

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

3^ο μάθημα

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Α. Επίλυση Ορθογωνίων Σφαιρικών Τριγώνων / Ασκήσεις

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

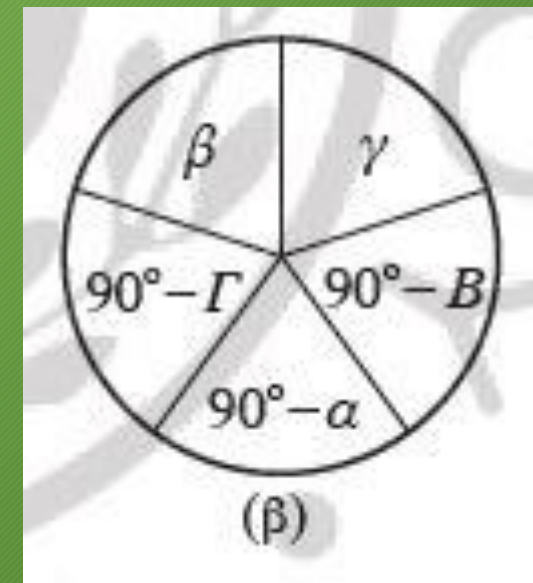
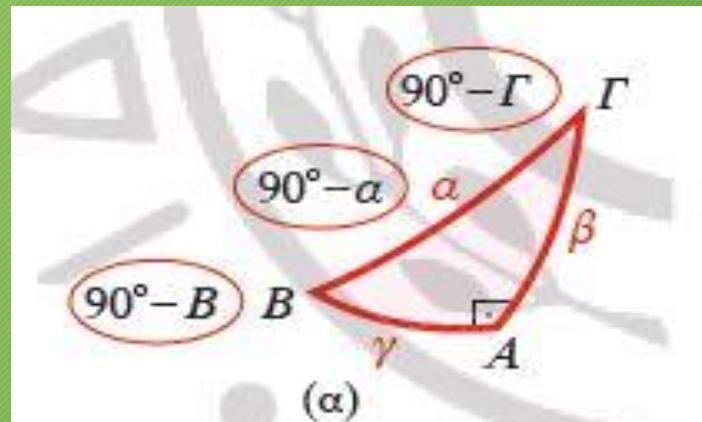
II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Παράδειγμα :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\alpha = 39^\circ$ και $\hat{B} = 137^\circ$.

Λύση:

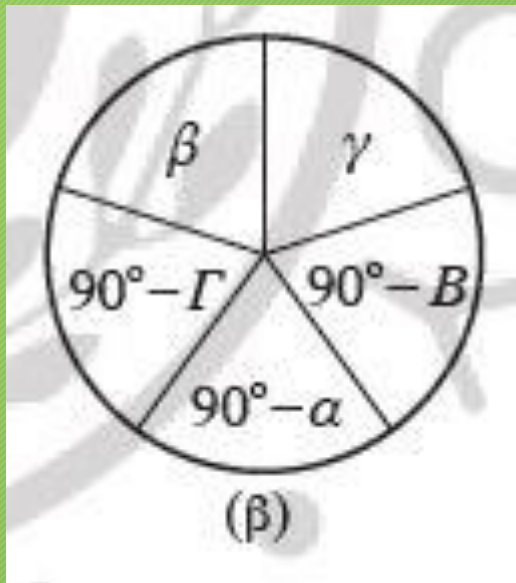
Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



II. Όταν δίνονται η υποτεινούσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 2°:



Υπολογίζουμε πρώτα το β (τα $90^\circ - \alpha$ και $90^\circ - \hat{B}$ είναι απέναντι από τη β):

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{B}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\hat{B} \cdot \eta\mu\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu 137^\circ \cdot \eta\mu 39^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = 0,429 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \tau\omicron\xi\eta\mu(0,429) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \begin{cases} 25,404^\circ \\ \text{ή} \\ 180^\circ - 25,404^\circ \simeq 154,6 \end{cases}$$

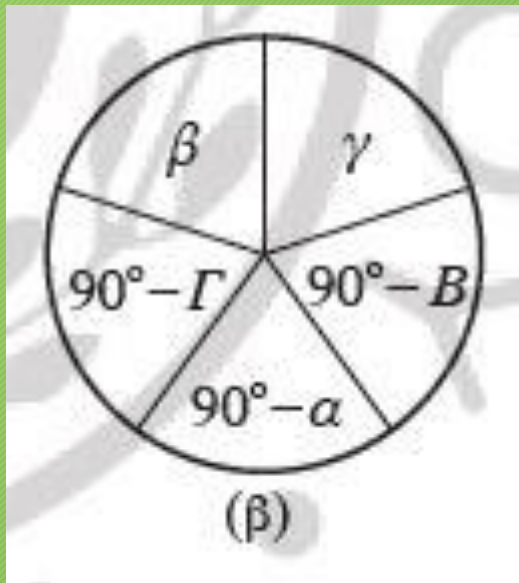
Όμως $\beta = 25,404^\circ$ απορρίπτεται, αφού, λόγω θεωρήματος 1 (και 2), πρέπει η γωνία και η πλευρά να ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Συνεπώς, $\beta = 154,6^\circ$.

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3°:



Υπολογίζουμε το $\hat{\Gamma}$ ($90^\circ - \hat{B}$ και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ προσκείμενες στο $90^\circ - \alpha$)

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\varphi\hat{\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi\hat{B}} \Rightarrow$$

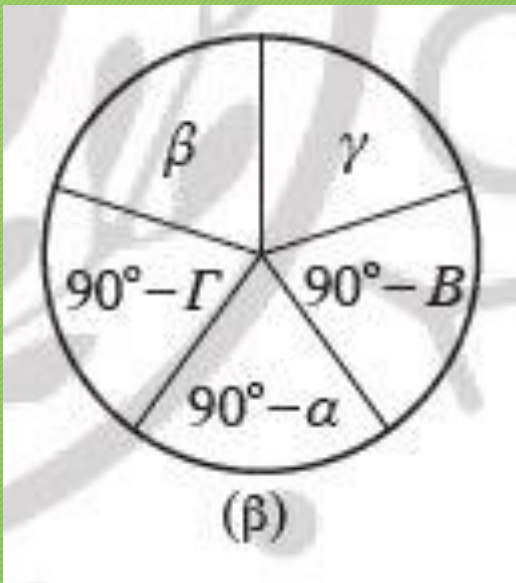
$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi\hat{B}}}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\hat{B} \Rightarrow$$

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3°:

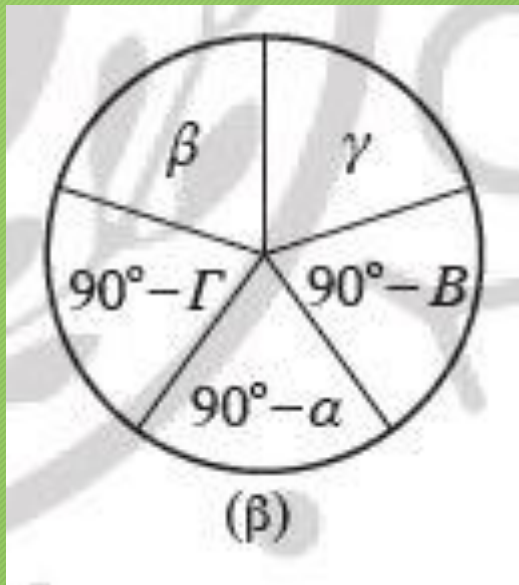


$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\hat{B}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 39^\circ \cdot \varepsilon\varphi 137^\circ} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= \frac{1}{(0,777) \cdot (-0,933)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= -1,380 \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &= \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(-1,380) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &\simeq 125,929^\circ \simeq 125,93^\circ \end{aligned}$$

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4°:



Υπολογίζουμε το γ ($90^\circ - \alpha$ και γ προσκείμενες στο $90^\circ - \hat{B}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \sigma\upsilon\nu\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \sigma\upsilon\nu 137^\circ \cdot \varepsilon\varphi 39^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = -0,592 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(-0,592) \Rightarrow$$

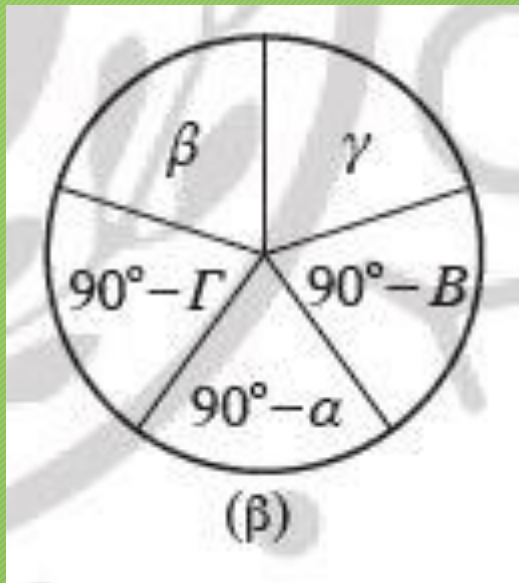
$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 30,626^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 149,374^\circ$$

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 5^ο:



Τσεκάρουμε:

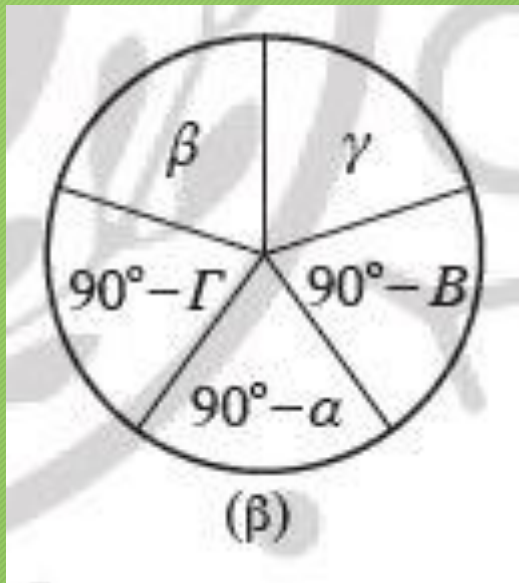
$\hat{B} = 137^\circ, \beta = 154,6^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Πο) και μάλιστα αφού $\beta > \hat{B}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

Και $\hat{\Gamma} = 125,93^\circ, \gamma = 149,374^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Πο) και μάλιστα αφού $\gamma > \hat{\Gamma}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 6°: Έλεγχος-Τύπος Ελέγχου



Πρέπει: $\eta_{\mu\beta} = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\beta} = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}}$$

Πράγματι:

$$\eta_{\mu\beta} = \eta_{\mu 154,6^\circ} \simeq 0,429$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \frac{\varepsilon\varphi 149,374^\circ}{\varepsilon\varphi 125,93^\circ} = 0,429$$

II. Όταν δίνονται η υποτείνουσα και μία γωνία διάφορη της ορθής Άλυτες Ασκήσεις:

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\alpha = 72^\circ 12,5'$ και $\hat{B} = 156^\circ 17,2'$.
2. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\alpha = 152^\circ 24,4'$ και $\hat{\Gamma} = 68^\circ 38,2'$.
3. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\alpha = 142^\circ 38'$ και $\hat{B} = 65^\circ 26'$.

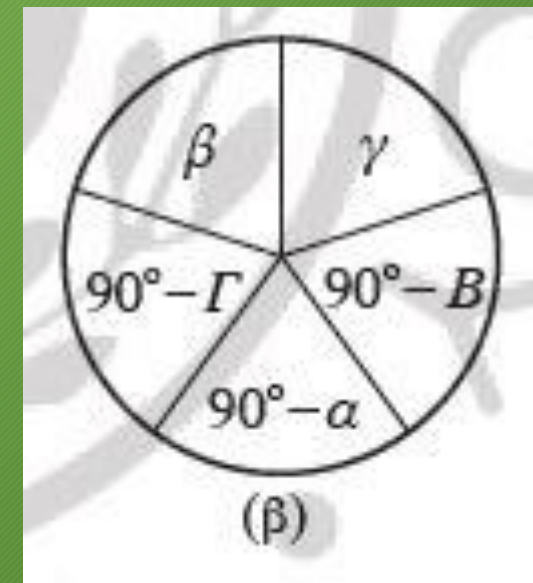
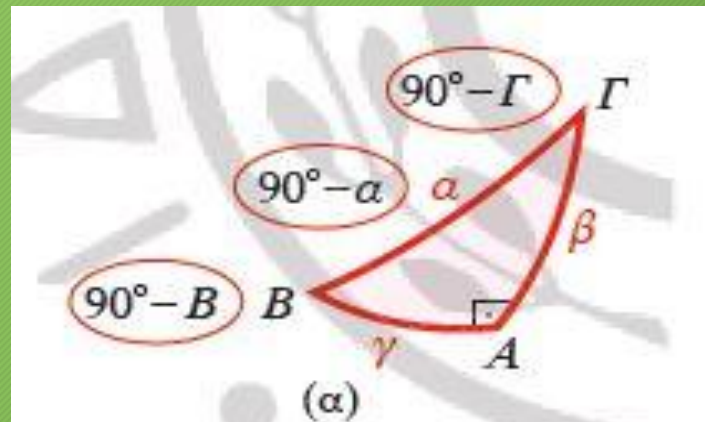
III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Παράδειγμα :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 37^\circ$ και $\gamma = 121^\circ$.

Λύση:

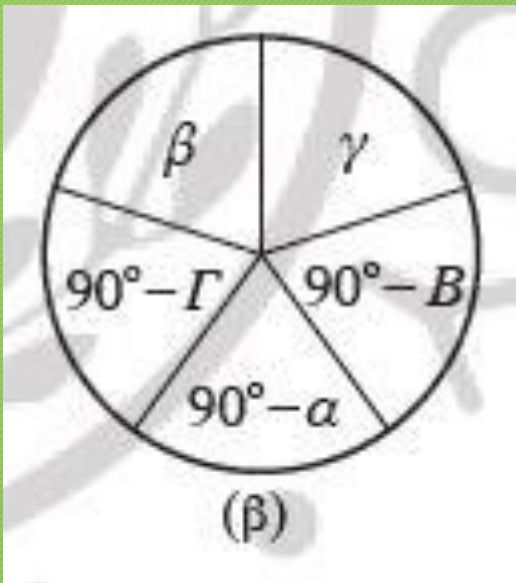
Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 2°:



Υπολογίζουμε πρώτα το α (τα β και γ είναι απέναντι από τη $90^\circ - \alpha$):

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 37^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 121^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = 0,799 \cdot (-0,515) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -0,411 \Rightarrow$$

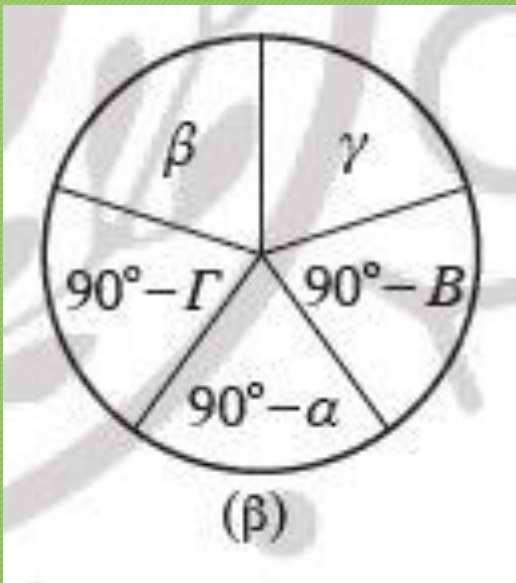
$$\Rightarrow \alpha = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(-0,411) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 114,268^\circ$$

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3^ο:



Υπολογίζουμε τη γωνία \hat{B} (τα β και $90^\circ - \hat{B}$ είναι προσκείμενα στο γ)

$$\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\varphi\hat{B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\varepsilon\varphi\beta} \Rightarrow$$

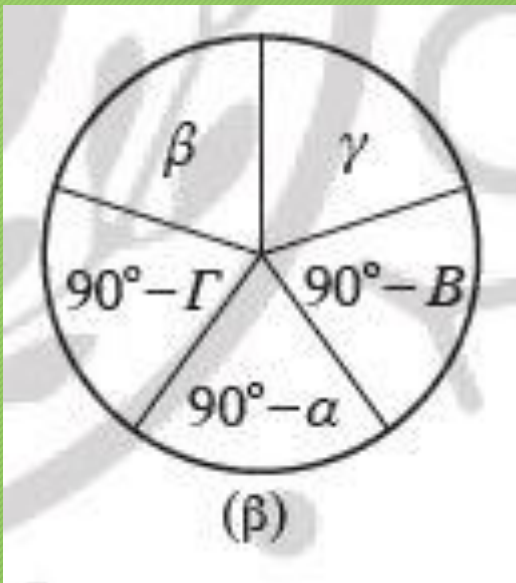
$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B}} = \frac{\eta\mu\gamma}{\varepsilon\varphi\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\eta\mu\gamma} \Rightarrow$$

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 3°:



$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\varepsilon\varphi 37^\circ}{\eta\mu 121^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{B} = 0,879 \Rightarrow$$

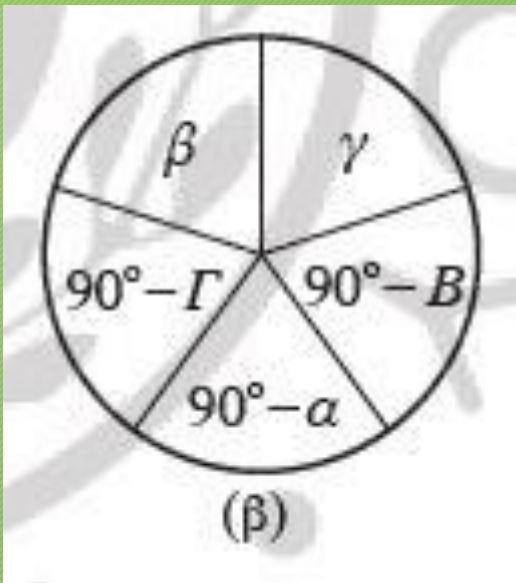
$$\Rightarrow \hat{B} = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(0,879) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 41,315^\circ$$

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4^ο:



Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ (τα β και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενα στο β)

$$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

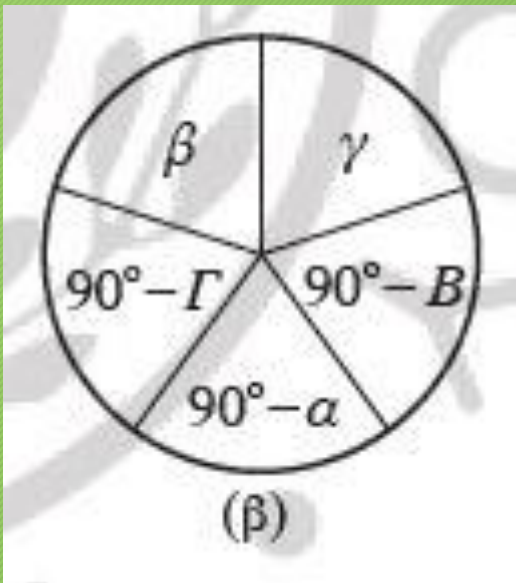
$$\Rightarrow \sigma\varphi\hat{\Gamma} = \frac{\eta\mu\beta}{\varepsilon\varphi\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \frac{\eta\mu\beta}{\varepsilon\varphi\gamma} \Rightarrow$$

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 4°:

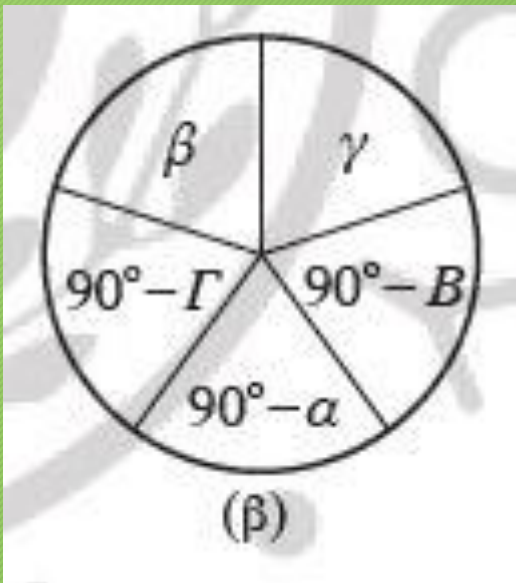


$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\eta\mu\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= \frac{\varepsilon\varphi 121^\circ}{\eta\mu 37^\circ} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} &= -2,765 \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &= \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(-2,765) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &= 180^\circ - 70,117^\circ \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &= 109,883^\circ \end{aligned}$$

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 5°:



Τσεκάρουμε:

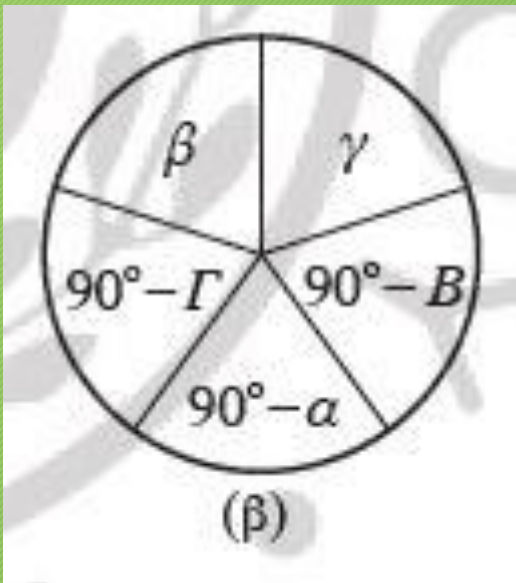
$\hat{\Gamma} = 109,883^\circ, \gamma = 121^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (IIο) και μάλιστα αφού $\gamma > \hat{\Gamma}$ ικανοποιείται το $\Theta. 2$.

Και $\hat{B} = 41,315^\circ, \beta = 37^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Io) και μάλιστα αφού $\beta < \hat{B}$ ικανοποιείται το $\Theta. 2$.

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 5°:



Τσεκάρουμε:

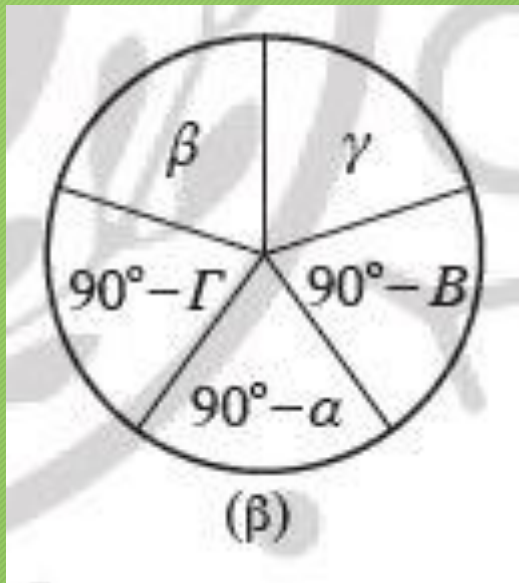
$\hat{\Gamma} = 109,88^\circ, \gamma = 121^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (IIο) και μάλιστα αφού $\gamma > \hat{\Gamma}$ ικανοποιείται το $\theta. 2$.

Και $\hat{B} = 41,315^\circ, \beta = 37^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Iο) και μάλιστα αφού $\beta < \hat{B}$ ικανοποιείται το $\theta. 2$.

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία

Λύση(συνέχεια):

Βήμα 6°: Έλεγχος-Τύπος ελέγχου



Πρέπει $\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma})$

Είναι:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha \simeq -0,411$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) &= \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 41,319^\circ \cdot \varepsilon\varphi 109,88^\circ} = -0,411 \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

III. Όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία Άλυτες Ασκήσεις:

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 68^\circ 24'$ και $\gamma = 132^\circ 17,1'$.
2. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 28^\circ 16'$ και $\gamma = 48^\circ 24'$.

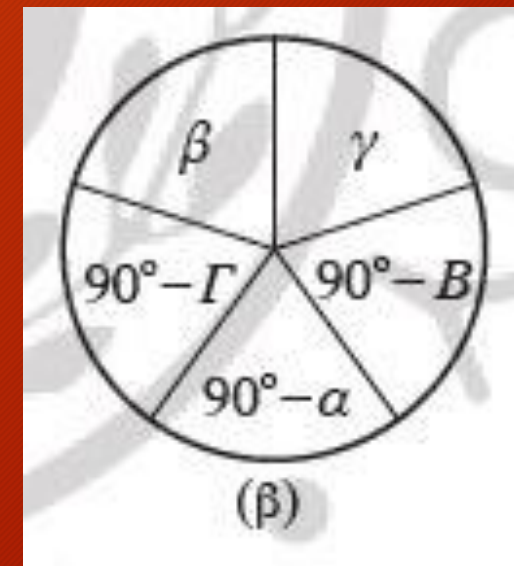
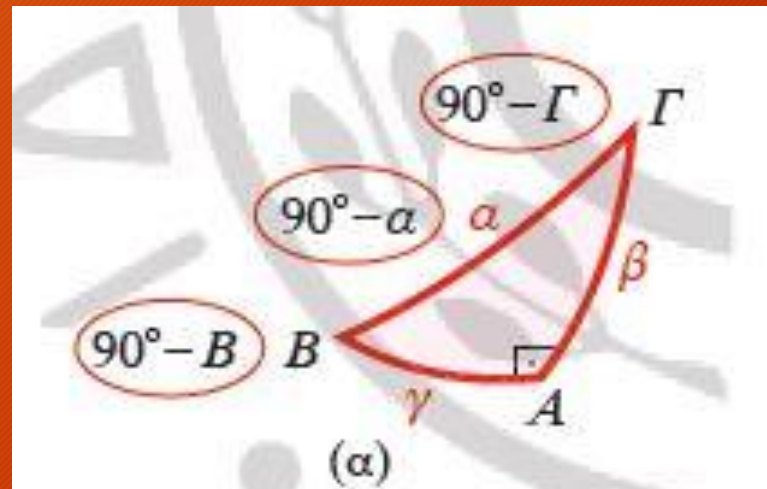
IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Παράδειγμα :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 1^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 52^\circ$.

Λύση:

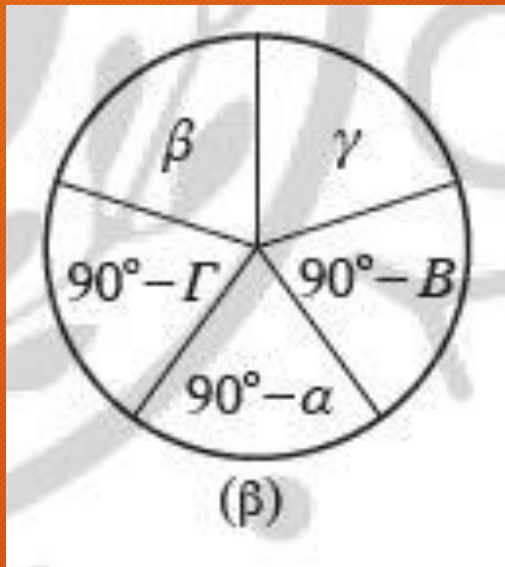
Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2^ο:



Υπολογίζουμε την α (οι β και $90^\circ - \alpha$ είναι προσκείμενες στην $90^\circ - \hat{\Gamma}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{\Gamma}) = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha \Rightarrow$$

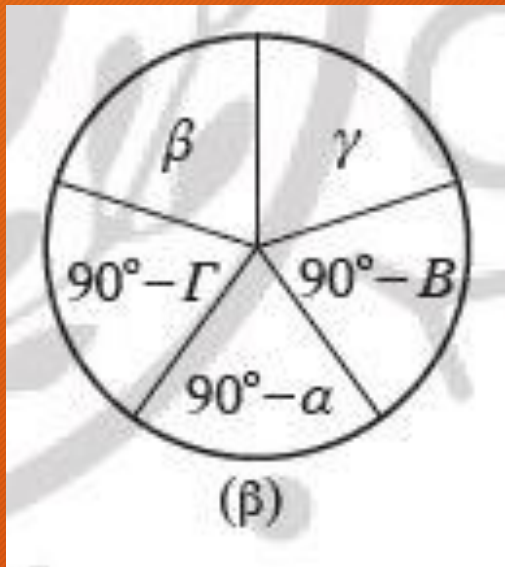
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi\beta \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2°:



$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi 1^\circ}{\sigma\upsilon\nu 52^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi 1^\circ}{\sigma\upsilon\nu 52^\circ}\right) \Rightarrow$$

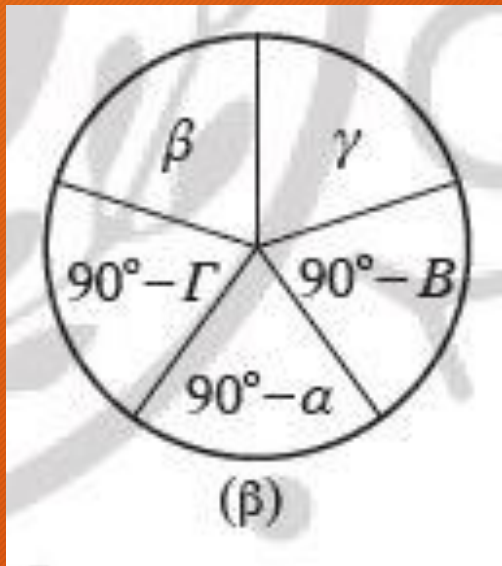
$$\Rightarrow \alpha = 1,624^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1^\circ 37,5'$$

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3^ο:



Υπολογίζουμε την \hat{B} (τα β και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ είναι απέναντι από την $90^\circ - \hat{B}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu 1^\circ \cdot \eta\mu 52^\circ \Rightarrow$$

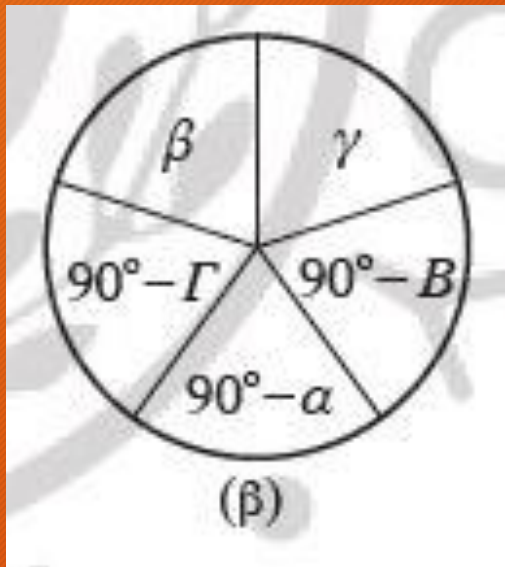
$$\Rightarrow \hat{B} = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 1^\circ \cdot \eta\mu 52^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 38,011^\circ \simeq 38^\circ$$

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4°:



Υπολογίζουμε την γ (οι γ και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στην β)

$$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \cdot \eta\mu\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \text{τοξ}\varepsilon\varphi(\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \cdot \eta\mu\beta) \Rightarrow$$

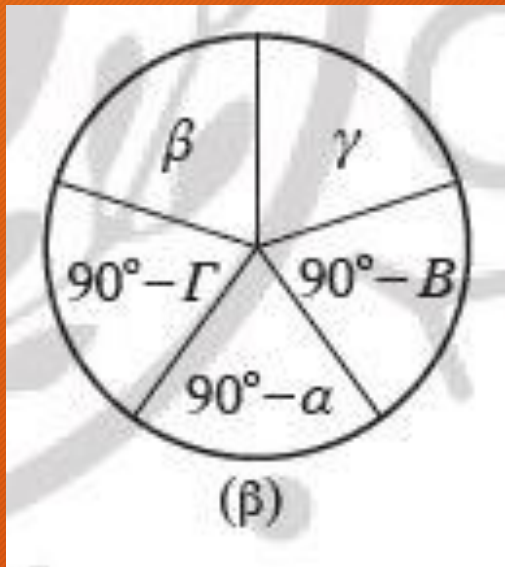
$$\Rightarrow \gamma = 1,28^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 1^\circ 17'$$

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 5^ο:



Τσεκάρουμε:

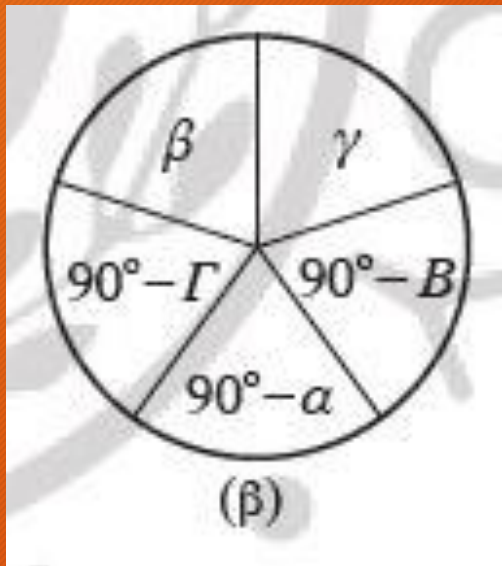
$\hat{\Gamma} = 52^\circ, \gamma = 1^\circ 17'$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Iο) και μάλιστα αφού $\gamma < \hat{\Gamma}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

Ομοίως, $\hat{B} = 38^\circ, \beta = 1^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Iο) και μάλιστα αφού $\beta < \hat{B}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 6°: Έλεγχος-Τύπος Ελέγχου



Πρέπει

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha)$$

Πράγματι:

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \sigma\upsilon\nu\hat{B} = 0,788$$

$$\varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} = 0,788$$

IV. Όταν δίνονται μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν γωνία
Άλυτες Ασκήσεις:

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ 45,3'$ και $\hat{\Gamma} = 135^\circ 24,4'$.
2. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 38^\circ 22'$ και $\gamma = 118^\circ$.

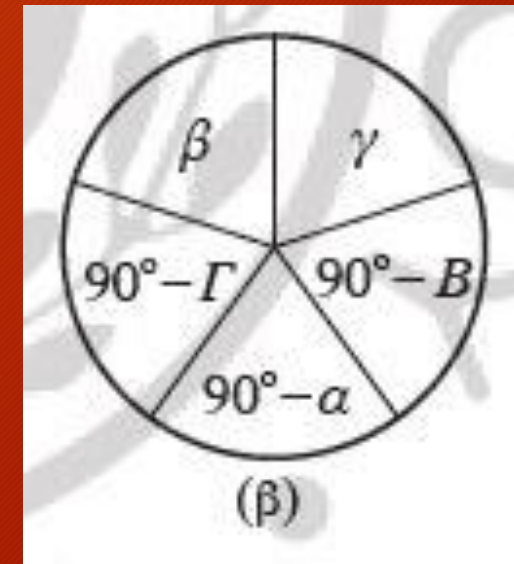
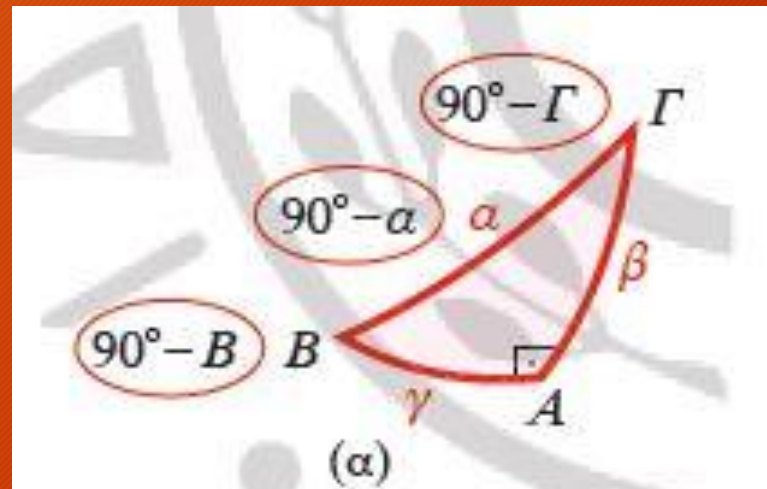
V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Παράδειγμα 1 :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 42^\circ 15'$ και $\hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12''$.

Λύση:

Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα

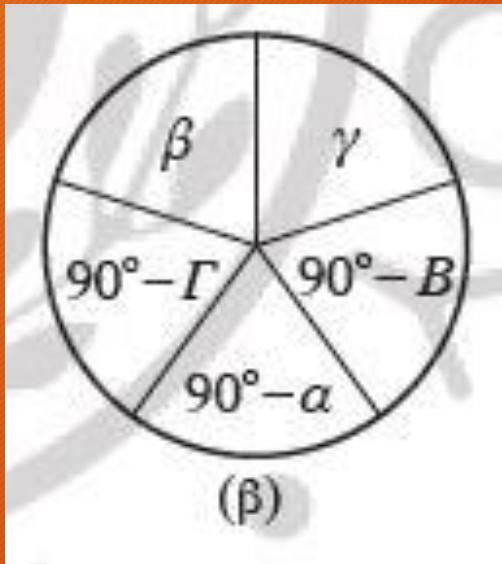


V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2^ο:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



Υπολογίζουμε την α ($90^\circ - \hat{B}$ και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ προσκείμενες στο $90^\circ - \alpha$)

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

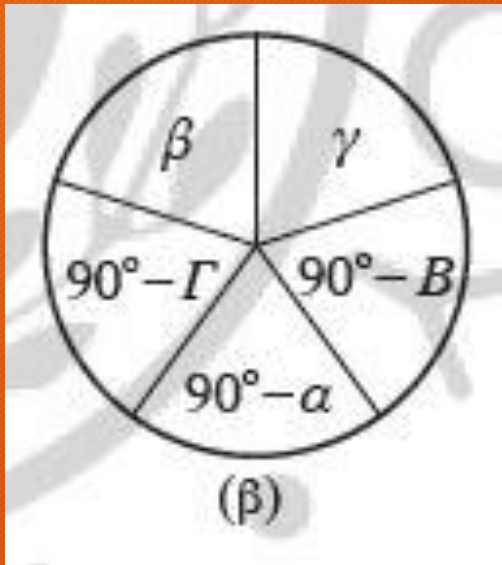
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2^ο:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi 58,353^\circ \cdot \varepsilon\varphi 42,25^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi 58,353^\circ \cdot \varepsilon\varphi 42,25^\circ}\right) \Rightarrow$$

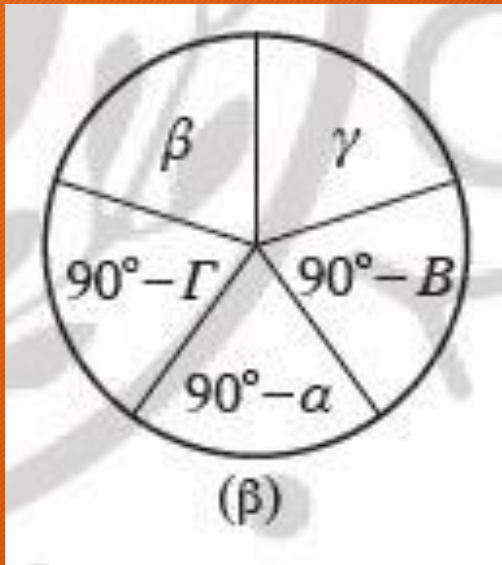
$$\alpha = 47,27^\circ = 47^\circ 16,2' \simeq 47^\circ 16'$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3^ο:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και, } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



Υπολογίζουμε την β (τα β και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ είναι απέναντι από την $90^\circ - \hat{B}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

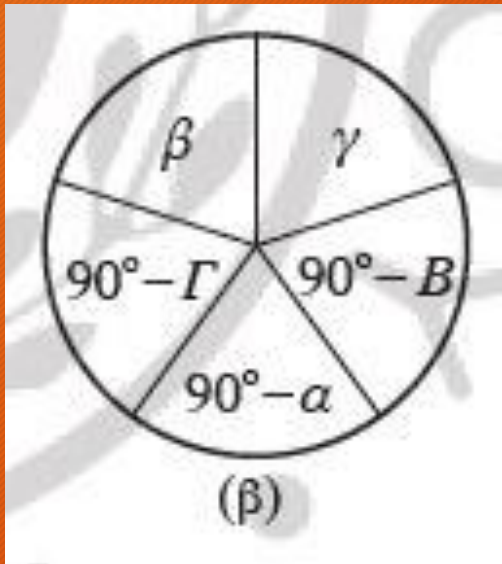
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3°:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu 42,25^\circ}{\eta\mu 58,353^\circ} \Rightarrow$$

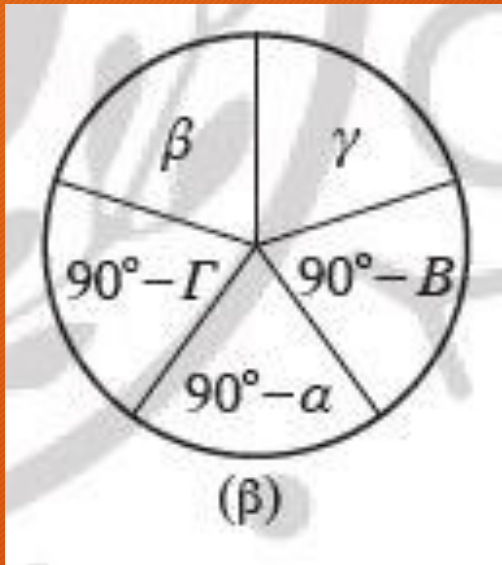
$$\Rightarrow \beta = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 42,25^\circ}{\eta\mu 58,353^\circ}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 29,597^\circ \simeq 29^\circ 35,82'$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4^ο:



$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και, } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$

Υπολογίζουμε την γ (οι γ και $90^\circ - \hat{B}$ είναι προσκείμενες στην $90^\circ - \hat{\Gamma}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{\Gamma}) = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu\hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\hat{B}} \Rightarrow$$

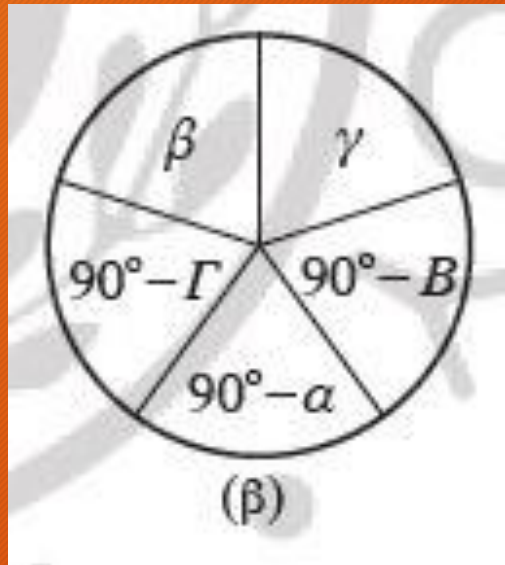
$$\Rightarrow \gamma = \tau\omicron\varsigma\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\eta\mu\hat{B}}\right) \Rightarrow$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4^ο:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και, } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



$$\Rightarrow \gamma = \text{τοξσυν}\left(\frac{\text{συν}58,353}{\eta\mu42,25}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 38,707^\circ \Rightarrow$$

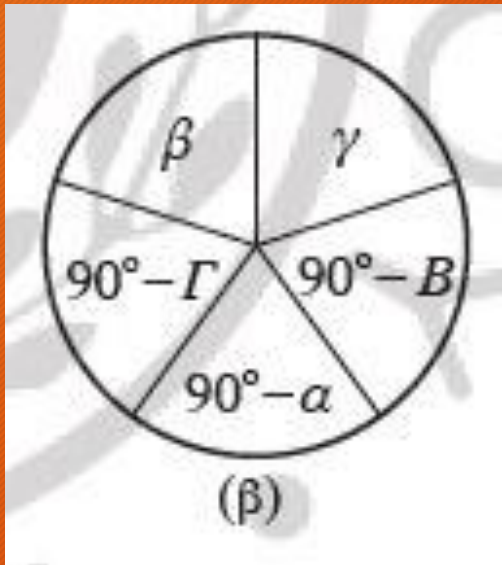
$$\Rightarrow \gamma = 38^\circ 42,42'$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 5^ο:

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και, } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$



Τσεκάρουμε:

$\hat{\Gamma} = 58,353^\circ, \gamma = 38,707^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Iο) και μάλιστα αφού $\gamma < \hat{\Gamma}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

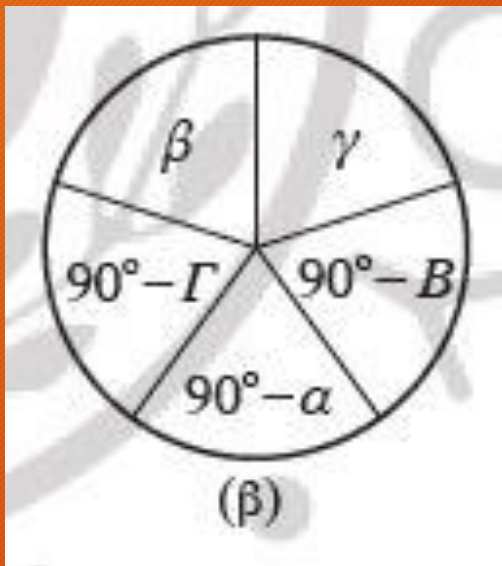
Ομοίως, $\hat{B} = 42,25^\circ, \beta = 29,597^\circ$ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (Iο) και μάλιστα αφού $\beta < \hat{B}$ ικανοποιείται το Θ. 2.

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

$$\hat{B} = 42^\circ 15' = 42,25^\circ, \text{ και } \hat{\Gamma} = 58^\circ 21' 12'' = 58,353^\circ.$$

Βήμα 6°: Έλεγχος-Τύπος Ελέγχου



$$\text{Πρέπει: } \eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\text{Πράγματι } \eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha \simeq 0,679$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \simeq 0,679$$

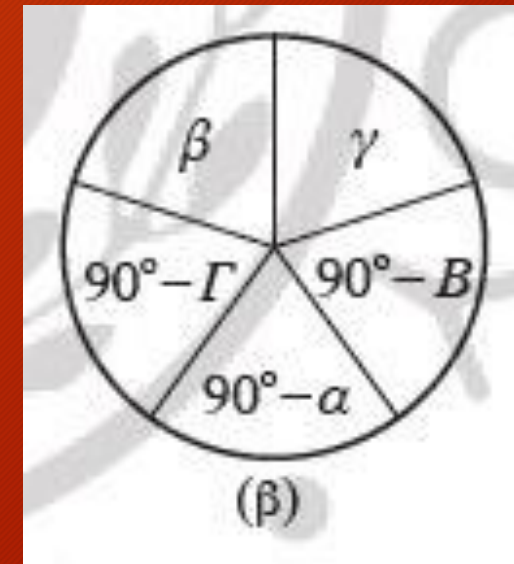
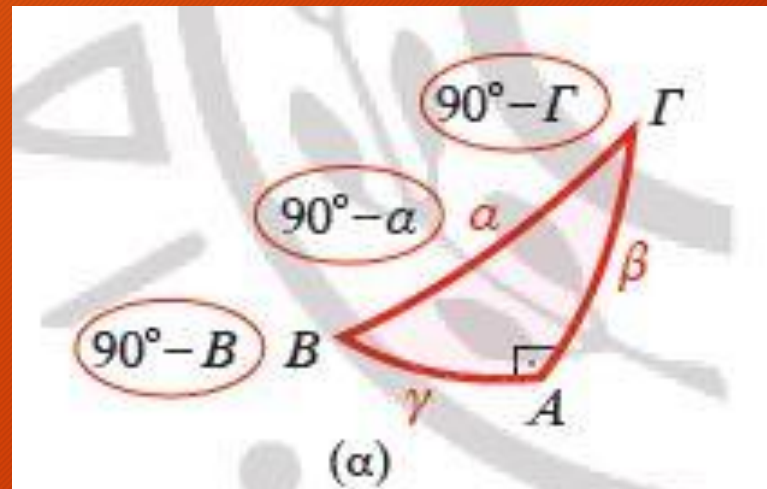
V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Παράδειγμα 2 :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 150^\circ$.

Λύση:

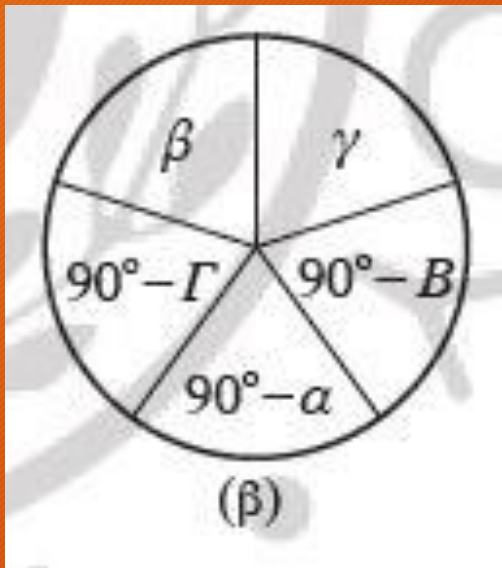
Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2^ο:



Υπολογίζουμε την α ($90^\circ - \hat{B}$ και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ προσκείμενες στο $90^\circ - \alpha$)

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi\hat{B} \cdot \sigma\varphi\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi 50^\circ \cdot \varepsilon\varphi 150^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -1,453 \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

V. Όταν δίνονται δύο γωνίες εκτός της ορθής

Άλυτες Ασκήσεις:

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 73^\circ 3'$ και $\hat{\Gamma} = 42^\circ 26'$.
2. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 51^\circ 9'$ και $\hat{\Gamma} = 98^\circ 37'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

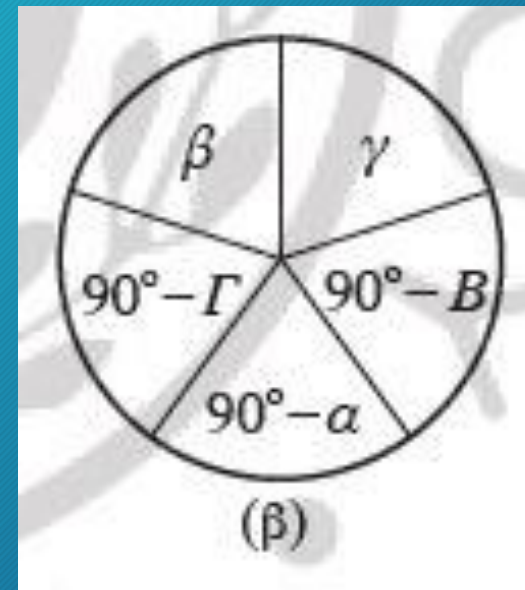
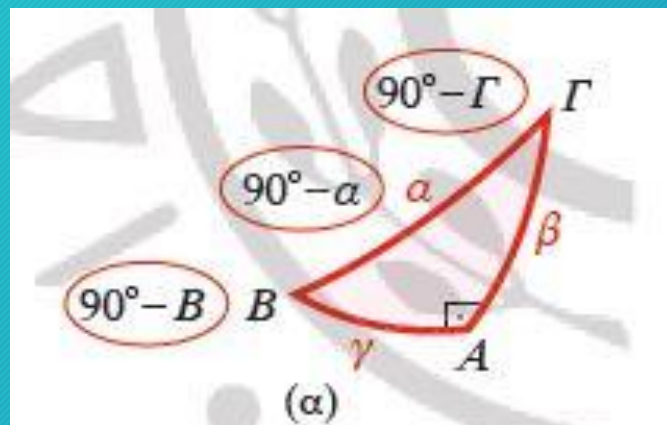
VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Παράδειγμα 1 :

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$ και $\hat{B} = 80^\circ$.

Λύση:

Βήμα 1^ο: Κάνουμε τα διαγράμματα



VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

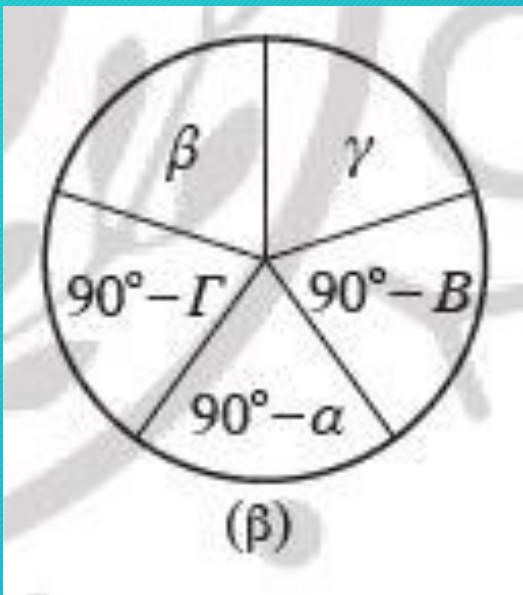
Βήμα 2^ο:

Υπολογίζουμε τη γ (τα β και $90^\circ - \hat{B}$ είναι προσκείμενα στο γ)

$$\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \hat{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\hat{B} \Rightarrow$$

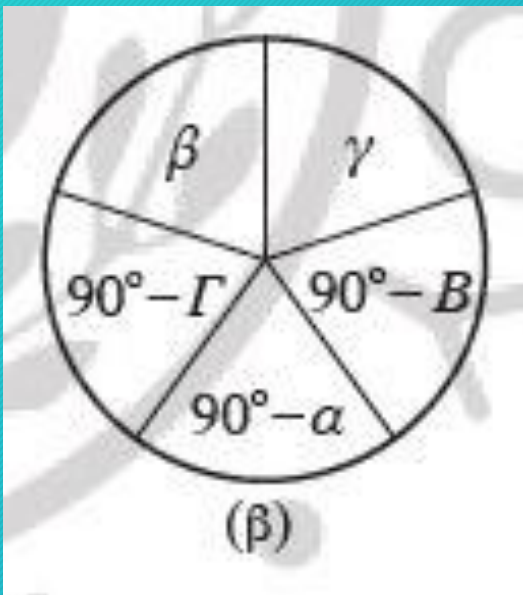
$$\Rightarrow \eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{B}} \Rightarrow$$



VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 2°:



$$\Rightarrow \eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi 30^\circ \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 80^\circ} \Rightarrow$$

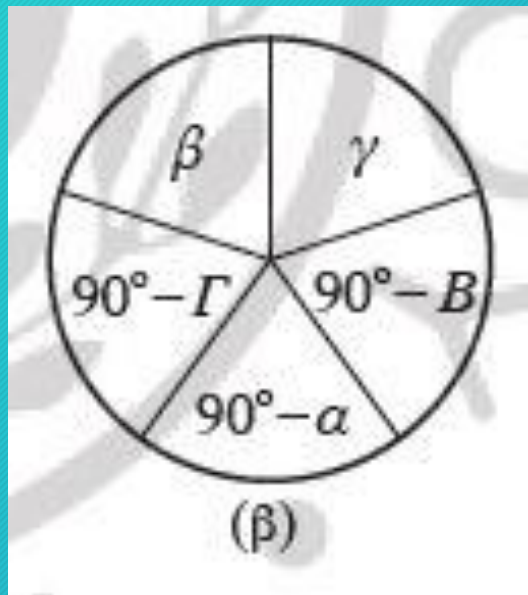
$$\Rightarrow \gamma = \tau\omicron\xi\eta\mu\left(\varepsilon\varphi 30^\circ \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 80^\circ}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \begin{cases} 5,843^\circ \simeq 5^\circ 51' \\ \text{ή} \\ 180^\circ - 5,843^\circ = 174,157^\circ \simeq 174^\circ 9' \end{cases}$$

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 3^ο:



Υπολογίζουμε την α (τα $90^\circ - \alpha$ και $90^\circ - \hat{B}$ είναι προσκείμενα στο β)

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{B})$$

$$\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\hat{B}$$

$$\eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\hat{B}}$$

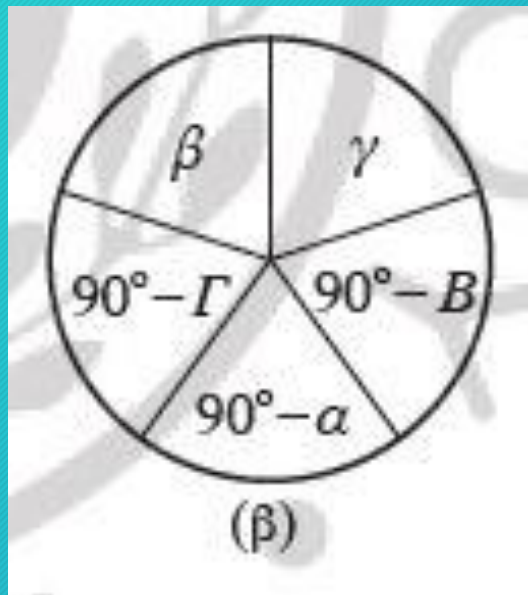
$$\alpha = \tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 80^\circ}\right)$$

$$\alpha = \begin{cases} 30,512^\circ = 30^\circ 31' \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{ή} \\ 149,488^\circ = 149^\circ 29' \end{cases}$$

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4^ο:



Υπολογίζουμε την $\hat{\Gamma}$ (οι β και $90^\circ - \hat{\Gamma}$ είναι απέναντι στην $90^\circ - \hat{B}$)

$$\eta\mu(90^\circ - \hat{B}) = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\beta} \Rightarrow$$

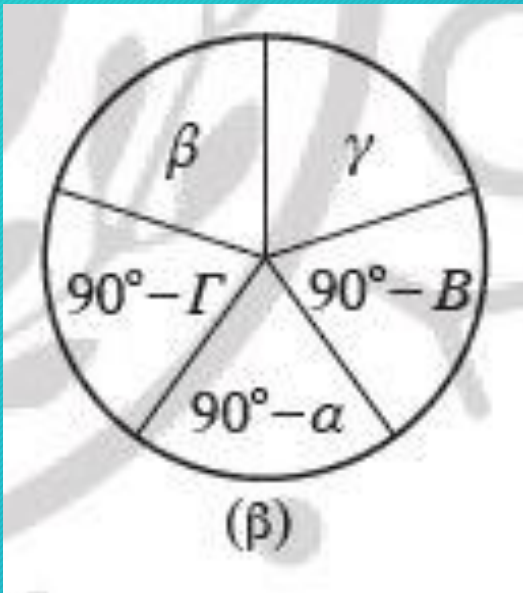
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

46

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 4^ο:



$$\Rightarrow \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu 80^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 80^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \begin{cases} 11,567^\circ = 11^\circ 34' \\ \quad \quad \quad \eta \\ 168,433^\circ = 168^\circ 26' \end{cases}$$

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

ΘΕΩΡΗΜΑ 3:

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ αν η **υποτείνουσα** ανήκει στο **Ιο τεταρτημόριο** τότε **οι δύο άλλες πλευρές του** (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες εκτός της ορθής) **ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο** και **αντίστροφα!!!**

π.χ.

στο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, τότε αφού από υπόθεση $\beta = 30^\circ$ αν και $\gamma = 5^\circ 51'$ (δηλαδή $\beta, \gamma \in \text{Ιο τεταρτημόριο}$) τότε ισχύει: $\alpha = 30^\circ 31'$.

Βεβαίως και οι γωνίες $B, \Gamma \in \text{Ιο τεταρτημόριο}$.

Αντίστοιχα, σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ αν η **υποτείνουσα** ανήκει στο **Ιιο τεταρτημόριο** τότε **οι δύο άλλες πλευρές του** (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες εκτός της ορθής) **ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια** και **αντίστροφα!!!**

π.χ.

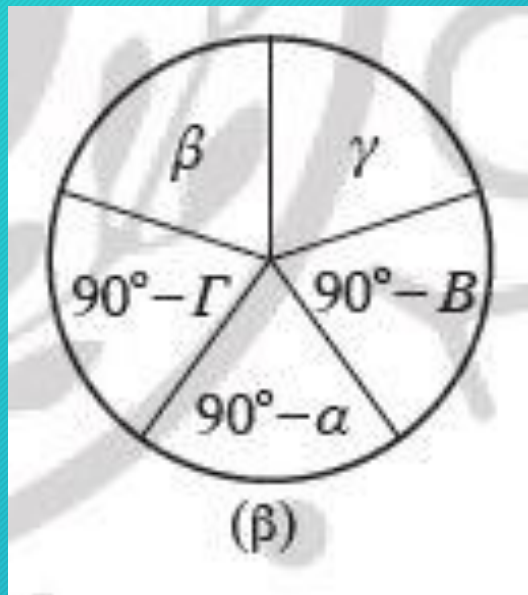
στο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, όταν από υπόθεση $\beta = 30^\circ$, αν $\gamma = 115,59^\circ$ (δηλαδή β, γ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια) τότε ισχύει: $\alpha = 149^\circ 29'$.

Βεβαίως, οι γωνίες ανήκουν, η κάθε μια, στο τεταρτημόριο που ανήκει η αντίστοιχη πλευρά.

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 5^ο:



A) Αν $\hat{\Gamma} = 11^\circ 34'$ τότε $\gamma = 5^\circ 51'$ σύμφωνα με το Θ.2..

Όταν οι β, γ έχουν τα πέρατά τους στο Iο τεταρτημόριο τότε και η υποτείνουσα α έχει το πέρασ της στο Iο τεταρτημόριο.

Άρα $\alpha = 30^\circ 31'$.

B) Αν $\hat{\Gamma} = 168^\circ 26'$ τότε $\gamma = 174^\circ 9'$ σύμφωνα με το Θ.2..

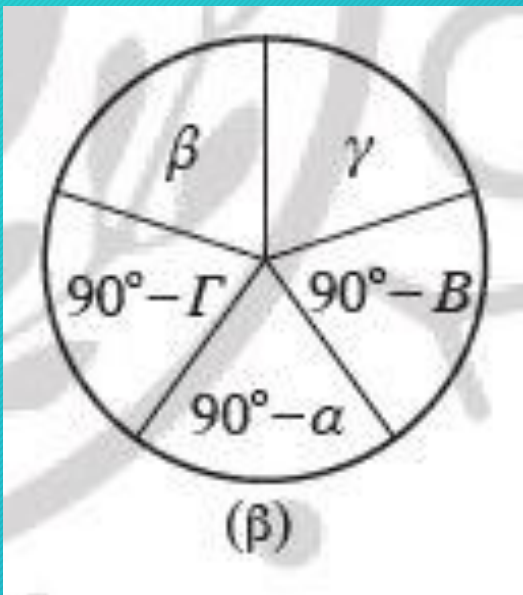
Όταν οι β, γ έχουν τα πέρατά τους σε διαφορετικό τεταρτημόριο τότε η υποτείνουσα α έχει το πέρασ της στο IIο τεταρτημόριο.

Άρα $\alpha = 149^\circ 29'$.

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία

Λύση (συνέχεια):

Βήμα 6^ο: Έλεγχος-Τύπος Ελέγχου



$$\text{Πρέπει: } \eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\Gamma})$$

$$\text{Πράγματι } \eta\mu\gamma \simeq 0,102$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\Gamma}) = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\hat{\Gamma} \simeq 0,102$$

VI. Όταν δίνονται μία πλευρά και η απέναντι σε αυτήν γωνία Άλυτες Ασκήσεις.

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta = 46^\circ 46,4'$ και $\hat{B} = 57^\circ 28,3'$.
2. Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\gamma = 162^\circ 53,4'$ και $\hat{\Gamma} = 138^\circ 14,9'$.

Να λυθούν οι άσκήσεις!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη

Καλό Διάβασμα!!!

Επιμέλεια: Δρ Ασημίνα Κριμπένη