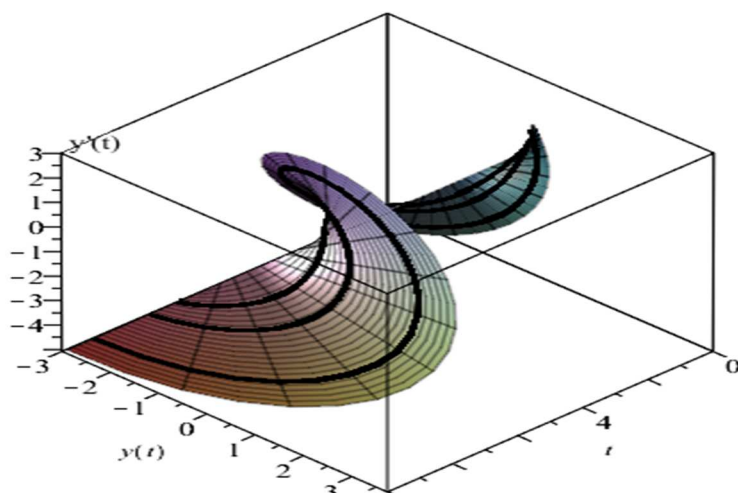




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης



Σπουδαστής: **Κάπε Αμαρίλντο (AM 9226)**

Επιβλέπων Καθηγητής: **Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)**
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: **2025–2026**

Ημερομηνία ανάθεσης: **18.11.2024**
Ημερομηνία κατάθεσης: **09.09.2025**
Ημερομηνία εξέτασης: **....10.2025**

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (Ph.D.) Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (M.Sc.) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Πίνακας γραφημάτων	4
Λέξεις κλειδιά	5
Περίληψη	5
1. Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2 ^{ης} τάξης στην επιστήμη	6
1.1 Φυσική.....	6
1.2 Βιολογία	6
1.3 Χημεία.....	6
1.4 Ηλεκτρονικά και ηλεκτρολογία	6
1.5 Ρομποτική και τεχνητή νοημοσύνη.....	6
1.6 Αεροδυναμική και μηχανική ρευστών	7
1.7 Προγραμματισμός και προσομοιώσεις	7
1.8 Οικονομία και χρηματοοικονομικά.....	7
1.9 Υγεία και ιατρική	7
1.10 Περιβάλλον και κλίμα	7
1.11 Μουσική και ήχος	7
2. Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στη ναυτιλία.....	7
2.1 Κίνηση του πλοίου στη διάρκεια των κυματισμών.....	8
2.2 Δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου (Ship motion dynamics)	8
2.3 Ευστάθεια των πλοίων	8
2.4 Αυτόματος έλεγχος της πορείας (Autopilot systems)	9
2.5 Υπολογιστικά μοντέλα και ναυπηγική ανάλυση.....	9
2.6 Προσομοιώσεις και πλοία νέας τεχνολογίας.....	9
2.7 Καταπόνηση του κύτους (Hull girder response).....	9
2.8 Κύματα, συντονισμός και ναυτική μηχανολογία	10
3. Γεωμετρικές εφαρμογές	10
Εφαρμογή 1	11
Εφαρμογή 2	12
Εφαρμογή 3	13
4. Μηχανική – ταλαντώσεις.....	15
Εφαρμογή 4	18
Εφαρμογή 5	19
Εφαρμογή 6	21
5. Απλό εκκρεμές.....	22
6. Ηλεκτρικές ταλαντώσεις.....	22
Εφαρμογή 7	23
Εφαρμογή 8	24
7. Αντοχή υλικών	25
8. Υπολογισμός του βέλους μιας δοκού	27
Εφαρμογή 9	27
9. Εξίσωση της ελαστικής καμπύλης και μέγιστη εκτροπή.....	28
Εφαρμογή 10	29
10. Υδροστατική	30
11. Θερμότητα	31
12. Καμπυλότητα – Ακτίνα καμπυλότητας	33
Εφαρμογή 11	33
Εφαρμογή 12	34
Εφαρμογή 13	35
13. Ταλαντώσεις	35
13.1 Ταλαντώσεις ελατηρίου	36

14. Ηλεκτρικά κυκλώματα.....	39
Εφαρμογή 14	40
Εφαρμογή 16	42
Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία	44
Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία από μετάφραση.....	44
Ξενόγλωσση βιβλιογραφία	44

Πίνακας γραφημάτων

Γράφημα 1 Ακτίνες καμπυλότητας.....	11
Γράφημα 2 Κίνηση υλικού σημείου	12
Γράφημα 3 Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση	14
Γράφημα 4 Μη περιοδική συνάρτηση	15
Γράφημα 5 Γραφική παράσταση κρίσιμης απόσβεσης	15
Γράφημα 6 Φθίνουσα ταλάντωση με άπειρα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα	17
Γράφημα 7 Φθίνουσα ταλάντωση με ένα σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα	17
Γράφημα 8 Φθίνουσα ταλάντωση χωρίς σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα.....	18
Γράφημα 9 Απλή αρμονική κίνηση	19
Γράφημα 10 Φθίνουσα ταλάντωση	20
Γράφημα 11 Περιοδικές συναρτήσεις	22
Γράφημα 12 Τρίοδη λυχνία και κύκλωμα ταλαντώσεων	24
Γράφημα 13 Κύκλωμα RLC σε σειρά	25
Γράφημα 14 Περιστροφή οριζόντιας πακτωμένης δοκού	26
Γράφημα 15 Βέλος δοκού y	27
Γράφημα 16 Μέγιστο βέλος δοκού $y_{\max}$	28
Γράφημα 17 Μέγιστη εκτροπή οριζόντιας δοκού	29
Γράφημα 18 Σωλήνας U	30
Γράφημα 19 Θέρμανση ισοπαχούς και ομογενούς οριζόντιας δοκού	31
Γράφημα 20 Μεταλλικό έλασμα	32
Γράφημα 21 Κέντρο καμπυλότητας	33
Γράφημα 22 Ακτίνες καμπυλότητας.....	33
Γράφημα 23 Κατακόρυφη ταλάντωση ελατηρίου	36
Γράφημα 24 Κρίσιμη και ασθενής απόσβεση	37
Γράφημα 25 Κύκλωμα RLC σε σειρά	39
Γράφημα 26 Κύκλωμα LC σε σειρά.....	40
Γράφημα 27 Ηλεκτρικές ταλαντώσεις.....	41
Γράφημα 28 Κύκλωμα RLC σε σειρά	43

Λέξεις κλειδιά

Ταλαντώσεις, είδη ταλαντώσεων (φθίνουσα, αρμονική, φθίνουσα αρμονική, εξαναγκασμένη, ελεύθερη, αμείωτη, ηλεκτρική, αρμονική, ελατηρίου), παράγοντας (ταλάντωσης, απόσβεσης), απόσβεση (κρίσιμη, ασθενής, ισχυρή), συντονισμός, απλό εκκρεμές, καμπυλότητα, ακτίνα καμπυλότητας, ηλεκτρικά κυκλώματα, αντοχή υλικών, βέλος της δοκού, μοντέλο Malthus, 2^{ος} νόμος του Newton, εξισώσεις Navier –Stokes, εξίσωση Black–Scholes, εξίσωση της καμπτικής δόνησης Euler–Bernoulli, συστήματα Lotka–Volterra, (μεταβατικοί, σταθεροί ή μόνιμοι) όροι, (μεταβατική, μόνιμη ή σταθερή) λύση, ελαστική καμπύλη, περιοδική κίνηση με ισχυρή απόσβεση, περιοδική κίνηση με κρίσιμη απόσβεση, φυσική συχνότητα, μεταβατικός όρος, όρος σταθερής κατάστασης

Περίληψη

Οι διαφορικές εξισώσεις, βρίσκονται στον πυρήνα της κατανόησης και της μοντελοποίησης του περιβάλλοντος κόσμου. Από τις φυσικές επιστήμες και από την τεχνολογία, μέχρι τις απλές εκφάνσεις της καθημερινότητας, οι διαφορικές εξισώσεις μας προσφέρουν το εργαλείο για να προβλέπουμε, για να αναλύουμε και για να δημιουργούμε. Ενώ σε πολλές περιπτώσεις η μαθηματική τους επίλυση είναι δύσκολη ή αδύνατη, οι αριθμητικές και οι προσεγγιστικές μέθοδοι επιτρέπουν την αξιοποίησή τους, σε αμέτρητα πεδία. Οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης στη ναυτιλία, δεν είναι απλώς μαθηματικά εργαλεία, αλλά είναι κρίσιμα μέσα για τη βαθιά κατανόηση και την ουσιαστική βελτιστοποίηση της διαγωγής των πλοίων, διότι βοηθούν σε:

- Αναλύσεις της ευστάθειας
- Προσομοιώσεις των ταλαντώσεων και της καταπόνησης, λόγω των φορτίων
- Κατασκευαστικό σχεδιασμό
- Συστήματα πλοήγησης και αυτόματου ελέγχου

Ειδικά στη ναυτιλία, οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης είναι πυρήνας των μεθόδων σχεδιασμού, αξιολόγησης και βελτιστοποίησης, διότι επιτρέπουν:

- Προβλέψεις για την ασφάλεια του πλου και για την άνεση των ναυτικών
- Ανάλυση της δυναμικής του σκάφους
- Ανάπτυξη «έξυπνων» και αυτόνομων πλοίων
- Μείωση της κατανάλωσης των καυσίμων και αποφυγή της επιβάρυνσης του περιβάλλοντος.

Χάρη σε αυτές τις εξισώσεις, η ναυπηγική μπορεί να συνδυάζει την ασφάλεια, την απόδοση και την καινοτομία, με βάση ακριβή φυσικά μοντέλα.

1. Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης στην επιστήμη

Οι διαφορικές εξισώσεις, αποτελούν ένα από ισχυρότερα εργαλεία των μαθηματικών, διότι περιγράφουν καταστάσεις όπου μία ποσότητα μεταβάλλεται σε σχέση με μία άλλη. Είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση των φυσικών φαινομένων, για την ανάπτυξη των νέων και καινοτόμων τεχνολογιών και για τη μοντελοποίηση των καταστάσεων που συναντάμε καθημερινά. Παρακάτω εξετάζονται οι κυριότερες εφαρμογές τους στην επιστήμη, στην τεχνολογία, στην καθημερινή ζωή και στη ναυτιλία.

1.1 Φυσική

Η φυσική, αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό πεδίο εφαρμογής των διαφορικών εξισώσεων. Ο Newton, διατύπωσε τον 2^ο νόμο της κίνησης με τη βοήθεια των παραγώγων $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$. Η προηγούμενη σχέση, αποτελεί μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει την επιτάχυνση ενός σώματος, υπό την επίδραση μίας σταθερής (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά) δύναμης. Τέτοιες εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να μελετηθεί η κίνηση των σωμάτων, οι ταλαντώσεις, τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα κύματα και οι θερμικές ροές.

1.2 Βιολογία

Στη βιολογία, οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη δυναμική των πληθυσμών. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το μοντέλο Malthus, που περιγράφει τον πληθυσμό $P(t)$ ως $\frac{dP}{dt} = rP$ και εκφράζει την ιδέα ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος με το μέγεθος του. Πιο εξελιγμένα μοντέλα (όπως το λογαριθμικό μοντέλο ή τα συστήματα Lotka–Volterra), μελετούν την αλληλεπίδραση μεταξύ των θηρευτών και των θηραμάτων, ή τον ανταγωνισμό μεταξύ των ειδών.

1.3 Χημεία

Στη χημική κινητική, οι διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν το πώς μεταβάλλονται οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων και των προϊόντων, κατά τη διάρκεια μιας αντίδρασης. Για παράδειγμα, σε μία απλή αντίδραση $A \rightarrow B$ η μεταβολή της συγκέντρωσης του A περιγράφεται από τη σχέση $\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$, όπου k είναι μία σταθερά της ταχύτητας. Από αυτό το μοντέλο, μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες για τον χρόνο ημιζώης και για τη θερμοδυναμική ισορροπία.

1.4 Ηλεκτρονικά και ηλεκτρολογία

Οι διαφορικές εξισώσεις, είναι κρίσιμες στον σχεδιασμό και στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ένα απλό κύκλωμα με αντίσταση, πυκνωτή και πηγή τάσης (κύκλωμα RC), περιγράφεται από την εξίσωση $RC \frac{dV}{dt} + V = V_0$

Τέτοιες εξισώσεις, επιτρέπουν τη μελέτη της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων, των φίλτρων, των παλμογράφων και των ολοκληρωτών.

1.5 Ρομποτική και τεχνητή νοημοσύνη

Οι ρομποτικοί βραχίονες και τα αυτόνομα οχήματα, κινούνται βάσει μοντέλων που βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, ο έλεγχος της ταχύτητας και

της κατεύθυνσης, εξαρτάται από μαθηματικά μοντέλα που προβλέπουν την αλλαγή της θέσης και της ταχύτητας, κάθε χρονική στιγμή.

1.6 Αεροδυναμική και μηχανική ρευστών

Η ροή του αέρα γύρω από ένα αεροπλάνο ή η ροή του νερού μέσα σε έναν σωλήνα, περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier–Stokes, που είναι σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η κατανόηση και η επίλυση τους, επιτρέπει την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των ρευστών, μέσα σε διάφορα περιβάλλοντα.

1.7 Προγραμματισμός και προσομοιώσεις

Σε λογισμικά προσομοίωσης των φυσικών συστημάτων (π.χ. μηχανών, κλιματικών μοντέλων, προσομοίωσης κυκλοφορίας), χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι, για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Οι προσομοιώσεις, βασίζονται στις διαφορικές εξισώσεις για την ακριβή αναπαράσταση της πραγματικότητας.

1.8 Οικονομία και χρηματοοικονομικά

Στην οικονομική επιστήμη, οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν την εξέλιξη των τιμών, των επιτοκίων, των επενδύσεων και των καταναλωτικών συνηθειών. Για παράδειγμα, η εξίσωση Black–Scholes που χρησιμοποιείται στην τιμολόγηση των παραγώγων, είναι μία μερική διαφορική εξίσωση.

1.9 Υγεία και ιατρική

Κατά την εξάπλωση των μολυσματικών ασθενειών, τα επιδημιολογικά μοντέλα (όπως το SIR) βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις. Αυτά τα μοντέλα, προβλέπουν την πορεία (εξάπλωση) μιας επιδημίας, ποσοτικοποιούν την ανάγκη για εμβόλια και εκτιμούν τον αριθμό των μολυσμένων ατόμων στον χρόνο.

1.10 Περιβάλλον και κλίμα

Η πρόβλεψη της θερμοκρασίας, της ρύπανσης ή της στάθμης των υδάτων, βασίζεται σε διαφορικές εξισώσεις. Μοντέλα κλιματικής αλλαγής, πρόβλεψης του καιρού και διαχείρισης των φυσικών πόρων, είναι όλα εφαρμογές αυτής της μεθοδολογίας.

1.11 Μουσική και ήχος

Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων, περιγράφεται με τη βοήθεια της κυματικής εξίσωσης, που είναι διαφορική εξίσωση η οποία έχει εφαρμογές σε ηχητικές συσκευές, στην ακουστική των χώρων και στην επεξεργασία του σήματος.

2. Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στη ναυτιλία

Η ναυτιλία, ως ένας από τους σημαντικότερους κλάδους της παγκόσμιας οικονομίας και της μηχανικής, εξαρτάται απόλυτα από την ακριβή πρόβλεψη και από τη μελέτη της κίνησης των πλοίων. Εφόσον η θάλασσα αποτελεί ένα δυναμικό και διαρκώς μεταβλητό περιβάλλον, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι απαραίτητη. Οι διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, βρίσκουν συχνά εφαρμογές στον χώρο της ναυτιλίας, διότι περιγράφουν τα δυναμικά συστήματα στα οποία υπάρχει επιτάχυνση. Σε πολλά από αυτά, ένα πλοίο ή κάποιο εξάρτημά του κινείται υπό την επίδραση εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, γεγονός που μοντελοποιείται με εξισώσεις (οι οποίες περιέχουν παραγώγους 2^{ης} τάξης), της θέσης ή της γωνίας περιστροφής, ως προς τον

χρόνο. Οι διαφορικές εξισώσεις και ειδικά οι εξισώσεις 2^{ης} τάξης, είναι τα κύρια μαθηματικά εργαλεία για:

- Τη μελέτη των κινήσεων των πλοίων στη διάρκεια των κυματισμών
- Την πρόβλεψη της σταθερότητας – ευσταθούς πλευσης
- Τον σχεδιασμό των αυτοματοποιημένων συστημάτων πλοήγησης
- Την αποφυγή των φαινομένων του συντονισμού και των μηχανικών αστοχιών.

2.1 Κίνηση του πλοίου στη διάρκεια των κυματισμών

Ένα πλοίο που πλέει στη θάλασσα, επηρεάζεται από τα κύματα. Η κίνηση του, μπορεί να αναλυθεί σε 6 βαθμούς ελευθερίας:

- **Heave** (κατακόρυφη μετατόπιση)
- **Sway** (πλευρική μετατόπιση)
- **Surge** (εμπρόσθια / οπίσθια μετατόπιση)
- **Roll** (περιστροφή γύρω από τον διαμήκη άξονα)
- **Pitch** (περιστροφή γύρω από τον εγκάρσιο άξονα)
- **Yaw** (περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα)

Αυτές οι κινήσεις, μοντελοποιούνται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης.

Παράδειγμα

Πρόκειται για μία κλασική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με εφαρμογές στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς των πλοίων στα κύματα. Η ταλάντωση roll, μπορεί να

μοντελοποιηθεί ως $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M(t)$ όπου:

- I η ροπή αδράνειας του πλοίου γύρω από τον άξονα
- c ο συντελεστής απόσβεσης (λόγω των ρευστών)
- k η σκληρότητα επαναφοράς (λόγω της άνωσης)
- θ η γωνία ταλάντωσης (roll)
- $M(t)$ η εξωτερική ροπή λόγω των κυμάτων

2.2 Δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου (Ship motion dynamics)

Οι περισσότερες από αυτές τις κινήσεις, περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, της μορφής $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$, όπου:

- m η μάζα (ή ροπή αδράνειας)
- c η απόσβεση λόγω της αντίστασης του νερού (υδροδυναμικές δυνάμεις)
- k η σταθερά επαναφοράς (π.χ. λόγω της άνωσης)
- $F(t)$ η εξωτερική δύναμη (π.χ. κύματα, άνεμος)
- $x(t)$ η μετατόπιση ή γωνία

Αυτές οι εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να προβλέψουμε αν το πλοίο μπορεί να παραμείνει ευσταθές (εμφάνιση ροπής επαναφοράς), άνετο για τους επιβάτες και ασφαλές για τα φορτία.

2.3 Ευστάθεια των πλοίων

Για την εξασφάλιση ότι το πλοίο θα επιστρέψει στην αρχική θέση ισορροπίας του (αποκλεισμός εμφάνισης της ροπής ανατροπής) μετά από μία διαταραχή (π.χ. λόγω του δυνατού ανέμου ή των ισχυρών κυμάτων), μελετάται η δυναμική του συστήματος, με χρήση διαφορικών εξισώσεων. Αυτό, βοηθά στον υπολογισμό των κρίσιμων

σημείων της ευστάθειας. Το μοντέλο, είναι συνήθως μια εξίσωση του τύπου $m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + ky = 0$, όπου x είναι η μετατόπιση του κέντρου βάρους / άξονα. Αυτή η εξίσωση, περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση, η οποία είναι θεμελιώδης στη μελέτη των κινήσεων του πλοίου, μετά από έντονο κυματισμό (διατοιχισμός). Αν η λύση της εξίσωσης φθίνει σε σχέση με τον χρόνο, τότε το πλοίο θεωρείται ευσταθές. Η ανάλυσή της ευστάθειας, γίνεται σε στατικό και σε δυναμικό επίπεδο.

2.4 Αυτόματος έλεγχος της πορείας (Autopilot systems)

Ο αυτόματος έλεγχος της πορείας ενός πλοίου (π.χ. μέσω PID controller), απαιτεί τη μοντελοποίηση της δυναμικής απόκρισης του όταν αυτό στρέφεται (yaw motion), κάτι που υλοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. Π.χ. η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική απόκριση του πλοίου σε αλλαγή πορείας, είναι η ακόλουθη

$$I \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = u(t), \text{ όπου:}$$

y η γωνία στροφής

I η ροπή αδράνειας, ως προς τον κατακόρυφο άξονα

$u(t)$ η είσοδος (π.χ. κίνηση του πηδαλίου)

2.5 Υπολογιστικά μοντέλα και ναυπηγική ανάλυση

Κατά τη φάση της σχεδίασης των νέων πλοίων, χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα (συχνά με βάση διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης) για:

- Την προσομοίωση των δομικών ταλαντώσεων του κύτους (π.χ. hull girder vibration),
- Την αποφυγή φαινομένων όπως ο συντονισμός, που μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφική αστάθεια (μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης),
- Τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων (natural frequencies) και των μορφών της ταλάντωσης (mode shapes).

2.6 Προσομοιώσεις και πλοία νέας τεχνολογίας

Οι διαφορικές εξισώσεις, εφαρμόζονται σε λογισμικά CFD (Computational Fluid Dynamics) και FEA (Finite Element Analysis), που ευρύτατα χρησιμοποιούνται για την:

- Προσομοίωση της ροής του νερού, γύρω από το κύτος του πλοίου,
- Ανάλυση της πίεσης που ασκείται κάθε χρονική στιγμή, στο πηδάλιο και στα πτερύγια,
- Βελτιστοποίηση του σχήματος (υδροδυναμική μορφή, βολβός πλώρης) του πλοίου, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της αντίστασης (τριβής) που συναντά, κατά την πλεύση του.

2.7 Καταπόνηση του κύτους (Hull girder response)

Το κύτος του πλοίου, λειτουργεί ως δοκός (δομικό στοιχείο) που παραμορφώνεται ελαστικά, κατά τη διάρκεια των κυματισμών. Η δυναμική ανάλυση των παραμορφώσεων του κύτους, περιλαμβάνει μορφές ταλάντωσης και κατανομές των διαφόρων φορτίων. Η όλη διαδικασία, μοντελοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} ή και 4^{ης} τάξης (όπως η εξίσωση της καμπτικής δόνησης Euler–Bernoulli)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(x, t) \text{ όπου } y \text{ είναι η κάθετη μετατόπιση του κύτους.}$$

Με αυτές τις εξισώσεις, γίνεται ανάλυση της παραμόρφωσης, υπολογισμός της κόπωσης και εξασφαλίζεται διαχρονικά η αντοχή.

2.8 Κύματα, συντονισμός και ναυτική μηχανολογία

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη ναυτική μηχανολογία είναι ο συντονισμός, δηλαδή, όταν η συχνότητα ταλάντωσης των κυμάτων είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πλοίου. Αν συμβεί αυτό, τότε οι κινήσεις του πλοίου μεγεθύνονται επικίνδυνα (μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης). Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από την

$$\text{ομογενή εξίσωση } m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ όπου } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \text{ Οι}$$

ναυπηγοί, προσπαθούν να σχεδιάσουν τα πλοία έτσι ώστε να αποφεύγουν το φαινόμενο του συντονισμού, με τα τυπικά ωκεάνια κύματα.

3. Γεωμετρικές εφαρμογές

Ως γεωμετρική εφαρμογή των διαφορικών εξισώσεων, μπορούμε να αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε την ακτίνα καμπυλότητας των κωνικών τομών. Από την αναλυτική γεωμετρία, όλες οι κωνικές τομές που αναφέρονται στον άξονα Ox , περνούν από τις εστίες και στην κορυφαία εφαπτομένη τους Oy (όπου O είναι η κορυφή της καμπύλης), περιέχονται στην εξίσωση $y^2 = 2 \cdot \mu \cdot x + \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot x^2$ όπου ($\varepsilon = \pm 1$ ή $\varepsilon = 0$) με μ την ημιπαράμετρο αυτών των καμπυλών και:

α) Αν $\varepsilon = -1$, τότε η καμπύλη $y^2 = 2 \cdot \mu \cdot x + \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot x^2$ είναι έλλειψη, με α τον μεγάλο ημιάξονα, β τον μικρό ημιάξονα, γ το μισό της εστιακής απόστασης και $\mu = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} = \varepsilon \cdot \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha}$

β) Αν $\varepsilon = +1$, τότε η καμπύλη $y^2 = 2 \cdot \mu \cdot x + \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot x^2$ είναι υπερβολή, με α τον πρωτεύοντα ημιάξονα, β τον δευτερεύοντα ημιάξονα, γ το μισό της εστιακής απόστασης και $\mu = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha} = \varepsilon \cdot \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha}$

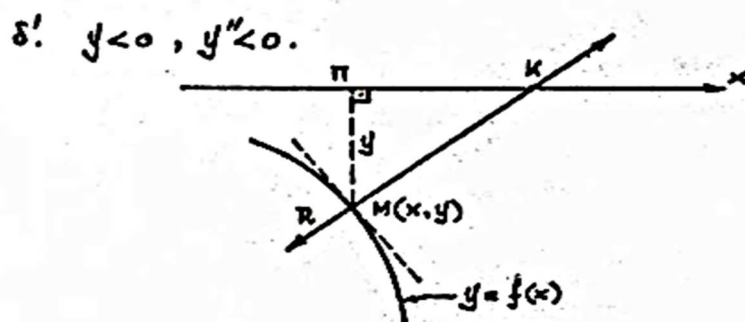
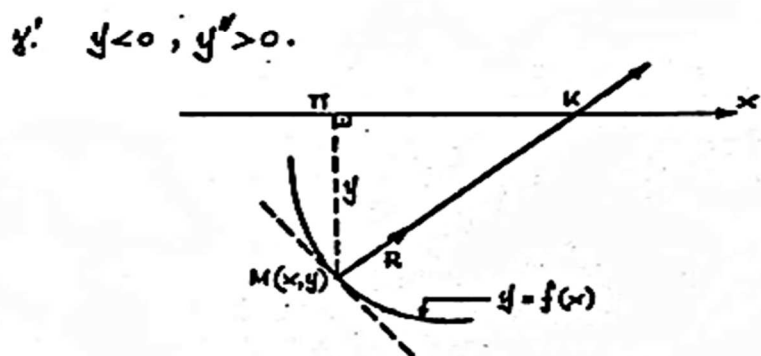
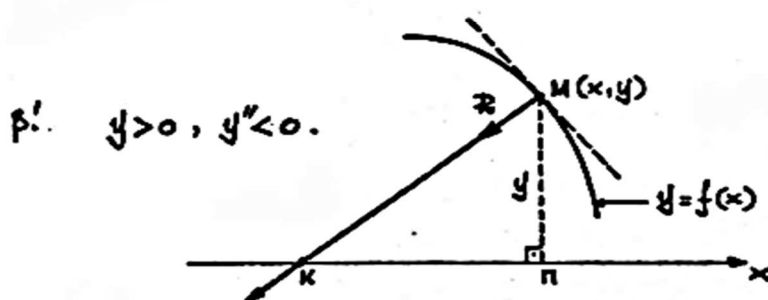
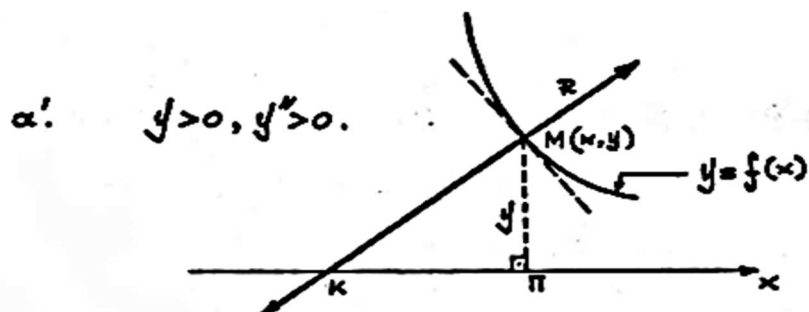
γ) Αν $\varepsilon = 0$, τότε η εξίσωση $y^2 = 2 \cdot \mu \cdot x + \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot x^2$ γίνεται $y^2 = 2\mu x$, παριστάνει παραβολή και αν E είναι η εστία της, η απόστασή της (OE) από την κορυφή O , είναι ίση προς $\frac{\mu}{2}$, δηλαδή θα είναι $\mu = 2(OE)$. Η ακτίνα καμπυλότητας R στο

τυχόν σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης $y^2 = 2 \cdot \mu \cdot x + \varepsilon \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot x^2$, είναι

$$R = \frac{\varepsilon_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad (\varepsilon_1 = \pm 1) \text{ όπου το } \varepsilon_1 \text{ υποτίθεται ομόσημο της } \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \text{ ώστε}$$

να είναι $R > 0$ και η θετική φορά των τόξων s τέτοια, που η θετική κάθετος στο σημείο

Μ της καμπύλης να κατευθύνεται προς τα κοίλα της. Έστω ότι η κάθετος στο τυχόν σημείο $M(x, y)$ της καμπύλης φέρνεται προς τον άξονα των x . Όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, η κάθετος MK και η ακτίνα καμπυλότητας σε κάθε σημείο, έχουν αντίθετη φορά όταν τα y, y'' είναι ομόσημα.



Γράφημα 1 Ακτίνες καμπυλότητας

Εφαρμογή 1

Μια δύναμη F αναγκάζει ένα υλικό σημείο M μάζας m να κινείται ευθύγραμμα. Αν η τροχιά του M συμπίπτει με τη διεύθυνση της F , να βρεθεί η θέση

του Μ κάθε χρονική στιγμή t , με αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$ και $v(0) = v_0$. Υποθέτω ότι δεν έχω απώλειες ενεργείας.

Λύση

Θεωρώ ως άξονα των x τη διεύθυνση της F και ως αρχή, ένα σημείο Ο αυτής. Τότε, η απόσταση του Μ από το Ο θα είναι, σύμφωνα με το πρόβλημα, συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή $OM = x(t)$. Επειδή στο σημείο Μ ενεργεί η δύναμη F , ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής $m \cdot \gamma = F$

Γνωρίζω ότι η επιτάχυνση είναι η 2^η παράγωγος της συνάρτησης του διαστήματος ως προς τον χρόνο. Δηλαδή, $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$ οπότε η σχέση $m \cdot \gamma = F$ λόγω της $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\text{γίνεται } m \frac{d^2x}{dt^2} = F \text{ ή } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Μετά από δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, η $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$ δίνει $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ όπου

c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Η $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2$ είναι η γενική

λύση του προβλήματος. Για να προσδιορίσω τις c_1, c_2 , παραγωγίζω την $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$,

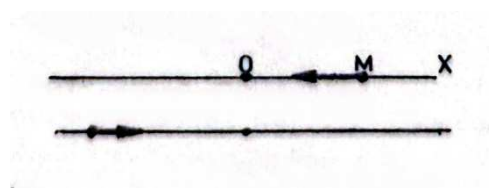
οπότε προκύπτει ότι $v = \frac{F}{m} t + c$ και αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές στις

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2 \text{ και } v = \frac{F}{m} t + c, \text{ παίρνω } c_2 = 0, \quad c_1 = v_0. \text{ Οπότε η}$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + c_1 t + c_2 \text{ γίνεται } x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t$$

Εφαρμογή 2

Ένα υλικό σημείο Μ μάζας m , έλκεται από το σημείο Ο με μία δύναμη F ανάλογη της απόστασης ΟΜ. Να βρεθεί η θέση του Μ κάθε χρονική στιγμή, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι: **α)** $x(0) = x_0, v(0) = 0$, **β)** $x(0) = x_0, v(0) = v_0$



Γράφημα 2 Κίνηση υλικού σημείου

Λύση

Αν a είναι ο συντελεστής αναλογίας, τότε $F = -ax$, όπου $x = x(t)$ και το πρόσημο είναι $-$ λόγω της φοράς. Επειδή $m\gamma = F$, η $F = -ax$ γίνεται $m\gamma = -ax$ ή

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax \text{ ή } mx'' + ax = 0 \text{ Η χαρακτηριστική εξίσωση της } mx'' + ax = 0, \text{ είναι}$$

$$m\kappa^2 + a = 0 \text{ με ρίζες } \kappa_{1,2} = \pm \rho, \text{ όπου } \rho = \sqrt{\frac{a}{m}} \text{ και η γενική λύση}$$

$x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$ Οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

α) Με $x(0) = x_0$ και $x'(0) = 0$, η $x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$ και η παράγωγός της $x' = -c_1 \rho \eta \mu(\rho t) + c_2 \rho \sigma \nu \nu(\rho t)$ δίνουν $c_1 = x_0, c_2 = 0$. Οπότε η $x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$ γίνεται $x = x_0 \sigma \nu \nu(\rho t)$ Από τη σχέση αυτή, φαίνεται ότι το M εκτελεί μια αμείωτη αρμονική ταλάντωση πάνω στον άξονα x , με ακρότατες θέσεις x_0 και $-x_0$, συμμετρικές του O. Το $-x_0$ ονομάζεται **πλάτος της ταλάντωσης** ενώ το $\frac{2\pi}{\rho}$ είναι η περίοδος της.

β) Με $x(0) = x_0$ και $x'(0) = v_0$ οι $x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$ και $x' = -c_1 \rho \eta \mu(\rho t) + c_2 \rho \sigma \nu \nu(\rho t)$ δίνουν $c_1 = x_0$ και $c_2 = \frac{v_0}{\rho}$. Οπότε η $x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$ γίνεται $x = x_0 \sigma \nu \nu(\rho t) + \frac{v_0}{\rho} \eta \mu(\rho t)$. Αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό $x_0 = A \sigma \nu \nu \varphi$ και $\frac{v_0}{\rho} = A \eta \mu \varphi$ στην $x = x_0 \sigma \nu \nu(\rho t) + \frac{v_0}{\rho} \eta \mu(\rho t)$, παίρνω $x = A \sigma \nu \nu(\rho t - \varphi)$ που είναι της ίδιας μορφής με την $x = c_1 \sigma \nu \nu(\rho t) + c_2 \eta \mu(\rho t)$, δηλαδή είναι μια απλή ταλάντωση.

Εφαρμογή 3

Υλικό σημείο M μάζας m έλκεται από το σημείο O, με μια δύναμη F ανάλογη της απόστασης OM. Να βρεθεί η θέση του M κάθε χρονική στιγμή, όταν στην κίνηση του αντιδρά μια δύναμη (αντίσταση) R , που είναι ανάλογη της ταχύτητας του και όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = x_0, v(0) = v_0$.

Λύση

Επειδή η R αντιστέκεται στη κίνηση του M, έχει αντίθετη φορά προς την ταχύτητα του. Δηλαδή $R = -\beta v$, με $\beta = \sigma \tau \alpha \theta. > 0$ Επειδή η συνισταμένη των δυνάμεων F , δηλαδή η R είναι $-\alpha x - \beta v$, η διαφορική εξίσωση της κίνησης του M

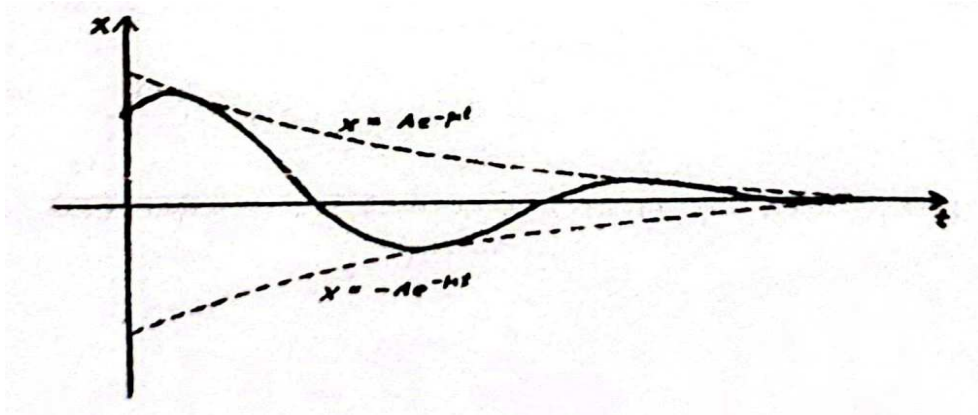
$$\text{γίνεται } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha x - \beta \frac{dx}{dt} \text{ ή } x'' + \frac{\beta}{m} x' + \frac{\alpha}{m} x = 0$$

$$\text{Αν } \frac{\beta}{m} = 2\mu, \frac{\alpha}{m} = \lambda^2 \text{ τότε η διαφορική εξίσωση γράφεται } x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = 0$ είναι $\kappa^2 + 2\mu \kappa + \lambda^2 = 0$ με ρίζες $\kappa_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$. Ανάλογα με τις τιμές των μ, λ διακρίνω τις παρακάτω 3 περιπτώσεις:

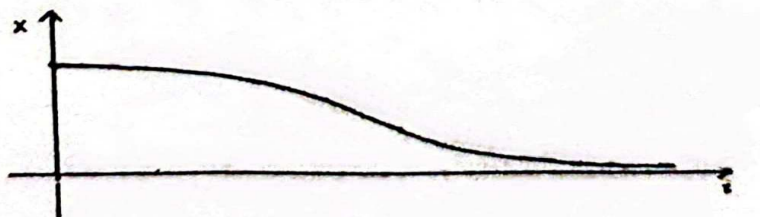
α) Αν $\mu < \lambda$, δηλαδή αν $\Delta < 0$, τότε οι ρίζες της $\kappa^2 + 2\mu \kappa + \lambda^2 = 0$ είναι μιγαδικές οπότε η γενική λύση της $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = 0$ είναι $x = e^{-\mu t} (c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t))$ όπου $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$ Για να προσδιορίσω τις σταθερές c_1, c_2 αντικαθιστώ τις αρχικές συνθήκες στην $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$ και στην παράγωγο της, οπότε τελικά παίρνω $c_1 = x_0, c_2 = \frac{v_0 + \mu x_0}{\omega}$

Αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό $x_0 = A \sin \varphi$ και $\frac{v_0 + \mu x_0}{\omega} = A \eta \mu \varphi$ στην $c_2 = \frac{v_0 + \mu x_0}{\omega}$ παίρνω $x = A e^{-\mu t} \sin(\omega t - \varphi)$ η οποία είναι γινόμενο 2 συναρτήσεων. Η μία είναι η φθίνουσα συνάρτηση $e^{-\mu t}$ που ονομάζεται **παράγοντας απόσβεσης** και η άλλη είναι η απλή περιοδική συνάρτηση $\sin(\omega t - \varphi)$ με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Η $x = A e^{-\mu t} \sin(\omega t - \varphi)$, ως γινόμενο αυτών των 2 συναρτήσεων, παριστάνει μια ταλάντωση που το πλάτος της συνεχώς μικραίνει. Η ταλάντωση αυτή, ονομάζεται **φθίνουσα αρμονική ταλάντωση**. Η γραφική της παράσταση, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



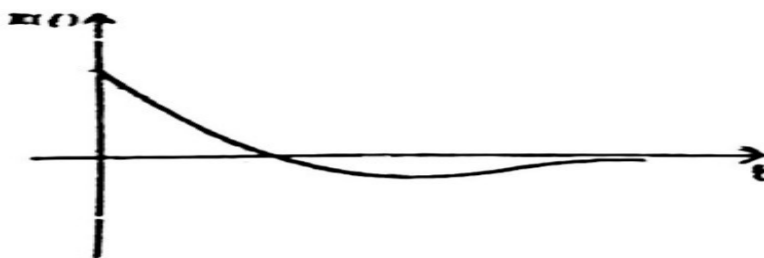
Γράφημα 3 Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση

β) Αν $\Delta > 0$ και $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} < \mu$, τότε οι ρίζες της $\kappa^2 + 2\mu\kappa + \lambda^2 = 0$ είναι πραγματικές και αρνητικές, οπότε η γενική λύση της $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = 0$ είναι $x = c_1 e^{\kappa_1 t} + c_2 e^{\kappa_2 t}$. Για να προσδιορίσω τις σταθερές c_1, c_2 , αντικαθιστώ τις αρχικές συνθήκες στην $x = c_1 e^{\kappa_1 t} + c_2 e^{\kappa_2 t}$ και στην παράγωγό της, οπότε παίρνω $c_1 = \frac{u_0 - x_0 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}$, $c_2 = \frac{u_0 - x_0 \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$. Άρα, η $x = c_1 e^{\kappa_1 t} + c_2 e^{\kappa_2 t}$ γίνεται $x = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} [(u_0 - x_0 \kappa_2) e^{\kappa_1 t} + (v_0 - x_0 \kappa_1) e^{\kappa_2 t}]$. Επειδή οι κ_1, κ_2 είναι αρνητικές, έπεται ότι η $x = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} [(u_0 - x_0 \kappa_2) e^{\kappa_1 t} + (v_0 - x_0 \kappa_1) e^{\kappa_2 t}]$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και όταν $t \rightarrow 0$, τότε $\lim x(t) = 0$, δηλαδή η $x = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} [(u_0 - x_0 \kappa_2) e^{\kappa_1 t} + (v_0 - x_0 \kappa_1) e^{\kappa_2 t}]$ δεν περιέχει κυκλικές συναρτήσεις, άρα δεν είναι περιοδική. Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η γραφική της παράσταση για μια τυπική τιμή $x_0 > 0$



Γράφημα 4 Μη περιοδική συνάρτηση

γ) Αν $\mu = \lambda$, δηλαδή αν $\Delta = 0$, τότε οι ρίζες της $\kappa^2 + 2\mu\kappa + \lambda^2 = 0$ είναι πραγματικές και ίσες, οπότε η γενική λύση της $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = 0$ είναι $x = (a_1 + a_2 t)e^{-\mu t}$. Για να προσδιορίσω τις σταθερές c_1, c_2 αντικαθιστώ τις αρχικές συνθήκες στην $x = (a_1 + a_2 t)e^{-\mu t}$ και στην παράγωγό της, οπότε παίρνω $c_1 = x_0$ και $c_2 = v_0 + \mu x_0$. Άρα, η $x = (a_1 + a_2 t)e^{-\mu t}$ γίνεται $x = [x_0 + (v_0 + \mu x_0)t]e^{-\mu t}$. Επειδή $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ και επειδή δεν περιέχει κυκλικές συναρτήσεις, δεν είναι περιοδική. Η $x = [x_0 + (v_0 + \mu x_0)t]e^{-\mu t}$, ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση** και στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική της παράσταση για μια μεγάλη τυπική τιμή της v_0 .



Γράφημα 5 Γραφική παράσταση κρίσιμης απόσβεσης

4. Μηχανική – ταλαντώσεις

Ⓜ Η διαφορική εξίσωση ενός υλικού σημείου, που κινείται ευθύγραμμα και έλκεται (ή απωθείται) από σταθερό κέντρο, με δύναμη ανάλογη της απόστασης του σημείου από το κέντρο αυτό, είναι του τύπου

- $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ για την έλξη
- $\frac{d^2 x}{dt^2} - k^2 x = 0$ για την άπωση

όπου η άγνωστη συνάρτηση της ταλάντωσης θεωρείται συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή $x(t)$ και k είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. Η γενική λύση της

$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$, είναι $x(t) = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(kt) + c_2 \cdot \eta\mu(kt)$ Αν στη σχέση

$x(t) = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(kt) + c_2 \cdot \eta\mu(kt)$ θέσω, όπου $c_1 = A \cdot \eta\mu\varphi$, $c_2 = A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ με $A > 0$ (για $A=0$ έχω τη μηδενική λύση) και $-\pi < \varphi \leq \pi$, τότε η

$x(t) = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(kt) + c_2 \cdot \eta\mu(kt)$ θα δώσει τη γενική λύση με τη μορφή $x(t) = A \cdot \eta\mu(k \cdot t + \varphi)$ που το β' μέλος της είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη, δηλαδή

η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ είναι μια οικογένεια ημιτονοειδών γραμμών, από όπου συμπεραίνω ότι έχω μια αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση, με τη σταθερά k να εκφράζει τη συχνότητα των ταλαντώσεων. Η περίοδος, δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{k}$. Αν η $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ εμφανίζεται ως μη ομογενής, δηλαδή υπό τη μορφή $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = f(t)$ που είναι η ονομαζόμενη εξαναγκασμένη ταλάντωση, τότε η γενική λύση αυτής, εφαρμόζοντας την μέθοδο του Lagrange, είναι η $x(t) = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(kt) + c_2 \cdot \eta\mu(kt) + \frac{1}{k} \int_{t_0}^t f(t) \cdot \eta\mu(t - \tau) dt$, στην οποία η $y(t) = \frac{1}{k} \int_{t_0}^t f(t) \cdot \eta\mu(t - \tau) dt$ είναι ο όρος, που χαρακτηρίζει την εξαναγκασμένη ταλάντωση, με αρχικές συνθήκες $y(t_0) = 0$ $y'(t_0) = 0$.

(II) Η διαφορική εξίσωση της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης, είναι του τύπου $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$ όπου h (συντελεστής απόσβεσης), k σταθεροί θετικοί αριθμοί. Αν η $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$ εμφανίζεται ως μη ομογενής, δηλαδή υπό τη μορφή $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = f(t)$ όπου $h > 0$, $k > 0$ τότε έχω την φθίνουσα εξαναγκασμένη ταλάντωση, με τη συνάρτηση $f(t)$ να είναι συνήθως περιοδική.

(a) Αν $h < k$ (ασθενής απόσβεση) και επειδή $h > 0$, $k > 0$ είναι η $\Delta = (2h)^2 - 4k^2 < 0$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p^2 + 2 \cdot h \cdot p + k^2$ της $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$, οπότε αυτό έχει 2 ρίζες μιγαδικούς αριθμούς $p_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}$ και $p_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2}$. Άρα, η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$ είναι η $x(t) = e^{-ht} \left(c_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + c_2 \eta \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t \right)$, που μπορεί να εμφανιστεί επίσης υπό τη μορφή $x(t) = A \cdot e^{-ht} \cdot \eta\mu \left(\sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + \varphi \right)$ ή $x(t) = A \cdot e^{-ht} \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$ όπου $c_1 = A \cdot \eta\mu\varphi$, $c_2 = A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\sqrt{k^2 - h^2} = \frac{2\pi}{T}$, $A > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Στην $x(t) = A \cdot e^{-ht} \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$, τα A , φ εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες, σε αντίθεση προς τα T (περίοδος ταλάντωσης) και $\sqrt{k^2 - h^2}$ (συχνότητα), που είναι ανεξάρτητα. Ο παράγοντας $\eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$ εκφράζει την ταλάντωση, ο δε παράγοντας e^{-ht} εκφράζει την απόσβεση.

(b) Αν $h > k$ (ισχυρή απόσβεση) είναι $\Delta = (2h)^2 - 4k^2 = 4(h^2 - k^2) > 0$, έχω 2 ρίζες πραγματικές και άνισες για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις

$p_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}$ και $p_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}$ Άρα, η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$ είναι η $x(t) = c_1 \cdot e^{(-h + \sqrt{h^2 - k^2})t} + c_2 \cdot e^{(-h - \sqrt{h^2 - k^2})t}$

ή $x(t) = e^{-ht} \left(c_1 \cdot e^{\sqrt{h^2 - k^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{h^2 - k^2} \cdot t} \right)$, όπου $\sqrt{h^2 - k^2} < h$, οπότε είναι $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Η παραπάνω μορφή της γενικής λύσης, μπορεί να γίνει

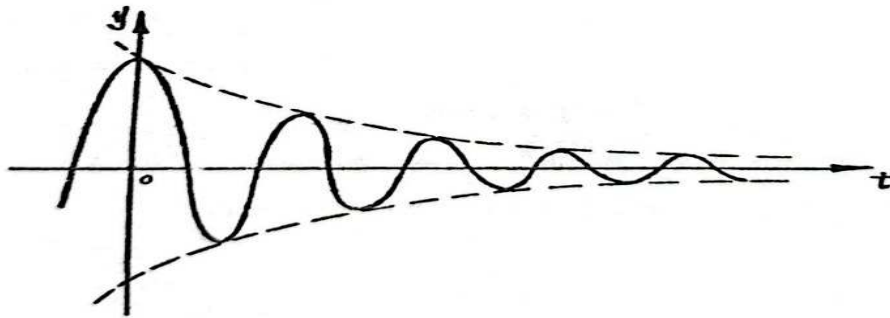
$$x(t) = A \cdot e^{-ht} \cdot \text{sh} \left(\sqrt{h^2 - k^2} \cdot t + \varphi \right) \text{ όπου } c_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{\varphi} \text{ και } c_2 = -\frac{A}{2} \cdot e^{-\varphi}$$

 Αν $h = k$ (κρίσιμη απόσβεση) για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\Delta = (2h)^2 - 4k^2 = 0$, δηλαδή αυτό έχει 2 ρίζες πραγματικές και ίσες, τις $p_1 = p_2 = h$

Άρα, η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$ είναι η $x(t) = e^{-ht} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t)$ Και σε αυτήν, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έχω μη περιοδικές κινήσεις. Στις παραπάνω περιπτώσεις οι λύσεις της $x(t)$ τέμνουν τον άξονα των t , σε χρονικές στιγμές, που δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω εξισώσεις:

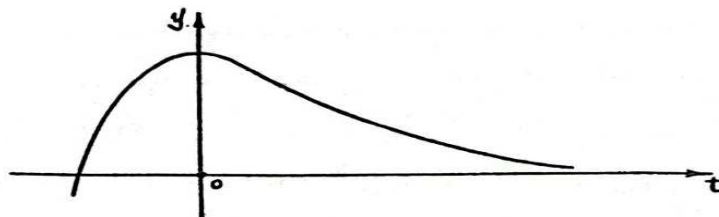
i. Για την 1^η περίπτωση, $\varepsilon \varphi \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t = -\frac{c_1}{c_2}$ άρα, $\sigma \varphi \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t = -\frac{c_2}{c_1}$ άρα,

$\eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) = 0$, στην οποία ο άξονας των t τέμνεται άπειρες φορές.



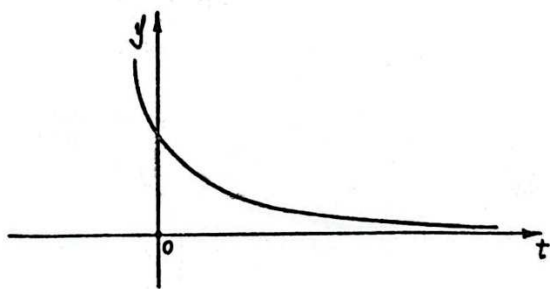
Γράφημα 6 Φθίνουσα ταλάντωση με άπειρα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα

ii. Για την 2^η περίπτωση, η εξίσωση είναι $\text{sh} \left(\sqrt{h^2 - k^2} \cdot t + \varphi \right) = 0$



Γράφημα 7 Φθίνουσα ταλάντωση με ένα σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα

iii. Για την 3^η περίπτωση, η εξίσωση είναι $c_1 + c_2 \cdot t = 0$



Γράφημα 8 Φθίνουσα ταλάντωση χωρίς σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα

Στην 2^η και στην 3^η περίπτωση, παρατηρώ από τα σχήματα ότι μόνο μια φορά το πολύ, οι λύσεις $x(t)$ τέμνουν τον άξονα των t .

Εφαρμογή 4

Ένα πείραμα έδειξε ότι βάρος 6 lb, εκτείνει κάποιο ελατήριο κατά 6 in. Αν το βάρος αυτό έλκεται κατά 4 in, κάτω από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται στη συνέχεια ελεύθερο, να

- α) οριστεί μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει την κίνηση σε συναφείς συνθήκες,
- β) βρεθεί η θέση του βάρους ως μια συνάρτηση του χρόνου,
- γ) υπολογιστεί το πλάτος, η περίοδος και η συχνότητα της κίνησης,
- δ) οριστεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του βάρους, 0,5 sec αφότου ελευθερώθηκε.

Λύση

α) Μαθηματική διατύπωση

Από τον νόμο του Hooke έχω $|f| = k \cdot |x|$ και επειδή $6 \text{ in} = 0,5 \text{ ft}$ η

$|f| = k \cdot |x|$ γίνεται $6 = k \cdot 0,5 \Leftrightarrow k = 12$. Άρα, ο νόμος του Newton $\frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$

γίνεται $\frac{6}{32} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -12x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, το βάρος είναι σε θέση 4 in κάτω από τη θέση ισορροπίας, έχω τη σχέση $x = \frac{1}{3} \text{ ft}$ όταν $t = 0$. Επίσης, επειδή το σώμα ελευθερώνεται

(δηλαδή έχει μηδενική ταχύτητα) όταν $t = 0$, έχω για $t = 0$ $\frac{dx}{dt} = 0$

β) Λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$ είναι η $r^2 + 64 = 0$ που έχει

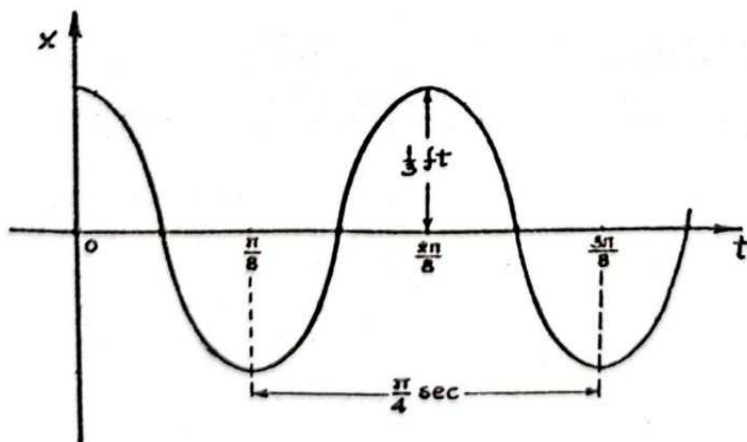
ρίζες $r_{1,2} = \pm 8i$ οπότε η $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$ έχει λύση $x = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t) + c_2 \cdot \eta\mu(8t)$ Λόγω

της συνθήκης $x = \frac{1}{3} \text{ ft}$ είναι $c_1 = \frac{1}{3}$ και η $x = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t) + c_2 \cdot \eta\mu(8t)$ δίνει

$x = \frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(8t) + c_2 \cdot \eta\mu(8t)$ την οποία παραγωγίζω και έχω την

$\frac{dx}{dt} = \frac{-8}{3} \cdot \eta\mu(8t) + 8c_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t)$ Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $\frac{dx}{dt} = 0$ βρίσκω ότι $c_2 = 0$. Έτσι, η θέση του σώματος δηλαδή η λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$, που ζητώ είναι η $x = \frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(8t)$ όπου το x εκφράζεται σε πόδια (ft). Αν θέλω το x σε in, η εξίσωση είναι η $(1 \text{ ft} = 12 \text{ in})$, $x = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t)$

γ) Από την $x = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t)$, παίρνω ότι το πλάτος είναι $\frac{1}{3} \text{ ft}$, συχνότητα της κίνησης είναι $f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \text{ c/sec}$ και η περίοδος είναι $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ sec}$. Τα παραπάνω, διακρίνονται στη γραφική παράσταση του σχήματος. Η κίνηση, είναι μια απλή αρμονική κίνηση.



Γράφημα 9 Απλή αρμονική κίνηση

δ) Παραγωγίζοντας ως προς t την $x = \frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(8t)$, έχω $\frac{dx}{dt} = \frac{-8}{3} \cdot \eta\mu(8t)$ δηλαδή $v = \frac{-8}{3} \cdot \eta\mu(8t)$, από όπου παραγωγίζοντας πάλι ως προς t , παίρνω $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-64}{3} \sigma\upsilon\nu(8t)$, δηλαδή $\gamma = \frac{-64}{3} \sigma\upsilon\nu(8t)$. Αντικαθιστώντας τον $t = 0,5 \text{ sec}$ και επειδή $4 \text{ rad} = 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 229^\circ$, έχω κατά προσέγγιση $x = \frac{1}{3} \cdot (-0.656) = -0.219$, $v = \frac{8}{3} \cdot (-0.755) = +2.01$, $\gamma = -\frac{64}{3} \cdot (0.656) = +14.0$. Έτσι, βλέπω ότι 0,5 sec μετά την ελευθέρωση του σώματος βάρους 6 lb, αυτό θα βρίσκεται 0.219 ft πάνω από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα κάτω με ταχύτητα 2.01 ft/sec και με επιτάχυνση (προς τα κάτω) 14 ft/sec².

Εφαρμογή 5

Έστω ότι μια δύναμη απόσβεσης ενεργεί στο σώμα του προηγούμενου παραδείγματος για 1,5 ώρα με τα ίδια αριθμητικά δεδομένα και με στιγμιαία ταχύτητα σε (ft/sec).

- α)** Να οριστεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης, σε συναφείς συνθήκες.
β) Να βρεθεί η θέση x του σώματος, ως συνάρτηση του χρόνου t .

Λύση

α) Μαθηματική διατύπωση

Λαμβάνοντας υπ' όψη και τη δύναμη απόσβεσης στο προηγούμενο παράδειγμα $-1.5 \frac{dx}{dt}$, διαμορφώνω την εξίσωση της κίνησης ως εξής

$$\frac{6}{32} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8}{3} \cdot \frac{dx}{dt} = -12x - 1.5 \cdot \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64 \cdot x = 0$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος, είναι αυτές της προηγούμενης εφαρμογής, δηλαδή $x = \frac{1}{3}$, όταν $t = 0$ και $\frac{dx}{dt} = 0$, όταν $t = 0$

β) Λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64 \cdot x = 0$

Η χαρακτηριστική της $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64 \cdot x = 0$ είναι $r^2 + 8 \cdot r + 64 = 0$ και έχει 2 ρίζες

$r_{1,2} = -4 \pm 4i\sqrt{3}$, οπότε η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64 \cdot x = 0$ δίνεται από τον τύπο

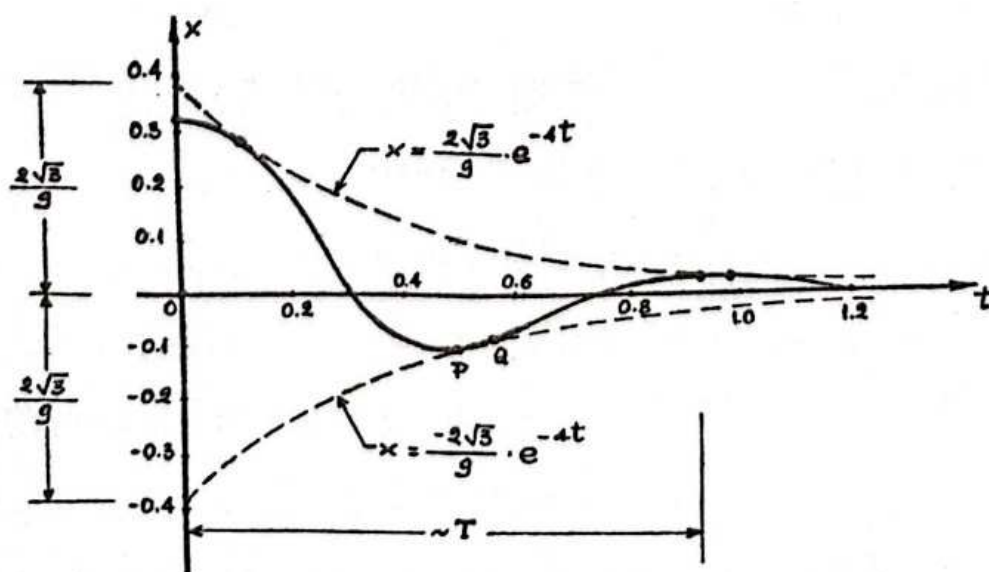
$x = e^{-4t} (C_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) + C_2 \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t))$, ο οποίος, με τις προϋποθέσεις των

συνθήκων (δηλαδή $x = \frac{1}{3}$, όταν $t = 0$ και $\frac{dx}{dt} = 0$, όταν $t = 0$) προσδιορίζοντας τις

c_1, c_2 γίνεται $x = \frac{e^{-4t}}{9} [3 \cdot \sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t)]$ που μπορεί να γραφεί ως

$x = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot e^{-4t} \cdot \eta\mu\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ Η γραφική παράσταση της

$x = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot e^{-4t} \cdot \eta\mu\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ είναι η ακόλουθη και κείται μεταξύ των γραμμών



Γράφημα 10 Φθίνουσα ταλάντωση

$x = \frac{\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$ και $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$ επειδή $-1 \leq \eta\mu\left(4\sqrt{3} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ Η κίνηση που περιγράφεται θεωρητικά σε αυτό το παράδειγμα, ονομάζεται **φθίνουσα** ταλάντωση.

Εφαρμογή 6

Έστω ότι η εξωτερική περιοδική δύναμη, που ενεργεί, δίνεται από την $F(t) = 24\sigma\nu\eta\mu 8t$. Να οριστεί το x , συνάρτηση του t και με τις ίδιες συνθήκες της προηγούμενης εφαρμογής.

Μαθηματική διατύπωση

Στην περίπτωση αυτή, η διαφορική εξίσωση είναι $\frac{6}{32} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 12x + 1.5 \cdot \frac{dx}{dt} = 24\sigma\nu\eta\mu 8t \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64x = 128\sigma\nu\eta\mu 8t$ με αρχικές συνθήκες πάλι $x = \frac{1}{3}$, $\frac{dx}{dt} = 0$ όταν $t = 0$

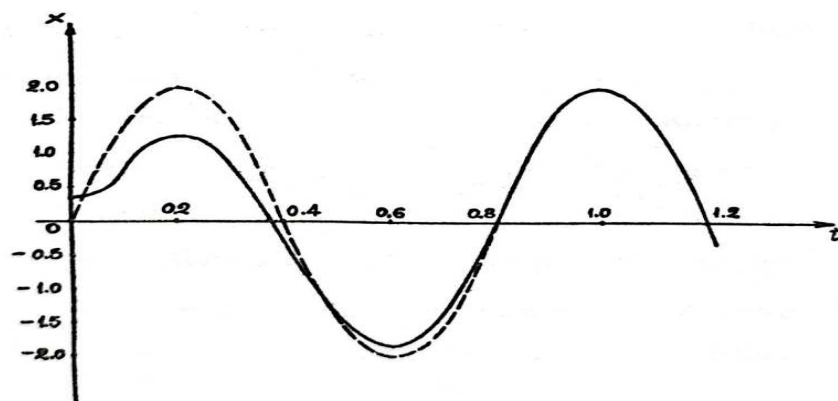
Λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64x = 128\sigma\nu\eta\mu(8t)$

Από τα προηγούμενα, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64x = 0$ είναι η $x_o = e^{-4t} \left(C_1 \cdot \sigma\nu\eta\mu(4\sqrt{3}t) + C_2 \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t) \right)$. Αν θεωρήσω μια μερική λύση της $x_p = A \cdot \eta\mu(8t) + B \cdot \sigma\nu\eta\mu(8t)$, βρίσκω $A = 2$ και $B = 0$

Άρα, η γενική λύση της $\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64x = 0$ είναι $x = e^{-4t} \left(C_1 \cdot \sigma\nu\eta\mu(4\sqrt{3}t) + C_2 \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t) \right) + 2 \cdot \eta\mu(8t)$ Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, βρίσκω ότι $c_1 = \frac{1}{3}$ και $c_2 = \frac{11\sqrt{3}}{9}$ Άρα, η γενική λύση της

$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 64x = 128\sigma\nu\eta\mu(8t)$ είναι η

$x = \frac{1}{9}e^{-4t} \left[3\sigma\nu\eta\mu(4\sqrt{3}t) - 11\sqrt{3} \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t) \right] + 2\eta\mu(8t)$ που η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη. Παρατηρώ ότι, οι όροι του 2^{ου} μέλους της $x = \frac{1}{9}e^{-4t} \left[3\sigma\nu\eta\mu(4\sqrt{3}t) - 11\sqrt{3} \cdot \eta\mu(4\sqrt{3}t) \right] + 2\eta\mu(8t)$ συμπεριλαμβανομένου και του e^{-4t} γίνονται αμελητέοι, όταν ο t είναι μεγάλος. Οι όροι αυτοί, που ονομάζονται μεταβατικοί, είναι σημαντικοί μόνον όταν ο t παίρνει πολύ μικρές τιμές. Οι μεταβατικοί όροι, όταν είναι σημαντικοί στη λύση της διαφορικής εξίσωσης, δίνουν την ονομασία μεταβατική λύση. Όταν όμως οι όροι αυτοί είναι αμελητέοι, απομένει ο όρος $2\eta\mu(8t)$ Τότε, ονομάζεται μόνιμος (ή σταθερός) όρος και η λύση ονομάζεται μόνιμη (ή σταθερή), λόγω της συμπεριφοράς του συστήματος, όταν οι συνθήκες γίνονται σταθερές. Είναι περιοδική συνάρτηση, της ίδιας περιόδου.



Γράφημα 11 Περιοδικές συναρτήσεις

5. Απλό εκκρεμές

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του απλού εκκρεμούς μήκους ℓ , όταν αυτό κινείται μέσα σε κάποιο μέσο, που προκαλεί αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας του, υπολογίζεται στη μηχανική ότι είναι $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$ όπου b , g , m , ℓ σταθερές και θ η γωνία στροφής. Στην περίπτωση πολύ μικρών ταλαντώσεων του εκκρεμούς, επειδή $\eta\mu\theta = \theta - \frac{\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\theta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$ δηλαδή, όταν η γωνία θ είναι πολύ μικρή, μπορώ (χωρίς μεγάλο σφάλμα), να θεωρήσω ότι $\eta\mu\theta = \theta$, οπότε η $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$ γίνεται $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0$

Οι λύσεις της $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$, προσεγγίζουν τις λύσεις της $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0$, εφόσον οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρές.

6. Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Φαινόμενο ταλάντωσης ανάλογο της μηχανικής ταλάντωσης, υπάρχει σε ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από πυκνωτή και πηνίο (κύκλωμα Thomson). Στο φαινόμενο αυτό, παρατηρείται φθίνουσα ταλάντωση που οφείλεται στην ωμική αντίσταση R του πηνίου. Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff, με ηλεκτρεγερτική δύναμη, που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου, ίση προς $-L \cdot \frac{di}{dt}$, έχω την εξίσωση $\frac{q}{c} - L \cdot \frac{di}{dt} = i \cdot R$. Παραγωγίζω την $\frac{q}{c} - L \cdot \frac{di}{dt} = i \cdot R$ ως προς t , θέτω $\frac{dq}{dt} = -i$ και παίρνω την εξίσωση $-\frac{i}{c} - L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{di}{dt} \cdot R$ ή $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = 0$ που είναι η διαφορική εξίσωση της ελεύθερης ταλάντωσης. Η λύση της $i(t)$, εξαρτάται από τις τιμές των L , c , R . Συγκρίνοντας την $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = 0$ με την $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 \cdot x = 0$, της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης που εξέτασα στα προβλήματα της μηχανικής,

συμπεραίνω ότι με h (συντελεστή απόσβεσης) είναι $h^2 = \frac{R}{2L} > 0$ και $k^2 = \frac{1}{L \cdot C}$, υποθέτω ότι $L \cdot C > 0$, οπότε:

1) $h < k \Rightarrow k^2 - h^2 > 0$ ή $R^2 < \frac{4L}{C}$, έχω μια φθίνουσα περιοδική ταλάντωση

(λύση της $L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$), την $i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi)$, όπου $\omega = \frac{1}{L \cdot C}$ (κυκλική συχνότητα)

2) Αν $h \geq k \Rightarrow k^2 - h^2 \leq 0$ ή $R^2 \geq \frac{4L}{C}$, έχω μια μη περιοδική ταλάντωση,

δηλαδή την ($h > k$), $i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot sh(\omega \cdot t + \varphi)$

3) Αν ($k = h$) τότε $i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t)$ με σταθερές c_1, c_2, φ , που υπολογίζονται κάθε φορά από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες. Μετά τον υπολογισμό του ρεύματος, μπορώ από τις σχέσεις $i = -\frac{dq}{dt} = -c \cdot \frac{du}{dt}$ να υπολογίσω την τάση U , που επικρατεί στους οπλισμούς του πυκνωτή. Για αρχικές συνθήκες $i = 0$, όταν $t = 0$ δηλαδή για $i(0) = 0$ και $U(0) = E$ (της πηγής) υπολογίζω από τις $i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi)$, $i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot sh(\omega \cdot t + \varphi)$, $\varphi = 0$, $A = \frac{E}{\omega \cdot L}$ και από την $i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t)$ προκύπτει ότι $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{E}{L}$, οπότε ο τύπος της συνάρτησης $i(t)$, για κάθε περίπτωση, δίνεται ως εξής:

- για την 1^η περίπτωση $\left(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right) : i(t) = \frac{E}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \eta\mu\omega t$
- για την 2^η περίπτωση $\left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right) : i(t) = \frac{E}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot sh\omega t$
- για την 3^η περίπτωση $\left(R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right) : i(t) = \frac{E}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$

Εφαρμογή 7

Στη ραδιοηλεκτρολογία, αν μια τρίοδη (ή πέντοδη) λυχνία, που στο κύκλωμα ανόδου της έχει τοποθετηθεί κύκλωμα ταλαντώσεων (πηνίο αυτεπαγωγής και χωρητικότητας), συζευγμένο με πηνίο συνδεδεμένο στο κύκλωμα εσχάρας-ανόδου, έχει την κατάλληλη διεύθυνση και τιμή, το προς ταλάντωση κύκλωμα αρχίζει να ταλαντώνεται, οπότε οι ταλαντώσεις του συντηρούνται από τη λυχνία. Ονομάζω:

m : την αμοιβαία επαγωγή μεταξύ της αυτεπαγωγής L του πηνίου της ανόδου και της αυτεπαγωγής L' του πηνίου της εσχάρας,

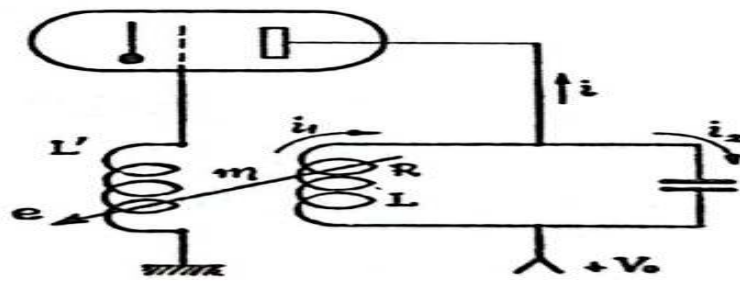
i_1, i_2 : τις στιγμιαίες τιμές του εναλλασσόμενου ρεύματος στα πηνία L , L' ,

i : τη στιγμιαία τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος στο κύκλωμα ανόδου,

V_o : τη συνεχή τάση της πηγής υψηλής τάσης,

k : τον συντελεστή ενίσχυσης της λυχνίας,

ρ : την εσωτερική αντίσταση της λυχνίας



Γράφημα 12 Τρίοδη λυχνία και κύκλωμα ταλαντώσεων

Αποδεικνύεται ότι η διαφορική εξίσωση που δίνει το ρεύμα $i_1(t)$ είναι η $L \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{L+km}{C \cdot \rho} \right) \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot \left(1 + \frac{R}{\rho} \right) = 0$ που είναι μια διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές, η οποία μπορεί να απλοποιηθεί στην $L \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{L+km}{C \cdot \rho} \right) \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0$ επειδή στην πράξη η R είναι κατά πολύ μικρότερη της ρ . Παρατηρώ ότι, η χαρακτηριστική εξίσωση της $L \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{L+km}{C \cdot \rho} \right) \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0$ είναι η $L \cdot r^2 + R_1 \cdot r + \frac{1}{C} = 0$, όπου $R_1 = R + \frac{L+km}{C \cdot \rho}$, με $\frac{L+km}{C \cdot \rho} \leq 0$, έχει 2 ρίζες μιγαδικές $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta i$, με $\alpha = \frac{R_1}{2L}$ και $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$. Άρα, η γενική λύση $i(t)$ είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση.

- 1) Αν $L + k \cdot m > 0$, τότε έχω φθίνουσα ταλάντωση, με αυξανόμενη απόσβεση.
- 2) Αν $R_1 = 0$, τότε έχω σταθερού πλάτους ταλάντωση με μηδενική απόσβεση.
- 3) Αν $R_1 < 0$, τότε έχω ρεύμα με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος.

Το παραπάνω παράδειγμα (πρόβλημα υπολογισμού της περιόδου $T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$ των ταλαντώσεων), αποτελεί την αντιπροσωπευτικότερη εφαρμογή των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Εφαρμογή 8

Επαγωγική αντίσταση $L=0.5$ H, συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση $R=6$ Ω, με πυκνωτή $C=0.02$ F, με γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος τάσης $24 \cdot \eta\mu 10t$ V, $t \geq 0$ και έναν διακόπτη k .

- α) Να οριστεί η διαφορική εξίσωση του στιγμιαίου φορτίου στον πυκνωτή.
- β) Να βρεθεί το φορτίο και το ρεύμα σε χρόνο t , αν το φορτίο στον πυκνωτή είναι μηδέν, όταν ο διακόπτης k είναι κλειστός στον χρόνο $t=0$.

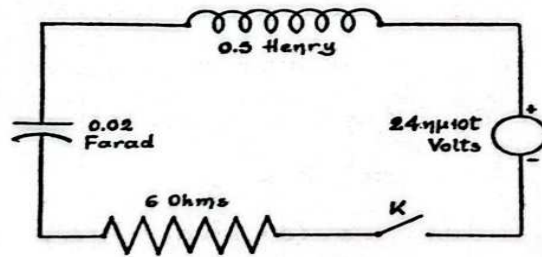
Λύση

α) Μαθηματική διατύπωση

Η πτώση τάσης λόγω της αντίστασης των 6 Ω, είναι $E_R = I \cdot R = 6 \cdot I$

Η πτώση τάσης λόγω της αντίστασης των 0.5 H, είναι $E_L = L \cdot \frac{dI}{dt} = 0.5 \cdot \frac{dI}{dt}$

Η πτώση τάσης λόγω του πυκνωτή των 0.02 F, είναι $E_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{0.02} = 50 \cdot Q$ Οπότε,



Γράφημα 13 Κύκλωμα RLC σε σειρά

από τον κανόνα του Kirchhoff $E = E_R + E_L + E_C$, έχω $6I + 0,5 \frac{dI}{dt} + 50Q = 24\eta\mu(10t)$

και επειδή $I = \frac{dQ}{dt}$, η $6I + 0,5 \frac{dI}{dt} + 50Q = 24\eta\mu(10t)$ γίνεται

$$6 \frac{dQ}{dt} + 0,5 \frac{d^2Q}{dt^2} + 50Q = 24\eta\mu(10t) \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 12 \frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\eta\mu(10t) \quad \text{με}$$

συνθήκες $Q = 0$ και $I = \frac{dQ}{dt} = 0$ κατά την $t = 0$

β) Λύση της $\frac{d^2Q}{dt^2} + 12 \frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\eta\mu(10t)$

Η χαρακτηριστική της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2Q}{dt^2} + 12 \frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\eta\mu(10t)$ είναι $r^2 + 12 \cdot r + 100 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = -6 \pm 8 \cdot i$,

δίνει τη γενική λύση της ομογενούς $Q_o = e^{-6t} \cdot [c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t) + c_2 \cdot \eta\mu(8t)]$

Υποθέτοντας ότι η μερική λύση της $\frac{d^2Q}{dt^2} + 12 \frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\eta\mu(10t)$ είναι της

μορφής $Q_p = A \cdot \eta\mu(10t) + B \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)$, βρίσκω $A = 0$, $B = \frac{-2}{5}$. Άρα, η γενική λύση

της $\frac{d^2Q}{dt^2} + 12 \cdot \frac{dQ}{dt} + 100 \cdot Q = 48 \cdot \eta\mu(10t)$ δοθέντος ότι ($Q_c = Q_o + Q_p$) είναι η εξής

$$Q_c = e^{-6t} [c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(8t) + c_2 \cdot \eta\mu(8t)] - \frac{2}{5} \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \quad \text{Από τις αρχικές συνθήκες,}$$

προσδιορίζονται τα $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{10}$ Άρα, η λύση, είναι

$$Q = \frac{e^{-6t}}{10} [4\sigma\upsilon\nu(8t) + 3\eta\mu(8t)] - \frac{2}{5} \sigma\upsilon\nu(10t)$$

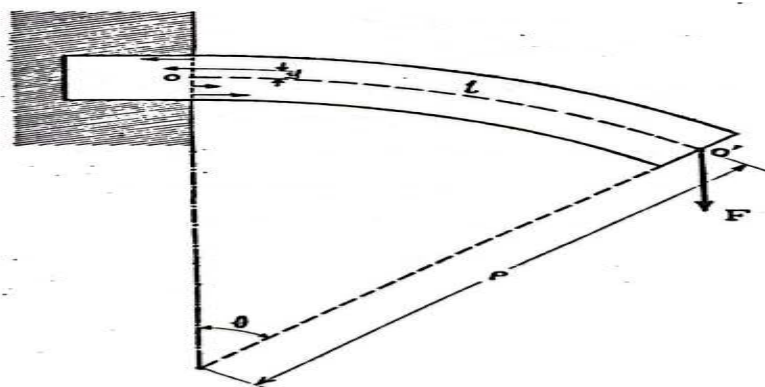
7. Αντοχή υλικών

Θα αναφερθώ στον τρόπο εξαγωγής του θεμελιώδους τύπου της αντοχής των υλικών, δηλαδή της κάμψης των δοκών. Για τον σκοπό αυτό και για λόγους απλούστευσης του εξεταζόμενου προβλήματος, θεωρώ οριζόντια δοκό, πακτωμένη μόνο στο ένα άκρο, ενώ στο άλλο άκρο της δέχεται κατακόρυφο φορτίο F .

Λύση

Αν OO' είναι το ουδέτερο στρώμα της δοκού, δηλαδή το στρώμα του οποίου δεν μεταβάλλεται το μήκος λόγω του φορτίου F και αποτελεί τη διαχωριστική

επιφάνεια της δοκού, που πάνω από αυτήν το υλικό της υφίσταται **εφελκυσμό**, ενώ κάτω από αυτήν **κατάθλιψη**.



Γράφημα 14 Περιστροφή οριζόντιας πακτωμένης δοκού

Αν όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, θεωρήσω ότι η δοκός λόγω της κάμψης της είναι τόξο ενός κύκλου, το ουδέτερο (ή μέσο) στρώμα θα έχει μήκος $\ell = \rho \cdot \theta$ όπου ℓ είναι το αρχικό μήκος της δοκού, το δε στρώμα, που απέχει απόσταση y από το μέσο στρώμα και το μήκος του αυξήθηκε κατά $d\ell$, είναι $\ell + d\ell = (\rho + y) \cdot \theta$

ή $d\ell = y \cdot \theta = y \cdot \frac{\ell}{\rho}$ με ανά μονάδα επιμήκυνσης την $i = \frac{d\ell}{\ell} = \frac{y}{\rho}$ Αν S είναι η τομή

της δοκού, a το πάχος της και dy μια αύξηση της απόστασης y από το μέσο στρώμα, τότε στην επιφάνεια $dS = a \cdot dy$ ασκείται μια δύναμη dF . Η ανά μονάδα επιφάνειας

δύναμη (η), είναι $\eta = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{a \cdot dy}$. Εφόσον, δεν υπερβαίνει το όριο ελαστικότητας

(Νόμος Hooke), η i είναι ανάλογη της η , δηλαδή $\eta = k \cdot i$ όπου k σταθερά, που

ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** E . Οπότε είναι $\eta = E \cdot i \Rightarrow \frac{dF}{a \cdot dy} = \frac{E \cdot y}{\rho}$ και

$dF = \frac{aE}{\rho} y \cdot dy$ από όπου το άθροισμα όλων των dF ισορροπεί το φορτίο F , που εφαρμόζεται στο δεξιό μέρος της δοκού.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών, ως προς το σημείο O , μεταξύ του αριστερού και του δεξιού μέρους της δοκού, θεωρώντας το σύστημα σε ισορροπία, έχω

$\int y \cdot dF - M = 0$ όπου $M = F \cdot I$ είναι η ροπή κάμψης. Από την $dF = \frac{aE}{\rho} y \cdot dy$,

πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της επί y , παίρνω $y \cdot dF = \frac{aE}{\rho} y^2 \cdot dy$

Ολοκληρώνοντας την $y \cdot dF = \frac{aE}{\rho} y^2 \cdot dy$, λόγω της $\int y \cdot dF - M = 0$, έχω

$\int_0^h y \cdot dF = M = \frac{E}{\rho} \int_0^h a y^2 \cdot dy$ Όμως το $(a \cdot dy) y^2 = dS y^2$ είναι η ροπή αδράνειας της

λωρίδας πάχους dy , ως προς το μέσο στρώμα. Αν I είναι η ροπή αδράνειας της τομής S , ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O , είναι $I = \int a y^2 \cdot dy$ και η

$\int_0^h y \cdot dF = M = \frac{E}{\rho} \int_0^h a y^2 \cdot dy$ δίνει $M = \frac{E}{\rho} \cdot I$ Η ακτίνα καμπυλότητας ρ , δίνεται από

τον τύπο $\rho = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$ Επειδή όμως τα βέλη των δοκών είναι πολύ μικρά, η κλίση

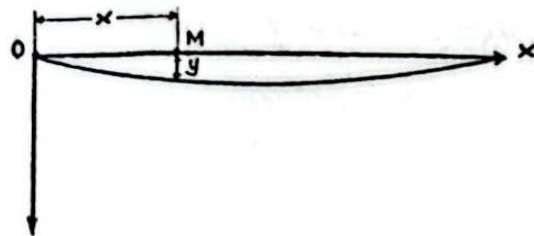
σε κάθε σημείο είναι πρακτικά $y' = 0$, οπότε από την $\rho = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$ παίρνω $\rho = \frac{1}{y''}$

Άρα, από την $M = \frac{E}{\rho} \cdot I$ έχω $M = E \cdot I \cdot y''$ δηλαδή $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$, που είναι ο ζητούμενος τύπος.

8. Υπολογισμός του βέλους μιας δοκού

Εφαρμογή του προηγούμενου, αποτελεί ο υπολογισμός του βέλους της κάμψης, που τείνει να εμφανίσει μια οριζόντια δοκός, η οποία στηρίζεται και στα δύο της άκρα σε στηρίγματα. Αν πάρω ως άξονα των x τον άξονα της δοκού και ονομάσω y την κατακόρυφη απομάκρυνση από την αρχική του θέση (οποιοδήποτε σημείου της δοκού) δηλαδή το βέλος της, έχω όπως στην περίπτωση της πακτωμένης δοκού τον τύπο $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$ όπου:

- I η ροπή αδράνειας της τομής S της δοκού, ως προς το κέντρο βάρους της,
- E το μέτρο της ελαστικότητας του μετάλλου,
- M το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων (που εφαρμόζονται δεξιά ή αριστερά της τομής) που παίρνω σε απόσταση x , όταν στον y περιλαμβάνουμε τις ροπές, που οφείλονται στην αντίδραση των στηριγμάτων
- ρ η ακτίνα καμπυλότητας της δοκού σε ένα οποιοδήποτε σημείο τετμημένης x . Ολοκληρώνοντας, 2 φορές, τη διαφορική εξίσωση (με σταθερό το 2^ο μέλος) παίρνω το βέλος (y) της δοκού, σε κάθε σημείο της.



Γράφημα 15 Βέλος δοκού y

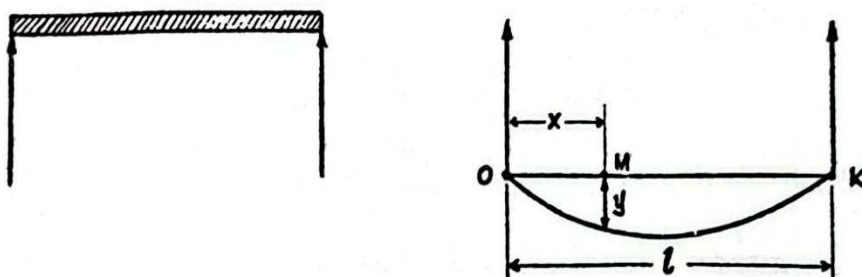
Εφαρμογή 9

Έστω οριζόντια δοκός μήκους ℓ , που πάνω της κατανέμεται ομοιόμορφα φορτίο F , ανά μονάδα μήκους. Παίρνω μια τομή M σε απόσταση x από το στήριγμα O , το οποίο όπως και το στήριγμα K ασκούν αντίδραση ίση με $\frac{1}{2} F \cdot \ell$. Η ροπή κάμψης M που οφείλεται στις 2 δυνάμεις που είναι αριστερά του M , βρίσκεται, ως προς το σημείο M , ίση με $M = \frac{1}{2} F \cdot \ell \cdot x - \frac{1}{2} F \cdot x^2$ διότι, το φορτίο, που κατανέμεται σε όλο το μήκος x είναι $F \cdot x$ και η ροπή του ως προς την τομή M , είναι $F \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} F \cdot x^2$,

επειδή ως προς το M, η ροπή του φορτίου αυτού είναι αντίθετης διεύθυνσης προς την $\frac{1}{2} F \cdot \ell$, που αντιδρά στο αριστερό μέρος.

Άρα, ο τύπος $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$ δίνει $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F \ell x}{2} - \frac{F x^2}{2} \right)$ την οποία, ολοκληρώνοντας 2 φορές, βρίσκω πρώτα $EI \frac{dy}{dx} = \frac{F \ell}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{F x^3}{6} + c_1$ και μετά $EI y = \frac{F \ell}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{F x^4}{24} + c_1 x + c_2$ Η $EI y = \frac{F \ell}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{F x^4}{24} + c_1 x + c_2$ όταν $x=0$, $y=0$ δίνει $c_2=0$ και όταν $x=\ell$, $y=0$ δίνει $c_1 = -\frac{F \cdot \ell^3}{24}$, οπότε η $EI y = \frac{F \ell}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{F x^4}{24} + c_1 x + c_2$ γίνεται $EI y = \frac{F \ell x^3}{12} - \frac{F x^4}{24} - \frac{F \ell^3 x}{24}$

Το βέλος όμως y , γίνεται μέγιστο στο μέσο της δοκού, δηλαδή σε απόσταση $OM = x = \frac{\ell}{2}$ και η τιμή του αυτή $y_{\max}$, είναι το βέλος που αποκτά η δοκός. Αυτή είναι $y_{\max} = \frac{5 \cdot F \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I} = k \cdot \frac{\ell^4}{I}$ άρα, μεταβάλλεται κατά αντίστροφο λόγο προς τη ροπή αδράνειας.



Γράφημα 16 Μέγιστο βέλος δοκού $y_{\max}$

9. Εξίσωση της ελαστικής καμπύλης και μέγιστη εκτροπή

Οριζόντια δοκός που στηρίζεται στα 2 άκρα της, φορτίζεται κάθετα προς τον άξονα της. Το βέλος που σχηματίζεται από την επίδραση των δυνάμεων του φορτίου, ονομάζεται **ελαστική καμπύλη** και αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των διατομών της δοκού, που είναι κάθετες προς τον άξονά της. Από τη μηχανική, είναι γνωστό ότι η εξίσωση της ελαστικής καμπύλης είναι $R = \frac{E \cdot I}{M}$ όπου

- R η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης,
- E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού,
- I η ροπή αδράνειας στο τυχόν σημείο,
- M η ροπή κάμψης.

Αν στην $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$, που δίνει το R, παραλείψω το $(y')^2$ (διότι η κλίση της ελαστικής καμπύλης είναι μικρή) τότε η $R = \frac{E \cdot I}{M}$ δίνει τη διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης

$\frac{1}{y''} = \frac{E \cdot I}{M} \Rightarrow y'' = \frac{M}{E \cdot I}$ με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατό να επιλύσω τα προβλήματα που αφορούν την κάμψη της δοκού.

Εφαρμογή 10

Οριζόντια δοκός μήκους $AB = \ell$ στηρίζεται ελεύθερα στα 2 άκρα της A, B και φορτίζεται με φορτίο q , ανά μονάδα μήκους. Να βρεθεί η εξίσωση της ελαστικής καμπύλης και η μέγιστη εκτροπή.

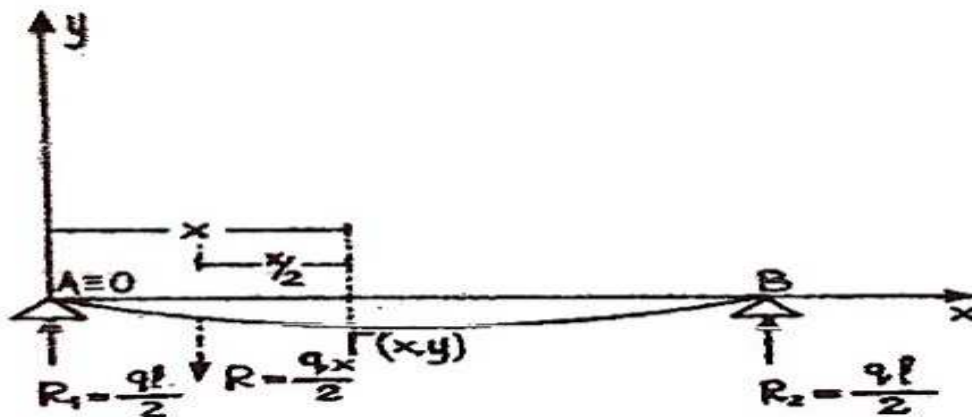
Λύση

Λαμβάνω ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων στο οποίο η οριζόντια διεύθυνση της δοκού ταυτίζεται με τον άξονα Ox και η αρχή των συντεταγμένων με το αριστερό άκρο της δοκού A. Το συνολικό φορτίο της δοκού είναι $q\ell$. Οι αντιδράσεις κατά μήκος του άξονα των x είναι μηδέν, ενώ κατά τον άξονα των y στις στηρίξεις A, B έχουν άθροισμα μηδέν. Άρα, $R_1 + R_2 - q\ell = 0$, ή λόγω συμμετρίας $R_1 = R_2 = \frac{q\ell}{2}$

Αν $\Gamma(x, y)$ είναι ένα τυχόν σημείο της ελαστικής καμπύλης, τότε στο τμήμα AΓ αυτής δρουν οι δυνάμεις:

α) $R_1 = \frac{q\ell}{2}$ σε απόσταση x από το Γ και με φορά προς τα πάνω (λαμβάνόμενη ως θετική).

β) $R = \frac{qx}{2}$ συγκεντρωμένη στο μέσο του τμήματος AΓ (δηλαδή σε απόσταση $\frac{x}{2}$) και με φορά προς τα κάτω (λαμβάνόμενη ως αρνητική).



Γράφημα 17 Μέγιστη εκτροπή οριζόντιας δοκού

Επειδή η ροπή κάμψης στο σημείο Γ είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών στα σημεία O, Γ , έχω $M = \frac{q\ell}{2} \cdot x - \frac{qx}{2} \cdot x = \frac{q\ell x}{2} - \frac{qx^2}{2}$ Άρα, με βάση την $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$ λαμβάνω τη διαφορική εξίσωση $y'' = \ell \left(\frac{qx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right)$ που είναι της μορφής $y^{(n)} = f(x)$

Η 1^η ολοκλήρωση δίνει $y' = \frac{q}{2E \cdot I} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + c_1$ και η 2^η ολοκλήρωση δίνει

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{\ell x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1 \cdot x + c_2$$

Στα στηρίγματα Α, Β έχω τις αρχικές συνθήκες για $x = 0$, $y = 0$ και για $x = \ell$, $y = 0$. Με αντικατάσταση στην $y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{\ell x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1 \cdot x + c_2$, βρίσκω $c_2 = 0$,

$$c_1 = \frac{-q\ell^3}{24E \cdot I} \quad \text{οπότε} \quad \eta \quad y = \frac{q}{2E \cdot I} \left(\frac{\ell x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1 \cdot x + c_2 \quad \text{γίνεται}$$

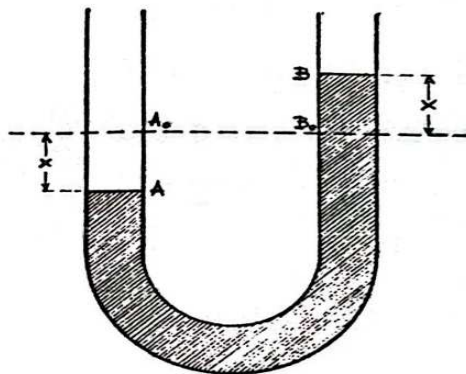
$y = \frac{q}{24E \cdot I} (2\ell x^3 - x^4 - \ell^3 x)$. Η μέγιστη εκτροπή λόγω συμμετρίας, βρίσκεται στο

μέσο της καμπύλης $x = \frac{\ell}{2}$, ισούται με $y_{\max} = \frac{-5q\ell^4}{384EI}$ και έχει αρνητική φορά.

10. Υδροστατική

Θα μελετήσω την κίνηση ενός υγρού που ισορροπεί εντός σωλήνα σχήματος U, όταν η ελεύθερη του επιφάνεια έχει απομακρυνθεί κατά x από την αρχική του στάθμη της κατάστασης της ηρεμίας, υπό την επίδραση δύναμης F . Θεωρώ τις τριβές αμελητέες, για αυτό το υγρό που περιέχει ο σωλήνας μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Αν S η διατομή του σωλήνα, ℓ το μήκος του, που έχει καταλάβει το υγρό και (μ) η ανά μονάδα όγκου μάζα του υγρού, τότε, η κινητήρια δύναμη F , που αντιστοιχεί προς το βάρος της στήλης ύδατος ύψους $2x$, είναι $F = S \cdot 2x \cdot \mu \cdot g$ και η μάζα m του υγρού είναι $m = S \cdot \ell \cdot \mu$



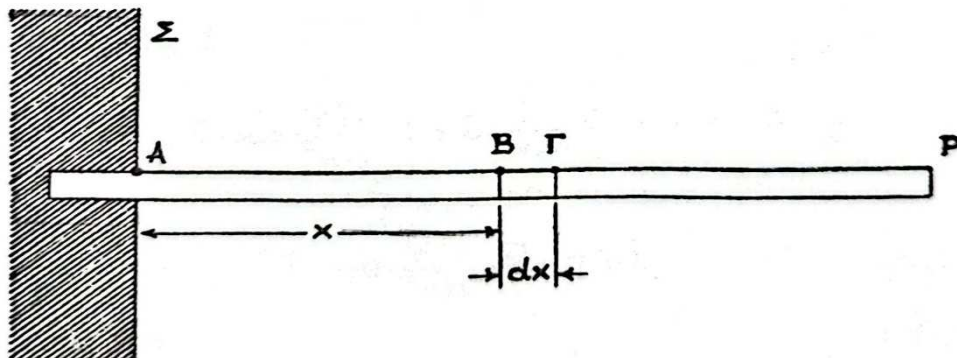
Γράφημα 18 Σωλήνας U

Άρα, ο θεμελιώδης νόμος της κίνησης που εκφράζεται από την εξίσωση $F = m \cdot \alpha$, δίνει $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ του σημείου, $(-)$ οφειλόμενου στο ότι η F έχει φορά τη φορά της μετατόπισης, δηλαδή από την αρχική στάθμη $A_0 B_0$, προς το Α για το αριστερό σκέλος του σωλήνα ή προς το Β για το δεξιό σκέλος του σωλήνα.

Η $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ από την $m = S \cdot \ell \cdot \mu$, γίνεται $-S \cdot 2 \cdot x \cdot \mu \cdot g = S \cdot \ell \cdot \mu \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$, ή $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-2g}{\ell} x$, ή $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$, όπου $k^2 = \frac{2g}{\ell}$. Από την $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ συμπεραίνω ότι έχω μια διαφορική εξίσωση της οικογένειας των ημιτονοειδών γραμμών, δηλαδή μια αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση, με ανάλογο τον υπολογισμό της περιόδου του εκκρεμούς, μήκους $\frac{\ell}{2}$, οπότε για το υγρό είναι $x = x_0 \cdot \eta\mu(k \cdot t - \phi)$ και $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$, όπου η T είναι ανεξάρτητη των S , μ δηλαδή της φύσης του υγρού, γεγονός που δεν θα συμβαίνει αν λάβω υπόψη τις τριβές και επομένως την απόσβεση της ταλάντωσης του υγρού μέσα στον σωλήνα.

11. Θερμότητα

Μια ράβδος P, θεωρητικά πολύ μεγάλου (άπειρου) μήκους, είναι πακτωμένη σε σώμα Σ (π.χ. τοίχο), του οποίου η θερμοκρασία είναι ανώτερη από εκείνη του περιβάλλοντος (αέρα). Να μελετηθεί η κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου, όταν αποκατασταθούν σταθερές συνθήκες. Η θερμότητα από το σώμα Σ , διαδίδεται διά της ράβδου P, η οποία συγχρόνως ψύχεται υπό την επενέργεια του περιβάλλοντος αέρα.



Γράφημα 19 Θέρμανση ισοπαχούς και ομογενούς οριζόντιας δοκού

Έστω ότι για το σημείο B, που απέχει από την αρχή A απόσταση x , η διαφορά της θερμοκρασίας του από αυτήν του περιβάλλοντος είναι θ . Ζητάμε τη συνάρτηση $\theta = f(x)$. Κατά τον Fourier, αν $x + dx$ η απόσταση AΓ, που η θερμοκρασία έγινε $\theta + d\theta$, η ποσότητα της θερμότητας που περνά, δια αγωγιμότητας, από τη διατομή S της ράβδου στην απόσταση x , είναι κατά τη διάρκεια 1 sec ίση με, $Q = -k \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot S$ όπου:

- k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, που εξαρτάται από το υλικό της ράβδου (ισούται με την ποσότητα της θερμότητας, που διέρχεται ανά δευτερόλεπτο από διατομή $\sigma = 1 \text{ cm}^2$ και για διαφορά θερμοκρασίας 1 βαθμού μεταξύ 2 διατομών, που απέχουν 1 cm)

- το $(-)$ είναι λόγω της ελάττωσης του θ , όταν αυξάνει η απόσταση x . Σε απόσταση $(x + dx)$ η ποσότητα, που δίνεται από την $Q = -k \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot S$ γίνεται

$$Q - dQ = -k \cdot \frac{d}{dx}(\theta - d\theta) \cdot S \quad \text{ή} \quad Q - dQ = -k \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot S + k \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx \cdot S \quad \text{όπου η ποσότητα}$$

$$dQ = -k \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx \cdot S \quad \text{χάνεται, διά μεταφοράς, από την παράπλευρη επιφάνεια του}$$

τμήματος ΒΓ, μήκους dx , της ράβδου. Αν ρ η περίμετρος της διατομής του τμήματος ΒΓ, α ο συντελεστής εξωτερικής θερμικής απώλειας, που εξαρτάται από την πυκνότητα της παράπλευρης επιφάνειας, του χρώματος της και γενικά της φύσης του τμήματος αυτού, η ποσότητα dQ υπολογίζεται και ως ακολούθως:

Το τμήμα ΒΓ έχει (εξωτερική) παράπλευρη επιφάνεια ίση με $(\rho \cdot dx)$, οπότε αν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι $0^\circ C$, η ποσότητα της θερμότητας, ανά δευτερόλεπτο, που χάνεται είναι $dQ = -\alpha \cdot \theta \cdot \rho \cdot dx$. Από τις $dQ = -k \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx \cdot S$,

$$dQ = -\alpha \cdot \theta \cdot \rho \cdot dx \quad \text{παίρνω} \quad -k \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx \cdot S = -\alpha \cdot \theta \cdot \rho \cdot dx, \quad \text{ή} \quad k \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot S = \alpha \cdot \theta \cdot \rho, \quad \text{ή}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\rho}{S} \cdot \theta = 0 \quad \text{Η} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\rho}{S} \cdot \theta = 0, \quad \text{θέτοντας} \quad \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\rho}{S} = m^2 \quad (m > 0) \quad \text{γίνεται}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad \text{που είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, με}$$

$$\text{σταθερούς συντελεστές. Η} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad \text{έχει γενική λύση την} \quad \theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

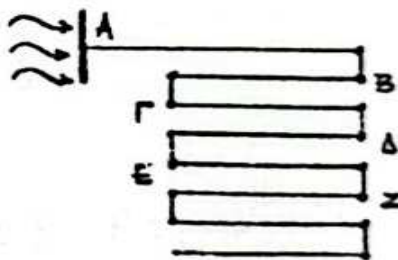
$$\text{διότι η χαρακτηριστική της} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad (\text{για} \quad \theta = e^{rx}) \quad \text{είναι} \quad r^2 - m^2 = 0, \quad \text{άρα έχει}$$

$$(\Delta > 0) \quad 2 \text{ ρίζες} \quad r_1 \neq r_2 \in R, \quad \text{τις} \quad r_{1,2} = \pm m. \quad \text{Για αρχικές συνθήκες} \quad x=0, \quad \theta = \theta_0, \quad \text{η}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad \text{δίνει} \quad \theta_0 = c_1 + c_2, \quad \text{στην περίπτωση δε, που η ράβδος είναι άπειρου}$$

μήκους ($x = \infty$), οπότε είναι $\theta = 0$, έχω $c_1 = 0$ και η λύση γίνεται $\theta = \theta_0 \cdot e^{-mx}$, δηλαδή παρατηρώ εκθετική μεταβολή (ελάττωση) της θερμοκρασίας. Η εφαρμογή που αναπτύξαμε παραπάνω, συναντάται σε αρκετά όργανα μετρήσεων, τα οποία χρησιμοποιεί η επιστήμη και η τεχνική.

Η βιολογία, χρησιμοποιεί όργανο το οποίο σαν κύριο εξάρτημα έχει αρκετά λεπτό μεταλλικό έλασμα, της μορφής του σχήματος. Η θερμότητα, που προσλαμβάνεται από κάποια πηγή στο σημείο Α, από το όργανο, διαχέεται στο έλασμα. Όντας η θερμότητα αυτή στο Α σταθερή, μετράμε σταθερές επίσης θερμοκρασίες στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ... του ελάσματος, πάντα όμως, μεταβαλλόμενες (ελαττωμένες εκθετικά) συναρτήσει της απόστασης τους από το Α.



Γράφημα 20 Μεταλλικό έλασμα

12. Καμπυλότητα – Ακτίνα καμπυλότητας

Η καμπυλότητα u μιας επίπεδης καμπύλης $y = f(x)$ ορίζεται από τον λόγο $\frac{dy}{dx}$, και λόγω $\varepsilon\varphi y$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο της καμπύλης που απέχει απόσταση S από ένα σταθερό σημείο της. Ο αντίστροφος λόγος $R = \frac{1}{u}$, ονομάζεται

ακτίνα καμπυλότητας. Επειδή $\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi y$, έχω $\frac{d^2y}{dx^2} = \varepsilon\varphi' y = (1 + \varepsilon\varphi^2 y) \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$

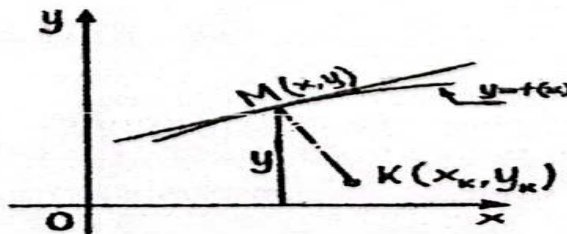
$$\text{Αλλά } \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ οπότε λαμβάνω τον τύπο } R = \frac{1}{u} = \frac{\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται πάντα προς το μέρος, προς το οποίο η καμπύλη στρέφει τα κοίλα. Έχει συντεταγμένες $x_K = x + \frac{y'(1 + y'^2)^2}{y''}$, $y_K = y + \frac{y \cdot y'' \pm (1 + y'^2)}{y''}$

Η ακτίνα καμπυλότητας, ενώ έχει την ίδια διεύθυνση με την κάθετο της καμπύλης, είναι:

- ομόρροπη προς αυτήν όταν τα y, y'' είναι ετερόσημα,
- αντίρροπη δε προς αυτή όταν τα y, y'' είναι ομόσημα.

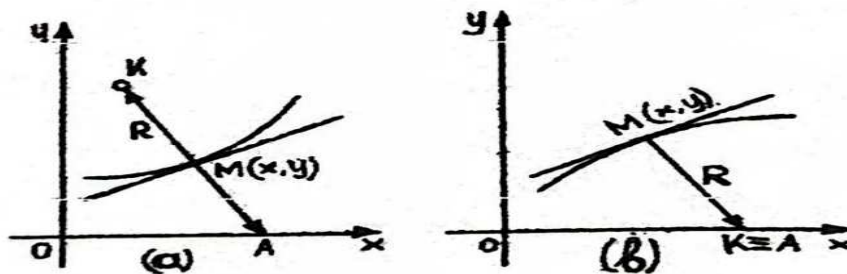
Προβλήματα που περιέχουν τις παραπάνω έννοιες οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης.



Γράφημα 21 Κέντρο καμπυλότητας

Εφαρμογή 11

Να βρεθεί η καμπύλη της οποίας η ακτίνα καμπυλότητας ισούται με το μέρος της καθέτου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x .



Γράφημα 22 Ακτίνες καμπυλότητας

Λύση

Από την $R = \frac{1}{u} = \frac{\left| 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right|^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ έχω $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ Εξάλλου από την

$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ είναι $MA = y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$ Επειδή θέλω να είναι $R = \pm MA$ (σχήματα

(α), (β)) έχω τη διαφορική εξίσωση $\frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y'} = \pm y \sqrt{1 + (y')^2} \Rightarrow 1 + (y')^2 = \pm y \cdot y''$

, θέτοντας $y' = p$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ η $1 + (y')^2 = \pm y \cdot y''$ γίνεται

$1 + p^2 = \pm p \cdot y \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \pm \frac{p}{1 + p^2} \cdot dp$ στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται. Άρα,

έχω τις λύσεις $c_1^2 (1 + p^2) = y^2$, $\frac{c_1^2}{1 + p^2} = y^2$

Στις διαφορικές εξισώσεις $\frac{c_1^2}{1 + p^2} = y^2$, οι μεταβλητές και πάλι χωρίζονται,

οπότε έχω αντίστοιχα τις λύσεις $y = c_1 \cdot \cosh \left| \frac{x - c_2}{c_1} \right|$ και $(x - c_2)^2 + y^2 = c_1^2$ Συνεπώς,

καμπύλες με τη δοθείσα ιδιότητα, είναι αλυσοειδείς ή κύκλοι με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα x .

Εφαρμογή 12

Να οριστεί η καμπύλη, που η ακτίνα καμπυλότητας σε κάθε σημείο της $M(x, y)$ είναι ίση με την κάθετο στο M και της ίδιας φοράς με αυτήν.

Λύση

Επειδή η ακτίνα στο σημείο $M(x, y)$ δίνεται από τον τύπο $R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}$, το δε

μήκος $|\overline{KM}|$ της καθέτου, στο ίδιο σημείο, μέχρι τον άξονα x είναι $|\overline{KM}| =$

$y \cdot [1 + (y')^2]^{1/2}$ και έχουν την ίδια φορά, είναι $\frac{[1 + (y')^2]^{1/2}}{y''} = y \cdot [1 + (y')^2]^{1/2}$

Μετά τις πράξεις, η εξίσωση $\frac{[1 + (y')^2]^{1/2}}{y''} = y \cdot [1 + (y')^2]^{1/2}$ γίνεται $y \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$

είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση με μεταβαλλόμενους συντελεστές, που γράφεται ως

$y \cdot y'' + (y')^2 = -1$ το 1^ο μέλος είναι η παράγωγος της συνάρτησης $y \cdot y'$, δηλαδή είναι μια τέλεια (πλήρης) διαφορική εξίσωση. Ολοκληρώνοντας αυτήν, παίρνω

$y \cdot y' + x - c_1 = 0 \Leftrightarrow y \cdot dy + (x - c_1) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(x - c_1)^2 = c \Leftrightarrow (x - c_1)^2 + y^2 = c_2$
 που είναι μία οικογένεια κύκλων με κέντρα $(c_1, 0)$ δηλαδή πάνω στον άξονα $x'x$

Εφαρμογή 13

Να οριστεί η καμπύλη, που η ακτίνα καμπυλότητας σε κάθε σημείο $M(x, y)$ είναι ίση με την κάθετο στο M , αντίθετης φοράς με αυτήν.

Λύση

Σε αντίθεση με την προηγούμενη εφαρμογή, επειδή η ακτίνα καμπυλότητας και η κάθετος στο $M(x, y)$ δεν έχουν την ίδια φορά, καταλήγω στη σχέση

$$\frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} = y \cdot [1 + (y')^2]^{1/2} \text{ που δίνει την } y \cdot y'' - (y')^2 - 1 = 0$$

Από την οποία θέτοντας όπου $y' = p$, προκύπτει $y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$,

$$\begin{aligned} \text{Παίρνω } y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{p \cdot dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = \ln|y| + c \Leftrightarrow \\ p^2 + 1 = c^2 \cdot y^2 \text{ με } \ln c_1 = c &\text{ Από την } p^2 + 1 = c^2 \cdot y^2 \text{ με } \ln c_1 = c \text{ παίρνω τελικά} \\ p = \pm \sqrt{c_1^2 \cdot y^2 - 1} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{c_1^2 \cdot y^2 - 1} &\Leftrightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{c_1^2 \cdot y^2 - 1}} = dx \quad \text{Ολοκληρώνοντας} \end{aligned}$$

$$\text{την } \frac{dy}{\pm \sqrt{c_1^2 \cdot y^2 - 1}} = dx \quad \text{έχω } \operatorname{arch}(c_1 \cdot y) = \pm c_1 x + c_2 \Leftrightarrow ch(\pm c_1 x + c_2) = c_1 \cdot y \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{c_1} \cdot ch(\pm c_1 x + c_2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2c_1} \cdot [e^{(\pm c_1 x + c_2)} + e^{-(\pm c_1 x + c_2)}]$$

$$\text{ή } y = \frac{A}{2} \cdot \left[e^{\frac{1}{A}(B \pm x)} + e^{-\frac{1}{A}(B \pm x)} \right], \text{ όπου } A = \frac{1}{c_1}, B = \frac{c_2}{c_1}$$

13. Ταλαντώσεις

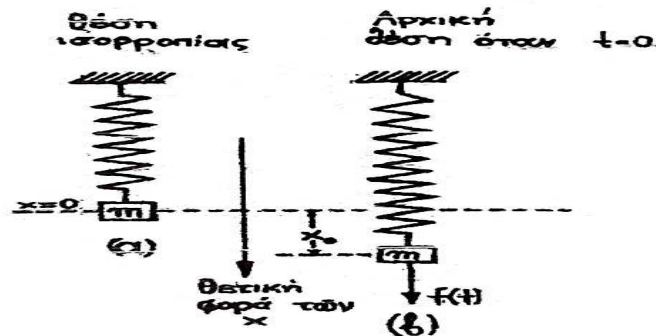
Οι ταλαντώσεις φυσικών συστημάτων, μελετώνται με βάση τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές που έχουν τη γενική μορφή $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t)$. Η συνάρτηση $f(t)$ και οι συντελεστές a_1, a_2 θεωρούνται

γνωστά, οι δε συμβολισμοί $\ddot{x}, \dot{x}$ σημαίνουν $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}$ αντίστοιχα. Αν στη διαφορική

εξίσωση $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t)$ είναι $f(t) = 0$ τότε η ταλάντωση λέγεται **ελεύθερη**, ενώ όταν $f(t) \neq 0$ η ταλάντωση καλείται **εξαναγκασμένη**. Ειδικότερες μορφές ταλαντώσεων στις παραπάνω περιπτώσεις είναι δυνατό να προκύψουν από τη διερεύνηση των ριζών της αντίστοιχης χαρακτηριστικής εξίσωσης της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t)$. Για τη μελέτη των ταλαντώσεων θα χρησιμοποιήσω πρώτα ένα απλό μηχανικό σύστημα και έπειτα θα μεταφέρω τα συμπεράσματα, που είναι εντελώς ανάλογα, σε ένα ηλεκτρικό σύστημα.

13.1 Ταλαντώσεις ελατηρίου

Το μηχανικό σύστημα που θα εξετάσω, αποτελείται από ένα ελικοειδές ελατήριο, στο ένα άκρο του οποίου έχει συνδεθεί μια μάζα, ενώ το άλλο άκρο του έχει στερεωθεί έτσι ώστε όταν το σύστημα ισορροπήσει, να βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Θέτω σε κίνηση τη μάζα m με μια αρχική ταχύτητα u_0 σε απόσταση x_0 από τη θέση ισορροπίας, ενώ συγχρόνως εφαρμόζω πάνω σε αυτή μια εξωτερική δύναμη $f(t)$, προς τη διεύθυνση της κατακόρυφου.



Γράφημα 23 Κατακόρυφη ταλάντωση ελατηρίου

Για ευκολία, εκλέγω ως θετική φορά των x , τη φορά προς τα κάτω και ως αρχή το κέντρο της μάζας m στη θέση ισορροπίας ($x = 0$). Υποθέτω ότι στη μάζα m ενεργούν κατά τη χρονική στιγμή t , εκτός από τη δύναμη $f(t)$ και οι δυνάμεις:

α) Μια δύναμη επαναφοράς, που οφείλεται στην ελαστικότητα του ελατηρίου και σύμφωνα με τον νόμο του Hooke είναι $-kx$, όπου $k > 0$ είναι η σταθερά του ελατηρίου.

β) Μια 3^η δύναμη, π.χ. η αντίσταση του αέρα ή η τριβή, που είναι ανάλογη της ταχύτητας αλλά έχει αντίθετο πρόσημο, η $-bx$ όπου $b > 0$ η σταθερά της αναλογίας.

Άρα, σύμφωνα με τα ανωτέρω, τη χρονική στιγμή t ενεργεί στη μάζα m συνολικά η δύναμη $F = -kx - bx + f(t)$. Από τον νόμο του Newton γνωρίζω ότι $F = m \cdot \ddot{x}$. Από τις $F = -kx - bx + f(t)$ και $F = m \cdot \ddot{x}$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση του συστήματος $m \cdot \ddot{x} = -kx - bx + f(t)$ ή $m \cdot \ddot{x} + bx + kx = f(t)$ που είναι γραμμική 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Εφόσον το σύστημα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά με αρχική ταχύτητα u_0 και από μια αρχική θέση x_0 , οι αρχικές συνθήκες για τη μελέτη των λύσεων της $m \cdot \ddot{x} + bx + kx = f(t)$ είναι $x(0) = x_0$, $x'(0) = u_0$.

Στην $m \cdot \ddot{x} + bx + kx = f(t)$, η επίδραση της βαρύτητας στη μάζα m δεν εμφανίζεται με ιδιαίτερο όρο, αλλά το αποτέλεσμα της υπολογίζεται αυτόματα, εφόσον η μέτρηση του x γίνεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) του συστήματος. Αν διαιρέσω την $m \cdot \ddot{x} + bx + kx = f(t)$ δια m και θέσω $2a = \frac{b}{m}$, $\gamma^2 = \frac{\kappa}{m}$, $F(t) = \frac{f(t)}{m}$, αυτή γράφεται $\ddot{x} + 2ax + \gamma^2 x = F(t)$ και είναι της γενικής μορφής $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t)$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της $\ddot{x} + 2ax + \gamma^2 x = F(t)$ είναι $r^2 + 2ar + \gamma^2 = 0$ με ρίζες $r_1 = -a + \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ και $r_2 = -a - \sqrt{a^2 - \gamma^2}$.

Άρα, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = a^2 - \gamma^2$. Με βάση τα ανωτέρω, θα εξετάσω πρώτα την περίπτωση που έχω ελεύθερη ταλάντωση, δηλαδή όταν είναι

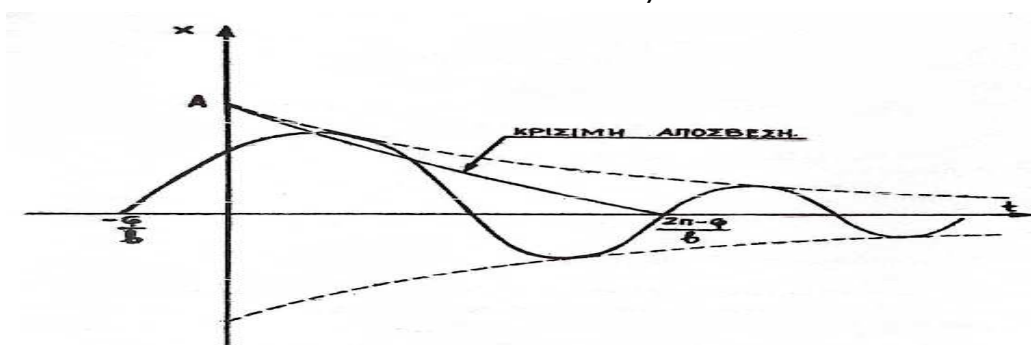
$F(t) = 0$, οπότε η $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = F(t)$ γίνεται $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = 0$. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

1) $a > \gamma$. Τότε $a^2 - \gamma^2 = \beta^2 > 0$, οι 2 ρίζες r_1, r_2 είναι πραγματικές και αρνητικές ($a > 0$). Άρα, η γενική λύση της $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = 0$ είναι $x = e^{-at} \cdot (c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t})$. Από την $x = e^{-at} \cdot (c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t})$ προκύπτει ότι η επιμήκυνση x τείνει ασυμπτωτικά προς το μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$ για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες. Τούτο σημαίνει ότι η κίνηση δεν έχει μορφή ταλαντώσεων περί τη θέση της ισορροπίας (απεριοδική κίνηση με ισχυρή απόσβεση).

2) $a = \gamma$. Τότε $a^2 - \gamma^2 = 0$, οι δε ρίζες της είναι πραγματικές και ίσες με $-a$. Η γενική λύση είναι $x = e^{-at} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t)$. Η επιμήκυνση και εδώ τείνει ασυμπτωτικά προς το μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$, αλλά με μικρότερη ταχύτητα (Απεριοδική κίνηση με κρίσιμη απόσβεση).

3) $a < \gamma$. Τότε $a^2 - \gamma^2 = -\beta^2 < 0$ και οι ρίζες είναι μιγαδικές και συζυγείς. Η γενική λύση είναι $x = e^{-at} (c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\beta t + c_2 \cdot \eta\mu\beta t)$ ή βάζοντας $c_1 = c \cdot \eta\mu\varphi$, $c_2 = c \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ είναι $x = e^{-at} (c \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\beta t + c \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu\beta t) \Rightarrow x = c \cdot e^{-at} \cdot \eta\mu(\beta t + \varphi)$

Το τριγωνομετρικό μέρος της λύσης $x = c \cdot e^{-at} \cdot \eta\mu(\beta t + \varphi)$ δείχνει ότι η κίνηση στην περίπτωση αυτή είναι αρμονική, με περίοδο $\frac{2\pi}{\beta}$ και συχνότητα $\frac{\beta}{2\pi}$. Ο παράγων



Γράφημα 24 Κρίσιμη και ασθενής απόσβεση

e^{-at} φανερώνει και εδώ ότι έχω απόσβεση των ταλαντώσεων (περιοδική κίνηση με ασθενή απόσβεση). Επειδή $f(t) = 0$, η συχνότητα της κίνησης ονομάζεται **φυσική συχνότητα** του συστήματος. Το παρακάτω σχήμα, παριστάνει γραφικά τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στις περιπτώσεις που έχω κρίσιμη και ασθενή απόσβεση.

4) $a = 0$. Στην περίπτωση αυτή η $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = F(t)$ γίνεται $\ddot{x} + \gamma^2 x = 0$, οι δε ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\pm i\gamma$. Άρα, η γενική λύση της είναι $x = c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma t + c_2 \cdot \eta\mu\gamma t$ ή $x = A \cdot \sin(\gamma t + \varphi)$. Η $x = A \cdot \sin(\gamma t + \varphi)$ είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης της οποίας ακολουθεί το σύστημα.

Θα εξετάσω την περίπτωση που $f(t) \neq 0$, δηλαδή όταν έχω εξαναγκασμένη ταλάντωση. Επειδή η $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = F(t)$ είναι πλήρης διαφορική εξίσωση, η γενική της λύση είναι $x = x_o + x_\mu$, όπου

x_o είναι η γενική λύση της ομογενούς,

x_μ είναι η μερική λύση της πλήρους.

Στις πρακτικές εφαρμογές, μια συνήθης μορφή της $f(t)$ είναι $f(t) = A \cdot \eta\mu(\omega t + \sigma)$ όπου A, ω, σ είναι σταθερές. Ας λάβω $\sigma = \frac{\pi}{2}$, τότε είναι $f(t) = A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$. Μια μερική λύση της $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \gamma^2 x = F(t)$ είναι η ακόλουθη:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\mu = A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t + B_1 \cdot \eta\mu\omega t \\ \dot{x}_\mu = -\omega A_1 \cdot \eta\mu\omega t + \omega B_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \\ x_\mu = -\omega^2 A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t - \omega^2 B_1 \cdot \eta\mu\omega t \end{array} \right\} \quad (1)$$

Μετά την αντικατάσταση των $f(t) = A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$ και (1) στη διαφορική εξίσωση, έχω

$$A_1 = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{(\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cdot A, \quad B_1 = \frac{2\alpha\omega}{(\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cdot A \quad \text{Τα } A_1, B_1 \text{ γράφονται}$$

απλούστερα με τη βοήθεια των αντικαταστάσεων:

$$r^2 = (\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2, \quad a = 2\alpha\omega, \quad b = \gamma^2 - \omega^2, \quad c = r \quad \text{όπου}$$

a, b, c πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Έτσι έχω

$$\eta\mu\lambda = \frac{a}{c} = \frac{2\alpha\omega}{r}, \quad \sigma\upsilon\nu\lambda = \frac{b}{c} = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{r} \quad \text{Άρα, οι}$$



$$A_1 = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{(\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cdot A, \quad B_1 = \frac{2\alpha\omega}{(\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \cdot A$$

γράφονται $A_1 = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{r^2} \cdot A = \frac{A}{r} \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda$, $B_1 = \frac{2\alpha\omega}{r^2} \cdot A = \frac{A}{r} \eta\mu\lambda$ άρα, η μερική λύση x_μ ,

γίνεται $x_\mu = \frac{A}{r} \sigma\upsilon\nu\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \frac{A}{r} \eta\mu\lambda \cdot \eta\mu(\omega t) \Rightarrow x_\mu = \frac{A}{r} \sigma\upsilon\nu(\omega t - \lambda)$ Αν τώρα

πάρω ως γενική λύση x_o της ομογενούς, μια από τις περιπτώσεις που είδα στις ελεύθερες ταλαντώσεις π.χ. την περίπτωση 3, η γενική λύση της $f(t) = A \sigma\upsilon\nu(\omega t)$

είναι $x = x_o + x_\mu \Rightarrow x = c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \eta\mu(\beta t + \varphi) + \frac{A}{r} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t - \lambda)$ όπου A, c, φ, ω είναι

σταθερές, τα δε r, λ προσδιορίζονται από τις σχέσεις $r^2 = (\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$,

$$\eta\mu\lambda = \frac{a}{c} = \frac{2\alpha\omega}{r} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\lambda = \frac{b}{c} = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{r} \quad \text{Από την}$$

$x = c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \eta\mu(\beta t + \varphi) + \frac{A}{r} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t - \lambda)$ συνάγω ότι μετά από την πάροδο μακρού

χρόνου ($t \rightarrow \infty$), ο 1^{ος} όρος θα τείνει να μηδενιστεί (περιοδική κίνηση με ασθενή απόσβεση) και ότι η μόνη κίνηση θα είναι πλέον η εξαναγκασμένη ταλάντωση της μάζας m , όπως αυτό δίνεται από τη μερική λύση (2^{ος} όρος). Για αυτό, ο 1^{ος} όρος στην

$x = c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \eta\mu(\beta t + \varphi) + \frac{A}{r} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t - \lambda)$ ονομάζεται **μεταβατικός όρος** ενώ ο 2^{ος} όρος

ονομάζεται **σταθερής κατάστασης**.

Ο όρος σταθερής κατάστασης είναι μια ταλάντωση με περίοδο $\frac{2\pi}{\omega}$, συχνότητα

$\frac{\omega}{2\pi}$, πλάτος $\frac{A}{r}$ και γωνία φάση λ . Στην ειδική περίπτωση που είναι $r = 0$, από την

$r^2 = (\gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$, πρέπει να είναι $\alpha=0, \gamma=\omega$, η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\ddot{x} + \gamma^2 x = A \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma t) \quad \text{Αν} \quad \gamma \alpha \quad \tau\eta\nu \quad \ddot{x} + \gamma^2 x = A \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma t) \quad \lambda \acute{\alpha}\beta\omega$$

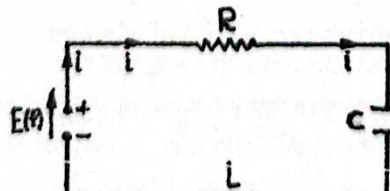
$$x_o = c_1 \sigma\upsilon\nu(\gamma t) + c_2 \eta\mu(\gamma t) \quad \text{και} \quad x_\mu = \frac{A}{2\gamma} \cdot t \cdot \eta\mu(\gamma t), \quad \text{τότε έχω τη γενική λύση}$$

$$c_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma t) + c_2 \cdot \eta\mu(\gamma t) + \frac{A}{2\gamma} \cdot t \cdot \eta\mu(\gamma t) \quad \text{στην οποία οι 2 πρώτοι όροι είναι}$$

φραγμένοι διότι $|\eta\mu\gamma t| < 1$ και $|\sigma\upsilon\nu\gamma t| < 1$ αλλά ο τελευταίος όρος δεν είναι φραγμένος, εφόσον περιέχει τον μεταβλητό παράγοντα t . Έτσι, όταν το t μεγαλώνει, τότε το πλάτος των ταλαντώσεων γίνεται συνεχώς μεγαλύτερο, το δε φαινόμενο ονομάζεται **συντονισμός**.

14. Ηλεκτρικά κυκλώματα

Θα εξετάσω τώρα ένα R, L, C ηλεκτρικό κύκλωμα, που αποτελείται από μια αντίσταση R, από ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C.



Γράφημα 25 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Η ΗΕΔ σε καθένα από τα παραπάνω στοιχεία δίνεται αντίστοιχα από τους τύπους $E_1 = R \cdot i$, $E_2 = L \cdot \frac{di}{dt}$, $E_3 = \frac{1}{C} \cdot q$. Αν τώρα στο κύκλωμα εφαρμόσω και μια εξωτερική ΗΕΔ $E(t)$, τότε επειδή από τον νόμο του Kirchhoff πρέπει $E_1 + E_2 + E_3 = E(t)$, με αντικατάσταση προκύπτει η διαφορική εξίσωση του κυκλώματος

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E(t). \quad \text{Επειδή} \quad \text{είναι} \quad i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \quad \eta$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E(t) \quad \gamma\acute{\iota}\nu\epsilon\tau\alpha\iota \quad L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{1}{L} \cdot E(t) \quad \text{που είναι γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς}$$

συντελεστές. Οι αρχικές συνθήκες για το q είναι $q(0) = q_o$, $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = i(0) = i_o$.

Αν παραγωγίσω την $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{1}{L} \cdot E(t)$ ως προς t , θα πάρω την

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot \frac{dE(t)}{dt} \quad \text{που δίνει απ' ευθείας το } i \text{ ως συνάρτηση του χρόνου.}$$

Η 2^η από τις παραπάνω αρχικές συνθήκες στην περίπτωση αυτή, γίνεται

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{L} \cdot E(0) - \frac{R}{L} \cdot i(0) - \frac{1}{LC} \cdot q_o \quad \text{που προκύπτει από την } R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E(t)$$

όταν τη λύσω ως προς $\frac{di}{dt}$ και βάλω $(t = 0)$. Παρατηρώ ότι το ρεύμα, μπορεί να βρεθεί

είτε λύνοντας την $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot \frac{dE(t)}{dt}$ απ' ευθείας ή λύνοντας την $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{1}{L} \cdot E(t)$ για την εύρεση του φορτίου q και έπειτα με παραγωγή του q ως προς t $\left(\frac{dq}{dt} = i\right)$

Παρατηρώ ότι οι $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{1}{L} \cdot E(t)$ και $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot \frac{dE(t)}{dt}$ είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με την $\ddot{x} + 2a\dot{x} + \gamma^2 x = F(t)$ από την ταλάντωση του ελατηρίου (ή γενικότερα της $m \cdot \ddot{x} + b\dot{x} + \kappa x = f(t)$), διαμορφώνοντας κατάλληλα τους συντελεστές, οπότε και οι λύσεις τους έχουν ακριβώς την ίδια μορφή. Τούτο σημαίνει ότι, αν $E(t) = 0$ τότε έχω και εδώ ισχυρή, κρίσιμη ή ασθενή απόσβεση ανάλογα με το σημείο της διακρίνουσας $\Delta = R^2 - 4 \cdot \frac{L}{C}$ στη χαρακτηριστική εξίσωση της

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{1}{L} \cdot E(t) \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot \frac{dE(t)}{dt}$$

Αν επιπλέον είναι και $R = 0$, τότε η κίνηση είναι απλή αρμονική. Τέλος, αν $E(t) \neq 0$, τότε η γενική λύση είναι της μορφής $x = x_o + x_\mu$, η δε μορφή της x_μ εξαρτάται από τη μορφή της $E(t)$. Έτσι, αν π.χ. $E(t) = E_0 \eta \mu \omega t$, η γενική λύση εδώ αποτελείται από έναν μεταβατικό όρο που προέρχεται από τη x_o και από έναν όρο σταθερής κατάστασης, που αντιστοιχεί στη μερική λύση.

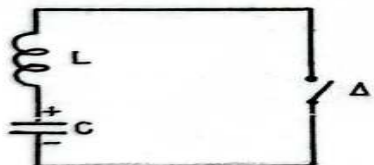
Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η συμπεριφορά των 2 συστημάτων είναι εντελώς ανάλογη, με βάση την αντιστοιχία στους συντελεστές:

- μάζα $m \rightarrow$ αυτεπαγωγή L
- συντελεστής τριβής $b \rightarrow$ αντίσταση R
- συντελεστής ελαστικότητας ελατηρίου $k \rightarrow$ αντίστροφος της χωρητικότητας

του πυκνωτή $\frac{1}{C}$

Εφαρμογή 14

Ηλεκτρικό κύκλωμα περιέχει σε σειρά πηνίο αυτεπαγωγής L και φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C . Να βρεθεί το φορτίο q του πυκνωτή σε κάθε χρονική στιγμή, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ . Υποθέτω ότι το κύκλωμα δεν έχει απώλειες.



Γράφημα 26 Κύκλωμα LC σε σειρά

Λύση

Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δηλαδή μόλις κυκλοφορήσει ρεύμα στο κύκλωμα λόγω της εκφόρτισης του πυκνωτή, εμφανίζεται στα άκρα του πηνίου μια

αυτεπαγωγική τάση που η στιγμιαία τιμή της είναι $-L \frac{di}{dt}$. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή που εκφορτίζεται είναι $\frac{q}{c}$. Άρα, έχω $-L \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{c}$ ή $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0$

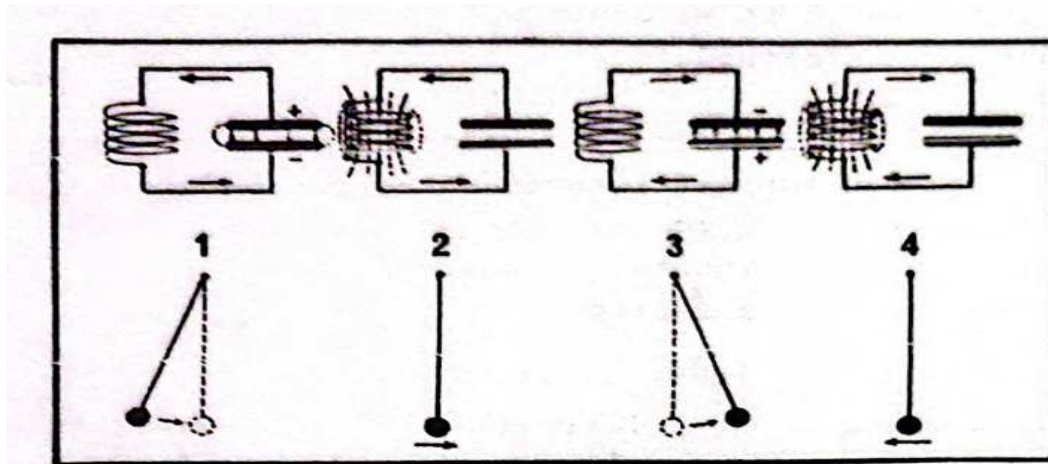
Η εξίσωση αυτή είναι αντίστοιχη με τη διαφορική εξίσωση που βρήκαμε στην προηγούμενη εφαρμογή. Άρα, η $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0$ εκφράζει μια αμείωτη αρμονική ταλάντωση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αναλογία μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής ταλάντωσης. Με τις αρχικές συνθήκες $q(0) = q_0$, $q'(0) = 0$ η γενική λύση της

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0 \quad \text{είναι} \quad q = c_1 \sigma \nu \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) + c_2 \eta \mu \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) \quad \text{γίνεται}$$

$q = q_0 \sigma \nu \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t \right)$ Από τη σχέση αυτή, βλέπω ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\rho} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad \text{Έτσι, καταλήγω στον γνωστό τύπο του Thomson. Στις}$$

προηγούμενες εφαρμογές οι συνθήκες που πραγματοποιήθηκαν τα φαινόμενα θεωρήθηκαν ιδανικές. Στην πραγματικότητα όμως, πάντα υπάρχουν παθητικές αντιστάσεις που αλλοιώνουν την εξέλιξη του φαινομένου και επομένως το μαθηματικό μοντέλο που το εκφράζει, αλλάζει μορφή. Αυτό θα φανεί στις δύο επόμενες εφαρμογές.



Γράφημα 27 Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Εφαρμογή 15

Ηλεκτρικό κύκλωμα περιέχει σε σειρά πηνίο αυτεπαγωγής L , ωμική αντίσταση R και φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C . Να βρεθεί το φορτίο q του πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη Δ .

Λύση

Μόλις κλείσει ο διακόπτης, δηλαδή μόλις κυκλοφορήσει ρεύμα στο κύκλωμα λόγω της εκφόρτωσης του πυκνωτή, εμφανίζονται οι παρακάτω τάσεις:

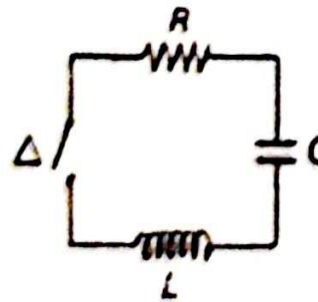
α) στα άκρα του πηνίου $-L \frac{d^2q}{dt^2}$

β) στα άκρα της αντίστασης $-R \frac{dq}{dt}$

γ) στα άκρα του πυκνωτή $\frac{q}{C}$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff για την τάση, έχω

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \text{H}$$



χαρακτηριστική εξίσωση της $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$ είναι $k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$ με ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} \quad \text{Ανάλογα τώρα με τις τιμές των } R, L, \text{ δηλαδή}$$

ανάλογα με το πρόσημο της Δ , διακρίνω 3 περιπτώσεις λύσεων. Οι αρχικές συνθήκες είναι $q(0) = q_0$ και $q'(0) = 0$

α) Αν $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta < 0$, βρίσκω τη μερική λύση της

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0, \text{ που είναι η συνάρτηση } q = Ae^{-\mu t} \sin(\omega t - \varphi) \text{ η οποία εκφράζει}$$

μια **φθίνουσα ταλάντωση** με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

β) Αν $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta > 0$, τότε η μερική λύση της $k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$

$$\text{είναι } q = Ae^{\kappa_1 t} + Be^{\kappa_2 t} \quad \text{όπου} \quad A = \frac{q_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4}{CR^2}}} + 1 \right] \quad B = \frac{q_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4}{CR^2}}} - 1 \right]. \quad \text{H}$$

$q = Ae^{\kappa_1 t} + Be^{\kappa_2 t}$ εκφράζει μια **ισχυρή απόσβεση του φορτίου**.

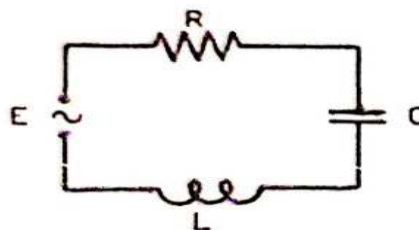
γ) Αν $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, δηλαδή αν $\Delta = 0$, η μερική λύση της $k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$ είναι

$q = q_0 e^{-\mu t} (1 + \mu t)$ Η $q = q_0 e^{-\mu t} (1 + \mu t)$ είναι μία μη περιοδική φθίνουσα συνάρτηση και ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση**. Οι εφαρμογές που εξέτασα μέχρι τώρα αναφέρονταν σε ταλαντώσεις κλειστών συστημάτων. Τώρα θα μελετήσω συστήματα στα οποία επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις. Οι ταλαντώσεις σε αυτή την περίπτωση περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = \varphi(t)$, όπου $x = x(t)$. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη που η εξωτερική δύναμη είναι περιοδική, οπότε $\varphi(t)$ θα είναι της μορφής $F_0 \sin \omega t$ ή $F_0 \eta \mu \omega t$. Η $x'' + 2\mu x' + \lambda^2 x = \varphi(t)$ είναι το μαθηματικό μοντέλο του φαινομένου που ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**.

Εφαρμογή 16

Ηλεκτρικό κύκλωμα περιέχει σε σειρά πηνίο αυτεπαγωγής L , ωμική αντίσταση R , πυκνωτή χωρητικότητας C και πηγή εναλλασσόμενης τάσης $E = E_0 \eta \mu(\omega t)$. Να βρεθεί το φορτίο q του πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή.

Λύση



Γράφημα 28 Κύκλωμα RLC σε σειρά

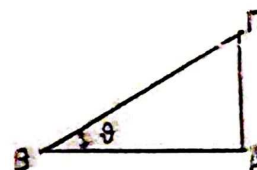
Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff για τις τάσεις έχω $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \eta \mu(\omega t)$ ή $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = \frac{E_0}{L} \eta \mu(\omega t)$ Αν θέσω $\frac{1}{CL} = \lambda^2$, $\frac{E_0}{L} = \epsilon$, η $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = \frac{E_0}{L} \eta \mu(\omega t)$ γίνεται $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\mu \frac{dq}{dt} + \lambda^2 q = \epsilon \eta \mu(\omega t)$ η οποία είναι μη ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης και εκφράζει μία εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η λύση της $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\mu \frac{dq}{dt} + \lambda^2 q = \epsilon \eta \mu(\omega t)$ είναι άθροισμα της γενικής λύσης q_1 της αντίστοιχης ομογενούς και μίας μερικής λύσης q_2 αυτής. Η μερική λύση της $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\mu \frac{dq}{dt} + \lambda^2 q = \epsilon \eta \mu(\omega t)$, είναι $q_2 = B_1 \eta \mu(\omega t) + B_2 \sigma \upsilon \nu(\omega t)$

$$\text{όπου } B_1 = \frac{\epsilon_0 (\lambda^2 - \omega^2)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2} \text{ και } B_2 = \frac{-\epsilon_0 (2\mu\omega)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

α) Αν $\nu = 0$ η $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\mu \frac{dq}{dt} + \lambda^2 q = \epsilon \eta \mu(\omega t)$ γίνεται $\frac{d^2 q}{dt^2} + \lambda^2 q = \epsilon_0 \eta \mu(\omega t)$ με μερική λύση την $q_2 = \frac{\epsilon_0}{\lambda^2 - \omega^2} \eta \mu(\omega t)$. Η $\frac{d^2 q}{dt^2} + \lambda^2 q = \epsilon_0 \eta \mu(\omega t)$ εκφράζει μία αμείωτη ταλάντωση. Επειδή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $q_1 = q_1 \sigma \upsilon \nu(\lambda t - \phi)$ η γενική λύση της $\frac{d^2 q}{dt^2} + \lambda^2 q = \epsilon_0 \eta \mu(\omega t)$ είναι $q = q_1 \sigma \upsilon \nu(\lambda t - \phi) + \frac{\epsilon_0}{\lambda^2 - \omega^2} \eta \mu(\omega t)$

Όταν $\omega \rightarrow \lambda$, τότε το πλάτος της ταλάντωσης τείνει στο άπειρο. Στο όριο, έχω συντονισμό και η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θεωρείται μηδενική.

β) Αν $\mu \neq 0$, η γενική λύση της $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\mu \frac{dq}{dt} + \lambda^2 q = \epsilon \eta \mu(\omega t)$ είναι $q = c e^{-\mu t} \sigma \upsilon \nu(\lambda t - \phi) + \frac{\epsilon_0}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}} \eta \mu(\omega t - \theta)$, όπου θ η γωνία Β του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $(AB) = \lambda^2 - \omega^2$, $(B\Gamma) = \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$, $(ΑΓ) = 2\mu\omega$.



Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

- Αναστασιάδη, Ι. και Γεωργανοπούλου, Γ. (1967). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Β', Θεσσαλονίκη.
- Αντωνόπουλου, Π. (1975). *Ασκήσεις διαφορικών εξισώσεων*, Πάτρα, ΟΕΔΒ.
- Αντωνόπουλου, Π. (1983). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Βαρελά, Γ. (1970). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Α', Θεσσαλονίκη.
- Βασιλείου, Φ. (1970). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Ι και ΙΙ.
- Βουλασίκη, Σ. (1981). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά II*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Α' και Β'
- Γκαρούτσος, Γ. (1990). *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Β' έκδοση, Αθήνα, εκδόσεις spin.
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1968). *Γενικά μαθηματικά*.
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1967). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Β' και Γ', Αθήνα.
- Κάππου, Δ. (1962). *Μαθήματα αναλύσεως – απειροστικός λογισμός*, Αθήνα
- Λαζαρίδη, Λ. (1974). *Στοιχεία μαθηματικής αναλύσεως*, Λάρισα.
- Λαζαρίδη, Λ. (1981). *Εφαρμοσμένα μαθηματικά*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μακρυγιάννη, Α. (1986). *Μαθηματικά II*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μπαρμπάνη, Β. (1970). *Μαθήματα διαφορικών εξισώσεων*, Πάτρα
- Μπίτη, Γ. (1973). *Ασκήσεις ανωτέρων μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη.
- Παντελίδη, Γ. (1974). *Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Β' και Γ', Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1977). *Μαθηματική ανάλυση*, τόμοι 1, 2, Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1979). *Μαθήματα αναλύσεως*, Αθήνα, εκδόσεις Ρώσση.
- Παπαμιχαήλ, Δ. (1966). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, Αθήνα.
- Σοφιανός, Γ. (1984). *Μαθηματικά III*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Φλωρά, Μ. (1963). *Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Α' και Β', Θεσσαλονίκη.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία από μετάφραση

- Apostol, T.M. (1989). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός*, τόμοι Ι και ΙΙ, Αθήνα, εκδόσεις Πεχλιβανίδη – Blaisdell.
- Bronson, R. (1978). *Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις*, μετάφραση Περσίδης, Schaum's outlines series.
- Quinet, J. (1970). *Στοιχεία ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι 3 και 4.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Chirgwin, B. and Plumpton, C.A. (1970). *A course of mathematics for engineers and scientists*, volume 1 and 2, Pergamon press.
- Courant, R. (1934). *Differential and integral calculus*, 2nd edition, volume 1, New York University.
- Jeffrey, A. (1979). *Mathematics for engineers and scientists*, Nelson and sons Ltd.
- Lambe, C. and Tranter, C. (1967). *Differential equations for engineers and scientists*, London.
- Pipes, L. and Harvill, L. (1970). *Applied mathematics for engineers and physicists*, McGraw-Hill.
- Rainville, E. and Bedient, Ph. (1969). *Elementary differential equations*, London, Macmillan.
- Smith, P. (1989). *Calculus differential and integral*.