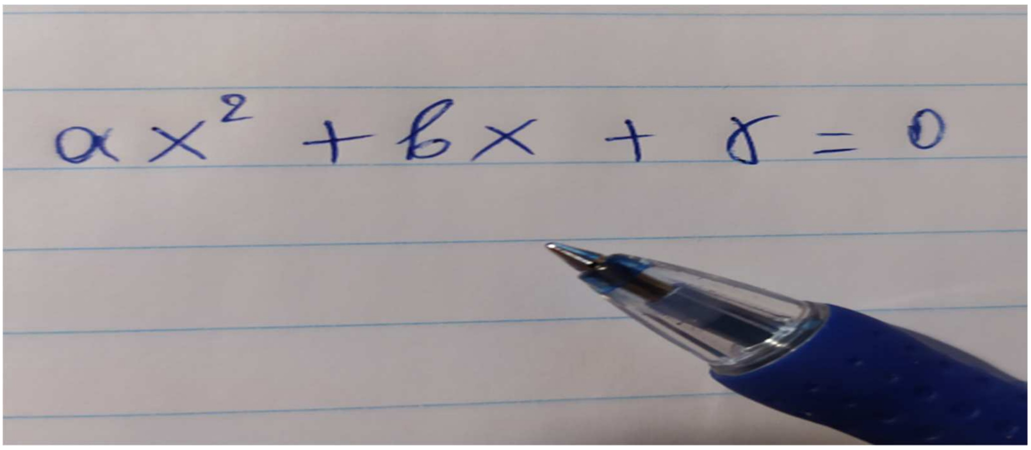
Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών



Πτυχιακή εργασία

Μελέτη γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Σπουδαστές: Κοκολιός Εμμανουήλ (ΑΜ **9051)**
Μαραγκός Γεώργιος (ΑΜ **9067)**

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd,PhD)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.12.2023
Ημερομηνία κατάθεσης: ….03.2026
Ημερομηνία εξέτασης: ….05.2026

Α/Α	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (PhD) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (PhD) Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (Msc) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Λέξεις κλειδιά

Ανηγμένη μορφή ευθείας, μη κεντρική καμπύλη 2ου βαθμού, κέντρο καμπύλης, εξισώσεις του κέντρου, κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή), παράλληλη μεταφορά αξόνων, μετασχηματισμός εξισώσεων, νέα αρχή του συστήματος των συντεταγμένων, σύστημα αναφοράς, εξίσωση φανταστικής έλλειψης, εκφυλισμένη (υπερβολή, έλλειψη), κανονική εξίσωση (παραβολής, υπερβολής), κύριος (ή εστιακός) άξονας της έλλειψης, διακρίνουσα, ορίζουσα, κεντρική καμπύλη (ή κωνική με κέντρο), τύπος του Bhaskara

Περίληψη

Η γενική β–βάθμια εξίσωση, αποτελεί μία βασική έννοια των μαθηματικών με εφαρμογές σε τομείς όπως η φυσική, η οικονομία, η μηχανική και η στατιστική. Η μελέτη της, είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της αντίστοιχης θεωρίας. Εφαρμόζεται στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων και περιλαμβάνει:

- την ανάλυση των λύσεων της,
- την ταξινόμηση των εξισώσεων, σε βασικές κατηγορίες
- τη σύνδεση της εξίσωσης με άλλες μαθηματικές έννοιες (κωνικές τομές, αλγεβρικές ταυτότητες).

Οι εξισώσεις 2ου βαθμού είναι βασικό εργαλείο, διότι:

- Περιγράφουν τα φυσικά φαινόμενα (ροή, αντίσταση, καύση)
- Χρησιμοποιούνται σε προβλήματα βελτιστοποίησης
- Εμφανίζονται σε καμπύλες απόδοσης

Στα πλοία του εμπορικού ναυτικού, βοηθούν στη λήψη πρακτικών αποφάσεων για:

- τη μείωση της κατανάλωσης του καυσίμου,
- την αύξηση της απόδοσης των μηχανών και τη διασφάλιση της ασφαλούς λειτουργίας τους
- την πρόβλεψη της συμπεριφοράς διαφόρων συστημάτων.

Περιεχόμενα

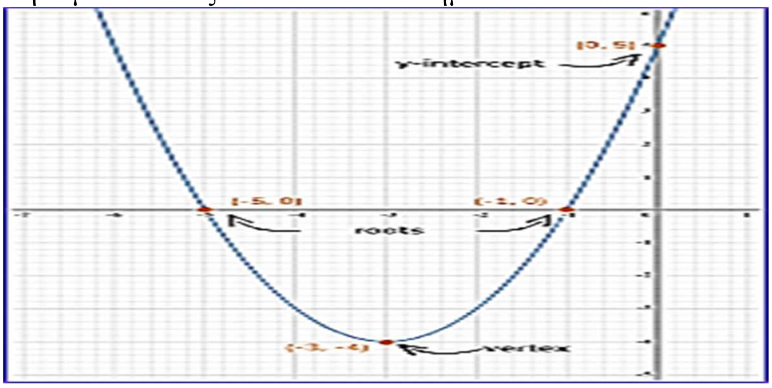
1. Λύση της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης

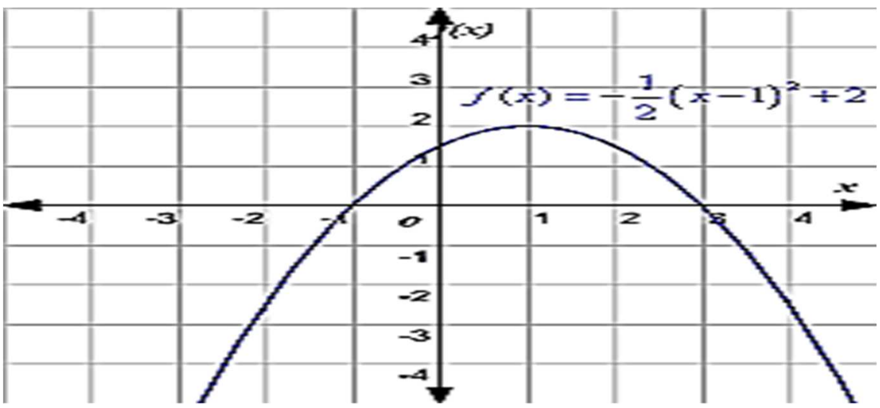
Χρησιμοποιείται ο τύπος της ρητής λύσης (ή τύπος του δισδιάστατου ριζοσπαστικού κανόνα ή τύπος του Bhaskara). Η λύση της $ax^2+bx+c=0$ δίνεται από τον τύπο $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (προέκυψε εφαρμόζοντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης του τετραγώνου και χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ταυτότητες). Το κλειδί για τη λύση είναι η διακρίνουσα $\Delta=b^2-4ac$, που καθορίζει το πλήθος και τη φύση των λύσεων της εξίσωσης.

1.1 Είδη ριζών και γεωμετρική ερμηνεία

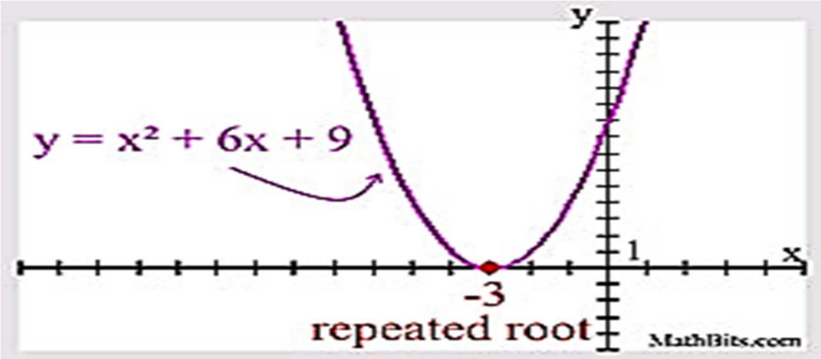
Η $ax^2+bx+c=0$ παριστάνεται ως μία παραβολή, που ανάλογα με το πρόσημο του a, στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω $(a>0)$ ή προς τα κάτω $(a<0)$. Οι ρίζες της εξίσωσης αντιστοιχούν στα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα xx' Το πλήθος και η φύση των ριζών εξαρτώνται από την τιμή της $\Delta=b^2-4ac$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης χωρίζονται σε τρεις βασικές περιπτώσεις.

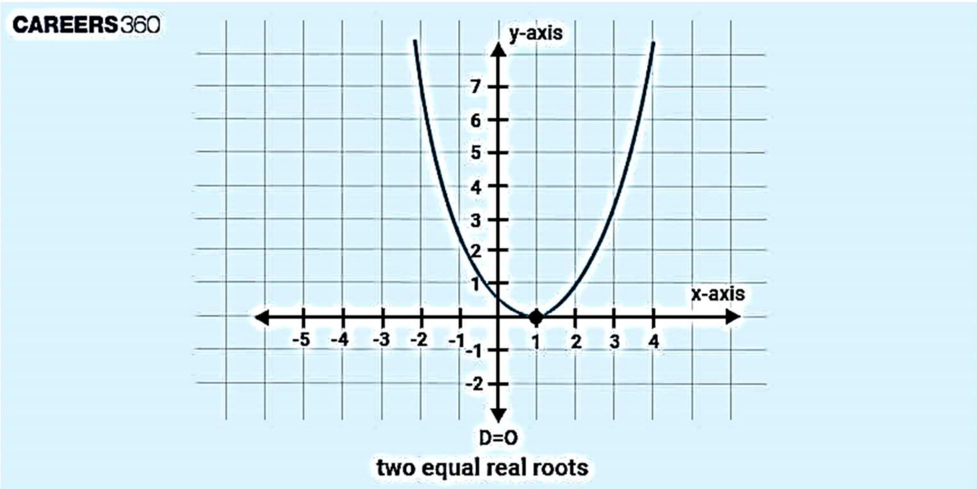
- $\Delta>0$ Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και διαφορετικές λύσεις και η παραβολή τέμνει τον άξονα xx' σε δύο σημεία



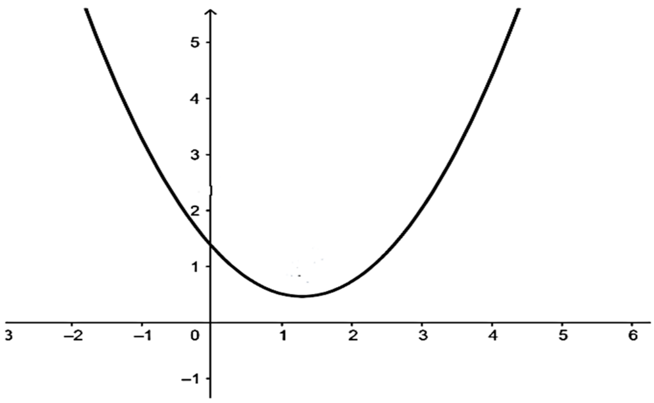


- $\Delta=0$ Η εξίσωση έχει μία πραγματική λύση, η οποία είναι διπλή (ή επαναλαμβανόμενη) και η παραβολή τέμνει τον άξονα xx' σε ένα μόνο σημείο (κορυφή της παραβολής)





- $\Delta < 0$ Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις, αλλά δύο μιγαδικές (ή φανταστικές) λύσεις και η παραβολή δεν τέμνει τον άξονα xx', υποδεικνύοντας την έλλειψη πραγματικών λύσεων.



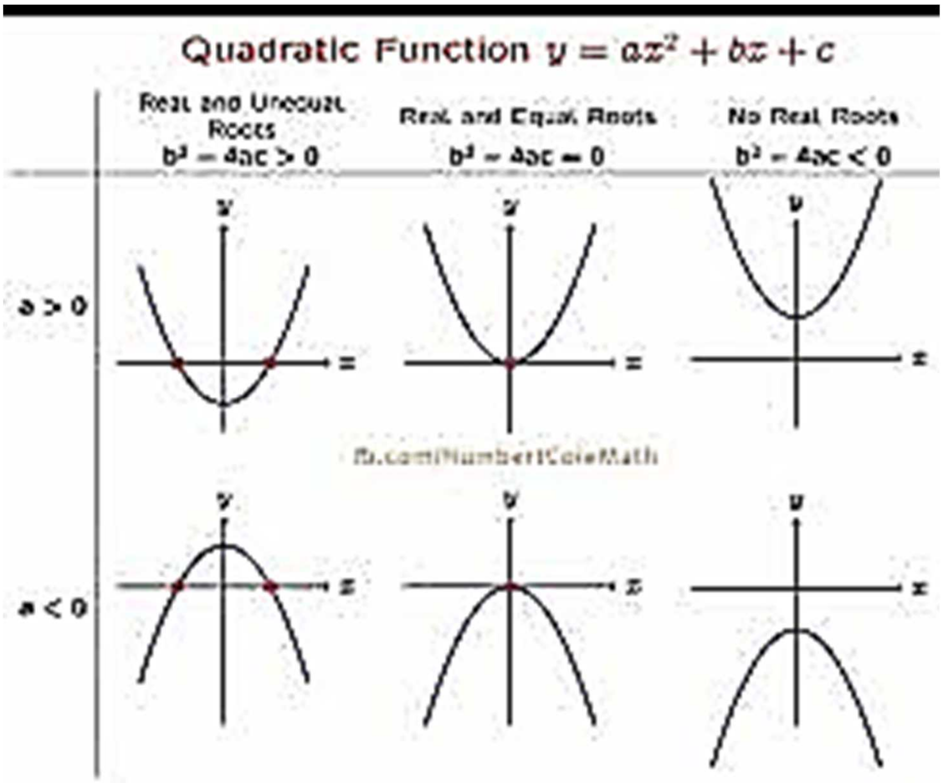
Αυτή η ταξινόμηση, βοηθά στην κατανόηση της κατανομής των ριζών και στη σύνδεση με γεωμετρικές ή φυσικές έννοιες.

Οι 6 δυνατές περιπτώσεις (συνδυασμοί τιμών του συντελεστή α και της τιμής της διακρίνουσας) γραφικών παραστάσεων, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

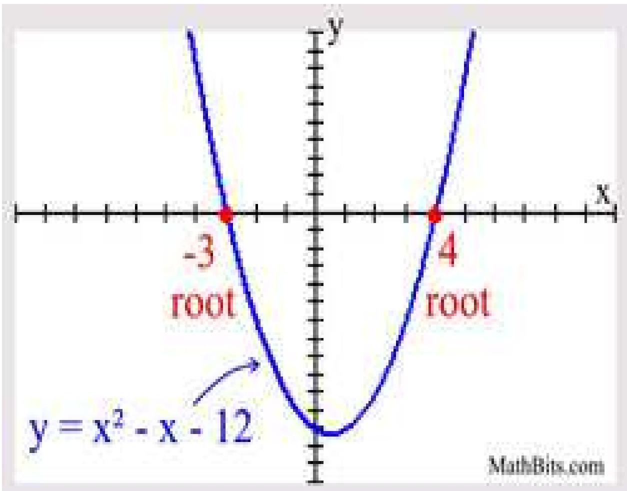
Σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα yy' είναι το $(0,c)$

Σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα είναι τα:

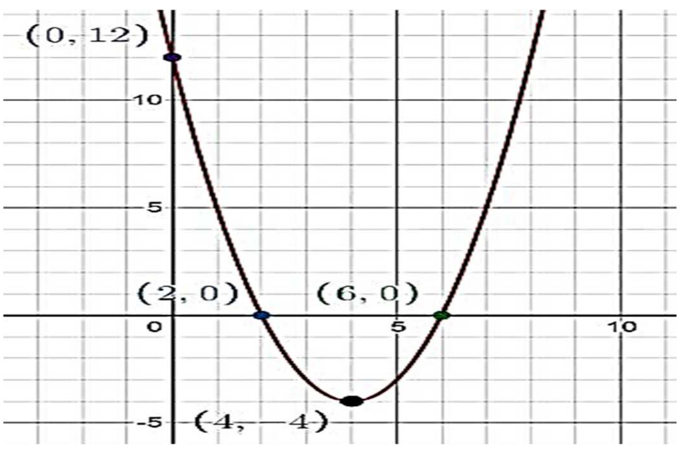
- $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ για θετική διακρίνουσα Δ,
- $(x_1,0)$, $(x_1,0)$ για μηδενική διακρίνουσα Δ
- $(z_1,0)$, $(z_2,0)$ για αρνητική διακρίνουσα Δ, όπου $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$



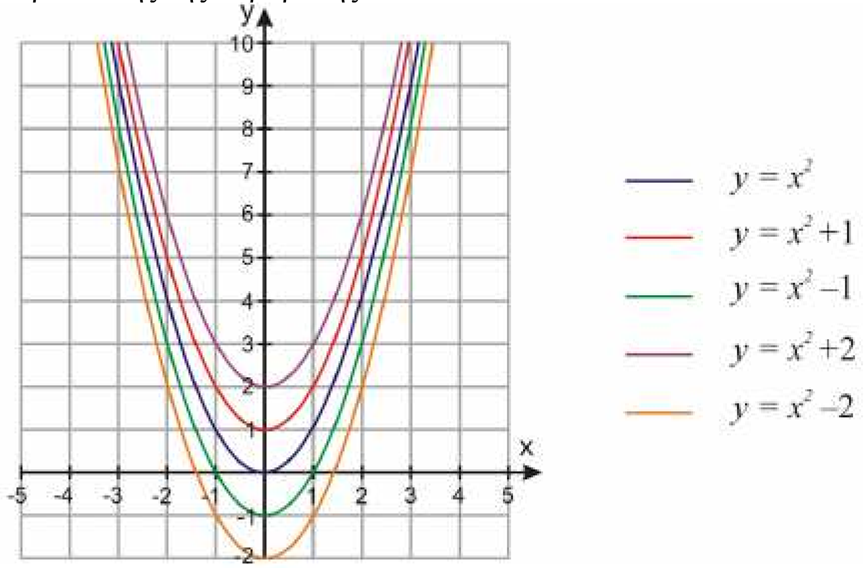
$a = 1 > 0$
$b = -1$
$c = -12 < 0$
$\Delta = 49$
$x_1 = -3$
$x_2 = 4$
$P = \frac{c}{a} = -12$
$P = x_1 \cdot x_2 = -12$

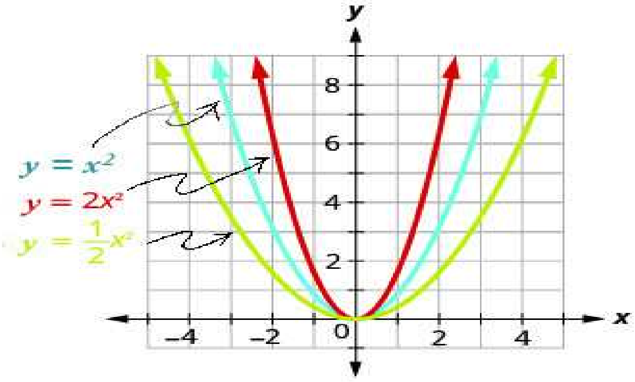


$a = 1 > 0$
$b = -8$
$c = 12 > 0$
$\Delta = 16$
$x_1 = 2$
$x_2 = 6$
$P = \frac{c}{a} = 12$
$P = x_1 \cdot x_2 = 12$

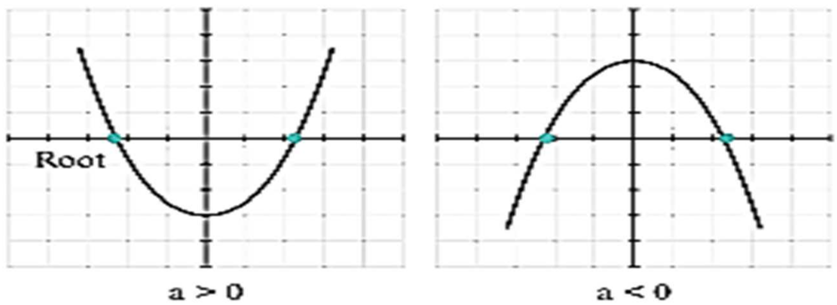


• Η τιμή του συντελεστή α, καθορίζει πόσο κοντά (ή μακριά) στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της, δηλαδή στην ευθεία $x = \frac{-b}{2a}$ κείτονται τα σημεία της γραφικής παράστασης της παραβολής.

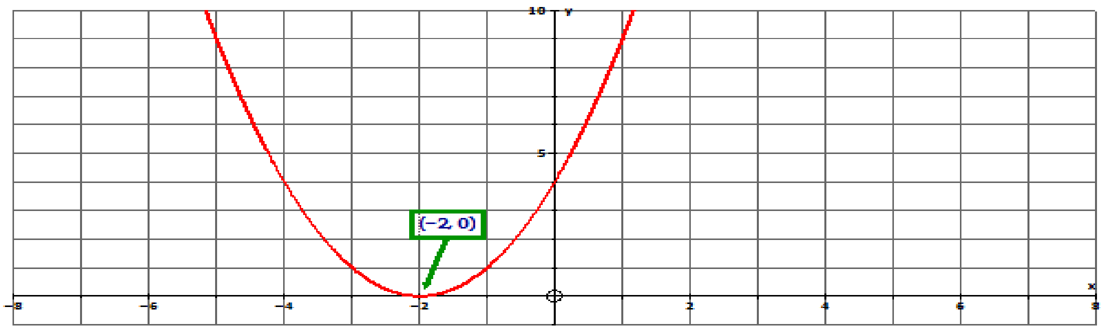




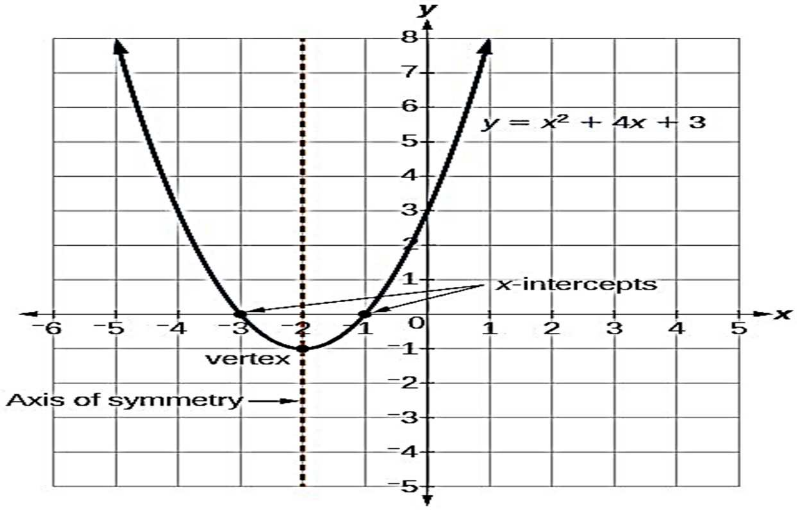
• Η παραβολή, παρουσιάζει ολικό μέγιστο όταν $a < 0$ και ολικό ελάχιστο όταν $a > 0$



Η ακόλουθη γραφική παράσταση, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(-2,0)$



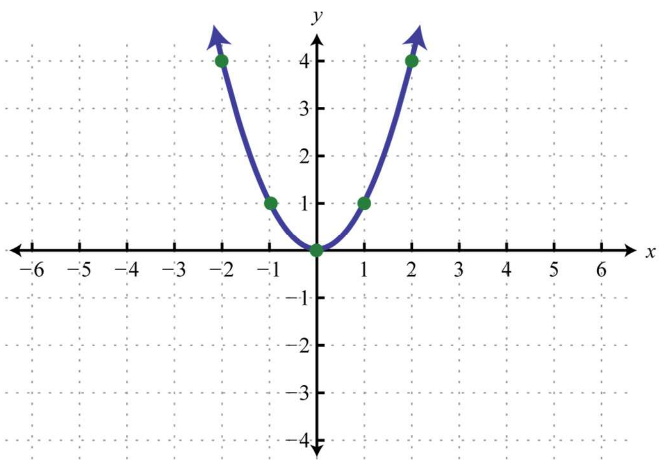
• Άξονας συμμετρίας της παραβολής, είναι η ευθεία $x = \frac{-b}{2a}$



• Οι συντεταγμένες των σημείων της παραβολής (γραφική παράστασης του τριωνύμου) επαληθεύουν τον τύπο $ax^2 + bx + c = 0$

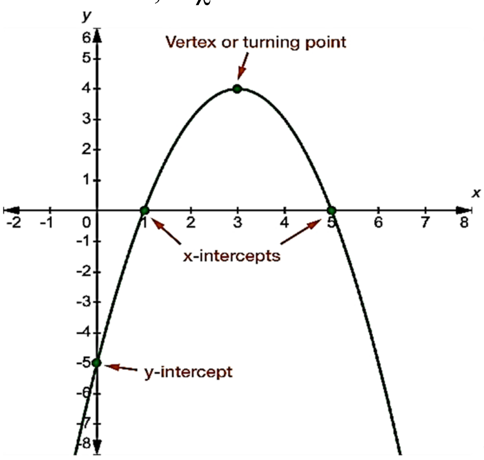
$f(x) = x^2$

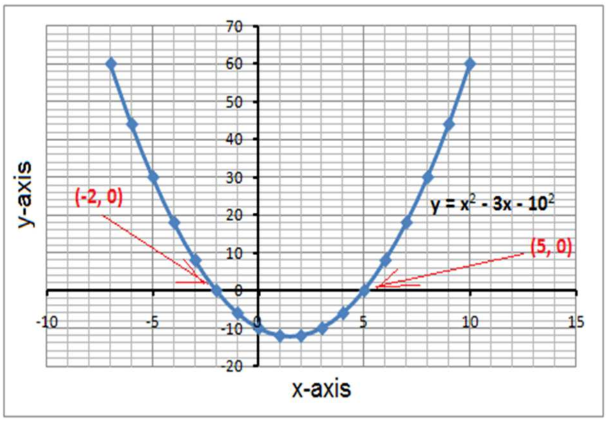
x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



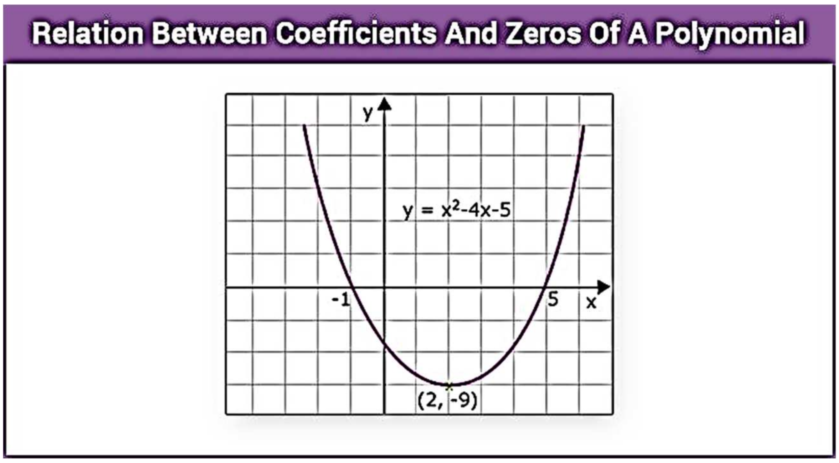
• Για $a < 0$, που τα κοίλα είναι στραμμένα προς τα κάτω, η παραβολή είναι γνησίως αύξουσα όταν $x < \frac{-b}{2a}$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x > \frac{-b}{2a}$

• Για $a > 0$, ισχύουν τα αντίθετα.

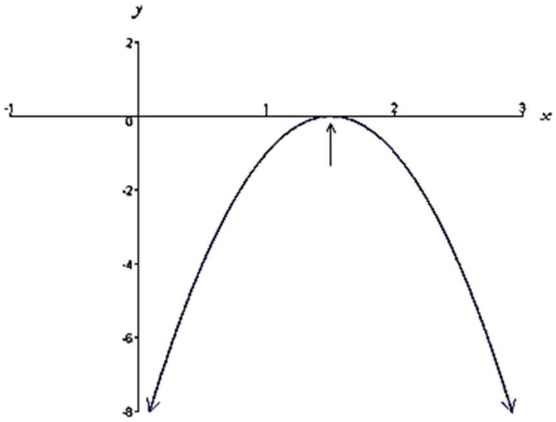




• Για $a > 0$, όταν $x \to \pm\infty$ τότε $y \to +\infty$



• Για $a < 0$, όταν $x \to \pm\infty$ τότε $y \to -\infty$



2. Εισαγωγή

Η γενική εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς τις μεταβλητές x, y έχει τη μορφή $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + \Delta x + \mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ όπου $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z} \in \mathbb{R}$ με $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\Gamma| \neq 0$ (τουλάχιστον ένας από τους $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι διάφορος του μηδέν). Επειδή στους περισσότερους τύπους της θεωρίας των καμπυλών 2^{ου} βαθμού οι συντελεστές $\mathrm{B}, \Delta, \mathrm{E}$ εμφανίζονται διαιρεμένοι δια 2, είναι προτιμότερο να γράφω τη γενική εξίσωση 2^{ου} βαθμού (ως προς x, y) ως $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ δηλαδή τα γράμματα $\mathrm{B}, \Delta, \mathrm{E}$ συμβολίζουν τα μισά των αντίστοιχων συντελεστών.

Στη συνέχεια, ως γενική εξίσωση 2^{ου} βαθμού θα θεωρείται η $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ και οι αριθμοί $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ θα ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης (οι $\mathrm{B}, \Delta, \mathrm{E}$ έχουν συμβατική ονομασία, επειδή οι συντελεστές των αντίστοιχων όρων είναι οι 2Β, 2Δ, 2Ε).

Με την $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ορίζεται ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων που οι συντεταγμένες τους x, y ικανοποιούν την εξίσωση. Το είδος της καμπύλης 2^{ου} βαθμού, εξαρτάται από τους συντελεστές της $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$

Η μελέτη της γενικής εξίσωσης $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ είναι η μελέτη της αντίστοιχης καμπύλης, με βάση τις τιμές των συντελεστών της και τις μεταξύ τους σχέσεις. Αποδεικνύεται ότι **η γενική εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι πάντα η εξίσωση μιας κωνικής τομής (έλλειψης, παραβολής, υπερβολής).**

Εφαρμογή 1

Αν η εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x, y είναι $x^2+3xy+2y^2+5x+4y+1=0$ τότε οι συντελεστές $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ έχουν τις ακόλουθες τιμές $\mathrm{A} = 1$, $\mathrm{B} = \frac{3}{2}$, $\Gamma = 2$, $\Delta = \frac{5}{2}$, $\mathrm{E} = 2$, $\mathrm{Z} = 1$

3. Μεταφορά της αρχής των συντεταγμένων στο κέντρο της εξίσωσης

Έστω η εξίσωση $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ Προκειμένου να απλοποιήσω τον τύπο της, την μετασχηματίζω με μια παράλληλη μεταφορά των αξόνων των συντεταγμένων. Υποθέτω δηλαδή, ότι οι άξονες μετακινούνται παράλληλα από τις αρχικές τους θέσεις, έτσι ώστε η νέα αρχή των συντεταγμένων να είναι το σημείο $\mathrm{M}(x_0, y_0)$

Συμβολίζω με x, y τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου του επιπέδου, ως προς το παλαιό σύστημα των ορθογωνίων συντεταγμένων (άξονες Ox, Oy) και με X, Y συμβολίζω τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το νέο ορθοκανονικό σύστημα με άξονες MX, MY. Σύμφωνα με τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων, ισχύει ότι $x = X + x_0, y = Y + y_0$

Αντικαθιστώντας στις παλαιές συντεταγμένες της $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$, προκύπτει ότι $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=$

$$A(X+x_0)^2+2B(X+x_0)(Y+y_0)+\Gamma(Y+y_0)^2=$$

$$A(X+x_0)^2+2B(X+x_0)(Y+y_0)+\Gamma(Y+y_0)^2+2\Delta(X+x_0)+2E(Y+y_0)+Z=$$

$$AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+2\left(Ax_0+By_0+\Delta\right)X+2\left(Bx_0+\Gamma y_0+\mathrm{E}\right)Y+\left(Ax_0^2+2Bx_0y_0+\Gamma y_0^2+2\Delta x_0+2Ey_0+Z\right)$$

Παρατηρώ ότι στο νέο σύστημα των συντεταγμένων, οι συντελεστές των όρων 2ου βαθμού δεν έχουν αλλάξει. Αντίθετα, οι συντελεστές των όρων 1ου βαθμού και ο σταθερός όρος έχουν αλλάξει. Εισάγω τους παρακάτω συμβολισμούς

$$D^*=Ax_0+By_0+\Delta$$

$$E^*=Bx_0+\Gamma y_0+\mathrm{E}$$

$$Z^*=Ax_0^2+2Bx_0y_0+\Gamma y_0^2+2\Delta x_0+2Ey_0+Z$$

οπότε η εξίσωση της καμπύλης 2ου βαθμού παίρνει την ακόλουθη μορφή:

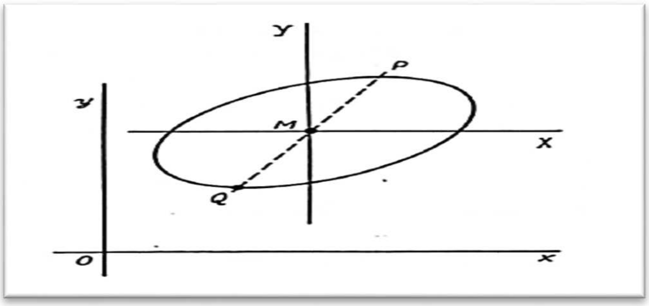
$$AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+2DX+2EY+Z^*=0$$

Επιλέγω το σημείο Μ έτσι ώστε, μετά από τον μετασχηματισμό, η εξίσωση να μην έχει όρους 1ου βαθμού, δηλαδή οι όροι με X, Y να εξαλειφθούν, δηλαδή να γίνει $D^*=0$ και $\mathrm{E}^*=0$. Για να γίνει αυτό, οι παλαιές συντεταγμένες του σημείου Μ (δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς) πρέπει να ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{matrix} Ax_0+By_0+\Delta=0 \\ Bx_0+\Gamma y_0+\mathrm{E}=0 \end{matrix}\right\}$

Εφόσον το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση, βρίσκονται οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Μετά από τη μεταφορά της αρχής του συστήματος των συντεταγμένων στο σημείο Μ, η εξίσωση της καμπύλης παίρνει τη μορφή $AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+Z^*=0$ από την οποία προκύπτει ότι

$$A\left(-X\right)^2+2B\left(-X\right)\left(-Y\right)+\Gamma\left(-Y\right)^2+Z^*=0$$

Αν ένα σημείο P(X, Y) ανήκει στη δεδομένη καμπύλη, τότε και το σημείο Q(–X, –Y) ανήκει επίσης στην καμπύλη.



Παρατηρώ ότι τα σημεία της καμπύλης είναι τοποθετημένα ανά ζεύγη συμμετρικών σημείων ως προς τη νέα αρχή των συντεταγμένων, δηλαδή ως προς το σημείο Μ. Άρα, αν υπάρχει στο επίπεδο ένα σημείο ως προς το οποίο όλα τα σημεία της καμπύλης είναι τοποθετημένα ανά ζεύγη συμμετρικών σημείων, τότε αυτό ονομάζεται **κέντρο της καμπύλης**. Η γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού των συντεταγμένων, βάσει του οποίου η εξίσωση της καμπύλης 2ου βαθμού παίρνει τη μορφή $AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+Z^*=0$ συνίσταται στο ότι η νέα αρχή των συντεταγμένων ταυτίζεται με το κέντρο της καμπύλης. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι λύσεις $\left(x_0, y_0\right)$ του $\left\{\begin{matrix} Ax_0+By_0+\Delta=0 \\ Bx_0+\Gamma y_0+\mathrm{E}=0 \end{matrix}\right\}$ καθορίζουν το κέντρο της καμπύλης (ως προς το αρχικό σύστημα των συντεταγμένων). Για αυτό, οι εξισώσεις $\left\{\begin{matrix} Ax_0+By_0+\Delta=0 \\ Bx_0+\Gamma y_0+\mathrm{E}=0 \end{matrix}\right\}$ ονομάζονται **εξισώσεις του κέντρου**.

Το αντίστροφο ισχύει, δηλαδή αν ένα τυχαίο σημείο είναι το κέντρο μιας καμπύλης $2^{ου}$ βαθμού, τότε οι συντεταγμένες του αποτελούν λύση του $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$ Πράγματι, πρέπει να επιλέξω τη νέα αρχή των συντεταγμένων έτσι, ώστε η $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + \Delta x + \mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ να ανάγεται στη μορφή $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ · όμως αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση του $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$. Το με αυτόν τον τρόπο οριζόμενο σημείο, είναι το κέντρο της καμπύλης που εξετάζω. Συμβολίζω ως δ_1 την ορίζουσα του $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$

δηλαδή $\delta_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix} = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2$ Τα στοιχεία της ορίζουσας είναι οι συντελεστές των δευτεροβάθμιων όρων της $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + \Delta x + \mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ Η ορίζουσα δ_1 ονομάζεται διακρίνουσα των όρων Α, Β, Γ.

Αν $\delta_1 \neq 0$, τότε το $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$ έχει μοναδική λύση, άρα η καμπύλη έχει μόνο ένα κέντρο. Μία καμπύλη $2^{ου}$ βαθμού η οποία έχει ένα μόνο κέντρο ονομάζεται **κεντρική καμπύλη** (ή **κωνική με κέντρο**).

Αν $\delta_1 \neq 0$ (η καμπύλη έχει κέντρο), τότε οι συντεταγμένες του κέντρου της καμπύλης του $2^{ου}$ βαθμού είναι $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$, $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$

Ο σταθερός όρος Ζ* της $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ δίνεται από τον $Z^* = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + \Gamma y_0^2 + 2\Delta x_0 + 2Ey_0 + Z$ Μπορώ να απλοποιήσω αυτόν τον τύπο.

Πράγματι, με νέα ομαδοποίηση των όρων του $2^{ου}$ μέλους της $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ προκύπτει
$Z^* = \left(Ax_0 + By_0 + \Delta\right)x_0 + \left(Bx_0 + \Gamma y_0 + E\right)y_0 + \left(\Delta x_0 + Ey_0 + Z\right)$ και από αυτήν, λόγω των $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$ προκύπτει ότι $Z^* = \Delta x_0 + Ey_0 + Z$

Αν $\delta_1 = 0$ τότε η $Z^* = \Delta x_0 + Ey_0 + Z$ μπορεί να μετασχηματισθεί ακόμη με την εφαρμογή των $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$, $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$

Αντικαθιστώ τα x_0, y_0 στο $2^ο$ μέλος της $Z^* = \Delta x_0 + Ey_0 + Z$ με τις τιμές τους από τους τύπους

$x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$, $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$ έχω $\mathrm{Z}^* = \dfrac{\Delta \begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix} + \mathrm{E} \begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix} + \mathrm{Z} \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$ Ο αριθμητής του κλάσματος μπορεί να γραφεί σε μορφή ορίζουσας $3^{ης}$ τάξης, δηλαδή $\Delta \begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix} + \mathrm{E} \begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix} + \mathrm{Z} \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Delta \\ \mathrm{B} & \Gamma & \mathrm{E} \\ \Delta & \mathrm{E} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}$ που συμβολίζεται ως $\delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Delta \\ \mathrm{B} & \Gamma & \mathrm{E} \\ \Delta & \mathrm{E} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}$ και ονομάζεται **διακρίνουσα** του $1^{ου}$ μέλους της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + \Delta x + \mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$

Από τις $\mathrm{Z}^* = \dfrac{\Delta \begin{vmatrix} \mathrm{B} & \Delta \\ \Gamma & \mathrm{E} \end{vmatrix} + \mathrm{E} \begin{vmatrix} \Delta & \mathrm{A} \\ \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{vmatrix} + \mathrm{Z} \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}}$ και $\delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Delta \\ \mathrm{B} & \Gamma & \mathrm{E} \\ \Delta & \mathrm{E} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}$ προκύπτει ότι

$\mathrm{Z}^* = \dfrac{\delta}{\delta_1}$ άρα, η $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ ανάγεται στη μορφή

$$AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + \frac{\delta}{\delta_1} = 0$$

Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι η $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ ορίζει μια κωνική τομή με κέντρο, να βρεθεί το κέντρο και να απλοποιηθεί η δοθείσα εξίσωση με τοποθέτηση της αρχής των συντεταγμένων στο κέντρο της.

Αρχικά, βρίσκω την $\delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9$ Εφόσον $\delta_1 \neq 0$, η δοθείσα εξίσωση ορίζει μια κωνική τομή με κέντρο. Οι συντεταγμένες του κέντρου δίνονται από το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{array} \right\}$ και στην προκειμένη περίπτωση παίρνουν τη μορφή $\left\{ \begin{array}{l} 5x_0 + 4y_0 - 9 = 0 \\ 4x_0 + 5y_0 - 9 = 0 \end{array} \right\}$ Η λύση του συστήματος είναι $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{array} \right\}$ άρα, μεταφέρω την αρχή των συντεταγμένων στο σημείο $(1,1)$ Οι συντεταγμένες όλων των σημείων του επιπέδου θα μετασχηματιστούν σύμφωνα με τους τύπους $\left\{ \begin{array}{l} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{array} \right\}$ και η δοσμένη εξίσωση θα πάρει τη μορφή $5X^2 + 8XY + 5Y^2 + Z^* = 0$

Υπολογίζω τον σταθερό (μηδενικού βαθμού) όρο Z* από τους τύπους $Z^* = \Delta x_0 + Ey_0 + Z$ και $\mathrm{Z}^* = \dfrac{\delta}{\delta_1}$, οπότε βρίσκω $\mathrm{Z}^* = -9$. Έτσι, στο νέο σύστημα των συντεταγμένων X, Y η εξίσωση παίρνει τη μορφή $5X^2 + 8XY + 5Y^2 - 9 = 0$ που μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο και να προσδιοριστεί η μορφή και η θέση της καμπύλης που ορίζει.

4. Ανηγμένη μορφή της εξίσωσης μιας κωνικής τομής με κέντρο

Έστω η εξίσωση $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ με $\delta_1 = A\Gamma - B^2 \neq 0$ τότε το σύστημα $\left\{\begin{matrix} Ax_0 + By_0 + \Delta = 0 \\ Bx_0 + \Gamma y_0 + \mathrm{E} = 0 \end{matrix}\right\}$ έχει μία μόνο λύση (x_0, y_0)

Τοποθετώ την αρχή ενός νέου συστήματος των συντεταγμένων στο σημείο (x_0, y_0), δηλαδή στο κέντρο της δοθείσας καμπύλης και μετασχηματίζω την $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ σύμφωνα με τους τύπους $\left\{\begin{matrix} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{matrix}\right\}$ οπότε προκύπτει η $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ όπου το Z^* ορίζεται από τον τύπο $Z^* = \Delta x_0 + Ey_0 + Z$ ή από τον $Z^* = \dfrac{\delta}{\delta_1}$

Οι περαιτέρω απλοποιήσεις, επιτυγχάνονται με στροφή του νέου συστήματος των συντεταγμένων γύρω από τη νέα αρχή. Με τη στροφή των αξόνων των συντεταγμένων γύρω από τη νέα αρχή, κατά μια τυχαία γωνία φ, ορίζεται ένα νέο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων (αντίστοιχο του προηγούμενου κατά τη στροφή του επιπέδου, του οποίου το κέντρο είναι το Μ, δηλαδή το κέντρο της κωνικής τομής και γωνία η φ). Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου του επιπέδου, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους $\left\{\begin{matrix} \mathrm{X} = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ Y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix}\right\}$ όπου x', y' είναι οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το νέο σύστημα των συντεταγμένων (αντίστοιχο του προηγούμενου κατά τη θεωρούμενη στροφή γωνία φ).

Αντικαθιστώντας στο 1ο μέλος της $AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* = 0$ τις μεταβλητές X, Y με τις τιμές τους από το $\left\{\begin{matrix} \mathrm{X} = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ Y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix}\right\}$ βρίσκω

$$AX^2 + 2BXY + \Gamma Y^2 + Z^* =$$
$$A(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2B(x'\cos\varphi - y'\sin\ \varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + Z^*$$

Εκτελώντας τις πράξεις και ομαδοποιώντας τους όρους ως προς τις αυξανόμενες δυνάμεις των νέων μεταβλητών x', y' προκύπτει

$$\mathrm{AX}^2 + 2\mathrm{BXY} + \Gamma\mathrm{Y}^2 + Z^* = \mathrm{A}'(x')^2 + 2\mathrm{B}'x'y' + \Gamma'(y')^2 + Z^*$$

όπου τα $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα αθροίσματα που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις. Άρα,

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}\cos^2\varphi + 2\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\sin^2\varphi$$

$$\mathrm{B}' = -\mathrm{A}\sin\varphi\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Gamma' = \mathrm{A}\sin^2\varphi - 2\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\cos^2\varphi$$

Για την απλοποίηση της εξίσωσης πρέπει να γίνει επιλογή της γωνίας φ έτσι, ώστε να μηδενίζεται (να εξαφανίζεται) ο όρος που περιέχει το γινόμενο $x'y'$ των νέων συντεταγμένων, δηλαδή να είναι $\mathrm{B}' = 0$, οπότε η εξίσωση θα πάρει τότε τη μορφή $\mathrm{A}'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ Ζητώντας μια τέτοια γωνία φ, θέτω $\mathrm{B}' = 0$ και από την $\mathrm{B}' = -\mathrm{A}\sin\varphi\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cos\varphi$ θα έχω για τη ζητούμενη γωνία φ την $-\mathrm{A}\sin\varphi\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cos\varphi = 0$ ή ισοδυνάμως

$$\mathrm{B}\sin^2\varphi + (\mathrm{A} - \Gamma)\sin\varphi\cos\varphi - \mathrm{B}\cos^2\varphi = 0$$

• Αν $B=0$, τότε η αρχική εξίσωση $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ έχει ήδη τη ζητούμενη μορφή, δηλαδή δεν περιέχει τον όρο με το γινόμενο xy των συντεταγμένων και δεν χρειάζεται μετασχηματισμό.

• Αν $B\neq 0$ τότε από την $B\sin^2\varphi+(A-\Gamma)\sin\varphi\cos\varphi-B\cos^2\varphi=0$ προκύπτει ότι $\cos\varphi\neq 0$ (διότι αν $\cos\varphi=0$, τότε $\sin^2\varphi=1$ άρα από την $B\sin^2\varphi+(A-\Gamma)\sin\varphi\cos\varphi-B\cos^2\varphi=0$ έπεται ότι B = 0 άτοπο).

Διαιρώντας την $B\sin^2\varphi+(A-\Gamma)\sin\varphi\cos\varphi-B\cos^2\varphi=0$ δια $\cos^2\varphi$ προκύπτει $B\tan^2\varphi+(A-\Gamma)\tan\varphi-B=0$ άρα $\tan\varphi=\dfrac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}$

Αν $(\Gamma-A)^2+4B^2\geq 0$ το 2ο μέλος της $\tan\varphi=\dfrac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}$ έχει πραγματική τιμή, άρα η ζητούμενη γωνία φ υπάρχει και ορίζεται από τον $\tan\varphi=\dfrac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}$ (όποιο και αν είναι το πρόσημο ± που θα πάρω).

Αποδείχθηκε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+Z^*=0$ μπορεί να αναχθεί στη μορφή $A'(x')^2+\Gamma'(y')^2+Z^*=0$

Παρατηρώ ότι η $B'=-A\sin\varphi\cos\varphi+B\cos^2\varphi-B\sin^2\varphi+\Gamma\sin\varphi\cos\varphi$ είναι ισοδύναμη με την $2B'=2B\cos(2\varphi)-(A-\Gamma)\sin(2\varphi)$, άρα για να είναι $B'=0$, δηλαδή για να είναι $2B\cos(2\varphi)-(A-\Gamma)\sin(2\varphi)=0$, πρέπει $\tan(2\varphi)=\dfrac{2B}{A-\Gamma}$ άρα, $\cos(2\varphi)=\dfrac{A-\Gamma}{\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}$ και $\sin(2\varphi)=\dfrac{2B}{\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}$ Έτσι, η γωνία φ υπολογίζεται από τη σχέση $\tan(2\varphi)=\dfrac{2B}{A-\Gamma}$

Σημείωση

Η $B\tan^2\varphi+(A-\Gamma)\tan\varphi-B=0$ επιτρέπει τον προσδιορισμό της $\tan\varphi$. Το $\sin\varphi$ και το $\cos\varphi$ βρίσκονται από την $\tan\varphi$ με τη βοήθεια των τύπων $\sin\varphi=\dfrac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$

Πρέπει να συμφωνούν τα πρόσημα μπροστά από τις τετραγωνικές ρίζες των παραπάνω τύπων, με το πρόσημο της $\tan\varphi$

• Αν $\tan\varphi<0$, τότε τα $\sin\varphi$ και $\cos\varphi$ έχουν αντίθετα πρόσημα.

• Αν $\tan\varphi>0$, τότε τα $\sin\varphi$ και $\cos\varphi$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Εφαρμογή 3

Να απλοποιηθεί η $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$, να βρεθεί ποια καμπύλη ορίζει και να κατασκευαστεί το γράφημα που αντιστοιχεί στη θέση της καμπύλης ως προς τους άξονες των συντεταγμένων.

Η εξίσωση έχει ήδη μελετηθεί στην εφαρμογή 2, ορίζει μια κωνική τομή με κέντρο, διότι $\delta_1 \neq 0$ και κέντρο το σημείο Μ(1, 1) Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων $\begin{Bmatrix} x = X+1 \\ y = Y+1 \end{Bmatrix}$ που αντιστοιχεί στη μεταφορά της αρχής των αξόνων στο κέντρο Μ, δίνει στην εξίσωση τη μορφή $5X^2+8XY+5Y^2-9=0$ Οι περαιτέρω απλοποιήσεις της $5X^2+8XY+5Y^2-9=0$ γίνονται σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις. Στρέφω τους άξονες των συντεταγμένων ΜΧ , ΜΥ κατά γωνία φ , η οποία ορίζεται από την $\mathrm{B}\tan^2\varphi + (\mathrm{A}-\Gamma)\tan\varphi - \mathrm{B}=0$

Έχω $\tan^2\varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\varphi = \pm 1$ Επιλέγω μία από τις δύο λύσεις, π.χ. την $\tan\varphi=1$ Η στροφή των αξόνων κατά γωνία φ αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό των συντεταγμένων σύμφωνα με τους τύπους $\begin{Bmatrix} X = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ Y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{Bmatrix}$

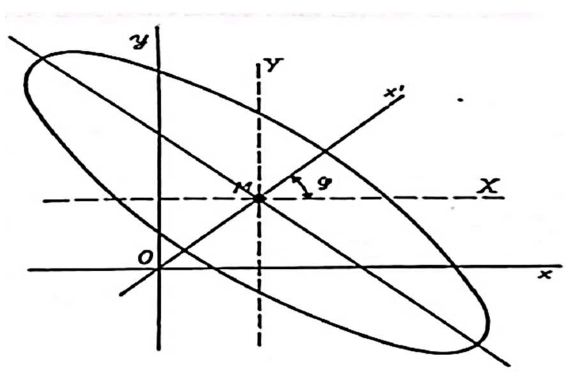
Επειδή $\tan\varphi=1$ έπεται ότι $\begin{Bmatrix} \cos\varphi = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$

Λαμβάνοντας τις θετικές τιμές, έχω $\begin{Bmatrix} \mathrm{X} = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$

Αντικαθιστώντας τα X, Y με τις αριθμητικές τους τιμές στην $5X^2+8XY+5Y^2-9=0$ βρίσκω

$$5X^2+8XY+5Y^2 = \frac{5(x'-y')^2+8(x'-y')(x'+y')+5(x'+y')^2}{2} = 9(x')^2+(y')^2$$

Άρα, στο σύστημα των συντεταγμένων x', y' η εξίσωση της δοθείσας καμπύλης παίρνει τη μορφή $9(x')^2+(y')^2-9=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x')^2}{1}+\dfrac{(y')^2}{9}=1$ και είναι η εξίσωση μιας έλλειψης με ημιάξονες $\alpha=1, \beta=3$. Κέντρο της είναι το σημείο Μ , του οποίου οι συντεταγμένες στο αρχικό σύστημα ήταν $\mathrm{M}(1,1)$ και οι άξονες συμμετρίας της ταυτίζονται με τους άξονες των συντεταγμένων $\mathrm{M}x'$ και $\mathrm{M}y'$



Γράφημα Απλοποίηση της εξίσωσης 2ου βαθμού της καμπύλης, δια μεταφοράς και στροφής του συστήματος των συντεταγμένων

Άμεσος σκοπός είναι να βρω ποια γεωμετρικά σχήματα ορίζονται από την $A'(x')^2+\Gamma'(y')^2+Z^*=0$ Για αυτό αποδεικνύω την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1

Αν τα A', B', Γ' ***εκφράζονται με τη βοήθεια των Α, Β, Γ μέσω των τύπων***

$$A'=A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+\Gamma\sin^2\varphi$$
$$B'=-A\sin\varphi\cos\varphi+B\cos^2\varphi-B\sin^2\varphi+\Gamma\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\Gamma'=A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+\Gamma\cos^2\varphi$$

τότε $A'\Gamma'-(B')^2=A\Gamma-B^2$

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζω επί 2 τους όρους των

$$A'=A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+\Gamma\sin^2\varphi$$
$$B'=-A\sin\varphi\cos\varphi+B\cos^2\varphi-B\sin^2\varphi+\Gamma\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\Gamma'=A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+\Gamma\cos^2\varphi$$

εφαρμόζω τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$2\cos^2\varphi=1+\cos(2\varphi)$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi=\sin(2\varphi)$$
$$2\sin^2\varphi=1-\cos(2\varphi)$$

οπότε προκύπτουν

$$2A'=(A+\Gamma)+\left[(A-\Gamma)\cos(2\varphi)+2B\sin(2\varphi)\right]$$
$$2B'=-(A-\Gamma)\sin(2\varphi)+2B\sin(2\varphi)$$
$$2\Gamma'=(A+\Gamma)-\left[(A-\Gamma)\cos(2\varphi)+2B\sin(2\varphi)\right]$$

άρα, $4A'\Gamma'-4(B')^2=$

$$(A+\Gamma)^2-\left[(A-\Gamma)\cos(2\varphi)+2B\sin(2\varphi)\right]^2-\left[(A-\Gamma)\sin(2\varphi)-2B\cos(2\varphi)\right]^2=$$
$$(A+\Gamma)^2-(A-\Gamma)^2-4B^2=$$
$$4A\Gamma-4B^2$$

συνεπώς $A'\Gamma'-(B')^2=A\Gamma-B^2$

Πρόταση 2

Αν η $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ ***ορίζει μια κωνική τομή με κέντρο*** $\delta_1=A\Gamma-B^2\neq 0$, ***τότε οι δύο συντελεστές*** A',Γ' ***της εξίσωσης με ανηγμένη μορφή*** $A'(x')^2+\Gamma'(y')^2+Z^*=0$, ***είναι διάφοροι του μηδενός (***$A'\neq 0,\ \Gamma'\neq 0$***)***

Απόδειξη

Αν $B'=0$ τότε $A'\Gamma'-(B')^2=A'\Gamma'$ Επειδή όμως ισχύει ότι $A'\Gamma'-(B')^2=A\Gamma-B^2=\delta_1$ έπεται ότι $A'\Gamma'=\delta_1\neq 0$ άρα $A'\neq 0$ και $\Gamma'\neq 0$

Από την πρόταση 1 είναι $A'\Gamma'=A\Gamma-B^2$

Από τους $A' = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\sin^2\varphi$ και $\Gamma' = A\sin^2\varphi - 2B\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\cos^2\varphi$ προκύπτει ότι $A' + \Gamma' = A + \Gamma$

Από $A'\Gamma' = A\Gamma - B^2$ και $A' + \Gamma' = A + \Gamma$ βρίσκω τους A', Γ' αν είναι γνωστά τα A, B, Γ. Έχει δειχθεί ότι $Z^* = \frac{\delta}{\delta_1}$ συνεπώς οι τρεις συντελεστές A', Γ', Z^* της $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ υπολογίζονται απευθείας από τους συντελεστές της $Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$, χωρίς να χρειαστεί η αναγωγή στην $Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$ στη μορφή $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ με μετασχηματισμό των συντεταγμένων. Θα ονομάζω την εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

- ελλειπτική, όταν $\delta > 0$
- υπερβολική, όταν $\delta < 0$
- παραβολική, όταν $\delta = 0$

Κάθε εξίσωση κωνικής τομής με κέντρο (δηλαδή κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού για την οποία $\delta \neq 0$) είναι ελλειπτική ή υπερβολική. Για την ανηγμένη εξίσωση $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ έχω $A'\Gamma' = \delta$, άρα η $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ είναι:

- ελλειπτική, όταν $A'\Gamma' > 0$
- υπερβολική, όταν $A'\Gamma' < 0$

Για να μελετήσω την $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ όταν $A'\Gamma' > 0$ και $A'\Gamma' < 0$, μεταφέρω τον σταθερό όρο στο 2^{ο} μέλος και το συμβολίζω (με το πρόσημό του) με το γράμμα H. Αν παραλείψω τους δείκτες, η $A'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + Z^* = 0$ γράφεται $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$

1. Υποθέτω ότι η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ είναι ελλειπτική. Τότε $A\Gamma > 0$, δηλαδή οι συντελεστές A, Γ είναι ομόσημοι. Μπορώ αλλάζοντας αν χρειάζεται το πρόσημο όλων των όρων, να θεωρήσω ότι A, Γ είναι θετικοί. Για το H υπάρχουν 3 περιπτώσεις: $H > 0$, $H < 0$, $H = 0$

α) Αν $H > 0$, τότε η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ ορίζει μια έλλειψη και γράφεται ως $\frac{x^2}{\left(\frac{H}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{\Gamma}\right)} = 1$ Επειδή οι $\left(\frac{H}{A}\right)$ και $\left(\frac{H}{\Gamma}\right)$ είναι θετικοί, οι $+\sqrt{\frac{H}{A}}$ και $+\sqrt{\frac{H}{\Gamma}}$ είναι πραγματικοί. Συμβολίζω τον 1^{ο} με το γράμμα α και τον 2^{ο} με το γράμμα β δηλαδή $\alpha = +\sqrt{\frac{H}{A}}$, $\beta = +\sqrt{\frac{H}{\Gamma}}$ άρα, $\frac{H}{A} = \alpha^2$ και $\frac{H}{\Gamma} = \beta^2$ οπότε $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία είναι εξίσωση της έλλειψης.

β) Αν $H = 0$, μόνο το ζεύγος των πραγματικών αριθμών $x = 0$, $y = 0$ επαληθεύει την $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ άρα, για $H = 0$ η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ ορίζει ένα μόνο σημείο (την αρχή των συντεταγμένων). Π.χ. $x^2 + 4y^2 = 0$

Αν $H = 0$ τότε η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ ονομάζεται εξίσωση μιας **εκφυλισμένης έλλειψης**. Η προέλευση της ονομασίας οφείλεται στην παρατήρηση ότι αν $H \to 0$

(ενώ είναι $H > 0$), παρατηρώ από τους $\alpha = +\sqrt{\frac{H}{A}}$ και $\beta = +\sqrt{\frac{H}{\Gamma}}$ ότι $\alpha \to 0$ και $\beta \to 0$ που σημαίνει ότι η έλλειψη που ορίζεται από την $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ περιορίζεται σε σημείο. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η αντίστοιχη για $H = 0$ εξίσωση $Ax^2 + By^2 = 0$ ονομάζεται εξίσωση έλλειψης εκφυλισμένης σε σημείο.

γ) Αν $H < 0$, καμία πραγματική τιμή των x, y δεν μπορεί να ικανοποιήσει την $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$, διότι το 1ο μέλος της είναι πάντα μη αρνητικό. Άρα, για $H < 0$ η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ δεν ορίζει κανένα πραγματικό γεωμετρικό σχήμα στο επίπεδο. Π.χ. $x^2 + 4y^2 = -16$ Για $H < 0$ η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ ονομάζεται **εξίσωση φανταστικής έλλειψης.**

2. Έστω ότι η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ είναι υπερβολή. Τότε $A\Gamma < 0$, δηλαδή οι συντελεστές A, Γ έχουν αντίθετα πρόσημα. Έστω ότι Α > 0 και Γ < 0 (μπορώ πάντα να το πετύχω αλλάζοντας τα πρόσημα όλων των όρων της $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$) Για το H υπάρχουν 3 περιπτώσεις: $H > 0$, $H < 0$, $H = 0$

α) Αν $H > 0$ ή $H < 0$, τότε η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ ορίζει μια υπερβολή. Για την απόδειξη τροποποιώ τη μορφή της $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ γράφοντας την ως $\frac{x^2}{\left(\frac{H}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{\Gamma}\right)} = 1$ Επειδή $A > 0$ και $\Gamma < 0$, αν $H > 0$ τότε είναι $\frac{H}{A} > 0$ και $\frac{H}{\Gamma} < 0$ άρα, οι αριθμοί $\sqrt{\frac{H}{A}}$ και $\sqrt{\frac{-H}{\Gamma}}$ είναι πραγματικοί. Τους συμβολίζω ως $\frac{H}{A} = \alpha^2$, $\frac{H}{\Gamma} = -\beta^2$ Αντικαθιστώντας στην $\frac{x^2}{\left(\frac{H}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{\Gamma}\right)} = 1$ βρίσκω $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία είναι εξίσωση της υπερβολής, της οποίας ο πρωτεύον άξονας (που την τέμνει) είναι ο άξονας xx' του συστήματος αναφοράς.

Αν $H < 0$ τότε είναι $\frac{H}{A} < 0$ και $\frac{H}{\Gamma} > 0$. Θέτω $\sqrt{\frac{-H}{A}} = \alpha$, $\sqrt{\frac{H}{\Gamma}} = \beta$ και παίρνω $\frac{H}{A} = -\alpha^2$, $\frac{H}{\Gamma} = \beta$ άρα η $\frac{x^2}{\left(\frac{H}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{\Gamma}\right)} = 1$ γράφεται $\frac{-x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία είναι επίσης εξίσωση υπερβολής (με τέμνοντα άξονα τον yy' του συστήματος αναφοράς).

β) Αν $H = 0$, τότε η $Ax^2 + \Gamma y^2 = H$ παίρνει τη μορφή $Ax^2 + \Gamma y^2 = 0$ ή ισοδυνάμως $\left(\sqrt{A}x + \sqrt{-\Gamma}y\right)\left(\sqrt{A}x - \sqrt{-\Gamma}y\right) = 0$ (εφόσον $A > 0$ και $\Gamma < 0$, οι αριθμοί $\sqrt{\mathrm{A}}$ και $\sqrt{-\Gamma}$ είναι πραγματικοί). Από την $\left(\sqrt{\mathrm{A}}x+\sqrt{-\Gamma}y\right)\left(\sqrt{\mathrm{A}}x-\sqrt{-\Gamma}y\right)=0$ έπεται ότι $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\mathrm{A}}x+\sqrt{-\Gamma}y=0\\ \text{ή}\\ \sqrt{\mathrm{A}}x-\sqrt{-\Gamma}y=0\end{array}\right\}$

Κάθε μία από αυτές τις εξισώσεις ορίζει μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων. Συμπεραίνω ότι για $\mathrm{H}=0$ η υπερβολική εξίσωση $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=\mathrm{H}$ ορίζει ένα ζεύγος τεμνόμενων ευθειών, των οποίων το κοινό σημείο είναι η αρχή των συντεταγμένων. Π.χ. η $x^2-4y^2=0$ που ορίζει το ζεύγος των τεμνόμενων ευθειών $x+2y=0$ και $x-2y=0$

Αν $\mathrm{H}=0$ τότε η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=\mathrm{H}$ ονομάζεται εξίσωση **εκφυλισμένης υπερβολής**. Η προέλευση αυτού του όρου είναι η εξής: Για σταθερές τιμές των Α, Γ και μεταβλητό το Η, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=\mathrm{H}$ ορίζει διάφορες υπερβολές. Από $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}=\alpha^2$, $\frac{\mathrm{H}}{\Gamma}=-\beta^2$ και $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}=-\alpha^2$, $\frac{\mathrm{H}}{\Gamma}=\beta$ προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ παραμένει σταθερός, άρα όλες αυτές οι υπερβολές έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.

• Αν $\mathrm{H}\to 0$, τότε $\alpha\to 0$ και $\beta\to 0$ (αυτό φαίνεται και από $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}=\alpha^2$, $\frac{\mathrm{H}}{\Gamma}=-\beta^2$ ή $\frac{\mathrm{H}}{\Gamma}=-\beta^2$, $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}=-\alpha^2$). Έτσι, η μεταβλητή υπερβολή που ορίζεται από την $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=\mathrm{H}$, όταν $\mathrm{H}\to 0$, έχει ως οριακή μορφή ένα ζεύγος τεμνόμενων ευθειών.

• Αν $\mathrm{H}=0$ τότε η υπερβολική εξίσωση $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=\mathrm{H}$ γίνεται $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2=0$ η οποία λέγεται εξίσωση εκφυλισμένης υπερβολής.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

• Κάθε εξίσωση κωνικής με κέντρο ($\delta_1\neq 0$) είναι ελλειπτική ($\delta_1>0$) ή υπερβολική ($\delta_1<0$).

• Κάθε ελλειπτική εξίσωση είναι εξίσωση μιας έλλειψης ή μιας εκφυλισμένης έλλειψης ή μιας φανταστικής έλλειψης.

• Κάθε υπερβολική εξίσωση είναι εξίσωση μιας υπερβολής ή μιας εκφυλισμένης υπερβολής.

5. Απλοποίηση της παραβολικής εξίσωσης

Έστω ότι η $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ είναι παραβολική, δηλαδή οι συντελεστές της ικανοποιούν τη σχέση $\delta_1=\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{B}^2=0$ Όταν $\delta_1=0$, τότε το σύστημα των εξισώσεων $\Gamma'=\mathrm{A}\sin^2\varphi-2\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi+\Gamma\cos^2\varphi$ του κέντρου $\left\{\begin{array}{l}Ax_0+By_0+\Delta=0\\ Bx_0+\Gamma y_0+E=0\end{array}\right\}$ δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις. Στην 1η περίπτωση, η καμπύλη που ορίζεται από την $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ δεν έχει κέντρο και δεν είναι δυνατό να απλοποιηθεί η εξίσωση της με τον τρόπο που είδαμε.

Παρακάτω δίνεται μια μέθοδος που επιτρέπει την αναγωγή οποιασδήποτε παραβολικής εξίσωσης. Αρχίζω με μια στροφή των αξόνων. Υποθέτω αρχικά, ότι οι άξονες έχουν στραφεί κατά μια τυχαία γωνία φ. Οι συντεταγμένες x, y του τυχαίου σημείου μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους τύπους $\left\{\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{array}\right\}$ όπου x', y' είναι οι νέες συντεταγμένες του ίδιου σημείου. Το 1ο μέλος της $\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ μετασχηματίζεται με βάση τους τύπους $\left\{\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{array}\right\}$ ως εξής $\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} =$

$$\mathrm{A}\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)^2 + 2\mathrm{B}\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) +$$

$$\Gamma\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right)^2 + 2\Delta\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right) + 2\mathrm{E}\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) + \mathrm{Z}$$

Μετά τις πράξεις και την ομαδοποίηση των όρων ως προς x', y' παίρνω

$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} =$

$\mathrm{A}'\left(x'\right)^2 + 2\mathrm{B}'x'y' + \Gamma'\left(y'\right)^2 + 2\Delta'x' + 2\mathrm{E}'y' + \mathrm{Z}'$ όπου

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}\cos^2\varphi + 2\mathrm{B}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \Gamma\sin^2\varphi$$

$$\mathrm{B}' = -\mathrm{A}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$\Gamma' = \mathrm{A}\sin^2\varphi - 2\mathrm{B}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \Gamma\cos^2\varphi$$

$$\Delta' = \Delta\cos\varphi + \mathrm{E}\sin\varphi$$

$$\mathrm{E}' = -\Delta\sin\varphi + \mathrm{E}\cos\varphi$$

$$\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$$

Οι τρεις πρώτοι τύποι $\mathrm{A}' = \mathrm{A}\cos^2\varphi + 2\mathrm{B}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \Gamma\sin^2\varphi$

$\mathrm{B}' = -\mathrm{A}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cdot\cos\varphi$

$\Gamma' = \mathrm{A}\sin^2\varphi - 2\mathrm{B}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \Gamma\cos^2\varphi$

δεν διαφέρουν από τους τύπους $\mathrm{A}' = \mathrm{A}\cos^2\varphi + 2\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\sin^2\varphi$

$\mathrm{B}' = -\mathrm{A}\sin\varphi\cos\varphi + \mathrm{B}\cos^2\varphi - \mathrm{B}\sin^2\varphi + \Gamma\sin\varphi\cos\varphi$

$\Gamma' = \mathrm{A}\sin^2\varphi - 2\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma\cos^2\varphi$

Για αυτό σκεπτόμενος όπως στην προηγούμενη παράγραφο, βρίσκω τη γωνία φ έτσι ώστε μετά από τη στροφή των αξόνων κατά αυτή τη γωνία, να ισχύει $\mathrm{B}' = 0$ Η γωνία φ προσδιορίζεται από $\mathrm{B}\varepsilon\varphi^2\varphi + \left(\mathrm{A} - \Gamma\right)\varepsilon\varphi\varphi - \mathrm{B} = 0$

Από την $\mathrm{A}\Gamma' - \left(\mathrm{B}'\right)^2 = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2$ είναι $\mathrm{A}'\Gamma' = \delta$ και επειδή $\delta = 0$, προκύπτει ότι $\mathrm{A}'\Gamma' = 0$ άρα, $\mathrm{A}' = 0$ ή $\Gamma' = 0$

Έτσι, με μια στροφή των αξόνων, κάθε παραβολική εξίσωση $\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ μπορεί να αναχθεί στη μορφή

$\mathrm{A}'\left(x'\right)^2 + 2\Delta'x' + 2\mathrm{E}'y' + \mathrm{Z}' = 0$, όπου $\mathrm{A}' \neq 0$, ή στη μορφή

$\Gamma'\left(y'\right)^2 + 2\Delta'x' + 2\mathrm{E}'y' + \mathrm{Z}' = 0$, όπου $\Gamma' \neq 0$

Από αλγεβρική άποψη, οι εξισώσεις $\mathrm{A}'\left(x'\right)^2 + 2\Delta'x' + 2\mathrm{E}'y' + \mathrm{Z}' = 0$ και $\Gamma'\left(y'\right)^2 + 2\Delta'x' + 2\mathrm{E}'y' + \mathrm{Z}' = 0$ δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους (η καθεμία μπορεί να μετατραπεί στην άλλη, με αλλαγή των ονομάτων των συντεταγμένων και των γραμμάτων των συντελεστών). Για αυτό μπορώ να περιοριστώ σε μία από αυτές, για παράδειγμα στην $\Gamma'(y')^2 + 2\Delta' x' + 2\mathrm{E}' y' + \mathrm{Z}' = 0$

Μπορώ να πετύχω μια νέα απλοποίηση της εξίσωσης $\Gamma'(y')^2 + 2\Delta' x' + 2\mathrm{E}' y' + \mathrm{Z}' = 0$ με μεταφορά των αξόνων (μετά τη στροφή). Για αυτό γράφω πρώτα την $\Gamma'(y')^2 + 2\Delta' x' + 2\mathrm{E}' y' + \mathrm{Z}' = 0$ στη μορφή $\Gamma'\left((y')^2 + 2\frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}y'\right) + 2\Delta' x' = -\mathrm{Z}'$ Μετασχηματίζοντας το άθροισμα μέσα στην παρένθεση ώστε να προκύψει τέλειο τετράγωνο, παίρνω $\Gamma'\left((y')^2 + 2\frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}y' + \left(\frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2\right) + 2\Delta' x' = -\mathrm{Z}' + \frac{(\mathrm{E}')^2}{\Gamma'}$ Συμβολίζω για συντομία, το 2ο μέλος με H', άρα $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ Εμφανίζονται 2 περιπτώσεις.

1. Αν $\Delta' \neq 0$, τότε η $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ γράφεται ως $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta'\left(x' - \frac{\mathrm{H}'}{2\Delta'}\right) = 0$ Κάνω παράλληλη μεταφορά των αξόνων κατά:

$\frac{\mathrm{H}'}{2\Delta'}$ στη διεύθυνση του άξονα $\mathrm{O}x'$ και

$\frac{-\mathrm{E}'}{\Gamma'}$ στη διεύθυνση του άξονα $\mathrm{O}y'$

Οι συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου θα αλλάξουν, σύμφωνα με $\left\{\begin{array}{l} x' = x'' + \frac{\mathrm{H}'}{2\Delta'} \\ y' = y'' - \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'} \end{array}\right\}$ οπότε η $\Gamma\left(y' + 2\frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta'\left(x' - \frac{\mathrm{H}'}{2\Delta'}\right) = 0$ μετασχηματίζεται στην $\Gamma'(y'')^2 + 2\Delta' x'' = 0 \Leftrightarrow (y'')^2 = -2\frac{\Delta'}{\Gamma'}x''$ Αν θέσω $\frac{-\Delta'}{\Gamma'} = \pm p$ (το σημείο επιλέγεται ώστε το p να είναι θετικό), βρίσκω $(y'')^2 = 2px''$ ή $(y'')^2 = -2px''$

Καθεμία από αυτές τις εξισώσεις είναι μια κανονική εξίσωση της παραβολής. Συνεπώς, όταν $\Delta' \neq 0$, τότε η $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ ορίζει μια παραβολή.

2. Αν Δ' = 0, τότε η $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ γίνεται $\Gamma'\left(y' + \frac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 = \mathrm{H}'$

Μεταθέτω τους άξονες των συντεταγμένων με παράλληλη μεταφορά κατά $\frac{-\mathrm{E}'}{\Gamma'}$ στη διεύθυνση του άξονα $\mathrm{O}y'$, οπότε οι συντεταγμένες όλων των σημείων του επιπέδου μεταβάλλονται σύμφωνα με $\begin{Bmatrix} x' = x'' \\ y' = y'' - \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'} \end{Bmatrix}$ και είναι $y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'} = y''$ άρα, η $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 = \mathrm{H}'$ γράφεται $\Gamma'\left(y''\right)^2 = \mathrm{H}' \Leftrightarrow y'' = \pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{H}'}{\Gamma'}}$

Έστω ότι $\Gamma' > 0$. Αν $\mathrm{H}' > 0$, τότε το 2ο μέλος της $y'' = \pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{H}'}{\Gamma'}}$ είναι πραγματικό άρα, έχω δύο διαφορετικές σταθερές τιμές του y'', από τις οποίες η μία είναι θετική και η άλλη αρνητική. Συνεπώς:

- Αν $\mathrm{H}' > 0$, τότε η $\Gamma'\left(y''\right)^2 = \mathrm{H}'$ ορίζει ένα ζεύγος παραλλήλων ευθειών, που βρίσκονται εκατέρωθεν του νέου άξονα των τετμημένων σε απόσταση $\sqrt{\dfrac{\mathrm{H}'}{\Gamma'}}$ από αυτόν. Π.χ. $4\left(y''\right)^2 = 9$
- Αν $\mathrm{H}' = 0$, τότε από την $\Gamma'\left(y''\right)^2 = \mathrm{H}'$ είναι $y'' = 0$, δηλαδή μια εξίσωση που ορίζει μία μόνο ευθεία (τον νέο άξονα των τετμημένων). Με άλλη διατύπωση, αν $\mathrm{H}' = 0$ τότε η $\Gamma'\left(y''\right)^2 = \mathrm{H}'$ ορίζει 2 ευθείες που συμπίπτουν.
- Αν $\mathrm{H}' < 0$, τότε το 2ο μέλος της $y'' = \pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{H}'}{\Gamma'}}$ είναι φανταστικό άρα, η εξίσωση δεν ορίζει κανένα πραγματικό γεωμετρικό σχήμα. Π.χ. $4\left(y''\right)^2 = -9$

Όταν Δ' = 0 ,τότε η $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ ***ορίζει 2 παράλληλες ευθείες, ή 2 ευθείες που συμπίπτουν, ή δεν ορίζει κανένα πραγματικό γεωμετρικό σχήμα.***

6. Η δευτεροβάθμια εξίσωση στην αναλυτική γεωμετρία

Στην αναλυτική γεωμετρία αν $\Delta' = 0$, τότε η $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ ορίζει μια εκφυλισμένη παραβολή. Αυτός ο όρος ερμηνεύεται ως εξής, αν $\Delta' \to 0$, τότε η $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ τείνει στην $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 = \mathrm{H}'$. Καθώς το Δ' μεταβάλλεται, η παραβολή που ορίζεται από την $\Gamma'\left(y' + \dfrac{\mathrm{E}'}{\Gamma'}\right)^2 + 2\Delta' x' = \mathrm{H}'$ μεταβάλλεται επίσης και, όταν $\Delta' \to 0$, επιμηκύνεται απεριόριστα, μετατρεπόμενη σε ζεύγος παραλλήλων ευθειών ή μετακινείται στο επίπεδο και εξαφανίζεται. Συνοψίζοντας, καταλήγω στο συμπέρασμα:

Κάθε παραβολική εξίσωση 2ου βαθμού (με $\delta_1 = 0$***) είναι εξίσωση παραβολής συνήθους μορφής, ή μιας εκφυλισμένης παραβολής.***

Μια παραβολή συνήθους μορφής, μπορεί να ονομαστεί μη κεντρική καμπύλη 2ου βαθμού, διότι δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Αντίθετα, μια εκφυλισμένη παραβολή δέχεται άπειρα κέντρα. Πράγματι, κάθε σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από 2 παράλληλες ευθείες, είναι κέντρο συμμετρίας του ζεύγους τους. Συνεπώς, ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών έχει μια κεντρική ευθεία (ευθεία των κέντρων). Ένα ζεύγος ταυτιζόμενων ευθειών, έχει ως κεντρική ευθεία την ίδια που ταυτίζεται με το ζεύγος.

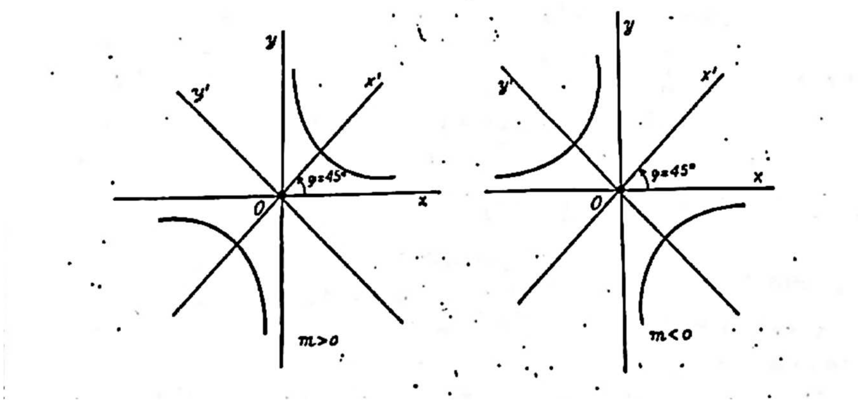
Στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους, εμφανίζονται συχνά εξισώσεις της μορφής $xy = m$ ή $y = \dfrac{m}{x}$ όπου m μια μη μηδενική σταθερά. Στο ορθοκανονικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων x, y αυτές οι εξισώσεις είναι μια ισοσκελής υπερβολή, με ασύμπτωτες τους άξονες των συντεταγμένων. Πράγματι, με στροφή των αξόνων $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y$ κατά γωνία $\varphi = 45^0$ οι συντεταγμένες όλων των σημείων του επιπέδου μετασχηματίζονται σύμφωνα με

$$\left\{\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

Μετασχηματίζοντας την $xy = m$ σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους, βρίσκω στο νέο σύστημα συντεταγμένων την $\dfrac{(x')^2}{2m} - \dfrac{(y')^2}{2m} = 1$ η οποία είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής με ημιάξονες $a = b = \sqrt{2|m|}$ Οι ασύμπτωτες της υπερβολής σχηματίζουν γωνία 45^0 με τους νέους άξονες των συντεταγμένων, άρα ταυτίζονται με τους παλιούς άξονες.

- Αν $m > 0$, τότε η υπερβολή έχει ως διατέμνοντα άξονα της, τον νέο άξονα των τετμημένων.
- Αν $m < 0$, τότε η υπερβολή έχει ως διατέμνοντα άξονα της τον νέο άξονα των τεταγμένων.

Άρα, η $xy = m$ ορίζει μια ισοσκελή υπερβολή, της οποίας οι ασύμπτωτες συμπίπτουν με τους άξονες των συντεταγμένων. Η υπερβολή βρίσκεται στο $1^{\text{ο}}$ και στο $3^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο του επιπέδου, όταν $m > 0$ και στο $2^{\text{ο}}$ και στο $4^{\text{ο}}$ όταν $m < 0$



Πρόταση 3

Η εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ορίζει μια παραβολή της οποίας ο άξονας συμμετρίας είναι κάθετος στον άξονα των τετμημένων.

Απόδειξη

Αρκεί να μετατρέψω την $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στην κανονική της μορφή. Για αυτό την γράφω ως $y=\alpha\left(x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x\right)+\gamma=$

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)+\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$

Άρα, $y-\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ οπότε μεταφέρω την αρχή των συντεταγμένων στο σημείο $\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha},\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right)$ και οι συντεταγμένες όλων των σημείων του επιπέδου μετασχηματίζονται σύμφωνα με $\left\{\begin{array}{l} x=X-\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ y=Y+\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \end{array}\right\}$

Στο νέο σύστημα των συντεταγμένων, η $y=\alpha\left(x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)+\gamma-\dfrac{\beta^2}{4\alpha}$ παίρνει τη μορφή $Y=aX^2$ ή $X^2=\pm 2pY$ όπου p θετικός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση $\pm p=\dfrac{1}{2a}$ Έτσι προκύπτει η κανονική εξίσωση μιας παραβολής, της οποίας η κορυφή βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων και η οποία είναι συμμετρική ως προς τον νέο άξονα των τεταγμένων. Επειδή ο νέος άξονας των τεταγμένων είναι κάθετος στον παλαιό άξονα των τετμημένων, η παραβολή έχει ακριβώς τη μορφή που αναφέρεται στην πρόταση. Η παραβολή της πρότασης, είναι η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου 2ου βαθμού.

7. Διερεύνηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Για την 2ου βαθμού εξίσωση $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ και τη μορφή της κωνικής τομής που ορίζει, ανάλογα με τις τιμές των συντελεστών Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και τις μεταξύ τους σχέσεις, παρατηρώ τα ακόλουθα:

- Η απαλοιφή των γραμμικών όρων $2\Delta x$ και $2\mathrm{E}y$ (δηλαδή των όρων 1ου βαθμού) επιτυγχάνεται με παράλληλη μεταφορά του συστήματος αναφοράς στο σημείο $\mathrm{M}\left(x_0,y_0\right)$ ώστε η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ σύμφωνα με $\left\{\begin{array}{l} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{array}\right\}$ να μην περιέχει όρους 1ου βαθμού.

Η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$, αφού προσδιοριστούν τα x_0,y_0, είναι $\mathrm{A}X^2+2\mathrm{B}XY+\Gamma Y^2+\mathrm{Z}^*=0$

• Η απαλοιφή του όρου που περιέχει το γινόμενο xy επιτυγχάνεται με στροφή του συστήματος αναφοράς κατά γωνία $\varphi = 45^0$ όταν $\mathrm{A} = \Gamma$ και $\tan(2\varphi) = \dfrac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}-\Gamma}$, όταν $\mathrm{A} \neq \Gamma$ Η στροφή ορίζεται από $\left\{ \begin{matrix} X = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ Y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix} \right\}$

Η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}X^2 + 2\mathrm{B}XY + \Gamma Y^2 + \mathrm{Z}^* = 0$ είναι $\mathrm{A}'(x')^2 + \Gamma'(y')^2 + \mathrm{Z}^* = 0$

• Αν προηγηθεί ο μετασχηματισμός στροφής $\left\{ \begin{matrix} X = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ Y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix} \right\}$ κατά τη γωνία φ που ορίζεται από τη σχέση $\tan(2\varphi) = \dfrac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}-\Gamma}$ τότε η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$, παραλείποντας τους δείκτες (τόνους), είναι $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ Οι άξονες της κωνικής τομής είναι τώρα παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Παρατηρώ ότι οι εξισώσεις της έλλειψης και της υπερβολής ως προς το κέντρο τους δεν περιέχουν γραμμικούς όρους. Για αυτό ζητώ να προσδιορίσω τα x_0, y_0 των εξισώσεων $\left\{ \begin{matrix} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{matrix} \right\}$ μίας παράλληλης μεταφοράς του συστήματος των συντεταγμένων, ώστε η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ να μην περιέχει τους γραμμικούς όρους $2\Delta x$ και $2\mathrm{E}y$

Η μετασχηματισμένη μορφή της $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ στο νέο σύστημα αναφοράς, είναι

$$\mathrm{A}\mathrm{X}^2 + \Gamma\mathrm{Y}^2 + 2(\mathrm{A}x_0 + \Delta)\mathrm{X} + 2(\Gamma y_0 + \mathrm{E})\mathrm{Y} + \mathrm{A}(x_0)^2 + \Gamma(y_0)^2 + \Delta x_0 + \mathrm{E}y_0 + \mathrm{Z} = 0$$

7.1 Διερεύνηση αν $\mathrm{A}\Gamma \neq 0$

Οι γραμμικοί όροι απαλείφονται αν θέσω $\left\{ \begin{matrix} x_0 = \dfrac{-\Delta}{\mathrm{A}} \\ y_0 = \dfrac{-\mathrm{E}}{\Gamma} \end{matrix} \right\}$, οπότε η $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ παίρνει τη μορφή $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + \mathrm{N} = 0$ με $\mathrm{N} = \dfrac{\Delta^2}{\mathrm{A}} + \dfrac{\mathrm{E}^2}{\Gamma} - \mathrm{Z}$ Για το Ν υπάρχουν τρεις περιπτώσεις $\mathrm{N} > 0, \mathrm{N} = 0, \mathrm{N} < 0$

7.1.1 Αν Ν > 0

Περίπτωση 1 Οι Α, Γ είναι δύο θετικοί αριθμοί. Τότε, η κωνική τομή είναι έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\mathrm{N}}{\Gamma}\right)} = 1$ και ημιάξονες $\sqrt{\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}}$ και $\sqrt{\dfrac{\mathrm{N}}{\Gamma}}$

Περίπτωση 2 Οι Α, Γ είναι αρνητικοί αριθμοί. Τότε, η $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ δεν ορίζει πραγματική καμπύλη.

Περίπτωση 3 Οι Α, Γ είναι ετερόσημοι. Τότε, η $\mathrm{A}x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ ορίζει υπερβολή.

7.1.2 Αν Ν=0

Περίπτωση 1 Οι Α, Γ είναι ομόσημοι. Τότε, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ισχύει μόνο για $x=y=0$ άρα ορίζει ένα μόνο σημείο.

Περίπτωση 2 Οι Α, Γ είναι ετερόσημοι. Τότε, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ έχει τη μορφή $\mathrm{A}x^2-\Gamma y^2=0$ ή $\Gamma y^2-\mathrm{A}x^2=0$, άρα ορίζει ένα ζεύγος τεμνόμενων ευθειών.

7.1.3 Αν Ν<0

Τότε, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ορίζει πάλι τις κωνικές τομές που εμφανίζονται στην περίπτωση $\mathrm{N}>0$

7.2 Διερεύνηση αν $\mathrm{A}\Gamma\neq 0$

Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις $\begin{Bmatrix}\mathrm{A}=0 \ \& \ \Gamma\neq 0\\ \mathrm{A}\neq 0 \ \& \ \Gamma=0\\ \mathrm{A}=\Gamma=0\end{Bmatrix}$

7.2.1 Αν $\mathrm{A}=0 \ \& \ \Gamma\neq 0$

Περίπτωση 1 Αν $\Delta\neq 0$ τότε επιλέγω x_0, y_0 έτσι ώστε $\begin{Bmatrix}\Gamma y_0+\mathrm{E}=0\\ \Gamma(y_0)^2+2\Delta x_0+2\mathrm{E}y_0+\mathrm{Z}=0\end{Bmatrix}$ οπότε η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ παίρνει τη μορφή $y^2=\dfrac{-2\Delta}{\Gamma}x$ άρα, ορίζει μια παραβολή.

Περίπτωση 2 Αν $\Delta=0$ τότε, το 1ο μέλος της $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ είναι τετραγωνική μορφή ως προς y άρα, η

$$\mathrm{AX}^2+\Gamma\mathrm{Y}^2+2(\mathrm{A}x_0+\Delta)\mathrm{X}+2(\Gamma y_0+\mathrm{E})\mathrm{Y}+\mathrm{A}(x_0)^2+\Gamma(y_0)^2+\Delta x_0+\mathrm{E}y_0+\mathrm{Z}=0$$

ορίζει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών. Αν $\mathrm{E}^2-\Gamma\mathrm{Z}=0$ τότε, αυτές οι δύο παράλληλες ευθείες ταυτίζονται σε μία διπλή ευθεία.

7.2.2 Αν $\mathrm{A}\neq 0 \ \& \ \Gamma=0$

Περίπτωση 1 Αν $\mathrm{E}\neq 0$ τότε, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ορίζει μια παραβολή.

Περίπτωση 2 Αν $\mathrm{E}=0$ τότε, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ορίζει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών ή μια διπλή ευθεία.

7.2.3 Αν Α=Γ=0

Περίπτωση 1 Δεν είναι $\Delta=\mathrm{E}=0$ οπότε η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ ορίζει μια ευθεία.

Περίπτωση 2 Αν $\Delta=\mathrm{E}=0$ τότε $\mathrm{Z}=0$ άρα, η $\mathrm{A}x^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ δεν ορίζει κάποιο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα.

Το ζεύγος των παράλληλων ευθειών, μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση κωνικής τομής από επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα ενός κώνου, του οποίου η κορυφή είναι ένα επ΄ άπειρον σημείο του χώρου (σημείο του επ΄ άπειρον επιπέδου του χώρου), δηλαδή ενός κυλίνδρου.

Ακολουθεί ο σχετικός πίνακας που συνοψίζει την παραπάνω διερεύνηση.

<table>
<tr><td colspan="4">$Ax^2+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$A\Gamma \neq 0$</td><td colspan="3">$N=\frac{\Delta^2}{A}+\frac{E^2}{\Gamma}-Z$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$N>0$</td><td>$A>0,\ \Gamma>0$</td><td>Έλλειψη</td></tr>
<tr><td>$A<0,\ \Gamma<0$</td><td>Καμία πραγματική καμπύλη</td></tr>
<tr><td>$A\Gamma<0$</td><td>Υπερβολή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$N=0$</td><td>$A\Gamma>0$</td><td>Σημείο</td></tr>
<tr><td>$A\Gamma<0$</td><td>Ζεύγος τεμνόμενων ευθειών</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$N<0$</td><td>$A>0,\ \Gamma>0$</td><td>Καμία πραγματική καμπύλη</td></tr>
<tr><td>$A<0,\ \Gamma<0$</td><td>Έλλειψη</td></tr>
<tr><td>$A\Gamma<0$</td><td>Υπερβολή</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$A\Gamma=0$</td><td rowspan="2">$A=0,\ \Gamma\neq 0$</td><td>$\Delta\neq 0$</td><td>Παραβολή</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>Ζεύγος παράλληλων ευθειών, συμπιπτουσών αν $E^2-\Gamma Z=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A\neq 0,\ \Gamma=0$</td><td>$E\neq 0$</td><td>Παραβολή</td></tr>
<tr><td>$E=0$</td><td>Ζεύγος παράλληλων ευθειών, συμπιπτουσών αν $\Delta^2-AZ=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A=\Gamma=0$</td><td>Όχι $\Delta=E=0$</td><td>Ευθεία</td></tr>
<tr><td>$\Delta=E=0$</td><td>Trivial</td></tr>
</table>

Εφαρμογή 4

Να αναχθεί η εξίσωση $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ στην απλούστερη μορφή της. Αφού προσδιοριστεί, να σχεδιασθεί η καμπύλη 2ου βαθμού την οποία ορίζει η εξίσωση.

Βρίσκω την ορίζουσα $\delta_1=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0$

Από $\delta_1=0$ έπεται ότι η εξίσωση είναι παραβολική 2ου βαθμού.

Για την απλοποίηση της, αρχίζω με μια στροφή των αξόνων. Θα προσδιορίσω τη γωνία στροφής φ από $B\tan^2\varphi+(A-\Gamma)\tan\varphi-B=0$ η οποία στη συγκεκριμένη εφαρμογή γίνεται $2\tan^2\varphi-3\tan\varphi-2=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \tan\varphi=2 \\ \tan\varphi=\frac{-1}{2} \end{matrix}\right\}$

Αν $\tan\varphi=2$ τότε $\left\{\begin{matrix} \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}} \end{matrix}\right\}$ Οι αντίστοιχοι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι $x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$ και $y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$ οπότε το 1ο μέλος της δοθείσης εξίσωσης, παίρνω $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=$

$$(2x-y)^2-2x-14y+7=$$

$$5(y')^2-6\sqrt{5}\,x'-2\sqrt{5}\,y'+7$$

Άρα, στο σύστημα των συντεταγμένων x',y' η εξίσωση γίνεται $5(y')^2-6\sqrt{5}\,x'-2\sqrt{5}\,y'+7=0$

Στην $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$, ο συντελεστής του x' είναι διάφορος του μηδέν, άρα η εξίσωση ορίζει παραβολή και μπορεί να αναχθεί στη μορφή: $\Gamma'\left(y'\right)^2+2\Delta'x'=0$ οπότε η $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ γράφεται

$$5\left[\left(y'\right)^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}y'+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right]-6\sqrt{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0$$

ή ισοδυνάμως $\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0$

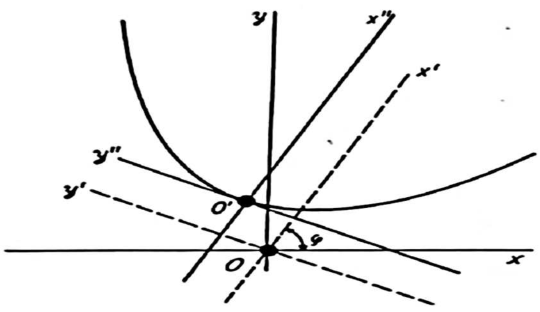
Εισάγω τώρα νέες συντεταγμένες x'',y'' θέτοντας $x'=x''+\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5}$

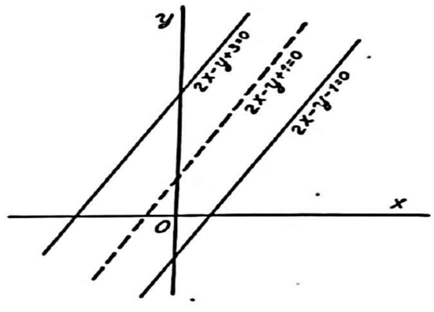
Αυτές οι σχέσεις αντιστοιχούν σε παράλληλη μεταφορά των αξόνων κατά:

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ στον άξονα Ox'

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ στον άξονα Oy'

Στο νέο σύστημα x'',y'' η εξίσωση της καμπύλης γίνεται $\left(y''\right)^2=6\frac{\sqrt{5}}{5}x''$ και πρόκειται για παραβολή με παράμετρο $p=3\frac{\sqrt{5}}{5}$ και κορυφή την αρχή των συντεταγμένων του συστήματος x'',y'' Η παραβολή, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τετμημένων του συστήματος x'',y'' και εκτείνεται απεριόριστα κατά την θετική φορά αυτού του άξονα. Οι συντεταγμένες της κορυφής, στο σύστημα συντεταγμένων x',y' είναι $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ και στο σύστημα x,y είναι $\left(\frac{-1}{5},\frac{3}{5}\right)$ βλέπε κάτω αριστερό σχήμα.





Εφαρμογή 5

Να βρεθεί το κέντρο της καμπύλης $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$

Οι εξισώσεις του κέντρου $\mathrm{M}\left(x_0,y_0\right)$ είναι $\left\{\begin{matrix}4x_0-2y_0+2=0\\-2x_0+y_0-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 2x_0-y_0+1=0$

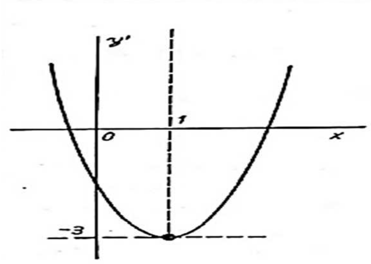
άρα, η καμπύλη δέχεται άπειρα κέντρα, που ανήκουν στην ευθείαν $2x-y+1=0$

Το 1ο μέλος της $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$ αναλύεται σε 2 πρωτοβάθμιους παράγοντας $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=(2x-y+3)(2x-y-1)$ άρα, είναι ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών $2x-y+3=0$ και $2x-y-1=0$

Η ευθεία $2x-y+1=0$(μεσοπαράλληλη των 2 παραπάνω παράλληλων ευθειών) είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων της καμπύλης (πάνω δεξιό σχήμα).

Εφαρμογή 6

Η εξίσωση $y=2x^2-4x-1$ ορίζει μια παραβολή με άξονα που κατευθύνεται προς τη θετική φορά του ημιάξονα Oy, διότι $\alpha=2>0$ Για να βρω την κορυφή της παραβολής, γράφω την εξίσωση ως $y+3=2(x-1)^2$ Για να φέρω αυτή την εξίσωση στην κανονική μορφή, μεταφέρω την αρχή των συντεταγμένων στο σημείο $(1,-3)$ την κορυφή της παραβολής.



Εφαρμογή 7

Της εξίσωσης $3x^2-30x+8y+65$ οι συντελεστές έχουν τιμές $A=3\neq 0, \Gamma=0, \Delta\neq 0$ άρα η εξίσωση ορίζει παραβολή. Για να βρω την κορυφή, την εστία και την παράμετρο της, διαιρώ όλα τα μέλη δια 3 και γράφω την εξίσωση στη μορφή $x^2-10x+25=\frac{-8}{3}y-\frac{65}{3}+\frac{75}{3}$ και στη συνέχεια $(x-5)^2=\frac{-8}{3}\left(y-\frac{5}{4}\right)$ έτσι

για την παραπάνω παραβολή, κορυφή είναι το σημείο $K\left(5,\frac{5}{4}\right)$ και $p=\frac{4}{3}$

Εφαρμογή 8

Η εξίσωση $25x^2+49y^2+150x-196y-804=0$ ορίζει μία έλλειψη με κύριο άξονα παράλληλο προς τον άξονα xx' του συστήματος αναφοράς, διότι είναι $A=25\neq 0,\ \Gamma=49\neq 0$ και $N>0$

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς το κέντρο, είναι $\frac{(x+3)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

Κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο $M(-3,2)$

Για τον μεγάλο και τον μικρό ημιάξονα α,β είναι αντίστοιχα $\alpha=7,\ \beta=5$

Εφαρμογή 9

Η εξίσωση $64x^2-25y^2+256x+300y-2244=0$ ορίζει, σύμφωνα με τον προηγούμενο πίνακα, μια υπερβολή, με εξίσωση $64(x^2+4x)-25(y^2-12y)=2244$ ή ισοδυνάμως $64(x+2)^2-25(y-6)^2=1600$ και τελικά $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{64}=1$

Κέντρο της είναι το σημείο $\mathrm{M}(-2,6)$ και οι ημιάξονες είναι μήκους 5 και 8

Εφαρμογή 10

Για την κωνική τομή με εξίσωση $9x^2-4y^2=0$ έχω $\mathrm{A\Gamma}\neq 0$ και ειδικότερα $\mathrm{A\Gamma}<0$, $\mathrm{N}=0$ άρα, η κωνική τομή που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση εκφυλίζεται σε δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών. Πράγματι $9x^2-4y^2=(3x-2y)(3x+2y)$ Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με $(3x-2y)(3x+2y)=0$ η οποία ορίζει τις δύο ευθείες $\begin{Bmatrix} 3x-2y=0 \\ 3x+2y=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=\dfrac{3x}{2} \\ y=\dfrac{-3x}{2} \end{Bmatrix}$

οι οποίες τέμνονται στην αρχή του συστήματος αναφοράς.

8. Γενική εξίσωση της καμπύλης 2ου βαθμού σε ομογενείς συντεταγμένες

Η μελέτη των κωνικών τομών από την άποψη των σημείων στο άπειρο, γίνεται πιο εύκολη όταν η εξίσωση της κωνικής δίνεται σε ομογενείς συντεταγμένες.

Η $f(x,\ y)=\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ σε ομογενή μορφή είναι $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\mathrm{A}x_1^2+\Gamma x_2^2+\mathrm{Z}x_3^2+2\mathrm{B}x_1x_2+2\Delta x_1x_3+2\mathrm{E}x_2x_3=0$ Τα σημεία στο άπειρο της κωνικής τομής $f(x,\ y)=\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ προκύπτουν από την $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\mathrm{A}x_1^2+\Gamma x_2^2+\mathrm{Z}x_3^2+2\mathrm{B}x_1x_2+2\Delta x_1x_3+2\mathrm{E}x_2x_3=0$ και από την εξίσωση $x_3=0$ (είναι η εξίσωση της ευθείας στο άπειρο του επιπέδου της κωνικής).
Οι συντεταγμένες των σημείων στο άπειρο, της κωνικής τομής είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(x_1,x_2)=0$ που προκύπτει όταν θέσω $x_3=0$ στην
$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\mathrm{A}x_1^2+\Gamma x_2^2+\mathrm{Z}x_3^2+2\mathrm{B}x_1x_2+2\Delta x_1x_3+2\mathrm{E}x_2x_3=0$

Γενικά, αν $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,....,\mathrm{P}_k$ είναι τα σημεία στο άπειρο, μιας αλγεβρικής καμπύλης (C_k), τότε οι ευθείες που ορίζονται από ένα τυχαίο σημείο P του επιπέδου προς τα σημεία $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,....,\mathrm{P}_k$ ονομάζονται ασυμπτωτικές διευθύνσεις της (C_k). Η ευθεία AP_k λέγεται ασύμπτωτη της (C_k), αν εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο P_k

Αν η αλγεβρική καμπύλη είναι μια κωνική τομή (C) με εξίσωση $f(x,\ y)=\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$ τότε οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις δίνονται από την εξίσωση $\mathrm{A}x_1^2+2\mathrm{B}x_1x_2+\Gamma x_2^2=0$

Άρα, είναι παράλληλες προς το ζεύγος ευθειών $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2=0$ των οποίων οι συντελεστές διεύθυνσης είναι οι ρίζες της $\Gamma m^2+2\mathrm{B}m+\mathrm{A}=0$ (όπου m είναι η κλίση σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων). Οι διευθύνσεις αυτές είναι πραγματικές (διαφορετικές ή ίδιες), ή φανταστικές, ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\delta_1=\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{B}^2$

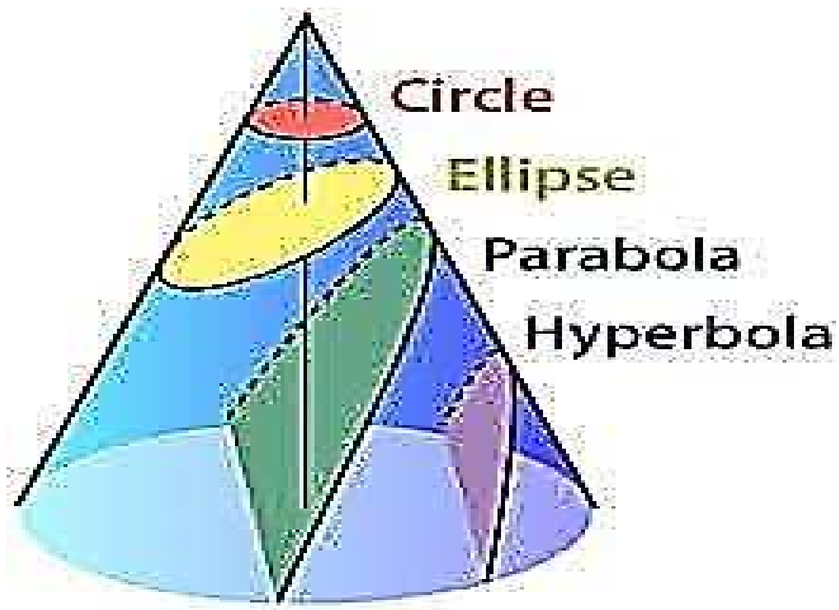
- Αν $\delta_1<0$, τότε η κωνική τομή έχει πραγματικά και διαφορετικά σημεία στο άπειρο και ονομάζεται υπερβολή
- Αν $\delta_1=0$, τότε η κωνική τομή έχει ένα μόνο πραγματικό σημείο στο άπειρο και ονομάζεται παραβολή.
- Αν $\delta_1>0$, τότε η κωνική τομή δεν έχει πραγματικά σημεία στο άπειρο και ονομάζεται έλλειψη.

Αποδεικνύεται ότι μια κωνική τομή (C) εκφυλίζεται σε δύο ευθείες αν και μόνο αν η διακρίνουσα της $f(x,y)$ είναι ίση με 0. Άρα, για να ορίζει η $f(x,y)=0$ μια μη εκφυλισμένη κωνική τομή, πρέπει $\delta \neq 0$. Συνοπτικά, ισχύουν τα ακόλουθα.

$\delta \neq 0$	$\delta_1<0$	Υπερβολή
	$\delta_1=0$	Παραβολή
	$\delta_1>0$	Έλλειψη
$\delta = 0$	$\delta_1<0$	Δυο πραγματικές ευθείες τεμνόμενες
	$\delta_1=0$	Δυο πραγματικές ευθείες παράλληλες ή συμπίπτουσες
	$\delta_1>0$	Δυο φανταστικές ευθείες συζυγείς

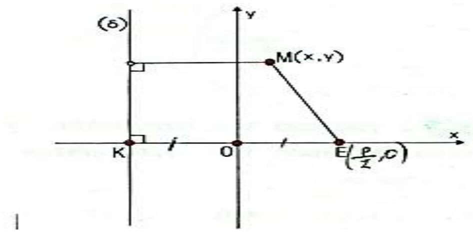
8.1 Εξίσωση εφαπτομένης της κωνικής $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$

Γενικά, η εξίσωση της εφαπτομένης μιας αλγεβρικής καμπύλης (C) με εξίσωση $f(x,y)=0$ στο σημείο $f(x_1,y_1)$ της, είναι $\dfrac{Y-y_1}{X-x_1}=\dfrac{-f_x'(x_1,y_1)}{f_y'(x_1,y_1)}$ που γράφεται και ως $\mathrm{A}x_1X+B\left(y_1X+x_1Y\right)+\Gamma y_1Y+\Delta\left(x_1+X\right)+\mathrm{E}\left(y_1+Y\right)+Z=0$



9. Εξισώσεις της παραβολής

Ορίζω ως παραβολή (C), με εστία το σταθερό σημείο E και διευθετούσα τη σταθερά ευθεία (δ), τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία είναι $d(\mathrm{M},\mathrm{E})=d(\mathrm{M},(\delta))$



9.1 Αναλυτική εξίσωση της παραβολής

Για να βρω την εξίσωση της παραβολής εκλέγω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy ως εξής: Αν K είναι η ορθή προβολή του σταθερού σημείου E στην ευθεία (δ), θεωρώ ως:

- αρχή O των αξόνων το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος KE
- άξονα των τετμημένων την ευθεία KE
- άξονα των τεταγμένων τη μεσοκάθετη του τμήματος KE. Έστω ότι

$\overline{KE}=p$. Είναι $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και $(\delta): x=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow (\delta): x+\frac{p}{2}=0$. Τότε, αν $\mathrm{M}(x,y)$ είναι σημείο του τόπου ισχύει $d(\mathrm{M},\mathrm{E})=d(\mathrm{M},(\delta))$ άρα

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

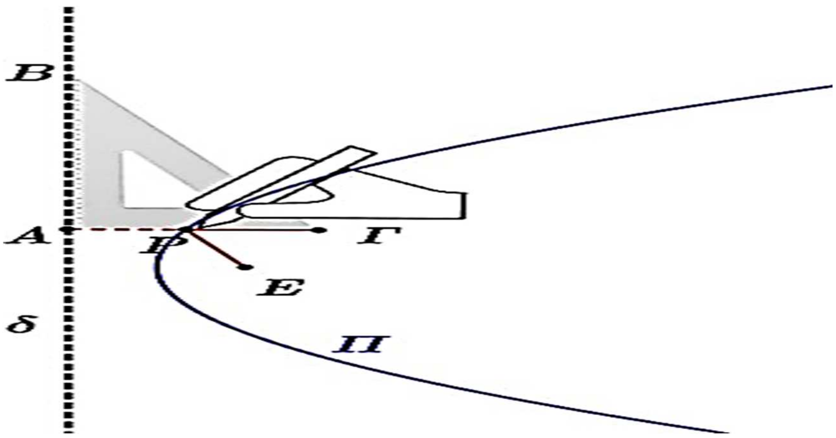
$$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$y^2=2px$ που είναι η εξίσωση της παραβολής, ως προς το σύστημα αξόνων που επέλεξα.

9.2 Κατασκευή παραβολής δεδομένης εστίας και διευθετούσας

Όταν δοθεί η διευθετούσα (δ) και η εστία E μιας παραβολής, τότε μπορώ να κατασκευάσω την παραβολής ως εξής: Παίρνω νήμα τόσου μήκους, όσο το μήκος μιας κάθετης πλευράς $\mathrm{A\Gamma}$ ενός γνώμονα $\mathrm{AB\Gamma}$ και το στερεώνω στην κορυφή Γ.

Το άλλο άκρο του νήματος, το στερεώνω στην εστία. Με τη μύτη του μολυβιού, τεντώνω μέρος του νήματος πάνω στην πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$. Στη συνέχεια, τοποθετώ την κάθετη πλευρά AB πάνω στη διευθετούσα και μετακινώ τον γνώμονα κατά μήκος της (δ). Τότε, η μύτη του μολυβιού διατρέχει το τόξο μιας παραβολής, αφού ισχύει $(\mathrm{PE})+(\mathrm{P\Gamma})=(\mathrm{A\Gamma})$ και $(\mathrm{AP})+(\mathrm{P\Gamma})=(\mathrm{A\Gamma})$ άρα, $(\mathrm{PE})=(\mathrm{AP})$



9.3 Στοιχεία της παραβολής

• Η ευθεία που διέρχεται από την εστία Ε και είναι κάθετη προς τη διευθετούσα (δ), ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.

• Το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονά της (Κ), ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.

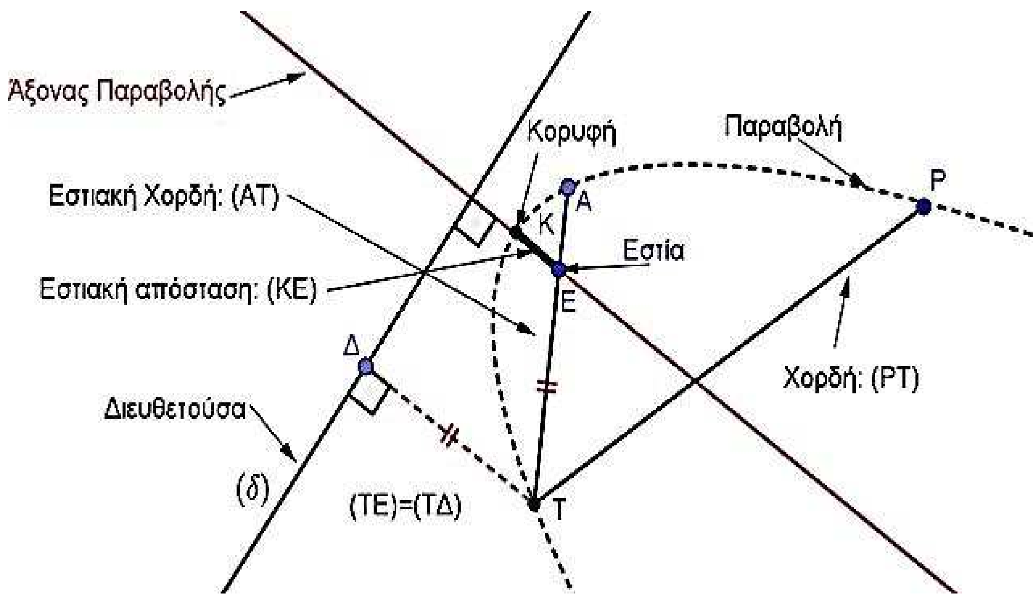
• Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει 2 σημεία της παραβολής ονομάζεται **χορδή**, ενώ η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία ονομάζεται **τέμνουσα** της παραβολής.

• Κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, ονομάζεται **διάμετρος** της παραβολής.

• **Εστιακή χορδή** ονομάζεται κάθε χορδή που διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής.

• Η εστιακή χορδή που διέρχεται από την εστία της παραβολής και είναι παράλληλη προς τη διευθετούσα (κάθετη στον άξονα της παραβολής), ονομάζεται **latus rectum**.

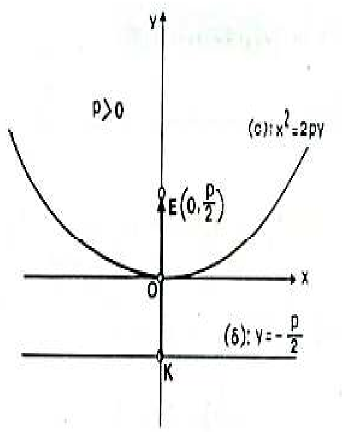
• Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΕ), που συνδέει την κορυφή Κ με την εστία Ε της παραβολής, ονομάζεται **εστιακή απόσταση.**

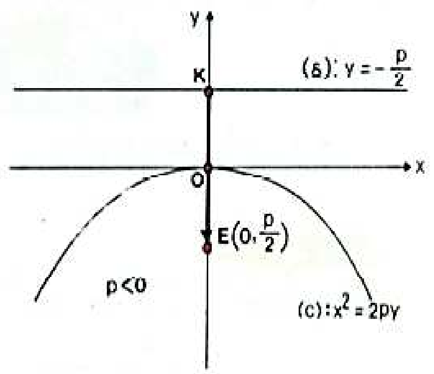


9.4 Μορφές της εξίσωσης της παραβολής

- Αν ζητώ την εξίσωση της παραβολής με εστία Ε και διευθετούσα (δ) και θεωρήσω την ευθεία ΚΕ ως άξονα των τεταγμένων, τη μεσοκάθετη του ΚΕ ως άξονα των τετμημένων και ονομάσω $\overline{KE} = p$ (όπου Κ είναι η ορθή προβολή του Ε στην (δ) τότε ως εξίσωση της παραβολής βρίσκω την $x^2 = 2py$

Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει κορυφή το $\text{O}(0,0)$ και είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'



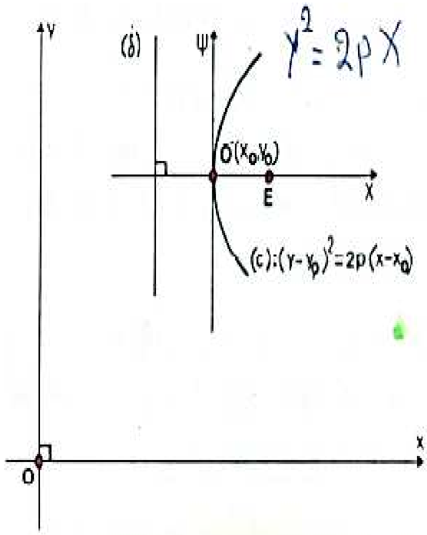


Ειδικά αν $p > 0$ άξονας συμμετρίας είναι ο θετικός ημιάξονας του yy', ενώ αν $p < 0$ άξονας συμμετρίας είναι ο αρνητικός ημιάξονας του xx'. Ακόμη είναι $\text{E}\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ και $(\delta): y = \dfrac{-p}{2}$

- Θεωρώ την παραβολή (C) του επιπέδου των αξόνων Oxy που ο άξονας συμμετρίας της είναι παράλληλος προς τον άξονα xx' και η κορυφή της $\text{O}'(x_0, y_0)$ είναι διάφορη του $\text{O}(0,0)$. Κάνω παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο $\text{O}'XY$.

Αν Μ είναι σημείο της παραβολής (C) με συντεταγμένες (x,y) ως προς το Oxy και (Χ,Ψ) ως προς το $\text{O}'XY$ ξέρω ότι είναι:

$$\begin{Bmatrix} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{Bmatrix}$$



Όμως η παραβολή (C) ως προς το σύστημα $\text{O}'XY$, έχει εξίσωση $Y^2 = 2pX$ άρα ως προς το αρχικό σύστημα Oxy θα έχει εξίσωση, $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

Επιπλέον, είναι $E\left(\dfrac{p}{2}+x_0, y_0\right)$ και $\delta: x = -\dfrac{p}{2}+x_0$ άρα, η εξίσωση $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή $O'(x_0, y_0)$, εστία

$E\left(\frac{p}{2}+x_0, y_0\right)$, διευθετούσα $(\delta): x=-\frac{p}{2}+x_0$ και άξονα συμμετρίας παράλληλο στον xx'. Ανάλογα συμπεράσματα έχω και για την παραβολή (C)που ο άξονας συμμετρίας της είναι παράλληλος προς τον άξονα yy'. Άρα, η εξίσωση $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή $O'(x_0, y_0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2}+x_0, y_0\right)$, διευθετούσα $(\delta): y=-\frac{p}{2}+y_0$ και άξονα συμμετρίας παράλληλο στον yy'

9.5 Παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής

Οι συναρτήσεις $\left.\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}\right\}$ $t\in\mathbb{R}$ αν αντικατασταθούν στην αναλυτική εξίσωση $y^2=2px$ της παραβολής, προκύπτει ταυτότητα ως προς t, άρα είναι παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής (C): $y^2=2px$

Παρατήρηση. Για την παραβολή $x^2=2py$ παραμετρικές εξισώσεις είναι οι $\left.\begin{cases} x=2pt \\ y=2pt^2 \end{cases}\right\}$ με $t\in\mathbb{R}$

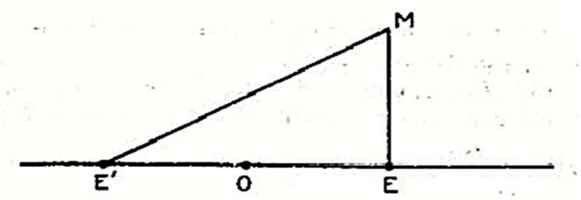
Για την παραβολή $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ παραμετρικές εξισώσεις είναι οι $\left.\begin{cases} x=x_0+2pt \\ y=y_0+2pt^2 \end{cases}\right\}$ με $t\in\mathbb{R}$

Για την παραβολή $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$παραμετρικές εξισώσεις είναι οι $\left.\begin{cases} x=x_0+2pt \\ y=y_0+2pt^2 \end{cases}\right\}$ με $t\in\mathbb{R}$

10. Η υπερβολή ως γεωμετρικός τόπος

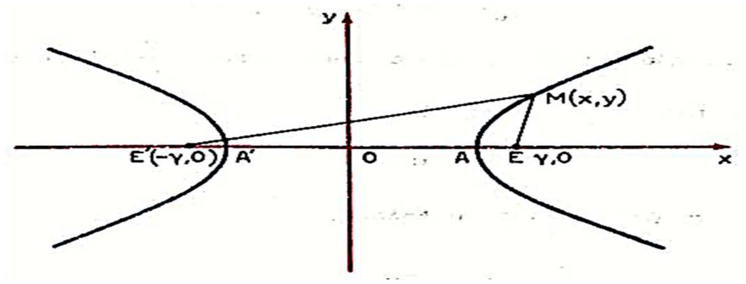
Υπερβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, για καθένα από τα οποία η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών του από 2 σταθερά σημεία είναι σταθερή. Τα 2 σταθερά σημεία λέγονται **εστίες** της υπερβολής και η μεταξύ τους απόσταση λέγεται **εστιακή απόσταση**.

Αν Ε και Ε′ είναι οι εστίες μιας υπερβολής (C), τότε έχω τις σχέσεις $|\overrightarrow{EE'}|=2\gamma$ $\left||\overrightarrow{E'M}|-|\overrightarrow{EM}|\right|=2\alpha$, α = σταθερό.



10.1 Εξίσωση της υπερβολής

Για να βρω την εξίσωση της υπερβολής, εκλέγω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy με άξονα των x την ευθεία ΕΕ′ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του ΕΕ′ Στο σύστημα αυτό εστίες είναι τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ Για το τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ της υπερβολής, από το τρίγωνο $\mathrm{MEE'}$ είναι $|ME-ME'|<EE' \Leftrightarrow 2\alpha<2\gamma \Leftrightarrow \alpha<\gamma$



$$\left|d(M,E)-d(M,E')\right|=2a \Leftrightarrow$$

$$\left|\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\right|=2a \Leftrightarrow$$

$$\left|\sqrt{x^2+y^2+\gamma^2-2\gamma x}-\sqrt{x^2+y^2+\gamma^2+2\gamma x}\right|=2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+y^2+\gamma^2-2\gamma x\right)+\left(x^2+y^2+\gamma^2+2\gamma x\right)-2\sqrt{\left(\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)-2\gamma x\right)\left(\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)+2\gamma x\right)}=4\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$2\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)-4\alpha^2=2\sqrt{\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)-4\gamma^2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\gamma^2x^2}=\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)-2a^2 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)-2\alpha\geq 0\\ \left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\gamma^2x^2=\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2+4a^4-4a^2\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\left(x^2-a^2\right)+y^2+\left(\gamma^2+a^2\right)\geq 0\\ \left(\gamma^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(\gamma^2-a^2\right)\end{cases}\right\}$$

Επειδή είναι $\gamma>\alpha$ συνάγω ότι μπορώ να θέσω $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$. Έτσι έχω

$$\left.\begin{cases}\left(x^2-a^2\right)+y^2+\beta^2\geq 0\\ \beta^2x^2-a^2y^2=a^2\beta^2\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\left(x^2-a^2\right)+y^2+\beta^2\geq 0\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\end{cases}\right\}$$

Από $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $\dfrac{x^2}{a^2}\geq 1 \Rightarrow x^2\geq a^2 \Rightarrow x^2-a^2\geq 0 \Rightarrow x^2-a^2+y^2+\beta^2\geq 0$

Ώστε αν $\mathrm{M}(x,y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου τότε $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

Άρα, η εξίσωση της υπερβολής ως προς το σύστημα αξόνων που επέλεξα είναι η $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ Αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν

$M(x,y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου που επαληθεύει την $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$, τότε ισχύει $\left|(ME')-(ME)\right|=2\alpha$ που σημαίνει ότι το M είναι το σημείο της παραπάνω υπερβολής. Άρα, η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α, είναι η $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1}$ με $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

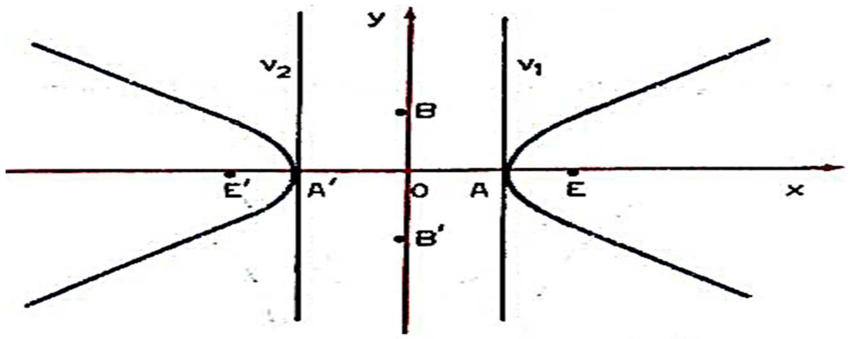
10.2 Ιδιότητες της υπερβολής

• Η $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δεν μεταβάλλεται όταν θέσω όπου:

x το $-x$ και $y=y$ ή
y το $-y$ και $x=x$ ή
x το $-x$ και όπου y το $-y$

Άρα, η υπερβολή έχει τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy ως άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων O ως κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία $E'E$ είναι ο άξονας συμμετρίας της υπερβολής και το μέσο του $E'E$ είναι το κέντρο συμμετρίας της.

• Η $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δίνει $\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{\beta^2}$. Άρα, $\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0$, δηλαδή όλα τα σημεία της υπερβολής ικανοποιούν την $|x|\geq a$ δηλαδή βρίσκονται έξω από την λωρίδα των ευθειών v_1 και v_2 οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις $x=a$ και $x=-a$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, η υπερβολή αποτελείται από 2 χωριστούς κλάδους.



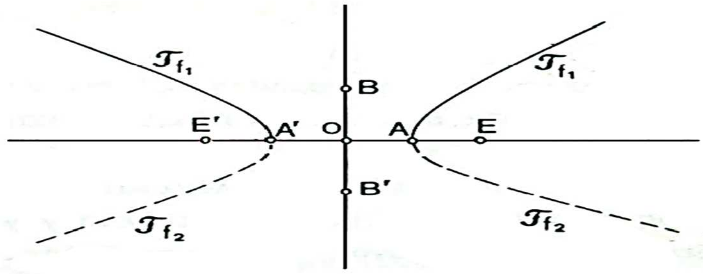
Δίνεται η υπερβολή (C) η οποία ορίζεται από την εξίσωση $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

• Για $y=0$ ο άξονας Ox τέμνει την υπερβολή στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$ και λέγεται **πρωτεύων άξονας**.

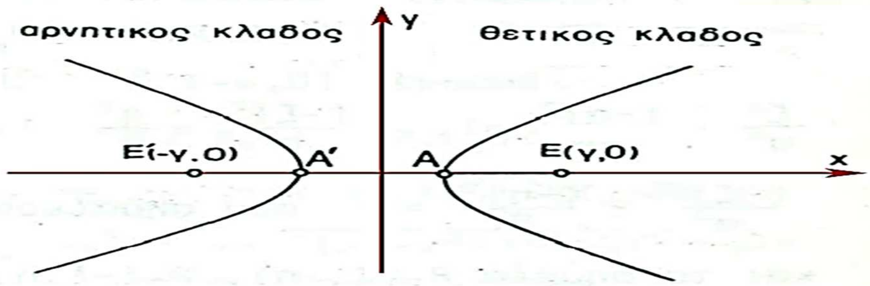
• Για $x=0$ ο άξονας Oy δεν τέμνει την υπερβολή και λέγεται **δευτερεύων άξονας**. Η αρχή O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής. Πάνω στον δευτερεύοντα άξονα λαμβάνω τα σημεία $B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$. Το μήκος (B,B') λέγεται **μήκος του δευτερεύοντα άξονα**. Το μήκος (A,A') λέγεται **μήκος του πρωτεύοντα άξονα**. Τα A', A λέγονται **κορυφές** της υπερβολής και είναι $(A'A)=2\alpha$

• **Εκκεντρότητα** ε της υπερβολής ονομάζω τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή $\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}}$ για $\gamma > \alpha \Rightarrow \varepsilon > 1$

• Η καμπύλη C της υπερβολής, είναι η ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - a^2}$, $f_2(x) = \frac{-\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - a^2}$ με $D(f_1) = D(f_2) = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ που προκύπτουν αν η εξίσωση της υπερβολής λυθεί ως προς y . Παρατηρώ ότι $R(f_1) = [0, +\infty)$ και $R(f_2) = (-\infty, 0]$

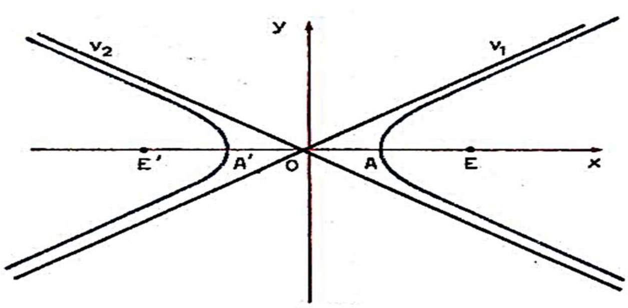


• Ονομάζω **θετικό κλάδο** της υπερβολής εκείνον που τα σημεία του έχουν θετικές τετμημένες. **Αρνητικό κλάδο** της υπερβολής ονομάζω εκείνον που τα σημεία του έχουν αρνητικές τετμημένες.



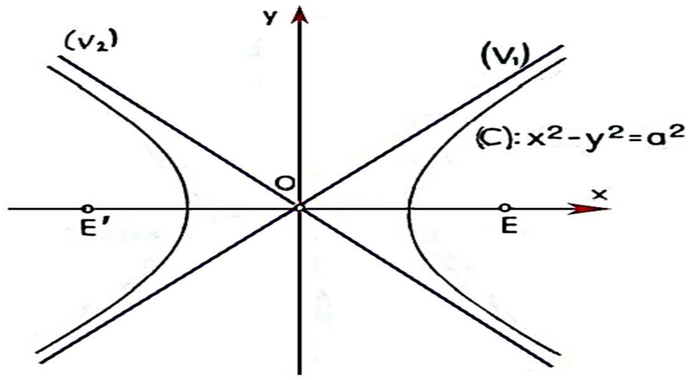
10.4 Συζυγείς υπερβολές

Έστω η υπερβολή (C) η οποία ορίζεται από την $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Από αυτή την εξίσωση λαμβάνω μία άλλη υπερβολή (C_1) η οποία ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ για την οποία ο άξονας Oy είναι πρωτεύοντας άξονας και ο άξονας Ox δευτερεύοντας άξονας. Οι υπερβολές (C) και (C_1), που ορίζονται από τις παραπάνω εξισώσεις λέγονται **συζυγείς**. Ο πρωτεύον άξονας της (C) είναι δευτερεύων άξονας της (C_1) και αντίστροφα ο πρωτεύων άξονας της (C_1) είναι δευτερεύων της (C)



10.5 Ισοσκελής υπερβολή

Η υπερβολή $C:\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ όταν $\alpha=\beta$, λέγεται ισοσκελής υπερβολή και ορίζεται από την εξίσωση $C: x^2-y^2=\alpha^2$

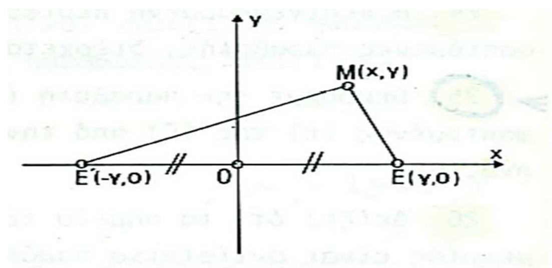


11. Εξισώσεις της έλλειψης

Ορίζω ως έλλειψη (C), με εστίες τα σταθερά σημεία E,E' τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M και του επιπέδου για τα οποία είναι d(M,E)+d(M, E')=2α, α=σταθερό. Η σταθερή απόσταση $d(\mathrm{E},\mathrm{E}')=2\gamma$ λέγεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.

11.1 Αναλυτική εξίσωση της έλλειψης

Για να βρω την εξίσωση της έλλειψης, εκλέγω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy ως εξής: Ως άξονα τετμημένων θεωρώ την ευθεία EE' και ως άξονα τεταγμένων τη μεσοκάθετη του EE'



Για το τυχαίο σημείο M της έλλειψης, από το τρίγωνο MEE' είναι $\mathrm{ME}+\mathrm{ME}'>\mathrm{EE}' \Leftrightarrow 2\alpha>2\gamma \Leftrightarrow \alpha>\gamma$ Τότε, αφού $\mathrm{E}(\gamma,0)$, $\mathrm{E}'(-\gamma,0)$ το $\mathrm{M}(x,y)$ είναι το σημείο της έλλειψης αν και μόνο αν $d(M,E)+d(M,E')=2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+\gamma^2-2\gamma x}+\sqrt{x^2+y^2+\gamma^2+2\gamma x}=2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+\gamma^2-2\gamma x\right)+\left(x^2+y^2+\gamma^2+2\gamma x\right)+2\sqrt{\left[x^2+y^2+\gamma^2-2\gamma x\right]\left[x^2+y^2+\gamma^2+2\gamma x\right]}=4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)+2\sqrt{\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\gamma^2x^2}=4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\gamma^2x^2}=2\alpha^2-\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2\alpha^2-x^2-y^2-\gamma^2\ge 0\\ \left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\gamma^2x^2=4\alpha^4+\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)^2-4\alpha^2\left(x^2+y^2+\gamma^2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left(\alpha^2-x^2\right)+\left(\alpha^2-\gamma^2\right)-y\ge 0\\ \left(\alpha^2-\gamma^2\right)x^2+\alpha^2\gamma^2=\alpha^2\left(\alpha^2-\gamma^2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha^2-\gamma^2=\beta^2\\ \left(\alpha^2-x^2\right)+\beta^2-y^2\ge 0\\ \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left(\alpha^2-x^2\right)+\left(\beta^2-y^2\right)\ge 0\\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{x^2}{\alpha^2}\le 1\Rightarrow \alpha^2\ge x^2\Rightarrow \alpha^2-x^2\ge 0\\ \dfrac{y^2}{\beta^2}\le 1\Rightarrow \beta^2\ge y^2\Rightarrow \beta^2-y^2\ge 0\end{matrix}\right\}$$

Παρατηρώ ότι από $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $\left(\alpha^2-x^2\right)+\left(\beta^2-y^2\right)\ge 0$ άρα

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left(\alpha^2-x^2\right)+\left(\beta^2-y^2\right)\ge 0\\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

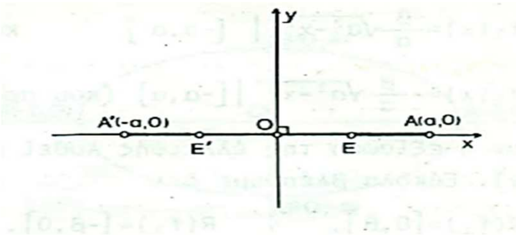
Ώστε, το σημείο $\mathrm{M}\left(x,y\right)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο αν και μόνο αν $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

Άρα, η εξίσωση της έλλειψης, ως προς το σύστημα αξόνων επέλεξα, είναι η $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

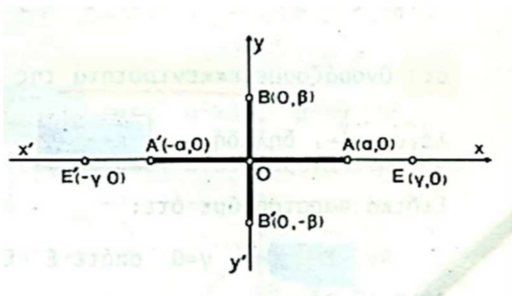
11.2 Μορφή και στοιχεία μίας έλλειψης (C): $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

Παρατηρώ ότι:

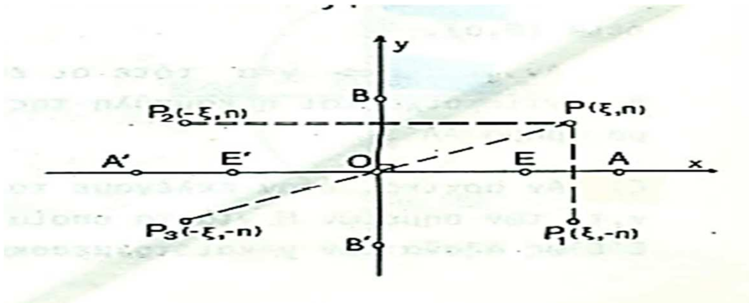
α) Για $y=0$ η εξίσωση της έλλειψης δίνει $x=\pm\alpha$ Άρα, η καμπύλη (C) τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,0)$ και $\mathrm{A}'(-\alpha,0)$ που λέγονται **κύριες κορυφές** ενώ το τμήμα AA' για το οποίο είναι $\mathrm{AA}'=2\alpha$ λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης.



β) Για $x=0$ η εξίσωση της έλλειψης δίνει $y=\pm\beta$ άρα, η καμπύλη (C)τέμνει τον άξονα yy' στα σημεία $\mathrm{B}(0,\beta)$ και $\mathrm{B}'(0,-\beta)$ που λέγονται **δευτερεύουσες κορυφές** ενώ το τμήμα BB', για το οποίο είναι $\mathrm{BB}'=2\beta$ λέγεται **μικρό άξονα** της έλλειψης.



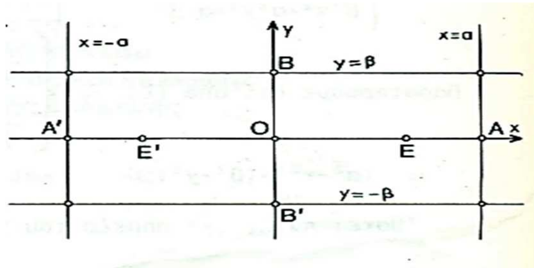
γ) Αν το σημείο P(ξ, η) $\in(C)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}+\dfrac{(-\eta)^2}{\beta^2}=1\\ \dfrac{(-\xi^2)}{\alpha^2}+\dfrac{\eta^2}{\beta^2}=1\\ \dfrac{(-\xi^2)}{\alpha^2}+\dfrac{(-\eta)^2}{\beta^2}=1\end{array}\right\}$ που σημαίνουν ότι, τα σημεία $\mathrm{P}_1(\xi,-\eta)$, $\mathrm{P}_2(-\xi,\eta)$, $\mathrm{P}_3(-\xi,-\eta)$ ανήκουν στην έλλειψη και άρα, η καμπύλη της είναι συμμετρική ως προς τους άξονες xx', yy' και την αρχή O των αξόνων.



δ) Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει ότι:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{x^2}{\alpha^2} \le 1 \\ \dfrac{y^2}{\beta^2} \le 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 \le \alpha^2 \\ y^2 \le \beta^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |x| \le \alpha \\ |y| \le \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\alpha < x \le \alpha \\ -\beta < y \le \beta \end{Bmatrix}$$

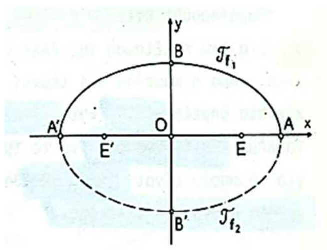
Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη της έλλειψης είναι εσωτερική του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με εξισώσεις πλευρών $x=\alpha$, $x=-\alpha$, $y=\beta$, $y=-\beta$



ε) Η καμπύλη (C) της έλλειψης είναι η ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων

$$F_1(x)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\Big|[-\alpha,\alpha]$$

$$F_2(x)=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\Big|[-\alpha,\alpha]$$

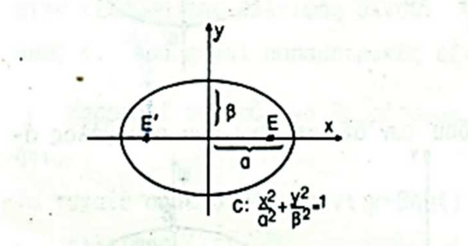


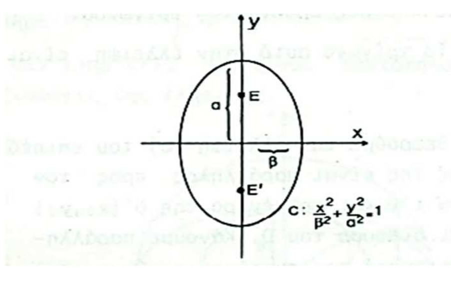
(που προκύπτουν αν η εξίσωση της έλλειψης λυθεί ως προς y). Βλέπω ότι $R(f_1)=[0,\beta]$ και $R(f_2)=[-\beta,0]$

στ) Ονομάζω **εκκεντρότητα** της έλλειψης και θα τη συμβολίζω με ε, τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$ δηλαδή $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$. Επειδή $\gamma<\alpha \Rightarrow \varepsilon<1$ Παρατηρώ ότι:

- Αν $\varepsilon=0 \Leftrightarrow \gamma=0$ οπότε $\mathrm{E} \equiv \mathrm{E}'$ και α=β, τότε η έλλειψη είναι περιφέρεια $(0,\alpha)$
- Αν $\varepsilon=1 \Leftrightarrow \gamma=\alpha$ τότε οι εστίες E,E' ταυτίζονται με τις κορυφές A,A' αντίστοιχα και η καμπύλη της έλλειψης εκφυλίζεται σε διπλό ευθύγραμμο τμήμα AA'

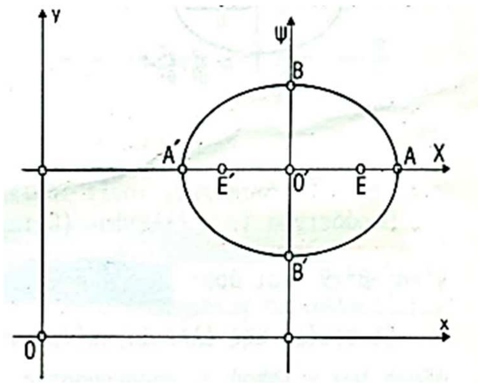
ζ) Αρχικά, όταν εκλέξω το σύστημα αξόνων προκειμένου να βρω τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία $|\overrightarrow{ME}|+|\overrightarrow{\mathrm{ME}'}|=2\alpha$, θεωρούσα την EE' ως άξονα των y και τη μεσοκάθετη του EE' ως άξονα των x και είχα $\mathrm{E}(0,\gamma)$, $\mathrm{E}'(0,-\gamma)$ Δουλεύοντας ομοίως, βρίσκω ότι ο γεωμετρικός τόπος (έλλειψη) έχει εξίσωση με $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ όπου και πάλι $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$





η) Θεωρώ την έλλειψη (C) του επιπέδου των αξόνων Oxy, που ο μεγάλος άξονας της είναι παράλληλος προς τον άξονα xx' και το κέντρο της $O'(x_0, y_0)$ είναι διάφορο του O. Κάνω παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο $O'XY$. Αν M είναι σημείο της έλλειψης (C) με συντεταγμένες (x, y) ως προς το Oxy και (X, Y) ως προς το $O'XY$ είναι:

$$\begin{Bmatrix} x = x_0 + X \\ y = y_0 + \Psi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X = x - x_0 \\ \Psi = y - y_0 \end{Bmatrix} (1)$$



Όμως η έλλειψη (C) ως προς το σύστημα $O'XY$ έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ άρα λόγω των (1) έχει εξίσωση $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$ ως προς το αρχικό σύστημα Oxy

Οι εστίες είναι $E(x_0 + \gamma,\ y_0)$, $E'(x_0 - \gamma,\ y_0)$ και οι κορυφές είναι $A(x_0 + \alpha,\ y_0)$, $A'(x_0 - \alpha,\ y_0)$, $B(x_0,\ y_0 + \beta)$, $B'(x_0,\ y_0 - \beta)$. Άρα, η

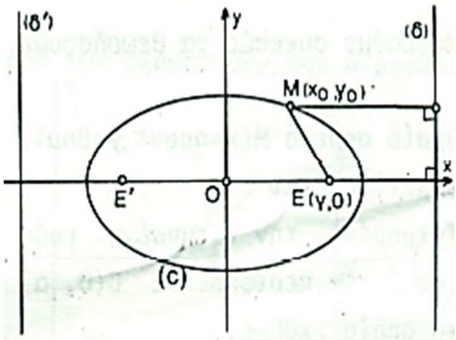
Εξίσωση $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$, είναι εξίσωση έλλειψης με κέντρο το $O'(x_0, y_0)$ και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον xx'. Όμοια βρίσκω ότι η εξίσωση $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} = \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha < \beta$, είναι εξίσωση έλλειψης με κέντρο το $O'(x_0, y_0)$ και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον yy'

11.2.1 Διευθετούσες της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$

Διευθετούσα της (C) αντίστοιχη με την εστία $E(\gamma, 0)$ είναι η ευθεία (δ): $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$

Διευθετούσα της (C), αντίστοιχη με την εστία $E'(-\gamma, 0)$ είναι η ευθεία (δ): $x = \frac{-\alpha^2}{\gamma}$

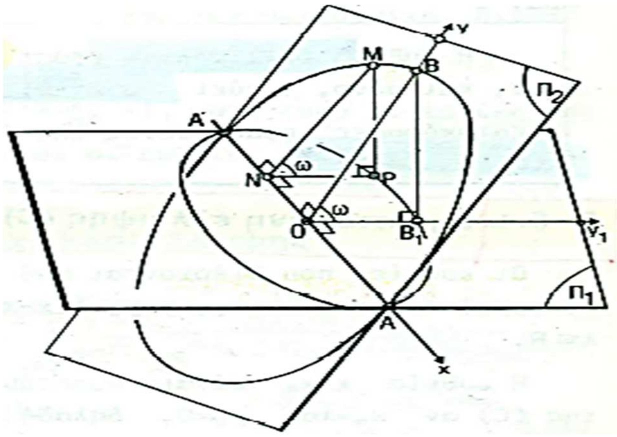
Επειδή $x = \left|\pm\frac{\alpha^2}{\gamma}\right| = \alpha\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| = \alpha$, $\frac{1}{\varepsilon} > \alpha$ έπεται ότι οι διευθετούσες (δ), (δ') της έλλειψης δεν την τέμνουν.



11.3 Η έλλειψη ως προβολή κύκλου

Πρόταση

Η ορθή προβολή του κύκλου (0,R) σε επίπεδο (Π), που δεν είναι παράλληλο ή κάθετο με το επίπεδο του κύκλου, είναι έλλειψη.



12. Εφαρμογές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη ναυτιλία

Οι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού (τετραγωνικές εξισώσεις) αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο στην εμπορική ναυτιλία, καθώς επιτρέπουν τη μοντελοποίηση φαινομένων όπου η μεταβολή ενός μεγέθους δεν είναι γραμμική, αλλά εξαρτάται από το τετράγωνο μιας παραμέτρου. Ακολουθούν οι κυριότερες εφαρμογές τους, στην πράξη:

12.1 Κατανάλωση καυσίμου και ταχύτητα

Μία κρίσιμη σχέση στη ναυτιλία είναι μεταξύ της ταχύτητας του πλοίου υ και της ισχύος που απαιτείται από την κύρια μηχανή. Η αντίσταση του νερού αυξάνεται, περίπου με το τετράγωνο της ταχύτητας. Η κατανάλωση του καυσίμου ανά μίλι, προσεγγίζεται από μια δευτεροβάθμια σχέση της μορφής $C = a\upsilon^2 + \beta u + \gamma$

Οι εταιρείες χρησιμοποιούν εξισώσεις για να βρουν την οικονομική ταχύτητα, που ελαχιστοποιεί το κόστος των καυσίμων, σε σχέση με τον χρόνο παράδοσης του φορτίου.

Εφαρμογή 11

Πλοίο καταναλώνει ημερησίως 25 tn καυσίμου όταν ταξιδεύει με 10 κόμβους. Αν αυξηθεί η ταχύτητα στους 12 κόμβους, πόση θα είναι η νέα κατανάλωση;

Βρίσκω τη σταθερά k. Είναι $25 = k10^2 \Leftrightarrow 25 = k100 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = k$

Υπολογισμός της νέας κατανάλωσης. $\frac{1}{4}12 \cdot 12 = 3 \cdot 12 = 36$ tn ημερησίως

Μια μικρή αύξηση της ταχύτητας (2 κόμβοι) προκάλεσε τεράστια αύξηση στην κατανάλωση (11 τόνους), λόγω του τετραγώνου.

12.2 Ευστάθεια και μετακεντρικό ύψος

Η ασφάλεια του πλοίου, εξαρτάται από την ικανότητά του να επανέρχεται στην όρθια θέση μετά από μια μικρή κλίση. Κατά τον υπολογισμό της ροπής ευστάθειας για μικρές γωνίες κλίσης θ, η μετατόπιση του κέντρου άνωσης περιγράφεται από γεωμετρικές σχέσεις που οδηγούν σε δευτεροβάθμιους όρους. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού, χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του GM (μετακεντρικό ύψος). Αν το GM είναι πολύ μικρό, τότε το πλοίο κινδυνεύει με ανατροπή· αν είναι πολύ μεγάλο, τότε οι κινήσεις του είναι απότομες και επικίνδυνες για το πλήρωμα και το φορτίο.

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της στάθμης του φορτίου, της κατακόρυφης θέσης του κέντρου βάρους και της αρχικής μεταβλητής ευστάθειας (GM). Η σχέση για το ύψος του βυθίσματος (T) είναι $V = L \cdot B \cdot T - k \cdot T^2$ όπου: V ο όγκος του βυθίσματος,

L το μήκος του πλοίου

B το πλάτος του πλοίου

k σταθερός συντελεστής εξαρτώμενος από το σχήμα της γάστρας.

Εφαρμογή 12

Έστω ότι ο όγκος του νερού που εκτοπίζει ένα πλοίο δίνεται από τη σχέση $V = 100T - 2T^2$ όπου V το βύθισμα του πλοίου σε m^3

T το βύθισμα του πλοίου σε m

Αν το πλοίο εκτοπίζει $200m^3$ νερού, ποιο είναι το βύθισμα του;

Είναι $200 = 100T - 2T^2 \Leftrightarrow$

$$100 = 50T - T^2 \Leftrightarrow$$

$$T^2 - 50T + 100 = 0 \Leftrightarrow T = \begin{Bmatrix} 47,92\ m \\ 2,085\ m \end{Bmatrix}$$ Δεκτό βύθισμα είναι μόνο το $2,085\ m$

12.3 Απόσταση ακινητοποίησης

Όταν ένα πλοίο πρέπει να σταματήσει, τότε η απόσταση που θα διανύσει εξαρτάται από την αδράνεια και από την αντίσταση του νερού. Η επιβράδυνση, ενώ είναι απαραίτητη για την αποφυγή των συγκρούσεων και για τον ασφαλή ελιγμό σε στενά περάσματα ή κατά την προσέγγιση σε λιμάνι, δεν είναι σταθερή. Η απόσταση d μέχρι την πλήρη ακινητοποίηση, μοντελοποιείται ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας υ χρησιμοποιώντας τη σχέση $d = k\upsilon^2$ (όπου k είναι σταθερά που εξαρτάται από το εκτόπισμα και το σχήμα της γάστρας).

12.4 Ναυτική αρχιτεκτονική

Οι ναυπηγοί, χρησιμοποιούν παραβολικές προσεγγίσεις για να υπολογίσουν τα χαρακτηριστικά του πλοίου, σε διαφορετικά βυθίσματα. Η επιφάνεια της ισάλου γραμμής ή ο όγκος του βυθισμένου τμήματος, υπολογίζονται με χρήση του κανόνα του Simpson, ο οποίος βασίζεται στην παραδοχή ότι οι καμπύλες του πλοίου μπορούν να χωριστούν σε τμήματα που ακολουθούν δευτεροβάθμιες παραβολές. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού, χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου που μπορεί να μεταφέρει το πλοίο, χωρίς να ξεπεράσει το επιτρεπόμενο βύθισμα.

12.5 Ραντάρ και συστήματα εντοπισμού

Τα συστήματα ναυτιλίας (Radar, GPS) βασίζονται στη γεωμετρία και στη φυσική των κυμάτων. Ο προσδιορισμός της θέσης ενός στόχου στο ραντάρ, περιλαμβάνει την επίλυση συστημάτων που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες και δευτεροβάθμιους όρους (εξισώσεις κύκλων ή σφαιρών για το GPS). Οι εξισώσεις 2ου βαθμού χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό CPA (Closest Point of Approach), δηλαδή του σημείου στο οποίο δύο πλοία θα βρεθούν στη μικρότερη μεταξύ τους απόσταση, ώστε να ληφθούν μέτρα αποφυγής σύγκρουσης.

13. Εφαρμογές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης για μηχανικούς

Ακολουθούν οι εξειδικευμένες εφαρμογές στον τομέα της μηχανής:

13.1 Καμπύλη ισχύος και στροφών μηχανής

Η σχέση μεταξύ των στροφών της κύριας μηχανής (RPM) και της ισχύος (P) που αποδίδει η προπέλα, είναι θεμελιώδης για τη λειτουργία του μηχανοστασίου. Η ροπή περιγράφεται από δευτεροβάθμιες σχέσεις σε συνάρτηση με τις στροφές $\mathrm{M} = \alpha n^2 + \beta n$ και χρησιμοποιείται για την αποφυγή υπερφόρτωσης της μηχανής σε δύσκολες καιρικές συνθήκες.

13.2 Πτώση πίεσης και ροή ρευστών

Στο μηχανοστάσιο, υπάρχει δίκτυο σωληνώσεων μήκους χιλιομέτρων (καύσιμα, λιπαντικά, υγρά ψύξης). Η κίνηση των υγρών, απαιτεί αντλίες. Η πτώση πίεσης ΔP λόγω της τριβής κατά μήκος ενός σωλήνα, αυξάνεται με το τετράγωνο της ταχύτητας ροής του υγρού $\Delta P = k\upsilon^2$

Εφαρμογή 13

Αντλία παροχής $Q = 50\ \dfrac{m^3}{h}$ προκαλεί πτώση πίεσης στο δίκτυο $\Delta P = \dfrac{4}{10}\ bar$.

Αν αυξήσω τις στροφές ώστε η παροχή να πάει στα $Q = 100\ \dfrac{m^3}{h}$ (διπλάσια), ποια θα είναι η νέα πτώση πίεσης του δικτύου;

$$\Delta P = cQ^2 \Leftrightarrow \frac{4}{10} = c50\cdot 50 \Leftrightarrow 4 = c25000 \Leftrightarrow c = \frac{4}{25000} = \frac{2}{12500}$$

Η νέα πτώση πίεσης είναι $\Delta P = cQ^2 = \dfrac{2}{12500}100\cdot 100 = \dfrac{2}{125}100 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6\ bar$

Η αντίσταση του δικτύου αυξήθηκε από 0,4 σε 1,6 bar. Ο μηχανικός, καταλαβαίνει ότι η αντλία θα ζοριστεί πολύ περισσότερο από όσο αναμενόταν γραμμικά.

13.3 Καταπονήσεις των αξόνων

Ο άξονας που συνδέει την κύρια μηχανή με την προπέλα, δέχεται τεράστιες δυνάμεις στρέψης και κάμψης. Η κατανομή των τάσεων σε έναν κυλινδρικό άξονα κατά τη διάρκεια της περιστροφής και τα φαινόμενα κόπωσης των μετάλλων, περιγράφονται από εξισώσεις που περιλαμβάνουν τετραγωνικούς όρους της ακτίνας ή της απόκλισης. Ο μηχανικός, παρακολουθεί τις δονήσεις. Αν η συχνότητα δόνησης προσεγγίσει την ιδιοσυχνότητα του άξονα (που υπολογίζεται με δευτεροβάθμιες ρίζες), αυτός μπορεί να σπάσει.

13.4 Θερμοδυναμική και μετάδοση θερμότητας

Η απόδοση ενός εναλλάκτη θερμότητας σε συνάρτηση με τη διαφορά θερμοκρασίας και την παροχή του ψυκτικού μέσου, μοντελοποιείται με δευτεροβάθμιες καμπύλες απόδοσης. Ο μηχανικός πρέπει να γνωρίζει αν η αύξηση της παροχής νερού ψύξης θα έχει γραμμικό αποτέλεσμα ή αν θα φτάσει σε ένα σημείο κορεσμού (το ακρότατο της παραβολής), πέρα από το οποίο η περαιτέρω κατανάλωση ενέργειας για την αντλία είναι άσκοπη.

13.5 Ηλεκτρικές γεννήτριες και απώλειες

Το πλοίο, είναι ένα αυτόνομο εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Οι απώλειες ενέργειας λόγω της θερμότητας στα καλώδια και στα τυλίγματα των ηλεκτρομηχανών, εξαρτώνται από το τετράγωνο του ρεύματος $P = I^2 R$

Αν μια γεννήτρια ζοριστεί διπλάσια, τότε οι απώλειές της σε θερμότητα τετραπλασιάζονται, γεγονός που οδηγεί σε λιώσιμο των μονώσεων ή σε πυρκαγιά.

Εφαρμογή 14

Σε πίνακα διανομής, ένα καλώδιο έχει αντίσταση $R = \frac{5}{100}\ \Omega$. Αν το ρεύμα είναι $I = 100\ A$, οι απώλειες είναι $P = I^2 R = 100 \cdot 100 \frac{5}{100} = 500\ W$

Αν το ρεύμα διπλασιαστεί στα 200 Α, τότε οι απώλειες γίνονται $P = I^2 R = 200 \cdot 200 \frac{5}{100} = 2.000\ W = 2kW$

Δηλαδή διπλασιάζοντας το φορτίο, η θερμότητα που παράγεται (και κινδυνεύει να κάψει το καλώδιο) τετραπλασιάζεται.

13.6 Κινητική

Η δευτεροβάθμια εξίσωση, χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με την κίνηση ενός αντικειμένου, όπως η βολή (πλάγια ή κατακόρυφη), οι αναλύσεις ταχυτήτων και επιταχύνσεων. Η βασική εξίσωση στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα u_0, είναι η $s = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Για $u_0 = 0$ δηλαδή στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, γράφεται ως $s = \frac{1}{2} a t^2$ και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του χρόνου ανύψωσης του φορτίου (γερανοί, ανυψωτικά μηχανήματα).

Από την $s = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ για $0 = u_0 - at$, προκύπτει η $s = \frac{u_0^2}{2a}$ που δίνει την απόσταση πέδησης των μηχανημάτων, για σταθερή επιβράδυνση a.

Εφαρμογή 15

Αν μια σωσίβια λέμβος πέφτει από ύψος $h = 20\ m$, σε πόσο χρόνο θα χτυπήσει στο νερό;

Είναι $h = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} 10 t^2 \Leftrightarrow 20 = 5t^2 \Leftrightarrow 4 = t^2 \Leftrightarrow t = 2''$

13.7 Αντλίες

Οι αντλίες, λειτουργούν με καμπύλες απόδοσης που προσεγγίζονται από παραβολές (δευτεροβάθμιες σχέσεις). Η σχέση μεταξύ της παροχής (Q) και του μανομετρικού ύψους (Η), είναι $\mathrm{H} = a\mathrm{Q}^2 + b\mathrm{Q} + c$. Οι μηχανικοί, λύνουν εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού για να βρουν το Q ή το Η.

13.8 Αντίσταση πλοίου και ισχύς πρόωσης

Η αντίσταση R του πλοίου στο νερό, εξαρτάται από την ταχύτητα του και προσεγγίζεται από την τετραγωνική σχέση $R = au^2$ ενώ η ισχύς P των μηχανών περιγράφεται από τη σχέση $P = Ru \cong au^3$

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκη, Σ. (1969). «Μαθήματα αναλυτικής γεωμετρίας», Αθήνα

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία από μετάφραση

«Εγκυκλοπαίδεια μαθηματικών», (1975), τόμος Γ, Εκδόσεις Παγουλάτος, Αθήνα

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Artzy, R. (1965). “Linear geometry”, Addison – Wesley, Reading Massachusetts
- Kelts, L.M. “Analytic geometry”
- Mamelak, J.S. (1964). “Analytic geometry”, International textbook company
- Morril, W.K. (1965). “Analytic geometry”, International textbook company
- Primrose, E.J.F. (1965). “Plane algebraic curves”, Mac–Millan company Ltd
- Rees. P.K. (1963). “Analytic geometry”, Prentice–Hall
- Schaaf, W.L. (1962). “Analytic geometry”, New York
- Walker. R. (1962). “Analytic geometry”