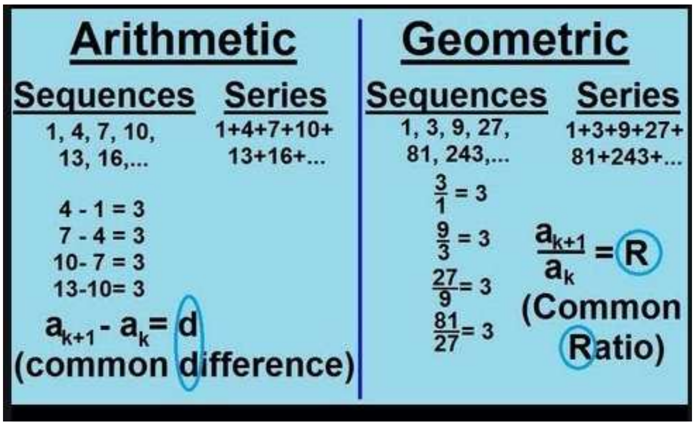
Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων



Σπουδαστής: Νταλλής Κωνσταντίνος (ΑΜ 9274)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.11.2024
Ημερομηνία κατάθεσης: 16.02.2026
Ημερομηνία εξέτασης: 03.02.2026

Α/Α	**Ονοματεπώνυμο**	**Χαρακτηρισμός**	**Υπογραφή**
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (PhD) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (PhD) Καθηγήτρια	Άριστα 10	
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (Msc) ΕΔΙΠ	Άριστα 10	
Τελικός χαρακτηρισμός		Άριστα 10	

Περίληψη

Οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές πρόοδοι, αποτελούν αντικείμενο μελέτης στα μαθηματικά. Βρίσκουν εφαρμογή σε πλήθος επιστημονικών και πρακτικών πεδίων. Αν και αποτελούν απλές αριθμητικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των όρων μιας ακολουθίας, η χρησιμότητα τους είναι εξαιρετικά μεγάλη, ιδίως σε πεδία όπως η οικονομία, η φυσική, η πληροφορική, η στατιστική και η τεχνολογία. Η ακολουθία, είναι μια σειρά από αριθμούς τοποθετημένους σε συγκεκριμένη σειρά, σύμφωνα με έναν καθορισμένο κανόνα. Όταν οι αριθμοί αυξάνονται ή μειώνονται με σταθερό τρόπο (μέσω της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού), τότε προκύπτουν οι δύο πιο συνηθισμένοι τύποι ακολουθιών, η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος.

Η **αριθμητική πρόοδος**, αφορά καταστάσεις όπου η μεταβολή μεταξύ των διαδοχικών όρων είναι σταθερή και προσθετική. Τυπικά παραδείγματα είναι η αποταμίευση των ίδιων ποσών κάθε μήνα, η σταθερή αύξηση της ταχύτητας σε ίσα χρονικά διαστήματα και η διαμόρφωση ενός πίνακα με σταθερές αυξήσεις τιμών.

Η **γεωμετρική πρόοδος** αντίθετα, αφορά καταστάσεις στις οποίες ο κάθε νέος όρος είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του προηγούμενου όρου επί έναν σταθερό αριθμό. Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων είναι ο ανατοκισμός, η αύξηση του πληθυσμού, η εξασθένιση των σημάτων και η διάδοση των ιών.

Η κατανόηση αυτών των προόδων και των μαθηματικών εργαλείων που τις περιγράφουν, είναι απαραίτητη για τις σπουδές και για τη λήψη αποφάσεων σε πραγματικές καταστάσεις.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμητική πρόοδος (ή πρόοδος κατά διαφορά), γεωμετρική πρόοδος (ή πρόοδος κατά πηλίκο), αρμονική πρόοδος, διαφορά της αριθμητικής προόδου, λόγος της γεωμετρικής προόδου, άθροισμα των ν πρώτων όρων της (αριθμητικής, γεωμετρικής) προόδου, άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, αριθμητικός μέσος (ή μέσος όρος), γεωμετρικός μέσος (ή μέσος ανάλογος), αριθμητικός ενδιάμεσος, παρεμβολή (αριθμητικών, γεωμετρικών, αρμονικών) ενδιάμεσων, αξιοσημείωτα αθροίσματα, όρος ν τάξης (ν–οστός όρος), αρμονική (αναλογία, παρεμβολή)

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μελέτη των αριθμητικών και των γεωμετρικών προόδων, αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη κεφάλαια της άλγεβρας, καθώς εισάγει στις έννοιες της επαναλαμβανόμενης μεταβολής, της συστηματικής ανάπτυξης και της μαθηματικής μοντελοποίησης των φαινομένων. Οι πρόοδοι, λειτουργούν ως γέφυρα μεταξύ της καθαρής θεωρίας και της πρακτικής εφαρμογής σε ποικίλα επιστημονικά, κοινωνικά και οικονομικά πεδία.

Η **αριθμητική πρόοδος**, με τον σταθερό ρυθμό μεταβολής της, περιγράφει τις καταστάσεις γραμμικής ανάπτυξης, όπως οι:

- σταθερές αυξήσεις ή μειώσεις των μισθών,
- δόσεις των αποπληρωμών,
- ισόποσες επαναλήψεις.

Είναι κατάλληλη, για να μοντελοποιήσει τα φαινόμενα στα οποία η μεταβολή ανά μονάδα είναι σταθερή και προβλέψιμη. Αντίθετα, η **γεωμετρική πρόοδος** περιγράφει φαινόμενα με πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα. Εμφανίζεται σε:

- πληθυσμιακή ανάπτυξη,
- εξάπλωση των ασθενειών,
- επενδύσεις με τόκο, σε αποσβέσεις,
- κάθε μορφή εκθετικής αύξησης ή μείωσης.

Η δυναμική της είναι ταχύτερη, λιγότερο προβλέψιμη αλλά περισσότερο ρεαλιστική, σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής. Αυτή η εργασία, αναλύει τις θεωρητικές βάσεις των προόδων και τις εφαρμογές τους. Μέσα από παραδείγματα, λυμένες ασκήσεις, αποδείξεις τύπων και σύνδεση με την πράξη, ο αναγνώστης αποκτά τη μαθηματική κατανόηση και την ικανότητα της κριτικής εφαρμογής των εννοιών. Ο διαχωρισμός της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου, η κατανόηση των γενικών όρων, των αθροισμάτων, των σχέσεων μεταξύ των όρων και των ιδιοτήτων της συμμετρίας ή του γεωμετρικού μέσου, είναι βασικά εργαλεία. Αυτή η γνώση, ενισχύει την ικανότητα:

- επίλυσης των σύνθετων προβλημάτων,
- μοντελοποίησης των πραγματικών φαινομένων,
- πρόβλεψης της εξέλιξης των φαινομένων.

Η ενασχόληση με τις προόδους, αποτελεί μέρος της ευρύτερης μαθηματικής παιδείας που απαιτεί η σύγχρονη εποχή. Η ικανότητα της κατανόησης και διαχείρισης των επαναλαμβανόμενων φαινομένων με μαθηματικά εργαλεία, είναι μία πολύτιμη δεξιότητα για τη λήψη αποφάσεων στην καθημερινότητα, στην οικονομία, στην τεχνολογία και στις θετικές επιστήμες.

Οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές πρόοδοι, αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής κουλτούρας και της λογικής ανάλυσης του κόσμου γύρω μας. Μέσα από τη μελέτη τους, εμβαθύνουμε στη δομή των μαθηματικών και εξοπλιζόμαστε με χρήσιμα εργαλεία για την κάθε πτυχή της ζωής.

1. Εφαρμογές των προόδων (αριθμητικών, γεωμετρικών, αρμονικών)

Οι πρόοδοι, είναι απαραίτητα εργαλεία για την ανάλυση, την πρόβλεψη και τη βελτιστοποίηση των λειτουργιών στη ναυτιλία. Η ενσωμάτωσή τους σε μοντέλα προγραμματισμού, προσφέρει μετρήσιμα οφέλη σε εφαρμογές σχετικά με:

- την κατανάλωση,
- το κόστος,
- την ασφάλεια.

Αριθμητικές, γεωμετρικές και αρμονικές πρόοδοι, έχουν χρησιμοποιηθεί ιστορικά στην αρχαία Ελλάδα και στη σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία. Οι αριθμητικές πρόοδοι περιγράφουν τις σταθερές γραμμικές μεταβολές, οι γεωμετρικές πρόοδοι περιγράφουν τις εκθετικές μεταβολές, ενώ οι αρμονικές πρόοδοι σχετίζονται με τις αντιστρόφως ανάλογες σχέσεις και με τα φαινόμενα της κυματικής φυσικής. Το κάθε είδος, έχει ξεχωριστές εφαρμογές ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Οι αριθμητικές, οι γεωμετρικές και οι αρμονικές πρόοδοι, δεν είναι απλώς μαθηματικές προσθέσεις ή αφαιρέσεις, αλλά εργαλεία που διεισδύουν βαθιά σε όλους τους κλάδους της επιστήμης και της τεχνολογίας. Η ουσιαστική κατανόηση και η αξιοποίηση τους, επιτρέπει την αποτελεσματική πρόβλεψη, τη σχεδίαση και την ανάλυση των συστημάτων, σε πεδία που εκτείνονται από τη θεωρητική φυσική ως την πρακτική ναυσιπλοΐα.

2. Αριθμητική πρόοδος

Αν γράψω την ακολουθία 3, 7, 11, 15, 19, ... παρατηρώ ότι ο κάθε όρος της, από τον $2^{ο}$ και μετά, προκύπτει αν προσθέσω στον προηγούμενο του, έναν σταθερό αριθμό, που στην προκειμένη περίπτωση είναι ο 4.

Αν γράψω την ακολουθία: 10, 7, 4, 1, –2, –5, ... παρατηρώ πως κάθε όρος της, εκτός από τον $1^{ο}$, προκύπτει αν προσθέσω στον προηγούμενό του, τον –3. Βλέπω ότι υπάρχουν ακολουθίες με την ιδιότητα, κάθε όρος τους από τον $2^{ο}$ και μετά, να προκύπτει αν προσθέσω στον προηγούμενό του έναν σταθερό αριθμό που λέγεται **διαφορά** και συμβολίζεται με το γράμμα **ω**. Αυτές οι ακολουθίες, ονομάζονται **αριθμητικές πρόοδοι**. Μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$ είναι αριθμητική πρόοδος, αν και μόνο αν, υπάρχει αριθμός ω έτσι ώστε να ισχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \quad \forall \nu = 1,2,3,...$ Οι όροι της ακολουθίας λέγονται διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου και ο α_ν λέγεται **νιοστός όρος** ή όρος ν–τάξης της προόδου.

Μία αριθμητική πρόοδος λέγεται επίσης και **πρόοδος κατά διαφορά**, διότι $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = ... = \omega$

Αριθμητική πρόοδος, ονομάζεται κάθε ακολουθία αριθμών, στην οποία ο κάθε όρος (εκτός του πρώτου) προκύπτει από τον προηγούμενο όρο, προσθέτοντας του έναν σταθερό αριθμό. Αυτός ο αριθμός, ονομάζεται **διαφορά** της προόδου και συμβολίζεται με ω. Γενικά, μια αριθμητική πρόοδος έχει τη μορφή $\alpha_1,\ \alpha_1+\omega,\ \alpha_1+2\omega,...,\alpha_1+(\nu-1)\omega$, όπου:

- α_1 : ο $1^{ος}$ όρος
- ω : η κοινή διαφορά
- ν : η θέση του όρου στην ακολουθία (φυσικός αριθμός)

Ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς ω, η πρόοδος μπορεί να χαρακτηριστεί ως:

- Γνησίως αυξάνουσα ($\omega > 0$) Άρα, $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>0 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu\ \ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$
- Γνησίως φθίνουσα ($\omega < 0$) Άρα, $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu<0 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu\ \ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$
- Σταθερή ($\omega = 0$) Άρα, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\ \ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$

2.1 Εφαρμογές

- 3, 5, 7, 9, 11, ... είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1=3$ και διαφορά $\omega=2$, άρα είναι γνησίως αύξουσα
- 10, 7, 4, 1, -2, ... είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=10$ και $\omega=-3$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα
- 5, 5, 5, 5, ... είναι σταθερή αριθμητική πρόοδος με $\omega=0$

2.2 Ιδιότητες

- Η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της αριθμητικής προόδου, είναι πάντα ίση με ω
- Κάθε όρος ισούται με το ημιάθροισμα των δυο γειτονικών του, δηλαδή είναι ο αριθμητικός τους μέσος (ή μέσος όρος ή μέση τιμή). Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_\nu=\dfrac{\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1}}{2}$
- Το άθροισμα του $1^{ου}$ και του τελευταίου όρου, ισούται με το άθροισμα του $2^{ου}$ και του προτελευταίου κ.ο.κ. συμμετρικά. Δηλαδή $\alpha_1+\alpha_\nu=\alpha_2+\alpha_{\nu-1}$
- Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=\dfrac{\alpha_1+a_\nu}{2}\nu=\dfrac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\nu$
- Οι συμμετρικοί όροι της αριθμητικής προόδου ως προς το μέσον της, έχουν το ίδιο άθροισμα $a_k+a_{\nu-k+1}=\alpha_1+a_\nu$ όπου $k<\nu$ Αυτή η ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ως εξής: <u>Σε πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών όρων μίας αριθμητικής προόδου, το άθροισμα δύο όρων που ισαπέχουν από τους «άκρους» όρους, είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων</u>. Το αντίστροφο αυτής της ιδιότητας δεν ισχύει πάντα. Έτσι, ενώ για τη διαδοχή 2, 7, 5, 10 ισχύει ότι $7+5=10+2$ οι αριθμοί 2, 7, 5, 10 δεν είναι όροι αριθμητικής προόδου.
- Αν το πλήθος ν των όρων της αριθμητικής προόδου είναι περιττό, τότε υπάρχει **μεσαίος όρος**, δηλαδή όρος από τον οποίο προηγείται και έπεται το ίδιο πλήθος όρων. Σε αυτή την περίπτωση, το άθροισμα των άκρων όρων ισούται με το διπλάσιο του μεσαίου όρου. Π.χ. έστω οι πέντε όροι 3, 5, 7, 9, 11 μίας αριθμητικής προόδου. Ισχύει ότι $3+11=5+9=2\cdot 7$

2.3 Γενικός όρος

Ο γενικός τύπος ενός όρου της αριθμητικής προόδου, είναι βασικό εργαλείο για να βρω τον οποιονδήποτε όρο της προόδου, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζω όλους τους προηγούμενους. Αυτό ο τύπος, προκύπτει άμεσα από τον τρόπο δημιουργίας της προόδου. Ο τύπος για τον ν–οστό όρο της αριθμητικής προόδου είναι $a_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \ \ \forall \nu = 1,2,3,...$ όπου:

α_1 : ο $1^{ος}$ όρος της προόδου

ω : η κοινή διαφορά (σταθερός αριθμός που κάθε φορά προστίθεται)

ν : η θέση του όρου (φυσικός αριθμός, $\nu \geq 1$)

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής

Βήμα 1 Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση $a_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, ισχύει για τη μικρότερη τιμή του ν, δηλαδή για $\nu = 1$

Πράγματι, αν $\nu = 1$ τότε $\alpha_1 = \alpha_1 + (1-1)\omega = \alpha_1 + 0 \cdot \omega = \alpha_1$ που ισχύει (ανακλαστική ιδιότητα)

Βήμα 2 Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση $a_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ισχύει για $\nu = k$, δηλαδή έστω ότι είναι $a_k = \alpha_1 + (k-1)\omega$

Βήμα 3 Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση $a_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, ισχύει για $\nu = k+1$, δηλαδή θα δειχθεί ότι $a_{k+1} = \alpha_1 + (k+1-1)\omega$ δηλαδή ότι $a_{k+1} = \alpha_1 + k\omega$

Πράγματι, από $a_k = \alpha_1 + (k-1)\omega$ έπεται ότι $a_k + \omega = \alpha_1 + (k-1)\omega + \omega$ δηλαδή $a_{k+1} = \alpha_1 + k\omega$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά μας από την επαγωγή, προκύπτει ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει.

2.3.1 Πορίσματα

• Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία ακολουθία (α_ν) φυσικών αριθμών, να είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω είναι, να ισχύει η σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

• Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία ακολουθία (α_ν) φυσικών αριθμών, να είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω είναι, να ισχύει η σχέση $\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu-1} = 2\alpha_\nu$

Απόδειξη

$$\left.\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu - \omega \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu-1} = 2\alpha_\nu$$

• Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τρεις αριθμοί α, β, γ να είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου, είναι να ισχύει η σχέση $2\beta = \alpha + \gamma$ Σε αυτή την περίπτωση ο $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$ ονομάζεται **αριθμητικός μέσος** (ή μέσος όρος) των α, γ

Αριθμητικός μέσος των ν το πλήθος αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ ονομάζεται ο αριθμός $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu}{\nu}$

• Αν μία ακολουθία φυσικών αριθμών (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\mu < \nu$ ισχύουν:

✓ $\alpha_{1+\mu} = \alpha_1 + \mu\omega$

✓ $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$

✓ $\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu - \mu\omega$

- Αν γνωρίζω τρεις από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_\nu, \omega, \nu$ τότε μπορώ να προσδιορίσω τον τέταρτο αριθμό, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

Δεδομένα	Ζητούμενο
α_1, ω, ν	$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$
α_ν, ω, ν	$\alpha_1 = \alpha_\nu - (\nu-1)\omega$
$\alpha_1, \alpha_\nu, \omega$	$\nu = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1 + \omega}{\omega}$
$\alpha_1, \alpha_\nu, \nu$	$\omega = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\nu - 1}$

2.4 Παρεμβολή αριθμητικών ενδιάμεσων

Έστω οι αριθμοί α, β. Οι μ το πλήθος αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_\mu$ λέγονται **αριθμητικοί ενδιάμεσοι** των α, β αν και μόνο αν οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, ..., x_\mu, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου. Παρεμβολή μ αριθμητικών ενδιάμεσων μεταξύ των α, β είναι η εύρεση των μ το πλήθος αριθμών $x_1, x_2, ..., x_\mu$ τέτοιων, ώστε οι $\alpha, x_1, x_2, ..., x_\mu, \beta$ να είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου.

2.4.1 Το πρόβλημα της αριθμητικής παρεμβολής

Να παρεμβληθούν μ το πλήθος αριθμητικοί ενδιάμεσοι, μεταξύ των αριθμών α, β

Λύση

Αρκεί να υπολογίσω τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου, στην οποία ανήκουν οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, ..., x_\mu, \beta$ Ο αριθμός β κατέχει τη θέση $\mu+2$, άρα από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ προκύπτει ότι $\beta = \alpha + (\mu+2-1)\omega' = \alpha + (\mu+1)\omega'$

Συνεπώς, $\omega' = \dfrac{\beta-1}{\mu+1}$ (τύπος παρεμβολής των αριθμητικών ενδιάμεσων ή σύντομος τύπος της αριθμητικής παρεμβολής). Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: $x_1 = \alpha + \dfrac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ x_2 = \alpha + 2\dfrac{\beta-\alpha}{\mu+1}, ...,\ x_\mu = \alpha + \mu\dfrac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

Εφαρμογή 1

Να παρεμβάλετε 7 αριθμητικούς ενδιάμεσους μεταξύ των αριθμών 9 και 41

Ο τύπος $\omega' = \dfrac{\beta-1}{\mu+1}$ με $\alpha = 9$, $\beta = 41$, $\mu = 7$ δίνει $\omega' = \dfrac{41-9}{7+1} = 4$ Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41 και αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου.

3. Εφαρμογές των αριθμητικών προόδων

Η αριθμητική πρόοδος, είναι μια ακολουθία αριθμών, στην οποία η διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους παραμένει σταθερή. Χωρίς να χρησιμοποιήσω μαθηματικούς τύπους, μπορώ να την περιγράψω ως μια σταθερή, γραμμική μεταβολή. Η αριθμητική πρόοδος, μοντελοποιεί καταστάσεις όπου η μεταβολή είναι σταθερή ανά χρονική μονάδα, γεγονός που την καθιστά πολύτιμη σε αναρίθμητες εφαρμογές από τα μαθηματικά μέχρι τη βιομηχανία και τις κοινωνικές επιστήμες. Η αριθμητική πρόοδος, έχει σημαντικό ρόλο στη θεωρία και στην πράξη, διότι περιγράφει σταθερές μεταβολές, από τη βαθμολογική βελτίωση ενός μαθητή έως τις αποπληρωμές των δανείων ή τις ρυθμισμένες επαναλαμβανόμενες καταβολές.

3.1 Στη φυσική

Η αριθμητική πρόοδος, εμφανίζεται σε φαινόμενα όπως είναι η κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Π.χ. η απόσταση που διανύει ένα κινητό σε ίσα χρονικά διαστήματα, αυξάνεται κατά μία σταθερή ποσότητα, όταν η επιτάχυνση του είναι σταθερή.

3.2 Στη χημεία

Η αριθμητική πρόοδος, μπορεί να περιγράψει πειράματα στα οποία η συγκέντρωση ενός διαλύματος αυξάνεται (ή μειώνεται) με σταθερό ρυθμό, π.χ. στη σταδιακή προσθήκη του αντιδραστηρίου.

3.3 Στη μηχανολογία

Στη μηχανολογία, η αριθμητική πρόοδος χρησιμοποιείται για τον σχεδιασμό των εξαρτημάτων που αυξάνουν τις διαστάσεις τους με σταθερό βήμα, όπως είναι οι κλιμακωτοί άξονες ή οι σειρές των τρυπών σε μηχανικά πλαίσια.

3.4 Στον ηλεκτρισμό

Στα ηλεκτρικά κυκλώματα, η σταδιακή αύξηση της τάσης ή του ρεύματος κατά ένα σταθερό ποσό, μπορεί να περιγραφεί ως μία αριθμητική πρόοδος π.χ. στη ρύθμιση του φορτίου σε δοκιμές αντοχής.

3.5 Στη ναυτιλία

Η αριθμητική πρόοδος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για:

- τη διαχείριση των χρόνων αντικατάστασης του πληρώματος
- την κατανομή των καυσίμων σε διαδοχικά σκέλη του ταξιδιού, με σταθερή κατανάλωση
- τον υπολογισμό του χρόνου των διαδρομών, με ίσα τμήματα απόστασης $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

Εφαρμογή 2

Πλοίο διανύει μία διαδρομή χωρισμένη σε πέντε τμήματα, ίσου μήκους. Για το $1^{ο}$ τμήμα θέλει 10 ώρες και για κάθε επόμενο τμήμα προσθέτει από 0,5 ώρα λόγω του αυξανόμενου, με σταθερό ρυθμό, κυματισμού. Ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού, δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu$ δηλαδή

Τμήμα του ταξιδιού	**Διάρκεια** (σε ώρες)
$1^{ο}$	10
$2^{ο}$	10,5
$3^{ο}$	11
$4^{ο}$	11,5
$5^{ο}$	12
Σύνολο	55

$$S_5 = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu = \frac{2\cdot 10 + (5-1)0,5}{2}5 = 55$$

• τη σταδιακή φόρτωση (ή εκφόρτωση) του φορτίου, με ίσα βάρη ανά χρονικό διάστημα (σταθερή αύξηση ή μείωση)

Εφαρμογή 3

Πλοίο φορτώνει 50 τόνους χύδην φορτίο στο 1ο κύτος και αυξάνεται, με σταθερό ρυθμό, κατά 5 τόνους σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα τρία κύτη. Το συνολικό φορτίο, δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2}\nu$ δηλαδή

$$S_4 = \frac{2 \cdot 50 + (4 - 1)0,5}{2}4 = (100 + 15)2 = 230$$

Κύτος	**Φορτίο** (σε τόνους)
1ο	50
2ο	55
3ο	60
4ο	65
Σύνολο	230

• τον προγραμματισμό της συντήρησης των μηχανών, ανά σταθερά χρονικά διαστήματα λειτουργίας τους

Εφαρμογή 4

Η προληπτική συντήρηση, προγραμματίζεται σε σταθερά χρονικά διαστήματα λειτουργίας (π.χ. κάθε 500 ώρες). Αν οι ώρες της συντήρησης ακολουθούν μία αριθμητική πρόοδο, τότε από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ προκύπτει ότι η 5η προγραμματισμένη συντήρηση θα γίνει μετά από 2500 ώρες λειτουργίας, διότι $\alpha_5 = 500 + (5 - 1)500 = 500 + 2000 = 2500$

Συντήρηση	**Χρόνος** (σε ώρες)
1η	500
2η	1000
3η	1500
4η	2000
5η	2500

3.6 Στην οικονομία

3.6.1 Στην αποταμίευση με σταθερή, ανά μήνα, αύξηση του ποσού

Σπουδαστής αποταμιεύει 50 € τον 1ο μήνα και αυξάνει το ποσό κατά 20 € κάθε επόμενο μήνα. Πόσα χρήματα έχουν αποταμιευθεί σε 1 έτος;

Το 1 έτος έχει 12 μήνες. Η αποταμίευση, αποτελεί μία αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 50$ και $\omega = 20$ Είναι $\alpha_{12} = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega =$

$$50 + (12 - 1)20 = 50 + 11 \cdot 20 = 50 + 220 = 270$$

Επίσης, $S_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu = \frac{50 + 270}{2}12 = 6(50 + 270) = 6 \cdot 320 = 1920$

Άρα, η ετήσια αποταμίευση ανέρχεται στα 1920 €

Μήνας	**Ποσό**
Ιανουάριος	50
Φεβρουάριος	70
Μάρτιος	90
Απρίλιος	110
Μάιος	130
Ιούνιος	150

Ιούλιος	170
Αύγουστος	190
Σεπτέμβριος	210
Οκτώβριος	230
Νοέμβριος	250
Δεκέμβριος	270
Σύνολο	**1920**

3.6.2 Στη μισθοδοσία

Υπάλληλος, προσλαμβάνεται με μηνιαίο μισθό 1.000 € και αύξηση του μισθού 100 € κατ΄ έτος. Ποιος είναι ο μηνιαίος μισθός του, το 5ο έτος; Ποιες οι συνολικές μηνιαίες αποδοχές του, την πενταετία;

Οι κατ΄ έτος μισθοί του υπαλλήλου, σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1.000$, $\omega = 100$ Το 1ο έτος λαμβάνει 1.000 € ανά μήνα, το 2ο έτος 1.100 €, το 3ο έτος 1.200 €, το 4ο έτος 1.300 € και το 5ο έτος 1.400 € διότι από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ προκύπτει για το 5ο έτος ότι ο μηνιαίος μισθός του είναι $\alpha_5 = 1000 + (5-1)100 = 1000 + 400 = 1400$

Από $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$ προκύπτει ότι $S_5 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_5}{2}5 = \dfrac{1000+1400}{2}5 = 1200 \cdot 5 = 6000$

Έτος	Μηνιαίος μισθός	Ετήσιες αποδοχές
1ο	1.000 €	12.000 €
2ο	1.100 €	13.200 €
3ο	1.200 €	14.400 €
4ο	1.300 €	15.960 €
5ο	1.400 €	17.280 €
Άθροισμα	6.000 €	72.840 €

3.7 Στον αθλητισμό

Δρομέας αυξάνει την καθημερινή απόσταση προπόνησης κατά 200 m, ξεκινώντας με 1.000 m την 1η ημέρα. Πόση απόσταση διανύει την 10η ημέρα και πόση απόσταση συνολικά και τις 10 ημέρες;

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1.000$ και $\omega = 200$

Από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, προκύπτει ότι την 10η ημέρα διανύει απόσταση $\alpha_{10} = 1000 + (10-1)200 = 1000 + 9 \cdot 200 = 2800$ (σε m)

Από τον τύπο $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$, προκύπτει ότι και τις 10 ημέρες έχει διανύει συνολική απόσταση $S_{10} = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_{10}}{2}10 = \dfrac{1000+2800}{2}10 = 3800 \cdot 5 = 19000$ (σε m)

Ημέρα	Απόσταση
1η	1000
2η	1200
3η	1400
4η	1600
5η	1800
6η	2000
7η	2200

Δηλαδή, 19 km

8η	2400
9η	2600
10η	2800
Σύνολο	19000

3.8 Στην ανέγερση κτηρίων

Σε μία σκάλα, το κάθε σκαλοπάτι είναι $3\,cm$ υψηλότερο από το προηγούμενο. Αν το 1ο σκαλοπάτι είναι $10\,cm$, τότε ποιο είναι το ύψος του 15ου σκαλοπατιού;

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 10$, $\omega = 3$ Από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ προκύπτει ότι $\alpha_{15} = 10 + (15-1)3 = 10 + 14 \cdot 3 = 10 + 42 = 52$

Σκαλοπάτι	**Ύψος** (σε cm)
1	10
2	13
3	16
4	19
5	22
6	25
7	28
8	31
9	34
10	37
11	40
12	43
13	46
14	49
15	52

3.9 Στον υπολογισμό του χρόνου μελέτης

Μαθητής προσθέτει καθημερινά 10 λεπτά στη μελέτη του. Την 1η ημέρα μελέτησε επί 40 λεπτά. Πόσο θα μελετήσει την 7η ημέρα; Πόσο μελέτησε συνολικά και τις 7 ημέρες; Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 40$ και $\omega = 10$ Από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, προκύπτει για την 7η ημέρα ότι θα μελετήσει $\alpha_7 = 40 + (7-1)10 = 40 + 60 = 100$ λεπτά

Από τη σχέση $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$, προκύπτει ότι μελέτησε συνολικά $S_7 = \dfrac{40+100}{2}7 = 70 \cdot 7 = 490$ λεπτά στις 7 ημέρες

Ημέρα	**Λεπτά μελέτης**
1η	40
2η	50
3η	60
4η	70
5η	80

6η	90
7η	100
Σύνολο	490

3.10 Αξιοσημείωτα αθροίσματα

Με χρήση των σχέσεων των αριθμητικών προόδων, αποδεικνύεται ότι:

$$S_1 = 1+2+3+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+...+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+3^3+...+\nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 = S_1^2$$

4. Γεωμετρική πρόοδος

Έστω η ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$ Παρατηρώ ότι ο κάθε όρος της, από τον 2^o και μετά, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενο του επί το $\frac{1}{2}$

Έστω η ακολουθία $-2,-4,-8,-16,-32,-64,...$ Παρατηρώ ότι κάθε όρος της, εκτός από τον 1^o, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενό του επί το 2.

Υπάρχουν ακολουθίες που κάθε όρος τους, από τον 2^o και μετά, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενο του επί έναν σταθερό αριθμό που λέγεται **λόγος** και συμβολίζεται με το γράμμα λ. Οι ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα, ονομάζονται **γεωμετρικές πρόοδοι**. Μία ακολουθία αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu, ...$ είναι **γεωμετρική πρόοδος**, αν και μόνο τότε, αν υπάρχει αριθμός λ έτσι ώστε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ $\forall \nu = 1,2,3,...$ Οι όροι της ακολουθίας (α_ν) λέγονται διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου και ο όρος α_ν λέγεται ν–οστός όρος ή όρος ν–τάξης της προόδου. Μία γεωμετρική πρόοδος με όρους διαφορετικούς από το μηδέν λέγεται και **πρόοδος κατά πηλίκο**, διότι από τη σχέση $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ προκύπτει ότι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = ... = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = ... = \lambda$

Γεωμετρική πρόοδος είναι μία ακολουθία μη μηδενικών αριθμών, της οποίας το πηλίκο $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων, είναι πάντα σταθερό. Αυτό το σταθερό πηλίκο, είναι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου.

Ανάλογα με την τιμή του λόγου λ, η γεωμετρική πρόοδος εμφανίζει διαφορετικές συμπεριφορές:

- Αν $\lambda > 1$, τότε οι όροι της γεωμετρικής προόδου, αυξάνονται εκθετικά εφόσον ο $1^{ος}$ όρος είναι θετικός, ή μειώνονται εκθετικά εφόσον ο $1^{ος}$ όρος είναι αρνητικός (αύξουσα ή φθίνουσα, αντίστοιχα).
- Αν $0 < \lambda < 1$, τότε οι όροι της γεωμετρικής προόδου μειώνονται εφόσον ο $1^{ος}$ όρος είναι θετικός ή αυξάνονται εφόσον ο $1^{ος}$ όρος είναι αρνητικός (φθίνουσα ή αύξουσα, αντίστοιχα).

• Αν $\lambda=1$, τότε όλοι οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι ίσοι με τον 1ο όρο a_1

• Αν $\lambda<0$, τότε η γεωμετρική πρόοδος αλλάζει πρόσημο εναλλάξ (εναλλασσόμενη).

Μία γεωμετρική πρόοδος και γενικότερα μία ακολουθία (α_ν), $\nu=1,2,3,...$ λέγεται:

• απολύτως αύξουσα, αν η ακολουθία $|\alpha_\nu|$, ν = 1, 2, ... είναι αύξουσα, δηλαδή αν ισχύει ότι $|\alpha_{\nu+1}|>|\alpha_\nu|$, $\forall\,\nu\in\mathbb{N}$

• απολύτως φθίνουσα, αν ισχύει ότι $|\alpha_{\nu+1}|<|\alpha_\nu|$, $\forall\,\nu\in\mathbb{N}$

Άρα, όταν $|\lambda|>1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως αύξουσα.

Αν $|\lambda|=1$, δηλαδή αν $\lambda=\pm1$ τότε:

• Για $\lambda=1$ η γεωμετρική πρόοδος είναι σταθερή ακολουθία, δηλαδή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu$ $\forall\,\nu=1,2,3,...$

• Για $\lambda=-1$ η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως σταθερή, επειδή τότε $|\alpha_{\nu+1}|=|\alpha_\nu\cdot\lambda|=|\alpha_\nu|\cdot|\lambda|=|\alpha_\nu|\cdot|-1|=|\alpha_\nu|=...=|\alpha_3|=|\alpha_2|=|\alpha_1|,\forall\,\nu=1,2,3,...$ δηλαδή, η γεωμετρική πρόοδος είναι συγχρόνως απολύτως αύξουσα και απολύτως φθίνουσα.

4.1 Γενικός όρος

Ο ν–οστός όρος α_ν σε μία γεωμετρική πρόοδο που έχει 1ο όρο a_1 και μη μηδενικό λόγο λ, βρίσκεται αν πολλαπλασιάσω τον 1ο της όρο a_1 με δύναμη του λόγου λ, η οποία έχει εκθέτη τον αριθμό που φανερώνει το πλήθος των όρων που προηγούνται του α_ν. Δηλαδή, $\alpha_\nu=a_1\lambda^{\nu-1}\ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$

Απόδειξη

Είναι $\left.\begin{cases} a_1=a_1\\ a_2=a_1\lambda\\ a_3=\lambda a_2\\ a_4=\lambda\alpha_3\\ ...\\ \alpha_{\nu-1}=\lambda\alpha_{\nu-2}\\ \alpha_\nu=\lambda\alpha_{\nu-1}\end{cases}\right\}\Rightarrow \alpha_\nu=a_1\lambda^{\nu-1}$

Μια πιο αυστηρή απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ως εξής

Βήμα 1 Για $\nu=1$ (η μικρότερη τιμή του ν), η προς απόδειξη σχέση προφανώς ισχύει διότι $\alpha_1=a_1\lambda^{1-1}=a_1\lambda^0=a_1\cdot1=a_1$ (ανακλαστική ιδιότητα)

Βήμα 2 Έστω ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu=k$, δηλαδή έστω ότι $\alpha_k=\alpha_1\cdot\lambda^{k-1}$

Βήμα 3 Θα δειχθεί ότι η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $\nu=k+1$, δηλαδή ότι $\alpha_{k+1}=\alpha_1\cdot\lambda^{k+1-1}=\alpha_1\cdot\lambda^k$ Πράγματι, $\alpha_{k+1}=\alpha_k\cdot\lambda=\alpha_1\cdot\lambda^{k-1}\cdot\lambda=\alpha_1\cdot\lambda^k$

Από τα βήματα 1, 2, 3 και τα γνωστά μας από την επαγωγή, η σχέση $\alpha_\nu=a_1\lambda^{\nu-1}$ ισχύει $\forall\,\nu\in\mathbb{N}$

• Από την παραπάνω ιδιότητα, προκύπτει ότι μία γεωμετρική πρόοδος είναι ορισμένη, όταν δίνονται ο πρώτος όρος της α_1 και ο λόγος της λ. Τότε, οι όροι της προόδου είναι:

$1^{ος}$ όρος: α_1

$2^{ος}$ όρος: $a_1\lambda$

$3^{ος}$ όρος: $\alpha_1 \cdot \lambda^2$

$4^{ος}$ όρος: $\alpha_1 \cdot \lambda^3$

$5^{ος}$ όρος: $\alpha_1 \cdot \lambda^4$

κ.ο.κ.

4.2 Ιδιότητες

• Από τον τύπο $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ έπεται ότι αν ξέρω τους τρεις από τους αριθμούς $\alpha_1, \lambda, \alpha_\nu$ μπορώ να προσδιορίσω και τον τέταρτο.

• Αν για μια ακολουθία φυσικών αριθμών (α_ν) είναι $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1} \; \forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος. Πράγματι τότε έχω: $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{\nu+1} = \alpha_1\lambda^\nu \\ \alpha_\nu \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

• Αν μια ακολουθία φυσικών αριθμών (α_ν) είναι με μη μηδενικό λόγο λ, τότε $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\mu < \nu$ ισχύουν:

i) $\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_1 \cdot \lambda^\mu$

ii) $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} \cdot \lambda^\mu$

iii) $\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu \cdot \lambda^{-\mu}$

iv) $\alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu$

Η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ως εξής: Σε πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου, το γινόμενο δύο όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους, είναι ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων. Δηλαδή,

$$\alpha_2 \cdot \alpha_{\nu-1} = \alpha_1 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{\alpha_\nu}{\lambda}\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu$$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_{\nu-2} = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \cdot \left(\frac{\alpha_\nu}{\lambda^2}\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu$$

Ειδικότερα στην περίπτωση που το πλήθος των όρων είναι περιττό, οπότε υπάρχει μεσαίος όρος, τότε ο όρος αυτός είναι μέσος ανάλογος των άκρων όρων.

4.3 Γεωμετρικός μέσος

• Ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι τρεις αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, είναι η $\beta^2 = \alpha\gamma$. Ο β ονομάζεται **γεωμετρικός μέσος** ή **μέσος ανάλογος** των α, γ

Γενικά, αν έχω τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ ονομάζω γεωμετρικό τους μέσο και συμβολίζω M_Γ, τον αριθμό $\mathrm{M}_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu}$

4.4 Άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\Sigma = \dfrac{\alpha_\nu\lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Απόδειξη

Είναι $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$, άρα $-\Sigma = -\alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_\nu = -\alpha_1 - \alpha_1\lambda - ... - \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

και $\lambda\Sigma = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + ... + \lambda\alpha_\nu = \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + ... + \lambda^\nu\alpha_1$

$$\left.\begin{cases} \lambda\Sigma = \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + ... + \lambda^\nu\alpha_1 \\ -\Sigma = -\alpha_1 - \alpha_1\lambda - ... - \alpha_1\lambda^{\nu-1} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \lambda\Sigma - \Sigma = -\alpha_1 + \lambda^\nu\alpha_1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\Sigma = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Άρα, $\Sigma = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Όταν $\lambda = 1$, τότε $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \nu \cdot \alpha_1$

4.5 Άθροισμα των απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

Έστω γεωμετρική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ με λόγο λ, όπου $|\lambda| < 1$. Αποδεικνύεται ότι $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \dfrac{\alpha_1}{1 - \lambda}$

4.6 Παρεμβολή γεωμετρικών ενδιάμεσων

Δίνονται δύο μη μηδενικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$

Οι μη μηδενικοί αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_\mu$ λέγονται γεωμετρικοί ενδιάμεσοι των α, β αν και μόνο αν, οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, ..., x_\mu, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου.

5. Εφαρμογές των γεωμετρικών προόδων

Η γεωμετρική πρόοδος, είναι μία ακολουθία αριθμών στην οποία ο κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο του όρο, επί έναν σταθερό αριθμό. Αυτή η μορφή προόδου, συνδέεται άμεσα με τις εκθετικές αυξήσεις (ή μειώσεις). Η γεωμετρική πρόοδος, έχει τεράστιο εύρος εφαρμογών σε επιστημονικούς, τεχνολογικούς, οικονομικούς και κοινωνικούς τομείς. Χρησιμοποιείται όταν ένα μέγεθος αυξάνεται ή μειώνεται εκθετικά, δηλαδή με βάση ποσοστιαία ή πολλαπλασιαστική μεταβολή.

5.1 Στη φυσική

Η γεωμετρική πρόοδος, περιγράφει φαινόμενα όπως είναι η εκθετική αύξηση των πληθυσμών ορισμένων σωματιδίων ή η εκθετική φθορά της ενέργειας.

Εφαρμογή 5

Ένα σήμα, σε κάθε κύκλο χάνει το 30% της έντασης του. Αν η αρχική ένταση είναι $a_1 = 100$ μονάδες, ποια θα είναι η ένταση μετά από τον 6$^\text{ο}$ κύκλο;

Είναι $\lambda = 0,7$ και από τη σχέση $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ προκύπτει ότι $\alpha_6 = 100 \cdot \left(\dfrac{7}{10}\right)^{6-1} = \dfrac{7^5}{1000} = 16,807$ μονάδες

5.2 Στη χημεία

Στη χημεία, η ραδιενεργός διάσπαση είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου οι ποσότητες μειώνονται, σύμφωνα με μία γεωμετρική πρόοδο.

Εφαρμογή 6

Ένα βακτήριο, διπλασιάζεται κάθε 30 λεπτά. Σε 5 ώρες (δηλαδή σε 10 κύκλους), πόσα βακτήρια θα υπάρχουν; Είναι $a_1 = 1$, $\lambda = 2$ και από τη σχέση $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ προκύπτει ότι $\alpha_{10} = 1\cdot 2^{10-1} = 2^9 = 512$ βακτήρια

Κύκλος	Χρόνος (h)	Βακτήρια
1	0,5	1
2	1	2
3	1,5	4
4	2	8
5	2,5	16
6	3	32
7	3,5	64
8	4	128
9	4,5	256
10	5	512

5.3 Στην ηλεκτρονική

Οι ενισχυτές του σήματος, που αυξάνουν το πλάτος σε κάθε στάδιο με σταθερό λόγο, ακολουθούν μία γεωμετρική πρόοδο.

Εφαρμογή 7

Ο όγκος των δεδομένων σε μια εφοδιαστική αλυσίδα, διπλασιάζεται κάθε εβδομάδα. Αν η αρχική τιμή είναι 1 GB, ποια θα είναι μετά από 9 εβδομάδες;

Είναι $a_1 = 1$, $\lambda = 2$ και από τη σχέση $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ προκύπτει ότι $\alpha_9 = 1\cdot 2^{9-1} = 2^8 = 256\,\text{GB}$

Εβδομάδες	GB
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256

5.4 Στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου

Η ταχεία αύξηση (ή μείωση) μιας μεταβλητής (συχνότητα απόκρισης, τάση), μπορεί να περιγραφεί από μία γεωμετρική πρόοδο.

Εφαρμογή 8

Μηχανή αξίας 10.000 € χάνει ετησίως το 20% της αξίας της. Πόσο θα αξίζει μετά από 5 έτη; Είναι $a_1 = 10.000$, $\lambda = 0{,}8$ και από τη σχέση $\alpha_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ προκύπτει ότι $\alpha_5 = 10.000\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^{5-1} = 8^4 = 64\cdot 64 = 4.096$ €

Έτος	Αξία (σε €)
1ο	10.000
2ο	8.000
3ο	6.400
4ο	5.120
5ο	4.096

5.5 Στη ναυτιλία

Η γεωμετρική πρόοδος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για:

• τον υπολογισμό της κατανάλωσης των καυσίμων, σε σχέση με την ταχύτητα, διότι συχνά οι καταναλώσεις ακολουθούν σχέσεις (μη γραμμικές, εκθετικές) που μπορούν να προσεγγιστούν με μία γεωμετρική πρόοδο που έχει αρχικό όρο a_1, λόγο λ και γενικό όρο $a_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$

Εφαρμογή 9

Πλοίο έχει ημερήσια κατανάλωση 20 τόνων, όταν κινείται με ταχύτητα 12 κόμβων. Ποια θα είναι η ημερήσια κατανάλωση για ταχύτητα 14 κόμβων; Δίνεται ότι, η αύξηση της ταχύτητας κατά 1 κόμβο συνοδεύεται από αύξηση 10% της κατανάλωσης, δηλαδή $\lambda = 1{,}1$. Από τη σχέση $a_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ είναι

$a_3 = 20 \cdot 1{,}1^{3-1} = 20 \cdot 1{,}1^2 = 20 \cdot 1{,}21 = 24{,}2$ τόνοι ανά ημέρα

Ταχύτητα (σε κόμβους)	Καύσιμα (σε τόνους)
12	20
13	22
14	24,2

• την πρόβλεψη του κόστους των καυσίμων σε μεγάλα ταξίδια (υπολογισμός της εκθετικής αύξησης του κόστους, λόγω του κυματισμού ή της αύξησης της ταχύτητας), σύμφωνα με τη σχέση $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Εφαρμογή 10

Πλοίο που κινείται με την οικονομική ταχύτητα, δαπανά ημερησίως για καύσιμα 100.000 €. Αν η αύξηση της ταχύτητας αυξάνει το κόστος των καυσίμων κατά 15% (δηλαδή $\lambda = 1{,}15$), ανά επίπεδο ταχύτητας, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, για 3 επίπεδα είναι

$$S_3 = 100.000\frac{1{,}15^3 - 1}{1{,}15 - 1} = 100.000\frac{1{,}52 - 1}{0{,}15} = 100.000\frac{0{,}52}{0{,}15} = 346.666{,}\bar{6}\ €$$

• την ανάλυση ενός στόλου πλοίων, με γεωμετρική αύξηση της χωρητικότητας τους. Κατά την πετρέλευση του πλοίου, τα αποθέματα των καυσίμων του αυξάνονται γεωμετρικά σε σχέση με τον χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

• τον υπολογισμό της εκθετικής μείωσης της απόδοσης των κινητήρων του πλοίου, με την πάροδο του χρόνου

Εφαρμογή 11

Καινούργιος κινητήρας έχει αρχική απόδοση 100%, η οποία μειώνεται ετησίως κατά 5% (δηλαδή $\lambda = 0{,}95$). Πόση θα είναι η απόδοση του κινητήρα, μετά από 6 έτη; Από τον τύπο $a_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ είναι $\alpha_6 = \alpha_1\lambda^{6-1} = 100 \cdot 0{,}95^5 = 77{,}378$

Έτος	Απόδοση
1ο	100
2ο	95
3ο	90,25
4ο	85,737
5ο	81,45
6ο	77,378

• τη μοντελοποίηση του ρυθμού διάβρωσης (οξείδωση) των μετάλλων, λόγω του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

Εφαρμογή 12

Ετήσια διάβρωση μετάλλου 1 mm, αυξάνεται ετησίως κατά 20% (δηλαδή $\lambda = 1,2$). Πόσα mm θα είναι η διάβρωση του μετάλλου, μετά από 5 έτη;

Από τον τύπο $a_\nu = a_1\lambda^{\nu-1}$ είναι $\alpha_5 = \alpha_1\lambda^{5-1} = 1\cdot 1,2^4 = 1,2^4 = 1,44\cdot 1,44 = 2,0736\ mm$

Έτος	Διάβρωση (σε mm)
1ο	1
2ο	1,2
3ο	1,44
4ο	1,728
5ο	2,0736

6. Αρμονική πρόοδος

Έστω η ακολουθία $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\dots,\frac{1}{(2\nu+1)},\dots$ Παρατηρώ ότι αν πάρω με την ίδια τάξη τους αντίστροφους των όρων της, έχω την ακολουθία $3,5,7,9,\dots,(2\nu+1),\dots$ που είναι μία αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$

Έστω η ακολουθία 6, 3, 2, ... Παρατηρώ ότι η ακολουθία $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\dots$ είναι μία αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = \frac{1}{6}$

Βλέπω ότι υπάρχουν ακολουθίες αριθμών που αν πάρω τους αντίστροφους των όρων τους, με την ίδια τάξη, προκύπτει μία νέα ακολουθία, που είναι αριθμητική πρόοδος. Οι ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **αρμονικές προόδους**. Μία ακολουθία μη μηδενικών αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_{\nu-2},\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$ είναι αρμονική πρόοδος, αν και μόνο αν, η ακολουθία $\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\dots,\frac{1}{\alpha_\nu}$ είναι αριθμητική πρόοδος, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός ω τέτοιος, ώστε να ισχύει ότι $\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\alpha_\nu} + \omega \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{a_{\nu+1}} - \frac{1}{a_\nu} = \omega$ όπου το ω είναι ανεξάρτητο από το ν Γενικός τύπος $a_\nu = \dfrac{1}{\frac{1}{a_1} + (\nu-1)\omega}$ Αναδρομικός τύπος $a_{\nu+1} = \dfrac{1}{\omega + \frac{1}{a_\nu}}$

Π.χ. Αν $a_1 = 1$ και $\omega = 1$, τότε $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$

Π.χ. Αν $a_1=1$ και $\omega=2$, τότε $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{3}$, $a_3=\frac{1}{5}$ δηλαδή εμφανίζονται οι αντίστροφοι όλων των περιττών αριθμών

Ζητήματα που αφορούν μία αρμονική πρόοδο, ανάγονται σε επίλυση ζητημάτων που αφορούν την αντίστοιχη αριθμητική πρόοδο.

6.1 Εύρεση του νιοστού όρου

Έστω η αρμονική πρόοδος $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{\nu-2},\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu,...$ Αν ω είναι η διαφορά της αντίστοιχης αριθμητικής προόδου $\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},...,\frac{1}{\alpha_\nu}$ τότε είναι

$$\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_1}+(\nu-1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu=\frac{\alpha_1}{1+(\nu-1)\omega\cdot\alpha_1}$$

Αν δύο πρώτοι όροι μίας αρμονικής προόδου είναι γνωστοί, τότε η διαφορά είναι $\omega=\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_1}$ συνεπώς, ο ν–οστός όρος της αρμονικής προόδου είναι

$$\alpha_\nu=\frac{\alpha_1\cdot\alpha_2}{\alpha_1(\nu-1)-\alpha_2(\nu-2)}$$

6.2 Άθροισμα των ν πρώτων όρων

Δεν υπάρχει τύπος που να δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αρμονικής προόδου.

6.3 Διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου

Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μίας αρμονικής προόδου, τότε οι αντίστροφοι τους $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου, συνεπώς $2\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\Leftrightarrow\beta=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}}\Leftrightarrow\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ είναι $\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$ δηλαδή οι $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου, οπότε οι μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι μίας αρμονικής προόδου. Συνεπώς, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου είναι η $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ Ο β λέγεται **αρμονικός μέσος** των α,γ

Αν έχω τους μη μηδενικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{\nu-2},\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$ ονομάζω τον $\mathrm{M_H}=\dfrac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}$ **αρμονικό** τους **μέσο**.

6.4 Αρμονική αναλογία

Η σχέση $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ γράφεται ισοδύναμα, όπως παρακάτω

$$\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}=\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}\Leftrightarrow\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$$

Η $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ λέγεται **αρμονική αναλογία** και από αυτήν προκύπτει ότι για να είναι οι διάφοροι μεταξύ τους αριθμοί α,β,γ με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μίας αρμονικής προόδου πρέπει και αρκεί να είναι μη μηδενικοί και να βρίσκονται σε αρμονική αναλογία.

Παρατήρηση

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μία ακολουθία (α_ν) μη μηδενικών όρων αρμονική πρόοδος, είναι η $\frac{2}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$ όπου $\nu=2,3,...$

6.5 Παρεμβολή αρμονικών ενδιάμεσων

Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί α,β. Οι αριθμοί $x_1,x_2,...,x_\mu$ λέγονται **αρμονικοί ενδιάμεσοι** των α,β αν και μόνο αν, αν οι $\alpha,x_1,x_2,...,x_\mu,\beta$ είναι διαδοχικοί όροι μίας αρμονικής προόδου.

Παρεμβολή μ αρμονικών ενδιάμεσων μεταξύ των α,β είναι η εύρεση μ αριθμών $x_1,x_2,...,x_\mu$ έτσι ώστε οι $\alpha,x_1,x_2,...,x_\mu,\beta$ να είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου.

6.5.1 Το πρόβλημα της αρμονικής παρεμβολής

Να παρεμβληθούν μ αρμονικοί ενδιάμεσοι, μεταξύ των μη μηδενικών αριθμών α,β

Αρκεί να παρεμβάλω μ αριθμητικούς ενδιάμεσους μεταξύ των $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ οπότε οι αντίστροφοι τους θα είναι οι μ αρμονικοί ενδιάμεσοι των α,β. Από τον τύπο της αριθμητικής παρεμβολής είναι $\omega'=\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\mu+1}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}$ δηλαδή $\omega'=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}$ που λέγεται τύπος της αρμονικής παρεμβολής.

7. Εφαρμογές των αρμονικών προόδων

Οι αρμονικές πρόοδοι χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές στα κυματικά φαινόμενα, στις ταλαντώσεις, στους χρηματοοικονομικούς υπολογισμούς, στη θεωρία αριθμών, στη στατιστική, στη φυσική, στη μηχανική και στη μουσική.

7.1 Στη φυσική

Στις ταλαντώσεις, η κατανομή των επιμέρους συχνοτήτων ακολουθεί αρμονική πρόοδο, σε μουσικά όργανα ή σε δονήσεις των δοκών. Στη μουσική, η αρμονική πρόοδος σχετίζεται με την ανάλυση των αρμονικών του ήχου. Οι αρμονικές είναι πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας ενός ήχου, κάτι που έχει σημασία στη σύνθεση και στην ανάλυση των μουσικών φαινομένων. Στην ανάλυση των περιστροφικών κινήσεων, η αρμονική πρόοδος βοηθά στη μοντελοποίηση της ταχύτητας περιστροφής ή των αντίστοιχων γωνιακών επιταχύνσεων.

7.2 Στην ηλεκτρολογία

Σε κυκλώματα που συνδυάζουν πολλαπλές συχνότητες, οι αρμονικές συνιστώσες εμφανίζουν κατανομές που σχετίζονται με αρμονικές προόδους. Η αντίσταση ενός κυκλώματος, εξαρτάται από στοιχεία του κυκλώματος που ακολουθούν αρμονική πρόοδο. Στη μηχανική, η αρμονική πρόοδος χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση και τη σχεδίαση της κατανομής των φορτίων, σε γραμμές ή σε κατασκευές.

7.3 Στην τεχνολογία

Η ανάλυση των σημάτων, ειδικά η επεξεργασία του ήχου και της εικόνας, αξιοποιεί τις αρμονικές προόδους για την κατανόηση και για το φιλτράρισμα των συχνοτήτων. Τα φαινόμενα που σχετίζονται με κυματισμούς ή με αντηχήσεις, περιλαμβάνουν αρμονικές προόδους.

7.4 Στην οικονομία

Σε ορισμένα μοντέλα αποτίμησης των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων ή υπολογισμού των τόκων, οι αρμονικές πρόοδοι χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουν τη συμπεριφορά των επενδύσεων. Κάποια οικονομικά μοντέλα, βασίζονται στην αρμονική πρόοδο για να προβλέψουν την κατανάλωση ή την αύξηση της ζήτησης των προϊόντων, με βάση την αντιστροφή της πληθωριστικής τάσης.

7.5 Στα μαθηματικά

Στην αριθμητική ανάλυση, οι αρμονικές πρόοδοι χρησιμοποιούνται σε προβλήματα που σχετίζονται με τις αριθμητικές σειρές, με τα ολοκληρώματα και με τις διαφορικές εξισώσεις. Στη μελέτη των σειρών Fourier και των άλλων σειρών, οι αρμονικές πρόοδοι βοηθούν στην κατανόηση του πως συνδυάζονται οι διάφοροι όροι των σειρών. Στη στατιστική, οι αρμονικές πρόοδοι εμφανίζονται σε μοντέλα που περιγράφουν την κατανομή των σφαλμάτων ή των ακανόνιστων δεδομένων. Στην ανάλυση των δεδομένων, η αρμονική πρόοδος χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των γραμμικών μοντέλων, μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

7.6 Στη ναυτιλία

Οι αρμονικές πρόοδοι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για:

- την ανάλυση των ρυθμών εκφόρτωσης του φορτίου
- τον υπολογισμό της μείωσης της απόδοσης των μηχανών, λόγω της συχνότητας των ταλαντώσεων
- τη βελτιστοποίηση της ταχύτητας του πλοίου, προς ελαχιστοποίηση των δονήσεων
- την ανάλυση της σταθερότητας του πλοίου στα κύματα, διότι η ένταση (ύψος) των κυμάτων μειώνεται αρμονικά σε σχέση με την απόσταση από την ακτή, σύμφωνα με τον τύπο $\frac{1}{\mathrm{H}_\nu}=\frac{1}{\mathrm{H}_1}+(\nu-1)\omega$
- τη μελέτη των δονήσεων και των ταλαντώσεων των κινητήρων και των μηχανικών μερών του πλοίου (αξόνων και ελίκων) $\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_1}+(\nu-1)\omega$

Εφαρμογή 13

Αν η $1^η$ δόνηση είναι $\alpha_1 = 5\ \frac{mm}{s}$ και $\omega = 0,05$ τότε από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι $\frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{\alpha_1} + (4-1)\omega = \frac{1}{5} + 3 \cdot 0,05 = 0,2 + 0,15 = 0,35$ Άρα, $\alpha_4 = 2,857\ \frac{mm}{s}$

- την ανάλυση των ταλαντώσεων του πλοίου, λόγω των κυμάτων

Εφαρμογή 14

Κλίση $\theta_1 = 3^0$ στο $1^ο$ βήμα της φόρτωσης με $\omega = 0,02$, από τον τύπο $\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu - 1)\omega$ που στην περίπτωση αυτή γράφεται $\frac{1}{\theta_\nu} = \frac{1}{\theta_1} + (\nu - 1)\omega$ είναι $\frac{1}{\theta_5} = \frac{1}{\theta_1} + (5-1)\omega = \frac{1}{3} + 4 \cdot 0,02 = 0,333 + 0,08 = 0,413$ Άρα, $\theta_5 = 2,421^0$

- την πρόβλεψη κόστους–απόδοσης, σύμφωνα με τον τύπο $C_\nu = F_\nu \cdot P + \frac{K}{E_\nu}$,

όπου:

F_ν : κατανάλωση των καυσίμων (γεωμετρική πρόοδος)

P : τιμή του καυσίμου

E_ν : απόδοση του εξοπλισμού (αρμονική πρόοδος)

K : κόστος συντήρησης