



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

TRIGONOMETRIC INTEGRALS

INTEGRATE :	FORM: $n, m \in \mathbb{Z}^+$
$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	$\int \cos^n x \sin^m x dx$
	$n, m : \text{ONE OR BOTH ARE ODD}$
$\int \sin^3 x \cos^3 x dx$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
	AND $u = \sin x$ OR $u = \cos x$

Σπουδαστές: Κεπενές Σταύρος (AM 9233)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.11.2024

Ημερομηνία κατάθεσης: ...09.2025

Ημερομηνία εξέτασης:09.2025

A/A	Ονοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (M.Ed.) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα (10)	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός Καθηγήτρια		
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυροματιστής (M.Sc.) ΕΔΙΠ		
Τελικός χαρακτηρισμός			

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά	5
Περίληψη	5
Εισαγωγή	6
Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη ναυτιλία	7
Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στον ηλεκτρισμό 8	
1 Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$, όπου R είναι ρητή συνάρτηση των $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$	10
1.1 Μέθοδος υπολογισμού	10
1.2 Ειδικές περιπτώσεις	10
Εφαρμογή 1	10
2 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu^{\mu} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^*$	11
2.1 Μέθοδος εργασίας	11
Εφαρμογή 2	11
Εφαρμογή 3	12
Εφαρμογή 4	12
3 Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \eta\mu^{\mu} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$, μ, ν ρητοί αριθμοί	13
Εφαρμογή 5	13
4 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu^{\mu} x dx$, $\mu \in \mathbb{Z}_-^*$	14
Εφαρμογή 6	14
5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$, $\nu \in \mathbb{Z}_-^*$	15
Εφαρμογή 7	15
6 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \varepsilon\varphi^{\nu} x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$	16
Εφαρμογή 8	16
Εφαρμογή 9	16
7 Ολοκληρώματα των μορφών $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$, $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \eta\mu(\beta x) dx$, $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$	17
Εφαρμογή 10	17
Εφαρμογή 11	18
Εφαρμογή 12	19
Εφαρμογή 13	20
Εφαρμογή 14	21
Εφαρμογή 15	22
Εφαρμογή 16	23
Εφαρμογή 17	24
Εφαρμογή 18	25
Εφαρμογή 19	27
Εφαρμογή 20	29
Εφαρμογή 21	30
Εφαρμογή 22	31
Εφαρμογή 23	32
Εφαρμογή 24	33
Εφαρμογή 25	34
Εφαρμογή 26	35

Εφαρμογή 27	37
Εφαρμογή 28	38
Εφαρμογή 29	39
Εφαρμογή 30	40
Εφαρμογή 31	41
8 Ολοκληρώματα άρρητων συναρτήσεων που υπολογίζονται με τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις.....	42
Εφαρμογή 32	43
9 Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(e^{ax}) dx$ όπου R μια ρητή συνάρτηση του e^{ax}	44
Εφαρμογή 33	44
Εφαρμογή 34	45
Εφαρμογή 35	47

Λέξεις κλειδιά

Προσδιορισμός θέσης, υπολογισμός παλιρροιών, αυτόνομη πλοήγηση, ανάλυση κυματομορφών, μοντελοποίηση σημάτων, ανάλυση κυκλωμάτων, μεταφορά ισχύος, αντικατάσταση μεταβλητής, άκρα ολοκλήρωσης, ανάλυση Fourier, συνάρτηση άρτια (ή περιττή), ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα, συντέμνουσα

Περίληψη

Η ολοκλήρωση, αποτελεί μία από τις βασικές έννοιες του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Χρησιμοποιείται ευρέως, για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από καμπύλες, του όγκου των στερεών σωμάτων και σε ποικίλες εφαρμογές της φυσικής, της μηχανικής και των άλλων επιστημών. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως είναι το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη εμφανίζονται συχνά σε τέτοιες εφαρμογές, καθώς περιγράφουν περιοδικά φαινόμενα και κυματομορφές. Για τον λόγο αυτό, η μελέτη της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αποτελεί σημαντικό κεφάλαιο των μαθηματικών.

Εισαγωγή

Η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, βασίζεται σε συγκεκριμένες τεχνικές και μεθόδους. Καταρχάς, υπάρχουν βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που επιτρέπουν την απλοποίηση των συναρτήσεων αυτών, ώστε να καταστούν πιο εύκολες προς ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, πολλές φορές χρησιμοποιούνται ταυτότητες που μετατρέπουν το τετράγωνο του ημιτόνου ή του συνημιτόνου, σε μορφή που μπορεί να ολοκληρωθεί απευθείας. Παρόμοια, για τα γινόμενα ή για τα πηλίκα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, εφαρμόζονται τεχνικές όπως είναι η αντικατάσταση ή η χρήση ταυτοτήτων διπλασιασμού της γωνίας.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι όταν επιδιώκουμε να ολοκληρώσουμε γινόμενα μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε τις γνωστές τύπου γινόμενο–σε άθροισμα ταυτότητες, ώστε η έκφραση να μετασχηματιστεί σε άθροισμα απλών όρων, που είναι γνωστοί. Αυτή η μέθοδος, καθιστά εφικτή την εύκολη εύρεση του ολοκληρώματος, χωρίς να απαιτείται πολυσύνθετος υπολογισμός. Μία από τις συχνότερες τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είναι η αντικατάσταση της μεταβλητής. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις που έχουμε τριγωνομετρική συνάρτηση μέσα σε πιο σύνθετη έκφραση, είναι χρήσιμο να μετασχηματίσουμε τη μεταβλητή σε μια απλούστερη, ώστε το ολοκλήρωμα να πάρει πιο διαχειρίσιμη μορφή. Η μέθοδος αυτή, απαιτεί καλή γνώση των παραγώγων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και εξοικείωση με τις αντίστροφες διαδικασίες ολοκλήρωσης.

Ιδιαίτερη προσοχή, απαιτείται στην ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικές εκφράσεις, στον παρονομαστή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιείται συχνά η αντικατάσταση με εφαπτομένη της μισής γωνίας, η οποία μετατρέπει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, σε ρητές εκφράσεις.

Αν και πρόκειται για πιο απαιτητική τεχνική, επιτρέπει την επίλυση των ολοκληρωμάτων που διαφορετικά θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολο ή και αδύνατο να επιλυθούν με απλό τρόπο. Πέρα από τις μεθόδους και τις τεχνικές, είναι σημαντικό να γίνει κατανοητός ο ρόλος των ορίων (άκρων) της ολοκλήρωσης, όταν πρόκειται για ορισμένα ολοκληρώματα. Στην περίπτωση αυτή, υπολογίζεται το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της τριγωνομετρικής συνάρτησης, για συγκεκριμένο διάστημα.

Τέτοια ολοκληρώματα, χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές της φυσικής, για την περιγραφή της ενέργειας του κύματος, της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος και της μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος, με βάση τις κυματομορφές.

Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, βοηθούν επίσης στην κατανόηση της συμπεριφοράς των ολοκληρωμάτων τους. Επειδή πρόκειται για περιοδικές συναρτήσεις, τα ολοκληρώματά τους σε πλήρη περίοδο έχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα του ημιτόνου ή του συνημιτόνου σε μία πλήρη περίοδο είναι μηδέν, λόγω της συμμετρίας τους ως προς τον οριζόντιο άξονα. Αυτό, αποτελεί σημαντική παρατήρηση που συχνά αξιοποιείται σε ασκήσεις, ιδίως όταν έχουμε να κάνουμε με κυκλικά φαινόμενα.

Ένας άλλος τομέας εφαρμογής της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είναι η ανάλυση Fourier. Στην ανάλυση αυτή, πολύπλοκες συναρτήσεις εκφράζονται ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η διαδικασία αυτή, απαιτεί την ολοκλήρωση τέτοιων συναρτήσεων σε καθορισμένα διαστήματα, προκειμένου να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς. Η τεχνική αυτή, χρησιμοποιείται ευρέως στην επεξεργασία του σήματος, στην ακουστική και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους. Συνοψίζοντας, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αποτελεί βασικό κομμάτι του λογισμού και των

εφαρμογών του. Η πολυπλοκότητα των συναρτήσεων αυτών, καθιστά απαραίτητη τη χρήση ειδικών τεχνικών και τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, με στόχο την απλοποίηση και την ακριβή εύρεση των ολοκληρωμάτων. Είτε πρόκειται για καθαρά θεωρητικά προβλήματα, είτε για πρακτικές εφαρμογές, η κατανόηση αυτών των ολοκληρώσεων είναι απαραίτητη για όποιον ασχολείται με τα μαθηματικά, τη φυσική και την τεχνολογία.

Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη ναυτιλία

Η ναυτιλία, αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους και τους πιο σύνθετους τομείς της τεχνολογίας και της οικονομίας. Για να εξασφαλιστεί η ασφαλής, αποδοτική και ακριβής πλοήγηση των πλοίων, χρησιμοποιούνται πολλές επιστημονικές μέθοδοι που βασίζονται στα μαθηματικά.

Ένας από τους σημαντικότερους κλάδους των μαθηματικών που βρίσκει εφαρμογή στη ναυτιλία, είναι ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός και ιδιαίτερα η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Παρόλο που η έννοια αυτή μοιάζει θεωρητική, στην πραγματικότητα αποτελεί αναπόσπαστο εργαλείο σε ποικίλες πτυχές του ναυτιλιακού κλάδου. Μία βασική εφαρμογή της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη ναυτιλία, αφορά την **πλοήγηση και τον προσδιορισμό της θέσης**. Κατά τη διάρκεια ενός ταξιδιού, ένα πλοίο κινείται σε καμπύλες τροχιές πάνω στη σφαιρική επιφάνεια της Γης. Η κατεύθυνση του πλοίου, σε σχέση με τον γεωγραφικό βορρά, αλλάζει συνεχώς και συχνά εκφράζεται με γωνιακές μεταβλητές. Οι αλλαγές αυτές, μετρούνται σε χρονική βάση και μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η ολοκλήρωση αυτών των συναρτήσεων, επιτρέπει τον υπολογισμό της συνολικής διανυθείσας απόστασης ή της τελικής θέσης του πλοίου, ακόμη και όταν αυτό κινείται με μεταβαλλόμενη (κατά μέτρο και διεύθυνση) πορεία.

Ένα άλλο σημαντικό πεδίο εφαρμογής, αφορά τη **ναυτική μηχανική και την ανάλυση των κυμάτων**. Τα κύματα της θάλασσας περιγράφονται μέσω των περιοδικών συναρτήσεων, δηλαδή των συναρτήσεων που επαναλαμβάνονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Οι πιο κατάλληλες μαθηματικές συναρτήσεις για την περιγραφή αυτών των κυματομορφών, είναι οι τριγωνομετρικές. Με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης, μπορεί να υπολογιστεί η μέση ενέργεια ενός κύματος, η δύναμη που ασκείται σε ένα πλοίο και ο βαθμός της ταλάντωσης που θα βιώσει το σκάφος, κατά την πλεύση του σε κυματισμένη θάλασσα. Η πρόβλεψη αυτών των παραμέτρων, είναι κρίσιμη για την ασφάλεια των πληρωμάτων και για τον σχεδιασμό ανθεκτικών πλοίων. Πέρα από την πρόβλεψη των φυσικών δυνάμεων, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων παίζει ρόλο και στη **σχεδίαση του σκάφους**. Όταν σχεδιάζονται τα ύφαλα (δηλαδή το τμήμα του πλοίου που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας), οι σχεδιαστές λαμβάνουν υπόψη την αεροδυναμική και την υδροδυναμική συμπεριφορά του σκάφους. Η κατανομή της πίεσης του νερού πάνω στο κύτος του πλοίου, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Μέσω της ολοκλήρωσης αυτών, υπολογίζονται βασικές ποσότητες, όπως η άνωση και η αντίσταση του νερού, που με τη σειρά τους επηρεάζουν τη σταθερότητα και την κατανάλωση καυσίμου του πλοίου.

Μία ακόμα εφαρμογή, είναι ο **υπολογισμός των παλίρροιων**. Οι παλίρροιες, δημιουργούνται από τη βαρυτική έλξη της Σελήνης και του Ήλιου και ακολουθούν έναν περιοδικό κύκλο. Για να προβλέψουμε το ύψος της θάλασσας σε ένα συγκεκριμένο λιμάνι ανάλογα με την ώρα της ημέρας και με τη θέση των ουρανίων σωμάτων, χρησιμοποιούνται μοντέλα που βασίζονται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η ολοκλήρωσή τους, μας δίνει συνολικές ποσότητες, όπως για

παράδειγμα την αλλαγή της θαλάσσιας στάθμης σε χρονικά διαστήματα ή την αναμενόμενη παροχή σε εκβολές ποταμών. Η σωστή πρόβλεψη των παλιρροιών, είναι απαραίτητη για την προσέγγιση πλοίων σε λιμάνια, για την ασφάλεια της ναυσιπλοΐας και για την αποφυγή ατυχημάτων.

Η **ναυτική ρομποτική και η αυτόνομη πλοήγηση**, αποτελούν επίσης σύγχρονες περιοχές εφαρμογής. Τα αυτόνομα πλοία που αναπτύσσονται σήμερα, βασίζονται σε συστήματα τεχνητής νοημοσύνης και σε αισθητήρες που συλλέγουν συνεχώς δεδομένα. Οι πορείες που ακολουθούν αυτά τα πλοία, υπολογίζονται με μαθηματικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τις κινήσεις των θαλασσίων ρευμάτων, των κυμάτων και των ανέμων. Όλα αυτά τα φυσικά φαινόμενα, έχουν περιοδική ή ημιπεριοδική συμπεριφορά, την οποία αποδίδουν κατάλληλα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μέσω της ολοκλήρωσης, το σύστημα μπορεί να υπολογίσει τον βέλτιστο δρόμο για το πλοίο, ελαχιστοποιώντας την κατανάλωση και αυξάνοντας την ακρίβεια. Τέλος, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, βρίσκει θέση και στην **εκπαίδευση των ναυτικών**. Οι σπουδαστές των ΑΕΝ, διδάσκονται τεχνικές υπολογισμού της θέσης του πλοίου, διορθώσεων της πορείας του και της πρόγνωσης του καιρού, μέσα από ασκήσεις που περιλαμβάνουν ολοκληρώματα, με τριγωνομετρικές εκφράσεις. Η σωστή κατανόηση αυτών των μαθηματικών εννοιών, επιτρέπει στους μελλοντικούς πλοίαρχους και μηχανικούς να λαμβάνουν ορθές αποφάσεις στη θάλασσα, χρησιμοποιώντας επιστημονικά εργαλεία και όχι μόνο την εμπειρία τους. Συμπερασματικά, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο στον τομέα της ναυτιλίας. Από την πλοήγηση και από τον υπολογισμό της πορείας, μέχρι τη σχεδίαση των πλοίων, την πρόβλεψη των κυμάτων και των παλιρροιών και την ανάπτυξη αυτόνομων ναυτικών συστημάτων, οι εφαρμογές είναι πολυάριθμες και ζωτικής σημασίας. Η βαθύτερη κατανόηση αυτής της μαθηματικής μεθόδου, βοηθά στη θεωρητική πρόοδο του τομέα και στη βελτίωση της καθημερινής ναυτιλιακής πρακτικής, εξασφαλίζοντας μεγαλύτερη ακρίβεια, ασφάλεια και αποτελεσματικότητα στην ανοιχτή θάλασσα.

Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στον ηλεκτρισμό

Ο ηλεκτρισμός, αποτελεί θεμέλιο της σύγχρονης τεχνολογίας και της καθημερινής ζωής. Πίσω από τη λειτουργία της κάθε ηλεκτρικής συσκευής, του δικτύου μεταφοράς της ηλεκτρικής ενέργειας και του κάθε συστήματος επικοινωνίας, υπάρχει μια σειρά από φυσικές και μαθηματικές αρχές. Ανάμεσα σε αυτές, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και η ολοκλήρωσή τους, διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο.

Ειδικά στην εναλλασσόμενη τάση και στο ρεύμα, δηλαδή στα ηλεκτρικά σήματα που μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποτελούν τα κύρια μαθηματικά εργαλεία περιγραφής και ανάλυσης. Η ολοκλήρωση των συναρτήσεων αυτών, είναι απαραίτητη για την κατανόηση, τον σχεδιασμό και τον έλεγχο των ηλεκτρικών συστημάτων. Η πιο συνηθισμένη μορφή ηλεκτρικού σήματος είναι το **εναλλασσόμενο ρεύμα**, το οποίο ακολουθεί περιοδική κυματομορφή. Το σήμα αυτό, συνήθως περιγράφεται με τη μορφή ημιτονοειδούς κύματος, το οποίο επαναλαμβάνεται με σταθερή συχνότητα, όπως για παράδειγμα στη δημόσια παροχή ρεύματος των 50 ή 60 κύκλων, ανά second.

Η ολοκλήρωση της ημιτονοειδούς συνάρτησης, επιτρέπει τον υπολογισμό της **μέσης ισχύος**, της **ενέργειας** και της **έντασης**, δηλαδή των βασικών μεγεθών που απαιτούνται για την ανάλυση και τον σχεδιασμό των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο **υπολογισμός της ενεργειακής κατανάλωσης**, σε κυκλώματα με μεταβλητό φορτίο. Η ισχύς σε ένα τέτοιο κύκλωμα, μεταβάλλεται

περιοδικά σε σχέση με τον χρόνο, σύμφωνα με μια ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή μορφή. Για να προσδιορίσει κανείς τη συνολική κατανάλωση της ενέργειας, είναι απαραίτητο να ολοκληρωθεί αυτή η συνάρτηση στο χρονικό διάστημα λειτουργίας. Έτσι, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν είναι απλώς μια μαθηματική άσκηση, αλλά ένα εργαλείο για τον υπολογισμό των πραγματικών ποσοτήτων, που αφορούν την απόδοση μιας συσκευής ή στην ορθή τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας. Στις περιπτώσεις των κυκλωμάτων με **πυκνωτές** και με **πηνία**, δηλαδή με εξαρτήματα που αποθηκεύουν ενέργεια προσωρινά, η ροή του ρεύματος δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τη φάση και από τη συχνότητα του σήματος. Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων, απαιτεί τη χρήση ολοκληρωμάτων, στα οποία εμπλέκονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μέσω αυτής της διαδικασίας, μπορούν να εξαχθούν πολύτιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του κυκλώματος σε διάφορες συχνότητες, κάτι που είναι απαραίτητο για τη σωστή ρύθμιση των φίλτρων, των ενισχυτών και των μετατροπών ενέργειας.

Η ολοκλήρωση, βρίσκει επίσης εφαρμογή στη **μετατροπή αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά**, διαδικασία που αποτελεί τον πυρήνα της σύγχρονης τεχνολογίας. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετατροπής, τα σήματα, τα οποία αρχικά εκφράζονται με ημιτονοειδή μορφή, αναλύονται μέσω της **ανάλυσης Fourier**, η οποία βασίζεται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η ολοκλήρωση αυτών των συναρτήσεων σε καθορισμένα διαστήματα, είναι απαραίτητη για την εξαγωγή των συνιστωσών του σήματος και για την πιστή αναπαραγωγή του, σε ψηφιακή μορφή. Η **ανάλυση των κυματομορφών**, αποτελεί ακόμα μία εφαρμογή.

Σε διάφορα επαγγελματικά πεδία, όπως η ηχοληψία, η ιατρική (μέσω ηλεκτροκαρδιογραφήματος ή ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος) και οι τηλεπικοινωνίες, αναλύονται σήματα που έχουν πολύπλοκες μορφές. Για να κατανοηθεί η δομή αυτών των κυματομορφών, αυτές διασπώνται σε απλά, περιοδικά κύματα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η διαδικασία της ολοκλήρωσης, καθορίζει τη συμβολή του κάθε κύματος στην τελική μορφή, γεγονός που επιτρέπει τη δημιουργία κατάλληλων φίλτρων, τη βελτίωση της ποιότητας της μετάδοσης, ή την ακριβή μέτρηση και ερμηνεία των δεδομένων. Πέρα από τον σχεδιασμό των κυκλωμάτων, η ολοκλήρωση έχει θέση και στη **μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας**, όπως τα ραδιοκύματα, τα μικροκύματα και τα σήματα της κινητής τηλεφωνίας.

Οι κυματομορφές αυτών των σημάτων, περιγράφονται με τριγωνομετρικές συναρτήσεις και η ολοκλήρωσή τους, επιτρέπει την εξαγωγή παραμέτρων όπως το εύρος, η φασματική ισχύς ή η απόδοση του πομπού. Η ακριβής γνώση αυτών των μεγεθών, είναι απαραίτητη για τη σωστή ρύθμιση των συστημάτων επικοινωνίας, για την αποφυγή παρεμβολών και για τη συμμόρφωση με τις προδιαγραφές ασφαλείας.

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε την εφαρμογή της ολοκλήρωσης στην **εκπαίδευση των ηλεκτρολόγων μηχανικών**. Όσοι σπουδάζουν ηλεκτρισμό και ηλεκτρονικά συστήματα, εκπαιδεύονται στην ανάλυση των σημάτων, στην κατανόηση της λειτουργίας αντιδραστικών στοιχείων και στη σχεδίαση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος. Όλα αυτά, απαιτούν εξοικείωση με τα ολοκληρώματα, ειδικά όταν εμπλέκονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ώστε να μπορούν να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν τα σύνθετα τεχνικά προβλήματα.

Συμπερασματικά, η ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στον τομέα του ηλεκτρισμού, δεν αποτελεί απλά μαθηματική διαδικασία, αλλά ένα ουσιαστικό εργαλείο κατανόησης και διαχείρισης της ηλεκτρικής ενέργειας και των σημάτων. Από την ανάλυση των κυκλωμάτων και από τη μεταφορά της ισχύος, μέχρι τη μοντελοποίηση των σημάτων και τη σχεδίαση των σύγχρονων τεχνολογικών συστημάτων, οι εφαρμογές είναι πολυάριθμες και κρίσιμες. Η γνώση αυτής της

μεθόδου, ενισχύει την τεχνική ικανότητα των επιστημόνων και συμβάλλει στην πρόοδο της τεχνολογίας, με σταθερό και αξιόπιστο τρόπο.

1 Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$, όπου R είναι ρητή συνάρτηση των $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$

1.1 Μέθοδος υπολογισμού

Εκφράζω τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, συναρτήσει της $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\text{Δηλαδή, κάνω εφαρμογή των τύπων } \eta\mu x = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Θέτω } \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \quad \text{οπότε έχω } \eta\mu x = \frac{2\omega}{1 + \omega^2}, \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}. \quad \text{Η } \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \quad \text{δίνει}$$

$$\frac{x}{2} = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)' dx = (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi)' d\omega \Rightarrow \frac{1}{2} dx = \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1 + \omega^2}$$

1.2 Ειδικές περιπτώσεις

- Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$, θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$
- Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς το $\sigma\upsilon\nu x$, θέτω $\eta\mu x = \omega$
- Αν η συνάρτηση R είναι άρτια ως προς το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\nu x$, θέτω $\epsilon\varphi x = \omega$

Εφαρμογή 1

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{1}{5\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4} dx \quad \beta) I = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} dx$$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$

$$\text{Θέτω } \epsilon\varphi x = \omega \Rightarrow x = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi\omega \Rightarrow dx = (\tau\omicron\xi\epsilon\varphi\omega)' d\omega \Rightarrow dx = \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega$$

$$\text{Ισχύει ότι } \eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\varphi^2 x}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

$$\text{Άρα, } I = \int \frac{\frac{1}{1 + \omega^2}}{5 \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} - 3 \frac{1}{1 + \omega^2} + 4} =$$

$$\int \frac{\frac{1}{1 + \omega^2} d\omega}{\frac{5\omega^2 - 3 + 4 + 4\omega^2}{1 + \omega^2}} =$$

$$\int \frac{d\omega}{9\omega^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3\omega)}{(3\omega)^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{3} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(3\omega) + c = \frac{1}{3} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(3\epsilon\varphi x) + c$$

β) Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega$ οπότε $\sigma\nu\nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ και $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$.

$$\text{Έτσι, είναι } I = \int \frac{\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \cdot 2}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} d\omega =$$

$$\int \frac{\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}}{\frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}} d\omega \int \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$\int \left(-1 + \frac{2}{1+\omega^2}\right) d\omega =$$

$$-\int d\omega + 2 \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$$

$$-\omega + 2\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi + c = -\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + x + c$$

2 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu^\mu x \cdot \sigma\nu\nu^v x \, dx$, $\mu, v \in \mathbb{Z}^*$

2.1 Μέθοδος εργασίας

α) Αν οι αριθμοί μ, v είναι φυσικοί και ο ένας τουλάχιστον είναι περιττός π.χ.

$\mu = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ τότε εργαζόμαστε ως εξής $\int \eta\mu^\mu x \cdot \sigma\nu\nu^v x \, dx =$

$$\int (\eta\mu^{2k} x)(\eta\mu x)(\sigma\nu\nu^v x) \, dx =$$

$$-\int (\eta\mu^{2k} x)^k \sigma\nu\nu^v x \, d(\sigma\nu\nu x) =$$

$$-\int (1 - \sigma\nu\nu^2 x)^k \sigma\nu\nu^v x \, d(\sigma\nu\nu x)$$

Αναπτύσσω το $(1 - \sigma\nu\nu^2 x)^k$ και το χωρίζω σε άθροισμα ολοκληρωμάτων. Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε αν ο v είναι περιττός.

Εφαρμογή 2

Υπολογίστε το $I = \int \eta\mu^{10} x \cdot \sigma\nu\nu^3 x \, dx$

Λύση

$$\text{Είναι } I = \int \eta\mu^{10} x \sigma\nu\nu^2 x \sigma\nu\nu x \, dx =$$

$$\int \eta\mu^{10} x (1 - \eta\mu^2 x) \, d(\eta\mu x) =$$

$$\int \eta\mu^{10} x \, d(\eta\mu x) - \int \eta\mu^{12} x \, d(\eta\mu x) =$$

$$\frac{\eta\mu^{11} x}{11} - \frac{\eta\mu^{13} x}{13} + c$$

β) Αν οι αριθμοί μ, v είναι φυσικοί και άρτιοι, τότε κάνω χρήση των τύπων

$$\eta\mu^2 A = \frac{1}{2}(1 - \sigma\nu\nu(2A)), \quad \sigma\nu\nu(2A) = \frac{1}{2}(1 + \sigma\nu\nu(2A)), \quad \eta\mu A \cdot \sigma\nu\nu A = \frac{1}{2}\eta\mu(2A)$$

Εφαρμογή 3

Υπολογίστε το $\int \sigma\nu\nu^2(3x)\eta\mu^4(3x) dx$

Λύση

Είναι $\int \sigma\nu\nu^2(3x)\eta\mu^4(3x) dx =$

$$\int (\sigma\nu\nu(3x)\eta\mu(3x))^2 \eta\mu^2(3x) dx =$$

$$\int \frac{\eta\mu^2(6x)}{4} \frac{1 - \sigma\nu\nu(6x)}{2} dx = \frac{1}{8} \int (\eta\mu^2(6x) - \eta\mu^2(6x)\sigma\nu\nu(6x)) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \sigma\nu\nu(12x)}{2} - \eta\mu^2(6x)\sigma\nu\nu(6x) \right) dx =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int \frac{dx}{2} - \int \frac{\sigma\nu\nu(12x)}{2} dx - \frac{1}{6} \int \eta\mu^2(6x) d(\eta\mu(6x)) \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{24} \sigma\nu\nu(12x) d(12x) - \frac{1}{6} \int \eta\mu^2(6x) d(\eta\mu(6x)) \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{24} \eta\mu(12x) - \frac{1}{18} \eta\mu^3(6x) \right] + c$$

γ) Αν οι αριθμοί μ, ν είναι αρνητικοί και συγχρόνως άρτιοι ή περιττοί, τότε

$$\text{εργάζομαι ως εξής} \int \eta\mu^\mu x \sigma\nu\nu^\nu x dx = \int \frac{dx}{\eta\mu^{-\mu} x \sigma\nu\nu^{-\nu} x} =$$

$$\int \left(\frac{1}{\eta\mu x} \right)^{-\mu} \left(\frac{1}{\sigma\nu\nu x} \right)^{-\nu} dx = \int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu} (\tau\epsilon\mu x)^{-\nu} dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu} (\tau\epsilon\mu x)^{-\nu-2} (\tau\epsilon\mu x)^2 dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^{-\mu} (\tau\epsilon\mu x)^{-\nu-2} (εφ x)' dx =$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{εφ^2 x} \right)^{-\mu/2} (1 + εφ^2 x)^{\frac{\nu+2}{2}} dεφ x \quad \text{Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα}$$

Εφαρμογή 4

Υπολογίστε το $\int \eta\mu^{-2} x \sigma\nu\nu^{-4} x dx$

Λύση

$$\int \eta\mu^{-2} x \sigma\nu\nu^{-4} x dx = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x} \frac{1}{\sigma\nu\nu^4 x} dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^2 (\tau\epsilon\mu x)^4 dx = \int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^2 (\tau\epsilon\mu x)^2 (\tau\epsilon\mu x)^2 dx =$$

$$\int (\sigma\tau\epsilon\mu x)^2 (\tau\epsilon\mu x)^2 d(εφ x) =$$

$$\begin{aligned}
& \int \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2}\right)^{2/2} (1 + \varepsilon \varphi^2 x)^{2/2} d(\varepsilon \varphi x) = \\
& \int \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 x}\right) (1 + \varepsilon \varphi^2 x) d(\varepsilon \varphi x) = \\
& \int \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 x} + \varepsilon \varphi^2 x + 1\right) d(\varepsilon \varphi x) = \\
& 2 \int d(\varepsilon \varphi x) + \int \frac{d(\varepsilon \varphi x)}{\varepsilon \varphi^2 x} + \int \varepsilon \varphi^2 x d(\varepsilon \varphi x) = \\
& 2\varepsilon \varphi x + \frac{\varepsilon \varphi^{-2+1} x}{-2+1} + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} = 2\varepsilon \varphi x - \frac{1}{\varepsilon \varphi x} + \frac{1}{3} \varepsilon \varphi^3 x + c
\end{aligned}$$

3 Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \eta \mu^\mu x \cdot \sigma \upsilon \nu^\nu x \, dx$, μ, ν ρητοί αριθμοί

Υπολογίζονται ως εξής:

α) Αν ο μ είναι ακέραιος περιττός, τότε κάνω την αντικατάσταση $\sigma \upsilon \nu x = t$

β) Αν ο ν είναι ακέραιος περιττός, τότε κάνω την αντικατάσταση $\eta \mu x = t$

γ) Αν ο $\mu + \nu$ είναι άρτιος, τότε κάνω την αντικατάσταση $\varepsilon \varphi x = t$ ή $\sigma \upsilon \nu x = t$

Εφαρμογή 5

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu^2 x}} dx$ **β)** $I = \int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^6 x} dx$

Λύση

α) Έχω $I = \int \eta \mu^3 x \sigma \upsilon \nu^{-2/3} x dx$ Είναι $\mu = 3$ περιττός, οπότε θέτω $\sigma \upsilon \nu = t$, άρα

$$-\eta \mu x \, dx = dt, \text{ συνεπώς } \eta \mu x \, dx = -dt, \text{ άρα } I = -\int (1 - t^2) t^{-2/3} dt =$$

$$-3t^{1/3} + \frac{3}{7} t^{7/3} + c = -3\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu x} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu^7 x} + c$$

β) Έχω $I = \int \eta \mu^2 x \sigma \upsilon \nu^{-6} x dx$ Οι αριθμοί μ, ν είναι άρτιοι, άρα ο $\mu + \nu$ είναι άρτιος.

$$\text{Θέτω } \varepsilon \varphi x = t \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x}}{\sigma \upsilon \nu x} = t \Rightarrow \frac{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = 1 + t^2$$

$$\text{Είναι } (\varepsilon \varphi x)' dx = t' dt \Rightarrow \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = dt$$

$$\text{Άρα, } I = \int \eta \mu^2 x \sigma \upsilon \nu^{-4} x \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu^2 x} =$$

$$\int \varepsilon \varphi^2 x \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2} \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \int t^2 (1 + t^2) dt =$$

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} + \frac{\varepsilon \varphi^5 x}{5} + c$$

4 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta \mu^{\mu} x \, dx, \mu \in Z_{-}^{*}$

Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int \eta \mu^{\mu} x \, dx$ όπου μ είναι αρνητικός ακέραιος υπολογίζεται ως εξής $\int \eta \mu^{\mu} x \, dx = \int \frac{1}{(\eta \mu x)^{-\mu}} dx = \int \frac{1}{\left(2\eta \mu \left(\frac{x}{2}\right) \sigma \nu \left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-\mu}} dx$

$$= \frac{2}{2^{-\mu}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\eta \mu^{-\mu} \left(\frac{x}{2}\right) \sigma \nu^{-\mu} \left(\frac{x}{2}\right)}$$

ακολουθώντας εργάζομαι σύμφωνα με τη προηγούμενη μέθοδο.

Εφαρμογή 6

Υπολογίστε το $I = \int \eta \mu^{-3} x dx$

Λύση

$$I = \int \frac{dx}{\eta \mu^3 x} = \int \frac{1}{\left(2\eta \mu \left(\frac{x}{2}\right) \sigma \nu \left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} dx = \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\eta \mu^3 \left(\frac{x}{2}\right) \sigma \nu^3 \left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{2^3} \int \frac{1}{\eta \mu^3 \left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{\sigma \nu^3 \left(\frac{x}{2}\right)} dx =$$

$$\frac{2}{8} \int \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{3/2} \left(1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right)^{1/2} d\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\left(1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right)^{3/2} \left(1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right)^{1/2}}{\left(\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right)^{3/2}} d\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\left(1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\varepsilon \varphi^3 \left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1 + 2\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon \varphi^4 \left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon \varphi^3 \left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4} \int \left(\varepsilon \varphi^{-3} \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)} + \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) d\left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int \frac{1 + 2\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \\
& \frac{1}{4} \int \left(\varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} + \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \right) d\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \\
& \frac{1}{4} \int \varepsilon\varphi^{-3}\left(\frac{x}{2}\right) d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{4} \int \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) d\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) = \\
& \frac{1}{4} \frac{\varepsilon\varphi^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)}{-2} + \frac{1}{2} \ln I \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) I + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + c = \\
& \frac{-1}{8} \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2} \ln I \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) I + \frac{1}{8} \varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \sigma \nu^\nu x \, dx$, $\nu \in \mathbb{Z}_-^*$

Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int \sigma \nu^\nu x \, dx$ (όπου ν ακέραιος αρνητικός) υπολογίζεται μετασχηματίζοντας το συνημίτονο, σε ημίτονο. Είναι $\int \sigma \nu^\nu x \, dx = \int \frac{1}{\sigma \nu^{-\nu} x} \, dx = \int \frac{dx}{\eta \mu^{-\nu} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ Έτσι ανάγετε στη μορφή που περιγράψω

στην προηγούμενη περίπτωση.

Εφαρμογή 7

Υπολογίστε το $\int \sigma \nu^{-1} x \, dx$

Λύση

$$\int \sigma \nu^{-1} x \, dx = \int \frac{1}{\sigma \nu x} \, dx = \int \frac{dx}{\eta \mu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$\int \frac{dx}{2\eta \mu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sigma \nu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sigma \nu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\eta \mu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma \nu^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \, dx =$$

$$\frac{2}{2} \int \sigma \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) d\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\int \frac{1}{\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} d\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \ln \left| \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

6 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \varepsilon \varphi^v x \, dx, v \in \mathbb{N}^*$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \varepsilon \varphi^v x \, dx$ (ή της μορφής $\int \sigma \varphi^v x \, dx$) όπου v είναι φυσικός αριθμός, υπολογίζονται με τη βοήθεια των τύπων $\varepsilon \varphi^2 x = \tau \varepsilon \mu^2 x - 1$, $\sigma \varphi^2 x = \sigma \tau \varepsilon \mu^2 x - 1$

Εφαρμογή 8

Υπολογίστε το $\int \varepsilon \varphi^4 x \, dx$

Λύση

$$\begin{aligned} \int \varepsilon \varphi^4 x \, dx &= \int \varepsilon \varphi^2 x (\tau \varepsilon \mu^2 x - 1) \, dx = \\ &= - \int \varepsilon \varphi x \, dx + \int \varepsilon \varphi^2 x (\tau \varepsilon \mu^2 x) \, dx = \\ &= - \int \varepsilon \varphi^2 x \, dx + \int \varepsilon \varphi^2 x (\varepsilon \varphi x)' \, dx = - \int \varepsilon \varphi^2 x \, dx + \int \varepsilon \varphi^2 x \, d(\varepsilon \varphi x) = \\ &= - \int \varepsilon \varphi^2 x \, dx + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} = \\ &= - \int (\tau \varepsilon \mu^2 x - 1) \, dx + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} = - \int \tau \varepsilon \mu^2 x \, dx + \int dx + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} = \\ &= \varepsilon \varphi x + x + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} + c = \\ &= - \int (\varepsilon \varphi x)' \, dx + x + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} = -\varepsilon \varphi x + x + \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} \end{aligned}$$

Παρατήρηση τα ολοκληρώματα της προηγούμενης μορφής υπολογίζονται και με την αντικατάσταση $\varepsilon \varphi x = t$

Εφαρμογή 9

Υπολογίστε το $\int \varepsilon \varphi^7 x \, dx$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Θέτω } \varepsilon \varphi x = t &\Rightarrow x = \tau \sigma \xi \varepsilon \varphi t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{Άρα, } I = \int t^7 \frac{dt}{1+t^2} = \\ \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt &= \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \\ \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + c &\text{ με } t = \varepsilon \varphi x \end{aligned}$$

7 Ολοκληρώματα των μορφών $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$, $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \eta\mu(\beta x) dx$,
 $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με τη βοήθεια των γνωστών τριγωνομετρικών

τύπων • $\eta\mu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) = \frac{1}{2} [\eta\mu((\alpha + \beta)x) + \eta\mu((\alpha - \beta)x)]$

• $\eta\mu(\alpha x) \cdot \eta\mu(\beta x) = \frac{1}{2} [\sigma\upsilon\nu((\alpha - \beta)x) - \sigma\upsilon\nu((\alpha + \beta)x)]$

• $\sigma\upsilon\nu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) = \frac{1}{2} [\sigma\upsilon\nu((\alpha - \beta)x) + \sigma\upsilon\nu((\alpha + \beta)x)]$

Εφαρμογή 10

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{1 + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} dx$ **β)** $I = \int \frac{dx}{5 + 4\sigma\upsilon\nu x}$ **γ)** $\int \eta\mu(9x) \cdot \eta\mu x dx$

Λύση

α) Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \Rightarrow \eta\mu x = \frac{2\omega}{1 + \omega^2}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}$ Η $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega$ δίνει

$$\frac{x}{2} = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)' dx = (\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\omega)' d\omega \Rightarrow \frac{1}{2} dx = \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1 + \omega^2}$$

Άρα, $I = \int \frac{\left(1 + \frac{2\omega}{1 + \omega^2}\right) \frac{2}{1 + \omega^2}}{1 + \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}} d\omega =$

$$\int \frac{(1 + \omega^2 + 2\omega)(1 + \omega^2)}{2(1 + \omega^2)} \cdot \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega$$

$$\int \frac{1 + \omega^2 + 2\omega}{1 + \omega^2} d\omega = \int \left(1 + \frac{2\omega}{1 + \omega^2}\right) d\omega = \int d\omega + \int \frac{2\omega}{1 + \omega^2} d\omega =$$

$$\int d\omega + \int \frac{d(\omega^2 + 1)}{\omega^2 + 1} = \omega + \ln(\omega^2 + 1) + c =$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + c$$

β) Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1 + \omega^2}$ Επίσης ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}$

Άρα, $I = \int \frac{\frac{2}{1 + \omega^2}}{5 + 4 \cdot \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}} d\omega = \int \frac{\frac{2}{1 + \omega^2}}{\frac{5 + 5\omega^2 + 4 - 4\omega^2}{1 + \omega^2}} d\omega =$

$$\int \frac{2}{\omega^2 + 9} d\omega = \frac{2}{3} \int \frac{d\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 + 1} = \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) + c =$$

$$\frac{2}{3} \tau \phi \xi \varepsilon \varphi \left(\frac{1}{3} \varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right) + c$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int \eta \mu(9x) \eta \mu x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sigma \nu \nu(9-1)x - \sigma \nu \nu(9+1)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [\sigma \nu \nu(8x) - \sigma \nu \nu(10x)] \, dx = \frac{1}{2} \int \sigma \nu \nu(8x) \, dx - \frac{1}{2} \int \sigma \nu \nu(10x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 8} \int \sigma \nu \nu(8x) \, d(8x) - \frac{1}{2 \cdot 10} \int \sigma \nu \nu(10x) \, d(10x) = \\ &= \frac{1}{16} \eta \mu(8x) - \frac{1}{20} \eta \mu(10x) + c \end{aligned}$$

Εφαρμογή 11

Υπολογίστε τα $\alpha) I = \int \frac{dx}{\eta \mu x}$ $\beta) I = \int \frac{\eta \mu^3 x}{2 + \sigma \nu \nu x} dx$ $\gamma) \int \varepsilon \varphi^4 x \, dx$

Λύση

$\alpha)$ Θέτω $\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) = \omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$ και $\eta \mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$ άρα,

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\eta \mu x} = \int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{2\omega}{1+\omega^2}} = \int \frac{d\omega}{\omega} = \ln|\omega| + c = \ln \left| \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$$

$\beta)$ Είναι $R(-\eta \mu x, \sigma \nu \nu x) = \frac{(-\eta \mu x)^3}{2 + \sigma \nu \nu(-x)} = -\frac{\eta \mu^3 x}{2 + \sigma \nu \nu x} = -R(\eta \mu x, \sigma \nu \nu x)$

Δηλαδή, η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta \mu x$

Έτσι, θέτω $\int \frac{\eta \mu^3 x}{2 + \sigma \nu \nu x} dx = \int \frac{\eta \mu^2 x \cdot \eta \mu x}{2 + \sigma \nu \nu x} dx =$

$$\int \frac{(1 - \sigma \nu \nu x^2) d(\sigma \nu \nu x)}{2 + \sigma \nu \nu x} = - \int \frac{1 - \omega^2}{2 + \omega} d\omega =$$

$$\int \frac{\omega^2 - 1}{\omega + 2} d\omega = \int \left(\omega - 2 + \frac{3}{\omega + 2} \right) d\omega =$$

$$\int \omega d\omega - 2 \int d\omega + 3 \int \frac{d\omega}{\omega + 2} = \frac{\omega^2}{2} - 2\omega + 3 \int \frac{d(\omega + 2)}{\omega + 2} =$$

$$\frac{\omega^2}{2} - 2\omega + 3 \ln|\omega + 2| + c = \frac{1}{2} \sigma \nu \nu^2 x - 2 \sigma \nu \nu x + 3 \ln|\sigma \nu \nu x + 2| + c$$

$\gamma)$ Είναι $\int \varepsilon \varphi^4 x \, dx = \int \frac{\eta \mu^4 x}{\sigma \nu \nu^4 x} dx$. Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta \mu x$ και $\sigma \nu \nu x$.

Θέτω $\varepsilon \varphi x = \omega \Rightarrow x = \tau \phi \xi \varepsilon \varphi \omega \Rightarrow dx = (\tau \phi \xi \varepsilon \varphi \omega)' d\omega \Rightarrow dx = \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$.

Άρα, $\int \varepsilon \varphi^4 x \, dx = \int \omega^4 \frac{1}{1+\omega^2} d\omega =$

$$\int \frac{\omega^4}{1+\omega^2} \left(\omega^2 - 1 + \frac{1}{\omega^2 + 1} \right) d\omega =$$

$$\int \omega^2 d\omega - \int d\omega + \int \frac{d\omega}{\omega^2 + 1} = \frac{\omega^3}{3} - \omega + \tau o \xi \varepsilon \varphi \omega + c =$$

$$\frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} - \varepsilon \varphi x + \tau o \xi [\varepsilon \varphi(\varepsilon \varphi x)] + c =$$

$$\frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} - \varepsilon \varphi x + x + c$$

Εφαρμογή 12

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu^4} dx$ **β)** $I = \int \sigma \nu^5 \varphi d\varphi$ **γ)** $I = \int \frac{\sigma \nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta \mu x}} dx$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta \mu x$ και $\sigma \nu x$. Θέτω

$$\varepsilon \varphi x = \omega \text{ οπότε } dx = \frac{1}{1+\omega^2} d\omega, \quad \eta \mu^2 x = \frac{\varepsilon \varphi^2 x}{1+\varepsilon \varphi^2 x} = \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \text{ και}$$

$$\sigma \nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon \varphi^2 x} = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\eta \mu^2 x dx}{\sigma \nu^4 x} = \int \frac{\frac{\omega^2}{1+\omega^2}}{\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2} \cdot \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \int \omega^2 d\omega = \frac{\omega^3}{3} + c = \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{3} + c$$

β) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\sigma \nu \varphi$. Πράγματι είναι

$$R(-\sigma \nu \varphi) = (-\sigma \nu \varphi)^5 = -\sigma \nu^5 \varphi = -R(\sigma \nu \varphi) \text{ Έτσι, θέτω } \eta \mu \varphi = \omega. \text{ Άρα,}$$

$$\int \sigma \nu^5 \varphi d\varphi = \int \sigma \nu^4 \varphi \sigma \nu \varphi d\varphi =$$

$$\int (1 - \eta \mu^2 \varphi)^2 d(\eta \mu \varphi) = \int (1 - \omega^2)^2 d\omega =$$

$$\int (1 - 2\omega^2 + \omega^4) d\omega = \int d\omega - 2 \int \omega^2 d\omega + \int \omega^4 d\omega =$$

$$\omega - 2 \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} + c = \eta \mu \varphi - \frac{2}{3} \eta \mu^3 \varphi + \frac{1}{5} \eta \mu^5 \varphi + c$$

γ) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\sigma \nu x$. Θέτω $\eta \mu x = \omega$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\sigma \nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta \mu x}} dx = \int \frac{\sigma \nu^4 x \cdot \sigma \nu x}{\sqrt[3]{\eta \mu x}} dx =$$

$$\int \frac{(1 - \eta \mu^2 x)^2 d(\eta \mu x)}{\sqrt[3]{\eta \mu x}} =$$

$$\int \frac{(1 - \omega^2)^2 d\omega}{\sqrt[3]{\omega}} = \int \frac{1 - 2\omega^2 + \omega^4}{\omega^{1/3}} d\omega =$$

$$\int \frac{1}{\omega^{1/3}} d\omega - 2 \int \omega^{2-1/3} d\omega + \int \omega^{4-1/3} d\omega =$$

$$\int \omega^{-1/3} d\omega - 2 \int \omega^{5/3} d\omega + \int \omega^{11/3} d\omega =$$

$$\frac{\omega^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2 \cdot \frac{\omega^{5/3+1}}{\frac{5}{3}+1} + \frac{\omega^{11/3+1}}{\frac{11}{3}+1} + c =$$

$$\frac{3}{2} \omega^{2/3} - \frac{6}{8} \omega^{8/3} + \frac{3}{14} \omega^{14/3} + c =$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{\eta \mu^2 x} - \frac{6}{8} \sqrt[3]{\eta \mu^8 x} + \frac{3}{14} \sqrt[3]{\eta \mu^{14} x} + c$$

Εφαρμογή 13

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{\eta \mu^5 y}{\sqrt{\sigma \nu y}} dy$ **β)** $I = \int \frac{\eta \mu^{3/2} x dx}{\sigma \nu^{15/2} x}$ **γ)** $\int \eta \mu^2 x \cdot \sigma \nu^5 x dx$ **δ)**

$$\int \eta \mu^2 x \cdot \sigma \nu^4 x dx$$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\eta \mu y$. Θέτω $\sigma \nu y = \omega$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\eta \mu^5 y}{\sqrt{\sigma \nu y}} dy = \int \frac{\eta \mu^4 y \cdot \eta \mu y}{\sqrt{\sigma \nu y}} dy =$$

$$-\int \frac{(1 - \sigma \nu^2 y)^2 d(\sigma \nu y)}{\sqrt{\sigma \nu y}} = -\int \frac{(1 - \omega^2)^2 d\omega}{\sqrt{\omega}} =$$

$$-\int \left(\frac{1 - 2\omega^2 + \omega^4}{\omega^{1/2}} \right) d\omega =$$

$$-\int \frac{1}{\omega^{1/2}} d\omega + 2 \int \omega^{2-1/2} d\omega + \int \omega^{4-1/2} d\omega =$$

$$-\int \omega^{-1/2} d\omega + 2 \int \omega^{3/2} d\omega - \int \omega^{7/2} d\omega =$$

$$-\frac{\omega^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2 \cdot \frac{\omega^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{\omega^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1} + c =$$

$$-2\omega^{1/2} + \frac{4}{5} \omega^{5/2} - \frac{2}{9} \omega^{9/2} + c =$$

$$-2\sqrt{\sigma \nu y} + \frac{4}{5} \sqrt{\sigma \nu^5 y} - \frac{2}{9} \sqrt{\sigma \nu^9 y} + c$$

$$-2\sqrt{\sigma \nu y} \left(1 - \frac{2}{5} \sigma \nu^2 y + \frac{1}{9} \sigma \nu^4 y \right) + c$$

β) Είναι $I = \int \frac{\sqrt{\eta \mu^3 x}}{\sqrt{\sigma \nu^{15} x}} dx = \int \sqrt{\frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu^{15} x}} dx$

$$\text{Είναι } R(-\eta \mu x, -\sigma \nu x) = \sqrt{\frac{(-\eta \mu x)^3}{(-\sigma \nu x)^{15}}} = \sqrt{\frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu^{15} x}} = R(\eta \mu x, \sigma \nu x)$$

Η συνάρτηση R, είναι άρτια ως προς $\eta \mu x$ και $\sigma \nu x$. Θέτω $\epsilon \phi x = \omega$.

$$\text{Έτσι είναι } I = \int \sqrt{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\nu^3 x} \cdot \frac{1}{\sigma\nu^{12} x}} dx = \int \sqrt{\varepsilon\varphi^3 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\right)^6}} dx =$$

$$\int \sqrt{\varepsilon\varphi^3 x} \sqrt{(1+\varepsilon\varphi^2 x)^6} dx =$$

$$\int \omega^{3/2} (1+\omega^2)^2 d\omega = \int \omega^{3/2} (1+2\omega^2+\omega^4) d\omega$$

$$\int \omega^{3/2} d\omega + 2 \int \omega^{7/2} d\omega + \int \omega^{11/2} d\omega =$$

$$\frac{\omega^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2 \frac{\omega^{7/2+1}}{\frac{7}{2}+1} + \frac{\omega^{11/2+1}}{\frac{11}{2}+1} + c =$$

$$\frac{2}{5} \varepsilon\varphi^{5/2} x + \frac{4}{9} \varepsilon\varphi^{9/2} x + \frac{2}{13} \varepsilon\varphi^{13/2} x + c$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^4 x \cdot \sigma\nu x dx = \int \eta\mu^2 x (\sigma\nu^2 x)^2 d(\eta\mu x) =$$

$$\int \eta\mu^2 x (1-\eta\mu^2 x) d(\eta\mu x) =$$

$$\int \eta\mu^2 x d(\eta\mu x) - 2 \int \eta\mu^4 x d(\eta\mu x) + \int \eta\mu^6 x d(\eta\mu x) =$$

$$\frac{\eta\mu^3 x}{3} - 2 \frac{\eta\mu^5 x}{5} + \frac{\eta\mu^7 x}{7} + c$$

$$\delta) \text{ Είναι } \int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^4 x dx =$$

$$\int \frac{1-\sigma\nu(2x)}{2} \cdot \left(\frac{1+\sigma\nu(2x)}{2} \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8} \int (1+\sigma\nu(2x) - \sigma\nu^2(2x) - \sigma\nu^3(2x)) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \sigma\nu(2x) dx - \frac{1}{8} \int \sigma\nu^2(2x) dx - \frac{1}{8} \int \sigma\nu^3(2x) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{16} \int \sigma\nu(2x) d(2x) - \frac{1}{8} \int \frac{1+\sigma\nu(4x)}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sigma\nu^2(2x) d(\eta\mu 2x) =$$

$$\frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \eta\mu(2x) - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{64} \int \sigma\nu(4x) d(4x) - \frac{1}{16} \int (1-\eta\mu^2(2x)) d(\eta\mu(2x)) =$$

$$\frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \eta\mu(2x) - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \eta\mu(4x) - \frac{1}{16} \eta\mu(2x) + \frac{1}{48} \eta\mu^3(2x) + c =$$

$$\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \eta\mu(4x) + \frac{1}{48} \eta\mu^3(2x) + c$$

Εφαρμογή 14

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{1}{3\varepsilon\varphi x + 2} dx \quad \beta) \int \sigma\nu\left(\frac{x}{2}\right) \sigma\nu\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

Λύση

α) Θέτω $\varepsilon\varphi x = \omega \Rightarrow dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2}$

Άρα, $I = \int \frac{1}{3\omega+2} \cdot \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \int \frac{d\omega}{(3\omega+2)(1+\omega^2)}$

Είναι $\frac{1}{(3\omega+2)(1+\omega^2)} = \frac{A}{3\omega+2} + \frac{B\omega+\Gamma}{1+\omega^2}$ οπότε εργαζόμενος κατά τα γνωστά

βρίσκω ότι $\left(A = \frac{9}{13}, \quad B = -\frac{3}{13}, \quad \Gamma = \frac{2}{13} \right)$

Άρα, $I = \frac{9}{13} \int \frac{d\omega}{3\omega+2} - \frac{3}{13} \int \frac{\omega d\omega}{1+\omega^2} + \frac{2}{13} \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$\frac{9}{13} \int \frac{d\omega}{3\left(\omega + \frac{2}{3}\right)} - \frac{3}{26} \int \frac{2\omega d\omega}{1+\omega^2} + \frac{2}{13} \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$\frac{3}{13} \int \frac{d\omega}{\omega + \frac{2}{3}} - \frac{3}{26} \int \frac{d\omega^2}{1+\omega^2} + \frac{2}{13} \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$\frac{3}{13} \int \frac{d\left(\omega + \frac{2}{3}\right)}{\omega + \frac{2}{3}} - \frac{3}{26} \int \frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1} + \frac{2}{13} \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} =$

$\frac{3}{13} \ln \left| \omega + \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{26} \ln(\omega^2+1) + \frac{2}{13} \tauοξ\varepsilon\varphi x + c$ όπου $\omega = \varepsilon\varphi x$

β) $\int \sigma\nu\nu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\nu\nu\left(\frac{x}{3}\right) dx =$

$\frac{1}{2} \int \left[\sigma\nu\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) + \sigma\nu\nu\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) \right] dx =$

$\frac{1}{2} \int \left(\frac{x}{6} + \sigma\nu\nu\left(\frac{5x}{6}\right) \right) dx =$

$\frac{6}{2} \int \sigma\nu\nu\left(\frac{x}{6}\right) d\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{6}{10} \int \sigma\nu\nu\left(\frac{5x}{6}\right) d\left(\frac{5x}{6}\right) =$

$3\eta\mu\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{3}{5}\eta\mu\left(\frac{5x}{6}\right) + c$

Εφαρμογή 15

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \sigma\nu\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx$ **β)** $\int \eta\mu(3x) \sigma\nu\nu(5x) dx$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\nu\nu x = \omega$.

Είναι $\int \sigma\nu\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx =$

$-\int \sigma\nu\nu^2 x (1 - \sigma\nu\nu^2 x) d(\sigma\nu\nu x) =$

$$-\int (\omega^2 - \omega^4) d\omega = -\frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} + c = -\frac{\sigma \nu^3 x}{3} + \frac{\sigma \nu^5 x}{5} + c$$

$$\beta) \int \eta\mu(3x) \sigma \nu \nu(5x) dx =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\eta\mu(8x) + \eta\mu(3x - 5x)] dx &= \frac{1}{2} \int \eta\mu(8x) dx - \frac{1}{2} \int \eta\mu(2x) dx = \\ \frac{1}{16} \int \eta\mu(8x) d(8x) - \frac{1}{4} \int \eta\mu(2x) dx &= \\ \frac{-1}{16} \sigma \nu \nu(8x) - \frac{1}{4} \sigma \nu \nu(2x) + c \end{aligned}$$

Εφαρμογή 16

Υπολογίστε τα $\alpha) \int \eta\mu x \cdot \eta\mu(2x) \cdot \eta\mu(3x) dx$ $\beta) I = \int \frac{dx}{1 + \eta\mu x + \sigma \nu \nu x} dx$ $\gamma)$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \eta\mu^2 x}$$

Λύση

$$\alpha) \int \eta\mu x \cdot \eta\mu(2x) \cdot \eta\mu(3x) dx =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\sigma \nu \nu(x - 2x) - \sigma \nu \nu(x + 2x)] \cdot \eta\mu(3x) dx &= \\ \frac{1}{2} \int (\sigma \nu \nu x - \sigma \nu \nu(3x)) \cdot \eta\mu(3x) dx &= \\ \frac{1}{2} \int \sigma \nu \nu x \eta\mu(3x) dx - \frac{1}{2} \int \sigma \nu \nu(3x) \eta\mu(3x) dx &= \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int [\eta\mu(3x + x) + \eta\mu(3x - x)] dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int [\eta\mu(3x + 3x) + \eta\mu(3x - 3x)] dx &= \\ \frac{1}{4} \int \eta\mu(4x) dx + \frac{1}{4} \int \eta\mu(2x) dx - \frac{1}{4} \int \eta\mu(6x) dx + \frac{1}{4} \int \eta\mu 0 dx &= \\ \frac{1}{16} \int \eta\mu(4x) d(4x) + \frac{1}{8} \int \eta\mu(2x) d(2x) - \frac{1}{24} \int \eta\mu(6x) d(6x) + \frac{1}{4} \int 0 dx &= \\ \frac{-1}{16} \sigma \nu \nu(4x) - \frac{1}{8} \sigma \nu \nu(2x) + \frac{1}{24} \sigma \nu \nu(6x) + c \end{aligned}$$

$$\beta) \text{Θέτω } \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \text{ οπότε } dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}, \eta\mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2}, \sigma \nu \nu x = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \text{ Άρα,}$$

$$I = \int \frac{2d\omega}{1 + \frac{2\omega}{1+\omega^2} + \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = \int \frac{d\omega}{1+\omega} = \int \frac{d(1+\omega)}{1+\omega} = \ln|1+\omega| + c = \ln\left|1 + \varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\gamma) \text{Θέτω } \varepsilon\varphi x = \omega \Rightarrow \eta\mu^2 x = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}, dx = \frac{d\omega}{1+\omega^2} \text{ Άρα,}$$

$$I = \int \frac{d\omega}{(1+\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)} = \int \frac{d\omega}{1+2\omega^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\omega\sqrt{2})}{1+(\omega\sqrt{2})^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan}(\omega\sqrt{2}) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}\varepsilon\varphi x) + c$$

Εφαρμογή 17

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x} dx$ **β)** $\int \frac{\eta\mu x}{(1-\sigma\nu x)^3} dx$ **γ)** $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^3 x dx$ **δ)** $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^2 x dx$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι άρτια ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\nu x$. Πράγματι

$$\text{είναι } R(-\eta\mu x, -\sigma\nu x) = \frac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\nu x} = \frac{1+\varepsilon\varphi}{1-\varepsilon\varphi} = R(\eta\mu x, \sigma\nu x)$$

$$\text{Θέτω } \varepsilon\varphi x = \omega \Rightarrow x = \operatorname{arctan} \omega \Rightarrow dx = (\operatorname{arctan} \omega)' d\omega \Rightarrow dx = \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x} dx =$$

$$\int \frac{1+\omega}{1-\omega} \cdot \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \int \frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)} d\omega \quad \text{Είναι}$$

$$\frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)} = \frac{A}{1-\omega} + \frac{B\omega+\Gamma}{1+\omega^2} \Rightarrow 1+\omega = (A-B)\omega^2 + (B-\Gamma)\omega + A + \Gamma \begin{cases} A-B=0 \Rightarrow A=1 \\ B-\Gamma=1 \Rightarrow B=1 \\ A+\Gamma=1 \Rightarrow \Gamma=0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega^2)} d\omega =$$

$$\int \frac{1}{1-\omega} d\omega + \int \frac{\omega}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$-\int \frac{d(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{1}{2} \int \frac{2\omega}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$-\ln|1-\omega| + \frac{1}{2} \int \frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1} = -\ln|1-\omega| + \frac{1}{2} \ln(1+\omega^2) + c =$$

$$-\ln|1-\varepsilon\varphi x| + \frac{1}{2} \ln(1+\varepsilon\varphi^2 x) + c$$

β) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω $\sigma\nu x = \omega \Rightarrow (\sigma\nu x)' dx = d\omega \Rightarrow -\eta\mu x dx = d\omega$.

$$\text{Άρα, } \int \frac{\eta\mu x dx}{(1-\sigma\nu x)^3} = -\int \frac{-\eta\mu x dx}{(1-\sigma\nu x)^3} = -\int \frac{d\omega}{(1-\omega)^3} =$$

$$\int (1-\omega)^{-3} d(1-\omega) =$$

$$\frac{(1-\omega)^{-2}}{-2} + c =$$

$$\frac{-1}{2(1-\omega)^2} + c = \frac{-1}{2(1-\sigma\nu x)^2} + c$$

γ) οι εκθέτες, είναι φυσικοί και ένας από αυτούς είναι περιττός.

$$\text{Άρα, } \int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^3 x \, dx = \int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^2 x \sigma\nu x \, dx =$$

$$\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^2 x \, d(\eta\mu x) = \eta\mu^2 x (1 - \eta\mu^2 x) \, d(\eta\mu x) =$$

$$\int \eta\mu^2 x \, d(\eta\mu x) - \int \eta\mu^4 x \, d(\eta\mu x) =$$

$$\frac{\eta\mu^3 x}{3} - \frac{\eta\mu^5 x}{5} + c$$

δ) Οι εκθέτες, είναι φυσικοί άρτιοι. Έχω $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\nu^2 x \, dx =$

$$\int \frac{1 - \sigma\nu(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \sigma\nu(2x)}{2} \, dx =$$

$$\frac{1}{4} \int (1 - \sigma\nu^2(2x)) \, dx = \frac{1}{4} \int \eta\mu^2(2x) \, dx =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1 - \sigma\nu(4x)}{2} \, dx =$$

$$\frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{32} \int \sigma\nu(4x) \, d(4x) = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \eta\mu(4x) + c$$

Εφαρμογή 18

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right) dx$ **β)** $\int \frac{\eta\mu^3 x \, dx}{\sigma\nu x}$ **γ)** $\int \frac{1 - \sigma\nu x}{1 + \sigma\nu x} dx$

Λύση

α) Είναι $I = \int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int \varepsilon\varphi^4\left(\frac{x}{4}\right) dx$

• Για να υπολογίσω το $\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right) dx$ Θέτω

$$\varepsilon\varphi x = \omega \Rightarrow \frac{x}{3} = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)' dx = (\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\omega)' d\omega = \frac{1}{3} dx = \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$$

Άρα, $\int \varepsilon\varphi^3\left(\frac{x}{3}\right) dx =$

$$3 \int \frac{\omega^3}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$3 \int \left(\omega - \frac{\omega}{\omega^2+1} \right) d\omega = 3 \int \omega \, d\omega - \frac{3}{2} \int \frac{2\omega}{\omega^2+1} \, d\omega =$$

$$3 \cdot \frac{\omega^2}{2} - \frac{3}{2} \int \frac{d(\omega^2+1)}{\omega^2+1} =$$

$$3 \cdot \frac{\omega^2}{2} - \frac{3}{2} \ln(\omega^2 + 1) + c =$$

$$\frac{3}{2} \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{3}{2} \ln \left(\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{3} \right) + 1 \right) + c$$

• Για να υπολογίσω το $\int \varepsilon \varphi^4 \left(\frac{x}{4} \right) dx$ θέτω $\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) = \omega \Rightarrow dx = \frac{4}{1 + \omega^2} d\omega$

$$\int \varepsilon \varphi^4 \left(\frac{x}{4} \right) dx =$$

$$4 \int \frac{\omega^4}{1 + \omega^2} d\omega = 4 \int \left(\omega^2 - 1 + \frac{1}{1 + \omega^2} \right) d\omega =$$

$$4 \int \omega^2 d\omega - 4 \int d\omega + 4 \int \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega =$$

$$4 \frac{\omega^3}{3} - 4\omega + 4 \tau \omega \xi \varepsilon \varphi \omega + c =$$

$$\frac{4}{3} \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) - 4 \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) + 4 \tau \omega \xi \varepsilon \varphi \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) \right) + c \quad \text{Συνεπώς,}$$

$$I = \frac{3}{2} \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{3}{2} \ln \left| \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{3} \right) + 1 \right| + \frac{4}{3} \varepsilon \varphi^3 \left(\frac{x}{4} \right) - 4 \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) + 4 \tau \omega \xi \varepsilon \varphi \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{4} \right) \right) + c$$

β) Είναι $\int \frac{\eta \mu^3 x \, dx}{\sigma \nu \nu x} = \int \frac{\eta \mu^2 x \cdot \eta \mu x \, dx}{\sigma \nu \nu x} =$

$$- \int \frac{(1 - \sigma \nu \nu^2 x) \, d(\sigma \nu \nu(\nu x))}{\sigma \nu \nu x} =$$

$$- \int \frac{d(\sigma \nu \nu x)}{\sigma \nu \nu x} + \int \sigma \nu \nu x \, d(\sigma \nu \nu(\nu x)) =$$

$$- \ln |\sigma \nu \nu x| + \frac{1}{2} \sigma \nu \nu^2 (\nu x) + c$$

γ) Θέτω $\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) = \omega$ οπότε $\sigma \nu \nu x = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}$ και

$$\frac{x}{2} = \tau \omega \xi \varepsilon \varphi \omega \Rightarrow \left(\frac{x}{2} \right)' dx = (\tau \omega \xi \varepsilon \varphi \omega)' d\omega \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} dx = \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \Rightarrow dx = \frac{2 d\omega}{1 + \omega^2} \quad \text{Έτσι, έχω}$$

$$\int \frac{1 - \sigma \nu \nu x}{1 + \sigma \nu \nu x} dx =$$

$$\int \frac{1 - \frac{1 - \omega}{1 + \omega^2}}{1 + \frac{1 - \omega}{1 + \omega^2}} \cdot \frac{2 d\omega}{1 + \omega^2} =$$

$$\int \frac{1 + \omega^2 - 1 + \omega}{1 + \omega^2 + 1 - \omega} \cdot \frac{2 d\omega}{1 + \omega^2} =$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\omega^2 d\omega}{1+\omega^2} &= 2 \int \frac{\omega^2 + 1 - 1}{\omega^2 + 1} d\omega = \\
2 \int \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 + 1} d\omega - 2 \int \frac{d\omega}{1+\omega^2} &= 2\omega - 2\tau o \xi \varepsilon \varphi \omega + c = \\
2\varepsilon \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tau o \xi \varepsilon \varphi\left(\varepsilon \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c &= \\
2\varepsilon \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\frac{x}{2} + c &= 2\varepsilon \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - x + c
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 19

Υπολογίστε τα **α)** $\int \frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x} dx$ **β)** $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}} dx$ **γ)** $\int \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x}{(1+\sigma\upsilon\nu^5 x)^5} dx$

Λύση

α) Θέτω $\varepsilon \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega$ οπότε $\eta\mu x = \frac{2\omega}{1-\omega^2}$ και $dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$. Άρα, $\int \frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x} dx =$

$$\int \frac{1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2}}{1 - \frac{2\omega}{1-\omega^2}} \cdot \frac{2d\omega}{1+\omega^2} =$$

$$\int \frac{1 + \omega^2 + 2\omega}{1 + \omega^2 - 2\omega} \cdot \frac{2d\omega}{1+\omega^2} =$$

$$\int \frac{(1+\omega)^2 \cdot 2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} d\omega$$

$$\text{Είναι } \frac{(1+\omega)^2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} = \frac{A}{1-\omega} + \frac{B}{(1-\omega)^2} + \frac{\Gamma\omega + \Delta}{1+\omega^2} \Leftrightarrow$$

$$(1+\omega)^2 = A(1-\omega)(1+\omega^2) + B(1+\omega^2) + (\Gamma\omega + \Delta)(1-\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\omega + \omega^2 = (\Gamma - A)\omega^3 + (A + B - 2\Gamma + \Delta)\omega^2 + (-A + \Gamma - 2\Delta)\omega + (A + B + \Delta) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma - A = 0 \\ A + B - 2\Gamma + \Delta = 1 \\ -A\Gamma - 2\Delta = 2 \\ A + B + \Delta = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 2 \\ \Gamma = 0 \\ \Delta = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{(1+\omega)^2 \cdot 2}{(1-\omega)^2(1+\omega^2)} d\omega =$$

$$2 \int \frac{2}{(1-\omega)^2} d\omega - 2 \int \frac{1}{\omega^2 + 1} d\omega =$$

$$-4 \int (1-\omega)^{-2} d(1-\omega) - 2 \int \frac{d\omega}{\omega^2 + 1} =$$

$$4 \frac{(1-\omega)^{-1}}{-1} - 2\tau o \xi \varepsilon \varphi \omega + c = 4 \frac{1}{1-\omega} - 2\tau o \xi \varepsilon \varphi \omega + c =$$

$$4 \frac{1}{1 - \varepsilon \varphi \frac{x}{2}} - 2 \tau o \xi \varepsilon \varphi \omega \left(\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c =$$

$$4 \frac{1}{1 - \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right)} - 2 \frac{x}{2} + c = 4 \frac{1}{1 - \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} \right)} - x + c$$

β) Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta \mu x}{\sqrt{\sigma \upsilon \nu(2x)}}$, είναι περιττή ως προς το $\eta \mu x$. Θέτω

$$\sigma \upsilon \nu x = \omega. \text{ Είναι } \int \frac{\eta \mu x}{\sqrt{\sigma \upsilon \nu(2x)}} dx = \int \frac{\eta \mu x}{\sqrt{2 \sigma \upsilon \nu^2 x - 1}} dx =$$

$$-\int \frac{d(\sigma \upsilon \nu x)}{\sqrt{2 \sigma \upsilon \nu^2 x - 1}} = -\int \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega^2 - 1}} =$$

$$-\int \frac{d\omega}{\sqrt{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(\sqrt{\omega^2 - 1/2} + \omega \right) d\omega}{\left(\sqrt{\omega^2 - 1/2} + \omega \right) \left(\sqrt{\omega^2 - 1/2} \right)} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1/2}}}{\sqrt{\omega^2 - 1/2} + \omega} d\omega =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{\omega^2 - 1/2} + \omega \right)}{\sqrt{\omega^2 - 1/2} + \omega} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \ln \left| \omega + \sqrt{\omega^2 - 1/2} \right| + c =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sigma \upsilon \nu x + \sqrt{\sigma \upsilon \nu^2 x - 1/2} \right| + c$$

γ) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta \mu x$. Θέτω $\sigma \upsilon \nu x = \omega$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\eta \mu x \sigma \upsilon \nu^4 x}{(1 + \sigma \upsilon \nu^5 x)^5} dx = -\int \frac{\sigma \upsilon \nu^4 x d(\sigma \upsilon \nu x)}{(1 + \sigma \upsilon \nu^5 x)^5} =$$

$$-\int \frac{\omega^4 d\omega}{(1 + \omega^5)^5} = \frac{-1}{5} \int \frac{5\omega^4 d\omega}{(1 + \omega^5)^5} =$$

$$\frac{-1}{5} \int \frac{d(\omega^5 + 1)}{(\omega^5 + 1)^5} = \frac{-1}{5} \int (\omega^5 + 1)^{-5} d(\omega^5 + 1) =$$

$$\frac{-1}{5} \frac{(\omega^5 + 1)^{-4}}{-4} + c = \frac{1}{20} \frac{1}{(\omega^5 + 1)^4} + c = \frac{1}{20} \frac{1}{(\sin^5 x + 1)^4} + c$$

Εφαρμογή 20

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{\sigma \nu^3 x + \sigma \nu^5 5x}{\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x} dx$ **β)** $I = \int \frac{(\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x)}{\sigma \nu x + \sigma \nu^4 (3x)} dx$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\sigma \nu x$. Θέτω $\eta \mu x = \omega$. Άρα,

$$I = \int \frac{\sigma \nu x (\sigma \nu^2 x + \sigma \nu^4 x)}{\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x} dx = \int \frac{\sigma \nu^2 x + \sigma \nu^4 x}{\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x} d(\eta \mu x) =$$

$$\int \frac{(1 - \eta \mu^2 x)^2 + (1 - \eta \mu^2 x)^2}{\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x} d(\eta \mu x) = \int \frac{(1 - \omega^2)(1 - \omega^2)}{\omega^2 + \omega^4} d\omega =$$

$$\int \frac{(1 - \omega^2)[1 + (1 - \omega^2)]}{\omega^2 + \omega^4} d\omega = \int \frac{(1 - \omega^2)(2 - \omega^2)}{\omega^2 + \omega^4} d\omega =$$

$$\int \frac{2 - \omega^2 - 2\omega^2 + \omega^4}{\omega^2(1 + \omega^2)} d\omega = \int \frac{\omega^4 - 3\omega^2 + 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} d\omega =$$

$$\int \left(1 - \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} \right) d\omega =$$

$$\int d\omega - \int \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} d\omega =$$

$$\int \frac{\omega^4 - 3\omega^2 + 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} d\omega =$$

$$\int \left(1 - \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} \right) d\omega =$$

$$\int d\omega - \int \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} d\omega$$

$$\text{Είναι } \int \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^2(1 + \omega^2)} = \frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega^2} + \frac{\Gamma \omega + \Delta}{1 + \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ \Gamma = 0 \\ \Delta = 6 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } I = \int d\omega + \int \frac{2}{\omega^2} d\omega - \int \frac{6}{1 + \omega^2} d\omega = \int d\omega + 2 \int \omega^{-2} d\omega - 6 \int \frac{d\omega}{1 + \omega^2} =$$

$$\omega + 2 \frac{\omega^{-1}}{-1} - 6 \tau \omicron \xi \epsilon \varphi \omega + c = \eta \mu x - 2 \frac{1}{\eta \mu x} - 6 \tau \omicron \xi \epsilon \varphi(\eta \mu x) + c$$

β) Είναι $I = \int \frac{(\eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x) \sigma \nu x}{\sigma \nu^2 x + \sigma \nu^4 x} dx$. Εργαζόμενος όπως προηγουμένως, έχω

$$I = \int \frac{\omega^2(1 + \omega^2)}{\omega^4 - 3\omega^2 + 2} d\omega =$$

$$\int \left(1 + \frac{4\omega^2 - 2}{\omega^4 - 3\omega^2 + 2} \right) d\omega =$$

$$\int d\omega + 2 \frac{2\omega^2 - 1}{(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - \sqrt{2})(\omega + \sqrt{2})} d\omega$$

$$\text{Είναι } \frac{2\omega^2 - 1}{(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - \sqrt{2})(\omega + \sqrt{2})} = \frac{A}{\omega - 1} + \frac{B}{\omega + 1} + \frac{\Gamma}{\omega - \sqrt{2}} + \frac{\Delta}{\omega + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$2\omega^2 - 1 = A(\omega + 1)(\omega - \sqrt{2})(\omega + \sqrt{2}) + B(\omega - 1)(\omega + \sqrt{2})(\omega - \sqrt{2}) + \\ \Gamma(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega + \sqrt{2}) + \Delta(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - \sqrt{2})$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = 1, \text{ η ανωτέρω σχέση δίνει } A = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = -1, \text{ η ανωτέρω σχέση δίνει } B = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = \sqrt{2}, \text{ η ανωτέρω σχέση δίνει } \Gamma = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = -\sqrt{2}, \text{ η ανωτέρω σχέση δίνει } \Delta = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Άρα, } I = \int d\omega - \int \frac{d\omega}{\omega - 1} + \int \frac{d\omega}{\omega + 1} + \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{\omega - \sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{\omega + \sqrt{2}} =$$

$$\omega - \ln|\omega - 1| + \ln|\omega + 1| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|\omega - \sqrt{2}| - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|\omega + \sqrt{2}| + c =$$

$$\omega + \ln\left|\frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\omega - \sqrt{2}}{\omega + \sqrt{2}}\right| + c$$

Εφαρμογή 21

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) \int \eta\mu^5 x \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} \, dx \quad \beta) \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \, dx \quad \gamma) \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \, dx$$

Λύση

α) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω

$$\sigma\upsilon\nu x = \omega. \text{ Άρα, } \int \eta\mu^5 x \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} \, dx = \int \eta\mu^4 x \cdot \eta\mu x \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} \, dx =$$

$$-\int (\eta\mu^2 x)^2 \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} \, d(\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$-\int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} \, d(\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$-\int (1 - \omega^2)^2 \sqrt[3]{\omega} \, d\omega = -\int (1 - 2\omega^2 + \omega^4) \omega^{1/3} \, d\omega =$$

$$-\int \omega^{1/3} \, d\omega + 2 \int \omega^{7/3} \, d\omega - \int \omega^{13/3} \, d\omega = \frac{\omega^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + 2 \frac{\omega^{7/3+1}}{\frac{7}{3}+1} - \frac{\omega^{13/3+1}}{\frac{13}{3}+1} + c =$$

$$\frac{-3}{4} \omega^{4/3} + \frac{4}{3} \omega^{10/3} - \frac{16}{3} \omega^{16/3} + c = \frac{-3}{4} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^4 x} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^{10} x} - \frac{3}{16} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^{16} x} + c$$

$$\begin{aligned}
\text{β)} \text{ Είναι } \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^3 x} dx &= \int \frac{dx}{\eta \mu^3 \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= \int \frac{dx}{\left[2\eta \mu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sigma \nu \nu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^3} = \\
&= \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\eta \mu^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sigma \nu \nu^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{1}{\eta \mu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)^3} \frac{1}{\sigma \nu \nu \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)^3} dx = \\
&= \frac{1}{8} \int \left[1 + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}{\sigma \nu \nu^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} dx = \\
&= \frac{2}{8} \int \frac{\left[1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{3/2} \left[1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1/2}}{\left[\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{3/2}} d\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{1 + 2\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon \varphi^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\varepsilon \varphi^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} d\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \int \left[\varepsilon \varphi^{-3} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2\varepsilon \varphi^{-1} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] d\varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon \varphi^{-2} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{-2} + \frac{1}{2} \ln \left| \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2} + c = \\
&= \frac{-1}{8} \frac{1}{\varepsilon \varphi^{-2} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \varepsilon \varphi \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{8} \varepsilon \varphi^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{γ)} \text{ Είναι } \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^4 x} dx &= \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x \cdot \sigma \nu \nu^2 x} dx = \\
\int (1 + \varepsilon \varphi^2 x) d(\varepsilon \varphi x) &= \int d(\varepsilon \varphi x) + \int \varepsilon \varphi^2 x d(\varepsilon \varphi x) = \varepsilon \varphi x + \frac{1}{3} \varepsilon \varphi^3 x + c
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 22

$$\text{Υπολογίστε τα } \text{α)} \text{ I} = \int \frac{3\eta \mu x + 2\sigma \nu \nu x}{2\eta \mu x + 3\sigma \nu \nu x} dx \quad \text{β)} \text{ I} = \int \frac{dx}{1 + 3\sigma \nu \nu^2 x}$$

Λύση

$$\alpha) 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \alpha(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) + \beta(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$\Leftrightarrow 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \alpha(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) + \beta(2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = (2\alpha - 3\beta)\eta\mu x + (3\alpha + 2\beta)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha - 3\beta \\ 2 = 3\alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{12}{13} \\ \beta = -\frac{5}{13} \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } I = \int \frac{\frac{12}{13}(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) - \frac{5}{13}(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)'}{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x} dx =$$

$$\frac{12}{13} \int \frac{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x} dx - \frac{5}{13} \int \frac{(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)'}{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x} dx =$$

$$\frac{12}{13} \int dx - \frac{5}{13} \int \frac{d(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)}{2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln|2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x| + c$$

$$\beta) \text{ Είναι } \int \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 3} dx =$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{1 + \varepsilon\varphi^2 x + 3} = \int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi^2 x + 4} =$$

$$\int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{4\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{4} \int \frac{d\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)}{\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \tauοξ\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\right) + c$$

Εφαρμογή 23

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{1}{3\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \beta) I = \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το } \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ Έχω } I = \int \frac{1}{3\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{3\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 5} dx = \int \frac{1}{3\varepsilon\varphi^2 x + 5} d(\varepsilon\varphi x) = \int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{5\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)^2 + 1\right]} =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{τοξεφ}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\varepsilon\varphi x\right) + c$$

β) Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το $\sigma\nu\nu^2x$. Έχω

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\eta\mu^2x + 3\eta\mu x \sigma\nu x - \sigma\nu\nu^2x} = \\ &= \int \frac{\frac{1}{\sigma\nu\nu^2x}}{\varepsilon\varphi^2x + 3\varepsilon\varphi x - 1} dx = \int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi^2x + 3\varepsilon\varphi x - 1} = \\ &= \int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\left[\varepsilon\varphi x - \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right)\right] \left[\varepsilon\varphi x - \left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right)\right]} = \\ &= 4 \int \frac{d\varepsilon\varphi x}{(2\varepsilon\varphi x + 3 - \sqrt{13})(2\varepsilon\varphi x + 3 + \sqrt{13})} \end{aligned}$$

$$\text{Θέτω } \varepsilon\varphi x = \omega, \text{ τότε } I = 4 \int \frac{d\omega}{(2\omega + 3 - \sqrt{13})(2\omega + 3 + \sqrt{13})}$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{(2\omega + 3 - \sqrt{13})(2\omega + 3 + \sqrt{13})} = \frac{A}{2\omega + 3 - \sqrt{13}} + \frac{B}{2\omega + 3 + \sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{13}}, B = \frac{-1}{2\sqrt{13}} \quad \text{Συνεπώς,}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{13}} \int \frac{d\omega}{2\omega + 3 - \sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \int \frac{d\omega}{2\omega + 3 + \sqrt{13}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \int \frac{d(\omega + 3 - \sqrt{13})}{2\omega + 3 - \sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \int \frac{d(2\omega + 3 + \sqrt{13})}{2\omega + 3 + \sqrt{13}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln|2\omega + 3 - \sqrt{13}| - \frac{1}{\sqrt{13}} \ln|2\omega + 3 + \sqrt{13}| + c = \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\omega + 3 - \sqrt{13}}{2\omega + 3 + \sqrt{13}} \right| + c = \end{aligned}$$

$$\text{Θέτω } \omega = \varepsilon\varphi x, \text{ τότε } I = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\varepsilon\varphi + 3 - \sqrt{13}}{2\varepsilon\varphi + 3 + \sqrt{13}} \right| + c$$

Εφαρμογή 24

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{dx}{(2 - \eta\mu x)(3 - \eta\mu x)} \quad \beta) \int \sigma\nu\nu^3x \cdot \eta\mu(2x) dx$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } I = \frac{1}{(2 - \eta\mu x)(3 - \eta\mu x)} = \frac{1}{2 - \eta\mu x} - \frac{1}{3 - \eta\mu x} \quad \text{Άρα, } I = \int \frac{dx}{2 - \eta\mu x} - \int \frac{dx}{3 - \eta\mu x}$$

- Θα υπολογίσω το $\int \frac{dx}{2-\eta\mu x}$. Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega$ Είναι $\eta\mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$ και

$$dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}. \text{ Άρα, } \int \frac{dx}{2-\eta\mu x} = \int \frac{2d\omega}{2-\frac{2\omega}{1+\omega^2}} = \int \frac{1+\omega^2}{2+2\omega^2-2\omega} = \int \frac{1}{\omega^2-\omega+1} d\omega = \int \frac{d\omega}{\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\int \frac{d\omega}{\frac{3}{4} \left[\left[\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\sqrt{3}} \right]^2 + 1 \right]} = \frac{4\sqrt{3}}{6} \int \frac{d \left[\frac{(\omega-1/2) \cdot 2}{\sqrt{3}} \right]}{\left[\frac{(\omega-1/2) \cdot 2}{\sqrt{3}} \right]^2 + 1} = \frac{4\sqrt{3}}{6} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \frac{(\omega-1/2) \cdot 2}{\sqrt{3}/2} + c =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \left(\frac{2\omega-1}{\sqrt{3}} \right) + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}} \right) + c$$

- Το $\int \frac{dx}{3-\eta\mu x}$ υπολογίζεται ομοίως και είναι $\int \frac{dx}{3-\eta\mu x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \frac{3\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}} + c$

$$\text{Άρα, } I = \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \frac{3\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}} + c$$

$$\text{β)} \int \sigma\nu\nu^3 x \cdot \eta\mu(2x) dx = \int \sigma\nu\nu^3 x \cdot 2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x dx = 2 \int \sigma\nu\nu^4 x \eta\mu x dx = \int \sigma\nu\nu^4 x d(\sigma\nu\nu x) = \frac{-2}{5} \sigma\nu\nu^5 x + c$$

Εφαρμογή 25

$$\text{Υπολογίστε τα α)} I = \int \frac{\eta\mu(2x)}{\sqrt{4\eta\mu^2 x (9-\eta\mu^2 x)}} dx \quad \text{β)} } I = \int \tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$$

Λύση

α) Θέτω $\omega = \eta\mu^2 x \Rightarrow d\omega = (\eta\mu^2 x)' dx \Rightarrow$

$d\omega = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \Rightarrow$

$d\omega = \eta\mu(2x) \, dx$

Άρα, $I = \int \frac{d\omega}{\sqrt{4\omega(9-\omega)}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(9-\omega)}}$. Θέτω $\sqrt{\omega(9-\omega)} = \omega z$ οπότε

$\sqrt{\frac{9-\omega}{\omega}} = z \Rightarrow \frac{9-\omega}{\omega} = z^2 \Rightarrow 9-\omega = z^2\omega \Rightarrow 9 = (z^2+1)\omega \Rightarrow \omega = \frac{9}{z^2+1}$ άρα,

$d\omega = \left(\frac{9}{z^2+1}\right)' dx = 9 \frac{-2z}{(z^2+1)^2} dz$ οπότε

$I = \frac{1}{2} \int \frac{9 \cdot \frac{-2z}{(z^2+1)^2}}{\frac{9}{z^2+1}} dz = -\int \frac{1}{z^2+1} dz = -\tau\omicron\xi\epsilon\phi z + c$

Από $z = \frac{\sqrt{\omega(9-\omega)}}{\omega^2} = \frac{\sqrt{\eta\mu^2 x(9-\eta\mu^2 x)}}{\eta\mu^4 x} = \frac{\sqrt{9-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}$

προκύπτει $I = -\tau\omicron\xi\epsilon\phi \sqrt{\frac{9-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}} + c$

β) $I = \int \tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \int x' \tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx =$

$x\tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int x \left[\tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right]' dx =$

$x\tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2} \int x \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = x\tau\omicron\xi\eta\mu \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

• Θα υπολογίσω το $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$. Θέτω $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = (t^2)' dt \Rightarrow dx = 2t dt$.

Άρα, $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \left[1 - \frac{1}{t^2+1} \right] dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt =$

$2t - 2\tau\omicron\xi\epsilon\phi t + c = 2\sqrt{x} - 2\tau\omicron\xi\epsilon\phi \sqrt{x} + c$.

Άρα, $I = x\tau\omicron\xi\epsilon\phi \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \tau\omicron\xi\epsilon\phi \sqrt{x} + c$

Εφαρμογή 26

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int (\sigma\upsilon\nu + \eta\mu x) \sqrt{\sigma\upsilon\nu - \eta\mu x} dx$ **β)** $I = \int \frac{dx}{\epsilon\phi x \cdot \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu(2x)}}$

Λύση

α) Θέτω $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \omega \Rightarrow d\omega = (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)' dx = -(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx$

Άρα, $I = -\int \sqrt{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} [-(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)] dx =$

$$-\int \sqrt{\omega d\omega} = -\int \omega^{1/2} d\omega = -\frac{\omega^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$-\frac{2}{3}\omega^{3/2} + c = \frac{-2}{3}(\sigma v v x - \eta \mu x)^{3/2} + c$$

β) Είναι $I = \int \frac{dx}{\frac{\eta \mu x}{\sigma v v x} \sqrt[3]{1-2\eta \mu^2 x}} = \int \frac{\sigma v v x \, dx}{\eta \mu x \sqrt[3]{1-2\eta \mu^2 x}} = \int \frac{d(\eta \mu x)}{\eta \mu x \sqrt[3]{1-2\eta \mu^2 x}}$

Θέτω $\eta \mu x = t$ οπότε $I = \int \frac{dt}{t \sqrt[3]{1-2t^2}}$

Θέτω $t^2 = z$ οπότε $t = \sqrt{z} \Rightarrow dt = (\sqrt{z})' dz \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$

Άρα, $I = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{z}} dz}{\sqrt{z} \sqrt[3]{1-2z}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z \sqrt[3]{1-2z}}$

Θέτω $\sqrt[3]{1-2z} = \omega \Rightarrow 1-2z = \omega^3 \Rightarrow z = \frac{1-\omega^3}{2} \Rightarrow dz = \left(\frac{1-\omega^3}{2}\right)' d\omega \Rightarrow dz = \frac{-3}{2} \omega^2 d\omega$

Άρα, $I = \frac{1}{2} \int \frac{-\frac{3}{2} \omega^2 d\omega}{\frac{1-\omega^3}{2} \omega} = \frac{-3}{2} \int \frac{\omega}{1-\omega^3} d\omega =$

$$\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\omega-1} - \frac{\omega-1}{\omega^2+\omega+1} \right] d\omega =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{1}{2} \int \frac{\omega-1}{\omega^2+\omega+1} d\omega =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega-1| - \frac{1}{4} \int \frac{2\omega+1-3}{\omega^2+\omega+1} d\omega =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega-1| - \frac{1}{4} \int \frac{2\omega+1}{\omega^2+\omega+1} d\omega + \frac{3}{4} \int \frac{d\omega}{\omega^2+\omega+1} =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega-1| - \frac{1}{4} \int \frac{d(\omega^2+\omega+1)}{\omega^2+\omega+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d\omega}{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega-1| - \frac{1}{4} \ln(\omega^2+\omega+1) + \frac{3}{4} \int \frac{d\omega}{\frac{3}{4} \left[\left[\frac{\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\sqrt{3}} \right]^2 + 1 \right]} =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega - 1| - \frac{1}{4} \ln(\omega^2 + \omega + 1) + \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{d\omega \frac{(\omega + 1/2) \cdot 2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{\left(\omega + \frac{1}{2} \right) \cdot 2}{\sqrt{3}} \right]^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{2} \ln |\omega - 1| - \frac{1}{4} \ln(\omega^2 + \omega + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctan} \frac{\left(\omega + \frac{1}{2} \right) \cdot 2}{\sqrt{3}} + c$$

Όπου $\omega = \sqrt[3]{1 - 2z} = \sqrt[3]{1 - 2t^2} = \sqrt[3]{1 - 2\eta\mu^2 x} = \sqrt[3]{\sigma\nu 2x}$. Άρα,

$$I = \frac{1}{2} \ln |\sqrt[3]{\sigma\nu(2x)} - 1| - \frac{1}{4} \ln \left| \sqrt[3]{(\sigma\nu(2x))^2} + \sqrt[3]{\sigma\nu(2x)} + 1 \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctan} \left(\frac{2\sqrt[3]{\sigma\nu(2x)} + 1}{\sqrt{3}} \right) + c$$

Εφαρμογή 27

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \sqrt{\varepsilon\varphi x} dx$ **β)** $I = \int \sqrt{\sigma\varphi x} dx$

Λύση

α) Θέτω $\sqrt{\varepsilon\varphi x} = t \Rightarrow \varepsilon\varphi x = t^2 \Rightarrow x = \operatorname{arctan}(t^2) \Rightarrow$

$$dx = \left(\operatorname{arctan}(t^2) \right)' dt \Rightarrow dx = \frac{2t}{1+t^4} dt \quad \text{Άρα, } I = 2 \int \frac{t^2}{1+t^4} dt \text{ Είναι}$$

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{t^2}{(t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1)} = \frac{At + B}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{\Gamma t + \Delta}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \Rightarrow$$

$$t^2 = (At + B)(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + (\Gamma t + \Delta)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) \Rightarrow \left(A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B = 0, \quad \Gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta = 0 \right)$$

$$\text{Έτσι είναι } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t^2 - \sqrt{2}t + 1)}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \int \frac{dt}{2 \cdot (t^2 - \sqrt{2}t + 1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t^2 + \sqrt{2}t + 1)}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \int \frac{dt}{2 \cdot (t^2 + \sqrt{2}t + 1)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t - 1)}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t - 1)}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}t - 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}t + 1) + c$$

όπου $t = \sqrt{\varepsilon\varphi x}$

β) Θετώ $\sqrt{\sigma\phi x} = t \Leftrightarrow \sigma\phi x = t^2 \Leftrightarrow x = \tau\omicron\xi\sigma\phi t^2 \Leftrightarrow dx = (\tau\omicron\xi\sigma\phi t^2)' dt \Rightarrow dx = \frac{-2t}{1+t^4} dt$

Άρα, $I = -\int \frac{2t}{1+t^4} dt = -2 \int \frac{t^2}{1+t^4} dt$ Παρατηρώ ότι το ολοκλήρωμα αυτό διαφέρει από το ολοκλήρωμα της προηγούμενης άσκησης ως προς το μείον.

Εφαρμογή 28

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{dx}{\eta\mu^3 x + \sigma\nu^3 x}$ **β)** $I = \int \frac{\sigma\nu^4 x}{\eta\mu^3 x} dx$

Λύση

α) Είναι • $\eta\mu(3x) = 3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x$ και

• $\sigma\nu(3x) = 4\sigma\nu^3 x - 3\sigma\nu x$

Άρα, $4(\eta\mu^3 x + \sigma\nu^3 x) =$

$3(\eta\mu x + \sigma\nu x) + [\sigma\nu(3x) - \eta\mu(3x)] =$

$3\sqrt{2}\sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - (3x)\right)$

Θέτω $\frac{\pi}{4} - x = y$ άρα, $4(\eta\mu^3 x + \sigma\nu^3 x) =$

$3\sqrt{2}\sigma\nu y - \sqrt{2}\sigma\nu(3y) =$

$\sqrt{2}(3\sigma\nu y - \sigma\nu(3y)) = 2\sqrt{2}(3\sigma\nu y - 2\sigma\nu^3 y) =$

$\frac{2\sqrt{2}}{\sigma\nu y} [3\sigma\nu^2 y - 2\sigma\nu^4 y] = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma\nu y} [3(1 - \eta\mu^2 y) - 2(1 - \eta\mu^2 y)^2] =$

$\frac{-2\sqrt{2}}{\sigma\nu y} (2\eta\mu^4 y - \eta\mu^2 y - 1)$

Άρα, $I = \sqrt{2} \int \frac{\sigma\nu y d(\eta\mu y)}{2\eta\mu^4 y - \eta\mu^2 y - 1} = \sqrt{2} \int \frac{d(\eta\mu y)}{2\eta\mu^4 y - \eta\mu^2 y - 1}$

Θέτω $t = \eta\mu y$ οπότε $\sqrt{2} \int \frac{dt}{2t^4 - t^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^4 - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \int \left(\frac{A}{t^2 - 1} + \frac{Bt + \Gamma}{t^2 + \frac{1}{2}} \right) dt =$

$\frac{\sqrt{2}}{3} \int \left(\frac{1}{t^2 - t} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{2}} \right) dt =$

$\frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{dt}{t^2 - t} - \frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{dt}{t^2 - t} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2 + 1}$

Υπολογισμός των $\int \frac{dt}{t^2 - t}$ και $\int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2 + 1}$

$$\bullet \int \frac{dt}{t^2 - t} =$$

$$\frac{-1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt =$$

$$\frac{-1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{2} \ln |t-1| + c$$

$$\bullet \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tauοξεφ\sqrt{2}t + c$$

β) Θέτω $\sigma\nu\nu x = t \Rightarrow -\eta\mu x = dt$ Άρα, $I = \int \frac{\sigma\nu\nu^4 x \cdot \eta\mu x}{\eta\mu^4 x} dx =$

$$-\int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt = -\int \left[\frac{t}{(1-t^2)^2} \right] t^3 dt =$$

$$-\int \left[\frac{1}{2(1-t^2)} \right]' t^3 dt =$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \int \frac{3t^2}{2(1-t^2)} dt = -\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{1-t^2} dt =$$

$$\frac{t^3}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1-t^2} dt =$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} \int \frac{1-t^2}{1-t^2} dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} t + \frac{3}{2} \int \left[\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \right] dt =$$

$$\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt =$$

$$-\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} t - \frac{3}{4} \ln |1-t| + \frac{3}{4} \ln |1+t| + c$$

$$-\frac{\sigma\nu\nu^3 x}{2\eta\mu^2 x} - \frac{3}{4} \sigma\nu\nu x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1 + \sigma\nu\nu x}{1 - \sigma\nu\nu x} \right| + c$$

Εφαρμογή 29

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{dx}{\eta\mu x(2 + \sigma\nu\nu x - 2\eta\mu x)}$ **β)** $I = \int \frac{dx}{\eta\mu x(2\sigma\nu\nu^2 x - 1)}$

Λύση

Θέτω $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = t$ οπότε $\eta\mu x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ Είναι $x = 2\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi t$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}\text{Άρα, } I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} \right)} = \\ &= \int \frac{(1+t^2)}{t(t^2-4t+3)} dt = \int \frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} dt = \\ &= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1} \right) dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} - \int \frac{dt}{t-1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{5}{3} \ln|t-3| - \ln|t-1| + c = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 3 \right| - \ln \left| \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| + c\end{aligned}$$

β) Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση είναι περιττή ως προς το $\eta\mu x$. Θέτω

$$\sigma\upsilon\nu x = t \Rightarrow dx = -\eta\mu x \, dt \Rightarrow dx = \frac{-1}{\eta\mu x} dt = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\text{Είναι } \eta\mu x = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα, } I &= \int \frac{-1}{(1-t^2)(2t^2-1)} dt = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \\ &= \int \frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)} dt = \\ &= 2 \int \frac{1}{1-2t^2} dt - \int \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x}{1-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} \right| + c\end{aligned}$$

Εφαρμογή 30

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) \, I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\eta\mu^{11} x \cdot \sigma\upsilon\nu x}} \quad \beta) \, \int \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^2 x} dx$$

Λύση

$$\alpha) \, I = \int \eta\mu^{\frac{-11}{3}} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\frac{-1}{3}} x \, dx \quad \text{Είναι} \quad \frac{-11}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \quad \text{αριθμός άρτιος.} \quad \text{Θέτω}$$

$$\varepsilon\varphi x = t \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x)' dx = dt \Leftrightarrow \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = dt$$

$$\begin{aligned}
\text{Εχ}\omega \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\eta\mu^{11}x \cdot \sigma\nu x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{\eta\mu^{11}x}{\sigma\nu^{11}x} \sigma\nu^{12}x}} = \\
&\int \frac{dx}{\sigma\nu^4x \cdot \sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}} = \\
&\frac{1}{\sigma\nu^2x \cdot \sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}} \cdot \frac{dx}{\sigma\nu^2x} = \\
&\int (1 + \varepsilon\varphi^2x) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon\varphi^{11}x}} \cdot \frac{dx}{\sigma\nu^2x} = \\
&\int (1 + t^2) \frac{1}{\sqrt[3]{t^{11}}} dt = \int (1 + t^2) t^{-11/3} dt = \\
&\int (t^{-11/3} + t^{-5/3}) dt = \\
&\frac{-3}{8} t^{-8/3} - \frac{3}{2} t^{-2/3} + c = \frac{3(1 + 4\varepsilon\varphi^2x)}{8\varepsilon\varphi^2x \sqrt[3]{\varepsilon\varphi^2x}} + c
\end{aligned}$$

β) Είναί $\int \frac{\sigma\nu^4x}{\eta\mu^2x} dx = \int \frac{(1 - \eta\mu^2x)^2}{\eta\mu^2x} dx =$

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{1}{\eta\mu^2x} - 2 + \eta\mu^2x \right) dx = \\
&-\sigma\varphi x - 2x + \frac{1}{2} \int 2\eta\mu^2x dx = -\sigma\varphi x - 2x + \frac{1}{2} \int (1 - \sigma\nu(2x)) dx = \\
&-\sigma\varphi x - 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \sigma\nu(2x) d(2x) = \\
&-\sigma\varphi x - \frac{3}{2}x - \frac{\eta\mu(2x)}{4} + c
\end{aligned}$$

Εφαρμογή 31

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \frac{\eta\mu^2x \cdot \sigma\nu x}{\eta\mu x + \sigma\nu x} dx$ **β)** $I = \int \frac{2\varepsilon\varphi x + 3}{\eta\mu^2x + 2\sigma\nu^2x} dx$

Λύση

α) Θέτω $t = \varepsilon\varphi x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sigma\nu^2x} dx$ Άρα, $I = \int \frac{\varepsilon\varphi^2x - \sigma\nu^4x}{\varepsilon\varphi x + 1} \cdot \frac{dx}{\sigma\nu^2x} =$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t^2 dt}{(t+1)(t^2+1)^2} = \\
&\int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+\Gamma}{t^2+1} + \frac{\Delta t + E}{(t^2+1)^2} \right] dt = \\
&\frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{4} \int \frac{t-1}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt =
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} \right| - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + c =$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\varepsilon\varphi x}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}} \right| - \frac{1}{4} \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} + c$$

β) Θέτω $\varepsilon\varphi x = t \Leftrightarrow \frac{dx}{\sigma\nu\nu^2 x} = dt$ Άρα, $I = \int \frac{2\varepsilon\varphi x + 3}{\eta\mu^2 x + 2\sigma\nu\nu^2 x} dx =$

$$\int \frac{(2\varepsilon\varphi x + 3) \frac{dx}{\sigma\nu\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi^2 x + 2} =$$

$$\int \frac{2t+3}{t^2+2} dt = \int \frac{2t}{t^2+2} dt + 3 \int \frac{1}{t^2+2} dt =$$

$$\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]} d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c =$$

$$\ln(\varepsilon\varphi^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

8 Ολοκληρώματα άρρητων συναρτήσεων που υπολογίζονται με τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) dx$ όπου R είναι μία ρητή συνάρτηση των $x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ μετασχηματίζονται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{\varepsilon^2 \pm \delta^2 x^2}) dx$ ή της μορφής $\int R(x, \sqrt{\delta^2 x^2 \pm \varepsilon^2}) dx$. Στη συνέχεια κάνω τις αντικαταστάσεις

- $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \eta\mu\omega$ (ή $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \operatorname{th}\omega$), αν έχω παράσταση $\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2 x^2}$

- $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \varepsilon\varphi\omega$ (ή $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \operatorname{sh}x$), αν έχω παράσταση $\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2 x^2}$

- $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \operatorname{τεμ}\omega$ (ή $x = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \operatorname{ch}x$), αν έχω παράσταση $\sqrt{\delta^2 x^2 - \varepsilon^2}$

Έτσι είναι • $\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2 x^2} = \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \cdot \eta\mu^2\omega} = \varepsilon\sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2 x^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \cdot \varepsilon\varphi^2\omega} = \varepsilon\operatorname{τεμ}\omega$

- $\sqrt{\delta^2 x^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{\delta^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \operatorname{τεμ}^2\omega - \varepsilon^2} = \varepsilon\varepsilon\varphi\omega$

Παρατήρηση

Η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικατάστασης, χρησιμοποιείται και σε άλλες μορφές ολοκληρωμάτων άρρητων συναρτήσεων.

Εφαρμογή 32

Υπολογίστε τα **α)** $I = \int \sqrt{1-x^2} dx$ **β)** $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$

Λύση

α) Θέτω $x = \eta\mu t \Leftrightarrow dx = (\eta\mu t)' dt = \sigma\nu t dt$

Άρα, $I = \int \sqrt{1-x^2} dx =$

$$\int \sqrt{1-\eta\mu^2 t} \cdot \sigma\nu t dt = \int \sqrt{\sigma\nu^2 t} \sigma\nu t dt =$$

$$\int \sigma\nu t \cdot \sigma\nu t dt = \int \sigma\nu t (\eta\mu t)' dt =$$

$$\sigma\nu t \cdot \eta\mu t - \int \eta\mu t (\sigma\nu t)' dt = \sigma\nu t \cdot \eta\mu t + \int \eta\mu^2 t dt =$$

$$\sigma\nu t \cdot \eta\mu t + \int (1 - \sigma\nu^2 t) dt =$$

$$\sigma\nu t \cdot \eta\mu t + t + c - \int \sigma\nu^2 t dt$$

Άρα, $I = \int \sigma\nu^2 t dt = \sigma\nu t \cdot \eta\mu t + t + c - \int \sigma\nu^2 t dt \Leftrightarrow$

$$2 \int \sigma\nu^2 t dt = \sigma\nu t \cdot \eta\mu t + t + c \Leftrightarrow$$

$$\int \sigma\nu^2 t dt = \frac{1}{2} \sigma\nu t \cdot \eta\mu t + \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\eta\mu x + c$$

β) Είναι $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$. Θέτω

$$x+1 = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow (x+1)' dx = (\varepsilon\varphi\omega)' d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{\sigma\nu^2 \omega}$$

Άρα, $I = \int \frac{1}{\varepsilon\varphi^2 \omega \sqrt{\varepsilon\varphi^2 \omega + 1}} d\omega =$

$$\int \frac{1}{\varepsilon\varphi^2 \frac{1}{\sigma\nu\omega}} d\omega = \int \frac{1}{\frac{\sigma\nu^2 \omega}{\eta\mu^2 \omega}} d\omega =$$

$$\int \frac{\sigma\nu\omega}{\eta\mu^2 \omega} d\omega = \int \frac{(\eta\mu\omega)'}{\eta\mu^2 \omega} d\omega = \int \eta\mu^{-2} \omega d(\eta\mu\omega) =$$

$$\frac{\eta\mu^{-2-1} \omega}{-2+1} + c = \frac{-1}{\eta\mu\omega} + c =$$

$$\frac{-\sqrt{(x+1)^2-1}}{(x+1)^2} + c = \frac{-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + c =$$

$$\text{Άρα, } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega} = \pm \sqrt{\frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega}}$$

Παρατήρηση

Ένας μνημονικός κανόνας για τις τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(x, \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}) dx$ ή της μορφής $\int R(x, \sqrt{b^2 x^2 \pm a^2}) dx$ είναι ο εξής «Θεωρώ τους δύο προσθετέους του υπόριζου ως δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου (η επιλογή γίνεται με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος). Στη συνέχεια, εκφράζω την πλευρά που αναφέρεται στη μεταβλητή x ως συνάρτηση της άλλης πλευράς και του ημιτόνου ή του συνημιτόνου ή της εφαπτομένης μιας οξείας γωνίας του τριγώνου.»

9 Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(e^{ax}) dx$ όπου R μια ρητή συνάρτηση του e^{ax}

Τα ολοκληρώματα αυτά, υπολογίζονται με την αντικατάσταση $e^{ax} = \omega$, οπότε $a \cdot e^{ax} dx = d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{a \cdot e^{ax}} = \frac{d\omega}{a \cdot \omega}$

Εφαρμογή 33

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \beta) \int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}-e^x-2} dx \quad \gamma) I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{3e^{2x}-4}}$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Θέτω } e^x = \omega \Leftrightarrow x = \ln \omega \Leftrightarrow dx = (\ln \omega)' d\omega = \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \int \frac{\omega}{1+\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega} d\omega = \int \frac{1}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$\text{τοξεφω} + c = \text{τοξεφ}(e^x) + c$$

$$\beta) \text{ Θέτω } e^x = \omega \Leftrightarrow (e^x)' dx = d\omega \Leftrightarrow e^x dx = d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\text{Άρα, } \int \frac{\omega^2+4\omega}{\omega^2-\omega-2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \int \frac{\omega+4}{(\omega+1)(\omega-2)} d\omega =$$

$$\int \frac{A}{\omega+1} d\omega + \frac{B}{\omega-2} d\omega =$$

$$-\int \frac{d\omega}{\omega+1} + 2 \int \frac{d\omega}{\omega-2} = -\ln|1+\omega| + 2\ln|\omega-2| + c =$$

$$-\ln(1+e^x) + 2\ln|e^x-2| + c = \ln \frac{(e^x-2)^2}{1+e^x} + c$$

$$\gamma) \text{ Θέτω } e^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega \Leftrightarrow (e^x)' dx = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \omega \right)' d\omega \Leftrightarrow e^x dx = \frac{2}{\sqrt{3}} d\omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \omega dx = \frac{2}{\sqrt{3}} d\omega \Rightarrow dx = \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\text{Άρα, } I = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \omega d\omega}{\sqrt{3\frac{4}{3}\omega^2 - 4\omega}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}}$$

$$\text{Θέτω } \omega = \cosh vt \Leftrightarrow d\omega = \eta \mu t dt$$

$$\text{Άρα } I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{\eta \mu t dt}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{\eta \mu t}{\eta \mu t} dt =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} t + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{argch} \omega + c =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \right| + c =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^x + \frac{1}{2} \sqrt{3e^{2x} - 4} \right) + c$$

Εφαρμογή 34

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx \quad \beta) I = \int \frac{e^{x/\sqrt{2}} - 1}{e^{x/\sqrt{2}} + 1} dx \quad \gamma) I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Θέτω } e^{2x} = \omega \Rightarrow (e^{2x})' dx = \omega' d\omega \Rightarrow 2e^{2x} dx = d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{2\omega}$$

$$\text{Άρα, } I = \int \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \cdot \frac{d\omega}{2\omega} =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\omega - 1}{\omega(\omega + 1)} d\omega =$$

$$\frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{2}{\omega + 1} \right) d\omega = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\omega} d\omega + \frac{2}{2} \int \frac{1}{\omega + 1} d\omega =$$

$$\frac{-1}{2} \ln |\omega| + \ln |\omega + 1| + c =$$

$$\frac{-1}{2} \ln e^{2x} + \ln(e^{2x} + 1) + c = -x + \ln(e^{2x} + 1) + c$$

$$\beta) \text{ Θέτω } e^{x/\sqrt{2}} = \omega \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = \ln \omega \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \ln \omega \Leftrightarrow dx = (\sqrt{2} \ln \omega)' d\omega = \sqrt{2} \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\text{Άρα, } I = \sqrt{2} \int \frac{\omega^2 - 1}{\omega(\omega^2 + 1)} d\omega =$$

$$\sqrt{2} \int \left(\frac{2\omega}{\omega^2 + 1} - \frac{1}{\omega} \right) d\omega =$$

$$\sqrt{2} \int \frac{2\omega}{\omega^2 + 1} d\omega - \sqrt{2} \int \frac{d\omega}{\omega} = \sqrt{2} \int \frac{d(\omega^2 + 1)}{\omega^2 + 1} - \sqrt{2} \int \frac{d\omega}{\omega} =$$

$$\sqrt{2} \ln(\omega^2 + 1) - \sqrt{2} \ln \omega + c =$$

$$\sqrt{2} \ln \frac{\omega^2 + 1}{\omega} + c =$$

$$\sqrt{2} \ln \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right) + c = \sqrt{2} \ln \left(e^{x/\sqrt{2}} + \frac{1}{e^{x/\sqrt{2}}} \right) + c$$

γ) Θεώρω $e^x = \omega \Leftrightarrow x = \ln \omega \Leftrightarrow dx = (\ln \omega)' d\omega = \frac{1}{\omega} d\omega$

Αρα, $I = \int \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 1}} d\omega$

Θεώρω $\sqrt{\omega^2 + 4\omega + 1} = \omega - z \Leftrightarrow$

$$z = \omega - \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 1} \Leftrightarrow$$

$$z^2 = \omega^2 + (\omega^2 + 4\omega + 1) - 2\omega\sqrt{\omega^2 + 4\omega + 1} = 2\omega z + 4\omega + 1$$

Αρα, $z^2 - 1 = 2\omega(z + 2) \Leftrightarrow \omega = \frac{z^2 - 1}{2(z + 2)} \Leftrightarrow$

$$d\omega = \left(\frac{z^2 - 1}{2(z + 2)} \right)' dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 + 4z + 1}{(z + 2)^2} dz$$

Αρα, $I = \int \frac{\frac{z^4 + 4z + 1}{2(z + 2)^2}}{\frac{z^2 - 1}{2(z + 2)} \cdot \frac{-z^2 - 4z - 1}{2(z + 2)}} dz =$

$$-2 \int \frac{dz}{z^2 - 1} = -2 \int \frac{1}{z^2 - 1} dz =$$

$$-2 \int \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} dz$$

Είναι $\frac{1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} \Leftrightarrow 1 = A(z + 1) + B(z - 1) \Leftrightarrow$

$$1 = (A + B)z + (A - B) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Αρα, $I = -2 \int \frac{\frac{1}{2}}{z - 1} dz - 2 \int \frac{-\frac{1}{2}}{z + 1} dz =$

$$-\int \frac{dz}{z - 1} + \int \frac{dz}{z + 1} =$$

$$-\ln|z - 1| + \ln|z + 1| + c =$$

$$\ln \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| + c$$

$$\text{Από } z = \omega - \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 1} = e^x - \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} \text{ είναι } I = \ln \left| \frac{e^x - \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} + 1}{e^x - \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} - 1} \right| + c$$

Εφαρμογή 35

$$\text{Υπολογίστε τα } \alpha) I = \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx \quad \beta) I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}} \quad \gamma) I = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3} dx$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Θέτω } e^x = \omega \Leftrightarrow e^x dx = d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{e^x} = \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\text{Αρα, } I = \int \frac{\omega + 1}{\omega^2 + 1} \frac{d\omega}{\omega} = \int \frac{\omega + 1}{\omega(\omega^2 + 1)} d\omega =$$

$$\int \left(\frac{A}{\omega} + \frac{B\omega + \Gamma}{\omega^2 + 1} \right) d\omega =$$

$$\int \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega - 1}{\omega^2 + 1} \right) d\omega =$$

$$\frac{1}{\omega} \int d\omega - \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \int d\omega + \frac{1}{\omega^2 + 1} \int d\omega =$$

$$\ln |\omega| - \frac{1}{2} \int \frac{2\omega d\omega}{\omega^2 + 1} + \int \frac{d\omega}{\omega^2 + 1} =$$

$$\ln |\omega| - \frac{1}{2} \ln(\omega^2 + 1) + \arctan \omega + c =$$

$$\ln e^x |\omega| - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \arctan \omega + c =$$

$$x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \arctan e^x + c$$

$$\beta) \text{ Θέτω } \sqrt[4]{e^x + 1} = \omega \Rightarrow e^x + 1 = \omega^4 \Rightarrow e^x = \omega^4 - 1 \Rightarrow$$

$$(e^x)' dx = (\omega^4 - 1)' d\omega \Rightarrow e^x dx = 4\omega^3 d\omega \Rightarrow$$

$$dx = \frac{4\omega^3 d\omega}{e^x} = \frac{4\omega^3}{\omega^4 - 1} d\omega$$

$$\text{Αρα, } I = \int \frac{(\omega^4 - 1)^2 4\omega^3}{\omega(\omega^4 - 1)} d\omega =$$

$$\int (\omega^4 - 1) \omega^2 d\omega = \int (4\omega^6 - 4\omega^2) d\omega =$$

$$4 \frac{\omega^7}{7} - 4 \frac{\omega^3}{3} + c = \frac{4}{7} (e^x + 1)^{7/4} - \frac{4}{3} (e^x + 1)^{3/4} + c$$

$$\gamma) \text{ Θέτω } e^{2x} = \omega \Leftrightarrow 2e^{2x} dx = d\omega \Leftrightarrow dx = \frac{d\omega}{2\omega}$$

$$I = \int \frac{\omega - 1}{\omega + 3} \frac{d\omega}{2\omega} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int \frac{\omega-1}{\omega(\omega+3)} d\omega = \\
& \frac{1}{2} \int \left(\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+3} \right) d\omega = \\
& \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\omega} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\omega+3} \right) d\omega = \\
& \frac{-1}{6} \int \frac{d\omega}{\omega} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\omega+3} = \frac{-1}{6} \ln|\omega| + \frac{2}{3} \ln|\omega+3| + c = \\
& \frac{-1}{6} \ln e^{2x} + \ln(e^{2x} + 3)^{2/3} + c = \\
& \frac{-1}{3} x + \ln(e^{2x} + 3)^{2/3} + c
\end{aligned}$$