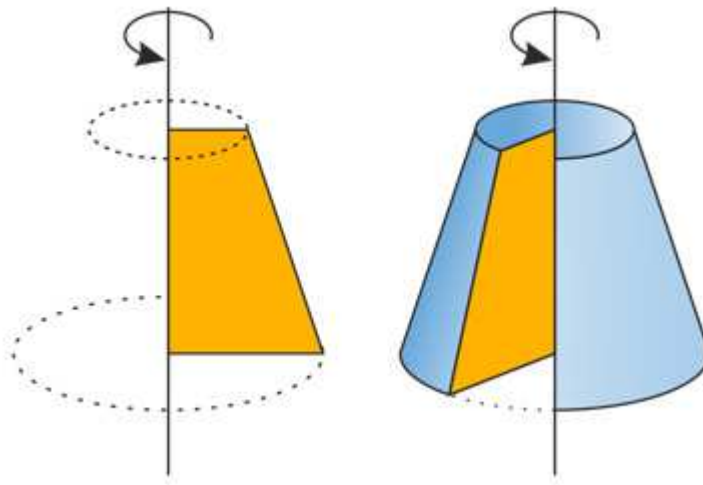




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Όγκοι στερεών εκ περιστροφής



Σπουδαστής: Σκλαβενίτης Γεώργιος (AM 8975)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: **21.11.2025**
Ημερομηνία κατάθεσης: **....02.2026**
Ημερομηνία εξέτασης: **02.03.2026**

A/A	Όνοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (PhD) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (PhD) Καθηγήτρια	Άριστα 10	
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (Msc) ΕΔΙΠ	Άριστα 10	
Τελικός χαρακτηρισμός		Άριστα 10	

Περίληψη

Οι όγκοι των στερεών εκ περιστροφής, προκύπτουν όταν μία περιοχή του επιπέδου περιστρέφεται γύρω από μία ευθεία (τον άξονα περιστροφής). Η περιοχή αυτή, μπορεί να είναι κάποιο υποσύνολο του επιπέδου. Η περιστροφή δημιουργεί μία τρισδιάστατη μορφή, δηλαδή ένα στερεό. Συνήθως, οι όγκοι αυτοί υπολογίζονται με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων. Γνωστότεροι τύποι στερεών εκ περιστροφής, είναι οι ακόλουθοι:

- Κώνος, που προκύπτει όταν περιστρέψω μία τμηματικά ορισμένη ευθεία, γύρω από τον άξονα της.
- Κύλινδρος, που προκύπτει όταν περιστρέψω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, γύρω από μία πλευρά του.
- Σφαίρα, που προκύπτει όταν περιστρέψω ένα ημικύκλιο, γύρω από τη διάμετρο του.

Λέξεις κλειδιά

Κώνος (κόλουρος, ορθός), κύλινδρος, σφαίρα, δίσκος, όγκος, άξονας περιστροφής, στερεά εκ περιστροφής, ελλειψοειδές, κυκλοειδής καμπύλη, συντεταγμένες (καρτεσιανές, σφαιρικές, κυλινδρικές), χωρητικότητα (δεξαμενών, φορτίου), όγκος (έρματος, εξαρτημάτων, δεξαμενών), προσομοίωση πλημμύρας, σχεδίαση σωληνώσεων

Περιεχόμενα

Περίληψη	2
Λέξεις κλειδιά	2
Περιεχόμενα.....	3
1. Εφαρμογές των όγκων των στερεών εκ περιστροφής, στη ναυτιλία.....	5
1.1 Υπολογισμός της χωρητικότητας των δεξαμενών	5
1.2 Σχεδιασμός των σκαφών και υπολογισμός της χωρητικότητας του φορτίου	5
1.3 Ανάλυση και βελτιστοποίηση του σχήματος της πρύμνης και του κύτους	5
1.4 Σχεδιασμός των εξαρτημάτων και του εξοπλισμού του πλοίου	5
1.5 Αποθήκευση και μεταφορά των αερίων και των υγρών, σε κυλινδρικές δεξαμενές	6
1.6 Διαχείριση των καυσίμων και αποθήκευση τους.....	6
1.7 Αναλυτική μελέτη της σταθερότητας του πλοίου.....	6
1.8 Σχεδίαση των σωληνώσεων (piping design).....	7
1.9 Υπολογισμός του όγκου του έρματος (ballast water)	7
1.10 Υπολογισμός της φόρτωσης των σιλό και των κυλινδρικών δοχείων	7
1.11 Σχεδιασμός της προπέλας και των εξαρτημάτων της έλικας.....	7
1.12 Σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες στη ναυτική χαρτογραφία	8
1.13 Κατασκευή των αντλιών και των συστημάτων ροής.....	8
1.14 Σχεδιασμός των δεξαμενών πίεσης.....	8
1.15 Προσομοίωση πλημμύρας (damage stability).....	8
2. Όγκος στερεών εκ περιστροφής.....	8
Παρατήρηση 1	9
Παρατήρηση 2.....	9
Παρατήρηση 3.....	9
Παρατήρηση 4.....	10
Παρατήρηση 5.....	10
3. Όγκος της σφαίρας.....	11
Παρατήρηση 6.....	11
Εφαρμογή 1	12
Εφαρμογή 2	12
Εφαρμογή 3	13
Παρατήρηση 7.....	13
Εφαρμογή 4.....	13
Εφαρμογή 5	14
Εφαρμογή 6	14
Εφαρμογή 7.....	14
Εφαρμογή 8.....	15
Εφαρμογή 9.....	15
Εφαρμογή 10.....	16
Εφαρμογή 11.....	16
Εφαρμογή 12.....	17
Εφαρμογή 13.....	18
Εφαρμογή 14.....	19
Εφαρμογή 15.....	20
Εφαρμογή 16.....	21
Εφαρμογή 17.....	21
Εφαρμογή 18.....	22
Εφαρμογή 19.....	22
Εφαρμογή 20.....	23

Εφαρμογή 21	23
Εφαρμογή 22	24
Εφαρμογή 23	24
Εφαρμογή 24	25
Εφαρμογή 25	25
Εφαρμογή 26	26
Εφαρμογή 27	27
Εφαρμογή 28	27
Εφαρμογή 29	28
Εφαρμογή 30	28
Εφαρμογή 31	29
Εφαρμογή 32	29
Εφαρμογή 33	30
Εφαρμογή 34	30
Εφαρμογή 35	30
Εφαρμογή 36	31
Εφαρμογή 37	31
Εφαρμογή 38	31
Εφαρμογή 39	32
Εφαρμογή 40	32
Εφαρμογή 41	33
Εφαρμογή 42	33
Εφαρμογή 43	33
Εφαρμογή 44	34
Εφαρμογή 45	34
Εφαρμογή 46	35
Εφαρμογή 47	35
Εφαρμογή 48	35
Εφαρμογή 49	36
Εφαρμογή 50	37
Εφαρμογή 51	37
Εφαρμογή 52	38
Εφαρμογή 53	38
Εφαρμογή 54	39
Εφαρμογή 55	40

1. Εφαρμογές των όγκων των στερεών εκ περιστροφής, στη ναυτιλία

Η εφαρμογή των όγκων στερεών εκ περιστροφής στη ναυτιλία, συμβάλλει στον σχεδιασμό και στη λειτουργία των πλοίων. Είναι απαραίτητη για:

- τη σωστή διαχείριση των φορτίων,
- τη βελτιστοποίηση της κατανάλωσης των καυσίμων,
- την ασφαλή αποθήκευση των υγρών και των αερίων φορτίων,
- τη διατήρηση της ασφάλειας και της σταθερότητας των πλοίων.

Με τον σωστό υπολογισμό και με την ανάλυση αυτών των γεωμετρικών παραμέτρων, οι ναυτιλιακές επιχειρήσεις μπορούν να εξασφαλίσουν τη μέγιστη αποδοτικότητα και την ασφαλή λειτουργία των πλοίων τους.

Οι όγκοι των στερεών εκ περιστροφής, έχουν αρκετές σημαντικές εφαρμογές στην εμπορική ναυτιλία, διότι η κατανόηση της γεωμετρίας και του όγκου των στερεών αντικειμένων που χρησιμοποιούνται στα πλοία, είναι απαραίτητη για τον σωστό σχεδιασμό, τη λειτουργία και την ασφαλή μεταφορά των φορτίων. Μερικές από τις βασικές εφαρμογές είναι οι παρακάτω.

1.1 Υπολογισμός της χωρητικότητας των δεξαμενών

Τα πλοία, ειδικά τα δεξαμενόπλοια χρησιμοποιούν δεξαμενές για την αποθήκευση των υγρών φορτίων (πετρέλαιο, παράγωγα πετρελαίου, χημικά). Αυτές οι δεξαμενές, συχνά έχουν κυλινδρικό ή κωνικό σχήμα και οι όγκοι τους υπολογίζονται με τη βοήθεια της γεωμετρίας των στερεών εκ περιστροφής. Ο υπολογισμός του όγκου των δεξαμενών, είναι κρίσιμος για τον υπολογισμό του φορτίου που μπορεί να μεταφέρει το πλοίο και για την παρακολούθηση της κατανάλωσης, κατά τη διάρκεια του πλου.

1.2 Σχεδιασμός των σκαφών και υπολογισμός της χωρητικότητας του φορτίου

Ο σχεδιασμός των σκαφών, απαιτεί τον ακριβή υπολογισμό του όγκου και της χωρητικότητας των διαφόρων τμημάτων του πλοίου, όπως τα αμπάρια, οι δεξαμενές και οι κενές περιοχές του πλοίου. Αυτοί οι υπολογισμοί, βασίζονται σε σχήματα στερεών εκ περιστροφής (π.χ. κυλινδρικά, κωνικά ή σφαιρικά τμήματα), προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το πλοίο μπορεί να μεταφέρει τον προβλεπόμενο όγκο του φορτίου, χωρίς να παραβιάζεται η ασφαλής πλευση, ούτε η ευστάθεια του πλοίου.

1.3 Ανάλυση και βελτιστοποίηση του σχήματος της πρύμνης και του κύτους

Η βελτιστοποίηση του σχήματος του κύτους (και συγκεκριμένα της πρύμνης) ενός πλοίου, είναι βασική για τη μείωση της αντίστασης του νερού κατά τη διάρκεια της πλευσης. Οι ναυπηγοί, χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα, που περιλαμβάνουν στερεά εκ περιστροφής, για να σχεδιάσουν το σχήμα του κύτους που θα επιτρέπει στο πλοίο να κινείται πιο αποδοτικά, με λιγότερη κατανάλωση καυσίμου και με αυξημένη ταχύτητα.

1.4 Σχεδιασμός των εξαρτημάτων και του εξοπλισμού του πλοίου

Πολλά εξαρτήματα του πλοίου, όπως οι προπέλες, οι άξονες και οι δεξαμενές των καυσίμων, περιλαμβάνουν γεωμετρικά σχήματα που μπορούν να περιγραφούν από στερεά εκ περιστροφής. Ο ακριβής υπολογισμός αυτών των όγκων, είναι απαραίτητος για την παραγωγή και για τη σωστή εγκατάσταση αυτών των εξαρτημάτων στο πλοίο και για την εκτίμηση των δυνατοτήτων της φόρτωσης και της εκφόρτωσης.

1.5 Αποθήκευση και μεταφορά των αερίων και των υγρών, σε κυλινδρικές δεξαμενές

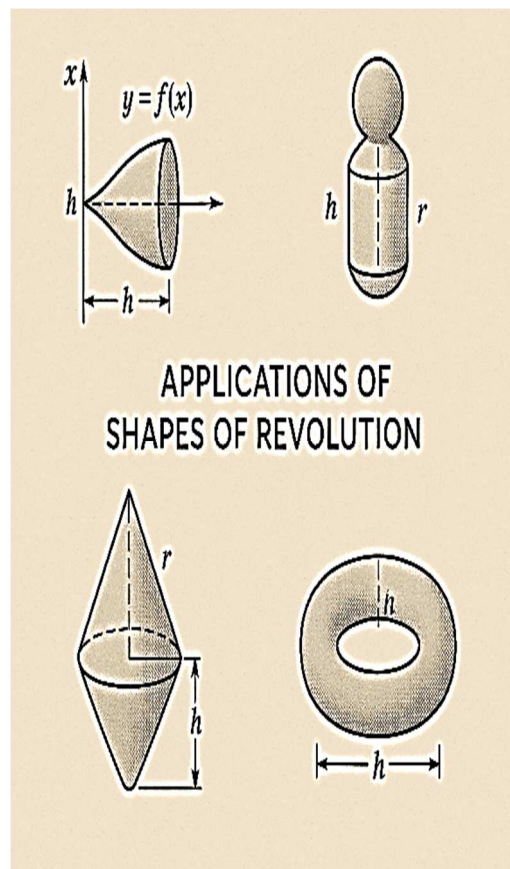
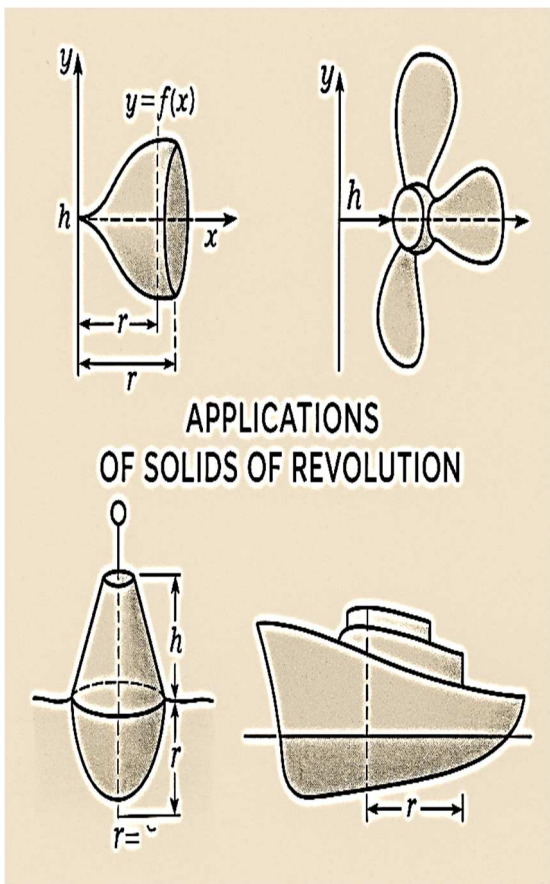
Τα πλοία που μεταφέρουν υγρά ή αέρια σε ειδικές δεξαμενές (π.χ. υγροποιημένο αέριο, παράγωγα πετρελαίου ή χημικά), διαθέτουν κυλινδρικές και κωνικές δεξαμενές, για την ασφαλή τους αποθήκευση. Η χωρητικότητα αυτών των δεξαμενών και ο όγκος του φορτίου που μπορούν να μεταφέρουν, υπολογίζονται επακριβώς με βάση τη γεωμετρία των στερεών εκ περιστροφής.

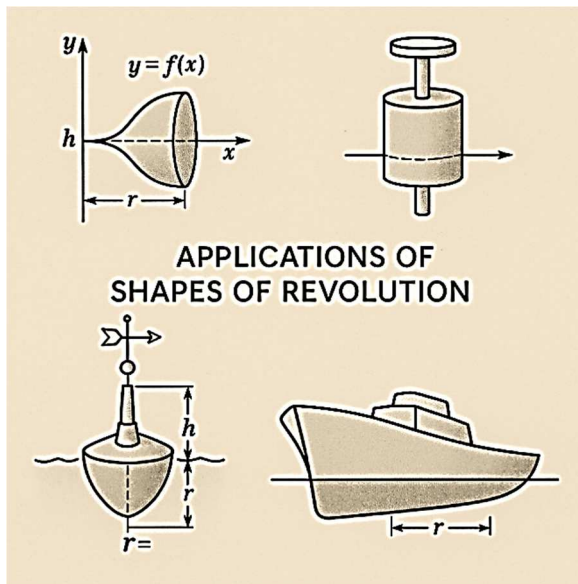
1.6 Διαχείριση των καυσίμων και αποθήκευσή τους

Στα πλοία, η σωστή διαχείριση των καυσίμων είναι κρίσιμη για την οικονομική και την ασφαλή τους πλεύση. Οι δεξαμενές των καυσίμων, συχνά έχουν κυλινδρικό ή κωνικό σχήμα και η δυνατότητα υπολογισμού του όγκου τους είναι κρίσιμη για την ακριβή εκτίμηση των αναγκών σε καύσιμα και για την παρακολούθηση της κατανάλωσης, κατά τη διάρκεια του πλου.

1.7 Αναλυτική μελέτη της σταθερότητας του πλοίου

Η ευστάθεια ενός πλοίου, εξαρτάται από την κατανομή του βάρους και του όγκου του φορτίου και από το σχήμα και την κατανομή των δεξαμενών, των αμπαριών, και των άλλων αποθηκευτικών χώρων. Για τον υπολογισμό αυτών των παραμέτρων, χρησιμοποιούνται γεωμετρικά μοντέλα που βασίζονται σε στερεά εκ περιστροφής, προκειμένου να εξασφαλιστεί η σωστή κατανομή του βάρους και η ασφάλεια του πλοίου.





1.8 Σχεδίαση των σωληνώσεων (ripping design)

Στα πλοία, υπάρχει εκτεταμένο δίκτυο σωληνώσεων (καυσίμων, υδραυλικών συστημάτων, έρματος, νερού, αέρα, ψυκτικών συστημάτων). Οι σωλήνες είναι κυλινδρικά στερεά εκ περιστροφής, άρα ο υπολογισμός:

- του όγκου της ροής
- της απώλειας της πίεσης
- της χωρητικότητας (π.χ. αέρα, υγρού)

βασίζεται σε εξισώσεις των κυλινδρικών στερεών.

1.9 Υπολογισμός του όγκου του έρματος (ballast water)

Οι δεξαμενές του έρματος, συχνά έχουν κωνικά ή κυλινδρικά τμήματα. Ο όγκος τους, πρέπει να υπολογίζεται με ακρίβεια για τη:

- σταθερότητα της πλεύσης
- διατήρηση ίσου βυθίσματος
- συμμόρφωση με τους κανονισμούς ballast water management.

1.10 Υπολογισμός της φόρτωσης των σιλό και των κυλινδρικών δοχείων

Σε ορισμένα πλοία (bulk carriers), υπάρχουν δεξαμενές αποθήκευσης σφαιρικών ή κυλινδρικών τμημάτων για κόκκους, ζωοτροφές, τσιμέντο, χύδην φορτία. Ο όγκος αυτών των δεξαμενών, καθορίζει το φορτίο που μπορεί να παραληφθεί ασφαλώς.

1.11 Σχεδιασμός της προπέλας και των εξαρτημάτων της έλικας

Η προπέλα, έχει πτερύγια που συχνά προκύπτουν από την περιστροφή των καμπύλων προφίλ γύρω από τον άξονα. Γεωμετρικά μοντέλα περιστροφής, χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό:

- της επιφάνειας των πτερυγίων
- του όγκου του υλικού
- των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών.

1.12 Σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες στη ναυτική χαρτογραφία

Οι χάρτες της ναυσιπλοΐας και τα γεωδαιτικά συστήματα, βασίζονται στη σφαιρική γεωμετρία (Γη ως στερεό εκ περιστροφής) που επιτρέπει τους ακριβείς υπολογισμούς των αποστάσεων, των ναυτιλιακών πορειών και των μέγιστων κύκλων.

1.13 Κατασκευή των αντλιών και των συστημάτων ροής

Οι αντλίες στο πλοίο, έχουν κυλινδρικά /σφαιρικά τμήματα (θάλαμοι αντλίας, έμβολα, στροφεείς) ο όγκος των οποίων στηρίζεται στην περιστροφή των στερεών.

1.14 Σχεδιασμός των δεξαμενών πίεσης

Τα πλοία μεταφοράς υγροποιημένου αερίου (LPG/LNG carriers), έχουν δεξαμενές σφαιρικές, κωνικές και κυλινδρικές. Όλες αυτές, είναι άμεσα παράγωγα των στερεών εκ περιστροφής. Ο ακριβής υπολογισμός του όγκου τους, είναι κρίσιμος για:

- τη μεγιστοποίηση της χωρητικότητας
- τον υπολογισμό των πιέσεων που αναπτύσσονται από τα αέρια
- τον υπολογισμό της θερμοκρασιακής διαστολής

1.15 Προσομοίωση πλημμύρας (damage stability)

Κατά τη μελέτη ενός ατυχήματος σε πλοίο, μοντελοποιείται η είσοδος του νερού σε χώρους. Οι χώροι συχνά θεωρούνται ως απλά στερεά εκ περιστροφής, ώστε να:

- υπολογιστεί η στάθμη του νερού
- εκτιμηθεί η διαγωγή και η κλίση του πλοίου
- υπολογιστεί η διατήρηση της πλευστότητας.

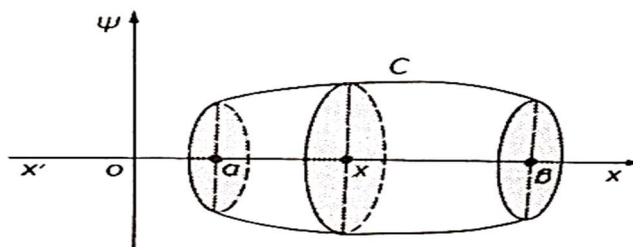
1.16 Λογισμικό φορτοεκφόρτωσης (loading computers)

Τα περισσότερα εμπορικά πλοία, χρησιμοποιούν loading software που χρειάζεται ακριβείς γεωμετρικούς υπολογισμούς του όγκου των δεξαμενών και συνήθως προκύπτουν από μοντέλα περιστροφής των καμπυλών του κύτους.

2. Όγκος στερεών εκ περιστροφής

Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$, έστω η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f , όπου η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν η f στραφεί, περί τον άξονα xx' , τότε το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ τον άξονα xx' και τη C , θα σχηματίσει ένα «στερεό εκ περιστροφής». Κάθε τομή αυτού του στερεού με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα xx' στο $[\alpha, \beta]$ είναι κύκλος ακτίνας $y = f(x)$, άρα το εμβαδόν είναι $E(x) = \pi f^2(x)$ για $x \in [\alpha, \beta]$. Ο όγκος αυτού του

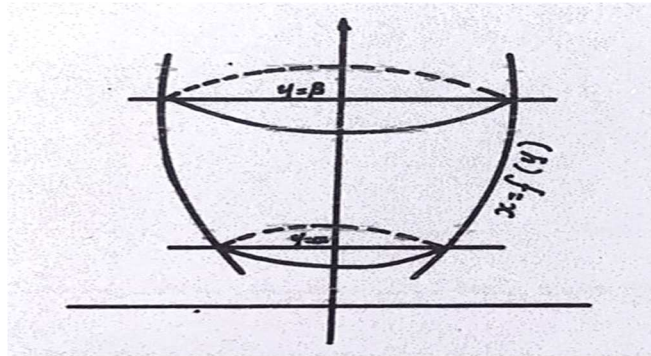
στερεού εκ περιστροφής, είναι $V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi f^2(x) dx$



Παρατήρηση 1

Αν το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $x = f(y)$ και από τις ευθείες $y = a$ και $y = \beta$ περιστραφεί περί τον άξονα yy' , τότε σχηματίζεται ένα στερεό σώμα εκ

περιστροφής με όγκο $V = \pi \int_a^\beta x^2 dy$

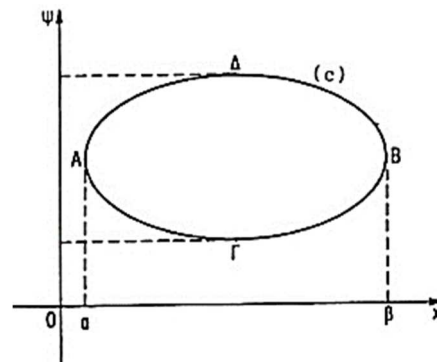


Παρατήρηση 2

Θεωρώ το χωρίο που περικλείεται από την κλειστή επίπεδη καμπύλη C. Όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του και που δεν τέμνει την καμπύλη, τότε σχηματίζεται ένα στερεό που ο όγκος του βρίσκεται ως εξής:

Θεωρώ τον άξονα περιστροφής ως άξονα xx' ενός ορθογωνίου συστήματος. Έστω A το σημείο της c με τη μεγαλύτερη τετμημένη β. Έστω $y = \varphi_1(x)$ η εξίσωση της καμπύλης γραμμής AΓB στο παρακάτω σχήμα και $y = \varphi_2(x)$ η εξίσωση της καμπύλης γραμμής AΔB. Αν οι φ_1, φ_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε ο

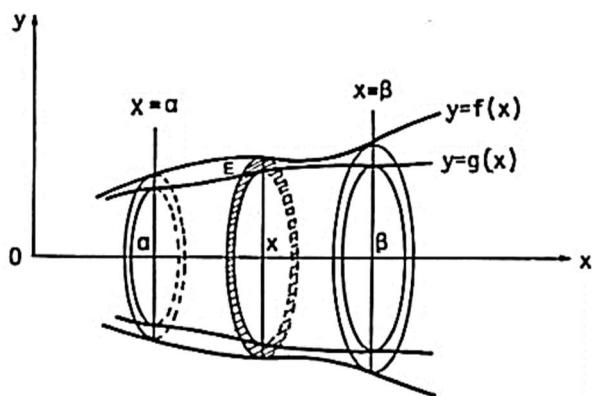
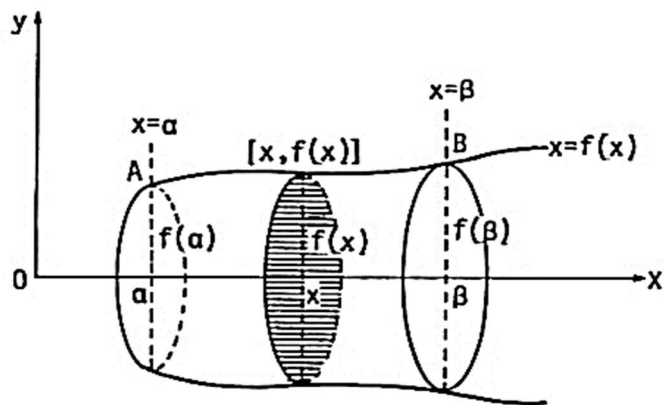
όγκος του στερεού που παράγεται είναι $V = \pi \int_a^\beta [\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x)] dx$



Παρατήρηση 3

Έστω ότι ζητείται να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή, περί τον άξονα xx' , δύο καμπυλών $y = f(x), y = g(x)$ ορισμένων και συνεχών στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ και από τις ευθείες $x = a, x = \beta$. Ο xx' άξονας δεν ανήκει στο χωρίο E (Σχήμα 8.16) Αν φέρω ένα επίπεδο κάθετο στον xx' άξονα, τότε η τομή του στερεού σώματος και του επιπέδου είναι από κυκλικός δακτύλιος εμβαδού $A(x) = \pi(f^2(x) - g^2(x))$

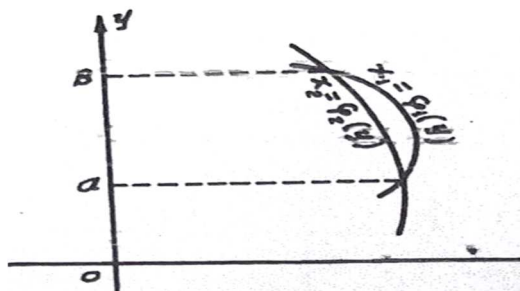
$$\text{Άρα, } V = \pi \int_a^\beta [f^2(x) - g^2(x)] dx$$



Σχ.8.16

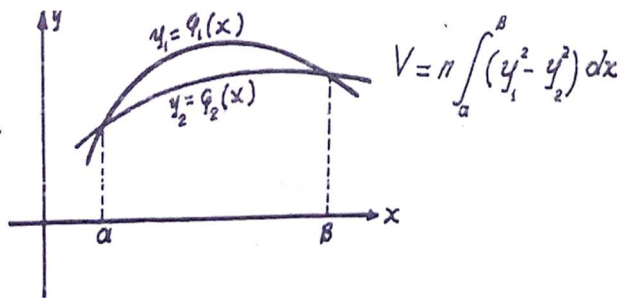
Παρατήρηση 4

Χωρίο που ορίζεται από δύο καμπύλες με εξισώσεις $x_1 = \varphi_1(y)$, $x_2 = \varphi_2(y)$, περιστρέφεται περί τον άξονα yy' . Ο όγκος του στερεού σώματος που προκύπτει, δίνεται από τον τύπο $V = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy$

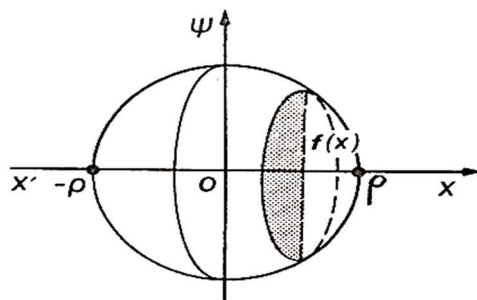


Παρατήρηση 5

Χωρίο οριζόμενο από δύο καμπύλες με εξισώσεις $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, περιστρέφεται περί τον άξονα yy' . Ο όγκος του στερεού σώματος που προκύπτει, είναι $V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$



3. Όγκος της σφαίρας



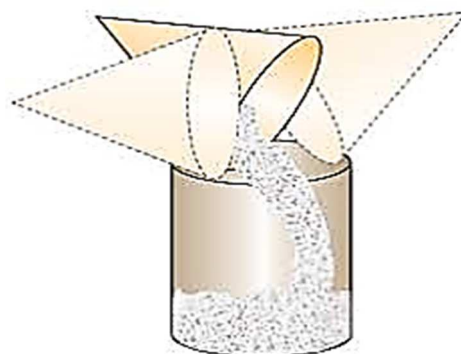
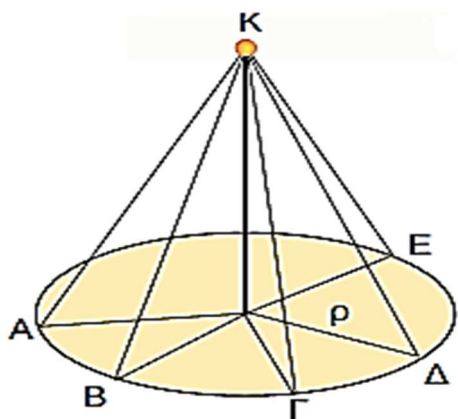
Έστω ημικύκλιο με εξίσωση $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ στο επίπεδο $Ox\psi$. Αν στραφεί περί άξονα xx' , τότε το στερεό σώμα εκ περιστροφής που σχηματίζεται είναι σφαίρα, ακτίνας ρ και όγκου $V = \int_{-\rho}^{\rho} \pi \cdot f^2(x) dx = \pi \int_{-\rho}^{\rho} (\rho^2 - x^2) dx = \pi \left[\rho^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\rho}^{\rho} = \frac{4}{3} \pi \rho^3$

Παρατήρηση 6

Για τον υπολογισμό του όγκου ενός ορθού κώνου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος h , θεωρώ ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\rho}{h} x$ στρέφεται περί τον άξονα xx' , οπότε ο

$$\text{όγκος είναι } V = \int_0^h \pi \cdot f^2(x) dx = \int_0^h \pi \cdot \frac{\rho^2}{h^2} x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi \rho^2 h$$

Ομοίως, για τον όγκο ενός ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος h , θεωρώ ότι η ευθεία $y = \rho$ στρέφεται περί τον xx' , άρα είναι $V = \int_a^{a+h} \pi \cdot \rho^2 dx = \pi \rho^2 h$



Εφαρμογή 1

Έστω στερεό σώμα με κυκλική βάση, ακτίνας a . Εύρεση του όγκου του, αν κάθε κάθετη τομή του επιπέδου, σε μια σταθερή διάμετρο, είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

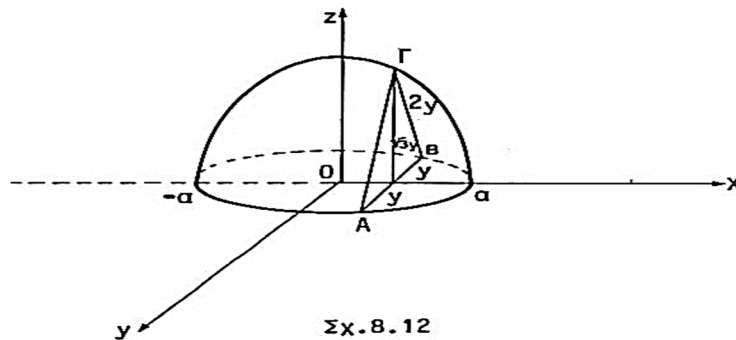
Παίρνω ως σταθερή διάμετρο, αυτή που κείται πάνω στον άξονα Ox

Η εξίσωση του κύκλου, δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 = a^2$

Το ισόπλευρο τρίγωνο βάσης $2y$ και ύψους $\sqrt{3}y$, έχει εμβαδόν

$$A(x) = \frac{1}{2} 2y \sqrt{3}y = \sqrt{3}y^2 \text{ και από την } y^2 = a^2 - x^2 \text{ είναι } A(x) = \sqrt{3}(a^2 - x^2)$$

$$\text{Άρα, } V = \sqrt{3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \sqrt{3} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$$



Εφαρμογή 2

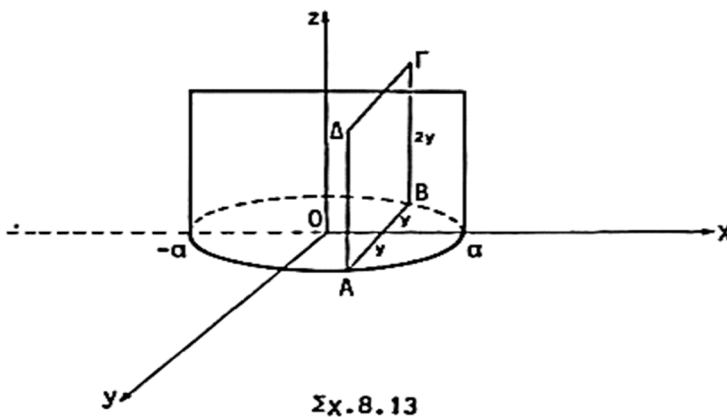
Το προηγούμενο παράδειγμα, αν η κάθετη τομή είναι ένα τετράγωνο.

Λύση

Το τετράγωνο έχει πλευρά $2y$ και εμβαδόν $A(x) = 4y^2$

Από την εξίσωση του κύκλου είναι $y^2 = a^2 - x^2$, άρα $A(x) = 4(a^2 - x^2)$

$$\text{Συνεπώς, } V = 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 4 \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{16a^3}{3}$$



Εφαρμογή 3

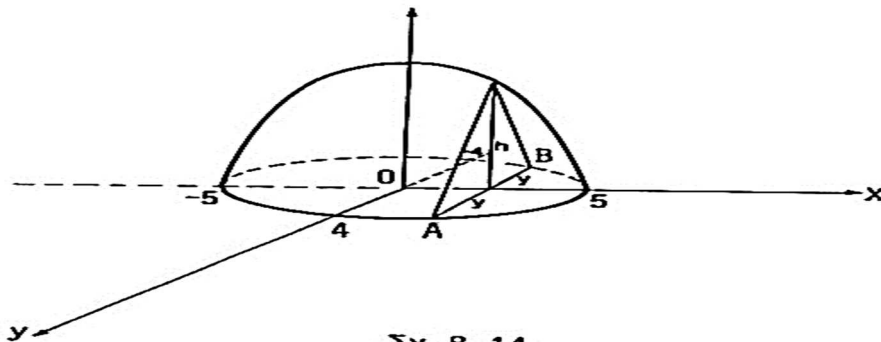
Ένα στερεό σώμα έχει ως βάση του μία έλλειψη με μικρό άξονα μήκους 8 και εκκεντρότητα $e = \frac{3}{5}$. Βρείτε τον όγκο του στερεού σώματος, αν κάθε τομή στον μεγάλο άξονα είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο ύψους h

Λύση

Έστω ότι ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον xx' άξονα. Αφού $2\beta = 8 \Leftrightarrow \beta = 4$

$$\text{Είναι } \frac{y}{\alpha} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \alpha = 5$$

$$\text{Τότε, η εξίσωση της έλλειψης είναι } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Σχ. 8. 14

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $2y$ και ύψος h . Άρα, $A(x) = \frac{1}{2} 2yh = yh$ και επειδή από την εξίσωση της έλλειψης ισχύει ότι $y = \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$ είναι $A(x) = \frac{4h}{5} \sqrt{25 - x^2}$.

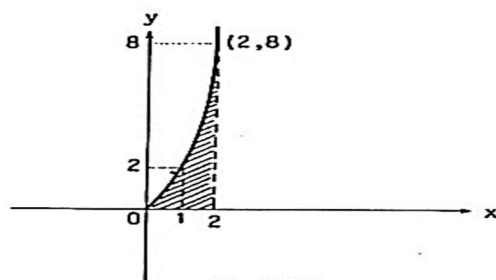
$$\text{Ο όγκος δίνεται από τον τύπο } V = \frac{4}{5} h \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 10\pi h$$

Παρατήρηση 7

Εφαρμογή 4

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = 2x^2$ περί τον άξονα xx' και περικλείεται από τις ευθείες $x = 0, x = 2$

Λύση



Σχ. 8. 17

Ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης περί τον xx' άξονα, δίνεται από τον τύπο $V = \pi \int_0^2 (2x^2)^2 dx = 4\pi \int_0^2 x^4 dx = 4\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}$

Εφαρμογή 5

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα yy' , της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y^2 = 8x$ και από την ευθεία $x = 2$

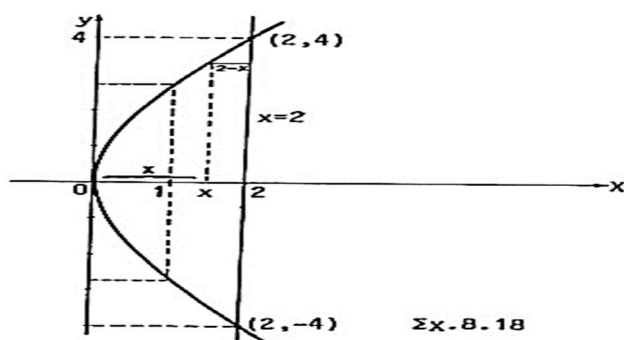
Λύση

Εύρεση των σημείων τομής της καμπύλης $x = \frac{y^2}{8}$ και της ευθείας $x = 2$

Αυτά είναι τα $(2, 4)$ και $(2, -4)$ Η ολοκλήρωση θα γίνει κατά μήκος του άξονα yy'

Επειδή $\forall x \in [4, -4]$, η ευθεία είναι πάνω από την παραβολή, ισχύει ότι

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left[4 - \frac{y^4}{64} \right] dy = 2\pi \int_0^4 \left[4 - \frac{y^4}{64} \right] dy = 2\pi \left[4y - \frac{y^5}{320} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$



Εφαρμογή 6

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή της προηγούμενης παραβολής, περί την ευθεία $x = 2$

Λύση

Επειδή η $x = 2$ είναι παράλληλη με τον yy' άξονα είναι

$$V = \int_{-4}^4 \left[2 - \frac{y^2}{8} \right]^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left[2 - \frac{y^2}{8} \right]^2 dy = \frac{256\pi}{15}$$

Εφαρμογή 7

Εύρεση του όγκου της σφαίρας.

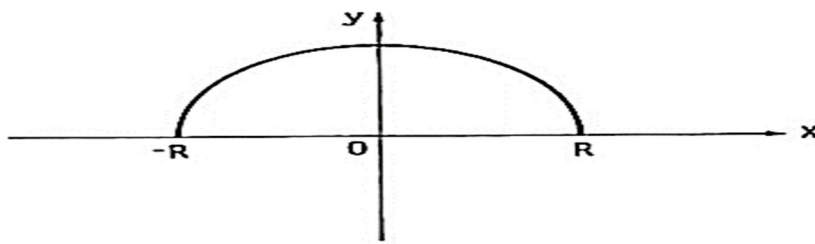
Λύση

Η σφαίρα, παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ημικυκλίου περί τη διάμετρο του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$

Το ημικύκλιο είναι $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, με $x \in [-R, R]$

Αφού τα τεταρτοκύκλια είναι ίσα μεταξύ τους, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει από το 0 μέχρι το R και να διπλασιασθεί το αποτέλεσμα.

$$\text{Συνεπώς, } V = 2\pi \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$$



Σχ. 8.19.

Εφαρμογή 8

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, περί τον άξονα xx' , της περιοχής που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = -x^2 - 3x + 6$ και από την ευθεία $x + y = 3$

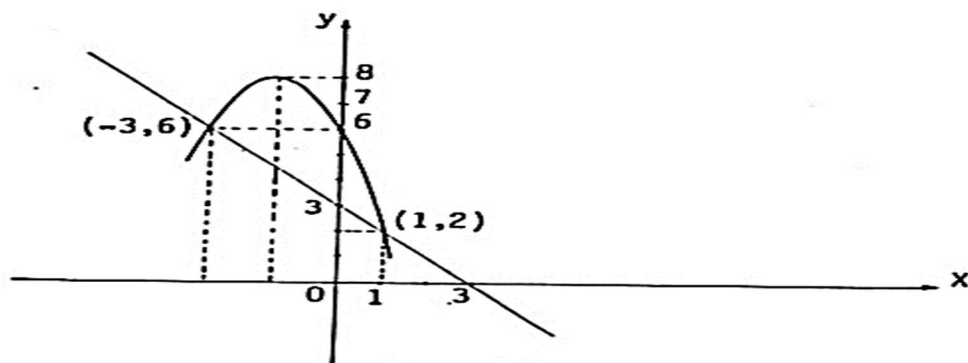
Λύση

Τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία είναι τα $(-3, 6)$ και $(1, 2)$

$\forall x \in [-3, 1]$ η παραβολή είναι πάνω από την ευθεία. Άρα,

$$V = \pi \int_{-3}^1 \left[(-x^2 - 3x + 6)^2 - (x - 3)^2 \right] dx =$$

$$\pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{30x^2}{2} + 27x \right]_{-3}^1 = 119,5\pi$$



Σχ. 8.20

Εφαρμογή 9

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται όταν η κυκλοειδή καμπύλη $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, περιστραφεί περί τον άξονα xx'

Λύση

Η μεταβολή της γωνίας είναι από 0 έως 2π και ο όγκος δίνεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d(\theta - \sin\theta) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 (1 - \cos\theta) d\theta =$$

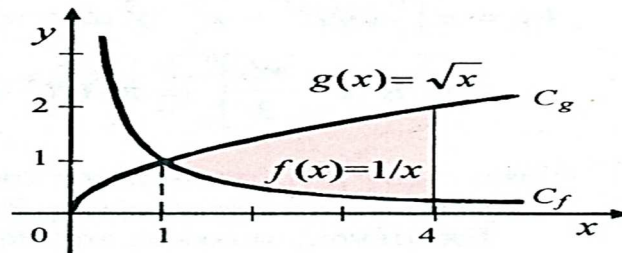
$$\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta) d\theta = 5\pi^2$$

Εφαρμογή 10

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει όταν περιστραφεί περί τον άξονα xx' το χωρίο που περικλείεται από:

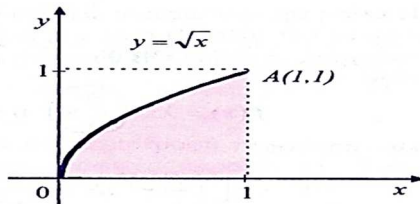
(α) τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, τον άξονα xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$

(β) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$



Λύση

(α) Είναι $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$



(β) Ισχύει ότι $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \in [1, 4]$ Συνεπώς,

$$V = \pi \int_1^4 [g^2(x) - f^2(x)] dx = \pi \int_1^4 \left[(\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right] dx = \pi \int_1^4 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$\pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right]_1^4 = \pi \left[\left(\frac{4^2}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{1} \right) \right] = \pi \left(8 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 \right) = \pi \left(7 - \frac{1}{4} \right) = \frac{27\pi}{4}.$$

Εφαρμογή 11

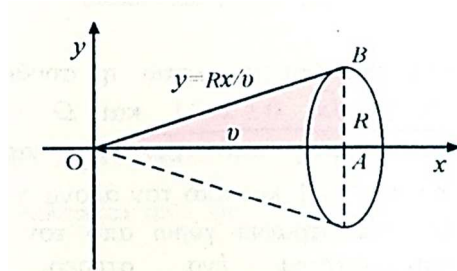
(α) Εύρεση του όγκου V του κώνου που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' του ορθογωνίου τριγώνου OAB , αν $\nu = OA$ και $AB = R$

(β) Εύρεση του όγκου V της σφαίρας με ακτίνα R

Λύση

(α) Τα σημεία $O(0, 0)$ και $B(\nu, R)$ ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα OB που έχει κλίση $\lambda = \frac{R}{\nu}$ Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα OB περιγράφεται από τη συνάρτηση

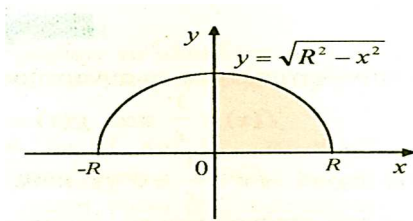
$$f(x) = \frac{R}{\nu} x \quad \text{με } x \in [0, \nu]$$



$$\text{Άρα, } V = \pi \int_0^v \left(\frac{R}{v} x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \pi \frac{R^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \frac{R^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{\pi R^2 v}{3}$$

(β) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ με $x \in [-R, R]$

Έστω Ω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , από τον άξονα xx' και από τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=R$



Το στερεό σώμα που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου Ω , περί τον άξονα xx' , έχει όγκο

$$V' = \pi \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος όγκος V της σφαίρας είναι $V = 2V' = \frac{4\pi R^3}{3}$

Εφαρμογή 12

(α) Ποιος τύπος περιγράφει τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος AB , περί τον άξονα xx' ;

(α) $V = \int_1^3 x dx$

(δ) $V = \pi \int_1^3 x dx$

(ζ) $V = \pi^2 \int_1^3 x dx$

(β) $V = \int_1^3 x^2 dx$

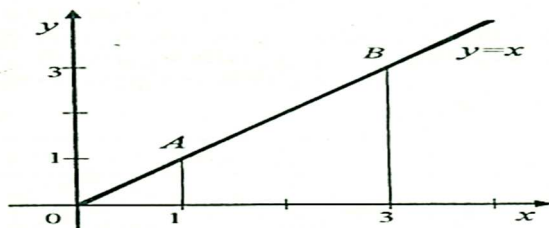
(ε) $V = \pi \int_1^3 x^2 dx$

(η) $V = \pi^2 \int_1^3 x^2 dx$

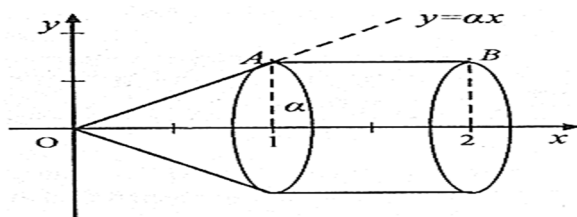
(γ) $V = \int_1^3 x^3 dx$

(στ) $V = \pi \int_1^3 x^3 dx$

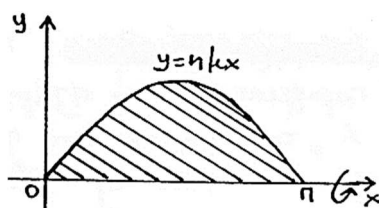
(θ) $V = \pi^2 \int_1^3 x^3 dx$



(β) Ποιος τύπος περιγράφει τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , της τεθλασμένης γραμμής OAB ;



(γ) Βρείτε τον όγκο V του στερεού σώματος που προκύπτει, από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$ και από τον άξονα xx'



Λύση

(α) Σωστός, είναι ο τύπος (ε) $V = \pi \int_1^3 x^2 dx$

(β) Είναι $V = \pi \int_0^1 (\alpha x)^2 dx + \pi \int_1^2 \alpha^2 dx$

(γ) Είναι

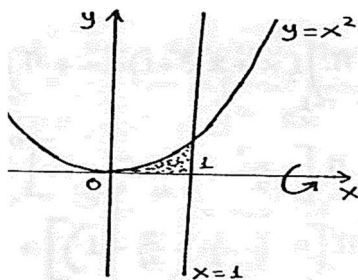
$$V = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \eta^2 \cos^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \sigma\upsilon\nu(2x)) dx =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \eta\mu(2x) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left[\pi - \frac{1}{2} \eta\mu(2\pi) - 0 + \frac{1}{2} \eta\mu 0 \right] = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

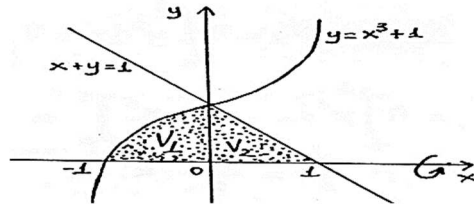
Εφαρμογή 13

Εύρεση του όγκου V του στερεού σώματος που προκύπτει, από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

(α) της συνάρτησης $y = x^2$, από τον θετικό ημιάξονα Ox και από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$



(β) των συναρτήσεων $y = x^3 + 1$, $y = 1 - x$ και από τον άξονα xx'



Λύση

(α) Είναι $V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$

(β) Είναι

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-1}^0 (x^3 + 1)^2 dx + \pi \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \pi \int_{-1}^0 (x^6 + 2x^3 + 1) dx + \pi \int_0^1 (x - 1)^2 dx =$$

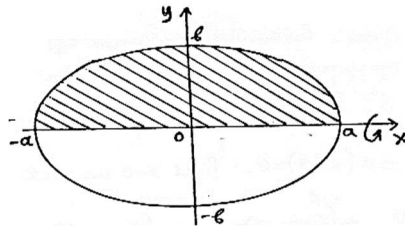
$$\pi \left[\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x \right]_{-1}^0 + \pi \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left[0 - \left(-\frac{1}{7} + \frac{2}{4} - 1 \right) \right] + \pi \left[0 - \frac{(-1)^3}{3} \right] =$$

$$\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \pi \frac{6 - 21 + 42 + 14}{42} = \frac{41\pi}{42}$$

Εφαρμογή 14

Εύρεση του όγκου V του στερεού σώματος που προκύπτει όταν το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, περιστραφεί κατά γωνία π περί τον άξονα:

(α) xx' (β) yy'



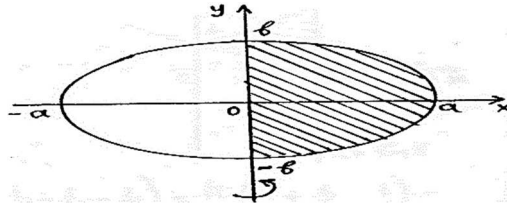
Λύση

(α) Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον οριζόντιο άξονα xx' κατά γωνία π , τότε παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου άνω μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία 2π , δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή.

Είναι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$ Συνεπώς,

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \beta^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi \beta^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi \beta^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx =$$

$$2\pi \beta^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = 2\pi \beta^2 \left[a - \frac{a^3}{3a^2} \right] = 2\pi \beta^2 \frac{2a}{3} = \frac{4\pi a \beta^2}{3}$$



(β) Όταν η έλλειψη στραφεί περί τον κατακόρυφο άξονα yy' κατά γωνία π , τότε παράγει τον ίδιο όγκο που παράγεται από την περιστροφή του γραμμοσκιασμένου δεξιού μισού τμήματος της έλλειψης κατά γωνία 2π , δηλαδή κατά μία ολόκληρη περιστροφή. Είναι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2} \Leftrightarrow x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)$

Συνεπώς,

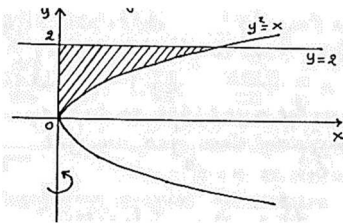
$$V = \pi \int_{-\beta}^{\beta} x^2 dy = \pi \int_{-\beta}^{\beta} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right) dy = 2\pi a^2 \int_0^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right) dy =$$

$$2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3\beta^2} \right]_0^{\beta} = 2\pi a^2 \left[\beta - \frac{\beta^3}{3\beta^2} \right] = 2\pi a^2 \frac{2\beta}{3} = \frac{4\pi a^2 \beta}{3}$$

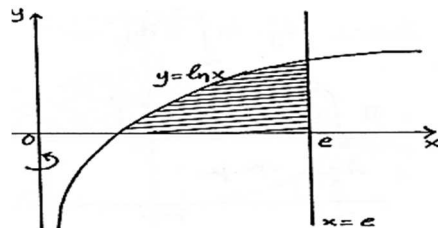
Εφαρμογή 15

Εύρεση του όγκου V του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα yy' , του χωρίου που περικλείεται από την

(α) καμπύλη με εξίσωση $y^2 = x$, από την ευθεία με εξίσωση $y = 2$ και από τον άξονα yy'



(β) γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$, από τον άξονα xx' και από την ευθεία με εξίσωση $x = e$



Λύση

(α) Είναι $V = \pi \int_0^2 x^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

(β) Λύνω το σύστημα $\begin{cases} y = \ln x \\ x = e \end{cases} \Leftrightarrow y = \ln e = 1$

Άρα, τα άκρα της ολοκλήρωσης είναι $y = 0$ και $y = 1$

Επίσης $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^{2y}) dy = \pi \left[ye^2 - \frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1 =$$

$$\pi \left[e^2 - \frac{1}{2} e^2 - 0 + \frac{1}{2} e^0 \right] = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right) = \pi \frac{e^2 + 1}{2}$$

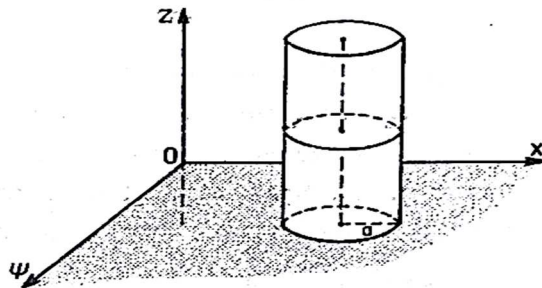
Εφαρμογή 16

Εύρεση όγκου του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h

Λύση

Θεωρώ το επίπεδο xOy ως επίπεδο της μιας βάσης του κυλίνδρου. Ο τύπος

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} E(t) dt \text{ δίνει } V = \int_0^h \pi r^2 dt = \pi r^2 \int_0^h dt = \pi r^2 [t]_0^h = \pi r^2 h$$



Εφαρμογή 17

Εύρεση όγκου του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Λύση

Θα βρω την τομή του ελλειψοειδούς με το επίπεδο $x=t$ Η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

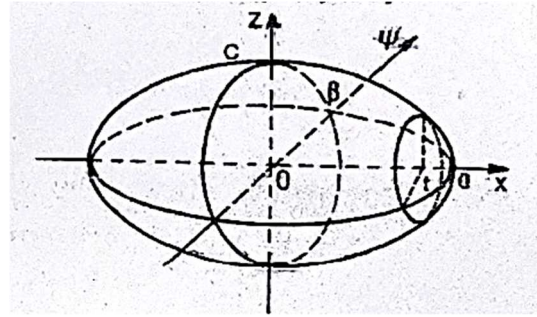
$$\text{γράφεται ως } \frac{t^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{t^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} = 1$$

Η $\frac{y^2}{\beta^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} = 1$ παριστάνει έλλειψη με ημιάξονες

$\beta \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}, c \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}$ Το εμβαδόν της έλλειψης είναι

$E = \pi \cdot \beta \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} = \pi \cdot \beta \cdot c \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)$ όπου $-a \leq t \leq a$ άρα, ο ζητούμενος

$$\text{όγκος είναι } V = \int_{-a}^a \pi \cdot \beta \cdot c \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) dt = \pi \cdot \beta \cdot c \left[t - \frac{t^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot c$$



Εφαρμογή 18

Εύρεση όγκου του ορθού κυκλικού κώλου με ακτίνες βάσεων R, r και ύψος h

Λύση

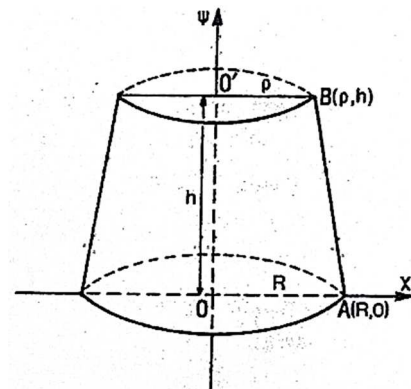
Το στερεό σώμα, παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου $OABO'$ περί τον κατακόρυφο άξονα yy' . Είναι $A(R, 0), B(\rho, h)$. Η εξίσωση της ευθείας AB είναι

$$\frac{x-R}{\rho-R} = \frac{y-0}{h-0} \Leftrightarrow x = \frac{Rh - (\rho - R)y}{h} \text{ ή διαφορετικά } y = \frac{(x-R)h}{\rho-R} \text{ και για } y_1 = 0,$$

$$y_2 = h \text{ ισχύει ότι } V = \pi \int_0^h \frac{(Rh - (R - \rho)y)^2}{h^2} dy =$$

$$\frac{\pi}{h^2} \int_0^h (R^2 h^2 - 2Rh(R - \rho)y + (R - \rho)^2 y^2) dy =$$

$$= \dots = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + \rho^2 + R\rho)$$



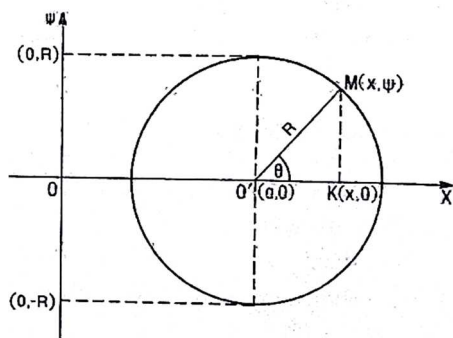
Εφαρμογή 19

Εύρεση όγκου του στερεού που παράγεται με περιστροφή της επιφάνειας που ορίζεται από τον κύκλο $(x-a)^2 + y^2 = R^2$, περί τον άξονα yy' όπου $a > R$

Λύση

Εύρεση της εξίσωσης του κύκλου με παραμετρικές εξισώσεις. Από το σχήμα έχω ότι $x - a = R \cos \theta \Leftrightarrow x = a + R \cos \theta \Leftrightarrow x^2 = (a + R \cos \theta)^2$ και $y = R \sin \theta \Leftrightarrow dy = R \cos \theta$

Όταν η γωνία θ μεταβάλλεται από 0 έως 2π , το σημείο M διανύει έναν πλήρη κύκλο.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} (\alpha + R \cos \theta)^2 R \cos \theta d\theta = \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} (\alpha^2 + 2\alpha R \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta) R \cos \theta d\theta = \\
 &= \pi \alpha^2 R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 2\pi \alpha R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \pi R^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \\
 &= \pi \alpha^2 R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 2\pi \alpha R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \eta \mu^2 \theta) \cos \theta d\theta = \\
 &= \left[\pi \alpha^2 R \eta \mu \theta + \pi \alpha R^2 (\theta + \eta \mu \theta \cdot \cos \theta) + \pi R^3 \eta \mu \theta - \frac{\pi}{3} R^3 \eta \mu^3 \theta \right]_0^{2\pi} = \\
 &= 2\pi^2 \alpha R^2
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 20

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες xx' , yy' και από την παραβολή $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}$

Λύση

Εύρεση των σημείων τομής της παραβολής με τους άξονες.

- $x = 0 \Leftrightarrow 0^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = a$
- $y = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} + 0^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = a$ Άρα, το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[0, a]$

$$\text{Από } x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^2 \text{ έπεται ότι } V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^4 dx =$$

$$\pi \int_0^a \left(a^2 - 4a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 6ax - 4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right) dx =$$

$$\frac{\pi a^3}{15}$$

Εφαρμογή 21

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα yy' , του χωρίου που ορίζεται από ένα τόξο της $x = \alpha \xi \sin y$

Λύση

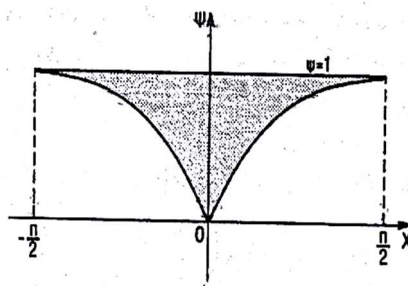
Αν $y = \sin x$ τότε $x = \alpha \xi \sin y$

Άρα, $V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_0^1 (\tau \sigma \xi \sin y)^2 dy$

Θέτω $t = \tau \sigma \xi \sin y \Leftrightarrow y = \sin t \Leftrightarrow dy = \cos t dt$

- Αν $y = 0$ τότε $t = 0$
- Αν $y = 1$ τότε $t = \frac{\pi}{2}$

Άρα, $V = \pi \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$



Εφαρμογή 22

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή, $y = \frac{x^2}{4} + 2$ και από την ευθεία $5x - 8y + 14 = 0$

Λύση

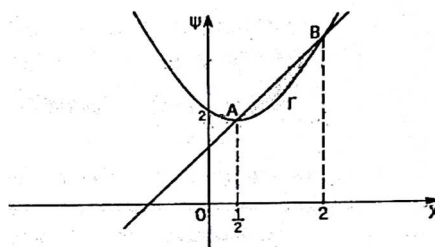
Λύνοντας το $\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + 2 \\ 5x - 8y + 14 = 0 \end{cases}$, βρίσκω τα σημεία τομής $A\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{16}\right)$, $B(2, 3)$

και χρησιμοποιώ τις τετμημένες τους $x_A = \frac{1}{2}$, $x_B = 2$

Από $y_1(x) = \frac{x^2}{4} + 2$ και από $y_2(x) = \frac{5}{8}x + \frac{7}{4}$ προκύπτει ότι ο ζητούμενος όγκος

είναι $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 [y_1(x)^2 - y_2(x)^2] dx =$

$$\pi \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{1}{16} \left(\frac{5}{2}x + 7 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 \right] dx = \frac{891}{1280} \pi$$



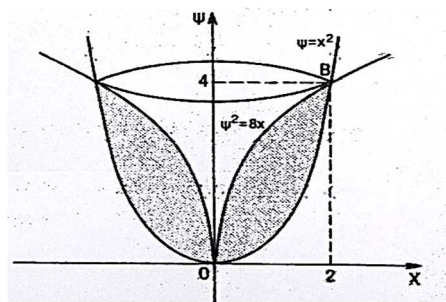
Εφαρμογή 23

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα yy' , του χωρίου που ορίζεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $y^2 = 8x$

Λύση

Λύνοντας το $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$, βρίσκω τα σημεία τομής

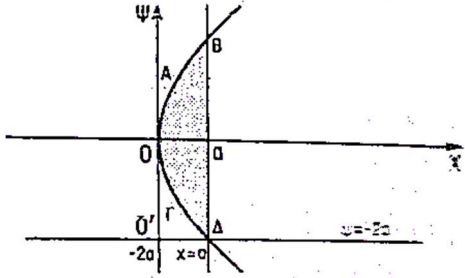
$O(0,0)$, $B(2,4)$ και χρησιμοποιώ τις τεταγμένες τους $y_1 = 0$ και $y_2 = 4$. Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι συναρτήσεις $x_1(y) = \sqrt{y}$, $x_2(y) = \frac{y^2}{8}$ και ισχύει ότι $\sqrt{y} \geq \frac{y^2}{8}$



$$\text{Άρα, } V = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy = \frac{24\pi}{5}$$

Εφαρμογή 24

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που σχηματίζεται από την περιστροφή περί την ευθεία $y = -2a$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 4ax$ και από την ευθεία $x = a$, με $a > 0$



Θεωρώ νέο σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το σημείο $O'(0, -2a)$ οπότε η εξίσωση της παραβολής στο νέο σύστημα είναι $(y - 2a)^2 = 4ax$ και δίνει τις συναρτήσεις $y_1(x) = 2a - \sqrt{4ax}$ για την καμπύλη ΟΓΔ και

$$y_2(x) = 2a + \sqrt{4ax} \text{ για την καμπύλη ΟΑΒ}$$

$$\begin{aligned} \text{Ο ζητούμενος όγκος είναι } V &= \pi \int_0^a (y_2^2 - y_1^2) dx = \\ &= \pi \int_0^a \left[(2a + 2\sqrt{ax})^2 - (2a - 2\sqrt{ax})^2 \right] dx = \\ &= \frac{32}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 25

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (c) με παραμετρικές εξισώσεις $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (αστροειδής).

Λύση

Ο ζητούμενος όγκος V ισούται με το διπλάσιο του όγκου που σχηματίζεται από την περιστροφή του χωρίου ΟΑΒ, δηλαδή είναι $V = 2\pi \int_0^a y^2 dx$

$$\text{Είναι } x = a \cos^3 t \Leftrightarrow dx = -3a \cos^2 t \cdot \sin t dt$$

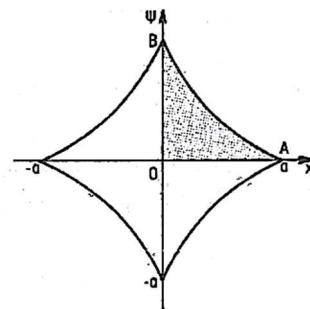
- Όταν $x = 0$ τότε η $x = a \cos^3 t$ δίνει $t = \frac{\pi}{2}$

- Όταν $x = a$ τότε η $x = a \cos^3 t$ δίνει $t = 0$

$$\text{Άρα, } V = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \cdot \sin t) dt =$$

$$6\pi a^3 \left[-\int_0^{\pi/2} \sin^9 t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^7 t dt \right] =$$

$$\frac{32}{105} \pi a^3$$



Εφαρμογή 26

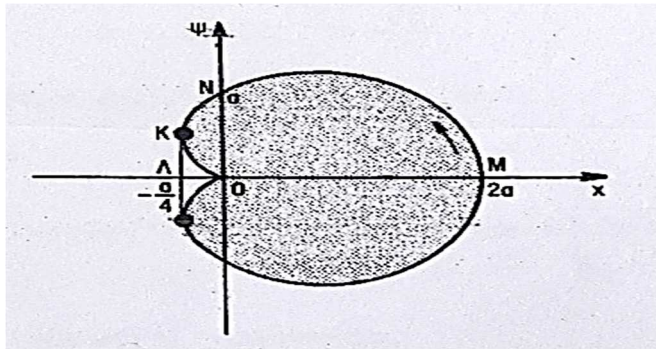
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον πολικό άξονα, του χωρίου που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη $\rho = \alpha(1 + \cos \varphi)$

Λύση

Ο ζητούμενος όγκος, ισούται με τη διαφορά των όγκων V_1, V_2 που προκύπτουν από την περιστροφή των χωρίων MNK, MOK περί τον πολικό άξονα. Οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης, με παράμετρο την πολική ακτίνα φ , είναι

$$x = \rho \cdot \cos \varphi = \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi = \alpha(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$



Αν $\varphi = 0$ τότε από την $x = \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$ προκύπτει ότι $x = \alpha(1 + \cos 0) \cos 0 = 2a$. Άρα, η τετμημένη του σημείου M είναι $2a$. Η τετμημένη του σημείου K είναι το ελάχιστο της $x = \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$ και υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\alpha \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi), \quad \frac{dx}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{2\pi}{3} \end{array} \right\}$$

- Όταν $\varphi = 0$, τότε από την $x = \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$ προκύπτει ότι $x_M = 2a$
- Όταν $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, τότε από την $x = \alpha(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$ προκύπτει ότι $x_K = \frac{-\alpha}{4}$

$$\text{Είναι } V = V_1 - V_2 = \pi \int_{\frac{-a}{4}}^{2a} y^2 dx - \pi \int_{\frac{-a}{4}}^0 y^2 dx \quad \text{με } y^2 = \alpha^2 \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^2$$

- Όταν $x = \frac{-a}{4}$ τότε είναι $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
- Όταν $x = 0$ τότε είναι $\varphi = \pi$
- Όταν $x = 2$ τότε είναι $\varphi = 0$

$$\text{Συνεπώς, } V = \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\theta} a^2 \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^2 [-\alpha \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi)] d\varphi =$$

$$-\pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2 \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^2 [-\alpha \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi)] d\varphi =$$

$$\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi (1 + \cos \varphi)^2 (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi$$

Θέτω $u = \cos \varphi \Leftrightarrow du = -\sin \varphi d\varphi$

- Όταν $\varphi = 0$ τότε είναι $u = 1$
- Όταν $\varphi = \pi$ τότε είναι $u = -1$

$$\text{Άρα, } V = -\pi a^3 \int_{-1}^1 (1-u^2)^2 (1+u)^2 (1+2u) du = \frac{8}{3} \pi a^3$$

Εφαρμογή 27

Τόξο της καμπύλης $y = \frac{\alpha}{2} (e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha}) = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$ όπου $\alpha > 0$, με πέρατα

τετμημένων 0 και x αντίστοιχα, περιστρέφεται περί τον άξονα xx' . Αν E το εμβαδόν της επιφάνειας και V ο όγκος του στερεού σώματος που παράγονται από την περιστροφή, δείξτε ότι $E = \frac{2V}{a}$

Λύση

$$\text{Είναι } y = \left(a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right) \right)' = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} \right) \text{ και } \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \left(\frac{x}{a} \right)} = \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$E = 2\pi \int_a^x y \sqrt{1+(y')^2} dx =$$

$$2a\pi \int_0^x \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x}{a} \right) dx =$$

$$\frac{2\pi}{a} \int_0^x a^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x}{a} \right) dx =$$

$$\frac{2}{a} \left[\pi \int_0^x a^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x}{a} \right) dx \right] =$$

$$\frac{2}{a} \left(\pi \int_0^x y^2 dx \right) = \frac{2V}{a}$$

Εφαρμογή 28

Υπολογισμός όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα xx' , του χωρίου που περικλείεται από τον ημιάξονα Ox' και από το

τόξο της καμπύλης $y = \frac{e^x}{x}$ με $x \in (-\infty, 0)$

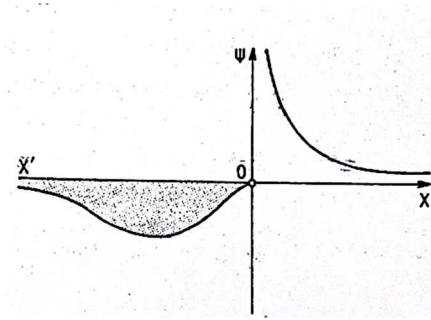
Λύση

$$\text{Είναι } V = \pi \int_{-\infty}^0 y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2/x}}{x^2} dx =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} \frac{e^{2/x}}{x^2} dx =$$

$$\frac{-\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^- \\ \lambda \rightarrow -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} e^{2/x} d \left(\frac{2}{x} \right) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\pi}{2} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left[e^{2/x} \right]_{\varepsilon}^{\lambda} = \\ & \frac{-\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left[e^{2/\varepsilon} - e^{2/\lambda} \right] = \\ & \frac{-\pi}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} (e^{2/\varepsilon}) - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (e^{2/\lambda}) \right] = \\ & \frac{-\pi}{2} (0 - 1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Εφαρμογή 29

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ περί την οριζόντια ασύμπτωτη της.

Λύση

Ο άξονας xx' είναι η οριζόντια ασύμπτωτη, διότι για $x \rightarrow \pm\infty$ είναι $\lim f(x) = 0$

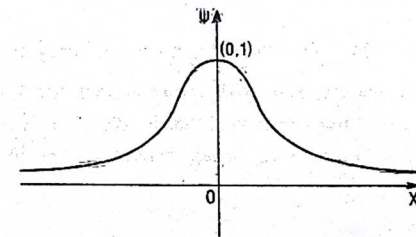
Είναι $V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ Θέτω $x = \tan \omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = (1 + \tan^2 \omega) d\omega$

- Όταν $x \rightarrow -\infty$ τότε $\omega \rightarrow \frac{-\pi}{2}$
- Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\text{Άρα, } V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2 \omega}{(1 + \tan^2 \omega)^2} d\omega = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega =$$

$$\pi \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin(2\omega)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$$



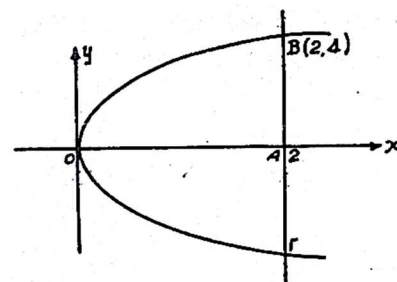
Εφαρμογή 30

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 8x$ και από την ευθεία $x = 2$

Λύση

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (8x) dx = (8\pi) \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 16\pi$$

Πρόκειται για τον ολικό όγκο, διότι ότι στερεό σώμα που γράφει το τόξο (OB) συμπίπτει με το στερεό σώμα που γράφει το τόξο (OG), κατά την περιστροφή τους.



Εφαρμογή 31

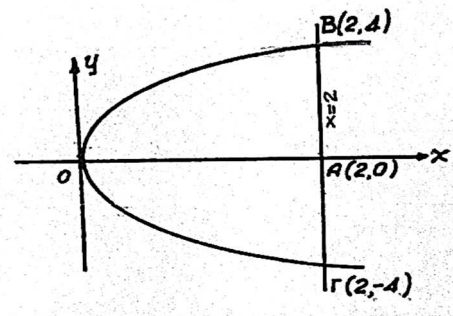
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί την ευθεία $x = 2$, του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 8x$ και από την ευθεία $x = 2$

Λύση

Θα κάνω αλλαγή του συστήματος των αξόνων. Οι γενικοί τύποι της αλλαγής του συστήματος των αξόνων είναι $\begin{cases} x = a + x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi \\ y = \beta + x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi \end{cases}$ όπου a, β οι συντεταγμένες της νέας αρχής και φ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας x_1 του νέου συστήματος με τον άξονα x του παλαιού συστήματος.

Αρχή είναι το σημείο $A(2, 0)$. Οι άξονες του νέου και του παλαιού συστήματος είναι παράλληλοι, άρα $\varphi = 0$

Συνεπώς, οι τύποι $\begin{cases} x = a + x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi \\ y = \beta + x_1 \cdot \sin \varphi + y_1 \cdot \cos \varphi \end{cases}$ γίνονται $\begin{cases} x = 2 + x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$



Άρα, οι τύποι $\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$ γίνονται $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1^2 = 8(x_1 + 2) \end{cases}$ δηλαδή η ευθεία $x_1 = 0$ είναι ο άξονας περιστροφής του νέου συστήματος.

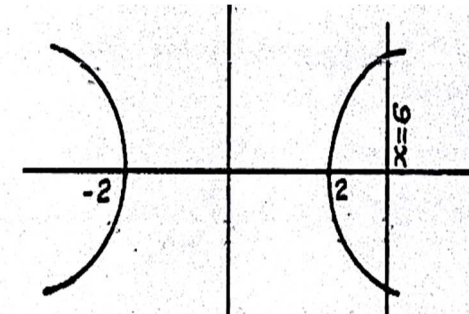
Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης, θέτω $x_1 = 0$ στην εξίσωση της καμπύλης οπότε $y_1 = \pm 4$. Άρα, $V = \pi \int_{-4}^4 x_1^2 dy_1 = \pi \int_{-4}^4 \left(2 - \frac{y_1^2}{8}\right)^2 dy_1 = \frac{256\pi}{15}$

Εφαρμογή 32

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του τόξου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 4$ που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $x = 6$, $y = 0$

Λύση

$$V = \pi \int_2^6 (x^2 - 4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^6 = \frac{160\pi}{3}$$

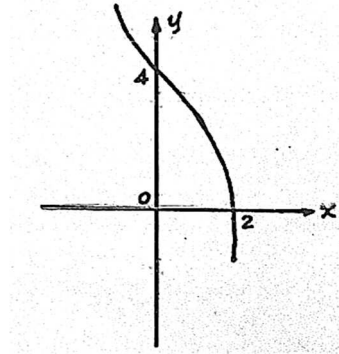


Εφαρμογή 33

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Oy , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = 4 - \frac{x^3}{2}$ και από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 \sqrt[3]{(8-2y)^2} dy = \\ &= \pi \int_0^4 (8-2y)^{\frac{2}{3}} dy = \\ &= \frac{-\pi}{2} \int_0^4 (8-2y)^{\frac{2}{3}} d(8-2y) = \\ &= \frac{-\pi(8-2y)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = \frac{-5\pi}{4} (8-2y)^{\frac{5}{3}} \Big|_0^4 = 160\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$



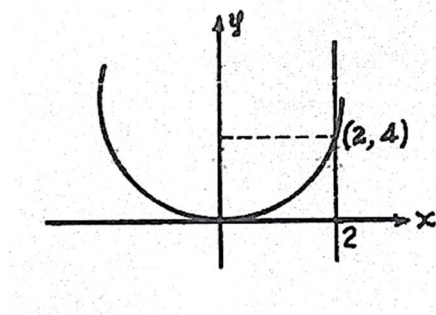
Εφαρμογή 34

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Oy , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 2$

Λύση

Ο ζητούμενος όγκος, ισούται με τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η ευθεία $x = 2$ μείον τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η καμπύλη $y = x^2$

$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή, } V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \\ &= \pi \int_0^4 (4 - y) dy = \pi \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 8\pi \end{aligned}$$

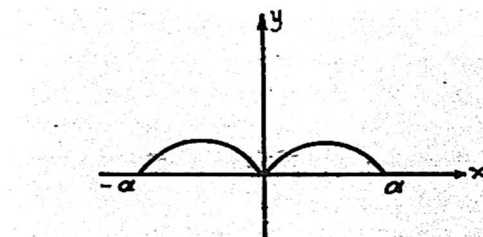


Εφαρμογή 35

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ και από την ευθεία $y = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a x^2 (a^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^a (a^2 x^2 - x^4) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^a = \frac{4\pi}{15} a^5 \end{aligned}$$



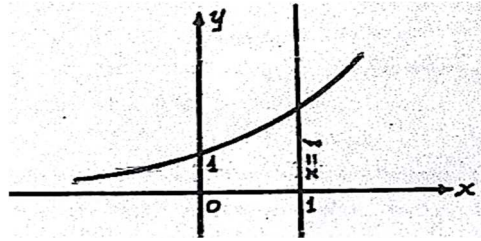
Εφαρμογή 36

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την $y = e^x$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

Λύση

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx =$$

$$\frac{\pi}{2} (e^{2x}) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$$



Εφαρμογή 37

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την $y = x(x^2 - 1)$ και από την ευθεία $y = 0$

Λύση

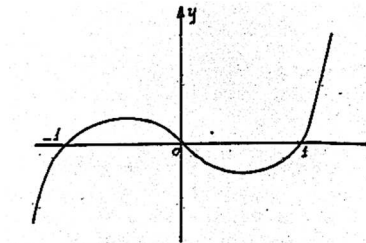
$$V = \pi \int_{-1}^1 (x^2 - x^2)^2 dx =$$

$$2\pi \int_0^1 (x^3 - x)^2 dx =$$

$$2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx =$$

$$2\pi \left(\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

$$2\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16\pi}{105}$$



Εφαρμογή 38

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ και από τις ευθείες

$y = 0$, $x = a$, $x = -a$

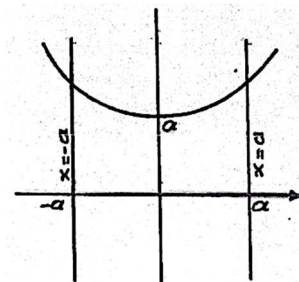
Λύση

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{a^2}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx =$$

$$2\pi \frac{a^2}{4} \int_0^a \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2 \right) dx =$$

$$\frac{\pi a^2}{2} \left[\int_0^a e^{\frac{2x}{a}} dx + \int_0^a e^{-\frac{2x}{a}} dx + 2 \int_0^a dx \right] =$$

$$\frac{\pi a^2}{2} \left[\frac{a}{2} \int_0^a e^{\frac{2x}{a}} d\left(\frac{2x}{a}\right) - \frac{a}{2} \int_0^a e^{-\frac{2x}{a}} d\left(\frac{-2x}{a}\right) + 2x \right] =$$



$$\frac{\pi a^2}{2} \left[\frac{a}{2} e^{\left(\frac{2x}{a}\right)} - \frac{a}{2} e^{\left(\frac{-2x}{a}\right)} + 2 \right]_0^a =$$

$$\frac{\pi a^2}{2} \left[\left(\frac{a}{2} e^2 - \frac{a}{2} e^{-2} + 2a \right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] =$$

$$\frac{\pi a^3}{2} \left(\frac{e^2 - e^{-2} + 4}{2} \right) =$$

$$\frac{\pi a^3}{4} \left(\frac{e^4 + 4e^2 - 1}{e^2} \right)$$

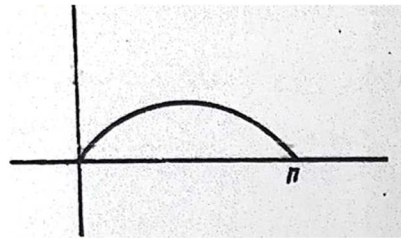
Εφαρμογή 39

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την $y = \sin^2 x$ και από την ευθεία $y = 0$

Λύση

Για να βρω τα άκρα ολοκλήρωσης, θέτω $y = 0$ στην

εξίσωση της καμπύλης οπότε $x = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right\}$ Άρα,



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx =$$

$$\pi \left[\frac{-\sin^3 x \cdot \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \right] =$$

$$\pi \left[\frac{-\sin^3 x \cdot \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{-\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2} \right) \right]_0^{\pi} =$$

$$\pi \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi^2}{8}$$

Εφαρμογή 40

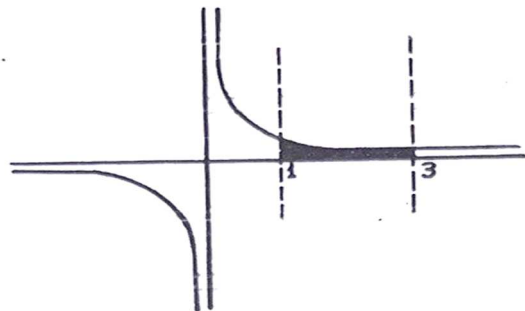
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την $xy = 1$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Λύση

$$V = \pi \int_1^3 y^2 \, dx =$$

$$\pi \int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{-\pi}{x} \Big|_1^3 =$$

$$\frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

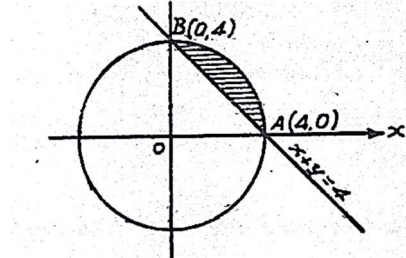


Εφαρμογή 41

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x^2 + y^2 = 16$ και από την ευθεία $x + y = 4$

Λύση

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (y_1^2 - y_2^2) dx = \\ \pi \int_0^4 [(16 - x^2) - (4 - x)^2] dx &= \\ \pi \int_0^4 (16 - x^2 - 16 + 8x - x^2) dx &= \\ \pi \left(64 - \frac{128}{3} \right) &= \frac{64\pi}{3} \end{aligned}$$

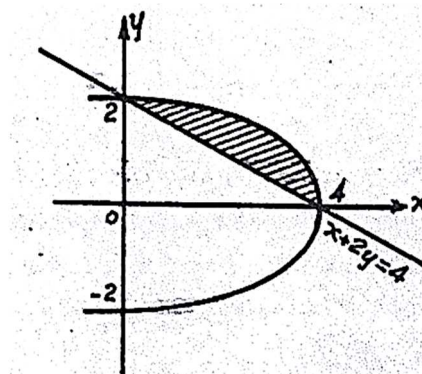


Εφαρμογή 42

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2 = 4 - x$ και από την ευθεία $x + 2y = 4$

Λύση

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (y_1^2 - y_2^2) dx = \\ \pi \int_0^4 \left((4 - x) - x - \left(\frac{4 - x}{2} \right)^2 \right) dx &= \\ \pi \int_0^4 \left(4 - x - \frac{16 + x^2 - 8x}{4} \right) dx &= \\ \pi \int_0^4 \frac{16 - 4x - 16 - x^2 + 8x}{4} dx &= \\ \frac{\pi}{4} \int_0^4 (4x - x^2) dx &= \\ \frac{\pi}{4} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 &= \frac{\pi}{4} - \frac{32}{3} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$



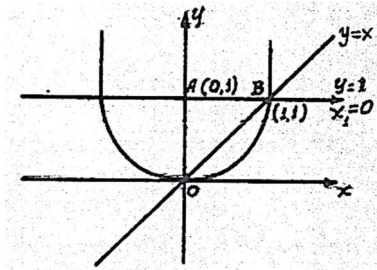
Εφαρμογή 43

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί την ευθεία $y = 1$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$ και από την ευθεία $y = x$

Λύση

Κάνω αλλαγή των αξόνων $\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = \beta + y_1 \end{cases}$, άρα $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 1 + y_1 \end{cases}$, αρχή του συστήματος των αξόνων είναι το σημείο $A(0,1)$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } V &= \pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx_1 = \\ &= \pi \int_0^1 [(x_1^2 - 1)^2 - (x_1 - 1)^2] dx_1 = \\ &= \pi \int_0^1 (x_1^4 - 2x_1^2 + 1 - x_1^2 + 2x_1 - 1) dx_1 = \\ &= \pi \int_0^1 (x_1^4 - 3x_1^2 + 2x_1) dx_1 = \\ &= \pi \left(\frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + x_1^2 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + 1 \right) = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

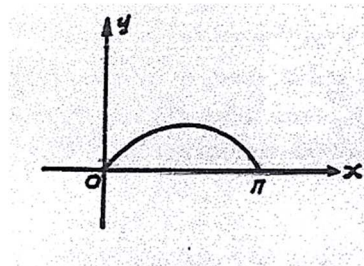


Εφαρμογή 44

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = e^x \sin x$ και από τον άξονα Ox

Λύση

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx = \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{2x} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} \cos^2 x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} dx - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \cos(2x) d(e^{2x}) = \\ &= \frac{\pi}{4} (e^{2x}) \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \cos(2x) d(e^{2x}) = \\ &= \frac{\pi}{4} e^{2\pi} - \frac{\pi}{12} e^{2x} (\cos(2x) + \sin(2x)) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{6} (e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$



Εφαρμογή 45

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $x^4 - a^2 x^2 + a^2 y^2 = 0$ περί τον άξονα Ox

Λύση

Ο όγκος είναι $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx$ Για να βρω τα άκρα της ολοκλήρωσης, θέτω $y = 0$ οπότε

$$y = 0 \Leftrightarrow x^4 - a^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - a)(x + a) \Leftrightarrow x = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{Bmatrix}$$

Άρα, ολοκληρώνω από 0 ως a και διπλασιάζω ή από $-a$ ως a και έχω τον ολικό όγκο

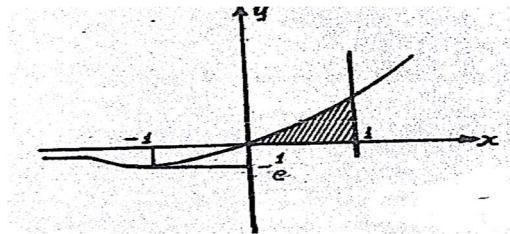
$$\text{Άρα, } V = \pi \int_{-a}^a \frac{a^2 x^2 - x^4}{a^2} dx = \frac{\pi}{a^2} \left(a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4\pi a^3}{15}$$

Εφαρμογή 46

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = xe^x$ και από τις ευθείες $y = 0$ και $x = 1$

Λύση

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 e^{2x}) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 d(e^{2x}) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x^2 e^{2x} - \int_0^1 (e^{2x} 2x) dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x^2 e^{2x} - \int_0^1 x d(e^{2x}) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x^2 e^{2x} - x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1) \end{aligned}$$



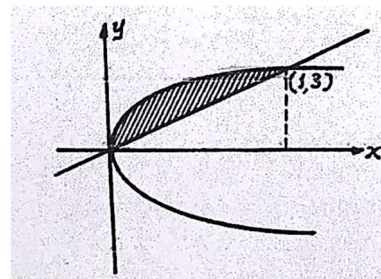
Εφαρμογή 47

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2 = 9x$ και από την ευθεία $y = 3x$

Λύση

Ο ζητούμενος όγκος, ισούται με τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η καμπύλη $y^2 = 9x$ μείον τον όγκο του στερεού σώματος που γράφει η ευθεία $y = 3x$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (9x) dx - \pi \int_0^1 (9x^2) dx = \\ &= \frac{9\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 - 3\pi x^3 \Big|_0^1 = \\ &= \frac{9\pi}{2} - 3\pi = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



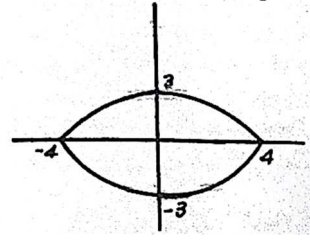
Εφαρμογή 48

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Λύση

$$V = \pi \int_{-4}^4 y^2 dx = \pi \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx =$$

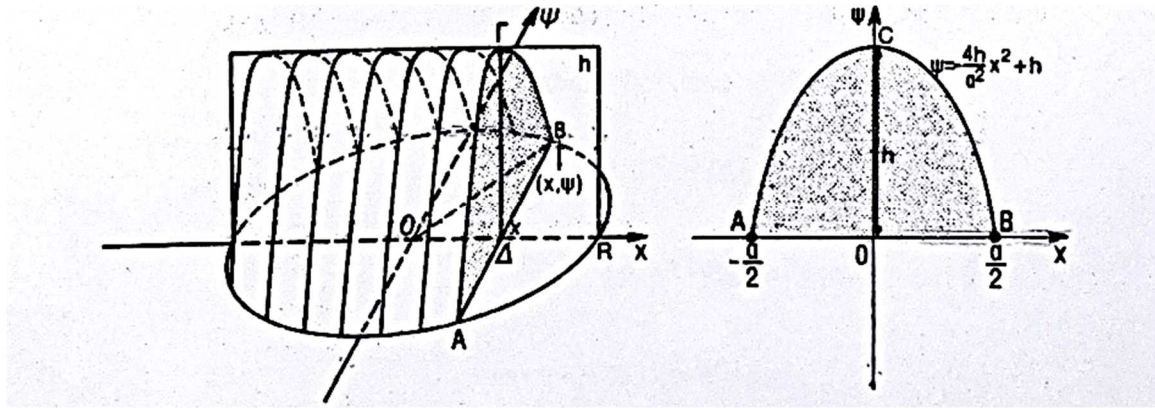
$$\frac{8\pi}{16} \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^4 = 48\pi$$



Εφαρμογή 49

Έστω κύκλος (C) ακτίνας R. Θεωρώ τις χορδές του που είναι παράλληλες προς την ίδια διεύθυνση. Κατασκευάζω πάνω από τις χορδές, συμμετρικούς τομείς των παραβολών με το ίδιο ύψος h. Τα επίπεδα των τομέων των παραβολών, είναι κάθετα στο επίπεδο του κύκλου. Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος, που παράγεται.

Λύση



Εύρεση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τον τομέα μιας παραβολής με βάση τη χορδή AB μήκους a και ύψους h

Παίρνω τους άξονες των συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο 2^ο σχήμα. Η εξίσωση της παραβολής είναι $y = \mu x^2 + h$. Θα προσδιορίσω την παράμετρο μ

Είναι $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ Από $y = \mu x^2 + h$ προκύπτει ότι $0 = \mu \frac{a^2}{4} + h \Leftrightarrow \mu = \frac{-4h}{a^2}$

Άρα, η εξίσωση της παραβολής είναι $y = \frac{-4h}{a^2} x^2 + h$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} y dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4h}{a^2} x^2 + h \right) dx = \frac{2}{3} ah$

Εύρεση του όγκου του στερεού. Αν πάρω τους άξονες των συντεταγμένων όπως φαίνεται στο 1^ο σχήμα, τότε η τομή του στερεού σώματος από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα xx' στο σημείο Δ με τεταγμένη x έχει εμβαδόν $E = \frac{2}{3} ah$ (2) όπου $a = 2y$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OΔB είναι $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Η $E = \frac{2}{3} ah$ από $a = 2y$ και $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ γράφεται $E(x) = \frac{4}{3} \sqrt{R^2 - x^2} h$

Άρα, $V = \int_{-R}^R E(x) dx = 2 \int_0^R E(x) dx =$

$$\frac{8}{3}h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Εφαρμογή 50

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί την ευθεία $y = 1$, του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \sin^2 x$ και από την ευθεία $y = 0$

Λύση

Κάνω αλλαγή των αξόνων $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 1 + y_1 \end{cases}$ αντικαθιστώντας τις τιμές των x, y

στις εξισώσεις $\begin{cases} y = \sin^2 x \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ οπότε, προκύπτει ότι $\begin{cases} 1 + y_1 = \sin^2 x_1 \\ y_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ δηλαδή, η ευθεία

$y = 1$ είναι ο άξονας x_1 του νέου συστήματος. Άρα, το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $1 + y_1 = \sin^2 x_1$ και από την ευθεία $y_1 = -1$, όταν περιστραφεί περί τον άξονα

(στο νέο σύστημα) έχει όγκο $V = \pi \int_0^\pi (1^2 - (\sin^2 x_1 - 1)^2) dx_1 =$

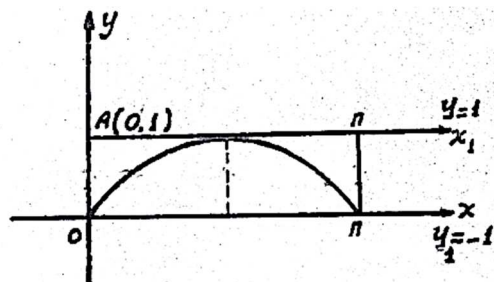
$$\pi \int_0^\pi (1 - \sin^4 x_1 + 2 \sin^2 x_1 - 1) dx_1 =$$

$$2\pi \left[\left(\frac{\sin x_1 \cdot \cos x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \right) \left(\left[\frac{\sin^2 x_1 \cdot \cos x_1}{4} + \frac{3}{4} \right] \left(\frac{-\sin x_1 \cdot \cos x_1}{2} + \frac{x_1}{2} \right) \right) \right]_0^\pi =$$

$$2\pi \left(\frac{\pi}{2} \right) - \pi \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) =$$

$$\pi^2 - \frac{3\pi^2}{8} =$$

$$\frac{5\pi^2}{8}$$



Εφαρμογή 51

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \cos(2x)$ και από τις

ευθείες $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

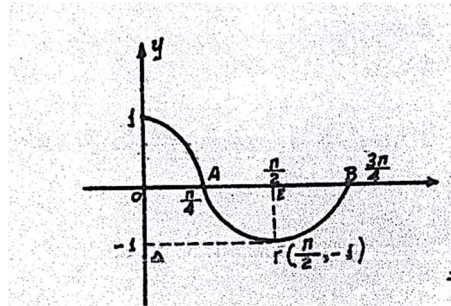
Λύση

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(2x) dx =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(2x) d(2x) =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos(2x) \cdot \sin(2x)}{2} + x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}$$



Εφαρμογή 52

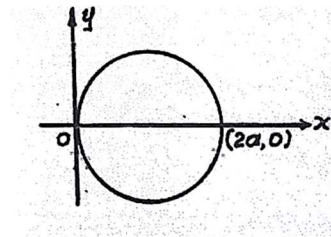
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

Λύση

$$V = \pi \int_0^{2a} y^2 dx =$$

$$\pi \int_0^{2a} (2ax - x^2) dx = \pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} =$$

$$\pi \left(4a^3 - \frac{8a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3$$



Εφαρμογή 53

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ και από τις ευθείες $x=0$, $y=0$

Λύση

Λαμβάνω τις παραμετρικές εξισώσεις

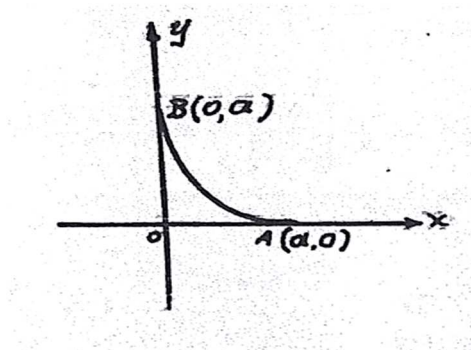
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 \omega \\ y = a \cdot \sin^3 \omega \end{cases} \text{ και από τον } V = \pi \int_0^a y^2 dx$$

προκύπτει ότι

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^3 \omega (-3a \cdot \cos^2 \omega \cdot \sin \omega) d\omega =$$

$$-3a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^7 \omega \cdot \cos^2 \omega d\omega =$$

$$3a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \omega \cdot \cos^2 \omega d(-\cos \omega) = -3a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \omega)^3 \cos^2 \omega d(\cos \omega) =$$



$$\begin{aligned}
& -3a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \omega)^3 \cos^2 \omega \, d(\cos \omega) = \\
& -3a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3\cos^2 \omega + 3\cos^4 \omega - 6\cos^6 \omega) \cos^2 \omega \, d(\cos \omega) = \\
& -3a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \omega - 3\cos^4 \omega + 3\cos^6 \omega - \cos^8 \omega) \, d(\cos \omega) = \\
& -3a^3\pi \left(\frac{\cos^3 \omega}{3} - 3\frac{\cos^5 \omega}{5} + 3\frac{\cos^7 \omega}{7} - \frac{\cos^9 \omega}{9} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
& 0 + 3a^3\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{16\pi a^3}{105}
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 54

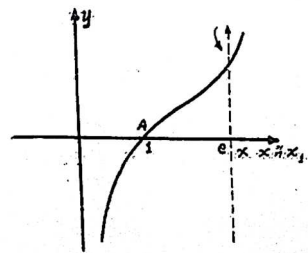
Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \log x$ και από τις ευθείες $x = e$, $y = 0$

Λύση

Κάνω την αλλαγή των αξόνων $\begin{cases} x = x_1 + e \\ y = y_1 \end{cases}$ Θέτω τις

τιμές των x, y οπότε προκύπτει ότι

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_1 = \log(x_1 + e) \end{cases}$, άρα το χωρίο στρέφεται περί τον



άξονα y_1 του νέου συστήματος και η καμπύλη τέμνει τους άξονες x_1, y_1 στα σημεία A, B

Για την εύρεση των συντεταγμένων των σημείων A, B, θέτω

- $y_1 = 0$, άρα $A(1 - e, 0)$
- $x_1 = 0$, άρα $y_1 = \log e = 1$, άρα $B(0, 1)$

Ο ζητούμενος όγκος του στερεού σώματος είναι $V = \pi \int_0^1 (e^{y_1} - e)^2 \, dy_1 =$

$$\begin{aligned}
& \pi \int_0^1 (e^{2y_1} + e^2 - 2e^{y_1+1}) \, dy_1 = \\
& \pi \int_0^1 e^{2y_1} \, dy_1 + \pi e^2 \int_0^1 dy_1 - 2\pi \int_0^1 e^{1+y_1} \, dy_1 = \\
& \left(\frac{\pi}{2} e^{2y_1} + \pi e^2 y - 2\pi e^{1+y_1} \right) \Bigg|_0^1 =
\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2}(4e-1-e^2)$$

Εφαρμογή 55

Εύρεση όγκου του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα Ox , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^2} = d^{\frac{1}{2}}$ και από τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$

Λύση

Από τον $V = \pi \int_0^a y^2 dx$ λαμβάνω τις παραμετρικές εξισώσεις $x = a \cdot \cos^4 \omega$

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^2 \omega (-4a \cdot \cos^2 \omega \cdot \sin \omega) d\omega =$$

$$-4a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \omega \cdot \cos^3 \omega d\omega =$$

$$4a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega \cdot \cos^2 \omega d(\sin \omega) =$$

$$4a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega (1 - \sin^2 \omega) d\omega =$$

$$4a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \omega - \sin^4 \omega) d(\sin \omega) =$$

$$4a^3 \pi \left(\frac{\sin^{10} \omega}{10} - \frac{\sin^{12} \omega}{12} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$4a^3 \pi \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) = \frac{4a^3 \pi^2}{120} = \frac{\pi a^3}{15}$$

