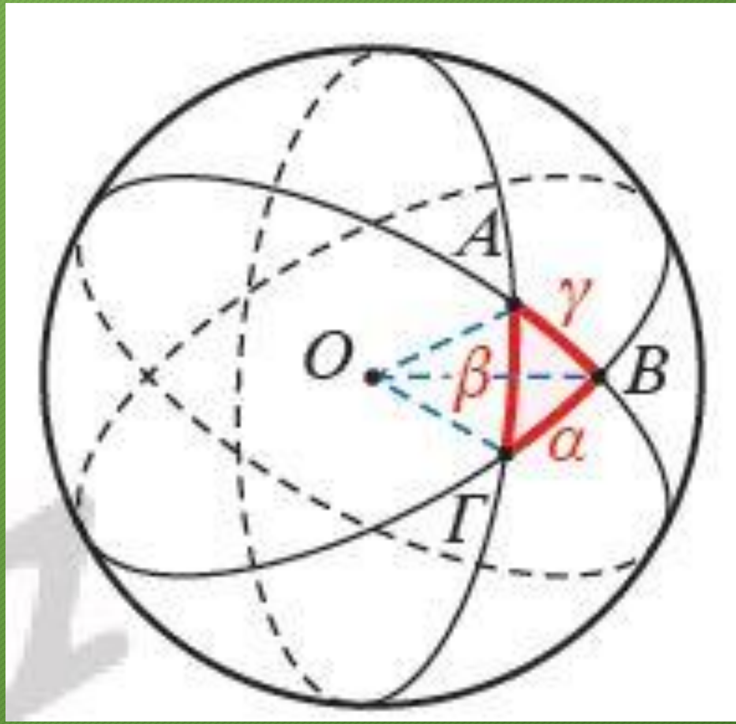


ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σφαιρικά Τρίγωνα

Δηλαδή οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου μετριούνται σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά.

Κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από π rad (180°).



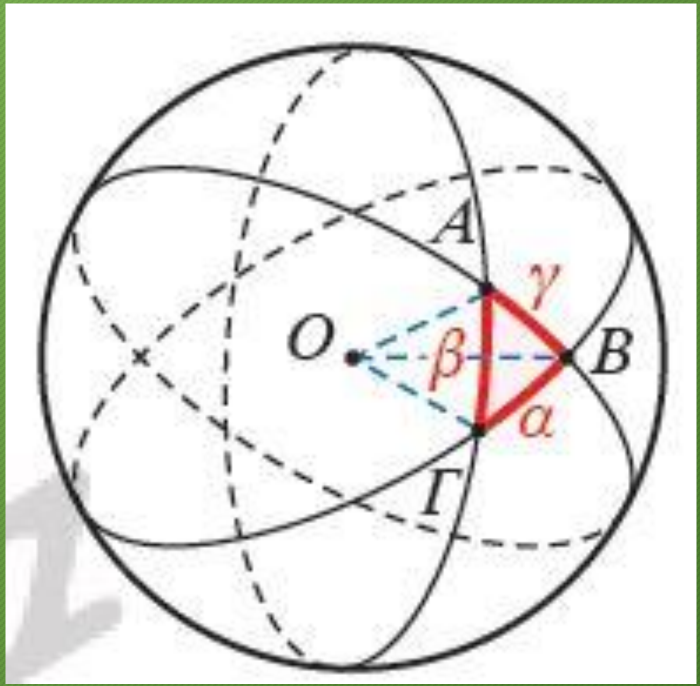
Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

I) $\left.\begin{array}{l} 0° < a < 180° \\ 0° < \beta < 180 \\ 0° < \gamma < 180 \end{array}\right\}$ δηλ. κάθε **πλευρά** είναι μικρότερη των 180°.

II) $\alpha + \beta + \gamma < 360°$

δηλ. το άθροισμα των πλευρών είναι μικρότερο από 360°.

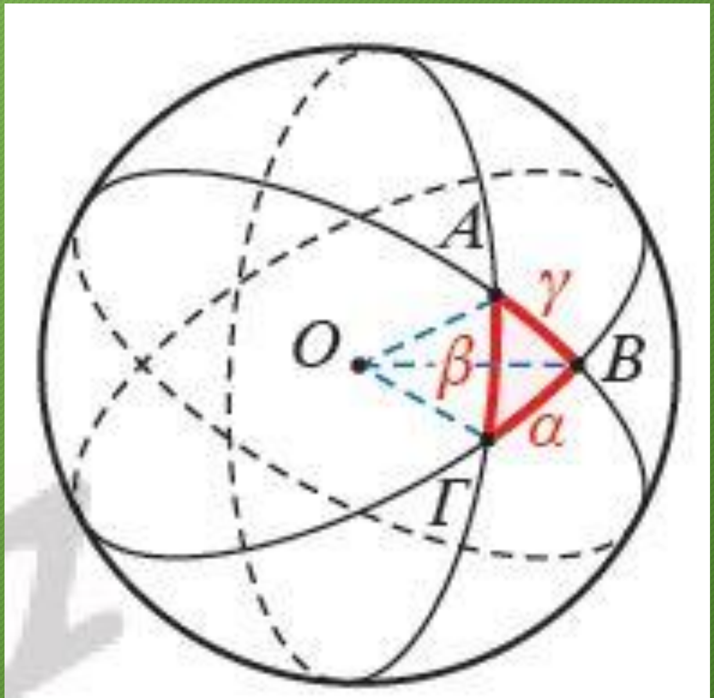


Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

$$\text{III)}\quad \left.\begin{array}{l} |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \\ |\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma \\ |\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta \end{array}\right\}$$

δηλ. κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

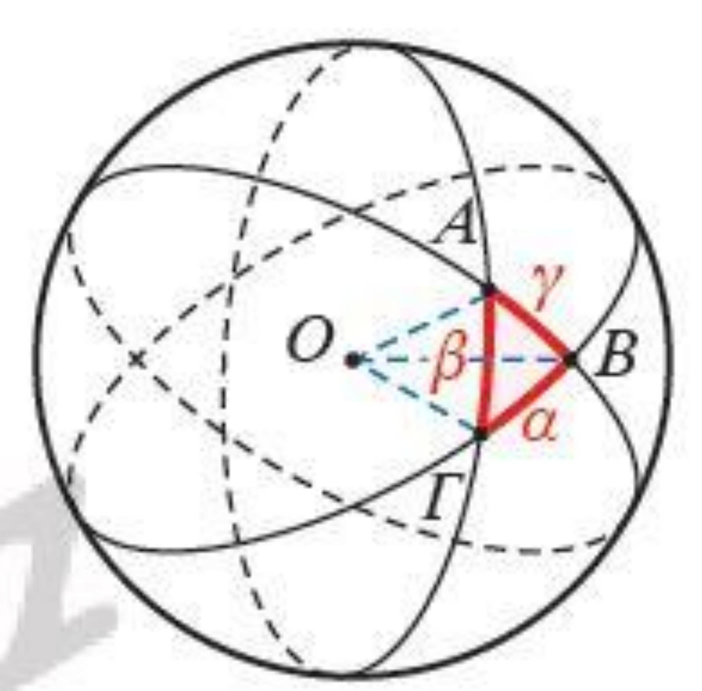


Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

IV) $\left.\begin{array}{l} 0° < \hat{A} < 180° \\ 0° < \hat{B} < 180° \\ 0° < \hat{\Gamma} < 180° \end{array}\right\}$ δηλ. κάθε **γωνία** είναι μικρότερη από 180°.

V) $180° < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 540°$



ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

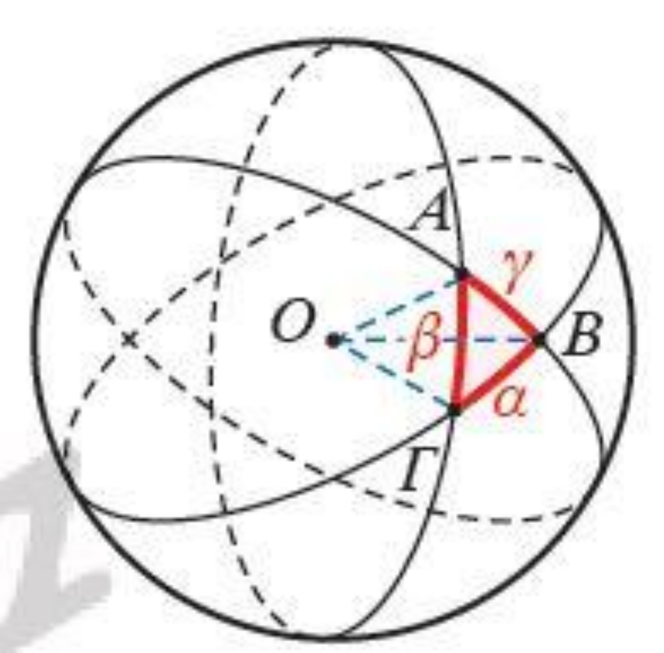
Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

VI) $\left.\begin{array}{l} \hat{B}+\hat{\Gamma}<\hat{A}+180^\circ \\ \hat{A}+\hat{\Gamma}<\hat{B}+180^\circ \\ \hat{A}+\hat{B}<\hat{\Gamma}+180^\circ \end{array}\right\}$

δηλ. κάθε γωνία αυξημένη κατά 180° είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

VII) Απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του σφαιρικού τριγώνου, και αντίστροφα.

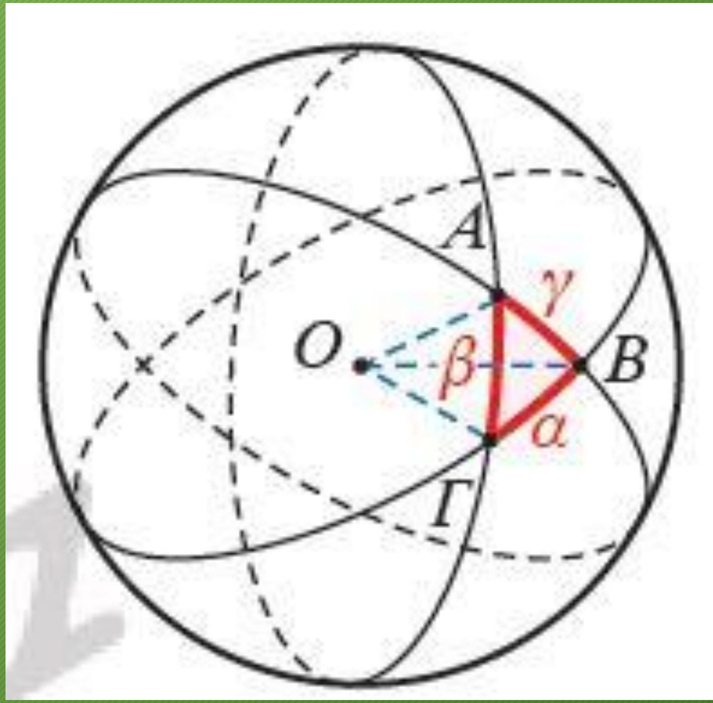


Σφαιρικά Τρίγωνα

Στα Σφαιρικά Τρίγωνα ισχύουν:

VIII) Όταν $\frac{\alpha+\beta}{2} > 90° \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} > 90°$ ενώ

Όταν $\frac{\alpha+\beta}{2} < 90° \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} < 90°$.

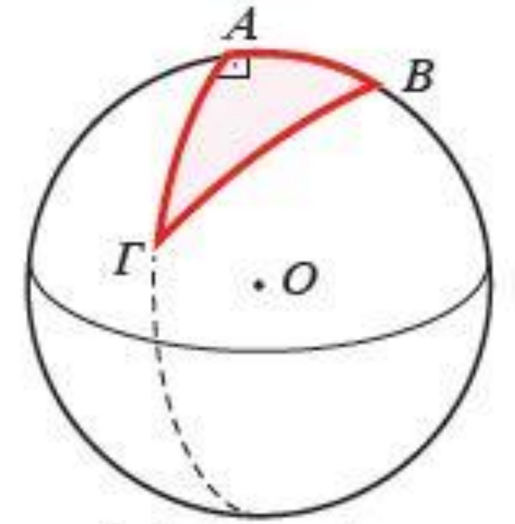


ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ / ΕΙΣΑΓΩΓΗ

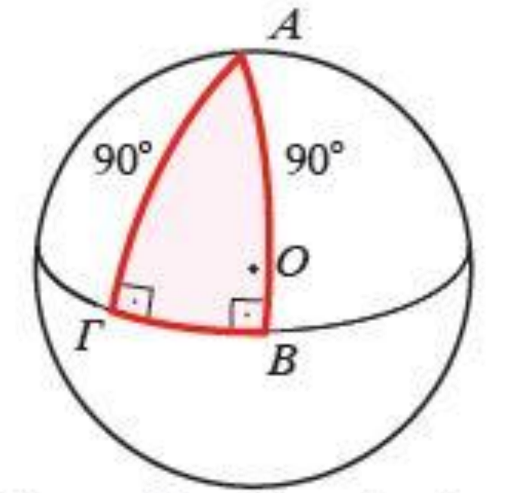
Σφαιρικά Τρίγωνα-Είδη

Ορθογώνιο	Αν μια σφαιρική γωνία του είναι ίση με μια ορθή γωνία (90^o).
Δισορθογώνιο	Αν δύο σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90^o.
Τρισορθογώνιο	Αν και οι τρεις σφαιρικές γωνίες του είναι ίσες με 90^o.
Ισόπλευρο	Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.
Ισοσκελές	Αν δύο πλευρές του είναι ίσες.
Σκαληνό	Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
Ορθόπλευρο	Αν μια πλευρά του έχει μέτρο ίσο με 90^o.
Δισορθόπλευρο	Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90^o.
Τρισορθόπλευρο	Αν τρεις πλευρές του έχουν μέτρο ίσο με 90^o.
Τυχόν (ή πλάγιο ή κοινό)	Αν δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90^o.

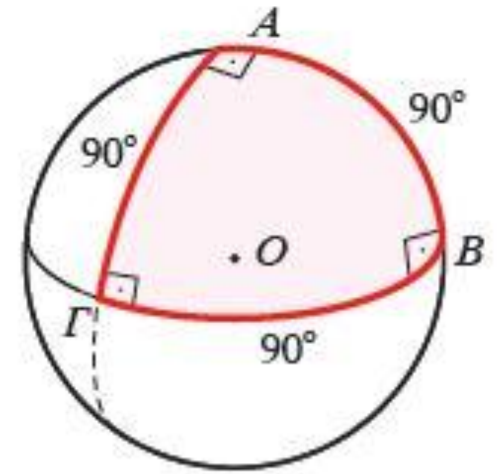
Σφαιρικά Τρίγωνα-Είδη



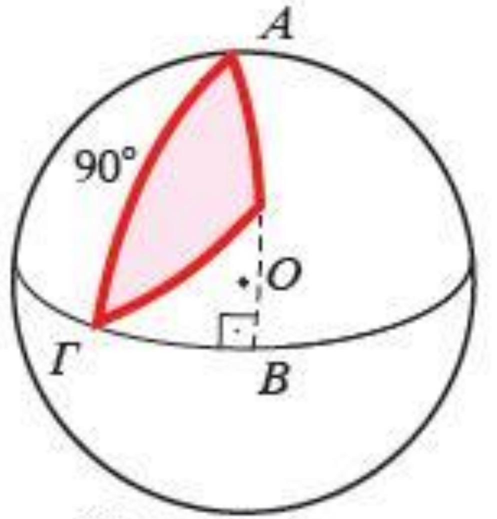
(α) Ορθογώνιο



(β) Ισοσκελές – δισορθογώνιο – δισορθόπλευρο



(γ) Ισόπλευρο – τρισορθογώνιο – τρισορθόπλευρο

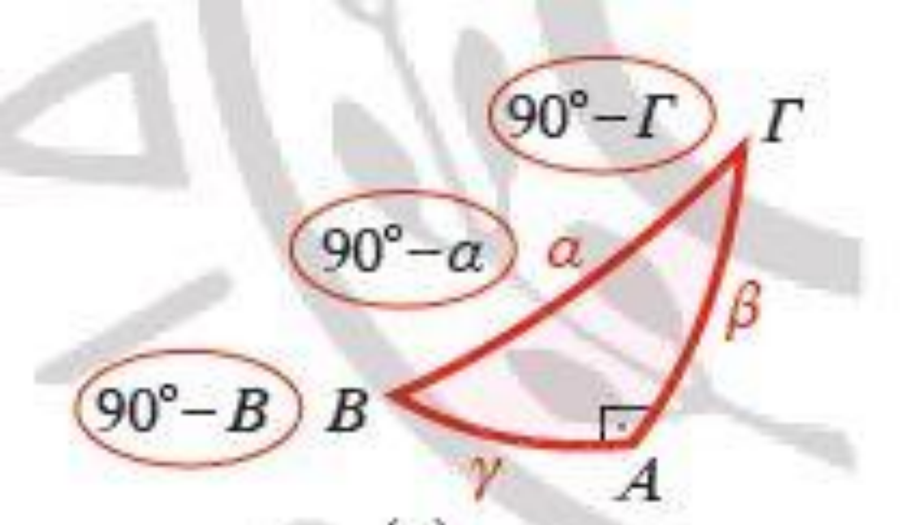


(δ) Ορθόπλευρο

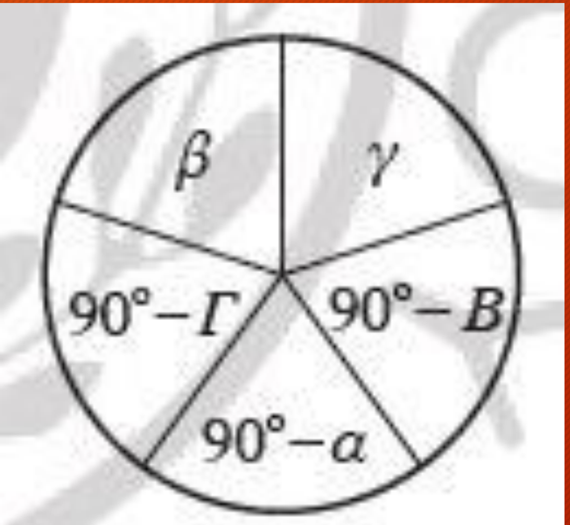
ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Κανόνες Napier



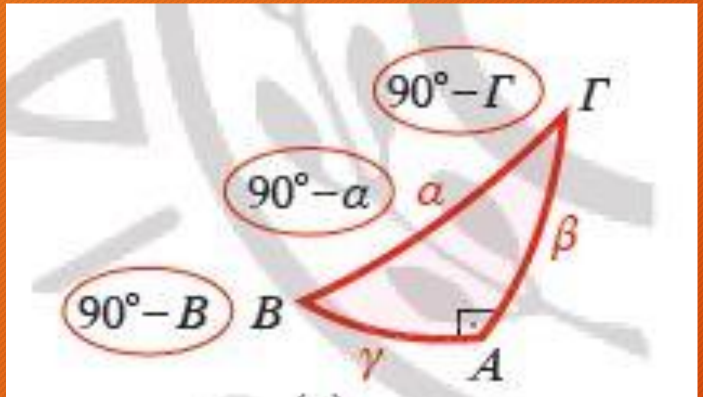
(α)



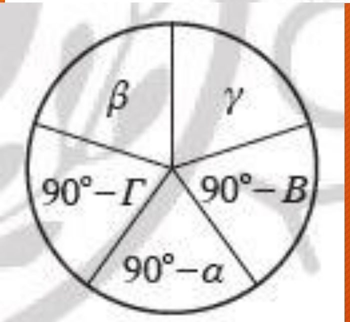
(β)

Α. Επίλυση Ορθογωνίων Σφαιρικών Τριγώνων

Κανόνες Napier



(α)



(β)

Έστω το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Τότε:

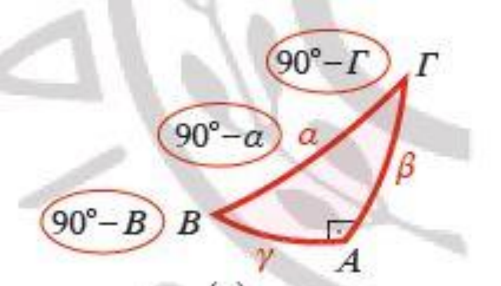
Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου ενός ορθογωνίου τριγώνου, ισούτε με το γινόμενο:

i) των εφαπτόμενων των προσκείμενων στοιχείων του,
π.χ. $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90° - \hat{\Gamma}) \cdot \varepsilon\varphi\gamma$

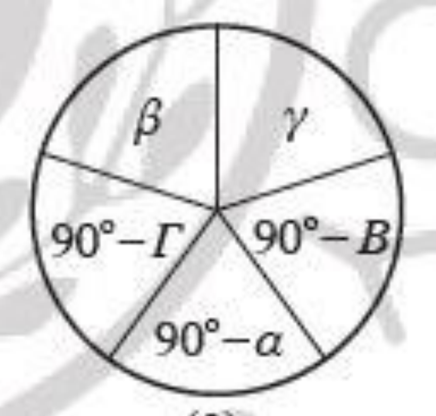
ii) των συνημιτόνων των αντικείμενων (απέναντι) στοιχείων του,
π.χ. $\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90° - \hat{B}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \alpha)$

όπως αυτά προκύπτουν από τα παρακάτω.

Κανόνες Napier



(α)



(β)

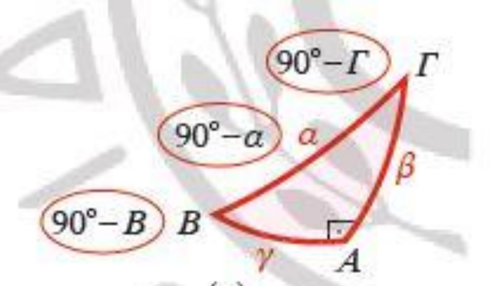
Για κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ σχεδιάζουμε έναν κύκλο, τον οποίο χωρίζουμε σε 5 κυκλικούς τομείς και σε κάθε έναν βάζουμε και ένα στοιχείο του τριγώνου, αγνοώντας την ορθή γωνία $\hat{A}$. Τοποθετούμε τις προσκείμενες στην $\hat{A} = 90°$ πλευρές β, γ διαδοχικά, ενώ απέναντι τοποθετούμε τη συμπληρωματική της α, δηλαδή την $90° - \alpha$.

Επίσης, προσθέτουμε τις συμπληρωματικές των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$, δηλαδή βάζουμε $90° - \hat{B}$ και $90° - \hat{\Gamma}$, αντιστοίχως.

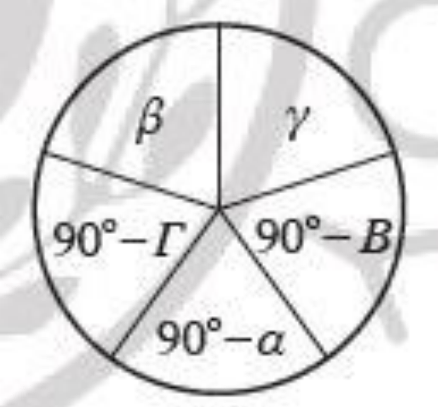
Τα στοιχεία μπαίνουν με τη σειρά που τα συναντάμε, κυκλικά, με δεξιόστροφη φορά, δηλαδή: $\beta \to \gamma \to 90° - \hat{B} \to 90° - \alpha \to 90° - \hat{\Gamma}$.

Α. Επίλυση Ορθογωνίων Σφαιρικών Τριγώνων

Κανόνες Napier



(α)



(β)

Συνεπώς, οι κανόνες του Napier, γράφονται (με τη βοήθεια του κυκλικού διαγράμματος, για το διπλανό τρίγωνο:

π.χ. i) $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90° - \hat{\Gamma}) \cdot \varepsilon\varphi\gamma$

ii) $\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90° - \hat{B}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \alpha)$

iii) $\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi(90° - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi\beta$

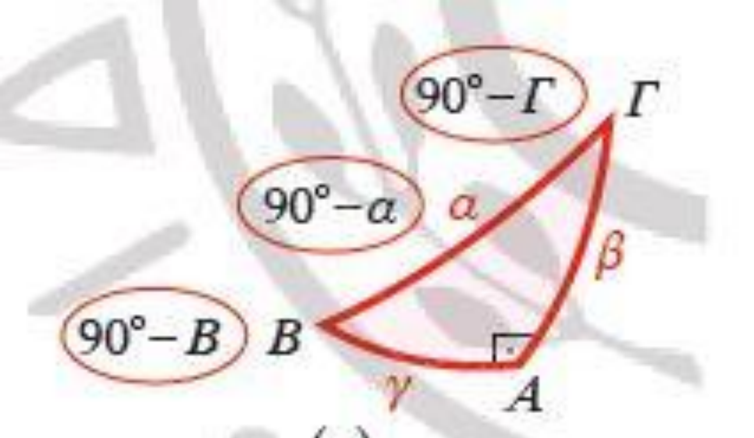
iv) $\eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90° - \Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \alpha)$

v) $\eta\mu(90° - \hat{\Gamma}) = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90° - \alpha)$

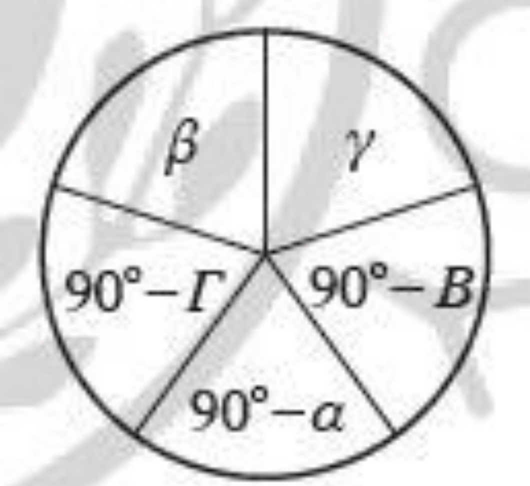
vi) $\eta\mu(90° - \hat{\Gamma}) = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90° - \hat{B})$ κ.ο.κ.

Α. Επίλυση Ορθογωνίων Σφαιρικών Τριγώνων

Κανόνες Napier



(α)



(β)

Πρέπει να θυμάστε:

$$\eta\mu(90° - \widehat{\omega}) = \sigma\upsilon\nu\widehat{\omega}$$

$$\sigma\upsilon\nu(90° - \widehat{\omega}) = \eta\mu\widehat{\omega}$$

$$\varepsilon\varphi(90° - \widehat{\omega}) = \sigma\varphi\widehat{\omega} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\widehat{\omega}}$$

$$\sigma\varphi(90° - \widehat{\omega}) = \varepsilon\varphi\widehat{\omega}$$

Α. Επίλυση Ορθογωνίων Σφαιρικών Τριγώνων/Ασκήσεις

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

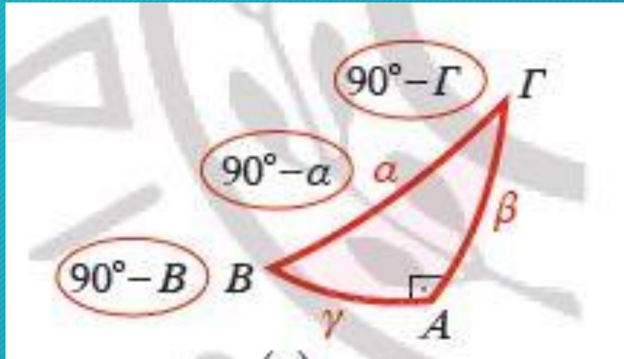
Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Παράδειγμα :

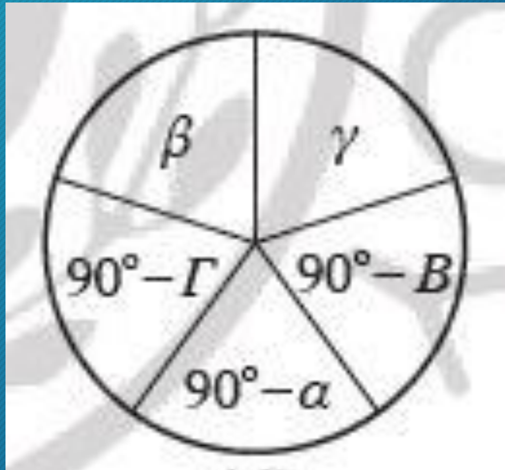
Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν $\alpha = 111°$ και $\beta = 34°$.

Λύση:

Βήμα 1ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



(α)



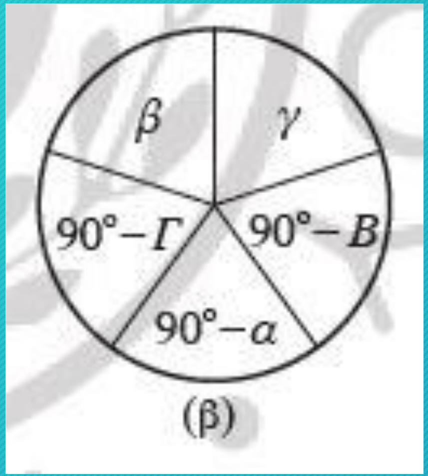
(β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 2ο: Υπολόγίζουμε πρώτα τη γωνία $\hat{\Gamma}$ (τα α και β είναι προσκείμενες πλευρές), οπότε:



$$\eta\mu(90° - \hat{\Gamma}) = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90° - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi 34° \cdot \sigma\varphi 111° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi 34° \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 111°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 0{,}675 \cdot \frac{1}{-2{,}605} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -0{,}259 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}259) \Rightarrow$$

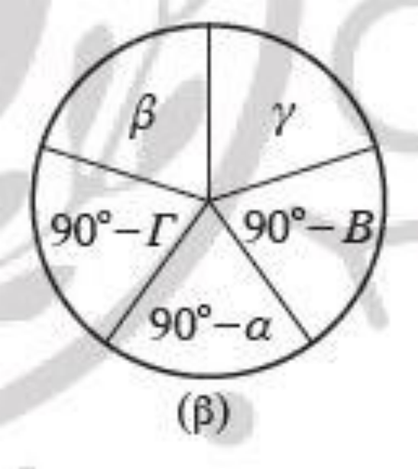
$$\Rightarrow \hat{\Gamma} \simeq 105{,}01°$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε την πλευρά γ (τα β και γ είναι απέναντι από την $90° - \alpha$):



$$\eta\mu(90° - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 111°}{\sigma\upsilon\nu 34°} \Rightarrow$$

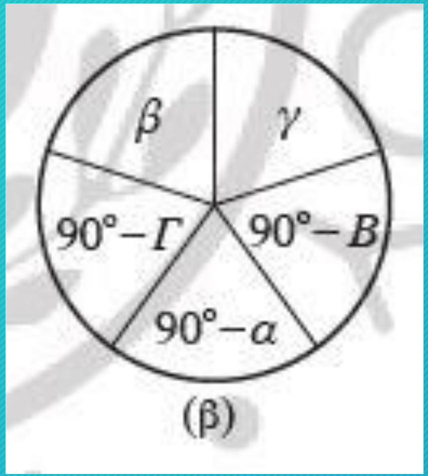
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{-0{,}358}{0{,}829} \Rightarrow$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε την πλευρά γ (τα β και γ είναι απέναντι από την $90° - \alpha$):



$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = -0{,}432 \Rightarrow$$

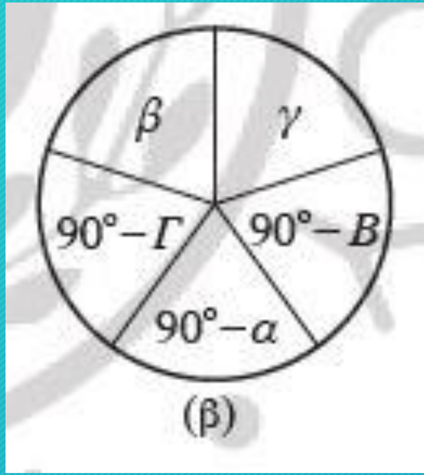
$$\Rightarrow \gamma = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(-0{,}432) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \simeq 115{,}59°$$

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4ο: Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{B}$ (τα $90° - \alpha$ και $90° - \hat{B}$ είναι απέναντι από την β):



$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90° - \hat{B}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\alpha \Rightarrow$$

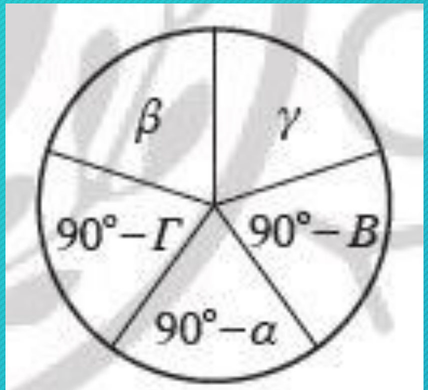
$$\Rightarrow \eta\mu\hat{B} = \eta\mu\beta \cdot \frac{1}{\eta\mu\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\hat{B} = \eta\mu 34° \cdot \frac{1}{\eta\mu 111°} \Rightarrow$$

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4ο: Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{B}$ (τα $90° - \alpha$ και $90° - \hat{B}$ είναι απέναντι από την β):



(β)

$$\Rightarrow \eta\mu\hat{B} = 0{,}599 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \tau o\xi\eta\mu(0{,}599) \Rightarrow$$

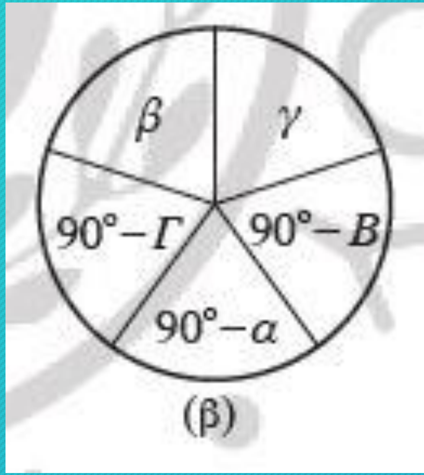
$$\Rightarrow \hat{B} \simeq 36{,}798° \simeq 36{,}8°$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4ο: Η΄
Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{B}$ (τα $90° - \hat{\Gamma}$ και $90° - \hat{B}$ είναι προσκείμενα στην $90° - \alpha$):



$$\eta\mu(90° - \alpha) = \varepsilon\varphi(90° - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90° - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

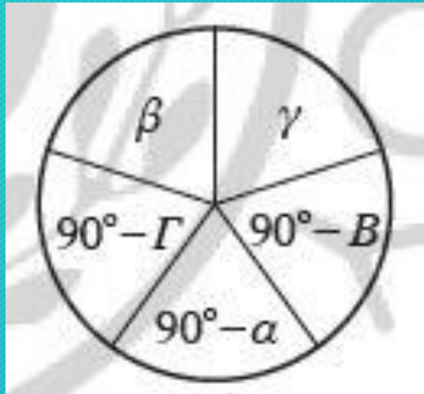
$$\Rightarrow \sigma\varphi\hat{B} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}}}} \Rightarrow$$

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4ο:



(β)

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B}} = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 111^\circ \cdot \varepsilon\varphi 105{,}01^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{1}{(-0{,}358)\cdot(-3{,}729)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = 0{,}748 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(0{,}748) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} \simeq 36{,}796^\circ \simeq 36{,}8^\circ$$

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Παρατηρήσεις:

1. Σε ένα σφαιρικό τρίγωνο, οι γωνίες που είναι διάφορες της ορθής ΔΕΝ είναι πάντοτε οξείες, επίσης, η υποτείνουσα ΔΕΝ είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά!

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Παρατηρήσεις:

2. Αν σε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓυπολογίσουμε για παράδειγμα την πλευρά γ, από τα στοιχεία α και $\widehat{\Gamma}$, με τον νόμο:

$$\eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \widehat{\Gamma})$$

$$\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\widehat{\Gamma}$$

έχουμε τότε <u>πρόβλημα</u> επιλογής μεταξύ των δύο τιμών της πλευράς γ στο $(0^\circ, 180^\circ)$, αφού $\eta\mu\gamma = \eta\mu(180^\circ - \gamma)$.

Έτσι, αν βρούμε π.χ. $\eta\mu\gamma = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 30^\circ \\ \quad \text{ή} \\ \gamma = 150^\circ \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Οπότε, εφαρμόζουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1:

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ **κάθε γωνία** διάφορη της ορθής **και η απέναντι πλευρά** της ανήκουν **στο ίδιο τεταρτημόριο**!!!

π.χ.

στο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°, \alpha = 111°$ και $\beta = 34° \in Io\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o$ τότε και $\hat{B} = 36{,}8° \in Io\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o$

Ενώ $\gamma = 115{,}59° \in IIo\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o$ και $\hat{\Gamma} = 105{,}01° \in IIo\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o$

Ένας τρόπος να το διαπιστώσουμε αυτό είναι βρίσκοντας τα συνημίτονα ή τις εφαπτομένες, αφού αυτά στο Ιο τεταρτημόριο είναι θετικά, ενώ στο ΙΙο τεταρτημόριο είναι αρνητικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u>:

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο έστω μία πλευρά που είναι απέναντι σε μία μη ορθή γωνία.

Αν η γωνία είναι οξεία, τότε η απέναντι πλευρά είναι μικρότερη ή ίση προς τη γωνία.

Αν η γωνία είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά είναι μεγαλύτερη ή ίση προς την γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3</u>:

Σε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, ισχύουν;

1) (α) $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\hat{B}$	(β) $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma}$
2) (α) $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\hat{\Gamma}$	(β) $\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\hat{B}$
3) (α) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$	(β) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma}$
4) (α) $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\hat{B}$	(β) $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha$
5) (α) $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma}$	(β) $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

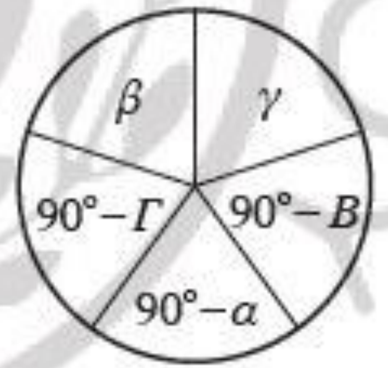
I. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 5ο:

Η πλευρά β είναι στο Ιο τεταρτημόριο, άρα η γωνία $\hat{B}$ πρέπει να είναι στο Ιο τεταρτημόριο, επίσης.

Και πράγματι είναι! (είτε από το Θ.1 ή το Θ. 2).

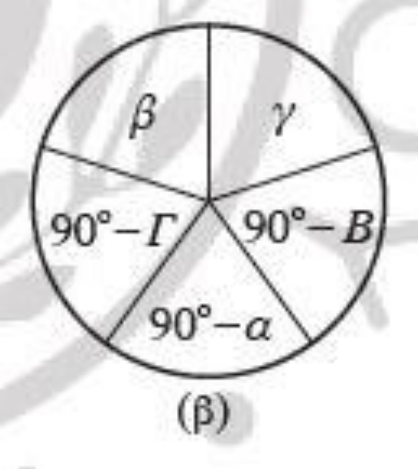


(β)

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 6ο (Τύπος ελέγχου-Έλεγχος):



Για να βρούμε τον τύπο ελέγχου πρέπει να συνδιάσουμε με τους κανόνες του Napier τα ζητούμενα.

π.χ. $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και γ.

Από το κυκλικό διλάγραμμα διαπιστώνουμε ότι η $90° - \hat{\Gamma}$ έχει απέναντι τα γ και $90° - \hat{B}$, οπότε εφαρμόζουμε το :

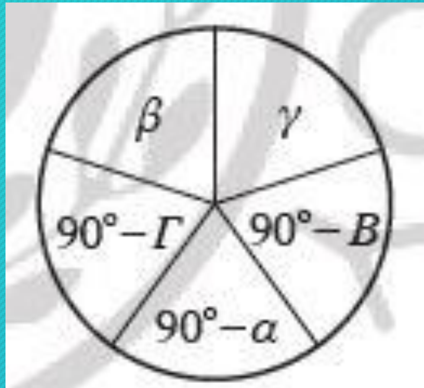
$$\eta\mu\left(90° - \hat{\Gamma}\right) = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\left(90° - \hat{B}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\hat{B}$$

Οπότε εξετάζουμε αν ισχύει η παραπάνω.

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 6ο (Τύπος ελέγχου-Έλεγχος):



(β)

Στο παράδειγμά μας:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -0{,}259$$

Επίσης:

$$\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\hat{B} = (-0{,}432)\cdot 0{,}599 = -0{,}259$$

Συνεπώς

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\hat{B}$$

Άρα έχουμε βρει σωστά τα ζητούμενα.

Ι. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία πλευρά

Άλυτες Ασκήσεις:

1) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν $\alpha = 96°$ και $\beta = 97°$.

2) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν $\alpha = 96°$ και $\beta = 95°$.

3) Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν $\alpha = 75°\,48{,}6'$ και $\beta = 46°\,12{,}3'$.

Να λυθούν οι ασκήσεις!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη