



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

The Vector Cross Product

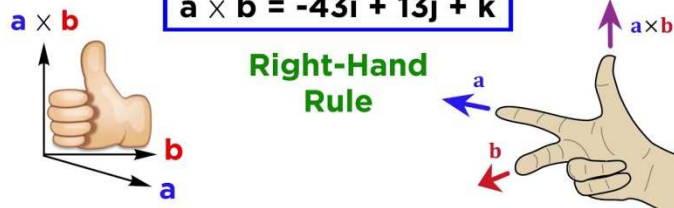
$$\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



Σπουδαστής: Πάρος Κωνσταντίνος (ΑΜ 8243)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (Μ.Εδ.),
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2022–2023

Ημερομηνία ανάθεσης: **21.05. 2021**
 Ημερομηνία κατάθεσης: **.... 10.2022**
 Ημερομηνία εξέτασης: **... 10.2022**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Διακεκριμένη	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Αθανασία Χρηστίδου Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Επίκουρη Καθηγήτρια		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

1. Γραμμικοί χώροι	3
2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων.....	3
3. Υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου	3
4. Η έννοια του εσωτερικού γινομένου	4
5. Παραδείγματα	4
6. Ορθογωνιότητα	6
7. Παραδείγματα	7
8. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων	10
9. Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων του D^3	12
10. Χρήσιμες ιδιότητες	13
11. Θεώρημα	13
12. Χαρακτηριστικές ιδιότητες	14
13. Εφαρμογές σε γεωμετρικούς τόπους	26

1. Γραμμικοί χώροι

Έστω V ένα μη κενό σύνολο και K ένα σώμα (θα θεωρούμε ότι είναι $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Το σύνολο θα ονομάζεται **διανυσματικός** ή **(γραμμικός) χώρος** πάνω στο σώμα K αν το Ω είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

Μία εσωτερική πράξη την **πρόσθεση** $+: V \times V \rightarrow V, (u, v) \rightarrow u + v$, τέτοια ώστε το $(V, +)$ να είναι αντιμεταθετική (ή Αβελιανή) ομάδα, δηλαδή για κάθε $u, v, w \in V$ να αληθεύουν οι ιδιότητες:

- $u + v = v + u$ (αντιμεταθετική ιδιότητα),
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (προσεταιριστική ιδιότητα),
- υπάρχει $0_V \in V$ τέτοιο ώστε $u + 0_V = u$ για κάθε $u \in V$ (ουδέτερο στοιχείο),
- για κάθε $u \in V$ υπάρχει $-u \in V$ τέτοιο ώστε $u + (-u) = 0_V$ (αντίθετο στοιχείο).

Μία εξωτερική πράξη με συντελεστές από ένα σώμα K , τον **βαθμωτο πολλαπλασιασμό** $: K \times V \rightarrow V, (\lambda, u) \rightarrow \lambda \cdot u$ ή λu , τέτοια ώστε για κάθε $u, v \in V$ και για κάθε $\lambda, \mu \in K$ να αληθεύουν οι ιδιότητες:

- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση του K),
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση του V),
- $\lambda(\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$,
- $1 \cdot u = u$.

2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων

Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K , τότε για κάθε $\lambda, \mu \in K$ και για κάθε $u, v \in V$ αληθεύουν οι ιδιότητες:

- $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,
- $0 \cdot u = 0_V$,
- $\lambda \cdot u = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$ ή $u = 0_V$,
- $(-\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$,
- $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$ και $\lambda \neq 0 \Rightarrow u = v$,
- $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$ και $u \neq 0_V \Rightarrow \lambda = \mu$

3. Υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου

Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος** ή **γραμμικός υπόχωρος** ή απλά **υπόχωρος** του V , αν για κάθε $\lambda, \mu \in K$ και $u, v \in U$ αληθεύουν οι ιδιότητες:

$$\lambda u \in U \quad \text{και} \quad u + v \in U$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in U \quad \text{για κάθε} \quad \lambda, \mu \in K \quad \text{και} \quad u, v \in U$$

Με άλλα λόγια το U λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του V , όταν το U είναι διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με τις ίδιες πράξεις που έχει το V .

Παραδείγματα

- Το σύνολο $U = \{(a, b, 0) / a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου

$$V = \mathbb{R}^3 \quad \text{πάνω στο} \quad \mathbb{R}.$$

1. Το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $F(A, \mathbb{R})$ πάνω στο $\mathbb{R}$ των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A .

2. Το σύνολο των πινάκων $U = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) / A^T = A\}$

Είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

3. Το σύνολο U των φραγμένων συναρτήσεων είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V όλων των συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Αν ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα 0 , τότε το U δεν είναι υπόχωρος του V .

Αν U είναι ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), τότε το U περιέχει το μηδενικό στοιχείο του V .

4. Η έννοια του εσωτερικού γινομένου

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Η απεικόνιση

$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) αν οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται:

1. $\langle u, v \rangle \geq 0$ για κάθε $u \in V$ και $\langle u, u \rangle = 0$ αν και μόνο αν $u = 0_V$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ για κάθε $u, v \in V$
3. $\langle au_1 + bu_2, u \rangle = a\langle u_1, u \rangle + b\langle u_2, u \rangle$ για κάθε $u_1, u_2, u \in V$ και κάθε $a, b \in K$

Σημειώνουμε ότι με $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ συμβολίζουμε το **μιγαδικό συζυγές** του $\langle v, u \rangle$.

Χώρος εσωτερικού γινομένου (inner product space) είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο έχουμε ορίσει ένα εσωτερικό γινόμενο. Λόγω της δεύτερης ιδιότητας, έχουμε $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ και συνεπώς $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$.

Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Δηλαδή $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ για κάθε διάνυσμα $u \in V$.

Ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός $\|u\|$ ονομάζεται **νόρμα** (σπανιότερα καλείται επίσης **μήκος**) του διανύσματος u .

5. Παραδείγματα

1. Έστω $V = \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον αριθμό $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$

Ως το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχόντων διανυσμάτων $u, v \in \mathbb{R}^n$, όπου $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ με $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ και $i = 1, 2, \dots, n$.

Το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο ορισμένο στον χώρο $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται μερικές φορές και ως $u \cdot v$ δηλαδή γράφουμε $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Και το ονομάζουμε **σύνθετο εσωτερικό γινόμενο** στον $\mathbb{R}^n$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, ορισμένος με αυτό το εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται **Ευκλείδειος χώρος**.

2. Ομοίως, αν $V = \mathbb{C}^n$, ορίζουμε τον αριθμό $\langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n$

Ως το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχόντων διανυσμάτων όπου $u, v \in \mathbb{C}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ με $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ και $i = 1, 2, \dots, n$.

Το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο ορισμένο στον χώρο $\mathbb{C}^n$ συμβολίζεται μερικές φορές και ως $u \cdot v$ δηλαδή γράφουμε: $u \cdot v = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n$.

Και το ονομάζουμε **σύνθετο εσωτερικό γινόμενο** στον $\mathbb{C}^n$.
Σημειώνουμε ότι

$$u \cdot u = u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2 + \dots + u_n \bar{u}_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2$$

Όπου με $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ συμβολίζουμε τα συζυγή των μιγαδικών $u_1, u_2, \dots, u_n$, αντίστοιχα.

3. Έστω V ο διανυσματικός χώρος που ορίζεται ως ακολούθως

$$V = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty, a_n \in \mathbb{R}, \text{ για } n \in \mathbb{N} \right\},$$

Δηλαδή ως ο διανυσματικός χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ απείρων όρων, τέτοιων ώστε η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \text{ να συγκλίνει στο } \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε το **διανυσματικό άθροισμα** μεταξύ δύο οποιονδήποτε στοιχείων του χώρου V ακολούθως:

Αν $u = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ και $v = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ είναι δύο στοιχεία του V , τότε

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots).$$

Το **βαθμωτό γινόμενο** ορίζεται στον χώρο V ως ακολούθως:

$$\text{Αν } u = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in V \text{ και } k \in \mathbb{R}, \text{ τότε } ku = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n, \dots) \in V.$$

Ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο V ως εξής:

$$\text{Αν } u = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ και } v = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots), \text{ τότε το}$$

$$\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots \quad (*)$$

Ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο V.

Μπορεί ναδειχθεί ότι (αφήνεται ως άσκηση) η σειρά (*) συγκλίνει απόλυτα για κάθε $u, v \in V$. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο, όπως ορίστηκε στην σχέση (*), είναι καλά ορισμένο. Ο διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (*), ονομάζεται **χώρος**.

4. Έστω $V = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$

Είναι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t στο διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο V ορίζεται ως ακολούθως:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \text{για } f, g \in V.$$

5. Έστω $V = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$, $f, g \in V$

Είναι μία μιγαδική συνεχής συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t στο διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο V ορίζεται ως εξής:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{για } f, g \in V.$$

6. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των $m \times n$ πινάκων πάνω στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $V = \{A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid A = [a_{ij}]\}$ όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο V ορίζεται ως ακολούθως:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T A)$$

, όπου $A, B \in V$ και B^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του B.

6. Ορθογωνιότητα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου πάνω στο $\mathbb{C}$.

Λέμε πως τα διανύσματα του V είναι ορθογώνια αν και μόνο αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Συμβολικά γράφουμε $u \perp v$. Έστω W ένα μη κενό υποσύνολο του V.

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του συνόλου W ως προς το χώρο V συμβολίζεται με $W^\perp$ και αποτελείται από όλα τα διανύσματα του V που είναι ορθογώνια ως προς κάθε $w \in W$, δηλαδή $W^\perp = \{u \in V \mid \langle u, w \rangle = 0, \text{ για κάθε } w \in W\}$.

Θεώρημα

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$ και W ένα μη κενό υποσύνολο του V.

Τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^\perp$ είναι υπόχωρος του V.

Παράδειγμα

Έστω $W = \{(0,0,a_3) | a_3 \in \mathbb{R}\}$. Τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^\perp$ ορίζεται ως
 ακολουθώς $W^\perp = \{(a_1,a_2,0) | a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$

Ως προς το σύνθηες εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο.

Είναι φανερό ότι το W είναι ο καρτεσιανός άξονας z και το ορθογώνιο συμπλήρωμά του, $W^\perp$, είναι το καρτεσιανό επίπεδο xy , ενώ ισχύει επίσης ότι $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.

Η ορθογώνια προβολή του P_W επί του W , δηλαδή η απεικόνιση $R^3 \rightarrow R^3$

Ορίζεται ως εξής $P_W(x,y,z) = (0,0,z)$ $P_W: R^3 \rightarrow R^3$

- Ένα διάνυσμα u ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ονομάζεται **μοναδιαίο διάνυσμα** αν $\langle u, u \rangle = 1$, δηλαδή $\|u\| = 1$.

- Ονομάζουμε **απόσταση** μεταξύ δύο διανυσμάτων u, v ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τον μη -αρνητικό πραγματικό αριθμό $\|u - v\|$, δηλαδή τον αριθμό που δίνεται ως

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα των αριθμών $K(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$ λέγεται **ορθογώνιο** αν και μόνο αν

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ αν } i \neq j \text{ για } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Στην περίπτωση που επιπλέον αληθεύει

$$\|u_i\| = 1, \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

τότε το ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_n$ λέγεται **ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων**. Ισχύει ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι ορθοκανονικό αν και μόνο αν

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ όπου } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Η συνάρτηση δ_{ij} όπως ορίζεται παραπάνω, ονομάζεται **συνάρτηση δ του Kronecker**.

7. Παραδείγματα

1. Έστω η συνήθης βάση διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο R^3 .

$$\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\} \quad R^3$$

Είναι προφανές ότι $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0$

και $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$.

Αρα η βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$, με τον τρόπο που ορίστηκε, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων.

2. Έστω η συνήθης βάση διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο R^3 .

Είναι προφανές ότι $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0$$

και

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

Αρα η βάση

$$\{e_1, e_2, e_3\},$$

με τον τρόπο που ορίστηκε, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων.

Θεώρημα

Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ πάνω στο R .

Τότε $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, για κάθε $u, v \in V$. (1)

Απόδειξη

Έστω $u = 0_V$ και $u \in V$.

Τότε η ανισότητα (1) φυσικά ικανοποιείται, καθώς λαμβάνει τη μορφή $0 \leq 0$.

Έστω $u \neq 0_V$ και $u \in V$. Θα αναπτύξουμε την έκφραση $\|u - \langle u, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}\|^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό t .

$$\text{Έχουμε } 0 \leq \|u - \langle u, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}\|^2 = \langle u - \langle u, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}, u - \langle u, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2} \rangle$$

1: ανισότητα Cauchy-Schwarz- Buniakowsky

$$= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle \frac{1}{\|v\|^2} \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle \frac{1}{\|v\|^2} \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle \frac{1}{\|v\|^2} \langle u, v \rangle \frac{1}{\|v\|^2} \langle u, u \rangle$$

$$= \|u\|^2 - 2t \langle u, v \rangle + t^2 \langle u, v \rangle^2 \frac{1}{\|v\|^2} \quad (2)$$

Αν θέσουμε $t = \frac{1}{\|u\|^2}$, τότε από τη σχέση (2) έπεται ότι

$$\frac{1}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle^2 - \frac{2}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle + \|u\|^2 \geq 0 \quad \text{Δηλαδή } \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Ορίζουμε αυτή τη γωνία θ ως τη **γωνία μεταξύ των δύο μη μηδενικών διανυσμάτων** u, v . Όπως ορίσαμε παραπάνω, αν u, v είναι δύο διανύσματα του χώρου R^n τέτοια ώστε $\langle u, v \rangle = 0$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα u, v είναι **ορθογώνια**.

Θεώρημα

Έστω u, v δύο διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο $\mathbb{R}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Τότε τα διανύσματα u, v είναι ορθογώνια αν και μόνο αν

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad (1)$$

Απόδειξη. Για κάθε $u, v \in V$, έχουμε

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

$$\text{Επομένως, } \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \quad (2)$$

Συνεπώς, η ταυτότητα (1) ικανοποιείται αν και μόνο αν ο όρος $\langle u, v \rangle$ της σχέσης (2) μηδενίζεται, δηλαδή αν και μόνο αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν τα διανύσματα u και v είναι ορθογώνια.

Παραδείγματα

1. Έστω u ένα μη-μηδενικό διάνυσμα ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ναδειχθεί ότι για κάθε διάνυσμα $v \in V$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός k τέτοιος ώστε $u - kv \perp v$.

Απόδειξη. Έστω $u \in V$. Το διάνυσμα $u - kv$ είναι ορθογώνιο προς το v αν και μόνο αν $\langle u - kv, v \rangle = 0$, δηλαδή $\langle u, v \rangle - k\langle v, v \rangle = 0$ ή $\langle u, v \rangle = k\|v\|^2$ ή $k = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$.

2. Ναδειχθεί ότι $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Για όλα τα διανύσματα u, v του χώρου $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \end{aligned}$$

(Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowsky). Άρα

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \text{Επομένως, λαμβάνουμε ότι } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

3. Στον διανυσματικό χώρο $C[-\pi, \pi]$ όλων των συνεχών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής x ορισμένο στο κλειστό διάστημα $[-\pi, \pi]$, ορίζουμε το

$$\text{εσωτερικό γινόμενο } \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{για } f, g \in C[-\pi, \pi].$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο των συναρτήσεων: $1, \sin x, \cos x$ είναι ορθογώνιο ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle 1, \sin x \rangle = 0, \quad \langle 1, \cos x \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \sin x, \cos x \rangle = 0 \quad \text{στο } [-\pi, \pi].$$

$$\text{Αλλά } \langle 1, \sin x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{x=-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle 1, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{x=-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{και } \langle \sin x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx (\sin x) = \frac{1}{2} \left[\sin^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Άρα , το σύνολο $\{1, \sin x, \cos x\}$ είναι ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων στον διανυσματικό χώρο $C[-\pi, \pi]$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

4.Έστω ο διανυσματικός χώρος $C[0,1]$ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής x ορισμένων στο διάστημα $[0,1]$, με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Να προσδιοριστεί ποιά από τις δύο συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = x^3$ έχει την μικρότερη απόσταση από τη συνάρτηση $h(x) = x^2$.
(Ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου μας επιτρέπει να υπολογίσουμε αποστάσεις μεταξύ συναρτήσεων στον χώρο $C[0,1]$).

Απόδειξη. Έχουμε $d(x, x^2) = \|x - x^2\| = \sqrt{(x - x^2, x - x^2)}$

και όμοια

$$d(x^3, x^2) = \|x^3 - x^2\| = \sqrt{(x^3 - x^2, x^3 - x^2)}$$

Όμως,

$$\langle x - x^2, x - x^2 \rangle = \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Ομοίως

$$\langle x^3 - x^2, x^3 - x^2 \rangle = \int_0^1 (x^3 - x^2)^2 dx = \int_0^1 (x^6 - 2x^5 + x^4) dx = \left. \frac{x^7}{7} - 2\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$$

$$\text{Επομένως, } d(x, x^2) = \frac{1}{\sqrt{30}} \text{ και } d(x^3, x^2) = \frac{1}{\sqrt{105}}$$

Και άρα η συνάρτηση $g(x) = x^3$ απέχει μικρότερη απόσταση από την συνάρτηση $h(x) = x^2$ ως προς τη συνάρτηση $f(x) = x$, στον χώρο $C[0,1]$.

8. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

• Έστω $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ και $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$

διανύσματα του R^3 . Το **εσωτερικό γινόμενο** των $\vec{a}, \vec{b}$ ορίζεται ως ακολούθως

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1)$$

• Ορίζουμε επίσης το **μήκος** του διανύσματος $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ και το συμβολίζουμε με $\|\vec{a}\|$, ως εξής $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Ένα διάνυσμα $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **μοναδιαίο** αν $\|\vec{a}\| = 1$.

Παρατήρηση

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι πραγματικός αριθμός.

• Ισχύει ότι $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$$\|\vec{i}\| = 1, \|\vec{j}\| = 1, \|\vec{k}\| = 1,$$

δηλαδή τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι μοναδιαία.

• Ισχύει ότι για οποιοδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$1. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0,$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{a} = 0, \text{ αν και μόνο αν } \vec{a} = \vec{0},$$

$$3. \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}},$$

$$4. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$5. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

$$6. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Θεώρημα

Έστω θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ του

$$\mathbb{R}^3. \text{ Τότε ισχύει ότι } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}.$$

Παρατήρηση. Οι παραπάνω έννοιες (εσωτερικό γινόμενο, μήκος διανύσματος, γωνία διανυσμάτων) και οι αντίστοιχες ιδιότητές τους διατυπώνονται εντελώς ανάλογα και για διανύσματα του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η γωνία θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$ και $\vec{b} = 6\vec{j} + 6\vec{k}$.

Απόδειξη. Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$.

$$\text{Αλλά } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 18$$

$$\text{Και } \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ και } \|\vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Συνεπώς } \cos \theta = \frac{18}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{1}{2}$$

Άρα, η γωνία θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ είναι $\frac{\pi}{3}$

Ορισμός. Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ (αντ. $\mathbb{R}^2$). Λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι:

(1) **Παράλληλα**, αν η γωνία μεταξύ τους είναι 0 ή π ,

(2) **Κάθετα**, αν η γωνία μεταξύ τους είναι $\frac{\pi}{2}$.

Θεώρημα

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathbb{R}^3$ (αντ. $\mathbb{R}^2$). Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι:

(1) **Παράλληλα**, αν και μόνο αν $\vec{b} = k \vec{a}$ για κάποιον πραγματικό αριθμό k ,

(2) **Κάθετα**, αν και μόνο αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Παράδειγμα

Ναδειχθεί ότι:

(1) Τα διανύσματα $\vec{a}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{b}_1 = -15\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ είναι παράλληλα,

(2) Τα διανύσματα $\vec{a}_2 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ και $\vec{b}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη

(1) Παρατηρούμε ότι $\vec{a}_1 = -3\vec{b}_1$ και συνεπώς από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{b}_1$ είναι παράλληλα. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και αν υπολογίσουμε την γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{b}_1$. Συγκεκριμένα, είναι

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1}{\|\vec{a}_1\| \|\vec{b}_1\|} = \frac{5(-15) + (-2)6 + 1(-3)}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{(-15)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = -\frac{90}{\sqrt{8100}} = -\frac{90}{90} = -1$$

και συνεπώς $\theta = \pi$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{b}_1$ είναι παράλληλα.

(2) Παρατηρούμε ότι $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 4(-1) + (-3)(-2) + 2(-1) = 0$.

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{a}_2, \vec{b}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν υπολογίσουμε την γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}_2, \vec{b}_2$.

Θεώρημα

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathbb{R}^3$ (αντ. $\mathbb{R}^2$) $\vec{a} \neq \vec{0}$. Τότε το διάνυσμα

$$\vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\vec{a}$.

9. Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων του $\mathbb{D}^3$

Εάν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, με $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ ορίζεται το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ ως

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Παρατήρηση. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \\ &= [(-1)(-3) - 1 \cdot 2]\vec{i} + [1(-1) - 2(-3)]\vec{j} + [2 \cdot 2 - (-1)(-1)]\vec{k} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

Έστω $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ και $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

Τότε μπορούμε να γράψουμε $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, όπου ορίζουμε

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

10. Χρήσιμες ιδιότητες

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ του $\mathbb{R}^3$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$,
2. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$,
3. $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

11. Θεώρημα

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του $\mathbb{R}^3$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a}$,
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
3. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$,
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$,
5. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$,

$$6. \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

7. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι παράλληλα, τότε ισχύει ότι $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Ορισμός. Έστω τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του $\mathbb{R}^3$. Ονομάζουμε **μικτό** γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και το συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Παρατήρηση Αληθεύει η σχέση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

12. Χαρακτηριστικές ιδιότητες

$$\text{Αν } \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}, \quad \vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \text{ είναι}$$

$$1. \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε

2. Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι μη συν επίπεδα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, με κοινή αρχή, τότε ο αριθμός $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$ ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

3. Επιπλέον αληθεύει: τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συν επίπεδο αν και μόνο αν

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

Θεώρημα

Έστω $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathbb{R}^3$. Τότε ισχύει ότι $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \theta$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, με στοιχειώδεις υπολογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (1)$$

Όμως, γνωρίζουμε επίσης ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$

και άρα από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \theta.$$

Επομένως, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \theta$, που είναι το ζητούμενο

Πόρισμα

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathbb{R}^3$ με κοινή αρχή ισούται με $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

Εφαρμογές

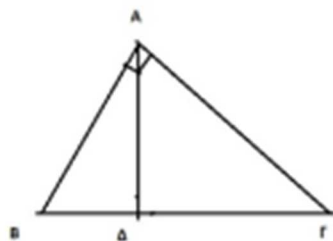
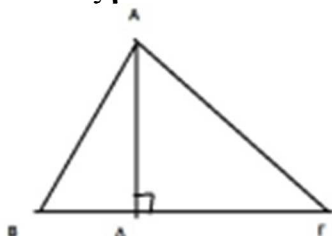
Εφαρμογή (1). Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Τότε, ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο είναι οι

$$\|\vec{B\Gamma}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{B\Gamma}\|^2 \quad (\alpha)$$

$$\vec{AB}^2 = \vec{B\Gamma}^2 \cdot \vec{B\Delta} \quad (\beta)$$

$$\vec{A\Delta}^2 = \vec{B\Delta} \cdot \vec{\Delta\Gamma} \quad (\gamma)$$

Απόδειξη



α) Είναι $\hat{AB\Gamma} = \frac{\pi}{2}$ Άρα $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$ ή, ισοδύναμα $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ (1) όπου από την

$$\vec{B\Gamma} = \vec{BA} + \vec{A\Gamma} \quad (2) \text{ έπεται}$$

$$\|\vec{B\Gamma}\|^2 = (\vec{BA} + \vec{A\Gamma}) \cdot (\vec{BA} + \vec{A\Gamma}) = \|\vec{BA}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} + \|\vec{A\Gamma}\|^2 \quad (3)$$

Η (3) με χρήση της (1) γίνεται:

$$\|\vec{B\Gamma}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{A\Gamma}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{A\Gamma}\|^2$$

$$\beta) \text{ είναι } \vec{A\Delta} \perp \vec{B\Gamma} \text{ άρα } \vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma} = 0 \text{ όπου } \begin{cases} \vec{AB} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} \\ \vec{AB} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B} \end{cases}$$

Γίνεται λοιπόν:

$$\|\vec{AB}\|^2 = (\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}) \cdot (\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B}) = \vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta} \cdot \vec{\Gamma B} + \vec{\Delta B} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B} \cdot \vec{\Gamma B}$$

$$\text{Η } \|\vec{AB}\|^2 = \vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta} \cdot \vec{\Gamma B} + \vec{\Delta B} \cdot \vec{\Gamma B} = \vec{A\Gamma} (\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}) + \vec{\Delta B} \cdot \vec{\Gamma B}$$

$$\text{Η } \|\vec{AB}\|^2 = \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} + \vec{\Delta B} \cdot \vec{\Gamma B} \text{ όπου } \vec{A\Gamma} \perp \vec{AB}, \text{ συνεπώς}$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{\Delta B} \cdot \vec{\Gamma B} = \vec{B\Gamma} \cdot \vec{B\Delta}$$

γ) Εάν $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\vec{A\Delta}^2 = \vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Delta} = (\vec{AB} + \vec{B\Delta}) \cdot (\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Delta} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$$

$$= 0 + \vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Delta} \cdot \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$$

$$= (\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}) \cdot \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Delta} \cdot (\vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}) + \vec{B\Delta} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{A} \cdot \vec{\Delta} + \vec{\Delta} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} \\
&= 0 + \vec{\Delta} \cdot \vec{B} + 0 + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} \\
&= \vec{\Delta} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\Delta} - \vec{\Delta} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\Delta}
\end{aligned}$$

Αναφορικά με τις αντίστροφες συνθήκες εργαζόμαστε αναλόγως:

• Έστω $\|\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\vec{B}\|^2 + \|\vec{A}\vec{\Gamma}\|^2$, τότε:

$$\begin{aligned}
&\vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{\Gamma} \\
\text{H } (\vec{B}\vec{A} + \vec{A}\vec{\Gamma}) \cdot (\vec{B}\vec{A} + \vec{A}\vec{\Gamma}) &= \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{\Gamma} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma}
\end{aligned}$$

$$\text{H } \vec{B}\vec{A} \cdot \vec{B}\vec{A} + 2\vec{B}\vec{A} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{B}\vec{\Gamma} \cdot \vec{B}\vec{\Gamma} = \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{\Gamma} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma}$$

$$\text{H } \|\vec{B}\vec{A}\|^2 + 2\vec{B}\vec{A} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \|\vec{B}\vec{\Gamma}\|^2 = \|\vec{A}\vec{B}\|^2 + \|\vec{A}\vec{\Gamma}\|^2$$

$$\text{H } 2\vec{B}\vec{A} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} \Leftrightarrow \vec{B}\vec{A} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}\vec{A} \perp \vec{A}\vec{\Gamma} \text{ δηλαδή } \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet \text{ Έστω } \vec{A} \cdot \vec{B}^2 = \vec{B} \cdot \vec{\Gamma} \cdot \vec{B} \cdot \vec{\Delta}, \text{ τότε } \vec{A} \cdot \vec{B}^2 = \vec{B} \cdot \vec{\Gamma} \cdot \vec{B} \cdot \vec{\Delta} \Rightarrow \\
&(\vec{A}\vec{\Delta} + \vec{\Delta}\vec{B}) \cdot (\vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}\vec{B}) = \vec{B}\vec{\Gamma} \cdot \vec{B}\vec{\Delta}
\end{aligned}$$

$$\text{H } \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{B} + \vec{\Delta}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{\Delta}\vec{B} \cdot \vec{\Gamma}\vec{B} = \vec{B}\vec{\Gamma} \cdot \vec{B}\vec{\Delta}$$

$$\text{ή } \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{B} + \vec{\Delta}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} = 0$$

$$\text{H } \vec{A}\vec{\Gamma} \cdot (\vec{A}\vec{\Delta} + \vec{\Delta}\vec{B}) + \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{B} = 0$$

$$\text{Όπου } \vec{A}\vec{\Delta} \perp \vec{\Gamma}\vec{B}, \text{ συνεπώς } \vec{A}\vec{\Gamma} \cdot \vec{A}\vec{B} = 0 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
&\bullet \text{ Έστω } \vec{A}\vec{\Delta}^2 = \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma}, \text{ τότε } \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Delta} = \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} \Rightarrow \\
&(\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{\Delta}) \cdot (\vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}\vec{\Delta}) = \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} + \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} = \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma}$$

$$\text{Άρα } \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + (\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{\Delta}) \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} + \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} - \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} = 0$$

$$\text{H } \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} + \vec{B}\vec{\Delta} \cdot (\vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}\vec{\Delta}) = 0$$

$$\text{H } \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} + \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} + \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Delta} = 0$$

$$\text{Όπου } \vec{A}\vec{\Delta} \cdot \vec{\Gamma}\vec{\Delta} = 0 = \vec{B}\vec{\Delta} \cdot \vec{A}\vec{\Delta} \text{ άρα } \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{\Gamma} = 0 \text{ συνεπώς } \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

Εφαρμογή (2). Εάν για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γνωστό ότι

$$\|\vec{\alpha}\| = 2, \|\vec{\beta}\| = 3, \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3} \text{ και } \vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$$

Να υπολογισθεί η γεωμετρική γωνία των $\vec{\delta}, \vec{\alpha}$.

Απόδειξη

Παρατήρηση. Είναι γνωστό ότι εάν $\vec{u}, \vec{w}$ μη μηδενικά διανύσματα τότε $\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|}$ Συνεπώς αν θ η γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\delta}$, τότε $\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}}{\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\delta}\|}$

$$\text{όπου } \|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} = 2 \quad (2)$$

(1)

$$\begin{aligned} \|\vec{\delta}\| &= \sqrt{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}} = \sqrt{(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})} = \sqrt{9\|\vec{\alpha}\|^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\|\vec{\beta}\|^2} \\ &= \sqrt{9\|\vec{\alpha}\|^2 + 12\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + 4\|\vec{\beta}\|^2} = \sqrt{36 + 72 \cdot (-\frac{1}{2}) + 36} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{(3) διότι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \cos \vartheta_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, } \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} &= \vec{\alpha} \cdot (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 3\|\vec{\alpha}\|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ &= 3\|\vec{\alpha}\|^2 + 2\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \cdot \cos \theta = 12 - \frac{12}{2} = 6 \quad \text{συνεπώς} \end{aligned}$$

$$\cos \theta_{\vec{\alpha}, \vec{\delta}} = \frac{6}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} \quad \text{οπότε } \theta = \frac{\pi}{3}$$

Εφαρμογή (3). Αν $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{\beta}\| = 1$, $\angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$ να υπολογισθεί το $\cos \angle(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta})$

Απόδειξη

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την γωνία φ των $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 &= \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 + 2\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= 3 + 1 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 3 + 1 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \quad (1) \end{aligned}$$

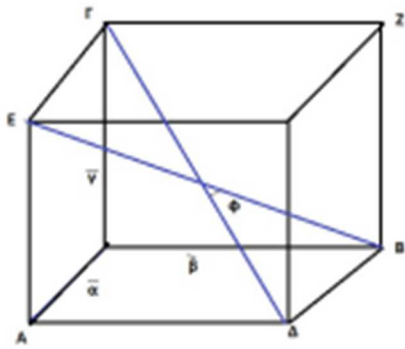
$$\begin{aligned} \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 &= \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 - 2\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= 3 + 1 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 3 + 1 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \|\vec{\alpha}\|^2 - \|\vec{\beta}\|^2 = 3 - 1 = 2 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (1)-(3) λαμβάνουμε } \cos \varphi = \frac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})}{\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \cdot \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Εφαρμογή (4). Να υπολογισθεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας την οποία σχηματίζουν δύο διαγώνιες κύβου

■



Απόδειξη

Χωρίς να περιοριστεί η γενικότητα έστω BE και ΓΔ οι τεμνόμενες διαγωνίες με συντεταγμένες των άκρων

$$\begin{cases} B(0, \alpha, 0), E(\alpha, 0, \alpha) \\ \Gamma(0, 0, \alpha), \Delta(\alpha, \alpha, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{BE} = (\alpha - 0, 0 - \alpha, \alpha - 0) = (\alpha, -\alpha, \alpha) \\ \vec{\Delta\Gamma} = (0 - \alpha, 0 - \alpha, \alpha - 0) = (-\alpha, -\alpha, \alpha) \end{cases}$$

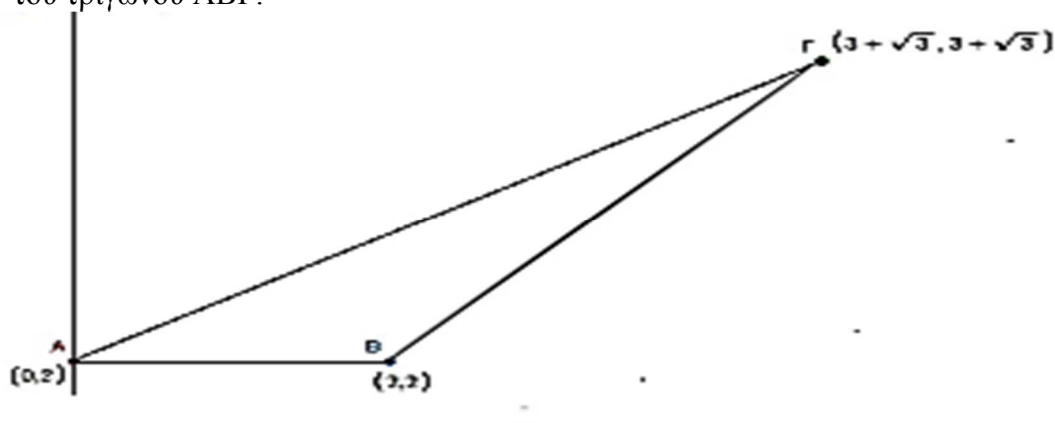
$$\text{Επίσης, } \|\vec{BE}\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{3\alpha^2} = \alpha\sqrt{3} = \|\vec{\Delta\Gamma}\|$$

$$\text{Και } \vec{BE} \cdot \vec{\Delta\Gamma} = -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2$$

Υπολογίζουμε το συνημίτονο της γωνίας των τεμνόμενων διαγωνίων

$$\cos \varphi = \frac{\vec{BE} \cdot \vec{\Delta\Gamma}}{\|\vec{BE}\| \cdot \|\vec{\Delta\Gamma}\|} = \frac{\alpha^2}{3\alpha^2} = \frac{1}{3}$$

Εφαρμογή (5). Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου ABΓ.



Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ABΓ. Είναι:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \\ \cos \hat{B} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Gamma}}{\|\vec{B}\| \cdot \|\vec{\Gamma}\|} \\ \cos \hat{\Gamma} = \frac{\vec{\Gamma} \cdot \vec{A}}{\|\vec{\Gamma}\| \cdot \|\vec{A}\|} \end{cases} \quad \text{και} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{cases} \vec{A\Gamma} = (3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), \\ \vec{\Gamma A} = (-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}) \\ \vec{A\vec{B}} = (2, 0), \\ \vec{B\vec{A}} = (-2, 0) \\ \vec{B\vec{\Gamma}} = (1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), \\ \vec{\Gamma\vec{B}} = (-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}) \\ \|\vec{A\Gamma}\| = \|\vec{\Gamma A}\| = \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}, \\ \|\vec{A\vec{B}}\| = \|\vec{B\vec{A}}\| = 2, \\ \|\vec{B\vec{\Gamma}}\| = \|\vec{\Gamma\vec{B}}\| = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

Και

$$\begin{cases} \vec{A\Gamma} \cdot \vec{A\vec{B}} = 6 + 2\sqrt{3} \\ \vec{B\vec{A}} \cdot \vec{B\vec{\Gamma}} = -2 - 2\sqrt{3} \\ \vec{\Gamma A} \cdot \vec{\Gamma\vec{B}} = -2(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

Εφαρμογή (6). Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με μέτρο 7 το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{\beta} = \left(1, -3, \frac{3}{2}\right)$.

Απόδειξη

Παρατήρηση Τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{w}$ είναι παράλληλα εάν και μόνο εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, τέτοιο ώστε $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{w}$

Έπεται λοιπόν ότι αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} = \left(1, -3, \frac{3}{2}\right)$ τότε

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} = \left(\lambda, -3\lambda, \frac{3\lambda}{2}\right), \quad \lambda \neq 0$$

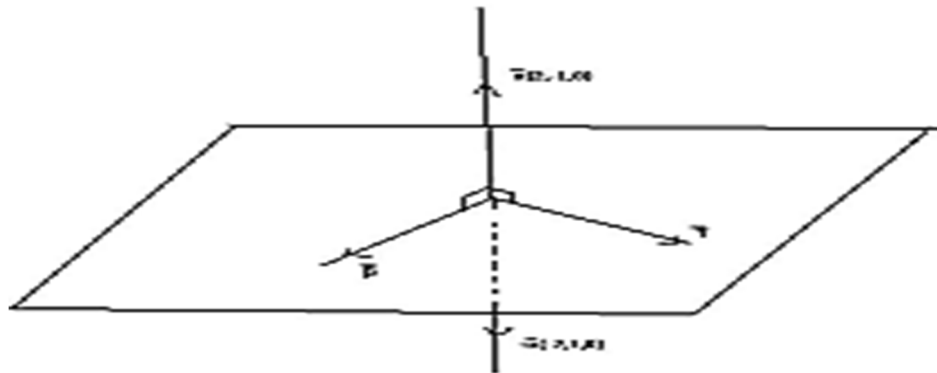
κι αν επιβάλλουμε τη συνθήκη $\|\vec{\alpha}\| = 7$ τότε

$$\vec{\alpha}^2 = 49 \Leftrightarrow \lambda^2 + 9\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 = 49 \Leftrightarrow \frac{49}{4}\lambda^2 = 49 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

και τα ζητούμενα διανύσματα είναι

$$\vec{\alpha}_1 = 2, \vec{\beta} = (2, -6, 3), \vec{\alpha}_2 = -2, \vec{\beta} = (-2, 6, -3).$$

Εφαρμογή (7). Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μέτρου $\sqrt{5}$ και καθέτου προς τα διανύσματα $\vec{\beta} = (1, 2, -1), \vec{\gamma} = (2, 4, 3)$



Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha} = (x, y, z)$ το ζητούμενο διάνυσμα, τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \\ \|\vec{\alpha}\| = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{array} \right\}$$

Από τις

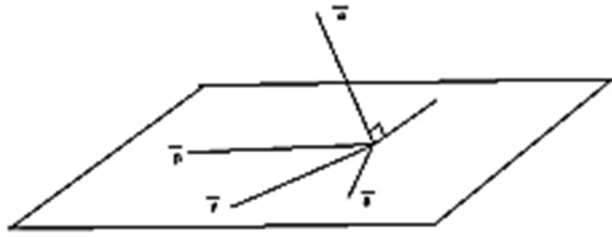
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Το σύστημα λοιπόν ανάγεται στο

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 4y^2 + y^2 = 5 \Rightarrow 5y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm 1$$

Οπότε $x = -2y \Rightarrow x = \pm 2$ και τα διανύσματα -λύσεις είναι $\vec{\alpha}_1 = (2, -1, 0), \vec{\alpha}_2 = (-2, 1, 0)$

Εφαρμογή (8). Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (1, 1, -2), \vec{\beta} = (1, 2, -1), \vec{\gamma} = (2, -1, 1)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\delta}$ τα οποία είναι συν επίπεδα των $\vec{\beta}$, μέτρου $\sqrt{146}$ και κάθετων στο $\vec{\alpha}$



Απόδειξη

Παρατήρηση. Δοθέντων γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών

$$L(u, v) = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

- Τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμμικώς ανεξάρτητα (μη παράλληλα)
- Το $\vec{\delta}$ ως συνεπίπεδο των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γράφεται

$$\vec{\delta} = x \cdot \vec{\beta} + y \cdot \vec{\gamma} = (x + 2y, 2x - y, -x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (1)$$

- Επειδή $\|\vec{\delta}\| = \sqrt{146}$ έπεται

$$(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 + (-x + y)^2 = 146 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - xy = 73 \quad (2)$$

- Από τη σχέση καθετότητας $\vec{\delta} \perp \vec{\alpha}$ έπεται

$$\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 5x - y = 0 \Leftrightarrow y = 5x \quad (3)$$

Η (2) λόγω της (3) λαμβάνει την μορφή

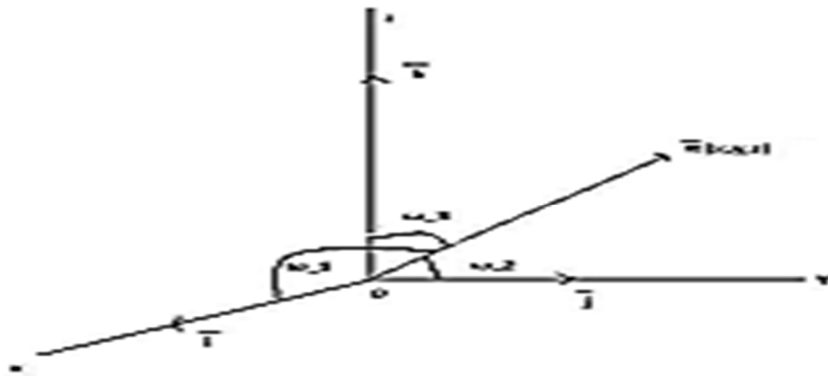
$$3x^2 + 75x^2 - 5x^2 = 73 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 5$$

οπότε και $\vec{\delta}_1 = (11, -3, 4), \vec{\delta}_2 = (-11, 3, -4)$

Εφαρμογή (9). Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του $\mathbb{R}^3$ το οποίο σχηματίζει με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ των συντεταγμένων αξόνων γωνίες $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

και $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ αντιστοίχως. Να βρεθεί η γωνία την οποία σχηματίζει με το μοναδιαίο

$\vec{k}$ του κατακόρυφου συντεταγμένου άξονα (κατηγμένων) το σύστημα $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ είναι ορθοκανονικό.



Απόδειξη. Έστω το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{a} = (x, y, z)$ για το οποίο ισχύουν

- $\vec{a}$ μοναδιαίο μέτρον, ήτοι $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (1)

- Η γωνία $\angle(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\pi}{4}$, άρα

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{i}\|} = (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = x$$

(2)

- $\angle(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\pi}{3}$
Η γωνία, άρα

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{j}\|} = (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = y$$

(3)

Με χρήση των (1)-(3) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{2}$$

άρα $\vec{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $\vec{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$

Για τη γωνία ψ_i την οποία σχηματίζει το $\vec{a}_i$ με τον άξονα Oz έχουμε

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \psi_1 &= \vec{a}_1 \cdot \vec{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{1}{2} \\ \cos \psi_2 &= \vec{a}_2 \cdot \vec{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cdot (0, 0, 1) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

Εφαρμογή (10). Εάν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{6}$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

Να υπολογισθεί το $\|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$\|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 4\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2$$

Διότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Άρα $\|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 = 4 \cdot 6 + \|\vec{\beta}\|^2 = 24 + \|\vec{\beta}\|^2$

Μένει να προσδιορίσουμε το $\|\vec{\beta}\|^2$. Είναι:

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 6\vec{\beta}^2 = 0$$

Συνεπώς $\vec{\beta}^2 = 1 \Rightarrow \|\vec{\beta}\| = 1$ και καταλήγουμε:

$$\|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 = 24 + 1 = 25 \Rightarrow \|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\| = 5$$

Εφαρμογή (11). Εάν $\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\| = \|\vec{\gamma}\| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -2$

Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ έχουν ίδια διεύθυνση.

Απόδειξη. Εάν $\phi_{\alpha,\beta}$ και $\phi_{\beta,\gamma}$ οι γωνίες των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αντιστοίχως, τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\| = \|\vec{\gamma}\| = 1 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \phi_{\alpha,\beta} + \cos \phi_{\beta,\gamma} = -2$$

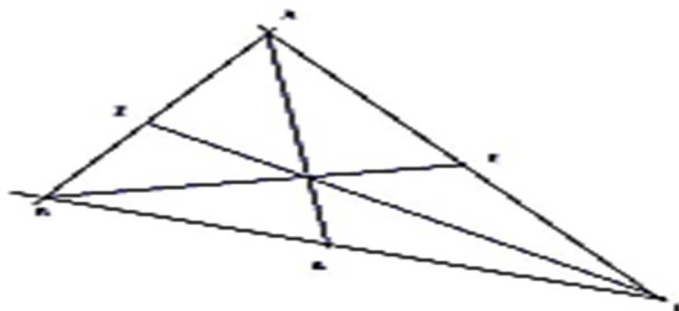
συνεπώς, δοθέντος ότι $-1 \leq \cos X \leq 1$:

$$\cos \phi_{\alpha,\beta} = \cos \phi_{\beta,\gamma} = -1 \Rightarrow \phi_{\alpha,\beta} = \phi_{\beta,\gamma} = \pi$$

Άρα $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$

Εφαρμογή (12). Στο τρίγωνο ABΓ με διαμέσους ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ να αποδείξετε ότι ισχύει

$$A \vec{D} \cdot B \vec{E} + B \vec{E} \cdot \Gamma \vec{A} + \Gamma \vec{Z} \cdot A \vec{B} = 0$$



Απόδειξη. Είναι

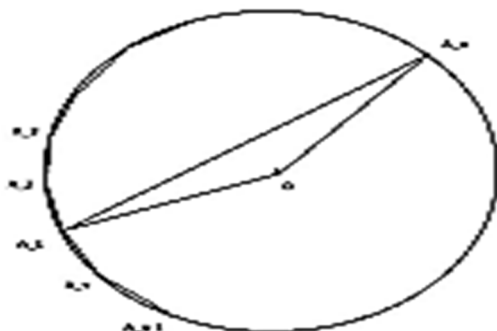
$$\left. \begin{aligned} A \vec{\Delta} \cdot B \vec{\Gamma} &= \frac{A \vec{B} + A \vec{\Gamma}}{2} \cdot B \vec{\Gamma} \\ B \vec{E} \cdot \Gamma \vec{A} &= \frac{B \vec{A} + B \vec{\Gamma}}{2} \cdot \Gamma \vec{A} \\ \Gamma \vec{Z} \cdot A \vec{B} &= \frac{\Gamma \vec{A} + \Gamma \vec{B}}{2} \cdot A \vec{B} \end{aligned} \right\}$$

Άρα

$$\begin{aligned} 2\{A \vec{\Delta} \cdot B \vec{\Gamma} + B \vec{E} \cdot \Gamma \vec{A} + \Gamma \vec{Z} \cdot A \vec{B}\} &= (A \vec{B} + A \vec{\Gamma}) \cdot B \vec{\Gamma} + (B \vec{A} + B \vec{\Gamma}) \cdot \Gamma \vec{A} + (\Gamma \vec{A} + \Gamma \vec{B}) \cdot A \vec{B} \\ &= \{A \vec{B} \cdot B \vec{\Gamma} + A \vec{B} \cdot \Gamma \vec{B}\} + \{A \vec{\Gamma} \cdot B \vec{\Gamma} + \Gamma \vec{A} \cdot B \vec{\Gamma}\} + \{B \vec{A} \cdot \Gamma \vec{A} + A \vec{B} \cdot \Gamma \vec{A}\} \\ &= \{B \vec{\Gamma} + \Gamma \vec{B}\} \cdot A \vec{B} + \{A \vec{\Gamma} + \Gamma \vec{A}\} \cdot B \vec{\Gamma} + \{B \vec{A} + A \vec{B}\} \cdot \Gamma \vec{A} \\ &= \vec{0} \cdot A \vec{B} + \vec{0} \cdot \Gamma \vec{A} = 0 \end{aligned}$$

Εφαρμογή (13). Θεωρούμε κανονικό n -γωνο $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Να υπολογισθεί το

$$S = \|A_1 A_2\|^2 + \|A_2 A_3\|^2 + \dots + \|A_{n-1} A_n\|^2 + \|A_n A_1\|^2$$



Απόδειξη

Θεωρούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η κορυφή A_1 του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου αντιστοιχεί στο σημείο $A_1(R,0)$ της περιφέρειας κέντρου επί της αρχής και ακτίνας R .

• Αν το πλήθος των κορυφών είναι άρτιο $n = 2k$ τότε για κάθε ζεύγος διαδοχικών κορυφών A_{i-1}, A_i με $O \vec{A}_{i-1} + O \vec{A}_i = -\vec{u}$

Τα αντιδιαμετρικά σημεία A'_{i-1}, A'_i ορίζουν ζεύγος διαδοχικών κορυφών με

$$O \vec{A}'_{i-1} + O \vec{A}'_i = -\vec{u}$$

Συνεπώς για n άρτιο πλήθος κορυφών έχουμε

$$O \vec{A}_1 + O \vec{A}_2 + \dots + O \vec{A}_n = \vec{0}, \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$$

• Έστω $n = 2k - 1$ περιττός το πλήθος των κορυφών, τότε οι n κορυφές του πολυγώνου είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (R, 0) \\ A_2 = \left(R \cos \frac{2\pi}{\nu}, R \sin \frac{2\pi}{\nu} \right) \\ A_3 = \left(R \cos \left(2 \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right), R \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right) \right) \\ A_4 = \left(R \cos \left(3 \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right), R \sin \left(3 \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right) \right) \\ \dots\dots\dots \\ A_k = \left(R \cos \left((k-1) \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right), R \sin \left((k-1) \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right) \right) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Και υπολογίζουμε το

$$O\vec{A}_2 + O\vec{A}_3 + \dots + O\vec{A}_\nu = R \left(\sum_{k=2}^{\nu} \cos \left((k-1) \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right), \sum_{k=2}^{\nu} \sin \left((k-1) \cdot \frac{2\pi}{\nu} \right) \right)$$

Παρατήρηση. Από τον τύπο του Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ Έχουμε

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_\nu)} &= \cos \left(\sum_{k=1}^{\nu} \theta_k \right) + i \sin \left(\sum_{k=1}^{\nu} \theta_k \right) \\ &= \cos \left(\frac{(\nu-1)\nu}{2} \frac{2\pi}{\nu} \right) + i \sin \left(\frac{(\nu-1)\nu}{2} \frac{2\pi}{\nu} \right) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον ανωτέρω τύπο στην περίπτωση μας για τις $\nu-1$ κορυφές εξαιρουμένης της $A_1 (1, 0)$

$$\sum_{k=2}^{\nu} \left(\cos \left((k-1) \frac{2\pi}{\nu} \right), \sin \left((k-1) \frac{2\pi}{\nu} \right) \right) = e^{i \sum_{k=2}^{\nu} (k-1) \frac{2\pi}{\nu}}$$

$$= \cos \left(\sum_{k=2}^{\nu} (k-1) \frac{2\pi}{\nu} \right) + i \sin \left(\sum_{k=2}^{\nu} (k-1) \frac{2\pi}{\nu} \right)$$

$$= \cos((\nu-1)\pi) + i \sin((\nu-1)\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$$

$$\text{Άρα } O\vec{A}_2 + O\vec{A}_3 + \dots + O\vec{A}_\nu = (-R, 0) = -O\vec{A}_1$$

$$\text{Οπότε } O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + \dots + O\vec{A}_\nu = \vec{0}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε ν -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R :

$$O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + \dots + O\vec{A}_\nu = \vec{0}$$

$$\text{Επίσης } A_1\vec{A}_k = A_1\vec{O} + O\vec{A}_k = O\vec{A}_k - O\vec{A}_1 \quad (1)$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\|A_1 \vec{A}_k\|^2 &= A_1 \vec{A}_k \cdot A_1 \vec{A}_k = (O \vec{A}_k - O \vec{A}_1) \cdot (O \vec{A}_k - O \vec{A}_1) \\
&= O \vec{A}_k^2 + O \vec{A}_1^2 - 2 O \vec{A}_k \cdot O \vec{A}_1 \\
&= R^2 + R^2 - 2 O \vec{A}_k \cdot O \vec{A}_1 \\
&= 2 R^2 - 2 O \vec{A}_k \cdot O \vec{A}_1 \quad (2)
\end{aligned}$$

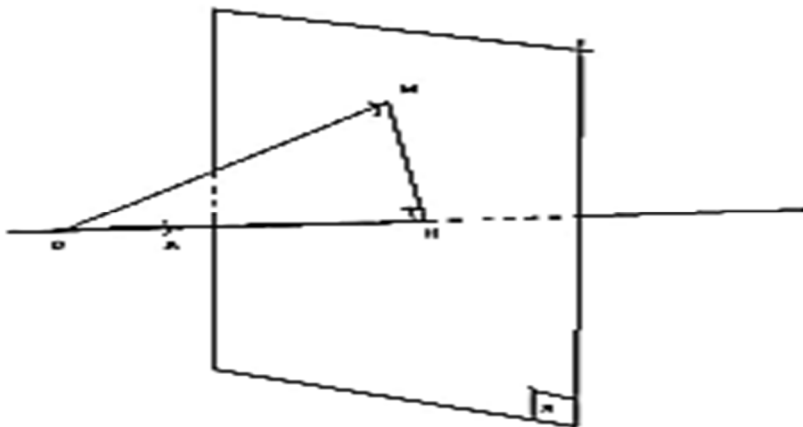
Από την (2) για $k=2,3,\dots,\nu$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\nu} \|A_1 \vec{A}_k\|^2 &= \sum_{k=2}^{\nu} (2 R^2 - 2 O \vec{A}_k \cdot O \vec{A}_1) = 2 \sum_{k=2}^{\nu} R^2 - 2 O \vec{A}_1 \cdot \sum_{k=2}^{\nu} O \vec{A}_k \\
&= 2(\nu-1)R^2 - 2O\vec{A}_1(-O\vec{A}_1) = 2(\nu-1)R^2 + 2R^2 = 2\nu R^2
\end{aligned}$$

13. Εφαρμογές σε γεωμετρικούς τόπους

Εφαρμογή (14). Δίνεται το σταθερό σημείο O και το σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$\vec{a} \cdot O\vec{M} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \neq \vec{0}$$



Απόδειξη

Έστω $O\vec{A} = \vec{a}$ το διάνυσμα θέσης του σταθερού σημείου A και χωρίς περιορισμό της $O\vec{A} \cdot O\vec{H} + O\vec{H} \cdot H\vec{M} = \lambda$ γενικότητας ταυτίζουμε το σταθερό σημείο O με την αρχή του ταυτιζόμενο με την αρχή του συστήματος αναφοράς. Αν M τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου και $M\vec{H} \perp \pi$ όπου π το κάθετο επίπεδο προς το επίπεδο των

$$\vec{a} \cdot O\vec{M} = \lambda \Leftrightarrow O\vec{A} \cdot O\vec{M} = \lambda \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$O\vec{A} \cdot (O\vec{H} + H\vec{M}) = \lambda$$

$$O\vec{A} \cdot O\vec{H} + O\vec{H} \cdot H\vec{M} = \lambda \quad (2)$$

Οπου $O\vec{H} \cdot H\vec{M} = 0$ άρα η (2) λαμβάνει την μορφή

$$O\vec{H} \cdot O\vec{A} = \lambda \quad (3) \text{ συνεπώς } O\vec{H} = \frac{\lambda}{O\vec{A}}$$

δηλαδή το Μ ανήκει σε επίπεδο κάθετο προς το $\vec{a}$ σε σταθερή απόσταση $\frac{\lambda}{OA}$ από το Ο. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Εφαρμογή (15). Στο επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία Α,Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Έστω Ο το μέσον του ΑΒ και Μ τυχόν σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου:

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda \Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) = \lambda$$

$$\text{ή } OM^2 + \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \lambda$$

$$\text{ή } OM^2 + \frac{BA}{2} \frac{AA}{2} = \lambda$$

$$\text{ή } OM^2 - \frac{AA}{4} = \lambda$$

$$\text{ή } OM^2 - OA^2 = \lambda$$

$$\text{ή } OM^2 = OA^2 + \lambda \quad (1)$$

άρα Εάν $OA^2 + \lambda < 0$ ο γεωμετρικός τόπος δεν περιέχει πραγματικά σημεία.

• Αν $OA^2 + \lambda = 0$ ο γεωμετρικός τόπος ταυτίζεται με την περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ.

• Αν $OA^2 + \lambda > 0$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι η περιφέρεια κέντρου Ο και ακτίνας $r = \sqrt{\lambda + OA^2}$