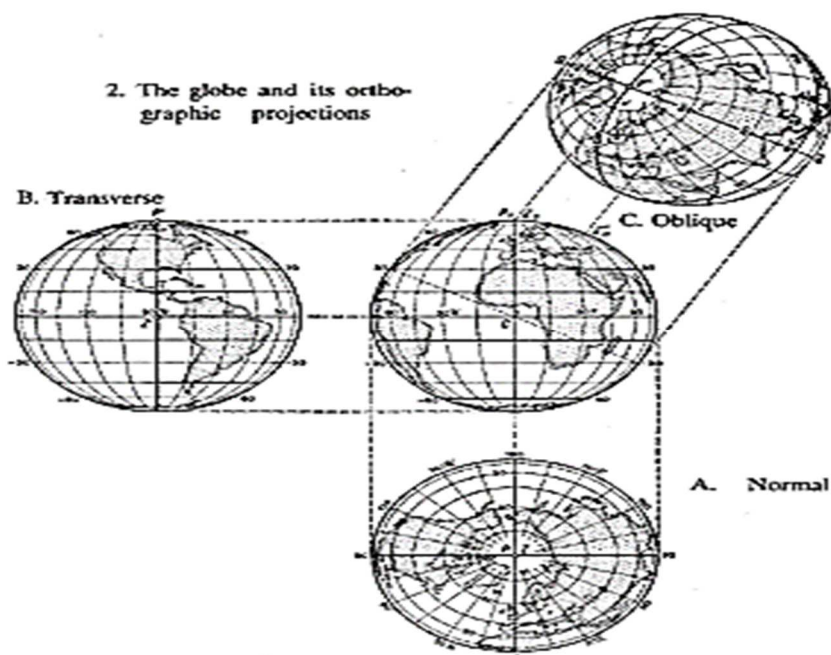




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου  
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία  
Τα μαθηματικά της κατασκευής χαρτών



Σπουδαστής: Φλωτζάνης Παναγιώτης (AM 9341)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (M.Ed.)  
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2024–2025

Ημερομηνία ανάθεσης: **14.11.2024**  
 Ημερομηνία κατάθεσης: **....05.2025**  
 Ημερομηνία εξέτασης: **....05.2025**

| A/A                   | Ονοματεπώνυμο                                                      | Χαρακτηρισμός | Υπογραφή |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------|----------|
| 1                     | Στέφανος Ι. Καρναβάς<br>Μαθηματικός (M.Ed.)<br>Επίκουρος Καθηγητής | Άριστα<br>10  |          |
| 2                     | Δρ. Λάλου Παναγιώτα<br>Μαθηματικός<br>Καθηγήτρια                   |               |          |
| 3                     | Τσαγκανός Γεώργιος<br>Μηχανικός Αυτοματισμού<br>(M.sc.) ΕΔΙΠ       |               |          |
| Τελικός χαρακτηρισμός |                                                                    |               |          |

### Περίληψη

Η σφαιρική τριγωνομετρία εμφανίστηκε πολύ νωρίτερα από την επίπεδη τριγωνομετρία. Οι ιδιότητες των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων και οι διάφορες περιπτώσεις επίλυσης τους, ήταν γνωστές ήδη στους Μενέλαο (1<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.) και Πτολεμαίο (2<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.). Τη λύση των σκαληνών σφαιρικών τριγώνων, οι αρχαίοι Έλληνες την ανήγαγαν στη λύση των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων. Ο Νασιρεντίν Τουσί (13<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.) από το Αζερμπαϊτζάν (ή την Περσία, σύμφωνα με τον G. Loria), εξέτασε συστηματικά όλες τις περιπτώσεις επίλυσης των σκαληνών σφαιρικών τριγώνων και 1<sup>ος</sup> έδωσε τη λύση σε δύο εξαιρετικά δύσκολες περιπτώσεις.

Οι θεμελιώδεις τύποι των σκαληνών σφαιρικών τριγώνων, ανήκουν στον Άραβα Αμπού-αλ-Βέφα (10<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.), στον Γερμανό μαθηματικό Regiomontanus (μέσα 15<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ.), στον Γάλλο F. Viète (2<sup>ο</sup> μισό του 16<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ.) και στον Ελβετό Euler (από 1753 έως 1779 μ.Χ.) ο οποίος έδωσε όλο το σύστημα των τύπων της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Σημαντική υπήρξε η προσφορά του Σκωτσέζου θεολόγου και μαθηματικού John Napier, στην εύρεση τύπων για πρακτικές εφαρμογές.

Υπερβολικές ονομάζονται εκείνες οι γεωμετρίες, στις οποίες τα τρίγωνα τους έχουν άθροισμα μικρότερο των 180°, που ισοδυναμεί με την ύπαρξη πολλών παράλληλων ευθειών που άγονται από σημείο εκτός ευθείας.

### Λέξεις κλειδιά

Σφαιρική τριγωνομετρία, σφαιρικά τρίγωνα (είδη, ιδιότητες), σφαιρική υπεροχή, σφαιρική άτρακτος, σφαιρικός όνυχας, σφαιρική ακτίνα, σφαιροειδές εκ περιστροφής, μέγιστος κύκλος, Ισημερινός, μεσημβρινοί, αντιμεσημβρινός, άξονας του κύκλου, πόλοι, υπερβολική γεωμετρία, γεωμετρικές ζώνες, συντεταγμένες, γεωγραφικό μήκος, γεωγραφικό πλάτος, παρημίτονο, ημιπαριμήτονο, χαρτογράφηση, φόρμουλα Haversine, φόρμουλα Vincenty, κανόνες του Napier, προβολές χαρτών (είδη), μερκατορική προβολή, στερεογραφική προβολή, αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή, κλίμακα του χάρτη, καμπυλότητα επιφάνειας, GIS, ορθοδρομία, λοξοδρομία, αλγοριθμική γεωμετρία, φαινόμενα μεγέθη, παράλλαξη, γεωδαισία, mascons, κυλινδρική προβολή, συναρτήσεις Bessel, μεγάλος γεωδαιτικός τριγωνισμός, Σείριος B, Κύκνος 61, αντίστροφα σημεία, ράβδος του Ιακώβ

## Περιεχόμενα

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Περίληψη .....                                                                                      | 2  |
| Λέξεις κλειδιά .....                                                                                | 2  |
| Εισαγωγή .....                                                                                      | 4  |
| 1. Συντεταγμένες και γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων .....                                         | 4  |
| 2. Σφαίρα και σφαιρική τριγωνομετρία .....                                                          | 4  |
| 3. Προβολές χαρτών .....                                                                            | 5  |
| 4. Μαθηματικά στην κλίμακα και στις μετρήσεις .....                                                 | 5  |
| 5. Τοπογραφικές καμπύλες και εξισώσεις γεωμετρίας .....                                             | 5  |
| 6. Ανάγνωση και δημιουργία χαρτών, μέσω υπολογιστών .....                                           | 5  |
| 1. Ορισμός της σφαίρας .....                                                                        | 6  |
| 1.1 Προτάσεις .....                                                                                 | 7  |
| 1.2 Μέγιστος κύκλος .....                                                                           | 7  |
| 1.3 Σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας .....                                                       | 7  |
| 1.4 Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας .....                                                      | 8  |
| 1.5 Μέτρηση σφαίρας .....                                                                           | 11 |
| 1.6 Σφαιρική άτρακτος και σφαιρικός όνυχας .....                                                    | 11 |
| 1.7 Παρημίτονο (versine) και ημιπαριμήτονο (haversine) .....                                        | 12 |
| 1.8 Σφαιρικό τρίγωνο .....                                                                          | 13 |
| 1.9 Είδη σφαιρικών τριγώνων .....                                                                   | 15 |
| 1.10 Πολικό σφαιρικό τρίγωνο .....                                                                  | 16 |
| 1.11 Σφαιρική υπεροχή .....                                                                         | 16 |
| 1.12 Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τυχαίων σφαιρικών τριγώνων .....                                  | 17 |
| 1.13 Τυπολόγιο και μέθοδος εργασίας για επίλυση τυχαίων σφαιρικών τριγώνων .....                    | 18 |
| 1.14 Τυπολόγιο και μέθοδος εργασίας για επίλυση ορθογωνίων και ορθόπλευρων σφαιρικών τριγώνων ..... | 20 |
| 2. Γεωμετρία της υδρογείου σφαίρας .....                                                            | 22 |
| 2.1 Παράλληλοι και μεσημβρινοί .....                                                                | 23 |
| 2.2 Από τον χάρτη των 2 ημισφαιρίων στο Google Earth .....                                          | 26 |
| 2.3 Ποια είναι η συντομότερη απόσταση ανάμεσα σε Βαρκελώνη και Τόκιο; .....                         | 27 |
| 3. Κατασκευή χαρτών και μαθηματικά .....                                                            | 29 |
| 3.1 Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος .....                                                                     | 29 |
| 3.2 Το φαινόμενο της παράλλαξης .....                                                               | 31 |
| 3.3 Ο Ίππαρχος από τη Νίκαια .....                                                                  | 31 |
| 3.4 Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος .....                                                                 | 32 |
| 3.5 Ο Μαγγελάνος .....                                                                              | 33 |
| 3.6 Γεωδαισία και γεωδαιτικός τριγωνισμός .....                                                     | 33 |
| 3.6.1 Διάσημοι γεωδαίτες .....                                                                      | 34 |
| 4. Κατασκευή χαρτών και τριγωνομετρία .....                                                         | 39 |
| 4.1 Στερεογραφική προβολή .....                                                                     | 40 |
| 4.2 Ο Mercator .....                                                                                | 43 |
| 4.3 Οι λογάριθμοι στην κατασκευή χαρτών .....                                                       | 49 |

## Εισαγωγή

Ο Ευκλείδης, θεωρούσε ότι το  $5^\circ$  αίτημα του ήταν αναπόδεικτο. Οι μαθηματικοί, στην προσπάθεια τους να βρουν μία απόδειξη για το αίτημα αυτό, ανακάλυψαν νέες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$ . Επίσης, ανακάλυψαν ότι είναι δυνατόν από σημείο εκτός ευθείας να διέρχονται άπειρες ευθείες, παράλληλες προς την ευθεία. Επειδή η Γη μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση σφαιρική, η σφαιρική (ή ελλειπτική) γεωμετρία βρίσκει άφθονες εφαρμογές σχετιζόμενες με το σχήμα της Γης, όπως είναι η ναυσιπλοΐα (υπολογισμοί πορείας), η αστρονομία (μελέτη κίνησης ουρανίων σωμάτων) και η χαρτογραφία (λόγω της καμπυλότητας της σφαίρας, η επιφάνεια της δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί στο επίπεδο, άρα οι χάρτες δεν μπορεί να είναι ακριβείς).

Τα μαθηματικά αποτελούν τη βάση της χαρτογράφησης, διότι επιτρέπουν την ακριβή αναπαράσταση των γεωγραφικών δεδομένων και των χαρακτηριστικών της Γης σε επίπεδο χάρτη. Οι γεωμετρικές, τριγωνομετρικές, σφαιρικές και υπολογιστικές μέθοδοι, χρησιμοποιούνται για να διασφαλιστεί ότι οι χάρτες αποδίδουν τις πραγματικές γεωμετρικές σχέσεις, σε τοπικό και σε παγκόσμιο επίπεδο. Η κατασκευή χαρτών, ειδικά στους τομείς της ναυτιλίας και της γεωγραφίας, απαιτεί τη χρήση διάφορων μαθηματικών εργαλείων για να μετατραπούν οι τρισδιάστατες επιφάνειες του πλανήτη μας, σε δισδιάστατες αναπαραστάσεις. Αυτή η διαδικασία, γνωστή και ως **χαρτογράφηση**, βασίζεται σε πολλές μαθηματικές έννοιες, από την τριγωνομετρία και τη γεωμετρία μέχρι τις προβολές και τις εξισώσεις των καμπυλών. Ας δούμε αναλυτικά τις κύριες μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στη δημιουργία χαρτών:

### 1. Συντεταγμένες και γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων

Η γεωγραφία και οι χάρτες βασίζονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων για να προσδιορίσουν τη θέση ενός σημείου στην επιφάνεια της Γης. Το πιο κοινό σύστημα συντεταγμένων είναι το γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο χρησιμοποιεί δύο βασικές παραμέτρους:

- **Γεωγραφικό πλάτος (Latitude):** Είναι η γωνία, που μετράτε από τον Ισημερινό ( $0^\circ$ ) ως τον βόρειο ή τον νότιο πόλο.

- **Γεωγραφικό μήκος (Longitude):** Είναι η γωνία, που μετράτε από τον Πρωτεύοντα Μεσημβρινό ( $0^\circ$ ) στο δυτικό ή στο ανατολικό ημισφαίριο.

Η γεωγραφία, χρησιμοποιεί αυτές τις παραμέτρους για να προσδιορίσει με ακρίβεια την τοποθεσία του κάθε σημείου στην επιφάνεια της Γης, αλλά αυτό είναι μόνο το πρώτο βήμα για τη δημιουργία ενός χάρτη.

### 2. Σφαίρα και σφαιρική τριγωνομετρία

Η Γη, είναι σε μεγάλο βαθμό σφαιρική (ή ακριβέστερα ένα σφαιροειδές εκ περιστροφής). Η χρήση της σφαίρας, είναι θεμελιώδης στην κατασκευή των χαρτών, διότι όλοι οι υπολογισμοί για τις αποστάσεις και για τις γωνίες βασίζονται σε σφαιρικές γεωμετρικές αρχές. Η σφαιρική τριγωνομετρία, είναι εκείνος ο κλάδος των μαθηματικών που χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν γωνίες και αποστάσεις πάνω σε μια σφαίρα. Ορισμένα βασικά εργαλεία στη σφαιρική τριγωνομετρία είναι:

- Η **σφαιρική πενταγωνική εξίσωση**.

- Ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στη σφαίρα χρησιμοποιώντας τη **φόρμουλα Haversine** ή τη **φόρμουλα του Vincenty**.

Αυτοί οι υπολογισμοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για τη ναυτιλία και την πλοήγηση, καθώς επιτρέπουν την εκτίμηση της απόστασης μεταξύ 2 σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας, κάτι που είναι απαραίτητο για τον καθορισμό της πορείας των πλοίων.

### 3. Προβολές χαρτών

Η μεγαλύτερη μαθηματική πρόκληση στη χαρτογράφηση, είναι η μετατροπή των τρισδιάστατων δεδομένων της Γης σε δισδιάστατους χάρτες. Αυτός ο τύπος μετατροπής, ονομάζεται προβολή χάρτη και περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικών τύπων για να μετατραπεί η σφαιρική επιφάνεια σε επίπεδη. Ο τύπος της προβολής που κάθε φορά επιλέγεται, εξαρτάται από το είδος του χάρτη που θέλουμε να δημιουργήσουμε και τη χρήση του (π.χ., για ναυσιπλοΐα, πολιτική, γεωλογία). Κάποιες από τις πιο γνωστές προβολές, περιλαμβάνουν:

- **Προβολή μεσημβρινού – ευθύγραμμη (Mercator projection):** Είναι η πιο γνωστή προβολή, όπου οι γραμμές του μήκους και του πλάτους είναι ευθείες και κάθετες μεταξύ τους. Χρησιμοποιείται στη ναυσιπλοΐα, λόγω της ευκολίας στη χάραξη πορείας σε ευθείες γραμμές.

- **Προβολή γεωγραφικού επίπεδου (Azimuthal projection):** Αυτή η προβολή χρησιμοποιείται για περιοχές γύρω από τους πόλους και δίνει ακριβείς αποστάσεις από ένα κεντρικό σημείο.

- **Προβολή κωνική (Conic projection):** Χρησιμοποιείται για περιοχές που εκτείνονται κατά μήκος ενός γεωγραφικού κλάδου, καθώς αποδίδει καλύτερα τις σχέσεις απόστασης και μεγέθους.

- **Προβολές τύπου γεωειδούς (Pseudo-cylindrical projections):** Αυτές, συνδυάζουν χαρακτηριστικά της κυλινδρικής και της κωνικής προβολής και χρησιμοποιούνται για μεγάλες περιοχές, με περιορισμένες παραμορφώσεις.

### 4. Μαθηματικά στην κλίμακα και στις μετρήσεις

Η κλίμακα ενός χάρτη, καθορίζει την αναλογία της απόστασης στον χάρτη προς την πραγματική απόσταση στη Γη. Για παράδειγμα, μια κλίμακα 1:50.000 σημαίνει ότι 1 μονάδα απόστασης στον χάρτη αντιστοιχεί σε 50.000 μονάδες στην πραγματικότητα. Οι μαθηματικοί υπολογισμοί, είναι απαραίτητοι για τη σωστή αναπαράσταση της κλίμακας και την ακριβή μέτρηση των αποστάσεων και των περιοχών πάνω στον χάρτη.

- **Υπολογισμοί κλίμακας:** Χρησιμοποιούνται για να προσαρμοστούν οι φυσικές αποστάσεις σε αναλογίες, που είναι χρήσιμες για τη χαρτογράφηση.

- **Περιοχές και επιφάνειες:** Όταν χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε την περιοχή μιας χερσαίας μάζας ή της θάλασσας σε χάρτη, τότε χρησιμοποιούμε ολοκληρώματα για να υπολογίσουμε την ακριβή επιφάνεια, από τα γεωμετρικά σχήματα που προκύπτουν στην προβολή.

### 5. Τοπογραφικές καμπύλες και εξισώσεις γεωμετρίας

Οι τοπογραφικοί χάρτες, χρησιμοποιούν τοπογραφικές καμπύλες (ή ισούνβεις καμπύλες) για να αναπαραστήσουν το ανάγλυφο της Γης. Αυτές οι καμπύλες, δείχνουν περιοχές με την ίδια υψομετρική τιμή και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό υψομετρικών διαφορών και αναλύσεων του εδάφους. Η χρήση των μαθηματικών για τον υπολογισμό αυτών των καμπυλών, βασίζεται στη διαφορική γεωμετρία, που περιλαμβάνει τις εξισώσεις για την υπολογισμό της καμπυλότητας της επιφάνειας.

### 6. Ανάγνωση και δημιουργία χαρτών, μέσω υπολογιστών

Με την ανάπτυξη της γεωγραφικής πληροφορικής συστήματος (GIS), οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν αναλάβει μεγάλο μέρος της δημιουργίας των χαρτών, χρησιμοποιώντας πολύπλοκους αλγόριθμους. Το GIS συνδυάζει μαθηματικά, στατιστική και υπολογιστικές επιστήμες για να παράγει χαρτογραφικά δεδομένα, να τα αναλύσει και να τα παρουσιάσει.

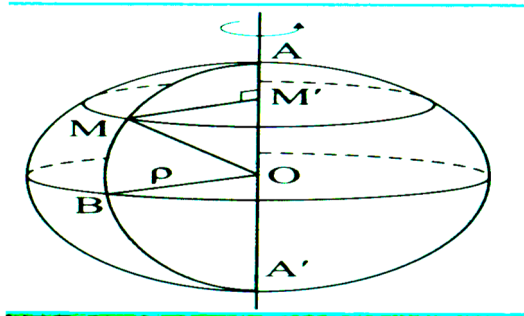
• **Αλγόριθμοι γεωμετρίας υπολογιστή:** Εδώ, χρησιμοποιούνται οι αλγόριθμοι των υπολογιστικών γεωμετρικών παραστάσεων για τη δημιουργία, την αποθήκευση και την αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων και των καμπυλών, στον υπολογιστή.

## 1. Ορισμός της σφαίρας

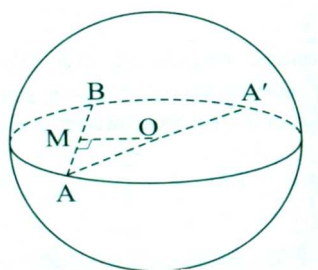
Η σφαίρα, παρόλο που από την εποπτεία είναι γνωστό στερεό σώμα, μπορεί να οριστεί γεωμετρικά ως στερεό εκ περιστροφής αλλά και ως γεωμετρικός τόπος. Σύμφωνα με τον **1<sup>ο</sup> ορισμό**, σφαίρα ονομάζεται το στερεό σώμα του οποίου η επιφάνεια διαγράφεται από ημικύκλιο που περιστρέφεται πλήρως περί τη διάμετρο του (σχήμα 1). Η επιφάνεια που διαγράφει το ημικύκλιο, ονομάζεται **σφαιρική επιφάνεια** ή επιφάνεια της σφαίρας. Το μέσον  $O$  του ημικυκλίου, ονομάζεται **κέντρο** της σφαίρας. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το κέντρο της σφαίρας με οποιοδήποτε σημείο της σφαιρικής της επιφάνειας, ονομάζεται **ακτίνα** της σφαίρας.

Σύμφωνα με τον **2<sup>ο</sup> ορισμό**, σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση  $\rho$  από ένα σταθερό σημείο  $O$  (σχήμα 2). Το σημείο  $O$ , ονομάζεται κέντρο της σφαίρας και το ευθύγραμμο τμήμα  $OA = \rho$  ονομάζεται ακτίνα της σφαίρας. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα είναι 2 τυχαία σημεία μίας σφαιρικής επιφάνειας, ονομάζεται **χορδή** της αντίστοιχης σφαίρας.

Αν μία χορδή διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, τότε ονομάζεται **διάμετρος** της σφαίρας. Στο σχήμα 2, το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  είναι χορδή της σφαίρας, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα  $AA'$  είναι διάμετρος της σφαίρας. Κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας, είναι άκρο μίας μοναδικής διαμέτρου της σφαίρας. Όλες οι διαμέτροι της σφαίρας, έχουν μήκος ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας της. Στο σχήμα 1, για τη διάμετρο  $AA'$  ισχύει ότι  $AA' = 2\rho$ . Κάθε ευθεία διερχόμενη από το κέντρο  $O$  της σφαίρας, (σχήμα 2) τέμνει τη σφαίρα σε 2 σημεία  $A, A'$  τα οποία ονομάζονται **αντιδιαμετρικά**.



Σχήμα 1 . Η σφαίρα ως στερεό εκ περιστροφής



Σχήμα 2. AB: Χορδή,  $AA'$  διάμετρος

### 1.1 Προτάσεις

Οι παρακάτω προτάσεις, είναι άμεση απόρροια των ορισμών της σφαίρας.

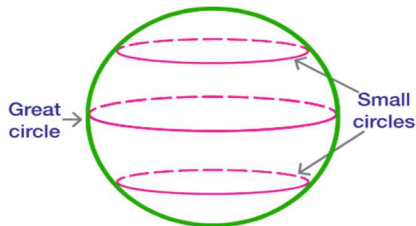
- Κάθε σφαίρα, έχει ένα μόνο κέντρο  $O$ .
- Κάθε χορδή της σφαίρας, είναι μικρότερη από τη διάμετρο.
- Τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία του χώρου, ορίζουν πάντα μία και μοναδική σφαιρική επιφάνεια.
- Αν  $AB$  είναι χορδή σφαίρας και  $M$  το μέσον της χορδής, τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $OM$  είναι κάθετο στη χορδή (σχήμα 2).

### Παρατήρηση

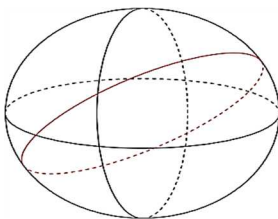
Επειδή μία ευθεία γραμμή, δεν μπορεί να έχει περισσότερα από 2 κοινά σημεία με έναν κύκλο και επειδή όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας ισαπέχουν από το κέντρο της, έπεται ότι σε μία σφαιρική επιφάνεια δεν υπάρχουν 3 ή περισσότερα συνευθειακά σημεία.

### 1.2 Μέγιστος κύκλος

Κάθε κύκλος της σφαιρικής επιφάνειας ο οποίος έχει ως κέντρο του το κέντρο της σφαίρας (σχήμα 3), έχει μεγαλύτερη διάμετρο (άρα και ακτίνα) από κάθε άλλον κύκλο της ίδιας σφαιρικής επιφάνειας, ο οποίος έχει ως διάμετρο μία χορδή της σφαίρας. Μέγιστοι κύκλοι, ονομάζονται οι κύκλοι με την παραπάνω ιδιότητα. Δύο μέγιστοι κύκλοι, είναι πάντα ίσοι και τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία (σχήμα 4). Από δύο αντιδιαμετρικά σημεία της σφαιρικής επιφάνειας, διέρχεται μοναδικός μέγιστος κύκλος.



Σχήμα 3. Μέγιστος κύκλος σφαίρας

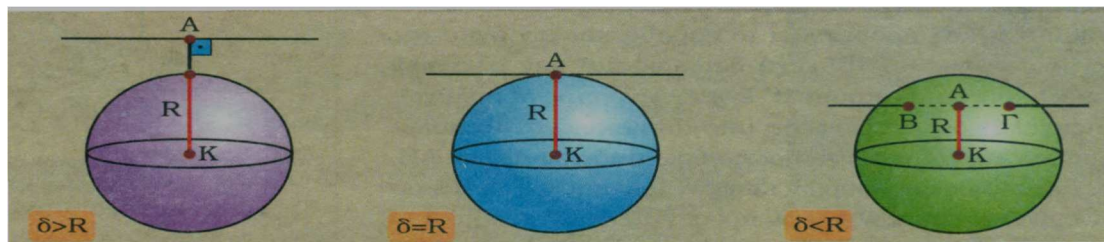


Σχήμα 4. Τομές μεγίστων κύκλων

### 1.3 Σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας

Οι σχετικές θέσεις ευθείας γραμμής και σφαίρας, ανάγονται στις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (σχήμα 5). Αν  $\delta$  είναι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο  $K$  της σφαίρας  $(K, R)$ , τότε υπάρχουν οι ακόλουθες 3 περιπτώσεις.

- Αν  $\delta > R$ , τότε τα 2 σχήματα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Αν  $\delta = R$ , τότε τα 2 σχήματα έχουν μόνο 1 κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι η ευθεία με τη σφαίρα εφάπτονται στο κοινό τους σημείο.
- Αν  $\delta < R$ , τότε τα 2 σχήματα έχουν 2 κοινά σημεία.



Σχήμα 5. Σχετικές θέσεις ευθείας και σφαίρας

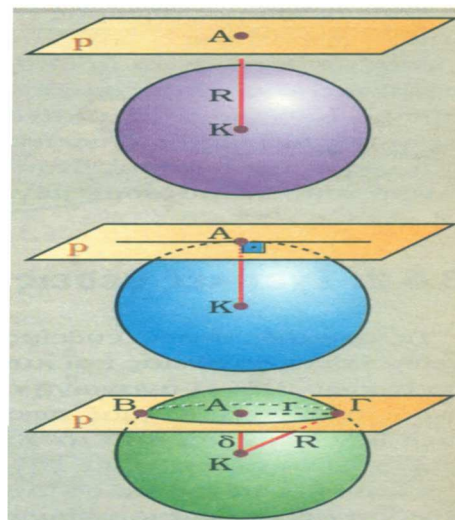
#### 1.4 Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας

Οι σχετικές θέσεις του επιπέδου και της σφαίρας (σχήμα 6), καθορίζονται από την ελάχιστη απόσταση  $\delta$  του επιπέδου  $p$ , από το κέντρο  $K$  της σφαίρας  $(K, R)$ . Υπάρχουν οι ακόλουθες 3 περιπτώσεις.

- Αν  $\delta > R$ , τότε τα δύο σχήματα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Αν  $\delta = R$ , τότε τα δύο σχήματα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι το επίπεδο  $p$  με τη σφαίρα  $(K, R)$  εφάπτονται στο κοινό τους σημείο  $A$  το οποίο ονομάζεται **σημείο επαφής**.
- Αν  $\delta < R$ , τότε η τομή του επιπέδου  $p$  και της σφαίρας  $(K, R)$  είναι κύκλος ακτίνας  $r = \sqrt{R^2 - \delta^2}$ .

##### Ειδική περίπτωση

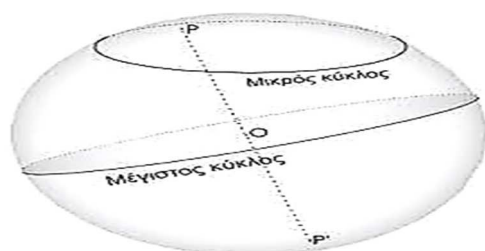
Αν  $\delta = 0$ , δηλαδή το επίπεδο  $p$  περιέχει το κέντρο της σφαίρας  $(K, R)$ , τότε η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι ένας μέγιστος κύκλος, διότι  $r = R$ .



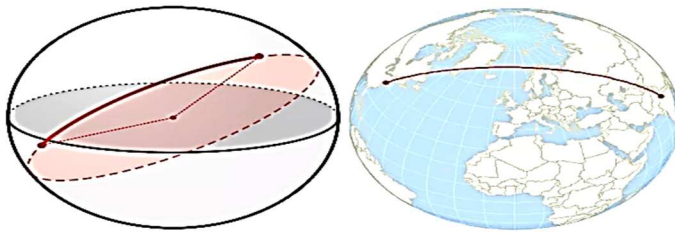
Σχήμα 6. Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας

Αν ένα επίπεδο τέμνει μία σφαίρα, η τομή τους πάντα είναι ένας κύκλος. Αν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, ο κύκλος ονομάζεται μέγιστος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, ονομάζεται ελάχιστος κύκλος. Ένας μέγιστος κύκλος είναι και ο **Ισημερινός** (Equator). Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία μίας σφαίρας (σχήμα 7) διέρχονται άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος κύκλος (σχήμα 9), που ορίζει και τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών.

**Απόσταση** δύο σημείων μίας σφαίρας, ονομάζεται το μικρότερο από τα δυο τόξα του μεγίστου κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία αυτά (σχήμα 8).



Σχήμα 7. Μέγιστος κύκλος και μικρός κύκλος σφαίρας



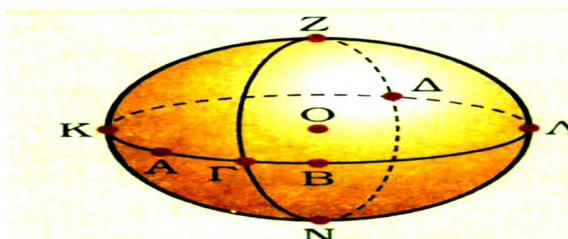
Σχήμα 8. Απόσταση 2 σημείων σφαίρας

|                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, είναι ίσοι μεταξύ τους.                                                                                                                                                                                             |
| Οι μέγιστοι κύκλοι, διχοτομούν ο ένας τον άλλο.                                                                                                                                                                                                          |
| Κάθε μέγιστος κύκλος, χωρίζει τη σφαίρα σε 2 ίσα μέρη, που ονομάζονται <b>ημισφαίρια</b> .                                                                                                                                                               |
| Η τομή 2 μεγίστων κύκλων, είναι πάντα η κοινή τους διάμετρος.                                                                                                                                                                                            |
| Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ 2 σημείων μίας σφαίρας, είναι το τόξο του μεγίστου κύκλου το οποίο ορίζεται από αυτά τα σημεία (σχήμα 8). Το γεγονός αυτό εκμεταλλεύονται οι αεροπορικές και οι ναυτιλιακές εταιρείες, κατά τον σχεδιασμό των δρομολογίων. |
| Από 2 αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας, διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι (σχήμα 9). Πχ. Από τους πόλους της Γης διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι, που είναι όλοι οι μεσημβρινοί της γήινης σφαίρας.                                                 |

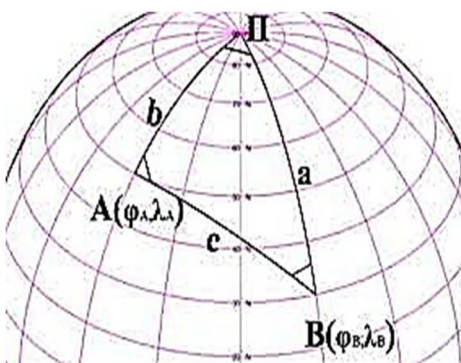
Πίνακας 1. Ιδιότητες των μεγίστων κύκλων της σφαίρας.

Στον ευκλείδειο χώρο των 2 διαστάσεων, η συντομότερη απόσταση μεταξύ 2 σημείων είναι η ευθεία γραμμή, ενώ μεταξύ 2 σημείων μίας σφαιρικής επιφάνειας, είναι το τόξο το οποίο ορίζεται επί του μεγίστου κύκλου, του διερχόμενου από αυτά τα 2 σημεία. Για τον λόγο αυτό, τα πλοία και τα αεροπλάνα ταξιδεύουν επί μεγίστων κύκλων. Συνεπώς, δεν είναι αφύσικο να αναμένουμε να έχουν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, ιδιότητες ανάλογες με αυτές που έχουν οι ευθείες γραμμές στην επιπεδομετρία. Δύο μέγιστοι κύκλοι σφαίρας **τέμνονται κάθετα**, όταν τα επίπεδα στα οποία ανήκουν (και διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας) είναι κάθετα μεταξύ τους. Πχ. στη γήινη σφαίρα, οι μεσημβρινοί τέμνουν κάθετα τον Ισημερινό.

**Σφαιρικό τμήμα**, ονομάζεται εκείνο το τμήμα του μεγίστου κύκλου που συνδέει 2 σημεία της σφαιρικής επιφάνειας (σχήμα 10). Τα σημεία αυτά, ονομάζονται **άκρα** του σφαιρικού τμήματος.



Σχήμα 9. Μόνο ένας μέγιστος κύκλος διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ



Σχήμα 10. Τα σφαιρικά τμήματα ΑΠ και ΒΠ

| Αξίωμα ευκλείδειας γεωμετρίας                                           | Αντίστοιχο αξίωμα στη σφαίρα                                 |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Από 2 σημεία του επιπέδου, διέρχεται μία μοναδική ευθεία.               | Από 2 σημεία της σφαίρας, διέρχεται τουλάχιστον ένας κύκλος. |
| Από σημείο εκτός ευθείας, διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς την ευθεία. | Δύο μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, τέμνονται πάντα.            |

Πίνακας 2. Προσαρμογή αξιωμάτων ευκλείδειας γεωμετρίας στη σφαίρα

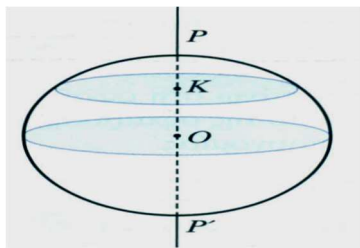
|                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Δύο μικροί κύκλοι, ονομάζονται παράλληλοι όταν τα επίπεδα τους είναι παράλληλα (σχήμα 11).                                                  |
| Δύο μικροί κύκλοι είναι ίσοι, όταν ισαπέχουν από το κέντρο της σφαίρας.                                                                     |
| Όταν 2 μικροί κύκλοι δεν ισαπέχουν από το κέντρο της σφαίρας, τότε μικρότερος είναι αυτός που απέχει περισσότερο από το κέντρο της σφαίρας. |
| Τρία σημεία της σφαιρικής επιφάνειας, ορίζουν πάντα έναν μικρό κύκλο.                                                                       |
| Η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο ενός μικρού κύκλου, είναι κάθετη στο επίπεδο του μικρού κύκλου (σχήμα 12).           |

Πίνακας 3. Ιδιότητες των μικρών κύκλων της σφαίρας

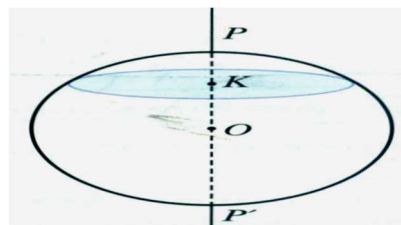
**Άξονας** του κύκλου, ονομάζεται η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδο του (σχήμα 13). Τα σημεία που ο άξονας τέμνει τη σφαίρα, ονομάζονται **πόλοι** του κύκλου. **Σφαιρική ακτίνα** ενός κύκλου, ονομάζεται το τόξο που συνδέει ένα σημείο του κύκλου με τον κοντινότερο πόλο. Η σφαιρική ακτίνα κάθε μεγίστου κύκλου, είναι  $90^\circ$ .

|                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Όλα τα σημεία ενός τυχαίου κύκλου, ισαπέχουν από τους πόλους του (σχήμα 14).                                             |
| Τα τόξα των μεγίστων κύκλων που ξεκινούν από τους πόλους του κύκλου και καταλήγουν στα σημεία του, είναι ίσα (σχήμα 15). |

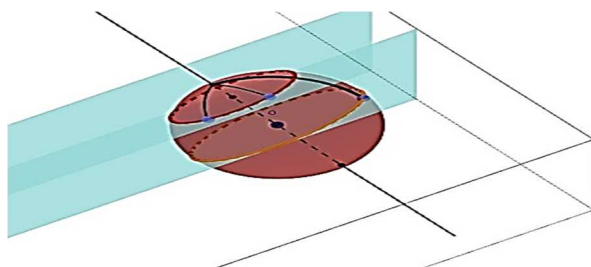
Πίνακας 4. Ιδιότητες των πόλων του κύκλου



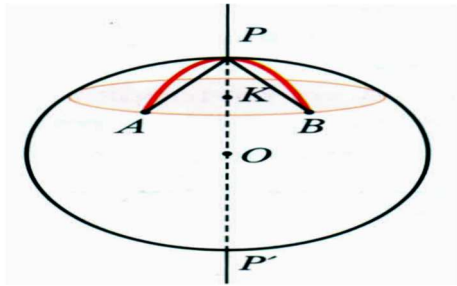
Σχήμα 11. Παράλληλοι κύκλοι



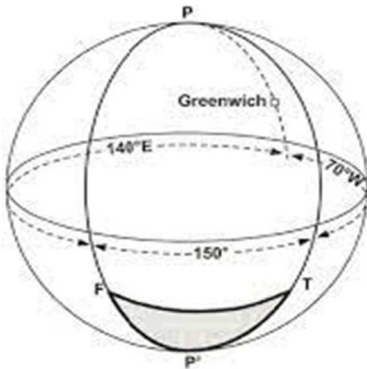
Σχήμα 12.  $PP'$  κάθετο στο επίπεδο του μικρού κύκλου



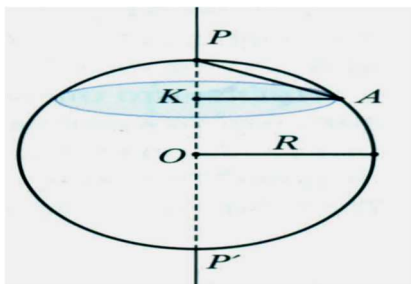
Σχήμα 13. Άξονας του κύκλου



Σχήμα 14. Είναι  $PA=PB$



Σχήμα 15. Ίσα τόξα  $P'F = P'T$



Σχήμα 16.  $PA=$  πολική απόσταση

Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου, είναι σταθερή και ονομάζεται **πολική απόσταση** (σχήμα 16).

### 1.5 Μέτρηση σφαίρας

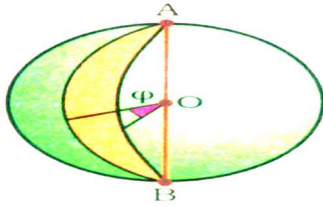
Για 1<sup>η</sup> φορά από τον Αρχιμήδη, υπολογίστηκαν ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας και οι όγκοι και τα εμβαδά των κυρτών επιφανειών κυλίνδρου, του κώνου και του κώλου κώνου. Αποδεικνύεται ότι, ο όγκος σφαίρας ακτίνας  $R$  δίνεται από τον τύπο  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  και το εμβαδόν της σφαιρικής της επιφάνειας δίνεται από τον τύπο  $E = 4\pi R^2$ , δηλαδή ισούται με το εμβαδόν 4 μέγιστων κύκλων.

### 1.6 Σφαιρική άτρακτος και σφαιρικός όνυχας

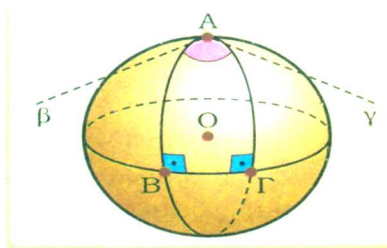
Έστω σφαίρα  $(O, \rho)$  και  $\varphi$  το μέτρο μίας διέδρης γωνίας που έχει ως ακμή τη διάμετρο  $AB$  (σχήμα 17). **Σφαιρική άτρακτος** ονομάζεται εκείνο το τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας, που βρίσκεται μεταξύ των εδρών της διέδρης γωνίας. Η γωνία μεταξύ των ημιπεριφερειών, ονομάζεται **γωνία της ατράκτου**.

**Σφαιρικός όνυχας**, ονομάζεται το στερεό που περικλείεται από τις έδρες της διέδρης γωνίας και τη σφαιρική άτρακτο. **Βάση του στερεού όνυχας**, ονομάζεται η άτρακτος που περιέχεται μεταξύ των ημικυκλίων. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

- Δύο άτρακτοι με ίσες γωνίες, στην ίδια σφαίρα ή σε σφαίρες ίδιας ακτίνας, είναι ίσες.
- Ο λόγος των εμβαδών 2 ατράκτων, στην ίδια σφαίρα ή σε σφαίρες ίδιας ακτίνας, ισούται με τον λόγο των γωνιών τους.
- Το εμβαδόν μίας ατράκτου ισούται, με το διπλάσιο της γωνίας της.



Σχήμα 17. Σφαιρική άτρακτος και σφαιρικός όνυχας

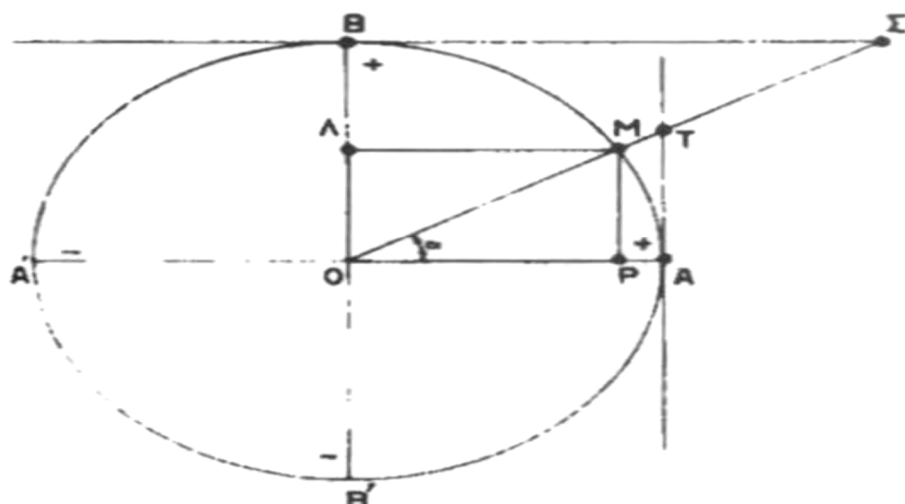


Σχήμα 18. Σφαιρική γωνία A .

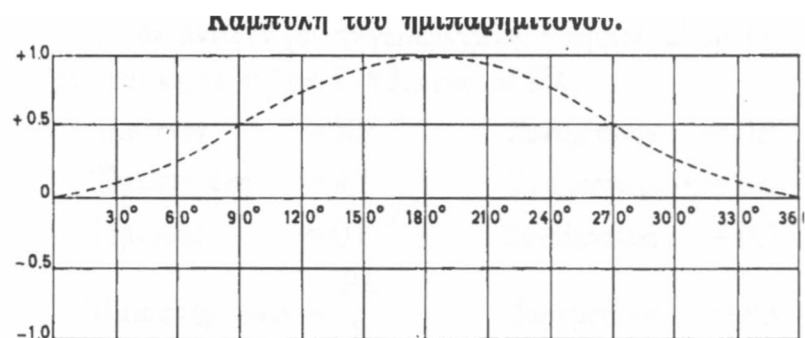
**Σφαιρική γωνία**, ονομάζεται το τμήμα της σφαίρας το ευρισκόμενο μεταξύ 2 τεμνόμενων τόξων μέγιστων κύκλων (σχήμα 18). Τα τόξα αυτά, ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας και το σημείο τομής τους, ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας. Τα τόξα αυτά, τέμνονται και σε ένα άλλο σημείο της σφαίρας, αντιδιαμετρικό της κορυφής. Κάθε σφαιρική γωνία κορυφής A , έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της γωνίας βΑγ όπου Αβ, Αγ είναι οι εφαπτόμενες της σφαίρας στο σημείο A . Αφού ως μέτρο της σφαιρικής γωνίας  $\angle B A \Gamma$  ορίσαμε το μέτρο της ευθύγραμμης γωνίας  $\angle \beta A \gamma$ , ισχύει ότι  $\angle A = \angle \beta A \gamma = \angle B A \Gamma$ . Δηλαδή το μέτρο μίας σφαιρικής γωνίας, είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες που είναι εφαπτόμενες στις πλευρές της γωνίας, στην κορυφή της.

### 1.7 Παρημίτονο (versine) και ημιπαρημίτονο (haversine)

Η παράσταση  $1 - \sin \omega$ , ονομάζεται παρημίτονο της γωνίας  $\omega$ . Στο σχήμα 19 γεωμετρικά, η παράσταση του παρημιτόνου είναι (PA). Η παράσταση  $\frac{1 - \sin \omega}{2}$ , ονομάζεται ημιπαρημίτονο της γωνίας  $\omega$ . Δηλαδή,  $\eta\mu\pi\omega = \frac{1 - \sin \omega}{2}$ . Από τον ορισμό του προκύπτει ότι, το ημιπαρημίτονο είναι πάντα θετικό (σχήμα 20). Στο ίδιο σχήμα, για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$  ισχύουν:  $\sin \omega = OP$ ,  $\eta\mu\omega = OL$ ,  $\epsilon\phi\omega = AT$ ,  $\sigma\phi\omega = B\Sigma$ ,  $\tau\epsilon\mu\omega = \frac{1}{\sin \omega} = OT$ ,  $\sigma\tau\epsilon\mu\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega} = OS$ .



Σχήμα 19. ημπρ  $\omega=PA$



Σχήμα 20. Καμπύλη του ημιπαρημιτόνου

|                       |       |          |         |          |         |
|-----------------------|-------|----------|---------|----------|---------|
| Τιμές γωνίας          | $0^0$ | $90^0$   | $180^0$ | $270^0$  | $360^0$ |
| Τιμές ημιπαραημιτόνου | 0     | 0,5      | 1       | 0,5      | 0       |
| Τιμές τέμνουσας       | 1     | $\infty$ | -1      | $\infty$ | 1       |

Πίνακας 5. Τιμές ημιπαρημιτόνου, τέμνουσας και συντέμνουσας

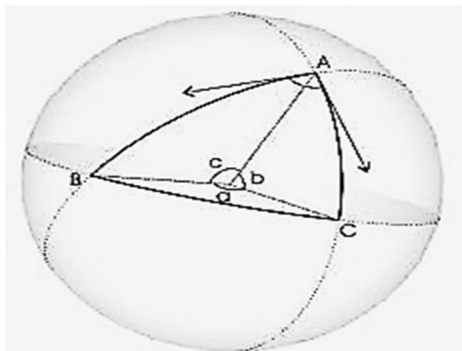
| Ελληνικοί όροι | Αγγλικοί όροι | Συντμήσεις |
|----------------|---------------|------------|
| Ημίτονο        | Sine          | sin        |
| Σνημίτονο      | Cosine        | cos        |
| Εφαπτομένη     | Tangent       | tan        |
| Συνεφαπτομένη  | Cotangent     | cot        |
| Τέμνουσα       | Secant        | sec        |
| Συντέμνουσα    | Cosecant      | cosec      |
| Παρημίτονο     | Versine       | ver        |
| Ημιπαριμήτονο  | Haversine     | hav        |

Πίνακας 6. Τριγωνομετρικοί όροι και οι συντμήσεις τους

## 1.8 Σφαιρικό τρίγωνο

Είναι το τμήμα της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των 3, τεμνόμενων ανά 2, τόξων μεγίστων κύκλων, υπό τον όρο ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια. Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 21, τα σημεία τομής  $A, B, C$  των μεγίστων κύκλων ονομάζονται **κορυφές** και τα τόξα  $AB, BC, CA$  ονομάζονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι 3 μέγιστοι κύκλοι ανά 2, ονομάζονται **γωνίες** του σφαιρικού τριγώνου, μετρούνται σε μοίρες και συμβολίζονται με τα γράμματα των

κορυφών  $A, B, C$ . Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου, συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Στη σφαιρική γεωμετρία, η σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη (μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών) μετρούνται με τόξα μεγίστων κύκλων και όχι με μήκη.



Σχήμα 21. Σφαιρικό τρίγωνο ABC

| Ιδιότητες κάθε σφαιρικού τριγώνου ABC                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Για τις πλευρές του είναι $0 < a < 180^0, 0 < b < 180^0, 0 < c < 180^0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Για το άθροισμα των πλευρών του είναι $a + b + c < 360^0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Κάθε πλευρά του τριγώνου, είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων 2 πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Κάθε γωνία του τριγώνου, είναι μικρότερη των $180^0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Για το άθροισμα των γωνιών του, είναι $180^0 < A + B + C < 540^0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Κάθε γωνία του τριγώνου, αν αυξηθεί κατά $180^0$ γίνεται μεγαλύτερη από το άθροισμα των άλλων 2. Δηλαδή, κυκλικά είναι $A + 180^0 > B + C, B + 180^0 > A + C, C + 180^0 > A + B$ .                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του και αντίστροφα, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του.                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Απέναντι από άνισες πλευρές, βρίσκονται ομοιότροπα άνισα γωνίες.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Αν είναι ισόπλευρο το τρίγωνο, τότε είναι και ισογώνιο.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Αν είναι ισοσκελές το τρίγωνο, τότε έχει ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι των ίσων πλευρών του. Επίσης, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Τα κάθετα τόξα μεγίστων κύκλων στα μέσα των πλευρών του τριγώνου (μεσοκάθετοι), διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Τα τόξα μεγίστων κύκλων που διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου (διχοτόμοι), διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Τα τόξα μεγίστων κύκλων που διέρχονται από τις κορυφές του και είναι κάθετα στις απέναντι πλευρές (ύψη), διέρχονται από το ίδιο σημείο.                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Ισχύει το θεώρημα του ημιτόνου $\frac{\eta\mu a}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu b}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu c}{\eta\mu C}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Ισχύει το θεώρημα του συνημιτόνου (κυκλικά)<br>$\sigma\upsilon\nu a = \sigma\upsilon\nu b \cdot \sigma\upsilon\nu c + \eta\mu b \cdot \eta\mu c \cdot \sigma\upsilon\nu A$ ,<br>$\sigma\upsilon\nu b = \sigma\upsilon\nu c \cdot \sigma\upsilon\nu a + \eta\mu c \cdot \eta\mu a \cdot \sigma\upsilon\nu B$ ,<br>$\sigma\upsilon\nu c = \sigma\upsilon\nu a \cdot \sigma\upsilon\nu b + \eta\mu a \cdot \eta\mu b \cdot \sigma\upsilon\nu C$ . |
| Αν $\frac{a+b}{2} > 90^0$ τότε $\frac{A+B}{2} > 90^0$ . Αν $\frac{a+b}{2} < 90^0$ τότε $\frac{A+B}{2} < 90^0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

Πίνακας 7. Ιδιότητες κάθε σφαιρικού τριγώνου ABC

## 1.9 Είδη σφαιρικών τριγώνων

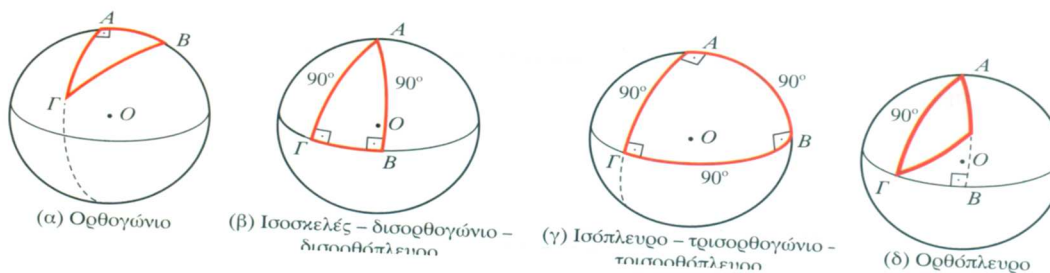
Το κάθε σφαιρικό τρίγωνο, ανάλογα με τις γωνίες του χαρακτηρίζεται (σχήματα 22, 23) ως:

- **(μονο)ορθογώνιο**, όταν μία σφαιρική γωνία του είναι ορθή ( $90^\circ$ ).
- **δισορθογώνιο**, όταν 2 σφαιρικές γωνίες του είναι ορθές.
- **τρισορθογώνιο**, όταν και οι 3 σφαιρικές γωνίες του είναι ορθές.

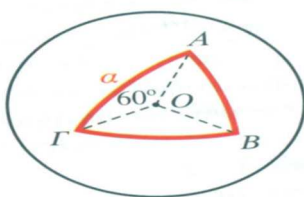
Το κάθε σφαιρικό τρίγωνο ανάλογα με τις πλευρές του (σχήμα 24) χαρακτηρίζεται ως:

- **(μονο)ορθόπλευρο**, όταν μία πλευρά του είναι ορθή.
- **δισορθόπλευρο**, όταν 2 πλευρές του είναι ορθές.
- **τρισορθόπλευρο**, όταν και οι 3 πλευρές του είναι ορθές.
- **ισοσκελές**, όταν 2 πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
- **ισόπλευρο**, όταν οι 3 πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
- **σκαληνό**, όταν οι 3 πλευρές του είναι άνισες μεταξύ τους

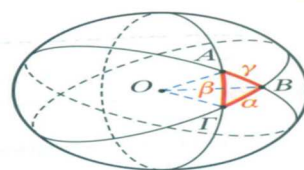
**Τυχαίο** (ή **πλάγιο** ή **κοινό**), ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο που δεν έχει αναγκαστικά μία πλευρά του ή μία γωνία του ίση με  $90^\circ$ . Ως μονάδα μέτρησης των γωνιών και των πλευρών (σχήμα 25) θεωρούμε την ορθή γωνία. Ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών, θεωρούμε το εμβαδόν του τρισορθογώνιου τριγώνου, δηλαδή το  $1/8$  της σφαίρας. Κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου ίση με  $a \text{ rad}$ , έχει μήκος  $a \cdot R$ .



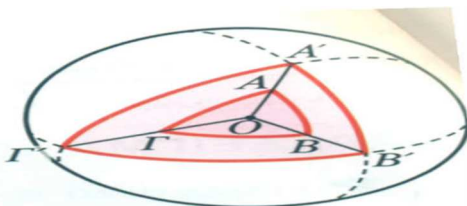
Σχήμα 22. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις σφαιρικών τριγώνων



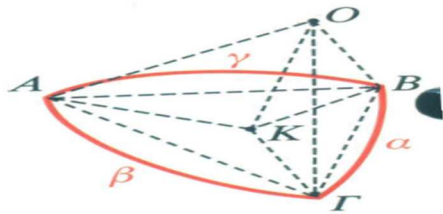
Σχήμα 23.  $A, B, \Gamma$  είναι οι γωνίες του τριγώνου



Σχήμα 24.  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι οι πλευρές του τριγώνου



Σχήμα 25.  $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$



Σχήμα 26. Πολικό τρίγωνο  $A'B'G'$

### 1.10 Πολικό σφαιρικό τρίγωνο

Το σφαιρικό τρίγωνο  $A'B'G'$  που έχει ως κορυφές τους πόλους των μεγίστων κύκλων των τόξων των πλευρών του τριγώνου  $ABG$ , ονομάζεται πολικό τρίγωνο του τριγώνου  $ABG$  (σχήμα 26) όπου  $A', B', G'$  είναι ο πόλος του μεγίστου κύκλου  $BG$ ,  $AG$ ,  $AB$  ο ευρισκόμενος στο ίδιο ημικύκλιο με την κορυφή  $A, B, G$ , αντίστοιχα. Επειδή σε κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου αντιστοιχούν 2 πόλοι, επιλέγεται την κάθε φορά ο πλησιέστερος στην κορυφή  $A, B, G$  οπότε προκύπτουν οι  $A', B', G'$ .

|                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Αν ένα σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό ενός άλλου, τότε και το δεύτερο είναι πολικό του πρώτου.                                                                                                                                                                                     |
| Στα πολικά τρίγωνα οι πλευρές του ενός είναι παραπληρώματα των γωνιών του άλλου. Δηλαδή, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:<br>$A + \alpha' = B + \beta' = G + \gamma' = 180^\circ (= 2 \text{ ορθές})$ και<br>$A' + \alpha = B' + \beta = G' + \gamma = 180^\circ (= 2 \text{ ορθές})$ |
| Οι τριέδρες γωνίες που αντιστοιχούν σε 2 πολικά τρίγωνα, είναι παραπληρωματικές.                                                                                                                                                                                                  |
| Το πολικό τρίγωνο ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, είναι ένα (μονο)ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο και αντιστρόφως.                                                                                                                                                                |
| Ένα τρισορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο είναι πολικό του εαυτού του, δηλαδή συμπίπτει με το πολικό του.                                                                                                                                                                                |

Πίνακας 8. Ιδιότητες των πολικών τριγώνων

### 1.11 Σφαιρική υπεροχή

Βασική ιδιότητα ενός σφαιρικού τριγώνου  $ABG$  είναι ότι πάντα το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο από  $\pi$ . Η διαφορά  $2S = (A + B + G) - \pi$ , ονομάζεται **σφαιρική υπεροχή** του τριγώνου  $ABG$ , είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός) και ισούται με τη στερεά γωνία που ορίζει το τρίγωνο, όπως φαίνεται από το κέντρο της σφαίρας. Επίσης, ισχύει ότι  $2S = \frac{(ABG)}{R^2}$ , όπου  $(ABG)$  είναι το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου  $ABG$  και  $R$  είναι η ακτίνα της σφαίρας. Για τη σφαιρική υπεροχή ενός τρισορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου  $ABG$  ισχύει ότι,  $2S = (A + B + G) - \pi = (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) - \pi = 90^\circ$ . Το εμβαδόν  $(ABG)$  του ανωτέρω τριγώνου, ισούται με το 1/8 του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Πόρισμα 1.</b> Αν ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών ληφθεί το εμβαδόν του τρισορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, τότε η σφαιρική υπεροχή του κάθε σφαιρικού τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του.                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Πόρισμα 2.</b> Το εμβαδόν $(ABG)$ ενός σφαιρικού τριγώνου σε τετραγωνικά μέτρα, ισούται με το γινόμενο της σφαιρικής του υπεροχής $2S$ επί το 1/8 του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας. Δηλαδή, ισχύει ότι $(ABG) = 2S \frac{E}{8} = 2S \frac{4\pi R^2}{8} = 2S \frac{\pi R^2}{2}$ με τις γωνίες $A, B, G$ να μετρούνται σε μοίρες. Κάθε μία από τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου, είναι μεγαλύτερη από το $S$ . |
| Σε τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο $ABG$ με ημiperίμετρο $2\tau$ , σφαιρική υπεροχή $2S$ και $E$ το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας, ισχύει ο τύπος                                                                                                                                                                                                                                                                         |

$$\sigma\phi \frac{\tau}{2} = \sqrt{\sigma\phi \frac{S}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{A-E}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{B-E}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{\Gamma-E}{2}} \quad \text{και} \quad \text{διά} \quad \text{πολώσεως} \quad \text{o} \quad \text{τύπος}$$

$$\epsilon\phi \frac{S}{2} = \sqrt{\epsilon\phi \frac{\tau}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{\tau-\alpha}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{\tau-\beta}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{\tau-\gamma}{2}}.$$

Πίνακας 9. Ιδιότητες της σφαιρικής υπερβολής

### 1.12 Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τυχαίων σφαιρικών τριγώνων

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

| Τύποι συνημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\sigma\nu\alpha = \sigma\nu\beta \cdot \sigma\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\nu\Lambda$<br>$\sigma\nu\beta = \sigma\nu\gamma \cdot \sigma\nu\alpha + \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\nu\Β$<br>$\sigma\nu\gamma = \sigma\nu\alpha \cdot \sigma\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sigma\nu\Gamma$                                                                                                                                                                                                                                             |  |
| Τύποι ημιτόνων ή θεμελιώδεις σχέσεις δευτέρου είδους                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\Lambda} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\Β} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| Πολικοί τύποι των θεμελιωδών                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |
| $\sigma\nu\Lambda = \sigma\nu\alpha \cdot \eta\mu\Β \cdot \eta\mu\Gamma - \sigma\nu\Β \cdot \sigma\nu\Gamma$<br>$\sigma\nu\Β = \sigma\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma \cdot \eta\mu\alpha - \sigma\nu\Gamma \cdot \sigma\nu\alpha$<br>$\sigma\nu\Gamma = \sigma\nu\gamma \cdot \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta - \sigma\nu\alpha \cdot \sigma\nu\beta$                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
| Τύποι των μισών γωνιών                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| $\epsilon\phi \frac{\Lambda}{2} = \frac{K}{\eta\mu(\tau-\alpha)}, \quad \epsilon\phi \frac{\Β}{2} = \frac{K}{\eta\mu(\tau-\beta)}, \quad \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = \frac{K}{\eta\mu(\tau-\gamma)} \quad \text{όπου} \quad \tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad \text{και}$<br>$K = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau-\alpha) \cdot \eta\mu(\tau-\beta) \cdot \eta\mu(\tau-\gamma)}{\eta\mu\tau}}.$                                                                                                                                                                                                 |  |
| Τύποι των μισών πλευρών                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| $\sigma\phi \frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sigma\nu\tau(T-\Lambda)}, \quad \sigma\phi \frac{\beta}{2} = \frac{K}{\sigma\nu\tau(T-\Β)}, \quad \sigma\phi \frac{\gamma}{2} = \frac{K}{\sigma\nu\tau(T-\Gamma)} \quad \text{όπου}$<br>$T = \frac{\Lambda+\Β+\Gamma}{2}, \quad K = \sqrt{\frac{\sigma\nu\tau(T-\Lambda) \cdot \sigma\nu\tau(T-\Β) \cdot \sigma\nu\tau(T-\Gamma)}{\sigma\nu\tau(180^\circ - T)}}$                                                                                                                                                                                            |  |
| Αναλογικοί τύποι του Gauss (ή Dalambre)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| $\frac{\eta\mu \frac{\Lambda+\Β}{2}}{\sigma\nu\tau \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\nu\tau \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\nu\tau \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{\eta\mu \frac{\Lambda-\Β}{2}}{\sigma\nu\tau \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{\sigma\nu\tau \frac{\Lambda+\Β}{2}}{\eta\mu \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\nu\tau \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sigma\nu\tau \frac{\gamma}{2}},$<br>$\frac{\sigma\nu\tau \frac{\Lambda-\Β}{2}}{\eta\mu \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha+\beta}{2}}{\eta\mu \frac{\gamma}{2}}$ |  |
| Αναλογικοί τύποι του Napier (κυκλική εναλλαγή)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\varepsilon\varphi \frac{A-B}{2}}{\sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha-\beta}{2}}{\eta\mu \frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \frac{\varepsilon\varphi \frac{\alpha-\beta}{2}}{\varepsilon\varphi \frac{\gamma}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{A-B}{2}}{\eta\mu \frac{A+B}{2}}, \quad \frac{\varepsilon\varphi \frac{A+B}{2}}{\sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha+\beta}{2}},$ $\frac{\varepsilon\varphi \frac{\alpha+\beta}{2}}{\varepsilon\varphi \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Τύποι των τεσσάρων συνεχόμενων στοιχείων</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta = \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\beta, \quad \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma$<br>$\sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma, \quad \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$<br>$\sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha = \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha, \quad \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta$ |
| <b>Τύποι για τα ημιπαρημίτονα των γωνιών (κυκλική εναλλαγή)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \eta\mu(\tau - \gamma) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma$<br>$\eta\mu\pi\rho\beta = \eta\mu(\tau - \gamma) \cdot \eta\mu(\tau - \alpha) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha$<br>$\eta\mu\pi\rho\Gamma = \eta\mu(\tau - \alpha) \cdot \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Τύποι για τα ημιπαρημίτονα των πλευρών (κυκλική εναλλαγή)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu\pi\rho(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\pi\rho\alpha$<br>$\eta\mu\pi\rho\beta = \eta\mu\pi\rho(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\pi\rho\beta$<br>$\eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha - \beta) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\pi\rho\Gamma$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Πίνακας 10. Τύποι για τυχαία σφαιρικά τρίγωνα

### 1.13 Τυπολόγιο και μέθοδος εργασίας για επίλυση τυχαίων σφαιρικών τριγώνων

Επίλυση σφαιρικού τριγώνου, ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης όλων των στοιχείων του (πλευρές, γωνίες) όταν δίνονται 3 στοιχεία του. Προς τούτο, γίνεται χρήση τριγωνομετρικών τύπων και πινάκων Norie's.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1<sup>η</sup> περίπτωση. Όταν δίνονται οι 3 πλευρές</b>                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>A' τρόπος.</b> Χρήση των τύπων των μισών γωνιών $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \frac{K}{\eta\mu(\tau - \alpha)}$ όπου $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ και<br>$K = \sqrt{\frac{\eta\mu(\tau - \alpha) \cdot \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \eta\mu(\tau - \gamma)}{\eta\mu\tau}}$                         |
| <b>B' τρόπος.</b> Κυκλική χρήση των τύπων των ημιπαρημίτων των γωνιών<br>$\eta\mu\pi\rho\alpha = \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \eta\mu(\tau - \gamma) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma$                                                                                                                                 |
| <b>2<sup>η</sup> περίπτωση. Όταν δίνονται οι 3 γωνίες</b>                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>A' τρόπος.</b> Χρήση των τύπων των μισών πλευρών $\sigma\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sigma\upsilon\nu(T - A)}$ όπου $T = \frac{A + B + \Gamma}{2}$<br>και $K = \sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu(T - A) \cdot \sigma\upsilon\nu(T - B) \cdot \sigma\upsilon\nu(T - \Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - T)}}$ |
| <b>B' τρόπος.</b> Εργαζόμαστε με το πολικό τρίγωνο.                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>3<sup>η</sup> περίπτωση. Δίνονται 2 πλευρές και η περιεχόμενη γωνία</b>                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>A' τρόπος.</b> Χρήση των αναλογικών τύπων του John Napier.                                                                                                                                                                                                                                                          |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon\phi \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha-\beta}{2} \tau\epsilon\mu \frac{\alpha+\beta}{2} \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} \text{ για τον υπολογισμό του αθροίσματος } \frac{A+B}{2},$ $\varepsilon\phi \frac{A-B}{2} = \eta\mu \frac{\alpha-\beta}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{\alpha+\beta}{2} \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} \text{ για τον υπολογισμό της διαφοράς } \frac{A-B}{2},$ $\varepsilon\phi \frac{\gamma}{2} = \varepsilon\phi \frac{\alpha-\beta}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{A-B}{2} \text{ για τον υπολογισμό της πλευράς } \gamma$                                                                                                                                                     |
| <b>Β' τρόπος.</b> Χρήση των τύπων των ημιπαρημιτόνων των πλευρών<br>$\eta\mu\pi\rho\gamma = \eta\mu\pi\rho(\alpha-\beta) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\pi\rho\Gamma$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Έλεγχος.</b> Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις.<br>$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \eta\mu\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A = \eta\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B = \eta\mu\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>4<sup>η</sup> περίπτωση. Δίνονται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες (α, Β, Γ).</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Α' τρόπος.</b> Χρήση των αναλογικών τύπων του John Napier.<br>$\varepsilon\phi \frac{\beta+\gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} \tau\epsilon\mu \frac{B+\Gamma}{2} \varepsilon\phi \frac{\alpha}{2} \text{ για τον υπολογισμό του αθροίσματος } \frac{\beta+\gamma}{2},$ $\varepsilon\phi \frac{\beta-\gamma}{2} = \eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{B+\Gamma}{2} \varepsilon\phi \frac{\alpha}{2} \text{ για τον υπολογισμό της διαφοράς } \frac{\beta-\gamma}{2},$ $\sigma\phi \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{\beta+\gamma}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{\beta-\gamma}{2} \varepsilon\phi \frac{B-\Gamma}{2} \text{ για τον υπολογισμό της γωνίας } A$                                                        |
| <b>Β' τρόπος.</b> Εργαζόμαστε με το πολικό τρίγωνο. Με χρήση των τύπων $A' = 180^\circ - \alpha$ , $\beta' = 180^\circ - B$ , $\gamma' = 180^\circ - \Gamma$ επιλύουμε το πολικό τρίγωνο, σύμφωνα με τον α' τρόπο της περίπτωσης 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>5<sup>η</sup> περίπτωση. Δίνονται δύο πλευρές και η γωνία απέναντι από μία από αυτές (α, β, Β).</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων, σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier.<br>$\eta\mu A = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B}{\eta\mu\beta} \Rightarrow \eta\mu A = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta \text{ για τον υπολογισμό της γωνίας } A,$ $\sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = \eta\mu \frac{\alpha+\beta}{2} \varepsilon\phi \frac{A-B}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ για τον υπολογισμό της γωνίας } \Gamma,$ $\varepsilon\phi \frac{\gamma}{2} = \eta\mu \frac{A+B}{2} \varepsilon\phi \frac{\alpha-\beta}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{A-B}{2} \text{ για τον υπολογισμό της πλευράς } \gamma,$ Υπολογισμοί αθροίσματος $\frac{A+B}{2}$ και διαφοράς $\frac{A-B}{2}$ . |
| <b>6<sup>η</sup> περίπτωση. Δίνονται δύο γωνίες και η πλευρά η απέναντι σε μία από αυτές (Α, Γ, α).</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Α' τρόπος.</b> Χρήση του νόμου των ημιτόνων, σε συνδυασμό με τους αναλογικούς τύπους του Napier.<br>$\eta\mu\gamma = \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A \cdot \eta\mu\alpha \text{ για τον υπολογισμό της πλευράς } \gamma,$ $\varepsilon\phi \frac{\beta}{2} = \eta\mu \frac{A+\Gamma}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{A-\Gamma}{2} \varepsilon\phi \frac{\alpha-\gamma}{2} \text{ για τον υπολογισμό της πλευράς } \beta,$ $\sigma\phi \frac{B}{2} = \eta\mu \frac{\alpha+\gamma}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{\alpha-\gamma}{2} \varepsilon\phi \frac{A-\Gamma}{2} \text{ για τον υπολογισμό της γωνίας } B.$                                                                                                                       |
| <b>Β' τρόπος.</b> Χρησιμοποιούμε τους τύπους $\alpha' = 180^\circ - A$ , $\gamma' = 180^\circ - \Gamma$ , $A' = 180^\circ - \alpha$ και επιλύουμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ σύμφωνα με την περίπτωση 5.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

Πίνακας 11. Μεθοδολογία επίλυσης τυχαίων σφαιρικών τριγώνων

### 1.14 Τυπολόγιο και μέθοδος εργασίας για επίλυση ορθογωνίων και ορθόπλευρων σφαιρικών τριγώνων

Γίνεται χρήση των παρακάτω 2 θεωρημάτων των τεταρτημορίων και των 2 μνημονικών κανόνων του Napier.

**1<sup>ο</sup> θεώρημα των τεταρτημορίων.** Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, μία γωνία (πλην της ορθής) και η απέναντι πλευρά της ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο, δηλαδή είναι και οι 2 αμβλείες ή και οι 2 οξείες.

**2<sup>ο</sup> θεώρημα των τεταρτημορίων.** Αν η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο (οξεία), τότε οι άλλες 2 πλευρές και οι 2 γωνίες (πλην της ορθής) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο, δηλαδή είναι και οι 2 αμβλείες ή και οι 2 οξείες.

$$\text{Δηλαδή } B\Gamma < 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} A\Gamma, AB, B, \Gamma < 90^\circ \\ \text{ή} \\ A\Gamma, AB, B, \Gamma > 90^\circ \end{cases}$$

Αν η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο (οξεία), τότε οι άλλες 2 πλευρές και οι 2 γωνίες (πλην της ορθής) ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια (η μία οξεία και η άλλη αμβλεία).

$$\text{Δηλαδή } B\Gamma > 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} A\Gamma, B < 90^\circ \text{ \& } AB, \Gamma > 90^\circ \\ \text{ή} \\ A\Gamma, B > 90^\circ \text{ \& } AB, \Gamma < 90^\circ \end{cases}$$

Τα 2 αυτά θεωρήματα, μας βοηθούν στην επιλογή της σωστής γωνίας από τους πίνακες, όταν είναι γνωστός κάποιος τριγωνομετρικός της αριθμός.

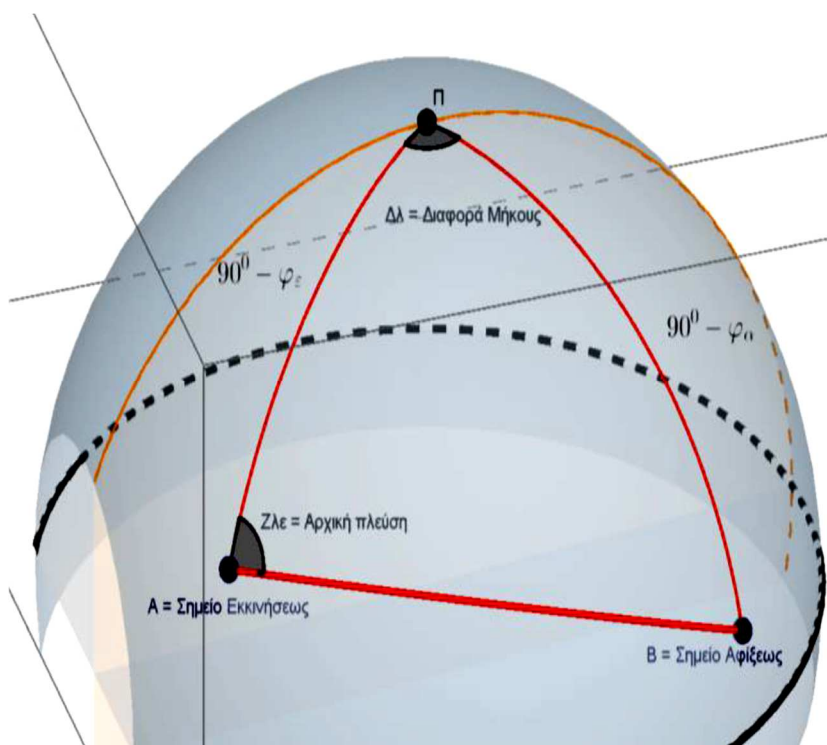
**Τύποι του Napier.** Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  ισχύουν

|   |                                                                                  |    |                                                                         |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$                                   | 6  | $\eta\mu\beta = \varepsilon\phi\gamma \cdot \sigma\phi\Gamma$           |
| 2 | $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$                              | 7  | $\eta\mu\gamma = \varepsilon\phi\beta \cdot \sigma\phi B$               |
| 3 | $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$ | 8  | $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\phi B \cdot \sigma\phi\Gamma$         |
| 4 | $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B$              | 9  | $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\phi\beta \cdot \sigma\phi\alpha$ |
| 5 | $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma$               | 10 | $\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\phi\gamma \cdot \sigma\phi\alpha$    |

Πίνακας 12. Τύποι του Napier

**Τρίγωνο ορθοδρομίας** (ή Γήινο τρίγωνο) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο  $\Pi AB$  (σχήμα 31) το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης, με  $A$  να είναι το σημείο εκκίνησης,  $B$  να είναι το σημείο άφιξης και  $\Pi$  τον πόλο της Γης τον ευρισκόμενο στο ίδιο ημισφαίριο με το σημείο εκκίνησης  $A$ .

Σχήμα 27. Τρίγωνο ορθοδρομίας

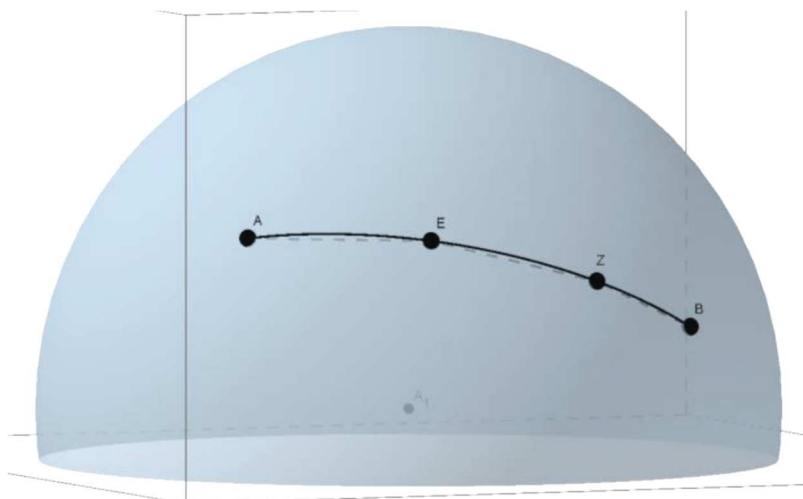


|                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Για την πλευρά ΠΑ είναι $ΠΑ = 90^0 - \varphi_{\varepsilon}$ , όπου $\varphi_{\varepsilon}$ το γεωγραφικό πλάτος του σημείου εκκίνησης Α.                                                                                                                 |
| Για την πλευρά ΠΒ είναι $ΠΒ = 90^0 - \varphi_{\alpha}$ , αν τα Α, Β βρίσκονται στο ίδιο ημισφαίριο (ομώνυμα) και $ΠΒ = 90^0 + \varphi_{\alpha}$ σε διαφορετική περίπτωση (ετερώνυμα), όπου $\varphi_{\alpha}$ το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης Β. |
| <b>Ορθοδρομική απόσταση</b> , ονομάζεται η πλευρά $ΑΒ = \gamma$ .                                                                                                                                                                                        |
| <b>Διαφορά μηκών</b> , των σημείων Α, Β ονομάζεται η γωνία $Π = \Delta_{\lambda}$ .                                                                                                                                                                      |
| <b>Αρχική πλεύση</b> , ονομάζεται η γωνία $Α = Z_{\lambda\varepsilon}$ .                                                                                                                                                                                 |
| <b>Τελική πλεύση</b> , ονομάζεται η γωνία Β.                                                                                                                                                                                                             |

Πίνακας 13. Τα στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας

**Ορθοδρομικό τόξο**, ονομάζεται εκείνο το τόξο του μεγίστου κύκλου που συνδέει 2 σημεία της επιφάνειας της Γης και είναι μικρότερο από  $180^0$  (σχήμα 32). Το μέτρο αυτού του τόξου, είναι η ορθοδρομική απόσταση στο τρίγωνο ορθοδρομίας και αν υπολογιστεί σε πρώτα λεπτά της μοίρας, δίνει την απόσταση σε ναυτικά μίλια.

Η πλεύση πλοίου πάνω στο ορθοδρομικό τόξο (Great circle sailing), συνεπάγεται τη συνεχή μεταβολή της πορείας του. Επειδή αυτό πρακτικά είναι αδύνατο, η πλεύση γίνεται πάνω σε μία τεθλασμένη γραμμή, οι κορυφές της οποίας είναι σημεία του ορθοδρομικού τόξου. Αυτός ο πλους ονομάζεται **ορθοδρομικός πλους** και οι κορυφές του ονομάζονται **ενδιάμεσα σημεία**.



Σχήμα 28. Ορθοδρομικό τόξο

## 2. Γεωμετρία της υδρογείου σφαίρας

Αναφορικά με τη γεωμετρία του πλανήτη Γη, 2 προβλήματα που θεωρούνται κλασσικά προτάθηκαν από τον μαθηματικό και εκπαιδευτικό George Polya (1887–1985).

Το **1<sup>ο</sup> πρόβλημα** συχνά εκλαμβάνεται ως αστείο, πρόκειται όμως για κρυφό χρυσωρυχείο μαθηματικής γνώσης. Αφορά το πρόβλημα της πολικής αρκούδας.

*«Ένας ατρόμητος κυνηγός βγαίνει από τον καταυλισμό του και περπατά 1km προς νότια. Στη συνέχεια γυρίζει και περπατά 1km προς ανατολικά. Εκεί, βλέπει μια αρκούδα, βγάζει το όπλο του και τη σκοτώνει. Ικανοποιημένος, στρέφεται προς βορρά και αφού διανύει ακριβώς 1km, ξαναβρίσκεται στο σημείο εκκίνησης στον καταυλισμό. Τι χρώμα είχε η αρκούδα;»*

Η πορεία του κυνηγού, διαγράφει ένα τόξο μεσημβρινού όταν μετακινείται προς νότο ή προς βορρά και ένα τόξο παράλληλου (παράλληλου προς τον Ισημερινό) όταν μετακινείται ανατολικά. Αν ο κυνηγός επιστρέψει στο σημείο εκκίνησής του ακολουθώντας έναν μεσημβρινό διαφορετικό από αυτόν που ακολούθησε ξεκινώντας, το σημείο εκκίνησής του είναι υποχρεωτικά ο Βορράς. Διαφορετικά, αν διένυε έναν ολόκληρο παράλληλο, ή δύο ή τρεις, θα μετακινούνταν προς ένα σημείο κοντά στο Νότιο Πόλο. Σε κάθε περίπτωση, η απάντηση είναι πως η αρκούδα ήταν λευκή, σε απόσταση 1km από το Βόρειο Πόλο, δεν θα μπορούσε να είναι κάτι άλλο.

Το **2<sup>ο</sup> πρόβλημα** του Polya είναι λιγότερο γνωστό, αλλά εξίσου ενδιαφέρον. Πρόκειται για το πρόβλημα του Ρομπέρτο.

*«Ο Ρομπέρτο ψάχνει ένα οικόπεδο τελείως οριζόντιο, οριοθετούμενο από 4 πολύ συγκεκριμένες ευθείες γραμμές: οι 2 από αυτές θα πρέπει να έχουν κατεύθυνση βορρά-νότο και οι άλλες 2, ανατολή-δύση. Κάθε μία θα πρέπει να έχει μήκος 1.000 m ακριβώς. Μπορεί ο Ρομπέρτο να βρει ένα τέτοιο οικόπεδο στο Μεξικό;»*

Ο συλλογισμός που πρέπει να κάνουμε είναι ίδιος με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος. Το οικόπεδο που ψάχνει ο Ρομπέρτο, οριοθετείται από 2 μεσημβρινούς και 2 παράλληλους. Ας φανταστούμε 2 σταθερούς μεσημβρινούς και έναν παράλληλο που απομακρύνεται από τον Ισημερινό, το τόξο αυτού του κινητού παραλλήλου, που τέμνεται από τους 2 σταθερούς μεσημβρινούς, μειώνεται σημαντικά. Το κέντρο ενός οικοπέδου με αυτά τα χαρακτηριστικά, μπορεί να βρίσκεται μόνο στον Ισημερινό. Ρίχνοντας όμως μια ματιά σε έναν άτλαντα, θα δούμε πως οι απαιτήσεις του Ρομπέρτο δεν μπορούν να ικανοποιηθούν στο Μεξικό.



Σχήμα 29. Η υδρόγειος σφαίρα



Σχήμα 30. Ο άξονας της Γης

## 2.1 Παράλληλοι και μεσημβρινοί

Από την εποχή του Πυθαγόρα μέχρι του GPS (Global Positioning System), υπάρχει ένα σύστημα που στηρίζεται στις έννοιες του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού πλάτους, το οποίο επιτρέπει τον κατά προσέγγιση εντοπισμό στην επιφάνεια της Γης (ή οποιασδήποτε άλλης σφαίρας). Οι μέγιστοι κύκλοι που διέρχονται από τους πόλους, ονομάζονται **μεσημβρινοί** και οι κάθετες σε αυτούς γραμμές, ονομάζονται **παράλληλοι**. Η Γη μοιάζει με ένα πορτοκάλι, όπου οι μεσημβρινοί είναι τα όρια ανάμεσα στα κομμάτια του και τα σημεία όπου διασταυρώνονται ο βόρειος και ο νότιος πόλος. Από όλους τους παράλληλους, αυτός που αντιστοιχεί στον μέγιστο κύκλο είναι ο Ισημερινός και διαιρεί την υδρόγειο σφαίρα σε 2 ίσα μέρη.

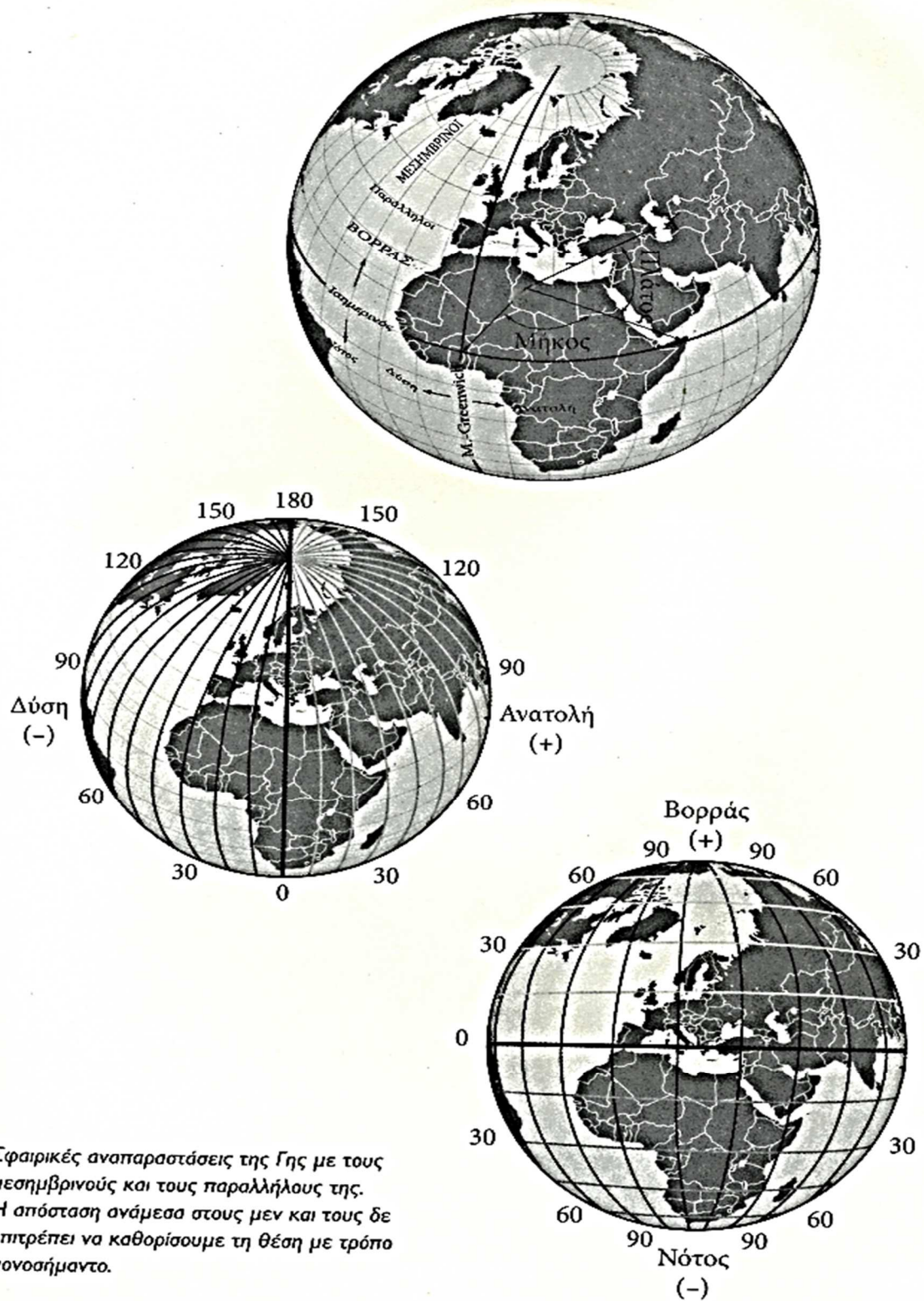
Ονομάζουμε **1° μεσημβρινό** ή **γεωγραφικό μήκος μηδέν** τον μεσημβρινό που διέρχεται από την αγγλική κοινότητα του Γκρίνουιτς. Το **γεωγραφικό πλάτος**, είναι η απόσταση προς βορρά, δηλαδή προς το πάνω μέρος της σφαίρας, ή προς νότο, προς το

κάτω μέρος της σφαίρας και μετριέται σε γωνιακές μοίρες. Το **γεωγραφικό μήκος**, είναι η απόσταση προς την ανατολή, δηλαδή προς τα δεξιά της σφαίρας, ή προ τη δύση, δηλαδή προς τα αριστερά της σφαίρας και μετριέται σε γωνιακές μοίρες, με αφετηρία τον 1<sup>ο</sup> μεσημβρινό ή μεσημβρινό του Γκρίνουιτς. Όλα τα σημεία ενός δεδομένου παραλλήλου, έχουν το ίδιο πλάτος και όλα τα σημεία ενός δεδομένου μεσημβρινού, έχουν το ίδιο μήκος. Το 1<sup>ο</sup> ζήτημα που τίθεται βάσει αυτών των πληροφοριών, είναι προφανές. Αν σκοπός του συστήματος αυτού είναι ο εντοπισμός των σημείων και ο προσανατολισμός πάνω στην επιφάνεια της Γης, γιατί μετράμε το μήκος και το πλάτος σε μοίρες και όχι σε χιλιόμετρα; Αρχικά, ας επισημάνουμε πως η επιφάνεια πάνω στην οποία τα υπολογίζουμε είναι μια σφαίρα. Για να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου πάνω στη σφαίρα, χρειαζόμαστε μόνο 2 συντεταγμένες, εφόσον η σφαίρα ως διδιάστατη επιφάνεια δεν έχει 3<sup>η</sup> διάσταση. Αυτό το σημείο, χρειάζεται μία λεπτομερέστερη εξήγηση. Ας πάρουμε έναν κύκλο που χωρίζεται σε 360°. Αν χαράξουμε 2 κάθετες που διέρχονται από το κέντρο του, έχουμε 4 χωρία (τεταρτημόρια) των 90° τους κυκλικούς τομείς.

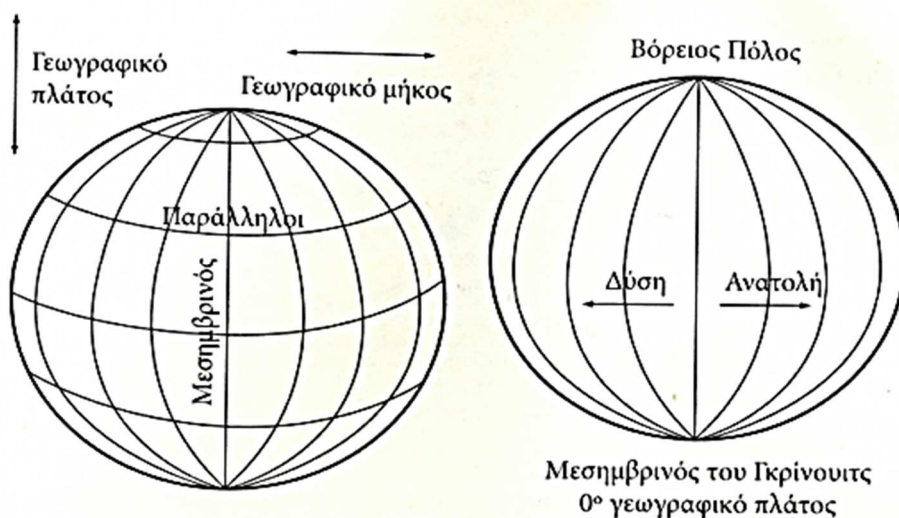
Μπορούμε να κατασκευάσουμε νέους, πιο μικρούς τομείς, χαράσσοντας περισσότερες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο. Οι τομείς αυτοί χαρακτηρίζονται από το γωνιακό τους μέτρο, το οποίο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείου του κύκλου. Ας αναπαραστήσουμε μια σφαίρα, στη θέση αυτού του κύκλου. Αν διαιρέσουμε τη σφαίρα σε δύο μέρη, από τον έναν πόλο στον άλλον, μπορούμε να δουλέψουμε με γωνίες ακολουθώντας την προηγούμενη ιδέα και συνεπώς, να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου υποδεικνύοντας 2 γωνιακές τιμές, το γεωγραφικό του μήκος και το γεωγραφικό του πλάτος. Μετράμε τις γωνίες προς ανατολικά (δεξιά) ξεκινώντας από τον μεσημβρινό 0° και προς δυτικά (αριστερά) μέχρι να συναντήσουμε τον **αντιμεσημβρινό**, δηλαδή αυτόν που είναι διαμετρικά αντίθετος με τον πρώτο. Το μήκος μετριέται επομένως μέχρι τις 180°, το μισό δηλαδή των 360°, ή αλλιώς 90° + 90°. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον Ισημερινό και τον μεσημβρινό του Γκρίνουιτς ως άξονες των συντεταγμένων. Όσο για το πλάτος, περιλαμβάνεται πάντα μεταξύ 0° και 90° και πάντα προς Βορρά ή προς Νότο.

| Χώρα      | Πόλη      | Πλάτος  | Μήκος    |
|-----------|-----------|---------|----------|
| ΗΠΑ       | Νέα Υόρκη | 40,47 N | 73,58 W  |
| Αυστραλία | Σύδνεϋ    | 33,13 S | 151,42 E |

Πίνακας 14. Γεωγραφικές συντεταγμένες πόλεων



Σχήμα 31. Σφαιρικές αναπαραστάσεις της Γης



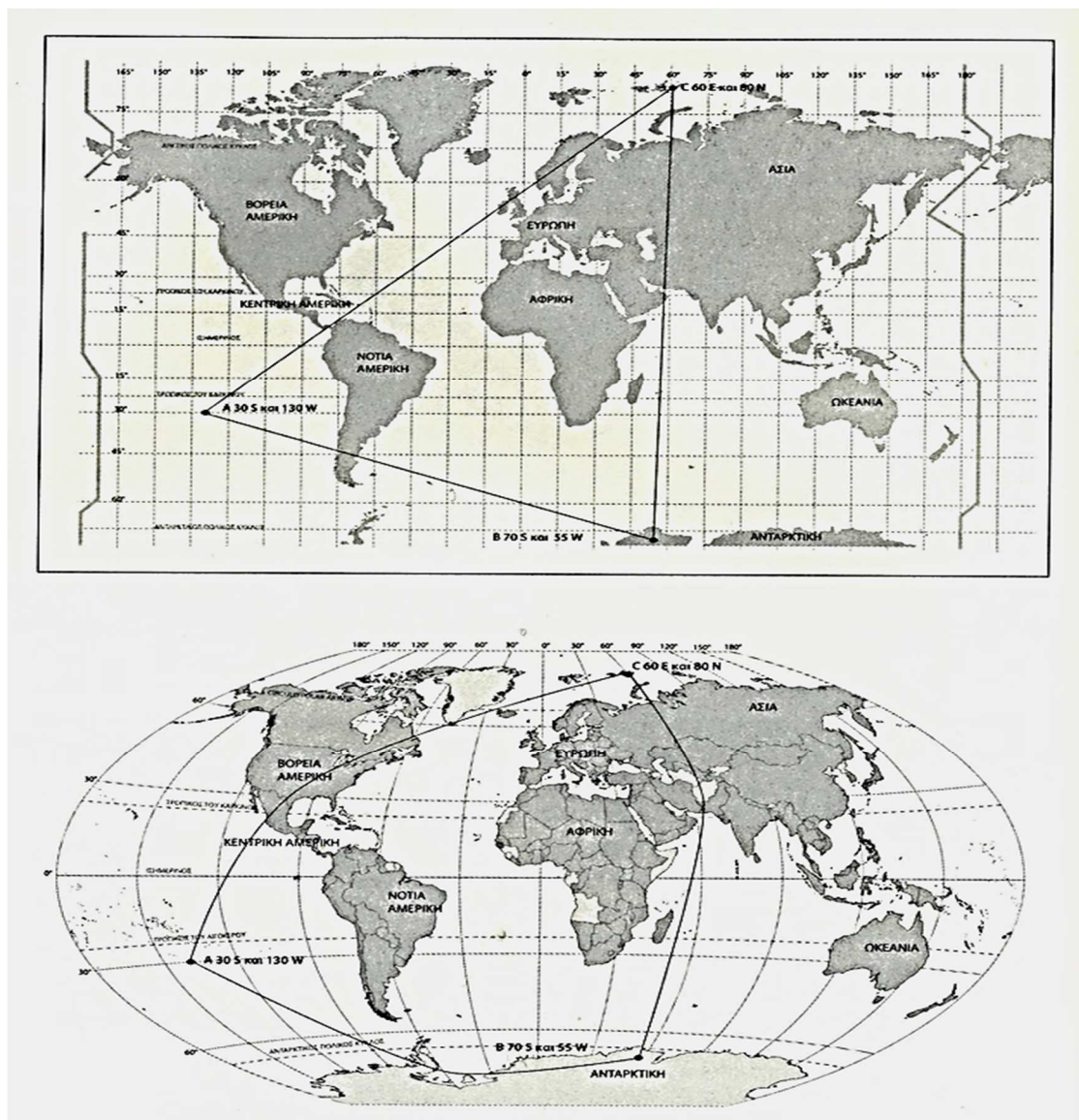
Σχήμα 32. Γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος

**Γεωμετρικές ζώνες της Γης.** Θα μπορούσαμε να τεμαχίσουμε τη Γη σε αμέτρητες φέτες, ορισμένου αριθμού μοιρών η κάθε μία. Δίνουμε ένα όνομα σε ορισμένες από αυτές επειδή χρησιμοποιούνται για σκοπούς εντοπισμού. Είναι οι περίφημοι πολικοί κύκλοι, οι θερμοί τροπικοί και ο ισημερινός.

**Δύο άκρα στον κόσμο.** Οι πόλεις της Νέας Υόρκης και του Σύδνεϋ δεν βρίσκονται ακριβώς στον αντίποδα η μία της άλλης, δηλαδή δεν είναι αντιδιαμετρικές ως προς την επιφάνεια του πλανήτη, είναι όμως βέβαιο πως η μεταξύ τους απόσταση είναι πολύ μεγάλη. Οι συντεταγμένες τους σε πλάτος και μήκος, όσο ακριβείς κι αν είναι, δεν μπορούν να αποδώσουν αυτή τη λεπτομέρεια. Τρία σημεία διαφορετικού πλάτους και μήκους σε διαφορετικές προβολές πάνω στην υδρόγειο σφαίρα. Αν τα συνδέσουμε σε επίπεδη προβολή, έχουμε ένα συμβατικό τρίγωνο, το οποίο σε σφαιρική προβολή, θα είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο.

## 2.2 Από τον χάρτη των 2 ημισφαιρίων στο Google Earth

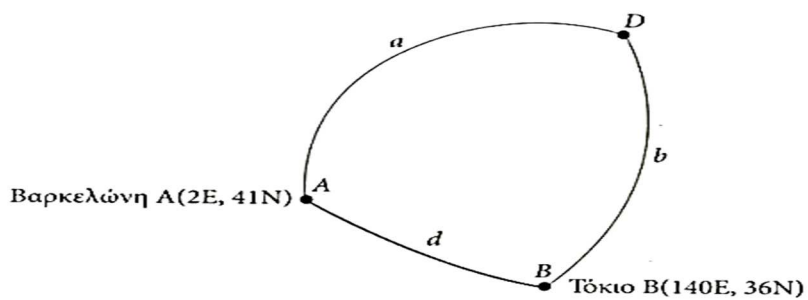
Η κλασική υδρόγειος σφαίρα που βλέπουμε στις αίθουσες διδασκαλίας, είναι μια σφαίρα που συνίσταται σε ένα πλέγμα του οποίου τα κομμάτια αντιστοιχούν στους μεσημβρινούς και στους παράλληλους του πλανήτη μας. Σε ορισμένα σχολεία, συναντάμε κάποιες φορές τον επίπεδο χάρτη των δύο ημισφαιρίων, με τις υποδιαιρέσεις του, που θυμίζουν καρτεσιανό επίπεδο. Αυτές του επάνω αριστερού τμήματος του χάρτη ορίζουν το δυτικό μήκος και αυτές του δεξιού τμήματος ορίζουν, το ανατολικό μήκος. Ομοίως, οι πλευρικές διαιρέσεις υποδεικνύουν το βόρειο πλάτος στην άνω ζώνη ή το νότιο πλάτος στο κάτω τμήμα. Οι εικόνες, δείχνουν δύο εκδοχές παγκόσμιων χαρτών. Στην 1<sup>η</sup> εικόνα, οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι είναι ευθείες, ενώ στη 2<sup>η</sup> εικόνα έχουν σχεδιαστεί με καμπυλότητα.



Σχήμα 33. Επίπεδη και σφαιρική προβολή της σύνδεσης 3 σημείων

### 2.3 Ποια είναι η συντομότερη απόσταση ανάμεσα σε Βαρκελώνη και Τόκιο;

Χρησιμοποιώντας έναν έντυπο παγκόσμιο χάρτη, βλέπουμε πως η Βαρκελώνη βρίσκεται περίπου στις  $2^{\circ}\text{E}$ ,  $41^{\circ}\text{N}$ , ενώ το Τόκιο στις  $140^{\circ}\text{E}$ ,  $36^{\circ}\text{N}$ . Αν θεωρήσουμε το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από τις γωνίες A, B, D (που βρίσκεται στο Βόρειο Πόλο) και αν A είναι η θέση της Βαρκελώνης και B του Τόκιο, μπορούμε να σχεδιάσουμε το εξής σχήμα:



Σχήμα 34. Αεροπορική σύνδεση Βαρκελώνης με Τόκιο

Έστω  $d$  η πλευρά που αντιστοιχεί στη γεωδαιτική που συνδέει την Βαρκελώνη με το Τόκιο. Η τιμή του  $d$ , είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των 2 πόλεων. Για να την υπολογίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του συνημίτονου για τα σφαιρικά τρίγωνα  $\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos D$ . Βλέπουμε πως για να υπολογίσουμε την  $d$ , μας λείπουν οι τιμές  $a$ ,  $b$  και αυτή της γωνίας  $D$ . Για να υπολογίσουμε το μήκος μιας πλευράς ενός σφαιρικού τριγώνου, θεωρούμε τον Ισημερινό ως άξονα των τετμημένων ενός καρτεσιανού επιπέδου και αφαιρούμε  $90^\circ$  από το πλάτος σε μοίρες, από το θεωρούμε σημείο. Στην περίπτωση της γωνίας  $D$ , θα κάνουμε το ίδιο λαμβάνοντας αυτή τη φορά τον μεσημβρινό του Γκρίνουιτς, ως άξονα των συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ \\ b &= 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ \\ D &= 140^\circ - 2^\circ = 138^\circ \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο των συνημίτονων και χρησιμοποιώντας απλή αριθμομηχανή, έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos(d) &= \cos(49^\circ) \cdot \cos(54^\circ) + \sin(49^\circ) \cdot \sin(54^\circ) \cdot \cos(138^\circ) = \\ 0,656059029 \cdot 0,5877852523 + 0,7547095802 \cdot 0,809016944 \cdot (-0,7431448255) &= \\ &= -0,06812225162 \end{aligned}$$

Εδώ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πλήκτρο  $\cos^{-1}$  της αριθμομηχανής για να βρούμε πως η απόσταση  $d$  είναι  $93,90614266^\circ$ . Θα ήταν ακόμα πιο χρήσιμο να γνωρίζουμε την απόσταση αυτή σε km. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος ενός μέγιστου κύκλου της υδρόγειου σφαίρας λαμβάνοντας ως τιμή της ακτίνας της Γης τα 6.350 km και εφαρμόζοντας τον τύπο

$$2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 6.350 = 39.898,23 \text{ km}$$

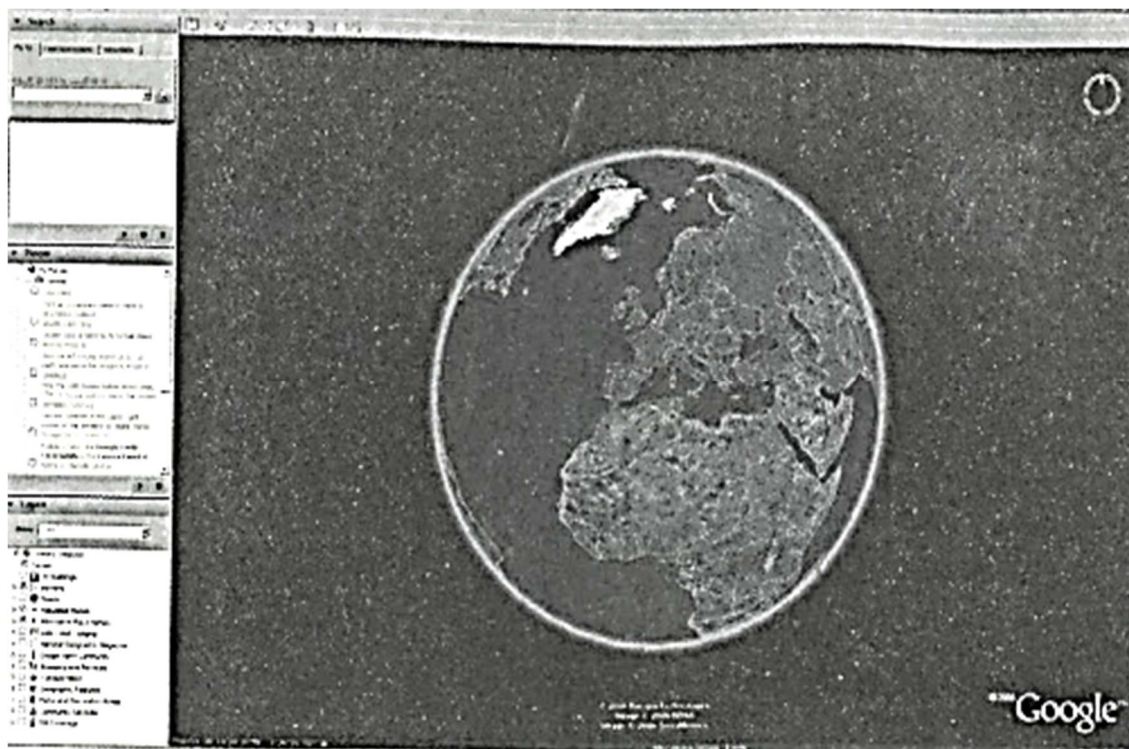
Έχουμε έτσι 39.898,23 km που αντιστοιχούν σε μία πλήρη περιφέρεια ( $360^\circ$ ). Το ερώτημα που τίθεται τότε είναι το εξής: σε πόσα km αντιστοιχεί μία γωνία  $93,90614266^\circ$ ; Έστω  $x$  η ζητούμενη τιμή, μια απλή μέθοδος των τριών

$$\frac{360}{39.898,23} = \frac{93,90614266}{x}, \text{ άρα } x = 10.407,46910628189 \text{ km}$$

Συνεπώς, η απόσταση ανάμεσα στη Βαρκελώνη και το Τόκιο είναι περίπου 10.407 km. Το πιο εντυπωσιακό είναι πως μπορούμε να έχουμε αυτό το αποτέλεσμα ρίχνοντας απλώς μια ματιά στον χάρτη. Η σύγχρονη τεχνολογία, επιτρέπει να υπολογίσουμε τις αποστάσεις αυτές με μεγάλη ακρίβεια. Εξειδικευμένα προγράμματα, όπως το Google Earth, κάνουν τους υπολογισμούς αυτούς με ταχύτητα και ακρίβεια. Το προαναφερθέν πρόγραμμα για παράδειγμα, δίνει 10.422,62 km για την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε Βαρκελώνη και Τόκιο. Προξενεί εντύπωση το γεγονός πως οι υπολογισμοί που γίνονται με έναν πίνακα δεν διαφέρουν πολύ από αυτούς που εκτελούνται από ένα εξειδικευμένο λογισμικό. Ο υπολογισμός του Google Earth, εμφανίζει διαφορά μόνο 98 km. Τα προγράμματα όμως αυτά, επιτρέπουν τον υπολογισμό αποστάσεων από πολύ πιο συγκεκριμένα σημεία, όπως για παράδειγμα τον ακριβή αριθμό μιας οδού. Ένα τέτοιο επίπεδο ακρίβειας, είναι αδύνατο χρησιμοποιώντας έναν παραδοσιακό έντυπο παγκόσμιο χάρτη. Πράγματι, η χρήση του υπολογιστή σε ειδικούς τομείς της γεωμετρίας, δημιούργησε έναν νέο επιστημονικό κλάδο που ονομάζεται **αλγοριθμική γεωμετρία**. Τέλος, δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε αυτό το ταξίδι στη γεωμετρία της υδρόγειου σφαίρας χωρίς να αναφερθούμε στην πιο κλασσική αλληγορία της, την οποία παρουσίασε ο Πλάτωνας στο διάλογό του με τίτλο «*Τίμαιος ή Περί φύσεως*». «Για αυτόν λοιπόν τον λόγο ο δημιουργός οικοδόμησε τον κόσμο με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποτελεί ενιαίο σύνολο με όλα τα στοιχεία που υπάρχουν και να είναι τέλειος και αγέραστος και άτρωτος από ασθένειες. Όσο για το σχήμα του, καταλληλότερο ήταν το σχήμα που μπορούσε να

περιλάβει όλα τα σχήματα που υπάρχουν. Έτσι τον έκανε κυκλικό και σφαιρικό, με το κέντρο του σε ίση απόσταση από όλα τα σημεία της περιφέρειάς του, ένα σχήμα δηλαδή που είναι τελειότερο από όλα τα άλλα και περισσότερο όμοιο με τον εαυτό του, πιστεύοντας ότι το όμοιο είναι απείρως ωραιότερο από το ανόμοιο.»

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η αρχική σελίδα του προγράμματος Google Earth, ένας απλός τρόπος για να τα «ταξιδέψουμε» σε ολόκληρο τον πλανήτη και το εξαιρετικό εργαλείο υπολογισμού της απόστασης ανάμεσα σε 2 σημεία της υδρόγειου σφαίρας.



Σχήμα 35. Αρχική σελίδα του Google Earth

### 3. Κατασκευή χαρτών και μαθηματικά

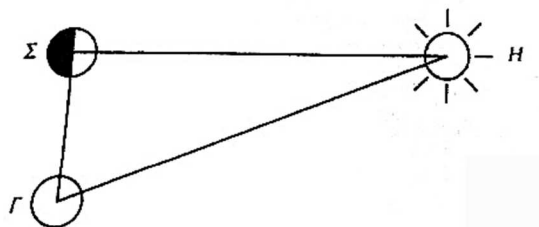
Από τις πρώτες στιγμές της ύπαρξής της, η γεωμετρία εφαρμόστηκε σε πρακτικά προβλήματα μέτρησης, είτε επρόκειτο για τη μέτρηση του ύψους μιας πυραμίδας είτε για το εμβαδόν ενός χωραφιού, είτε για το μέγεθος της Γης. Ακόμη και η ετυμολογία της λέξης «γεωμετρία», από το «γεω-» και «μέτρον», μαρτυρά ότι πρόκειται για επιστήμη της μέτρησης. Ωστόσο, οι πρώτοι Έλληνες επιστήμονες χρησιμοποιώντας απλή γεωμετρία και αργότερα την τριγωνομετρία, επιχείρησαν να εκτιμήσουν το μέγεθος του σύμπαντος.

#### 3.1 Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (310–230 π.Χ.) θεωρείται ο 1<sup>ος</sup> αστρονόμος στην ιστορία. Χρησιμοποίησε όλα τα διαθέσιμα δεδομένα παρατηρήσεων, για να καταλήξει στις θεωρίες του. Για παράδειγμα επισήμανε ότι η κίνηση των πλανητών θα μπορούσε να ερμηνευτεί καλύτερα αν θεωρήσουμε ότι ο Ήλιος και όχι η Γη είναι το κέντρο του Σύμπαντος και αυτό 2.000 έτη πριν ο Κοπέρνικος προτείνει ο ηλιοκεντρικό του σύστημα. Το μόνο έργο του Αρίσταρχου που σώζεται είναι το «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ήλιου και Σελήνης» και αποτελεί μια πραγματεία μαθηματικής

αστρονομίας. Στο έργο του ο Αρίσταρχος<sup>1</sup>, αναπτύσσει μια γεωμετρική μέθοδο προσδιορισμού του λόγου των αποστάσεων του Ήλιου και της Σελήνης από τη Γη.

Η μέθοδος του γνωστή και ως «σεληνιακή διχοτομία» στηρίζεται στο γεγονός ότι όταν είναι ορατός ακριβώς ο μισός σεληνιακός δίσκος, κάτι που συμβαίνει 2 φορές σε κάθε σεληνιακό κύκλο, η ευθεία που συνδέει το μάτι του παρατηρητή με τη Σελήνη είναι κάθετη σε αυτήν που συνδέει τον Ήλιο με τη Σελήνη.



Σχήμα 36. Η μέθοδος του Αρίσταρχου

Ο Αρίσταρχος, ισχυρίζεται ότι η γωνία ΣΓΗ είναι «μικρότερη του ενός τεταρτημόριου κατά ένα τριακοστό του τεταρτημόριου» δηλαδή  $\angle \Sigma \Gamma \eta = 90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$ . Στην εποχή του ο Αρίσταρχος, δεν διέθετε τριγωνομετρικούς πίνακες και χρειάστηκε να στηριχθεί σε ένα θεώρημα<sup>2</sup> το οποίο με σημερινή ορολογία λέει ότι:

Αν  $\theta$ ,  $\varphi$  είναι δυο οξείες γωνίες με  $\theta > \varphi$  τότε:  $\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} > \frac{\tan \theta}{\tan \varphi}$

Από αυτό, συμπέρανε ότι ο λόγος  $\frac{\Gamma \eta}{\Gamma \Sigma}$  είναι μεγαλύτερος του 18+1 και

μικρότερος του 20+1. Η μέθοδος όμως του Αρίσταρχου, αν και σωστή είναι πρακτικά ανεφάρμοστη διότι είναι δύσκολο να προσδιορίσει κανείς την ακριβή χρονική στιγμή της διχοτομίας και επίσης δύσκολα μπορεί να μετρηθεί η γωνία ΣΓΗ. Ο Αρίσταρχος, εκτίμησε ακόμα τον λόγο των μεγεθών του Ήλιου και της Σελήνης. Κατά τη διάρκεια μιας ολικής έκλειψης Ηλίου, η Σελήνη καλύπτει οριακά τον ηλιακό δίσκο<sup>3</sup>.

Αυτό σημαίνει ότι, τα **φαινόμενα μεγέθη** του Ήλιου και της Σελήνης, όπως παρατηρούνται από τη Γη, είναι περίπου ίσα. Επομένως, ο λόγος των πραγματικών τους διαμέτρων πρέπει να είναι περίπου ίδιος με τον λόγο των αποστάσεων τους από τη Γη. Έτσι, ο Αρίσταρχος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η διάμετρος του Ηλίου έχει προς τη διάμετρο της Σελήνης λόγο μεταξύ του 18 και 19. Η πραγματική τιμή, είναι περίπου 400. Υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στην εκτίμηση του λόγου των αποστάσεων 2 αντικειμένων σε απόσταση και στον υπολογισμό των ιδίων αποστάσεων.

<sup>1</sup> Sir Thomas Little Heath, (1913). "Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus" (επανεκδοση New York: Dover, 1981) και "Greek Astronomy", (1932). (επανεκδοση New York: Dover, 1991).

<sup>2</sup> Αποτελεί συνέπεια του ότι, αν  $0^\circ < x < 90^\circ$ , η συνάρτηση  $\frac{\sin x}{x}$  είναι φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση

$\frac{\tan x}{x}$  είναι αύξουσα. Δηλαδή είναι  $(\sin \theta)/\theta > (\sin \varphi)/\varphi$  και  $(\tan \theta)/\theta < (\tan \varphi)/\varphi$ , αν  $0 < \theta < \varphi < 90^\circ$ .

<sup>3</sup> Ο Eli Maor στο «Τριγωνομετρικά λουκούμια» αναφέρει ότι έλαβε μέρος σε αποστολή αστρονόμων στην Ινδία, για να παρακολουθήσει την ολική έκλειψη Ήλιου της 24.10.1995. Από το πατήριό τους, πολύ κοντά στο κέντρο της σκιάς της Σελήνης, η ολική έκλειψη διήρκεσε μόλις 41''.

### 3.2 Το φαινόμενο της παράλλαξης

Σε αυτό το σημείο, παίζει σημαντικό ρόλο το φαινόμενο της παράλλαξης. Αν γνωρίζουμε την απόσταση μεταξύ 2 παρατηρητών (δηλαδή το μήκος της βάσης) τότε, μετρώντας τη φαινόμενη αλλαγή στη γωνία θέσεως του αντικείμενου (τη γωνία παράλλαξης) μπορούμε με απλή τριγωνομετρία να υπολογίσουμε την απόσταση από το αντικείμενο. Η μέθοδος της παράλλαξης, αποτελεί τη βάση της γήινης τοπογραφίας. Όταν όμως εφαρμόζεται σε τεράστιες αποστάσεις η ακρίβεια της είναι περιορισμένη γιατί όσο πιο μακριά βρίσκεται το αντικείμενο τόσο μικραίνει η γωνία παράλλαξης και τα αποτελέσματα σχετικά με την απόσταση είναι αβέβαια.

Επειδή η Σελήνη βρίσκεται σχετικά κοντά στη Γη, η φαινόμενη απόκλιση στη θέση της, όταν παρατηρείται από 2 διαφορετικές τοποθεσίες πάνω στη Γη, αν και μικρή για τα γήινα δεδομένα, είναι σημαντική σε αστρονομική κλίμακα. Ωστόσο, για να έχει κάποια πραγματική χρησιμότητα, οι 2 παρατηρητές πρέπει να βρίσκονται σε όσο το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση ο ένας από τον άλλο. Σε ιδανικές συνθήκες θα έπρεπε να βρίσκεται ο ένας στον αντίποδα του άλλου. Εντούτοις, στις σπάνιες περιπτώσεις που έχουμε ολική έκλειψη Ηλίου, ακόμη και η απειροελάχιστη αλλαγή στη θέση του παρατηρητή, μπορεί να σημάνει το πέρασμα από το απόλυτο σκοτάδι σε έναν μερικώς μόνο καλυμμένο Ήλιο. Αυτό έγινε αντιληπτό με δραματικό τρόπο κατά τη διάρκεια της έκλειψης της 24.01.1925 που ήταν ορατή από την πόλη της Νέας Υόρκης και παρατηρήθηκε από εκατομμύρια ανθρώπους, χάρη στην αιθρία που επικρατούσε.

Για να προσδιοριστούν με ακρίβεια τα άκρα της σεληνιακής σκιάς, τοποθετήθηκαν παρατηρητές σε κάθε σταυροδρόμι του Μανχάταν, μεταξύ της 72<sup>ης</sup> και της 135<sup>ης</sup> λεωφόρου. Οι παρατηρητές, έλαβαν οδηγίες να αναφέρουν αν έβλεπαν ολόκληρο το ηλιακό στέμμα (ορατό μόνο κατά τη διάρκεια ολικής έκλειψης, όταν ο ηλιακός δίσκος καλύπτεται πλήρως από τη Σελήνη), ή απλώς έναν λεπτό φωτεινό μηνίσκο, κάτι που θα σήμαινε ότι η έκλειψη ήταν μερική. Το αποτέλεσμα ήταν χαρακτηριστικό, τα άκρα της σκιάς ήταν ορατά μεταξύ της 95<sup>ης</sup> και της 97<sup>ης</sup> λεωφόρου, δηλαδή με ακρίβεια μερικών εκατοντάδων μέτρων για έναν κώνο σκιάς που σχηματίστηκε σε απόσταση μεγαλύτερη από 300.000 km<sup>4</sup>.

### 3.3 Ο Ίππαρχος από τη Νίκαια

Ο 1<sup>ος</sup> που χρησιμοποίησε τη σεληνιακή παράλλαξη για να εκτιμήσει την απόσταση της Σελήνης, ήταν ο Ίππαρχος από τη Νίκαια. Ο Ίππαρχος, μελέτησε τα αρχεία των εκλείψεων που είχαν καταγράψει οι Βαβυλώνιοι από τον 8<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ. και κατάφερε να κατανοήσει την κίνηση του Ήλιου και της Σελήνης.

Παίρνοντας πληροφορίες σχετικά με την έκλειψη Ηλίου της 14.03.189 π.Χ. που ήταν ολική στην περιοχή του Ελλήσποντου, αλλά κατά τα  $\frac{4}{5}$  της επιφάνειας του Ηλίου από την περιοχή της Αλεξάνδρειας. Αφού ο Ήλιος και η Σελήνη φαίνονται πάνω στην ουράνια σφαίρα κατά γωνίες περίπου μισής μοίρας, η φαινόμενη διαφορά στη θέση της Σελήνης από αυτούς τους 2 τόπους αναλογούσε στο  $\frac{1}{5}$  της γωνίας, δηλαδή σε περίπου 6 πρώτα λεπτά της μοίρας. Συνδυάζοντας αυτή την πληροφορία με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος των 2 τόπων και με το ύψος του Ήλιου και της Σελήνης τη στιγμή της έκλειψης, ο Ίππαρχος υπολόγισε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της Σελήνης σε 83 και 71 γήινες ακτίνες, αντίστοιχα.

Παρόλο που αυτές οι εκτιμήσεις ξεπερνούν τις πραγματικές τιμές (64 και 56, αντίστοιχα) βρίσκονται στη σωστή τάξη μεγέθους και πρέπει να θεωρούνται ως ένα

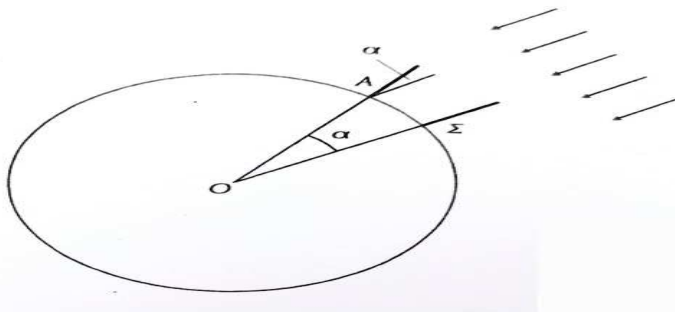
<sup>4</sup> Brewer, B. (1978). "Eclipse", Seattle: Earths View.

σημαντικό επίτευγμα για εκείνη την εποχή<sup>5</sup>. Για να υπολογίσει την απόσταση της Σελήνης, ο Ίππαρχος είχε ως μονάδα μέτρησης την ακτίνα της Γης.

### 3.4 Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος

Η 1<sup>η</sup> νύξη για τη σφαιρικότητα του πλανήτη μας, αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Είναι άγνωστο αν κατέληξε στα συμπεράσματα του από τις παρατηρήσεις του κατά την διάρκεια εκλείψεων της Σελήνης, ή από αισθητικές και φιλοσοφικές αρχές, αλλά από τη στιγμή που εδραιώθηκε η ιδέα της σφαιρικότητας της Γης, ξεκίνησαν οι προσπάθειες να προσδιοριστεί το μέγεθος της. Το επίτευγμα του προσδιορισμού του μεγέθους της Γης, ανήκει στον μαθηματικό και γεωγράφο Ερατοσθένη τον Κυρηναίο (275–194 π.Χ.) ένα λαμπρό μυαλό της εποχής του και φίλο του Αρχιμήδη, στον οποίο αφιέρωσε πολλά από τα έργα του. Ο Ερατοσθένης, δραστηριοποιήθηκε σε πολλούς τομείς. Ετοίμασε έναν χάρτη του ουρανού με 675 άστρα και υπολόγισε τη γωνία κλίσης του Ισημερινού προς την εκλειπτική στις 23,5°.

Πρότεινε να προστίθεται μια επιπλέον ημέρα κάθε 4 έτη έτσι ώστε να συμβαδίζει το ημερολόγιο με τις εποχές, ιδέα στην οποία στηρίχτηκε το Ιουλιανό ημερολόγιο, επινόησε το «κόσκινο» στα μαθηματικά και έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Έγραψε ποίηση και κρατούσε ημερολόγιο με σημαντικά ιστορικά γεγονότα από την εποχή του, ως τον Τρωικό πόλεμο. Διετέλεσε διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και πέθανε σε μεγάλη ηλικία, τυφλός, παίρνοντας την ίδια την ζωή του. Ο Ερατοσθένης το 240 π.Χ., υπολόγισε το μέγεθος της Γης μεταξύ 46.250 και 56.250 km. Ήταν ήδη γνωστό ότι το μεσημέρι της ημέρας του θερινού ηλιοστασίου, οι ακτίνες του Ήλιου φωτίζουν κατευθείαν τον πυθμένα ενός πηγαδιού στην πόλη Σήνη (Ασουάν) της Αίγυπτου. Παρατήρησε ότι, στην Αλεξάνδρεια που ήταν βόρεια της Σήνης, την ίδια στιγμή ο Ήλιος βρισκόταν σε απόσταση  $\frac{1}{50}$  του πλήρους κύκλου, δηλαδή 7,2° από το ζενίθ, χρησιμοποιώντας τη σκιά μιας κατακόρυφης ράβδου για τις μετρήσεις.



Σχήμα 37. Η μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη

Ο Ερατοσθένης, θεώρησε ότι οι ακτίνες του Ήλιου φθάνουν στη Γη παράλληλες, λόγω της απόστασης του και ότι η διαφορά στο ύψος του Ήλιου, καθώς τον παρατηρούσε από 2 διαφορετικές τοποθεσίες, οφειλόταν στη σφαιρικότητα της Γης. Ήταν γνωστό ότι η απόσταση των 2 πόλεων ήταν 5.000 στάδια και υπολόγισε ότι η περιφέρεια της Γης ήταν ίση με 50 φορές αυτή την απόσταση, δηλαδή 250.000 στάδια. Οι εκτιμήσεις για το μήκος του σταδίου, κυμαίνονται από 185 ως 225 m. Η περιφέρεια της Γης όπως υπολογίστηκε από τον Ερατοσθένη, κυμαίνεται μεταξύ

<sup>5</sup> Albert van Helden, (1985). “Measuring the universe: Cosmic dimensions from Aristarchus to Halley”, Chicago: University of Chicago Press.

45.250 και 56.250 km. Οι υπολογισμοί του Ερατοσθένη<sup>6</sup>, πλησίασαν κατά πολύ τις σωστές τιμές της περιφέρειας της Γης όπως τις γνωρίζουμε σήμερα, 39.940 km η πολική περιφέρεια και 40.075 km η περιφέρεια του Ισημερινού και το έκανε χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία ως εργαλείο<sup>7</sup>.

### 3.5 Ο Μαγγελάνος

Την 1<sup>η</sup> άμεση απόδειξη ότι η Γη είναι περίπου σφαιρική, την έδωσε ο Φερδινάνδος Μαγγελάνος με τον περίπλου της Γης (1519 – 1522 μ.Χ.). Σύντομα όμως, οι επιστήμονες της εποχής αρχίσαν να έχουν ερωτήματα για το αν η Γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους ή στον Ισημερινό και η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα είχε ιδιαίτερη σημασία ειδικά για τους ναυτικούς που ήθελαν να προσδιορίζουν με ακρίβεια το γεωγραφικό τους μήκος και πλάτος, όταν έπλεαν στη θάλασσα.

### 3.6 Γεωδαισία και γεωδαιτικός τριγωνισμός

Ο προσδιορισμός του ακριβούς σχήματος της Γης και γενικότερα οποιασδήποτε καμπύλης επιφάνειας, εξελίχτηκε στην επιστήμη της **γεωδαισίας**. Σημαντικότεροι επιστήμονες του 18<sup>ου</sup> και του 19<sup>ου</sup> αιώνα που ασχολήθηκαν με τη μελέτη της γεωδαισίας, ήταν οι Newton, Euler και Gauss. Η χρήση της επιστήμης της γεωδαισίας, έγινε αρχικά σε μικρές περιοχές, θεωρώντας τη Γη ως επίπεδη.

Το σκεπτικό ήταν, η επιλογή μιας γραμμής βάσης και η μέτρηση των γωνιών που δημιουργούνται μεταξύ αυτής της γραμμής και των οπτικών ευθειών, που συνδέουν τα άκρα της με ένα μακρινό αντικείμενο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το νόμο των ημιτόνων, έβρισκαν την απόσταση των άκρων της βάσης από το μακρινό αντικείμενο.

Οι αποστάσεις ακολουθώντας, ορίζονταν ως νέα γραμμή βάσης και γινόταν υπολογισμός με νέο μακρινό αντικείμενο. Το αποτέλεσμα ήταν, ολόκληρη η περιοχή να καλυφθεί από ένα πλέγμα νοητών τριγώνων. Η μέθοδος αυτή, είναι γνωστή ως **γεωδαιτικός τριγωνισμός** και το αντίστοιχο πλέγμα των τριγώνων καλείται **τριγωνομετρικό δίκτυο**.

Αποτελεί τον σκελετό πάνω στον οποίο θα συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες του εδάφους (όπως βουνά, λόφοι, ποτάμια, πόλεις, δρόμοι κλπ.) για τη δημιουργία ενός χάρτη. Η μέθοδος του γεωδαιτικού τριγωνισμού, χρησιμοποιήθηκε από αρκετούς επιστήμονες όπως τον Ολλανδό Willebrord van Roijen Snell (1581–1626)<sup>8</sup> και τον Ολλανδό μαθηματικό Gemma Frisius

<sup>6</sup> Lloyd A. Brown, (1949). “The story of maps”, New York: Dover.

John Noble Wilford, (1981). “The Mapmakers”. New York: Alfred A. Knopf.

Simon Berthon & Andrew Robinson, (1991). “The shape of the world”. Chicago: Rand McNally.

<sup>7</sup> «Το ακριβές μήκος του σταδίου έχει προκαλέσει άφθονες επιστημονικές συζητήσεις και διαμάχες.

Μερικές πηγές το εκτιμούν στο  $\frac{1}{10}$  του μιλίου ή 528 πόδια ή 161m, κάτι που θα οδηγούσε σε μια περίμετρο

της Γης ίση με 25.000 miles (40.200 km). Ωστόσο από ότι φαίνεται, αυτό το μήκος του σταδίου «ορίστηκε» αναδρομικά, ώστε να οδηγεί σε μια εκτίμηση της περιμέτρου που να προσεγγίζει τους σημερινούς υπολογισμούς». B.L. van der Waerden «Η αφύπνιση της επιστήμης» (Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2000), σελίδα 271

«Από τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε το ακριβές μήκος του σταδίου, δεν μπορούμε να πούμε τίποτα περισσότερο, σχετικά με τον ακριβή υπολογισμό της περιμέτρου της Γης, από το ότι η τάξη μεγέθους είναι περίπου ακριβής». D.E. Smith, “History of Mathematics” (1925 επανέκδοση New York: Dover, 1958) τόμος 2, σελίδα 541.

<sup>8</sup> Υπήρξε καθηγητής των μαθηματικών στο Λέιντεν, όπου διαδέχθηκε τον πατέρα του. Εργάστηκε πάνω στην αστρονομία, στη φυσική και στην σφαιρική τριγωνομετρία. Είναι περισσότερο γνωστός για τον νομό της διάθλασης, στην οπτική.

(1508–1555)<sup>9</sup> το 1533. Η 1<sup>η</sup> συστηματική προσπάθεια έγινε το 1668, υπό την επίβλεψη του αβά Jean Picard ενός από τους ιδρυτές του Αστεροσκοπείου στο Παρίσι. Ο Picard, χρησιμοποίησε έναν νέο τύπογωνιόμετρου και ένα τηλεσκόπιο, συνδυάζοντας τις γήινες μετρήσεις με τον αστρονομικό προσδιορισμό του γεωγραφικού πλάτους, στα άκρα της γραμμής βάσης του και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στο γεωγραφικό πλάτος του Παρισιού, η μία μοίρα (1°) είχε μήκος 110.480 m.

Όμως, με βάση αυτούς τους υπολογισμούς έπρεπε να μετακινηθεί η ανατολική ακτογραμμή κατά 1,5° ανατολικά, με αποτέλεσμα να μην περιλαμβάνεται σημαντικό μέρος του βασιλείου γεγονός που προκάλεσε την αγανάκτηση του βασιλιά Λουδοβίκου ΙΔ.<sup>10</sup> Οι μετρήσεις συνεχίστηκαν τον επόμενο αιώνα, από 4 γενιές της οικογένειας Cassini.

### 3.6.1 Διάσημοι γεωδαίτες

Ο **Giovanni Dominico Cassini**<sup>11</sup>, φημισμένος αστρονόμος από την Ιταλία ανέλαβε τη διεύθυνση του αστεροσκοπείου στο Παρίσι και τα πρώτα χρόνια της παραμονής του συνέβαλε σημαντικά στην επιστήμη της αστρονομίας. Υπήρξε ένας από τους τελευταίους επαγγελματίες αστρονόμους που αντιτάχθηκαν στην ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου και επέμενε ότι η Γη ήταν πεπλατυσμένη στον Ισημερινό, παρόλα τα συνεχώς αυξανόμενα στοιχεία περί του αντιθέτου. Προς το τέλος της ζωής του, ασχολήθηκε με τη γεωδαισία και τη χαρτογραφία.

Το 1679, συνέταξε έναν νέο χάρτη του κόσμου το **planisphere Terrestrre** χρησιμοποιώντας μια προβολή, στην οποία όλες οι διευθύνσεις και οι αποστάσεις από τον βόρειο πόλο, εμφανίζονται σωστά. Η μέθοδος αυτή, είναι γνωστή ως **αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή**. Ο χάρτης του, είχε διάμετρο 7m και χρησίμευσε ως πρότυπο για τους μελλοντικούς χαρτογράφους. Ο Cassini με τη βοήθεια του γιου του **Jacques**, ασχολήθηκε και με τη συνέχιση της τοπογράφησης της Γαλλίας. Στόχος τους ήταν, να επεκτείνουν την τοπογράφηση προς τα Πυρηναία όρη και σε ολόκληρη την Ευρώπη, χρησιμοποιώντας το γνωστό δίκτυο τριγώνων και ως αποτέλεσμα ήλπιζαν να απαντήσουν στο ερώτημα που ήταν η Γη πεπλατυσμένη, στους πόλους ή στον Ισημερινό.

Ο **Jacques Cassini**, συνειδητοποίησε ότι η λύση στο ερώτημα ήταν η σύγκριση του μήκους της μοίρας σε 2 πολύ απομακρυσμένα γεωγραφικά πλάτη. Πρότεινε 2 αποστολές στον Ισημερινό και στην Αρκτική. Ένας ακόμη λόγος για να δοθεί μια οριστική απάντηση στο ερώτημα ήταν η διαμάχη ανάμεσα στους επιστήμονες της Γαλλίας με αυτούς της Αγγλίας. Οι Γάλλοι, ακολουθούσαν τη θεωρία των **στροβιλισμών του Καρτέσιου**, ενώ οι Άγγλοι τη γνωμάτευση του **Newton** ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους. Το σχήμα της Γης, είχε γίνει το πιο πολυσυζητημένο επιστημονικό πρόβλημα της επικαιρότητας, με τη Γαλλική και την Αγγλική εθνική υπερηφάνεια να είναι το πραγματικό αντικείμενο της αμφισβήτησης<sup>12</sup>.

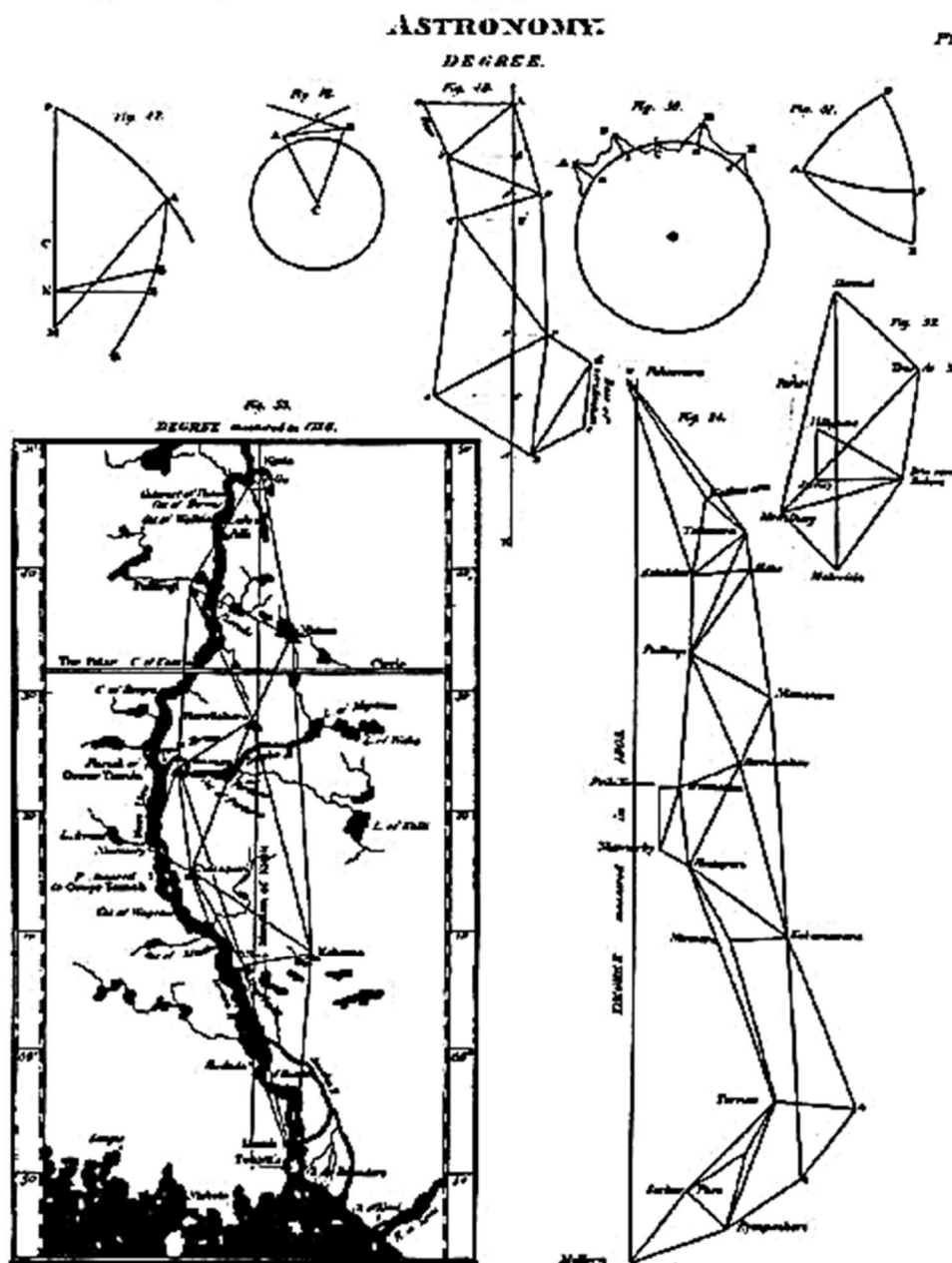
<sup>9</sup> Το πραγματικό του όνομα ήταν Gemma Regnier, όμως έγινε γνωστός ως Gemma Frisius, από τον τόπο καταγωγής του την Φρισία (στα παράλια της Βόρειας Θάλασσας). Το 1541 έγινε καθηγητής της ιατρικής στο Καθολικό Πανεπιστήμιο της Λέβεν. Το βιβλίο του για την αριθμητική (Αμβέρσα, 1540) ήταν ιδιαίτερα δημοφιλές και έκανε 60 εκδόσεις. Έγραψε ακόμα για τη γεωγραφία και την αστρονομία και πρότεινε έναν τρόπο προσδιορισμού του γεωγραφικού μήκους, με βάση τη διαφορά στην τοπική ώρα, ανάμεσα σε 2 σημεία. Ο γιος του Cornelius Gemma Frisius (1535–1577), συνέχισε το έργο του πατέρα του και εργάστηκε ως καθηγητής της ιατρικής στο ίδιο πανεπιστήμιο.

<sup>10</sup> Η Γαλλία αναγνώρισε τον μεσημβρινό του Γκρήνουιτς, ως τον αρχικό (μηδενικό) μεσημβρινό μόλις το 1913. Σε αντάλλαγμα, η Αγγλία, αναγνώρισε το μετρικό σύστημα.

<sup>11</sup> Το διαστημόπλοιο Cassini που εκτοξεύτηκε από την NASA τον Οκτώβριο του 1997 για ένα επταετές ταξίδι προς τον Κρόνο, φέρει το όνομα του.

<sup>12</sup> Simon Berthon & Andrew Robinson, (1991). “The Shape of the world”. Chicago: Rand McNally.

Το 1734, ξεκίνησαν 2 αποστολές. Μια για τη Λαπωνία και μια για το Περού, με σκοπό να πραγματοποιήσουν έναν πλήρη γεωδαιτικό τριγωνισμό των αντίστοιχων περιοχών και να προσδιορίσουν το μήκος της μοίρας, στην κάθε τοποθεσία. Και οι 2 αποστολές, ήταν στελεχωμένες με τους καλύτερους επιστήμονες και τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής τους. Αν και ξεκίνησαν με μεγάλο ενθουσιασμό, συνάντησαν πολλές δυσκολίες μέχρι να ολοκληρώσουν το έργο τους. Τα αποτελέσματα στο μήκος του τόξου μήκους  $1^\circ$  στη Λαπωνία ήταν 111.11 km και στο Περού 109,95 km. Σε συνδυασμό με τα 110,48 km που είχε μετρήσει ο Picard στο Παρίσι, τα αποτελέσματα αποδείκνυαν ότι, η Γη ήταν ένα σφαιροειδές πεπλατυσμένο στους πόλους. Για άλλη μια φορά οι Άγγλοι νίκησαν και ο Νεύτωνας είχε δίκιο.



Σχήμα 38. Μέτρηση βαθμού του γεωγραφικού μήκους. Ο χάρτης δείχνει ένα μέρος του δικτύου τριγωνισμού που δημιουργήθηκε από την αποστολή του Maupertuis στη Λαπωνία. Από γκραβούρα 1798

Το ίδιο διάστημα, ο Jacques Cassini με τον γιο του Cesar Francois Cassini ολοκλήρωναν τον γεωδαιτικό τριγωνισμό της Γαλλίας, χρησιμοποιώντας ένα δίκτυο από 18 γραμμές βάσης και 400 τρίγωνα. Την εργασία της μετατροπής από πλέγμα σε

πραγματικό χάρτη, την ανέλαβε ο δισέγγονος του Cassini, **Jean Doninique Cassini** ο οποίος δημιούργησε έναν τεράστιο χάρτη διαστάσεων 11 m x 11 m, που τυπώθηκε σε 182 φύλλα χαρτιού, σε κλίμακα 1:86.400 και περιείχε εκτός από τα τοπογραφικά χαρακτηριστικά, κάστρα, αμπελώνες κ.α. Το γεωδαιτικό προβάδισμα της Γαλλίας, το ακολουθήσε η υπόλοιπη Ευρώπη, οπότε περί τα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα το μεγαλύτερο μέρος της ηπείρου είχε αποτυπωθεί τριγωνομετρικά και χαρτογραφηθεί αναλυτικά.

Το επόμενο βήμα ήταν η χαρτογράφηση της Ινδίας, μιας από τις μεγαλύτερες αποικίες του Βρετανικού Στέμματος. Ένα μεγάλο πρόγραμμα γεωδαιτικού τριγωνισμού γνωστό με το όνομα **μεγάλος γεωδαιτικός τριγωνισμός**, εκτελέστηκε από το 1800 ως το 1913, από τις νοτιότερες ακτές της χώρας ως τα Ιμαλάια, από τον λοχαγό **William Lambton** ο οποίος ολοκλήρωσε το έργο του με μεγάλη ακρίβεια.

Το 1806, ο λοχαγός Lambton αποφάσισε να προσδιορίσει το σχήμα της Γης. Ακολούθησε μια γραμμή κατά μήκος του 78<sup>ου</sup> μεσημβρινού, από το ακρωτήριο Κόμοριν νότια της Ινδικής χερσονήσου μέχρι την περιοχή του Κασμίρ στο βορρά, μια απόσταση 2.900 km. Μετά τον θάνατο του, το έργο του συνεχίστηκε από τον βοηθό του τον **George Everest** ο οποίος διορίστηκε γενικός τοπογράφος των Ινδιών και παρόλο που αντιμετώπισε αρκετά προβλήματα, κατάφερε να φτάσει στους πρόποδες των Ιμαλαίων οπότε διαπίστωσε ότι η πραγματική τους θέση διέφερε με αυτήν που είχε υπολογιστεί με το τριγωνομετρικό δίκτυο, λιγότερο από 18 cm σε μια απόσταση 800 km! Διαπίστωσε επίσης ότι η τεράστια μάζα των Ιμαλαίων άλλαζε τη διεύθυνση του νήματος της στάθμης (βαρύτιμες ανωμαλίες που σήμερα ονομάζονται **mascons**).

Το έργο του Everest συνεχίστηκε και ολοκληρώθηκε από τον βοηθό του, τον **Andrew Waugh**. Κατά τη διάρκεια των υπολογισμών της τοπογραφικής, ο βοηθός του Waugh, **Radhanath Sikdar** έκανε άλλη μια ανακάλυψη. Ανακάλυψε το υψηλότερο βουνό του κόσμου. Η επίσημη ανακοίνωση, καθυστέρησε μέχρι το 1856. Υπολογίζοντας τον μέσο όρο των διάφορων μετρήσεων που έγιναν από απόσταση 100 miles, το ύψος του βουνού προσδιορίστηκε σε 29.000 πόδια ακριβώς.

Ο τοπογράφος πρόσθεσε αυθαίρετα 2 πόδια, έτσι μέχρι το 1954 το ύψος του βουνού ήταν 29.002 πόδια. Σήμερα, γνωρίζουμε ότι το ύψος του όρους Έβερεστ είναι 29.028 πόδια ή 8.859 m<sup>13</sup>.

Ενώ οι Γάλλοι και οι Άγγλοι ήταν απασχολημένοι με τον γεωδαιτικό τριγωνισμό της Ευρώπης και των αποικιών, στη Γερμανία ο **Friedrich Wilhelm Bessel** εργαζότανε στο να καταρτίσει ένα τριγωνομετρικό δίκτυο του ουρανού. Ο Bessel ξεκίνησε την καριέρα του ως λογιστής, μελέτησε μόνος του μαθηματικά και αστρονομία και σύντομα, χάρη στην πολύ καλή φήμη του πέτυχε τον διορισμό του σαν διευθυντής στο Βασιλικό Αστεροσκοπείο της Πρωσίας στο σημερινό Καλίνινγκραντ της Ρωσίας. Περί το 1800, οι διαστάσεις και οι αποστάσεις του μέχρι τότε γνωστού ηλιακού συστήματος ήταν προκαθορισμένες, μέσω της μεθόδου της παράλλαξης.

Η μέθοδος της παράλλαξης είχε όμως αποτύχει στην περίπτωση των απλανών αστερών και στον υπολογισμό της διάστασης του υπολοίπου σύμπαντος. Για τους αρχαίους Έλληνες, η απουσία της παράλλαξης ήταν το στοιχείο ότι η Γη ήταν το κέντρο του σύμπαντος, ενώ για τον Κοπέρνικο ήταν η ένδειξη ότι τα άστρα βρίσκονται τόσο μακριά, ώστε οποιαδήποτε μεταβολή στη θέση τους δεν διακρίνεται με το γυμνό μάτι. Το 1609 με την εφεύρεση του τηλεσκοπίου, έγινε εφικτή η μέτρηση της

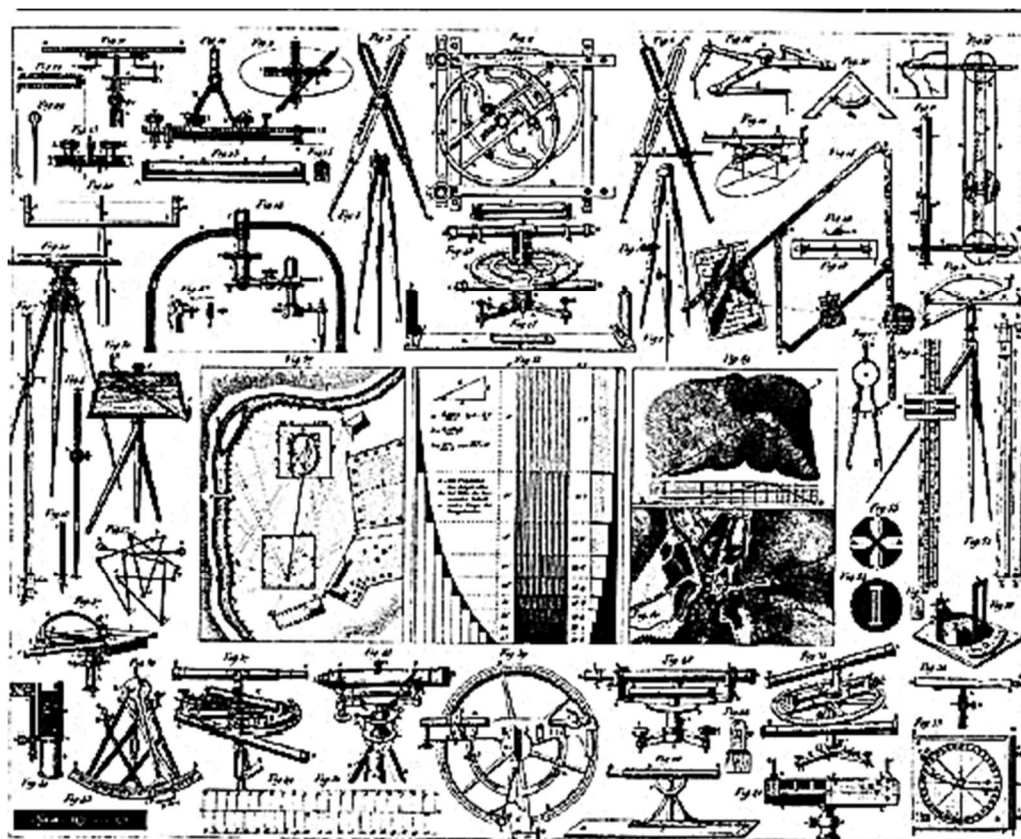
---

<sup>13</sup> Στο “Nothing to venture nothing to win” (1975), ο sir Edmund Hilary (New York: Coward McCann & Geoghegan) που μαζί με τον Sherpa Tenzing Norgay, ήταν ο 1<sup>ος</sup> που ανέβηκε στο Έβερεστ το 1953, δίνει ως ύψος του βουνού στα 29.002 πόδια (8.840 m), περισσότερο από 20 έτη μετά την επίσημη αλλαγή του σε 29.028 πόδια (8.848 m). Το 1999, το Μουσείο Επιστημών της Βοστώνης σε συνεργασία με την Εθνική Γεωγραφική Εταιρεία, πραγματοποίησε νέα μέτρηση, χρησιμοποιώντας το παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού θέσης μέσω δορυφόρων (Gps) και προσδιόρισε το ύψος σε 8.850 m.

παράλλαξης κάποιων κοντινών άστρων. Όμως, η χρήση της λαμπρότητας τους σαν απόδειξη της απόστασής τους από τη Γη, δεν έδινε τα σωστά αποτελέσματα.

Το 1800, οι αστρονόμοι γνώριζαν ότι τα άστρα διαφέρουν σημαντικά ως προς την λαμπρότητα τους και επομένως αυτή δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένδειξη απόστασης από τη Γη. Αντίθετα, η προσοχή των αστρονόμων στράφηκε στα άστρα που είχαν μεγάλη ίδια κίνηση (την πραγματική κίνηση του άστρου ως προς τον ουράνιο θόλο). Διατυπώθηκε η υπόθεση ότι, ένα άστρο με μεγάλη ίδια κίνηση, βρίσκεται σχετικά κοντά στη Γη.

Σαν υποψήφιος αστέρας για μελέτη, επιλέχθηκε ο αστέρας Κύκνος 61 στον αστερισμό του Κύκνου, ένα άστρο πέμπτου μεγέθους, μετά βίας ορατό δια γυμνού οφθαλμού, εκτελούσε όμως μεγάλη ίδια κίνηση 5,2 δεύτερα λεπτά του τόξου ανά έτος. Μετά από συστηματική παρατήρηση 18 μηνών, ο Bessel ανακοίνωσε ότι ο Κύκνος 61 παρουσίαζε παράλλαξη 0,314 δευτερολέπτων του τόξου και αυτός ο αριθμός του επέτρεψε με τη χρήση απλών τριγωνομετρικών υπολογισμών, να βρει την απόσταση του άστρου από τη Γη.

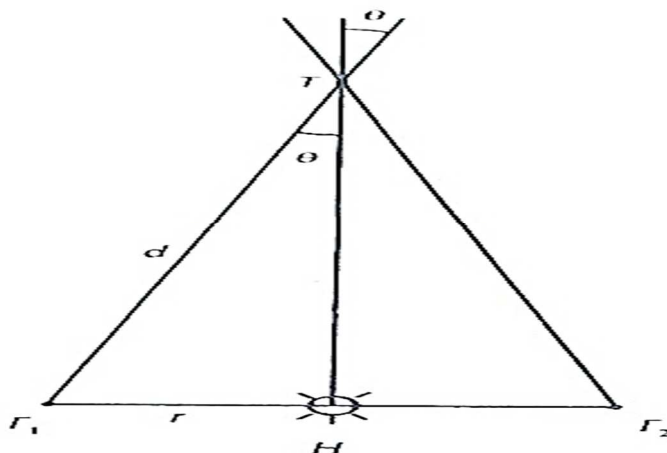


Σχήμα 39. Τοπογραφικά όργανα του 19<sup>ου</sup> αιώνα

Στο παρακάτω σχήμα της αστρικής παράλλαξης, το Η παριστάνει τον Ήλιο και τα Γ<sub>1</sub>, Γ<sub>2</sub> τις αντιδιαμετρικές θέσεις της Γης κατά την τροχιά της γύρω από τον Ήλιο και Τ το άστρο που μελετάμε. Ονομάζουμε ετήσια παράλλαξη, το μισό της γωνιακής μετατόπισης του άστρου που οφείλεται στη κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή τη γωνία  $\theta = \angle Γ_1 T H$  στο ορθογώνιο τρίγωνο Γ<sub>1</sub> T H. Ονομάζουμε d την απόσταση του άστρου και r την ακτίνα της τροχιάς της Γης και έχουμε  $\sin \theta = \frac{r}{d} \Leftrightarrow d = \frac{r}{\sin \theta}$

Αντικαθιστώντας το  $r=150.000.000 \text{ km}=1.5 \times 10^8 \text{ km}$  και τη  $\theta=0,314''=(0,314/3.600)^\circ$  έχουμε  $d=9,85 \times 10^{13} \text{ km}$ . Επειδή οι αποστάσεις στο διάστημα

μετριοούνται σε έτη φωτός διαιρούμε την παραπάνω τιμή με την ταχύτητα φωτός ( $3 \times 10^5$  km/s) και πολλαπλασιάζουμε επί τον αριθμό των δευτερολέπτων του έτους ( $3.600 \times 24 \times 365$ ). Αυτό δίνει  $d=10,1$  έτη φωτός. Με αυτό τον τρόπο έγιναν γνωστές οι διαστάσεις του Σύμπαντος, πέραν του ηλιακού μας συστήματος. Με τα σημερινά όργανα μέτρησης, υπολογίστηκαν και διορθώθηκαν οι παραλλάξεις με μεγαλύτερη ακρίβεια σε  $0,294''$  η οποία αντιστοιχεί σε απόσταση  $11,1$  ετών φωτός. Στα επόμενα χρόνια μετρήθηκαν επιτυχώς και άλλες αστρικές παραλλάξεις όπως αυτή του Άλφα Κενταύρου σε απόσταση  $4,3$  ετών φωτός<sup>14</sup>.



Σχήμα 40. Αστρική παράλλαξη

Το **1844** ο Bessel, έκανε άλλη μια ιστορική ανακάλυψη. Μελετώντας το άστρο του Σείριου βρήκε ότι η ίδια κίνηση του, δημιουργεί μια ανεπαίσθητα κυματοειδή τροχιά. Απέδωσε το φαινόμενο σε μία βαρυτική επίδραση κάποιου αόρατου άστρου, που περιφέρεται γύρω από τον Σείριο. Αυτό το άστρο, ο **Σείριος Β**, ανακαλύφθηκε το 1862 από τον Αμερικανό κατασκευαστή τηλεσκοπίων Alvan Graham Clark. Για να λύσει τα προβλήματα που σχετιζόταν με τις βαρυτικές διαταραχές των πλανητών στο διάστημα, ο Bessel εισήγαγε μια νέα κατηγορία συναρτήσεων, οι οποίες ονομάστηκαν **συναρτήσεις Bessel**. Πρόκειται για τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$  όπου  $n \geq 0$  ένας σταθερός αριθμός. Η φύση των λύσεων εξαρτάται σε μεγάλο αριθμό από το  $n$ .

Για  $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  οι λύσεις μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή, ως συνάρτηση των  $x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Για άλλες τιμές του  $n$ , μπορούν να εκφραστούν μόνο με τη μορφή σειράς και επομένως θεωρούνται «ανώτερες» ή «μη στοιχειώδεις» συναρτήσεις. Η εξίσωση Bessel, βρίσκει αρκετές εφαρμογές π.χ. στην παλμική κίνηση μιας στρογγυλής μεμβράνης όπως αυτή του τυμπάνου,  $n = 0$ <sup>15</sup>. Ο Bessel, μελετώντας

<sup>14</sup> «Στην πραγματικότητα, ο Άλφα του Κενταύρου είναι ένα τριπλό σύστημα άστρων, με το μικρότερο άστρο, τον Εγγύτατο του Κενταύρου που αποκαλύφθηκε το 1915, να βρίσκεται αυτή τη στιγμή σε απόσταση  $4,2$  ετών φωτός. Ο Κύκνος 61, τοποθετείται τώρα στη  $19^{\text{η}}$  θέση κατά σειρά απόστασης από τον Ήλιο». Joshua Roth and Roger W. Sinnott (1996). "Our nearest celestial neighbors". In Sky & Telescope, pp. 32–34.

<sup>15</sup> Για  $n=0$  και  $1$ , οι συναρτήσεις Bessel, που συμβολίζονται ως  $j_0(x)$  και  $j_1(x)$ , παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με το συνημίτονο και το ημιτόνιο, αντίστοιχα. Για παράδειγμα  $j_0(0)=1$  και  $j_1(0)=0$ , ενώ και οι δυο συναρτήσεις έχουν ταλαντευόμενες γραφικές παραστάσεις. Ωστόσο τα πλάτη ελαττώνονται καθώς αυξάνει το  $x$  και έτσι οι ρίζες δεν είναι κατανομημένες σε ίσες αποστάσεις κατά μήκος του άξονα των  $x$ . Για αυτό άλλωστε ο ήχος του τυμπάνου είναι διαφορετικός από αυτόν του βιολιού.

τις βαρυτικές διαταραχές που παρουσιάζονταν στον πλανήτη Ουρανό, τις απέδωσε στην ύπαρξη κάποιου άγνωστου πλανήτη, πέρα από τον Ουρανό.

Πέθανε λίγους μήνες πριν ανακαλυφθεί ο πλανήτης **Ποσειδώνας**. Χάρη στον Bessel, το ενδιαφέρον των αστρονόμων άρχισε να μετατοπίζεται από το ηλιακό σύστημα, στο ευρύτερο Διάστημα.

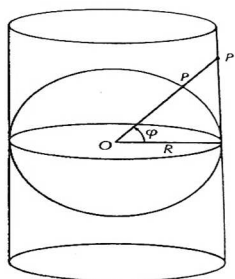
#### 4. Κατασκευή χαρτών και τριγωνομετρία

Ας στραφούμε στη χαρτογραφία. Γνωρίζουμε ότι δεν είναι δυνατό να πιέσουμε φλούδες πορτοκαλιού πάνω σε ένα τραπέζι χωρίς να τις σπάσουμε, διότι είναι αναπόφευκτη κάποιας μορφής παραμόρφωση. Το γεγονός αυτό, αποδείχθηκε μαθηματικά χάρη στην ιδιοφυΐα του **Euler**. Σύμφωνα με το θεώρημα του, είναι αδύνατο να απεικονίσουμε μια σφαίρα σε ένα επίπεδο, χαρτί χωρίς παραμόρφωση.

Αν η Γη ήταν κύλινδρος ή κώνος, το έργο του χαρτογράφου θα γινόταν ευκολότερο. Ο κύλινδρος ή ο κώνος είναι επιφάνειες αναπτύξιμες, μπορούν δηλαδή να παρασταθούν στο επίπεδο χωρίς κάποια συρρίκνωση ή διαστολή, διότι αν και καμπύλες, έχουν κατά βάση τη γεωμετρική δομή του επιπέδου. Για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα οι χαρτογράφοι, επινοήσαν μια μεγάλη ποικιλία **χαρτογραφικών προβολών-συναρτήσεων**, δηλαδή με τη μαθηματική έννοια του όρου που αντιστοιχίζουν σε κάθε σημείο της σφαίρας ένα σημείο-εικόνα στον επίπεδο χάρτη.

Η επιλογή ενός συγκεκριμένου τύπου προβολής, εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε τον χάρτη. Ένας χάρτης μπορεί να δείχνει τις σωστές αποστάσεις μεταξύ 2 σημείων της σφαίρας, υπό κλίμακα φυσικά, ένας άλλος να διατηρεί τις σχετικές επιφάνειες των χωρών και ένας τρίτος τη σωστή διεύθυνση ανάμεσα σε 2 σημεία. Για να διατηρήσουμε οποιοδήποτε από αυτά τα χαρακτηριστικά, πρέπει αναγκαστικά να θυσιάσουμε κάποιο άλλο. Κάθε χαρτογραφική προβολή, είναι ένας συμβιβασμός μεταξύ αντικρουόμενων απαιτήσεων.

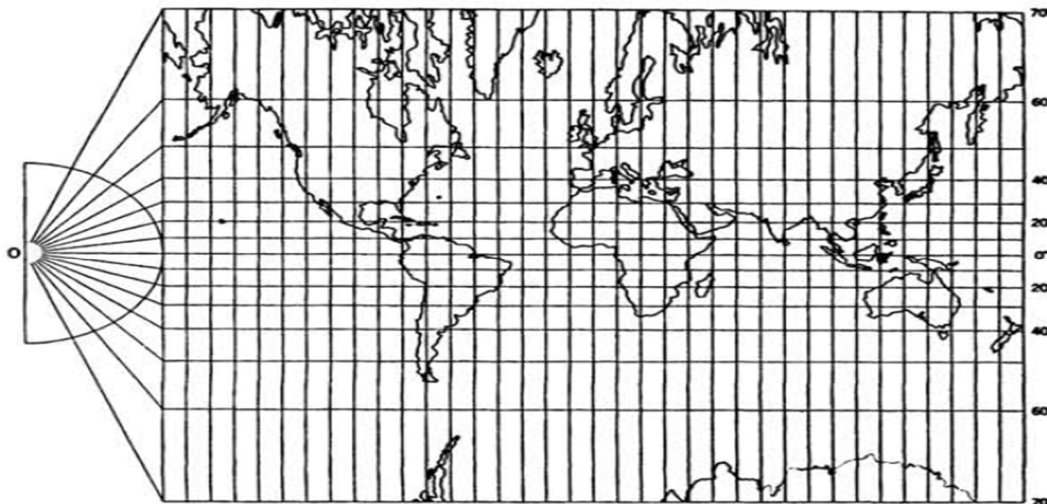
Η πιο απλή από όλες τις προβολές είναι η **κυλινδρική προβολή**. Φανταζόμαστε τη Γη που θεωρείται τέλεια σφαίρα ακτίνας  $R$ , να περιβάλλεται από έναν κύλινδρο εφαπτόμενο αυτής στον Ισημερινό.



Σχήμα 41. Κυλινδρική προβολή της υδρογείου.

Έστω επιπλέον φωτεινές ακτίνες να εκπέμπονται από το κέντρο της Γης προς όλες τις κατευθύνσεις. Έτσι, κάθε σημείο  $P$  της σφαίρας προβάλλεται στη «σκιά» του  $P'$  πάνω στο κύλινδρο. Όταν ξετυλίγουμε τον κύλινδρο, έχουμε έναν επίπεδο χάρτη σχεδόν ολόκληρης της Γης, διότι ο βόρειος και ο νότιος πόλος που κείνται στον άξονα του κυλίνδρου, έχουν τις εικόνες τους στο άπειρο. Είναι σαφές ότι στην κυλινδρική προβολή, όλοι οι μεσημβρινοί που ορίζουν το γεωγραφικό πλάτος αποδίδονται ως ισαπέχουσες κατακόρυφες ευθείες γραμμές. Οι παράλληλοι κύκλοι που ορίζουν το γεωγραφικό πλάτος, αντιστοιχίζονται με οριζόντιες γραμμές των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις αυξάνουν με το γεωγραφικό πλάτος. Για να βρούμε τη σχέση του  $P$  με το  $P'$  θα εκφράσουμε τη θέση του  $P$  με το γεωγραφικό του μήκος και το

γεωγραφικό του πλάτος. Αν συμβολίσουμε το γεωγραφικό μήκος του  $P$  με  $\lambda$  το γεωγραφικό του πλάτος με  $\varphi$  και τις συντεταγμένες του  $P'$  με  $x, y$  θα έχουμε  $x = R \cdot \lambda$  και  $y = R \cdot \tan \varphi$ . Το πιο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό της κυλινδρικής προβολής είναι η υπερβολική μεγέθυνση στα μεγάλα γεωγραφικά πλάτη, τόσο στο βορρά όσο και στο νότο, που έχει σαν αποτέλεσμα την παραμόρφωση του σχήματος των ηπείρων. Αυτό οφείλεται στη παρουσία της εφαπτομένης της γωνίας  $\varphi$  στη 2<sup>η</sup> ισότητα. Η κυλινδρική προβολή, συγγέεται συχνά με την **προβολή Mercator** με την οποία απλώς μοιάζει επιφανειακά. Ωστόσο, με εξαίρεση το γεγονός ότι χρησιμοποιούν και οι 2 ορθογώνιο πλέγμα, οι 2 προβολές στηρίζονται σε ριζικά διαφορετικές αρχές.

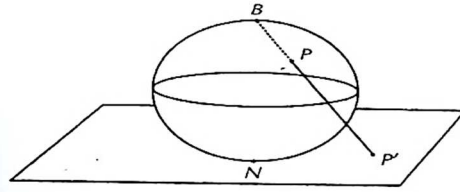


Σχήμα 42. Παγκόσμιος χάρτης σε κυλινδρική προβολή

#### 4.1 Στερεογραφική προβολή

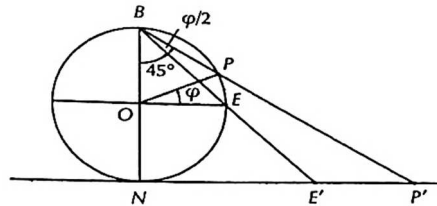
Μια 2<sup>η</sup> προβολή ήδη γνωστή στον Ίππαρχο τον 2<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ., είναι η **στερεογραφική προβολή**. Τοποθετούμε τη σφαίρα πάνω σε ένα επίπεδο φύλλο χαρτιού, έτσι ώστε το σημείο επαφής  $N$  να είναι ο νότιος πόλος. Συνδέουμε κατόπιν κάθε σημείο  $P$  της σφαίρας με τον βόρειο πόλο  $B$  και προεκτείνουμε την ευθεία μέχρι να συναντήσει το επίπεδο του χάρτη, στο σημείο  $P'$ . Το σημείο  $P'$  αποτελεί την εικόνα του  $P$  πάνω στη στερεογραφική προβολή. Η στερεογραφική προβολή, εμφανίζει όλους τους μεσημβρινούς ως ευθείες διερχόμενες από τον νότιο πόλο  $N$ , ενώ οι κύκλοι που αντιστοιχούν στα γεωγραφικά πλάτη εμφανίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το σημείο επαφής  $N$ . Ο Ισημερινός, προβάλλεται σε έναν κύκλο  $E$  τον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε μοναδιαίο.

Ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο, προβάλλεται στο εξωτερικό αυτού του κύκλου και το νότιο ημισφαίριο προβάλλεται στο εσωτερικό του. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ένα σημείο στον βόρειο πόλο, τόσο πιο απομακρυσμένη είναι η εικόνα του στον χάρτη. Ένα μόνο σημείο της σφαίρας δεν απεικονίζεται στον χάρτη. Πρόκειται για τον ίδιο τον Βόρειο πόλο, του οποίου η εικόνα βρίσκεται στο άπειρο. Έστω ότι η σφαίρα έχει μοναδιαία διάμετρο. Αυτό εξασφαλίζει ότι ο κύκλος  $e$  (η εικόνα του Ισημερινού στον χάρτη), θα έχει μοναδιαία ακτίνα. Έστω ένα σημείο  $P$  πάνω στη σφαίρα, με γεωγραφικό πλάτος  $\varphi$ . Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση της εικόνας του  $P'$  πάνω στον χάρτη.



Σχήμα 43. Στερεογραφική προβολή από το Βόρειο πόλο

Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε μια διατομή της σφαίρας και το σημείο E αντιπροσωπεύει ένα τυχαίο σημείο πάνω στον Ισημερινό. Έχουμε  $BN=1$ ,  $\angle OBE=45^\circ$ ,  $\angle EOP=\varphi$ , και  $\angle EBP=\varphi/2$ . Έτσι  $\angle OBP=(45^\circ+\varphi/2)$ . Άρα, το P' βρίσκεται σε απόσταση  $NP'=\tan(45^\circ+\varphi/2)$  από το σημείο N, δηλαδή από τον νότιο πόλο του χάρτη.



Σχήμα 44. Προσδιορισμός της εικόνας ενός σημείου μέσω της στερεογραφικής προβολής.

Η ισότητα  $NP' = \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$  οδηγεί σε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Έστω 2 σημεία

P, Q της σφαίρας με το ίδιο γεωγραφικό μήκος και αντίθετο γεωγραφικό πλάτος. Για να βρούμε τη σχετική θέση των εικόνων τους στον χάρτη, αντικαθιστούμε στην ισότητα  $NP' = \tan(45^\circ+\varphi/2)$  το  $\varphi$  με  $-\varphi$  και έχουμε

$$NQ' = \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{NP'}$$

Βλέπουμε ότι  $NP' \cdot NQ = 1$ . Δυο σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν μια τέτοια σχέση, λέγονται **αντίστροφα σημεία** ως προς τον μοναδιαίο κύκλο. Συνεπώς, στη στερεογραφική προβολή, 2 σημεία της γήινης σφαίρας με αντίθετα γεωγραφικά πλάτη, αντιστοιχούν σε 2 αντίστροφα μεταξύ τους σημεία του χάρτη. Αυτό, μας επιτρέπει να συνάγουμε όλες τις ιδιότητες της στερεογραφικής προβολής, από τη θεωρία της αντιστροφής. Για παράδειγμα, ένα από τα θεωρήματα της αντιστροφής λέει ότι η γωνία τομής 2 καμπύλων, παραμένει αμετάβλητη όταν κάθε μια από τις καμπύλες υποστεί αντιστροφή. Από αυτό προκύπτει ότι, η στερεογραφική προβολή διατηρεί τις διευθύνσεις, είναι δηλαδή **σύμμορφη**. Αυτό σημαίνει ότι, οι μικρές περιοχές της σφαίρας διατηρούν τη μορφή τους και στον επίπεδο χάρτη<sup>16</sup>.

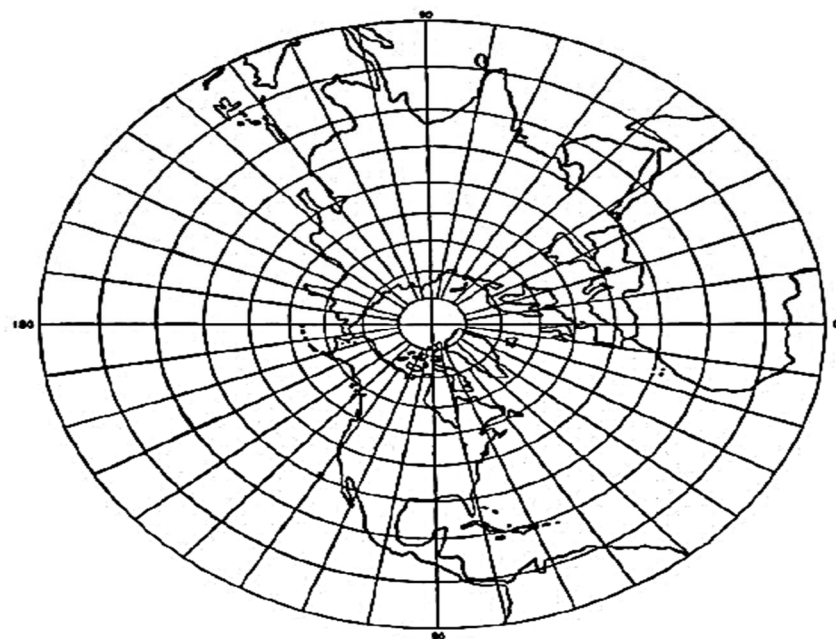
<sup>16</sup> Μια αναλυτική παρουσίαση της στερεογραφικής προβολής και της σχέσης της με την αντιστροφή, περιλαμβάνεται στο "To infinity and beyond: A cultural history of the infinite" (1991). New Jersey: Princeton University Press, pp. 95–98 and 239–245.

Για άλλες χαρτογραφικές προβολές Deetz, C.H. και Oscar Adams (1969). "Elements of map projection". New York: Greenwood Press.

Snyder, J.P. (1993). "Flattening the Earth: Two thousand years of map projections". Chicago: University of Chicago Press.

Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε την στερεογραφική προβολή του βορείου ημισφαιρίου. Η γήινη σφαίρα εφάπτεται του χάρτη, στον βόρειο πόλο αντί του νότιου πόλου. Είναι φανερό ότι, οι ήπειροι έχουν σχήμα παραπλήσιο με το πραγματικό τους σχήμα, όπως απεικονίζονται πάνω στην υδρόγειο. Νωρίτερα, όταν μιλούσαμε για τη σχέση της επιστήμης της χαρτογραφίας με τα μαθηματικά, ασχοληθήκαμε με τους χάρτες που έχουν κατασκευαστεί με βάση την **αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή** όπου καταγράφεται η πραγματική απόσταση και διεύθυνση από ένα σταθερό σημείο προς ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της σφαίρας. Ωστόσο, οι αποστάσεις και οι διευθύνσεις μεταξύ 2 οποιονδήποτε άλλων σημείων του χάρτη δεν διατηρούνται. Επομένως, η χρησιμότητα του για τη ναυσιπλοΐα είναι περιορισμένη. Ως εκ τούτου, χρειαζόμαστε έναν χάρτη που να δείχνει τη σωστή διεύθυνση, δηλαδή συμβιβαστή με την ένδειξη της πυξίδας, από οποιοδήποτε σημείο της γήινης σφαίρας προς οποιοδήποτε άλλο. Ως τα μέσα του 16<sup>ου</sup> αιώνα, τέτοιος χάρτης δεν υπήρχε.

Φανταστείτε ότι είστε ο κυβερνήτης ενός σκάφους που ετοιμάζεται να αποπλεύσει προς συγκεκριμένο προορισμό. Ρυθμίζετε την πυξίδα σας στην επιθυμητή κατεύθυνση ας πούμε 45° βορειοανατολικά και στη συνέχεια ακολουθείτε **απαρέγκλιτα** αυτή την ένδειξη, αγνοώντας, π.χ. οποιεσδήποτε γήινες μάζες θα μπορούσαν ενδεχομένως να βρεθούν στον δρόμο σας. Τι διαδρομή θα ακολουθήσετε;



Σχήμα 45. Στερεογραφική προβολή του Βόρειου πόλου

Για χρόνια πιστευόταν ότι μια πλεύση υπό σταθερή ένδειξη της πυξίδας, γνωστή και ως λοξοδρομική πλεύση ή λοξοδρομία<sup>17</sup> διαγράφει τόξο μέγιστου κύκλου. Εντούτοις ο Πορτογάλος **Pedro Nuenes ή Nonious** (1502–1578) απέδειξε ότι η λοξοδρομική πλεύση είναι στην πραγματικότητα μια ελικοειδής καμπύλη που πλησιάζει όλο και περισσότερο έναν από τους 2 πόλους, αλλά δεν τους φθάνει ποτέ.

Το πρόβλημα για τους χαρτογράφους του 16<sup>ου</sup> αιώνα, ήταν να επινοήσουν μια χαρτογραφική προβολή στην οποία όλες οι λοξοδρομικές πλεύσεις θα αντιστοιχούσαν σε ευθείες. Ένας τέτοιος χάρτης, θα έδινε στον ναυτικό τη δυνατότητα να συνδέει το σημείο εκκίνησης και το σημείο προορισμού με μια ευθεία γραμμή, να διοπτρεύει

<sup>17</sup> Από τις ελληνικές λέξεις λοξός και δρόμος. Ο όρος εισήχθη το 1624 από τον Ολλανδό επιστήμονα Willebrord vsn Roijen Snell (1581–1626).

δηλαδή τη γωνία αυτής της ευθείας με τη γραμμή του βορρά. Και με τη βοήθεια της πυξίδας, να ακολουθεί τούτη την πορεία στη θάλασσα. Ωστόσο, σε όλους τους χάρτες εκείνης της εποχής, μια πορεία χαραγμένη ως ευθεία στον χάρτη δεν αντιστοιχούσε στη λοξοδρομική πλεύση στη θάλασσα. Έτσι, η ναυσιπλοΐα ήταν μια εξαιρετικά περίπλοκη και επικίνδυνη υπόθεση, αφού συχνά τα πλοία δεν κατάφεραν να φτάσουν στον προορισμό τους και χάνονταν πολλές ζωές. Ένας Ολλανδός χαρτογράφος, έμελλε να δώσει τη λύση και να λύσει το πρόβλημα των ναυτικών.

## 4.2 Ο Mercator

Ο Gerardus Mercator, κατά γενική ομολογία ο πιο διάσημος χαρτογράφος στην ιστορία, γεννήθηκε με το όνομα **Gerhard Kremer** στο Ρουπελμοντε της Φλάνδρας (τοποθεσία που σήμερα ανήκει στο Βέλγιο, εκείνη την εποχή όμως αποτελούσε τμήμα της Ολλανδίας) στις 05.03.1512. Είκοσι χρόνια νωρίτερα, ο Χριστόφορος Κολόμβος είχε πραγματοποιήσει το ιστορικό του ταξίδι στον Νέο Κόσμο και οι νέες γεωγραφικές ανακαλύψεις είχαν εξάψει τη φαντασία του νεαρού Kremer. Γράφτηκε στο πανεπιστήμιο της Λουβέν το 1530 και αμέσως μετά την αποφοίτησή του έγινε ένας από τους κορυφαίους ευρωπαϊούς χαρτογράφους και κατασκευαστές οργάνων.

Όπως συνήθιζαν οι διανοούμενοι της εποχής, εκλατίνισε το όνομα του σε **Mercator** («έμπορος», μετάφραση της ολλανδικής λέξης *kramer*). Από τότε, έμεινε γνωστός με αυτό το όνομα. Η πολλά υποσχόμενη σταδιοδρομία του Mercator κινδύνεψε κατά το 1544, όταν συνελήφθη ως αιρετικός επειδή ακολουθούσε τον προτεσταντισμό μέσα σε μια καθολική χώρα. Λίγο έλειψε να χάσει τη ζωή του. Κατόπιν μετανάστευσε στο γειτονικό Ντούισμπουργκ (σήμερα στη Γερμανία), όπου εγκαταστάθηκε το 1552. Παρέμεινε εκεί μέχρι το τέλος της ζωής του<sup>18</sup>. Παρά τη φήμη του, δεν υπάρχει καμία πλήρης βιογραφία του Mercator στα αγγλικά.

Πριν από τον Mercator, οι χαρτογράφοι διακοσμούσαν τους χάρτες τους με εντυπωσιακές μυθολογικές φιγούρες και φανταστικές χώρες. Επρόκειτο περισσότερο για έργα τέχνης, παρά για αληθινές αναπαραστάσεις της Γης. Ο Mercator, υπήρξε ο 1<sup>ος</sup> που στήριξε τους χάρτες του αποκλειστικά στις πρόσφατες πληροφορίες των εξερευνητών και με αυτό τον τρόπο μετέτρεψε τη χαρτογραφία από τέχνη σε επιστήμη. Ήταν ακόμη ο 1<sup>ος</sup> που συμπεριέλαβε στον ίδιο τόμο, μια συλλογή από διαφορετικούς χάρτες, την οποία ονόμασε **άτλαντα** προς τιμήν του μυθικού ήρωα που βαστούσε στους ώμους του τη Γη και του οποίου η εικόνα διακοσμούσε το εξώφυλλο του βιβλίου του. Αυτό το έργο δημοσιεύθηκε σε 3 μέρη, το τελευταίο κυκλοφόρησε το 1595, έναν χρόνο μετά τον θάνατο του<sup>19</sup>. Το 1568, ο Mercator επινόησε μια νέα χαρτογραφική προβολή που θα κάλυπτε τις ανάγκες των ναυτικών και θα μετέτρεπε τη ναυσιπλοΐα από τυχοδιωκτική και επικίνδυνη περιπέτεια σε σοβαρή επιστήμη. Ξεκινώντας, έθεσε ως οδηγούς του 2 αρχές.

**Πρώτον**, ο χάρτης έπρεπε να αναπτυχθεί πάνω σε ορθογώνιο πλέγμα, με όλους τους κύκλους του γεωγραφικού πλάτους να παριστάνονται από ισομήκη οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στον ισημερινό και με όλους τους μεσημβρινούς να παριστάνονται από κατακόρυφες γραμμές, κάθετες στον ισημερινό.

<sup>18</sup> Liloyd A. Brown, (1979). “The story of maps”, New York: Dover, pp. 134–136 και 158–160.

Robert W. Karrow, (1993). “Mapmakers of the 16<sup>th</sup> century and their maps”, Chicago: Speculum Orbis Press, chapter 56

John Noble Wilford, (1981). “The mapmakers”, New York: Alfred Knopf, pp. 73–77

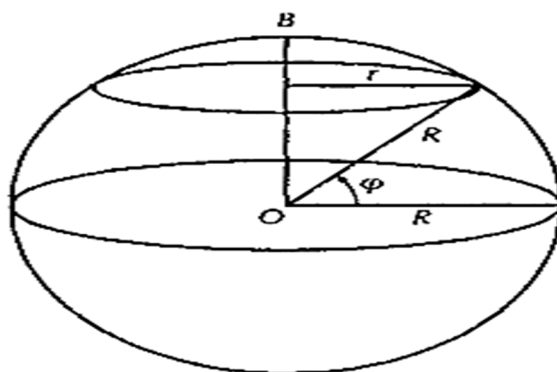
<sup>19</sup> Πρώτος είχε αυτή την ιδέα ένας σύγχρονος επιστήμονας του Mercator, ο Abraham Ortelius (1527–1598) του οποίου το έργο *Theatrum orbis terrarum* κυκλοφόρησε το 1570 στην Αμβέρσα και θεωρείται ο 1<sup>ος</sup> μοντέρνος άτλαντας. Ωστόσο η λέξη «άτλαντας» οφείλεται στον Mercator. Ο Mercator και ο Ortelius ήταν ανταγωνιστές στη δουλειά τους αλλά διατηρούσαν φιλικές σχέσεις.

**Δεύτερον**, ο χάρτης όφειλε να είναι σύμμορφος, διότι μόνο ένας τέτοιος χάρτης μπορούσε να διατηρεί την πραγματική διεύθυνση μεταξύ 2 σημείων της γήινης σφαίρας. Πάνω στη γήινη σφαίρα, το μήκος των παράλληλων κύκλων μειώνεται καθώς μεγαλώνει το γεωγραφικό πλάτος, μέχρις ότου συρρικνωθούν σε ένα μοναδικό σημείο στους πόλους. Αντίθετα, στους χάρτες του Mercator, οι παράλληλοι κύκλοι εμφανίζονται ως οριζόντιες ισομήκεις γραμμές. Επομένως, κάθε παράλληλος της γήινης σφαίρας παραμορφώνεται οριζόντια πάνω στον χάρτη (κατά μήκος της διεύθυνσης ανατολής δύσης), κατά έναν παράγοντα που εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του παραλλήλου.

Πίνακας 15. Τιμές της τέμνουσας ανά γεωγραφικό πλάτος

ΠΙΝΑΚΑΣ 15: Η  $\sec \varphi$  για επιλεγμένα γεωγραφικά πλάτη

| $\varphi$      | 0°   | 15°  | 30°  | 45°  | 60°  | 75°  | 80°  | 85°   | 87°   | 89°   | 90°      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|----------|
| $\sec \varphi$ | 1,00 | 1,04 | 1,15 | 1,41 | 2,00 | 3,86 | 5,76 | 11,47 | 19,11 | 57,30 | $\infty$ |



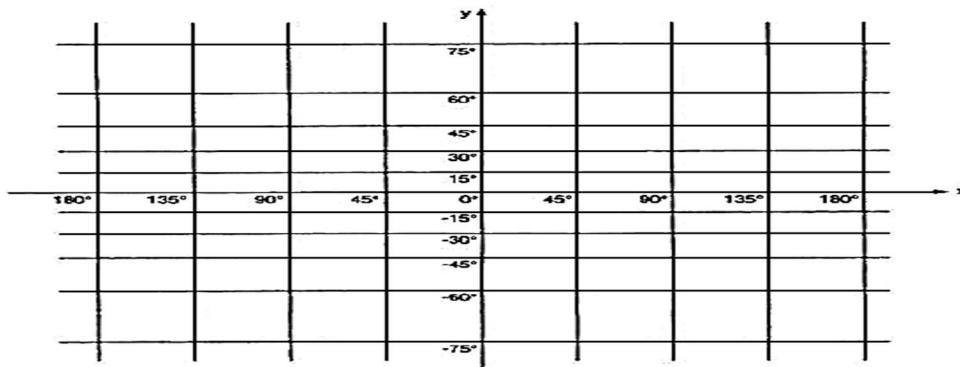
Σχήμα 46. Κύκλος γεωγραφικού πλάτους  $\varphi$  πάνω στην υδρόγειο σφαίρα.

Στο ανωτέρω σχήμα, βλέπουμε έναν κύκλο γεωγραφικού πλάτους  $\varphi$ . Η πραγματική περίμετρος του πάνω στη γήινη σφαίρα είναι  $2\pi r = 2\pi R \cdot \cos \varphi$ , ενώ στον χάρτη έχει μήκος  $2\pi R$ . Συνεπώς, ο συντελεστής παραμόρφωσης είναι  $\frac{2\pi R}{2\pi R \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$ . Ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής παραμόρφωσης είναι

συνάρτηση του  $\varphi$ . Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, όσο μεγαλύτερο είναι το γεωγραφικό πλάτος, τόσο μεγαλύτερος γίνεται και ο συντελεστής παραμόρφωσης.

Τώρα ο Mercator μπορούσε να αξιοποιήσει το ισχυρότερο πλεονέκτημά του. Για να είναι ο χάρτης σύμμορφος, η παραμόρφωση των παραλλήλων στη διεύθυνση ανατολής δύσης, πρέπει να συνοδεύεται από μια ανάλογη παραμόρφωση της απόστασης ανάμεσα στους παράλληλους. Αυτή η παραμόρφωση, στη διεύθυνση βορά – νότου πρέπει να αυξάνει καθώς κινούμαστε προς τα μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη.

Δηλαδή, οι μοίρες του γεωγραφικού πλάτους, που στη γήινη σφαίρα είναι ομαλά κατανεμημένες κατά μήκος του μεσημβρινού, στον χάρτη θα πρέπει να αυξάνουν σταδιακά. Σε αυτή ακριβώς τη διαπίστωση στηρίζεται η κατασκευή του χάρτη.



Σχήμα 47. Το πλέγμα στο χάρτη του Mercator

Ωστόσο για να μπορέσει να υλοποιήσει το σχέδιο του ο Mercator, όφειλε πρώτα να προσδιορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να παραμορφώνονται οι αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών παραλλήλων. Η ακριβής μέθοδος του για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης δεν είναι γνωστή και αποτελεί ακόμη και σήμερα αντικείμενο ερευνάς μεταξύ των ιστορικών της χαρτογραφίας<sup>20</sup>. Δεν έχει αφήσει καθόλου γραπτά αρχεία της μεθόδου του, με εξαίρεση την ακόλουθη σύντομη επεξήγηση του τυπώθηκε πάνω στο χάρτη του:

*Για την κατασκευή αυτής της αναπαράστασης του κόσμου, χρειάστηκε να απλώσουμε σε ένα επίπεδο την επιφάνεια της σφαίρας, κατά κάποιο τρόπο ώστε οι θέσεις που αντιστοιχούν στις διάφορες τοποθεσίες να έχουν τις σωστές αναλογίες μεταξύ τους, τόσο ως προς την πραγματική διεύθυνση όσο και ως προς την απόσταση<sup>21</sup>. Για αυτό τον σκοπό, χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε νέες αναλογίες και νέα διάταξη των μεσημβρινών, σε σχέση με τους παραλλήλους. Για τους λόγους αυτούς, αυξήσαμε σταδιακά τις μοίρες του γεωγραφικού πλάτους όσο πλησιάζαμε στους πόλους, κατά κάποιο τρόπο ανάλογο προς την επιμήκυνση των παραλλήλων, σε σχέση με τον ισημερινό<sup>22</sup>.*

Ακόμα και αυτή η ασαφής εξήγηση, καθιστά απολύτως σαφές ότι ο Mercator είχε πλήρη αντίληψη των μαθηματικών αρχών που αποτελούσαν το θεωρητικό υπόβαθρο της κατασκευής του χάρτη του. Έχοντας κατασκευάσει το κατάλληλο πλέγμα, του απέμενε τώρα να το αποπληρώσει, δηλαδή να τοποθετήσει πάνω στο πλέγμα τα περιγράμματα των ηπείρων, όπως ήταν γνωστές στην εποχή του.

Δημοσίευσε τον παγκόσμιο χάρτη του το 1569, με τίτλο *Νέα βελτιωμένη περιγραφή των χωρών τον κόσμο, τροποποιημένη και προοριζόμενη για χρήση των ναυτιλομένων*. Ήταν ένας τεράστιος χάρτης χωρισμένος σε 21 τμήματα με διαστάσεις 137×211 cm. Θεωρείται ένα από τα πιο πολύτιμα χαρτογραφικά αριστουργήματα όλων των εποχών: Σήμερα σώζονται μόνο 3 αντίγραφα του πρωτότυπου χάρτη<sup>23</sup>.

Ο Mercator πέθανε πλήρης ημερών στο Ντούισμπουργκ στις 02.12.1594, έχοντας ζήσει μια ζωή που του προσέφερε φήμη και πλούτο. Ωστόσο, το πιο σημαντικό επίτευγμα του, ο ομώνυμος χάρτης του, άργησε αρκετά να γίνει αποδεκτός από τη ναυτική κοινότητα, που δεν μπορούσε να κατανοήσει την υπερβολική παραμόρφωση

<sup>20</sup> John P. Snyder, "Flattening the Earth". Page 47.

<sup>21</sup> Σύντομα ο Mercator συνειδητοποίησε ότι δεν μπορούσε να ανταποκριθεί και στις 2 αυτές απαιτήσεις. Ο χάρτης του δεν μπορούσε να διατηρεί και τη διεύθυνση και τις αποστάσεις. Έτσι παραιτήθηκε από τις αποστάσεις.

<sup>22</sup> V. Frederick Rickey and Philip M. Tuchinsky (1980). "An application of geography to mathematics: History if the integral of the secant". In *Mathematics magazine*, volume 53, N° 3.

<sup>23</sup> Οι τοποθεσίες που φυλάσσονται περιλαμβάνονται στο R.V.Tooley, (1962). "Maps and map-makers", New York: Bonanza Books, page 31. Το αντίγραφο που αναφέρεται στο Breslau της Γερμανίας καταστράφηκε κατά τον Β' παγκόσμιο πόλεμο.

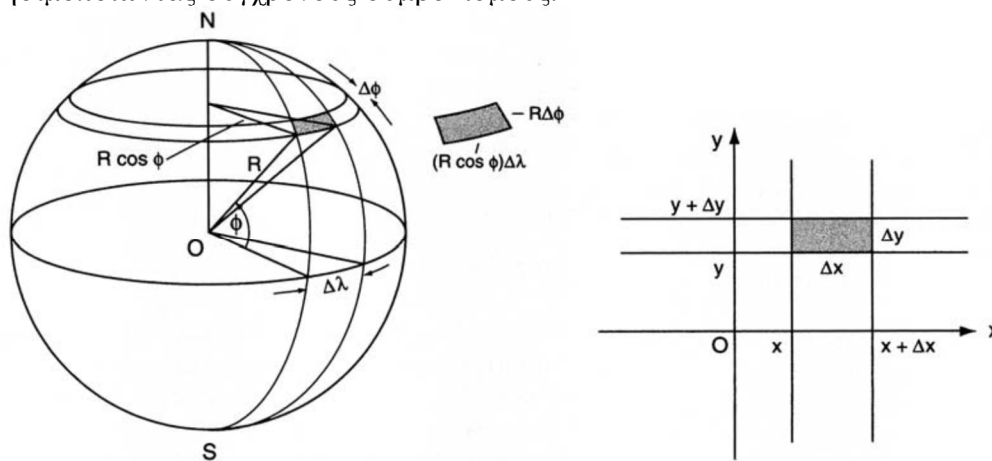
στο σχήμα των ηπείρων. Το γεγονός ότι ο Mercator δεν είχε εξηγήσει αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο είχε «σταδιακά αυξήσει» την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων, συνέβαλε σημαντικά στη δημιουργία σύγχυσης.

Ο **Edward Wright** (περίπου 1560–1615), Άγγλος μαθηματικός και κατασκευαστής οργάνων, υπήρξε ο 1<sup>ος</sup> ο οποίος έδωσε μια ακριβή αναφορά σχετικά με τις αρχές που αποτελούν το υπόβαθρο του χάρτη του Mercator.

Η **ράβδος του Ιακώβ** είναι ένα απλό χρήσιμο αστρονομικό όργανο, το οποίο επινοήθηκε τον 16<sup>ο</sup> αιώνα για χρήση των ναυτιλομένων. Αποτελείται από μια βαθμονομημένη ράβδο μήκους συνήθως 50 έως 80 cm, στην οποία ολισθαίνει κάθετα ένα μικρότερο στέλεχος. Χρησιμοποιείται για υψομετρήσεις άστρων, αλλά γενικότερα και για υπολογισμό γωνιών. Ο Wright ήταν εταίρος του Caius College στο Cambridge και υπήρξε δάσκαλος του Ερρίκου, πρίγκιπα της Ουαλίας, γιου του βασιλιά Ιακώβου Α'. Είναι περισσότερο γνωστός για τη μετάφραση στα αγγλικά από τα λατινικά του βιβλίου του Napier για τους λογάριθμους. Σε ένα έργο με τίτλο *Certaine Errors in Navigation* (Ορισμένα λάθη στην πλοήγηση), που εκδόθηκε στο Λονδίνο το 1599, έγραψε:

*Τα τμήματα των μεσημβρινών σε κάθε σημείο δεδομένου γεωγραφικού πλάτους, πρέπει να αυξάνουν με την ίδια αναλογία που αυξάνουν και οι τέμνουσες. Προσθέτοντας συνεχώς τις τέμνουσες, που αναλογούν στο γεωγραφικό πλάτος κάθε παραλλήλου, στο ήδη συσσωρευμένο άθροισμα όλων των προηγούμενων τεμνουσών [...] μπορούμε να καταρτίσουμε έναν πίνακα ο οποίος θα δείχνει πραγματικά τα σημεία γεωγραφικού πλάτους στους μεσημβρινούς του ναυτικού χάρτη<sup>24</sup>.*

Δηλαδή, ο Wright χρησιμοποίησε αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $\int_0^{\varphi} \sec \theta d\theta$ . Ας παρακολουθήσουμε τον τρόπο εργασίας του, χρησιμοποιώντας σύγχρονους συμβολισμούς.



Σχήμα 48. Σφαιρικό ορθογώνιο πάνω στη γήινη σφαίρα και η προβολή του στο χάρτη του Mercator.

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ένα μικρό σφαιρικό ορθογώνιο που ορίζεται από τους κύκλους γεωγραφικού μήκους  $\lambda$  και  $\lambda + \Delta\lambda$  και τους κύκλους γεωγραφικού

<sup>24</sup> V.F. Rickey και P.M. Tuchinsky, “Application of geography”. Ο πλήρης τίτλος του βιβλίου του Wright είναι «Ορισμένα σφάλματα στην πλοήγηση που προέρχονται είτε από συνηθισμένα λάθη στη κατασκευή, είτε από λανθασμένη ανάγνωση των θαλάσσιων χαρτών, πυξίδων, ράβδων του Ιακώβ και πινάκων των κλίσεων του Ήλιου και των απλανών αστερών, εντοπισμένα και διορθωμένα» (οι μακροσκελείς τίτλοι ήταν εκείνη την εποχή απαραίτητοι για να τραβήξουν το ενδιαφέρον των αναγνωστών.)

πλάτους  $\varphi$  και  $\varphi + \Delta\varphi$ , όπου τα  $\lambda, \varphi$  μετρούνται σε ακτίνια. Επειδή η επιλογή του 1<sup>ου</sup> μεσημβρινού είναι αυθαίρετη, στο σχήμα σημειώνουμε μόνο τη διαφορά  $\Delta\lambda$ .

Οι πλευρές του ορθογωνίου έχουν μήκη  $(R \cdot \cos\varphi)\Delta\lambda$  και  $R \cdot \Delta\varphi$ , αντίστοιχα.

Έστω ότι το σημείο  $P(\lambda, \varphi)$  της σφαίρας αντιστοιχεί στο σημείο  $P'(x, y)$  του χάρτη (όπου η  $y = 0$  αντιστοιχεί στον Ισημερινό). Τότε, το σφαιρικό ορθογώνιο θα απεικονισθεί σε ένα επίπεδο ορθογώνιο που καθορίζεται από παράλληλες στον άξονα των  $y$  με τετμημένες  $x$  και  $x + \Delta x$  και από παράλληλες στον άξονα των  $x$  με τεταγμένες  $y$  και  $y + \Delta y$ , όπου  $\Delta x = R \cdot \Delta\lambda$ . Τώρα για να ικανοποιήσουμε την απαίτηση να είναι ο χάρτης σύμμορφος, πρέπει τα 2 ορθογώνια να είναι όμοια (γεγονός το οποίο, εν προκειμένω, σημαίνει ότι η διεύθυνση από το  $P(\lambda, \varphi)$  προς το γειτονικό σημείο  $Q(\lambda + \Delta\lambda, \varphi + \Delta\varphi)$  πρέπει να είναι η ίδια με τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τις εικόνες τους στο χάρτη). Έτσι οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\frac{\Delta y}{R \cdot \Delta\lambda} = \frac{R \cdot \Delta\varphi}{R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\lambda} \Leftrightarrow \Delta y = (R \cdot \sec\varphi) \cdot \Delta\varphi$$

Με σημερινή ορολογία, η ανωτέρω ισότητα είναι μια **εξίσωση πεπερασμένων διαφορών**. Μπορεί να λυθεί αριθμητικά με μια βήμα προς βήμα διαδικασία. Θέτουμε  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  για  $i = 1, 2, 3, \dots$  και επιλέγουμε μια σταθερή αύξηση  $\Delta\varphi$ . Αρχίζοντας από τον Ισημερινό ( $y_0 = 0$ ) αυξάνουμε το  $\varphi$  κατά  $\Delta\varphi$ , υπολογίζουμε το  $\Delta y_1$  από την ανωτέρω ισότητα και μετά βρίσκουμε το  $y_1 = y_0 + \Delta y_1$ . Κατόπιν, αυξάνουμε και πάλι το  $\varphi$  κατά  $\Delta\varphi$  και βρίσκουμε το  $y_2 = y_1 + \Delta y_2$ . Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καλύψουμε όλο το φάσμα των γεωγραφικών πλατών που επιθυμούμε. Αυτή η **αριθμητική ολοκλήρωση** είναι επίπονη και χρονοβόρα, εκτός αν έχει κάποιος στη διάθεση του έναν ειδικά προγραμματισμένο υπολογιστή, κάτι που φυσικά δεν συνέβαινε με τον Wright. Παρόλα αυτά, κατόρθωσε να ολοκληρώσει το σχέδιο του, προσθέτοντας διαδοχικά τις τέμνουσες κατά διαστήματα ενός λεπτού της μοίρας<sup>25</sup>.

Δημοσίευσε τα αποτελέσματα του σε έναν πίνακα «μεσημβρινών μερών» για γεωγραφικά πλάτη από  $0^\circ$  μέχρι  $75^\circ$ . Έτσι, επιτέλους η μέθοδος κατασκευής του χάρτη του Mercator έγινε γνωστή. Βέβαια, σήμερα θα γράφαμε την εξίσωση  $\Delta y = (R \cdot \sec\varphi) \Delta\varphi$  ως διαφορική εξίσωση, θεωρώντας ότι τα  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta y$  γίνονται

απειροστά, ως:  $\frac{dy}{d\varphi} = R \cdot \sec\varphi \Leftrightarrow y = R \int_0^\varphi \sec\theta d\theta$  (χρησιμοποιήσαμε το  $\theta$  αντί του  $\varphi$

για να διακρίνουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, από το πάνω όριο ολοκλήρωσης).

Ωστόσο, το βιβλίο του Wright εκδόθηκε κάπου 70 έτη πριν ο Newton και ο Leibniz ανακαλύψουν τον λογισμό. Έτσι, ο Wright δεν είχε άλλη επιλογή πέρα από την αριθμητική ολοκλήρωση. Ως λόγιος ο Wright, έγραψε ένα βιβλίο που απευθυνόταν σε αναγνώστες με μαθηματική κατάρτιση. Ωστόσο, για τον απλό ναυτικό, αυτές οι θεωρητικές εξηγήσεις ήταν ελάχιστα χρήσιμες. Για αυτό τον λόγο, ο Wright επινόησε ένα απλό φυσικό μοντέλο που ήλπιζε ότι θα έδινε στον αμύητο αναγνώστη τη δυνατότητα να κατανοήσει την αρχή του χάρτη του Mercator:

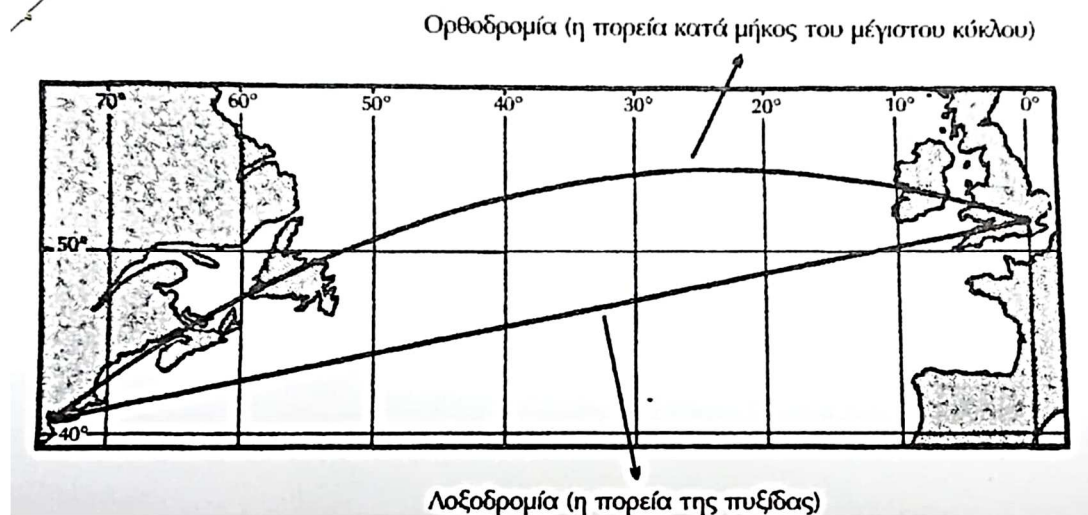
<sup>25</sup> John P. Snyder, "Flattening the Earth", page 48.

O Florian Cajori (1919), στο "A history of mathematics", 2<sup>nd</sup> edition, New York: Macmillan, page 189, ισχυρίζεται ότι ο Wright χρησιμοποίησε διαστήματα δεύτερων λεπτών της μοίρας. Ωστόσο, κάτι τέτοιο μοιάζει απίθανο αφού θα έπρεπε να κάνει  $3.600 \times 75 = 270.000$  προσθέσεις για να καλύψει τα γεωγραφικά πλάτη από  $0^\circ$  μέχρι  $75^\circ$ .

Ας φαντασθούμε ότι τυλίγουμε τη γήινη σφαίρα με έναν κύλινδρο που εφάπτεται αυτής, κατά μήκος του Ισημερινού. Στη συνέχεια, ας φαντασθούμε τη σφαίρα να «φουσκώνει σαν ασκός», έτσι που κάθε σημείο της επιφάνειάς της να κολλήσει στον κύλινδρο. Όταν ξετυλίξουμε τον κύλινδρο, έχουμε τον χάρτη του Mercator. Δυστυχώς για τους μελλοντικούς ιστορικούς, χωρίς να ευθύνεται ο Wright, αυτό το περιγραφικό μοντέλο έγινε η αιτία μιας επίμονης παρανόησης, ότι ο χάρτης του Mercator προκύπτει προβάλλοντας φωτεινές ακτίνες από το κέντρο της σφαίρας προς τον κύλινδρο (στην πραγματικότητα, έτσι προκύπτει η κυλινδρική προβολή που συζητήσαμε νωρίτερα). Από τεχνικής απόψεως, η «προβολή» του Mercator δεν είναι καν προβολή, τουλάχιστον με τη γεωμετρική έννοια του όρου.

Μπορεί να προκύψει μόνο από μαθηματικούς υπολογισμούς, που στη βάση τους χρησιμοποιούν **απειροστικές μεθόδους** και επομένως απειροστικό λογισμό. Ο ίδιος ο Mercator δεν χρησιμοποίησε ποτέ κύλινδρο και η «προβολή» του, με εξαίρεση κάποιες επιφανειακές ομοιότητες, δεν έχει απολύτως καμία σχέση με την κυλινδρική προβολή. Οι μύθοι, όμως, από τη στιγμή που θα γεννηθούν είναι πολύ δύσκολο να πεθάνουν και έτσι ακόμη και σήμερα βρίσκει κανείς λανθασμένες πληροφορίες σχετικά με το θέμα σε πολλά εγχειρίδια γεωγραφίας.

Περαιτέρω παρεξηγήσεις προκλήθηκαν από την υπερβολική παραμόρφωση των περιοχών που βρίσκονται σε μεγάλα γεωγραφικά πλάτη. Για παράδειγμα, η Γροιλανδία μοιάζει μεγαλύτερη από τη Νότια Αμερική, αν και στην πραγματικότητα η έκταση της 1<sup>ης</sup> είναι ίση μόλις με το  $\frac{1}{9}$  της έκτασης της 2<sup>ης</sup>. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει 2 σημεία του χάρτη, δεν παριστάνει τη συντομότερη μεταξύ τους διαδρομή πάνω στη γήινη σφαίρα (εκτός αν τα σημεία βρίσκονται και τα 2 στον Ισημερινό ή στον ίδιο μεσημβρινό).



Σχήμα 49. Νέα Υόρκη–Λονδίνο: Λοξοδρομία και τόξο μεγίστου κύκλου στο χάρτη του Mercator

Αυτές οι «ατέλειες», έγιναν συχνά αφορμή αρνητικής κριτικής για τον χάρτη του Mercator. Ο Mercator, είχε συνειδητοποιήσει ότι στον ίδιο χάρτη δεν είναι δυνατό να διατηρούνται συγχρόνως απόσταση, μορφή και διεύθυνση. Έχοντας κατά νου τις ανάγκες των πλοηγών, επέλεξε να θυσιάσει την απόσταση και τη μορφή, για να διατηρήσει τη διεύθυνση. Το βιβλίο του Wright κυκλοφόρησε το **1599**, 30 έτη μετά από τη δημοσίευση του νέου παγκόσμιου χάρτη από τον Mercator.

Σταδιακά, η ναυτική οικογένεια άρχισε να εκτιμά τη μεγάλη χρησιμότητα του για τους πλοηγούς και τελικά έγινε ο επίσημος χάρτης της ναυσιπλοΐας, μια θέση που κρατά μέχρι σήμερα. Όταν η NASA άρχισε το πρόγραμμα εξερεύνησης του

Διαστήματος, κατά τη δεκαετία του 1960, ένας γιγάντιος μερκατορικός χάρτης, πάνω στον οποίο σημειώνονταν οι τροχιές των δορυφόρων, τοποθετήθηκε στο κέντρο επιχειρήσεων, στο Χιούστον του Τέξας. Εξάλλου, οι πρώτοι χάρτες των δορυφόρων του Δία και του Κρόνου, βασισμένοι στις κοντινές φωτογραφίες που έστειλαν τα διαστημόπλοια Pioneer και Voyager, σχεδιάσθηκαν σύμφωνα με τη δική του μέθοδο.

### 4.3 Οι λογάριθμοι στην κατασκευή χαρτών

Τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, το ενδιαφέρον στράφηκε προς τα μαθηματικά.

Το 1614 ο Σκωτσέζος θεολόγος και μαθηματικός **John Napier** (1550–1617), δημοσιοποίησε τους λογαρίθμους που είχε επινοήσει. Επρόκειτο για τη σημαντικότερη συμβολή στα υπολογιστικά μαθηματικά από την εποχή του Μεσαίωνα, όταν εισήχθη στην Ευρώπη το ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης<sup>26</sup>.

Το 1620 ο **Edmund Gunter** (1581–1626), Άγγλος μαθηματικός και κληρικός, δημοσίευσε έναν πίνακα με λογαριθμικές εφραπτόμενες.

Γύρω στα 1645 ο **Henry Bond**, καθηγητής μαθηματικών και αυθεντία στην πλοήγηση, συνέκρινε αυτό τον πίνακα με τον πίνακα των μεσημβρινών μερών του Wright και με έκπληξη διαπίστωσε ότι οι 2 πίνακες ταίριαζαν απόλυτα, εφόσον οι ενδείξεις στον πίνακα του Gunter γράφονταν με τη μορφή  $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ . Διατύπωσε την

εικασία ότι  $\int_0^{\varphi} \sec t \, dt = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$  δεν ήταν όμως σε θέση να την αποδείξει.

Σύντομα, το πρόβλημα του έγινε ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα της εποχής του. Προσπάθησαν να το λύσουν ανεπιτυχώς ο **John Collins**, ο **Nicolaus Mercator** (καμιά σχέση με τον Gerhard), ο **Edmond Halley** (γνωστός από τον φερώνυμο κομήτη) και πολλοί άλλοι, όλοι σύγχρονοι του Newton και βασικοί συντελεστές των εξελίξεων που οδήγησαν στην ανακάλυψη του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

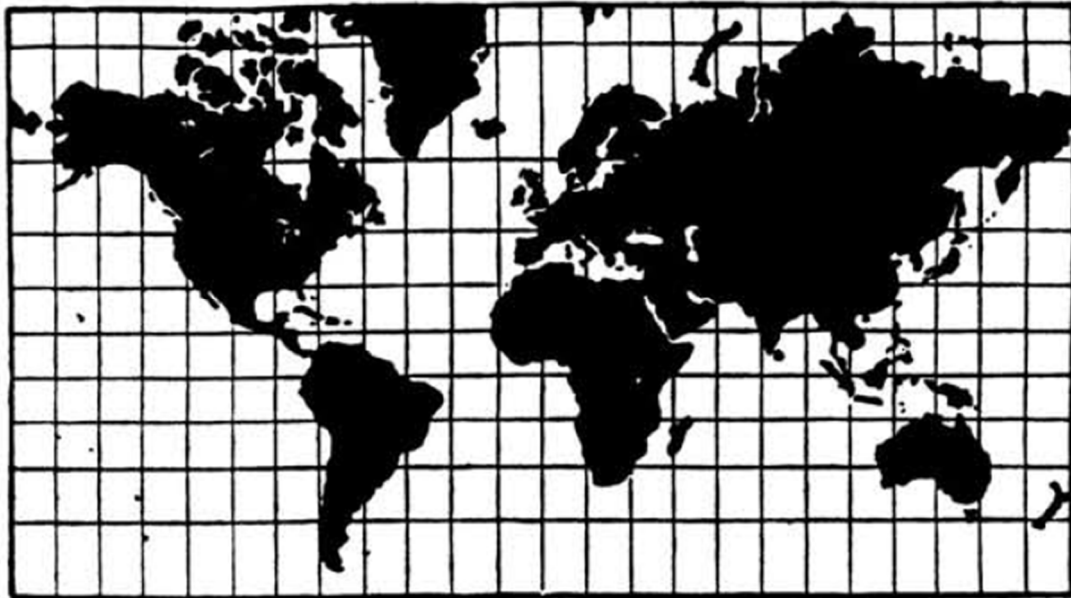
Το 1668, ο **James Gregory** κατάφερε να αποδείξει την εικασία τού Bond. Ωστόσο, η απόδειξη του ήταν τόσο επίπονη, που ο Halley τη χαρακτήρισε γεμάτη «περιπλοκές».

Το 1670 ο **Isaac Barrow** (1630–1677), προκάτοχος του Newton στη λουκασιανή έδρα μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, έδωσε μια «κατανοητή» απόδειξη της εικασίας τού Bond. Οι προσπάθειες του, δείχνουν ότι εφάρμοσε 1<sup>ος</sup> την τεχνική της διάσπασης σε απλά κλάσματα, που είναι τόσο αποτελεσματική για τον υπολογισμό των αόριστων ολοκληρωμάτων.

Είμαστε πια σε θέση να γράψουμε τις συντεταγμένες  $(x, y)$  ενός σημείου  $P'$  στον χάρτη του Mercator, ως συνάρτηση του γεωγραφικού μήκους  $x$  και του γεωγραφικού πλάτους  $\varphi$  του αντίστοιχου σημείου  $P$  της γήινης σφαίρας. Η εξίσωση των διαφορών  $\Delta x = R \cdot \Delta \lambda$  που είδαμε πριν, έχει την προφανή λύση  $x = R \cdot \lambda$  και το ολοκλήρωμα

<sup>26</sup> “The story of a number”, (1994). Princeton, New Jersey: Princeton University Press, chapters 1 and 2.

στην ισότητα  $y = R \int_0^{\varphi} \sec \theta d\theta$  ισούται με  $\ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$  άρα<sup>27</sup>  $x = R \cdot \lambda$ ,  
 $y = R \cdot \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$ .



Σχήμα 50. Η γη στον χάρτη του Mercator.

Στο παραπάνω σχήμα, βλέπουμε τον πλανήτη μας όπως τον παριστάνει ο χάρτης του Mercator. Λόγω της υπερβολικής μεγέθυνσης κατά μήκος της γραμμής βορράς – νότος στα μεγάλα γεωγραφικά πλάτη, ο χάρτης περιορίζεται στα πλάτη από 75° βόρεια μέχρι 60° νότια. Παρατηρούμε ότι η παράσταση  $\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$  μέσα στον

λογάριθμο της ισότητας  $y = R \cdot \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$  είναι η ίδια με αυτή

$\frac{\Delta y}{R \cdot \Delta \lambda} = \frac{R \cdot \Delta \varphi}{R \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \lambda}$  που σχετίζεται με τη στερεογραφική προβολή. Αυτό δεν συμβαίνει τυχαία. Ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα των μαθηματικών του 18<sup>ου</sup> αιώνα, ήταν η επέκταση των συνηθισμένων συναρτήσεων  $\sin x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$  στο σύνολο των φανταστικών αριθμών και των μιγαδικών αριθμών. Αυτή η εξέλιξη, άρχισε με τον Euler και έφθασε στην αποκορύφωση της κατά τον 19<sup>ο</sup> αιώνα με την ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων μιγαδικών μεταβλητών. Η επέκταση αυτή, μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε την προβολή του Mercator ως μια σύμμορφη απεικόνιση (από μαθηματική και από γεωγραφική σκοπιά) της στερεογραφικής προβολής, μέσω της συνάρτησης  $w = \ln z$ , όπου  $w, z$  μιγαδικές μεταβλητές.

<sup>27</sup> Μια ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης  $\frac{\Delta y}{R \cdot \Delta \lambda} = \frac{R \cdot \Delta \varphi}{R \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \lambda}$  είναι  $y = R \cdot \ln (\sec \varphi + \tan \varphi)$



Σχήμα 51. Αγαλμα και γκραβούρα του Mercator (γεννήθηκε πριν από 513 έτη)



Σχήμα 52. Χάρτης της Φλανδρίας



Σχήμα 53. Χάρτης της Ελλάδας



Σχήμα 54. Την 503<sup>η</sup> επέτειο γέννησης του Mercator τίμησε το 2015 μέσα από ένα Doodle η Google

MERCATOR PROJECTION VS THE TRUE SIZE OF COUNTRIES



Σχήμα 55. Έξυπνος χάρτης που δείχνει το πραγματικό μέγεθος των χωρών