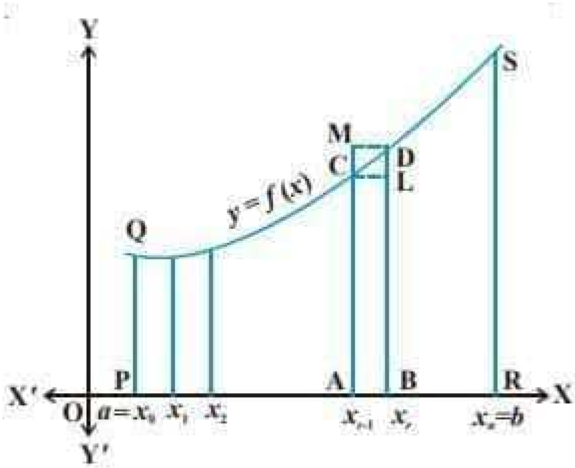
Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Το ορισμένο ολοκλήρωμα στη μηχανική



Σπουδαστής: Μητροπάνος Ερρίκος (ΑΜ **9258)**

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 14.11.2024
Ημερομηνία κατάθεσης: ….02.2026
Ημερομηνία εξέτασης: 02.03.2026

Α/Α	**Ονοματεπώνυμο**	**Χαρακτηρισμός**	**Υπογραφή**
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (PhD) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (PhD) Καθηγήτρια	Άριστα 10	
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (Msc) ΕΔΙΠ	Άριστα 10	
Τελικός χαρακτηρισμός		Άριστα 10	

Λέξεις κλειδιά

Ροπή (αδρανείας, στατική, επίπεδης επιφάνειας, όγκου ενός στερεού), ακτίνα της ροπής αδρανείας, στερεό εκ περιστροφής, ενέργεια–έργο δύναμης (σταθερής, μεταβαλλόμενης), θεωρήματα του Πάππου (1^o, 2^o), κέντρο (βάρους, μάζας), πίεση των ρευστών, νόμος του Hooke, συντεταγμένες (καρτεσιανές, πολικές)

Περίληψη

Το ορισμένο ολοκλήρωμα βρίσκει πολλές χρήσεις στη μηχανική (ροπή αδρανείας, στατική ροπή, υπολογισμός κέντρου βάρους, όγκου και επιφάνειας στερεού σώματος εκ περιστροφής), διότι χρησιμοποιείται στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων, όπως η κίνηση, η ενέργεια, οι δυνάμεις που εξαρτώνται από τον χρόνο, ή από την απόσταση ή από άλλες μεταβλητές. Ενδεικτικά, αναφέρονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

- Υπολογισμός του έργου–ενέργειας

Το έργο (ή ενέργεια) που παράγεται ή που απαιτείται για τη μετακίνηση ενός σώματος , είναι $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$ όπου:

W το παραγόμενο ή καταναλισκόμενο έργο (ή ενέργεια),

$F(x)$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα, ως συνάρτηση της θέσης,

x_1, x_2 οι αρχική και η τελική θέση του σώματος.

- Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος, μπορεί να υπολογιστεί από την ολική ενέργεια του συστήματος σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του, μέσω ολοκληρωμάτων. Μπορώ να χρησιμοποιήσω ορισμένο ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό του έργου που απαιτείται για να επιταχυνθεί ένα αντικείμενο.

- Συνισταμένη των δυνάμεων

Όταν η δύναμη κατανέμεται σε μια επιφάνεια ή σε μια γραμμή, όπως στην περίπτωση μιας ράβδου που της ασκείται εξωτερική δύναμη κατά μήκος του άξονα της, τότε για τον υπολογισμό των ροπών απαιτείται χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος

- Ταχύτητα και θέση σώματος

Η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος που επιταχύνεται (ή επιβραδύνεται), υπολογίζονται από τα $u(t) = \int a(t)\, dt$ και $x(t) = \int u(t)\, dt$ όπου:

$u(t)$ η ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου

$a(t)$ η επιτάχυνση, ως συνάρτηση του χρόνου

$x(t)$ η θέση, ως συνάρτηση του χρόνου.

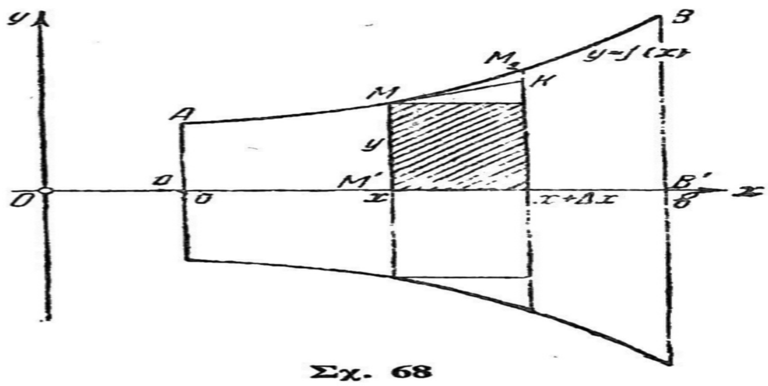
- Ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση

Αν η ταχύτητα ενός σώματος δεν είναι σταθερή, τότε η απόσταση d που διανύει, υπολογίζεται από το $d = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, dt$

Περιεχόμενα

1. Γενική μέθοδος εφαρμογής του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω ότι πρέπει να υπολογίσω το σταθερό μέγεθος Q που συσχετίζεται με το $[\alpha, \beta]$ (είναι μία προσθετική συνάρτηση του διαστήματος), δηλαδή να υπολογίσω την τιμή του Q που αντιστοιχεί σε όλο το $[\alpha, \beta]$. Π.χ. έστω η καμπύλη ΑΒ του παρακάτω σχήματος.



Σχ. 68

Το μήκος L της ΑΒ, το εμβαδό S του καμπυλόγραμμου τραπεζίου $AA'B'B$ και ο όγκος V, του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του τραπεζίου γύρω απ' τον άξονα Ox, είναι μεγέθη της παραπάνω μορφής. Θα εξετάσω το στοιχειώδες ΔQ που αντιστοιχεί στο στοιχειώδες διάστημα $[x, x+\Delta x]$ Προσπαθώ να υπολογίσω κατά προσέγγιση το ΔQ, εκφράζοντας το στη μορφή $q(x)\cdot\Delta x$, δηλαδή $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$ Συνήθως, η $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$ γράφετε και ως $Q=\int_\alpha^\beta q(x)dx$ Μπορώ να αντικαταστήσω το στοιχειώδες τόξο $\overparen{MM_1}$ με το τμήμα της εφαπτομένης ΜΚ, έτσι ώστε $\Delta L=\sqrt{1+(y')^2}\Delta x=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x$

Μπορώ να το αντικαταστήσω το στοιχειώδες εμβαδό ΔS, με το ορθογώνιο που έχει εμβαδό $\Delta S=y\cdot\Delta x=f(x)\cdot\Delta x$ Το ΔV μπορώ να το εκφράσω ως $\Delta V=\pi y^2\Delta x=\pi[f(x)]^2\Delta x$ Στα παραπάνω, το σφάλμα που προκύπτει από τις αντικαταστάσεις, είναι απειροστό ανωτέρας τάξης ως προς το Δx

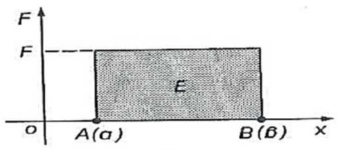
Το ότι ο τύπος $Q=\int_\alpha^\beta q(x)dx$ εκφράζει με ακρίβεια το μέγεθος Q μπορώ να το εξηγήσω έως εξής: Διαμερίζω το $[\alpha,\beta]$ με τα σημεία $x_1, x_2 ..., x_{n-1}$ σε στοιχειώδη διαστήματα $[\alpha, x_1], [x_1, x_2], .., [x_i, x_i+1], ..., [x_{n-1}, \beta]$ Επειδή σε κάθε διάστημα $[x_i, x_i+1]$ ή $[x_1, x_i+\Delta x_i]$ αντιστοιχεί ένα στοιχειώδες μέρος του μεγέθους Q που κατά προσέγγιση, θα εκφρασθεί με το άθροισμα $Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i$ Άρα, το όριο του παραπάνω αθροίσματος, δίνει το $\int_\alpha^\beta q(x)dx$ Έτσι, όλο το πρόβλημα κάθε φορά συνίσταται στην εύρεση του προσεγγιστικού τύπου $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$

2. Έργο παραγόμενο από σταθερή δύναμη

Αν η δύναμη F είναι σταθερή, τότε το έργο W που παράγει όταν εφαρμόζεται σε υλικό σημείο και έχει τη διεύθυνση της κίνησης μετακινώντας το σημείο σε απόσταση S από την αρχική θέση, σε ευθύγραμμης τροχιάς, είναι $W = F \cdot s$

Έστω υλικό σημείο που κινείται στον άξονα xx'. Θεωρώ ως θετική φορά του άξονα, τη φορά κίνησης του σημείου. Η θέση Α του σημείου στον άξονα, καθορίζεται από την απόσταση του από την αρχή Ο. Αν στο σημείο ασκείται δύναμη της οποίας το μέτρο εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου, τότε η συνάρτηση που δίνει το μέτρο της δύναμης είναι $y = F(x)$ όπου x η απόσταση του κινητού από την αρχή Ο. Για τον υπολογισμό του έργου που παράγει η δύναμη, όταν μετατοπίζει το υλικό σημείο στον άξονα από τη θέση Α(α) στη θέση Β(β), διακρίνω τις περιπτώσεις:

Α. Αν η δύναμη έχει τη φορά της κίνησης και είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή σταθερή, τότε η συνάρτηση της δύναμης είναι y=F(σταθερή) και το ζητούμενο έργο W είναι $W = F(\beta - \alpha) = F \cdot s$ Το έργο, δίνεται αριθμητικά από το εμβαδό του χωρίου Ε και είναι $E = W = \int_a^{\beta} F\ dx = F\int_a^{\beta} dx = F(\beta - \alpha)$



Β. Αν η δύναμη έχει φορά που σχηματίζει γωνία θ με τη φορά της κίνησης και είναι ανεξάρτητη του x δηλαδή είναι σταθερή, τότε αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη προς τη διεύθυνση της κίνησης, μέτρου $F_x = F \cdot cos\theta$. Η κάθετη συνιστώσα δεν παράγει έργο, ενώ η επιτρόχια συνιστώσα είναι σταθερή κατά μέτρο, με διεύθυνση τη διεύθυνση της κίνησης, άρα το παραγόμενο έργο είναι

$$W = \int_a^{\beta} F \cdot cos\theta\ dx = F \cdot cos\theta \int_a^{\beta} dx = F \cdot cos\theta(\beta - \alpha) = F \cdot cos\theta \cdot s = F_x \cdot s$$

Το πρόσημο του έργου, καθορίζεται από το συνημίτονα της γωνίας θ.

- Αν $0^0 < \theta < 90^0$ τότε το έργο είναι θετικό.
- Αν $\theta = 90^0$ τότε το έργο είναι μηδέν.
- Αν $90^0 < \theta < 180^0$ τότε το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή καταναλισκόμενο.

Γ. Αν η δύναμη έχει τη φορά της κίνησης και εξαρτάται από το x, τότε η συνάρτηση της δύναμης είναι η συνεχής συνάρτηση $y = F(x)$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Για τον υπολογισμό του ζητούμενου έργου, ισοδιαμερίζω το $[\alpha, \beta]$ με τα διαιρετικά σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{\nu-1} < x_{\nu} = \beta$ και το πλάτος του κάθε υποδιαστήματος είναι $\Delta_x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$ και $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{\beta - \alpha}{\nu} = 0$

Έτσι, μπορώ να δεχτώ ότι σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_{\nu-1}, x_{\nu}]$ η F διατηρεί σταθερή τιμή, έστω την τιμή που έχει στο αριστερό άκρο. Άρα, το έργο που παράγει η δύναμη από x_0 έως x_1 είναι

$$W_1 = F(x_0)(x_1 - x_0) = F(x_0) \cdot \frac{\beta - \alpha}{\nu} = F(x_0) \cdot \Delta_x$$

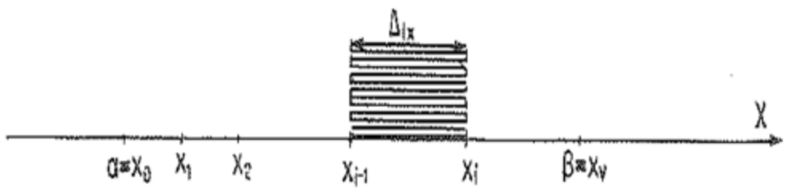
Όμοια, από x_1 ως x_2 είναι $W_2 = F(x_1) \cdot \Delta_x$ και τελικά από $x_{\nu-1}$ ως x_ν είναι $W_\nu = F(x_{\nu-1}) \cdot \Delta_x$ Έτσι, το παραγόμενο έργο στο $[\alpha, \beta]$ είναι $W = \lim\limits_{\Delta_x \to +\infty} \left[F(x_0) \cdot \Delta_x + F(x_1) \cdot \Delta_x + \ldots + F(x_{\nu-1}) \cdot \Delta_x \right]$ όπου $\Delta_x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$

Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για το έργο της F στο $[\alpha, \beta]$, είναι $W = \int_a^\beta F(x)\, dx$

3. Έργο παραγόμενο από μεταβαλλόμενη δύναμη

Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται σε κάθε θέση x του υλικού σημείου, τότε προκειμένου να βρω το έργο που παράγεται, όταν εφαρμόζεται στο υλικό σημείο και μετακινεί αυτό από τη θέση $x = a$ στη θέση $x = \beta$, εργάζομαι ως εξής: Αφού η δύναμη μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, είναι συνάρτηση της τετμημένης x (θεωρώ τον δρόμο ως άξονα xx'), δηλαδή είναι $F(x)$ Εστω ότι είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Κάνω μία διαμέριση Δ_ν, του $[\alpha, \beta]$, την $\Delta_\nu = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta\}$:

Αν $\lambda \to 0$ και σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης θεωρηθεί η δύναμη ως σταθερή, τότε η δύναμη στο τυχαίο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ μήκους $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ είναι $F(\xi_i)$, όπου $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Συνεπώς, παράγει ένα στοιχειώδες έργο από x_{i-1} μέχρι x_i που είναι $w_i = F(\xi_i)\Delta_i x$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$



Αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών έργων, που παρέχει μια 1η προσέγγιση του όλου έργου που παράγεται από την F(X) στο $[\alpha, \beta]$ αυτό είναι

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i F(\xi_i)\Delta_i x$$

Παίρνοντας το όριο της $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i F(\xi_i)\Delta_i x$ με $\lambda \to 0$ έχω, αφού υπέθεσα την $F(x)$ συνεχή, ότι $W = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Wi = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi i)\Delta ix = \int_\alpha^\beta F(x)dx$ ή $W = \int_\alpha^\beta F(x)dx$

Η $W = \int_a^\beta F(x)\, dx$ δίνει το έργο που παράγει η μεταβλητή δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα υλικό σημείο και το μετακινεί, σε ευθύγραμμη τροχιά, από α μέχρι β .

4. Ροπές επίπεδων χωρίων και στερεών εκ περιστροφής–κέντρα βάρους

Η μάζα ενός στερεού σώματος, είναι το μέτρο της ποσότητας της ύλης από την οποία αυτό αποτελείται, ενώ ο όγκος του είναι το μέτρο του χώρου που καταλαμβάνει στο διάστημα. Αν η μάζα ανά μονάδα όγκου, είναι ίδια σε όλη την έκταση του σώματος, τότε αυτό λέγεται **ομογενές**. Θα θεωρώ την πυκνότητα ίση με τη μονάδα. Συνηθίζεται (σε μηχανική και φυσική) να θεωρώ μια δεδομένη μάζα συγκεντρωμένη σε ένα υλικό σημείο, που λέγεται κέντρο μάζας (ή κέντρο βαρύτητας). Για ένα ομογενές σώμα, αυτό το σημείο συμπίπτει με το κέντρο βάρους του (ή το γεωμετρικό του κέντρο). Π.χ. το κέντρο μάζας μιας λαστιχένιας μπάλας, συμπίπτει με το κέντρο βάρους (κέντρο) της που έχει ως γεωμετρικό στερεό (σφαίρα). Το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου φύλλου χαρτιού, κείται στη μέση απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών, αλλά μπορεί να θεωρηθεί τοποθετημένο σε μία εκ των επιφανειών του, στην τομή των διαγώνιων τους. Άρα, το κέντρο μάζας ενός λεπτού ελάσματος ταυτίζεται με το κέντρο βάρους του, που θεωρείται ως επίπεδη επιφάνεια, το δε εμβαδό της επιφάνειας ταυτίζεται αριθμητικά με τη μάζα του ελάσματος.

4.1 Ροπή μίας επίπεδης επιφάνειας

Ονομάζω ροπή M_Γ μίας επίπεδης επιφάνειας, ως προς μια γραμμή Γ, το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί την απόσταση d του κέντρου βάρους (κέντρο μάζας) από τη γραμμή Γ. Η ροπή μίας σύνθετης επιφάνειας, ως προς τη Γ, είναι το άθροισμα των ροπών των ανεξαρτήτων επιπέδων, ως προς τη γραμμή Γ.

Αν η επιφάνεια αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy, τότε ροπή M_x (αντίστοιχα M_y) της επιφάνειας ως προς τους άξονες xx' (αντίστοιχα yy') ονομάζω το γινόμενο του εμβαδού αυτής, επί την απόσταση του κέντρου βάρους της από τους άξονες xx' (αντίστοιχα yy'), αντίστοιχα. Αν μια επίπεδη επιφάνεια έχει εμβαδό Ε και κέντρο βάρους $K\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ με ροπές M_X, M_y, ως προς τους άξονες xx', yy' αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό είναι $E\cdot\overline{X}=M_y, E\cdot\overline{Y}=M_x$

Έστω ότι, το κέντρο βάρους ενός ορθογωνίου είναι το σημείο τομής των διαγώνιων του (το κέντρο αυτού). Μπορώ να υπολογίσω το κέντρο βάρους (συντεταγμένες) ενός επιπέδου χωρίου Ε που ορίζεται από συνάρτηση $y=f\left(x\right)$ ορισμένη και συνεχή στο $\left[a,\ \beta\right]$, από τις ευθείες $x=a,\ x=\beta$ και από τον άξονα xx' με $f\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in\left[a,\ \beta\right]$

Έστω μια τυχαία διαμέριση Δ_ν του $\left[a,\ \beta\right]$ η $\Delta_\nu=\left\{\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta\right\}$ και $\left[x_{i-1},\ x_i\right]$ ένα τυχαίο υποδιάστημα της και σημείο $\xi_i\in\left(x_{i-1},\ x_i\right)$ το μέσο του.

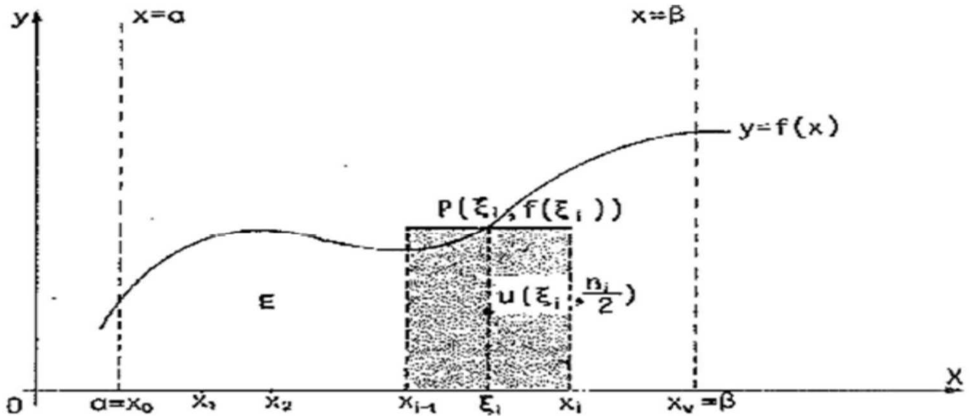
Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο βάσης $x_{i-1}=\Delta_i x$ και ύψους $n_i=f\left(\xi_i\right)$ Για το εμβαδό του στοιχειώδους αυτού ορθογωνίου, είναι $E_i=n_i\Delta_i x$ με $i=1,2,\ldots,\nu$ και για τη ροπή του ως προς τον άξονα xx', είναι $M_i x=\dfrac{n_i}{2}n_i\Delta_i x=\dfrac{1}{2}\left[f(\xi_i)\right]^2\Delta_i x$, $i=1,2,\ldots,\nu$

Αν σχηματίσω τα αθροίσματα Riemann, είναι $\sum\limits_{i=1}^{\nu}M_i x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\nu}\left[f(\xi_i)\right]^2\Delta_i x$

Επειδή υπέθεσα ότι η f είναι συνεχής $\forall x\in[\alpha,\beta]$, το όριο της υπάρχει και ισχύει ότι

$$M_x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}M_i x=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^2\Delta_i x=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(x)]^2\,dx \text{ ή } M_x=\frac{1}{2}\int_\beta^\alpha[f(x)]^2\,dx$$

Επειδή $E=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ η $E\cdot\overline{Y}=M_x$ λόγω της $M_x=\dfrac{1}{2}\int_\beta^\alpha[f(x)]^2\,dx$ γίνεται



$\overline{\mathrm{Y}}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2 dx$ ή $\overline{\mathrm{Y}} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$ Αν λάβω τη ροπή του $E\cdot\overline{Y} = M_x$,

ως προς τον άξονα yy', είναι $M_i y = \xi_i n_i \Delta_i x = \xi_i f(\xi_i)\Delta_i x$, $i = 1,2,\ldots,\nu$ και από τα αθροίσματα Riemann, προκύπτει ότι $M_y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu} M_i y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ ή

$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ οπότε η $E\cdot\overline{X} = M_y$ λόγω της $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ γράφεται

$\overline{X}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ ή $\overline{X} = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$

4.2 Ροπή του όγκου ενός στερεού σώματος

Ονομάζω ροπή του όγκου V ενός στερεού σώματος, που παράγεται από την περιστροφή μίας επίπεδης επιφάνειας, περί τον άξονα των συντεταγμένων, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων, κάθετα στους άξονες, το γινόμενο του όγκου V επί την κάθετη απόσταση d του κέντρου βάρους της επιφάνειας, από το κάθετο επίπεδο στους άξονες. Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον άξονα xx', τότε το κέντρο βάρους της $K(\overline{X},\overline{Y})$ βρίσκεται στον άξονα xx'

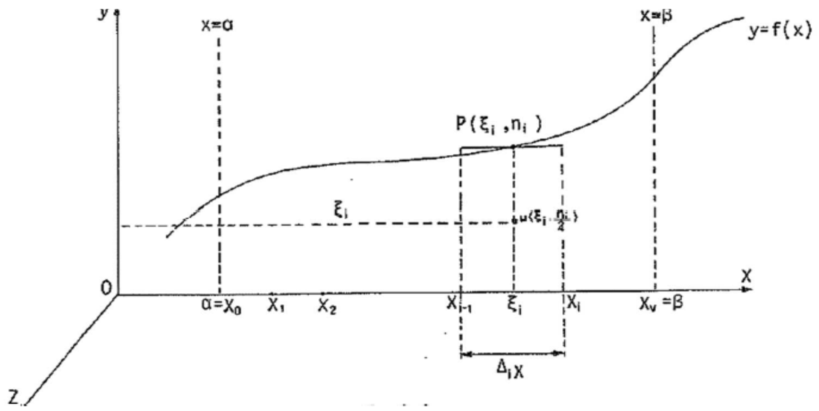
- Αν M_{yz} είναι η ροπή του στερεού, σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, κάθετα στον άξονα xx', τότε είναι $V\cdot\overline{x} = M_{yz}, \overline{y} = 0$, δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(\overline{x},0)$ Αν η επίπεδη επιφάνεια περιστραφεί περί τον άξονα yy', τότε το κέντρο βάρους της $K(\overline{X},\overline{Y})$ βρίσκεται στον άξονα yy'
- Αν M_{xz} είναι η ροπή του στερεού σε σχέση με το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, κάθετα στον άξονα yy', τότε είναι $V\cdot\overline{y} = M_{xz}$, $\overline{x} = 0$, δηλαδή το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $(0,\overline{y})$

Με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση του επίπεδου χωρίου βρίσκω

$M_{yz}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ και αν $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx$ ο όγκος εκ περιστροφής, ο $V\cdot\overline{x}=M_{yz},\overline{y}=0$ γράφεται λόγω των $M_{yz}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ και $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx$ ως $\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx\cdot\overline{x}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ ή $\overline{X}=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx}{\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2dx}$ με $\overline{y}=0$, όταν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο βάρους.

4.3 Πρώτο θεώρημα του Πάππου

Αν μία επίπεδη επιφάνεια έχει περιστραφεί περί άξονα, που κείται στο επίπεδο της και δεν την τέμνει, τότε ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας (εμβαδού) και του μήκους του κύκλου που γράφεται, από το κέντρο βάρους της επιφάνειας. Έτσι, αν $y=f(x)$ συνεχής με $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και πάρω μια διαμέριση Δ_ν του $[a,\beta]$ την $\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_\nu=\beta\}$ με $\lambda\to 0$ και στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$ αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i-x_{i-1}=\Delta_i x$ και ύψος $n_i=f(\xi_i)$, όπου $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ το μέσο αυτού έχω, όταν αυτό περιστραφεί περί τον άξονα yy', ότι το $u\left(\xi_i,\dfrac{n_i}{2}\right)$ διαγράφει κύκλο ακτίνας ξ_i και μήκους $2\pi\cdot\xi_i$



Άρα, από θεώρημα του Πάππου, για τον όγκο που παράγει το στοιχειώδες ορθογώνιο είναι $V_i=2\pi\xi_i\cdot f(\xi_i)\Delta_i x$, $i=1,2,...,\nu$ Αν πάρω το άθροισμα των στοιχειωδών όγκων V_i είναι $V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}V_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$

Η ροπή του στοιχειώδους όγκου V_i είναι $M_i xz=2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x\cdot\dfrac{f(\xi_i)}{2}$, $i=1,2,...,\nu$

Αν πάρω το άθροισμα των ροπών $M_i xz$, λόγω της συνέχειας της f είναι $M_{xz}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}M_i xz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\nu}2\pi\xi_i\dfrac{[f(\xi_i)]^2}{2}\Delta_i x=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$ ή $M_{xz}=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x[f(x)]^2dx$

Η $V \cdot \overline{y} = M_{xz}$, από $V = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\, dx$ και $M_{xz} = \pi\int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx$ είναι

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \cdot \overline{\mathrm{Y}} = \pi\int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx \ \text{ ή } \ \overline{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} x[f(x)]^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx}$$ με $\overline{X} = 0$ όταν ο άξονας περιστροφής, διέρχεται από το κέντρο βάρους.

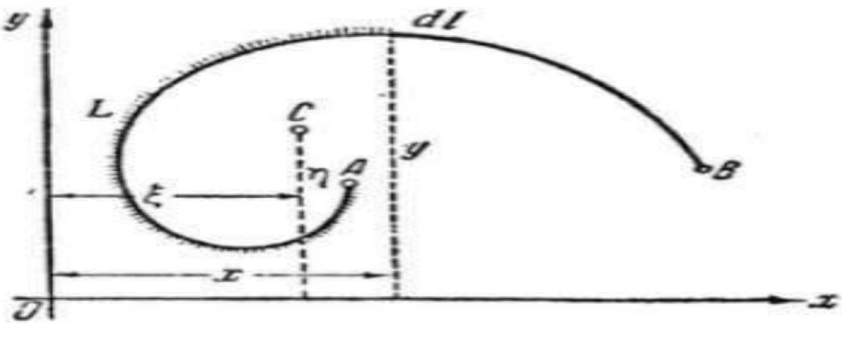
4.4 Ροπές και κέντρα βάρος επίπεδης καμπύλης

Η στατική ροπή M του υλικού σημείου μάζας m κάποιου άξονα ισούται με το γινόμενο της μάζας m επί την απόσταση d του σημείου, από τον άξονα. Για ένα σύστημα υλικών σημείων μαζών $m_1, m_2, ..., m_n$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο του άξονα από τον οποίο απέχουν αντίστοιχα $d_1, d_2, ..., d_n$, η στατική ροπή είναι $M = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d_i$

Έστω καμπύλη AB υλική και ομογενής. Θέλω να υπολογίσω τη στατική ροπή του τμήματος AB της καμπύλης, ως προς τον άξονα Ox. Στην καμπύλη παίρνω κάποιο στοιχείο μήκους $d\ell$ και μάζας $\rho d\ell$. Θεωρώντας αυτό το στοιχείο κατά προσέγγιση ως υλικό σημείο που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα Ox, έχω $dM_x = y \cdot \rho dl$. Αν $\rho = 1$ τότε $M_x = \int_{\alpha}^{\beta} ydl$. Ομοίως, είναι $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} xdl$

Οι συντεταγμένες (ξ,η) του κέντρου βάρους είναι

$$\left(\frac{M_Y}{L}, \frac{M_x}{L}\right) = \left(\frac{\int_{\alpha}^{\beta} xdl}{\int_{\alpha}^{\beta} dl}, \frac{\int_{\alpha}^{\beta} ydl}{\int_{\alpha}^{\beta} dl}\right) = \left(\frac{\int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2}dx}, \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2}dx}\right)$$



5. Ροπές αδρανείας επιπέδων επιφανειών και στερεών εκ περιστροφής

5.1 Ροπή αδρανείας των επίπεδων επιφανειών

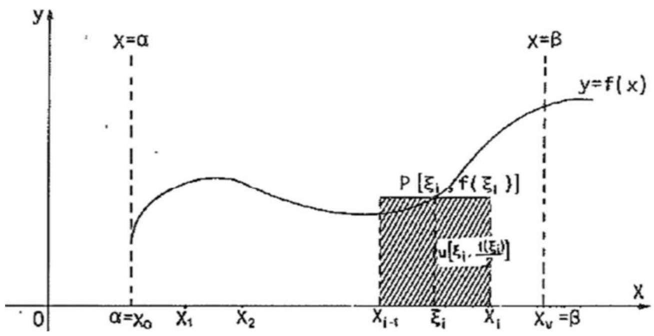
Έστω $y = f(x)$ συνεχής, με $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, \beta]$ και Ε το εμβαδό το οριζόμενο από την $f(x)$, από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα xx', ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Ονομάζω ροπή αδράνειας μιας επίπεδης επιφάνειας και συμβολίζω I_x, I_y, ως προς τους άξονες xx', yy' αντίστοιχα, το γινόμενο του εμβαδού Ε της επιφάνειας επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της από τους άξονες Ox, Oy. Αν πάρω μία διαμέριση Δ_y του $[a, \beta]$ την $\Delta_\nu = \{\alpha = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_\nu = \beta\}$ και θεωρήσω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και σε αυτό αντιστοιχίσω το στοιχειώδες ορθογώνιο με βάση $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)$ που αντιστοιχεί στο σημείο $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ μέσο αυτού.

Τότε εξ΄ ορισμού είναι $\mathrm{I}_i x = \frac{[f(\xi_i)]^2}{4} f(\xi_i)\Delta_i x$ αντίστοιχα $\mathrm{I}_i y = \xi_i^2 f(\xi_i)\Delta_i x$ με $i = 1, 2, ..., \nu$ και αν αθροίσω όλες τις στοιχειώδεις ροπές που αντιστοιχούν στα στοιχειώδη ορθογώνια στη δεδομένη διαμέριση είναι

$$\mathrm{I}_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{[f(\xi_i)]^2}{4} f(\xi_i)\Delta_i x \quad \text{αντίστοιχα} \quad \mathrm{I}_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 f(\xi_i)\Delta_i x$$

και επειδή η $f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ είναι συνεχής, τα ανωτέρω όρια υπάρχουν και δίνουν

• $\mathrm{I}_x = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta [f(x)]\, dx$ αντίστοιχα • $\mathrm{I}_y = \int_\alpha^\beta x^2 f(x) dx$



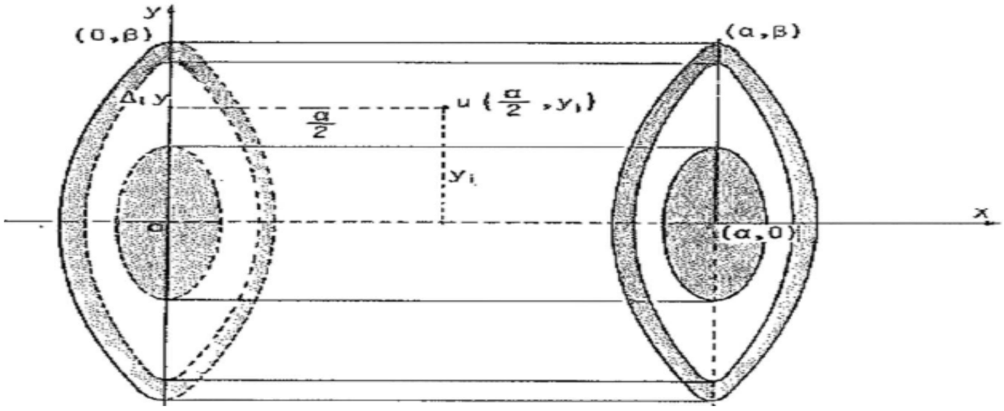
5.2 Ροπή αδρανείας του όγκου ενός στερεού

Ονομάζω ροπή αδρανείας του όγκου V ενός στερεού, που παράγεται από την περιστροφή μιας επίπεδης επιφάνειας περί άξονα του στερεού, το γινόμενο του όγκου του παραγόμενου στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της επιφάνειας, από τον άξονα. Έστω ότι θέλω να βρω τη ροπή αδρανείας ενός κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που παράγεται από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β, που περιστρέφεται περί την α. Θεωρώ ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy έτσι ώστε οι άξονες Ox, Oy να βρίσκονται στις διαδοχικές πλευρές του ορθογωνίου. Παίρνω το στοιχειώδες ορθογώνιο, που έχει βάση α και ύψος $\Delta_i y$

Αυτό, έχει κέντρο βάρους $u\left(\frac{\alpha}{2}, y_i\right)$ Άρα, η ροπή αδρανείας του ως προς τον άξονα xx' είναι $J_i x = y_i^2(\alpha\Delta_i y)$, $i = 1, 2, ..., \nu$ Για το στερεό που παράγεται από το στοιχειώδες ορθογώνιο, από το θεώρημα του Πάππου, είναι $\mathrm{I}_i x = 2\pi y_i y_i^2 \alpha\Delta_i y$, $i = 1, 2, ..., \nu$

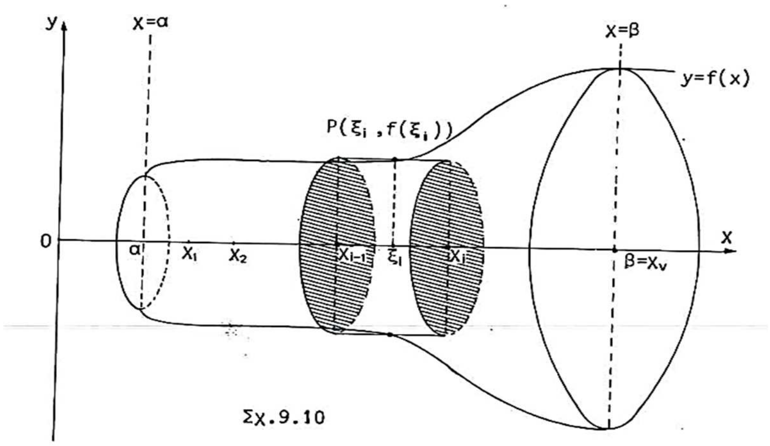
Αν πάρω το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών ροπών αδρανείας, ως προς τον άξονα xx' είναι

$$\mathrm{I}_x = \lim_{\nu \to +\infty} \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i x = \lim_{\nu \to +\infty} \sum_{i=1}^{\nu} 2\pi y_i y_i^2 \alpha \Delta_i x = 2\pi\alpha \int_0^{\beta} y^3 dy = 2\pi\alpha \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{\beta} = \frac{\pi\alpha\beta^4}{2} = \frac{1}{2}\pi\alpha\beta^2 \cdot \beta^2$$



Αν λάβω υπόψη ότι το δοθέν ορθογώνιο περιστρεφόμενο περί τον άξονα xx' παράγει κύλινδρο όγκου $V = \pi \cdot \alpha \cdot \beta^2$, τότε η ανωτέρω σχέση γράφεται $\mathrm{I}_x = \frac{1}{2} V \beta^2$ όπου β η ακτίνα του κυλίνδρου, όταν περιστρέφεται περί τον άξονα xx'

Αν το ορθογώνιο περιστρέφεται περί τον άξονα yy', τότε η ροπή ως προς αυτόν τον άξονα είναι $\mathrm{I}_y = \frac{1}{2} V \alpha^2$ όπου α είναι ακτίνα του κυλίνδρου. Από $\mathrm{I}_x = \frac{1}{2} V \beta^2$ και από $\mathrm{I}_y = \frac{1}{2} V \alpha^2$ βρίσκω τη ροπή αδρανείας του όγκου του στερεού που παράγεται από την περιστροφή μίας επίπεδης επιφάνειας περί τον άξονα xx', ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων και που περικλείεται από τη συνεχή καμπύλη $y = f(x)/[\alpha, \beta]$ από τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και από τον άξονα xx' Κάνω μια διαμέριση Δ_ν του $[\alpha, \beta]$ την $\Delta_\nu = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta\}$ με $\lambda \to 0$ Παίρνω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ Σχηματίζω τους στοιχειώδεις κυλίνδρους, που παράγονται από τα στοιχειώδη ορθογώνια με βάσεις $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ και ύψος $f(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ που περιστρέφονται περί τον άξονα xx'



Σχ.9.10

Αυτοί οι στοιχειώδεις κύλινδροι, έχουν ύψος $\Delta_i x$ και ακτίνα $f(\xi_i)$, όπου

$\xi_i \in (x_{i-1,} x_i)$ μέσον αυτού. Κάθε στοιχειώδης κύλινδρος, έχει όγκο $\Pi[f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα xx', από τον $\mathrm{I}_x = \frac{1}{2} V\beta^2$ προκύπτει ότι είναι $\mathrm{I}_i x = \frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^2 \Delta_i x [f(\xi_i)]^2 = \frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^4 \Delta_i x$ A

Αν αθροίσω τις ροπές αδρανείας όλων των στοιχειωδών κυλίνδρων, είναι $\mathrm{I}_x = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i x = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2}\pi[f(\xi_i)]^4 \Delta_i x$ Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το όριο υπάρχει άρα • $\mathrm{I}_x = \frac{\pi}{2}\int_\alpha^\beta [f(x)]^4 dx$. Ομοίως, προκύπτει ότι • $\mathrm{I}_y = 2\pi \int_\alpha^\beta x^3 f(x) dx$

5.3 Ακτίνα της ροπής αδρανείας

Ακτίνα της ροπής αδρανείας, είναι ο θετικός αριθμός R που καθορίζεται από τη σχέση $I_\varepsilon = ER^2$, για επίπεδη επιφάνεια εμβαδού E και από τη σχέση $I_\varepsilon = VR^2$, για στερεό εκ περιστροφής όγκου V, σε σχέση με τον άξονα (ε)

6. Κέντρο βάρους και ροπές αδρανείας επίπεδης καμπύλης

Ονομάζω ροπή ενός υλικού σημείου μάζας m ως προς μια ευθεία Γ, το γινόμενο της μάζας m επί την απόσταση d του υλικού σημείου, από τη Γ. Το γινόμενο της μάζας m του υλικού σημείου επί d^2, ορίζεται ως ροπή αδρανείας του υλικού σημείου ως προς τη Γ. Είναι αντίστοιχα $\mathrm{M}_\Gamma = m \cdot d$ και $\mathrm{I}_\Gamma = m \cdot d^2$

Αν υπάρχει στο επίπεδο, ένα σύστημα υλικών σημείων, μαζών m_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ με αντίστοιχες αποστάσεις από την ευθεία Γ, $d_i = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε ορίζω ως ροπή το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{M}_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i$ και ως ροπή αδρανείας το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i^2$

Έστω ότι, στο επίπεδο που ανήκει το υλικό σημείο μάζας m, υπάρχει σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy Τότε, έχει συντεταγμένες (x, y) άρα οι $\mathrm{M}_\Gamma = m \cdot d$ και $\mathrm{I}_\Gamma = m \cdot d^2$ γράφονται $\mathrm{M}_x = m \cdot x$, $\mathrm{M}_y = m \cdot y$ αντίστοιχα $\mathrm{I}_x = m \cdot y^2$, $\mathrm{I}_y = m \cdot x^2$

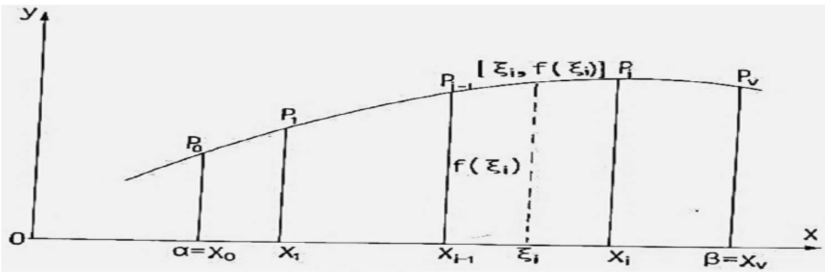
Αν (x_i, y_i) είναι οι συντεταγμένες των σημείων μαζών m_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε οι $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{M}_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i$ και $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_{i\Gamma} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i d_i^2$ γράφονται ως $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{M}_i x = \sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i$, $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{M}_i y = \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i$ και αντίστοιχα ως $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i x = \sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i^2$, $\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{I}_i y = \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i^2$ Αν για το σύστημα των υλικών σημείων m_i, i=1,2,…,ν θεωρήσω σημείο $(\overline{x}, \overline{y})$ του συστήματος των αξόνων, στο οποίο είναι συγκεντρωμένες αυτές οι μάζες, ώστε $\sum_{i=1}^{\nu} m_i \overline{x} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i$, $\sum_{i=1}^{\nu} m_i \overline{y} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i y_i$, τότε το σημείο $(\overline{x}, \overline{y})$ ονομάζεται κέντρο βάρους του συστήματος m_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

6.1 Κέντρο βάρους επίπεδης καμπύλης και ροπές αδρανείας

Έστω μία καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με συνεχή $f'(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Θεωρώ αυτή την καμπύλη ως το σύνολο των υλικών σημείων και ως ομογενή. Στην ομογενή καμπύλη, η μάζα ενός μέρους της είναι ανάλογη του μήκους του μέρους αυτού. Θεωρώ πυκνότητα $P=1$, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα του προβλήματος. Έστω P_0P_ν το τόξο της καμπύλης. που ορίζεται από τη $y=f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ Κάνω έναν διαμερισμό Δ_ν του $[\alpha,\beta]$ τον

$\Delta_\nu=\{\alpha=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_\nu=\beta\}$ με $\lambda\to 0$ και παίρνω το τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,\nu$ Από τα σημεία της διαμέρισης, φέρνω παραλλήλους προς τον άξονα yy', που τέμνουν το τόξο P_0P_ν στα σημεία $P_0,P_1,...,P_{i-1},P_i,...,P_\nu$ και ορίζουν στοιχειώδη τόξα. Έστω $P_{i-1}P_i=\Delta_iS$ ένα τέτοιο τόξο όπου $i=1,2,...,\nu$ Τότε, το τόξο Δ_iS έχει μάζα $\Delta m_i=P\Delta_iS=\Delta_iS$, $i=1,2,...,\nu$ διότι θεώρησα ότι για την πυκνότητα ότι $P=1$ Έστω $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ένα ενδιάμεσο σημείο του τυχαίου υποδιαστήματος. Στο τόξο $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i=\Delta_iS$ αντιστοιχεί το σημείο $(\xi_i,f(\xi_i))$, στο οποίο θεωρώ συγκεντρωμένη τη μάζα αυτού. Άρα, από $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_ix=\sum_{i=1}^{\nu}m_iy_i$ και από $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_iy=\sum_{i=1}^{\nu}m_ix_i$ προκύπτουν $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_ix=\sum_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_iS$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_iy=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_iS$ Επειδή η $y=f(x)$ είναι συνεχής $\forall x\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει το όριο, με $\lambda\to 0$ οπότε

- $\mathrm{M}_x=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_ix=\lim\sum_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_iS=\int_\alpha^\beta f(x)dS$ και
- $\mathrm{M}_y=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_iy=\lim\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_iS=\int_\alpha^\beta xdS$



Άρα, οι ροπές του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη με εξίσωση $y=f(x)$ και από τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ ως προς τους άξονες xx', yy' είναι $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta f(x)dS$, $\mathrm{M}_y=\int_\alpha^\beta xdS$ ή • $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$, • $\mathrm{M}_y=\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

Επίσης, από $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_ix=\sum_{i=1}^{\nu}m_iy_i^2$ και από $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_iy=\sum_{i=1}^{\nu}m_ix_i^2$ προκύπτουν $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_ix=\sum_{i=1}^{\nu}y_i^2\Delta_iS$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_iy=\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\Delta_iS$ Άρα, $\mathrm{I}_x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_ix=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^2\Delta_iS=\int_\alpha^\beta y^2dS$ και $\mathrm{I}_y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{I}_iy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2\Delta_iS=\int_\alpha^\beta x^2dS$ Άρα, οι ροπές αδρανείας του τόξου που ορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ ως προς τους άξονες

xx', yy' είναι $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta y^2dS$, $\mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2dS$ ή • $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

• $\mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Από $\sum_{i=1}^{\nu} m_i\overline{x}=\sum_{i=1}^{\nu} m_ix_i$ και από $\sum_{i=1}^{\nu} m_i\overline{y}=\sum_{i=1}^{\nu} m_iy_i$ προκύπτουν $\sum_{i=1}^{\nu}\overline{x}\Delta_iS=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\Delta_iS$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\overline{y}\Delta_iS=\sum_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_iS$ Επειδή τα όρια υπάρχουν λόγω της συνεχείας, έχω τελικά με $\lambda\to 0$ $\overline{x}\cdot S=\int_\alpha^\beta xdS$, $\overline{y}\cdot S=\int_\alpha^\beta ydS$ ή επειδή $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ είναι

• $\overline{x}=\dfrac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$ και • $\overline{y}=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$

6.2 Δεύτερο θεώρημα του Πάππου

Αν ένα τόξο μίας καμπύλης περιστρέφεται περί άξονα, που βρίσκεται στο επίπεδό του, αλλά δεν τέμνει το τόξο, τότε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται, ισούται με το γινόμενο του μήκους του τόξου και του μήκους της περιφέρειας του κύκλου, που διαγράφει το κέντρο βάρους του τόξου. Έστω η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή του τόξου P_0P_ν, περί τον άξονα xx', με τις προϋποθέσεις που τέθεισαν για την καμπύλη $y=f\left(x\right)$ Το στοιχειώδες τόξο Δ_iS, παράγει μία επιφάνεια εμβαδού $\mathrm{E}_i=2\pi f(\xi_i)\Delta_iS$ και συνεπώς ροπή $\mathrm{M}_iy=2\pi\xi_if(\xi_i)\Delta_iS$. Το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται, από την περιστροφή του τόξου P_0P_ν, είναι

$$\mathrm{E}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{E}_i=2\pi\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{\nu}f(\xi_i)\Delta_iS=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)dS \text{ ή}$$

$$\mathrm{E}=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ και η ροπή είναι}$$

$$\mathrm{M}_y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}_iy=2\pi\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_if(\xi_i)\Delta_iS=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)dS \text{ ή}$$

$$\mathrm{M}_y=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Οι $\mathrm{E}_i=2\pi f(\xi_i)\Delta_iS$ από $\mathrm{E}=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ και από $\mathrm{M}_y=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ γράφονται ως

$$2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\cdot\overline{\mathrm{X}}=2\pi\int_\alpha^\beta xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \text{ ή}$$

$$\bar{X} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}, \quad \bar{y} = 0$$

Για τη ροπή αδρανείας του στοιχειώδους εμβαδού, είναι

$I_i x = 2\pi f(\xi_i)\Delta_i S \cdot [f(\xi_i)]^2 = 2\pi [f(\xi_i)]^3 dS$ άρα,

$$Ix = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} I_i x = 2\pi \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}[f(\xi_i)]^3 dS = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^3 dS \quad \text{ή}$$

$$Ix = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^3\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

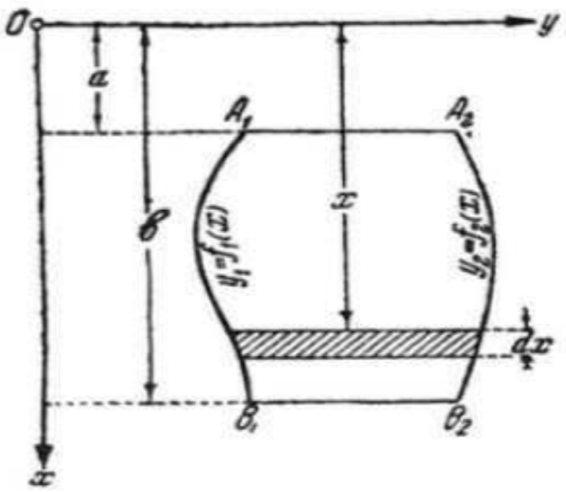
7. Πίεση των ρευστών

Πίεση, είναι η δύναμη που ασκείται στη μονάδα του εμβαδού, δηλαδή η κάθετη δύναμη F που ασκείται σε μια (επίπεδη) επιφάνεια δεδομένου εμβαδού S, δια της επιφάνειας στην οποία η F είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη, δηλαδή $P = \frac{F}{S}$ Η πίεση P σε οριζόντια επιφάνεια εμβαδού S, που μια στήλη ενός υγρού ύψους h έχει ως βάση, είναι $P = \varepsilon \cdot h$, όπου $\varepsilon =$ ειδικό βάρος το υγρού, είναι $F = P \cdot S$ ή $F = \varepsilon \cdot h \cdot S$

Η πίεση που ασκείται από ένα υγρό σε οποιοδήποτε σημείο του, είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις, εφόσον το υγρό ισορροπεί.

7.1 Υδροστατική πίεση

Έστω επίπεδο σχήμα $A_1B_1B_2A_2$ τοποθετημένο κατακόρυφα εντός υγρού. Θέλω να βρω την υδροστατική πίεση p που ασκεί το υγρό, στο $A_1B_1B_2A_2$



Η στοιχειώδης υδροστατική πίεση που ενεργεί στο διάστημα $[x, x+dx]$ είναι

$dp = \varepsilon \cdot x(y_2 - y_1)\,dx$ όπου

ε είναι το ιδικό βάρος του υγρού

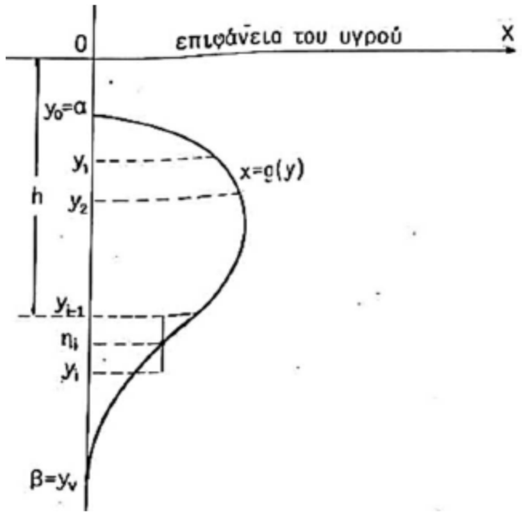
x είναι το βάθος της ζώνης $[x, x+dx]$

$(y_2 - y_1)dx$ είναι το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα, έχω $p = \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx$

7.2 Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη σε υγρό

Έστω επίπεδη επιφάνεια, βυθισμένη κατακόρυφα σε υγρό ειδικού βάρος ε. Θεωρώ τη βυθισμένη επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο Oxy με τον άξονα xx' στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και τον θετικό άξονα yy' με κατεύθυνση προς τα κάτω. Αν $x = g(y)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ είναι η καμπύλη που με τον άξονα ορίζουν τη βυθισμένη επιφάνεια, α είναι το ανώτερο σημείο της επιφάνειας και β είναι το κατώτερο σημείο. Για να υπολογίσω τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια, εργάζομαι ως εξής:



Παίρνω έναν διαμερισμό Δ_ν του $[\alpha, \beta]$ τον $\Delta_\nu = \{\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{i-1} < y_i < \ldots < \beta = y_\nu\}$ με $\lambda \to 0$ Από τα σημεία της διαμέρισης, φέρνω παράλληλες προς την επιφάνεια του υγρού και έστω $[y_{i-1}, y_i]$ το τυχόν υποδιάστημα. Σχηματίζω το στοιχειώδες ορθογώνιο με πλάτος $y_{i-1} - y_i = \Delta_i y$ και μήκος $g(n_i)$ με $i = 1, 2, \ldots, \nu$ όπου $n_i \in [y_{i-1}, y_i]$

Έστω h το βάθος της πάνω βάσης του στοιχειώδους ορθογωνίου από την επιφάνεια του υγρού. Η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες ορθογώνιο, με διαστάσεις $\Delta_i y$ και $g(n_i)$ είναι $F_i = \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y$

Το άθροισμα Riemann $\sum_{i=1}^{\nu} F_i = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y$ δίνει κατά προσέγγιση, τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια του παραπάνω σχήματος. Επειδή η $x = g(y)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει το όριο του $\sum_{i=1}^{\nu} F_i = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y$ και είναι $F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} F_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon n_i g(n_i)\Delta_i y = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} y g(y) dy$ Συνεπώς, η ολική δύναμη που ασκείται στην βυθισμένη επιφάνεια δίνεται από τον τύπο $F = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} y g(y) dy$

Εφαρμογή 1

Μάζα m από σημείο A που απέχει r_A από το κέντρο της Γης, ανυψώνεται σε σημείο B που απέχει r_B από το κέντρο της Γης. Για τον υπολογισμό της διαφοράς της δυναμικής ενέργειας $E(B)-E(A)$, ισοδιαμερίζω το $[r_A, r_B]$ με τα διαιρετικά σημεία $r_0 = r_A < r_1 < r_2 < \ldots < r_{\nu-1} < r_\nu = r_B$. Το πλάτος του κάθε υποδιαστήματος, είναι $\Delta_r = \dfrac{r_B - r_A}{\nu}$, όπου $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \Delta_r = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{r_B - r_A}{\nu} = 0$

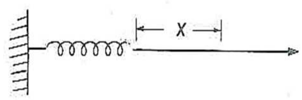
Αν g_k είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο που απέχει από το κέντρο της Γης r_k, τότε $g_k = \dfrac{G\cdot M}{r_k^2}$ όπου G η παγκόσμια σταθερά και M η μάζα της Γης. Η δυναμική ενέργεια της m στο σημείο αυτό, είναι $m\cdot g\cdot r_k$ και η διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του σημείου P_{k-1} με απόσταση r_{k-1} και του σημείου P_k με απόσταση r_k, είναι $E(P_k)-E(P_{k-1}) = m\cdot g_k\cdot\Delta_r = m\dfrac{G\cdot M}{r_k^2}\Delta_r = G\cdot m\cdot M\dfrac{\Delta_r}{r_k^2}$

Τότε, $E(B)-E(A) = \lim\limits_{\Delta_r\to 0}\left[\dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_1^2}\Delta_r + \dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_2^2}\Delta_r + \ldots + \dfrac{G\cdot m\cdot M}{r_\nu^2}\Delta_r\right]$ και από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι

$$E(B)-E(A) = GmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = GmM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = GmM\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

Εφαρμογή 2

Σε ιδανικό ελατήριο ασκείται δύναμη, ώστε να το επιμηκύνει κατά x. Η αντίσταση του ελατηρίου είναι μία δύναμη μέτρου F, ανάλογη της επιμήκυνσης (νόμος Hooke) δηλαδή $F = k\cdot x$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Η διεύθυνση της F είναι η διεύθυνση της κίνησης, άρα το έργο της για την απομάκρυνση από τη θέση $x = a$ ως τη θέση $x = \beta$ είναι $W = \displaystyle\int_a^\beta (k\cdot x)\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\beta = k\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$



Εφαρμογή 3

Η επιμήκυνση του μήκους 10 cm ελατηρίου, είναι ανάλογη με τη δύναμη F που του ασκείται. Ποιο είναι το έργο W της $F = 25\,Kp$, όταν το ελατήριο επιμηκύνεται, κατά το $1/5$ του αρχικού του μήκους;

Είναι $F(x) = kx$, $k =$ σταθερά και $x = \dfrac{1}{5}10 = 2\ cm = \dfrac{2}{100}\ m$ άρα

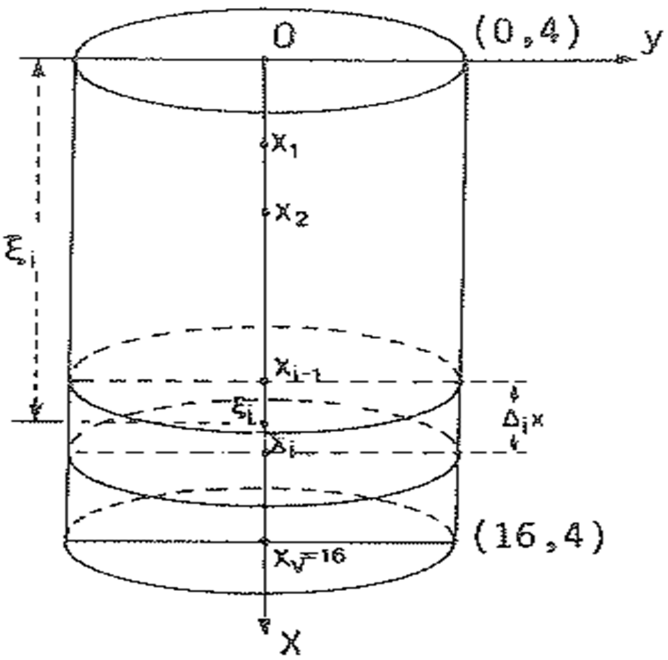
$F = k\cdot x \Leftrightarrow 25 = k\dfrac{2}{100} \Leftrightarrow k = 1.250$ οπότε

$$W = \int_0^{0,02} 1250x\,dx = 1250\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,02} = 0,5\ Kpm$$

Εφαρμογή 4

Ορθό κυλινδρικό δοχείο ακτίνας $R = 4\ cm$ και ύψους $\upsilon = 16\ cm$ είναι γεμάτο με νερό. Ποιο είναι το έργο που παράγεται, αντλώντας το νερό από την κορυφή του δοχείου;

Έστω ο κύλινδρος του σχήματος. Θέτω το ορθοκανονικό σύστημα των αξόνων Oxy έτσι ώστε η αρχή του Ο, να είναι το κέντρο της βάσης του κυλίνδρου και ο άξονας xx' να είναι κατακόρυφος. Παίρνω έναν διαμερισμό του διαστήματος $[0,\ 16]$ και έστω $[x_{i-1},\ x_i]$ το τυχών υποδιάστημα με $\lambda \to 0$. Λόγω του διαμερισμού, ο κύλινδρος χωρίζεται σε στοιχειώδεις κυλίνδρους πάχους $\Delta_i x$, i =1,2,……….ν βάρους $W_i = \pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x$ με ε το ειδικό βάρος του νερού.



Για όλους τους στοιχειώδεις κυλίνδρους, το παραγόμενο έργο είναι $\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x$, άρα, $W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \xi_i \cdot \Delta_i x = \pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \int_0^{16} x dx$

Συνεπώς, $W = 16\varepsilon \cdot \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{16} = 16\varepsilon \cdot \pi 128 = 2048\pi$ erg με $\varepsilon = 1\ \frac{g}{cm^3}$

Εφαρμογή 5

Δεξαμενή χωρητικότητας $V_0 = 200\ L$ περιέχει αέρα με πίεση $P_0 = 10^7\ \frac{N}{m^3}$ που εκτονώνεται, σε σταθερή θερμοκρασία, μέχρι η πίεση να γίνει $P_1 = 10^5\ \frac{N}{m^3}$, μέσα σε μηχανή χωρίς τριβές. Πόσο έργο παράγεται από αυτή την εκτόνωση;

Υποθέτω ότι ο αέρας ακολουθεί τον νόμο των Boyle–Marriott, δηλαδή ότι είναι $P_0 \cdot V_0 = P_1 \cdot V_1 = \text{σταθερό}$. Έστω s το εμβαδόν του κυλίνδρου της μηχανής, μέσα στο οποίο εκτονώνεται ο αέρας της δεξαμενής. Το έμβολο του κυλίνδρου, θα μετατοπισθεί κατά dx (ο άξονας xx' είναι ο άξονας του κυλίνδρου). Τότε παράγεται ένα στοιχειώδες έργο $dW = Fdx$, όπου F η ολική δύναμη. Είναι $P_1 = \dfrac{F}{S}$ ή $F = SP_1$ Άρα, η $dW = Fdx$ γράφεται ως $dW = s \cdot P_1\, dx = P_1\, dV_1$ διότι $s\, dx = dV_1$

Από $P_0 \cdot V_0 = P_1 \cdot V_1 = \text{σταθερό}$, είναι $V_1 = \dfrac{P_0 \cdot V_0}{P_1}$ και παραγωγίζοντας $P_1 dV_1 + V_1 dP_1 = 0$

ή $dV_1 = \dfrac{V_1 dP_1}{P_1}$ οπότε η $dW = s \cdot P_1\, dx = P_1\, dV_1$ γράφεται $dW = -P_1 V_1 \dfrac{dP_1}{P_1} = -P_0 V_0 \dfrac{dP_1}{P_1}$

Ολοκληρώνοντας, είναι

$$W = -P_0 V_0 \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP_1}{P_1} = -P_0 V_0 \left[\log P_1\right] \frac{P_1}{P_0} = -P_0 V_0 \left(\log P_1 - \log P_0\right) = P_0 V_0 \log \frac{P_0}{P_1}$$

Και αντικαθιστώντας $W = 10^7 \cdot 0{,}2 \log 100 = 10^7 \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}6 = 9{,}2 \cdot 10^6 J$

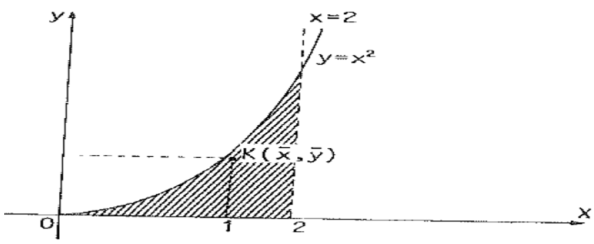
Εφαρμογή 6

Ποιο έργο παράγεται από τη δύναμη F με την οποία ηλεκτρικό φορτίο q_1 απωθεί άλλο ηλεκτρικό φορτίο q_2, από τη θέση A_1 που απέχει από το q_1 απόσταση R_1, στη θέση A_2 που απέχει απόσταση R_2 από το q_1, αν το q_1 είναι τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος αξόνων; Είναι $F = K\dfrac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$, άρα

$$W = \int_{R_1}^{R_2} F dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} = K \cdot q_1 \cdot q_2 \left[-\frac{1}{R}\right]_{R_1}^{R_2} = K \cdot q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Εφαρμογή 7

Εύρεση του κέντρου βάρους ενός επίπεδου χωρίου, που περιορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$, από την ευθεία $x = 2$ και από τον άξονα xx'



Η καμπύλη, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έτσι, $E = \int_0^2 x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{8}{3}$

• $M_x = \dfrac{1}{2}\int_0^2 (x^2)^2 dx = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^2 = \dfrac{16}{5}$ και • $M_y = \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$ οπότε από

$\overline{Y} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx}{\int_\alpha^\beta f(x) dx}$, $\overline{X} = \dfrac{\int_\alpha^\beta x[f(x)]^2 dx}{\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx}$ προκύπτει ότι • $\overline{Y} = \dfrac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}} = \dfrac{6}{5}$, • $\overline{X} = \dfrac{4}{\frac{8}{3}} = \dfrac{3}{2}$

Άρα, $K\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{6}{5}\right)$

Εφαρμογή 8

Εύρεση του κέντρου βάρους του επιπέδου χωρίου, που περιορίζεται από την καμπύλη $y=9-x^2$ και από τις ευθείες $x=0$, $y=0$ (1^o τεταρτημόριο)

Η καμπύλη τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία (3, 0) και (0, 9) αντίστοιχα. Έτσι,

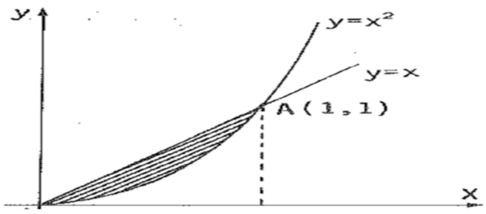
- $\mathrm{E}=\int_0^3 \left(9-x^2\right)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{54}{3}=18$

- $M_x=\frac{1}{2}\int_0^3 \left(9-x^2\right)^2 dx=\frac{324}{5}$ και • $M_y=\int_0^3 x\left(9-x^2\right)dx=\frac{81}{4}$

Τότε • $\overline{X}=\frac{\frac{81}{4}}{18}=\frac{9}{8}$, • $\overline{Y}=\frac{\frac{324}{5}}{18}=\frac{18}{5}$ άρα $K\left(\frac{9}{8},\frac{18}{5}\right)$

Εφαρμογή 9

Εύρεση του κέντρου βάρους, του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$



Τα σημεία που τέμνονται οι καμπύλες είναι τα A(1,1) και O(0,0). Τότε

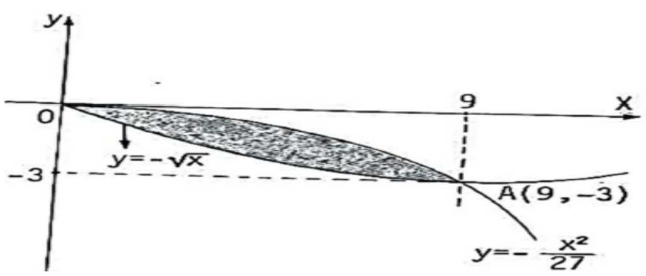
- $\mathrm{E}=\int_0^1 (x-x^2)dx=\frac{1}{6}$,

- $M_y=\int_0^1 x\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{12}$ και • $M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x+x^2)(x-x^2)dx=\frac{1}{15}$

Άρα, είναι • $\overline{y}=\frac{\mathrm{M}_x}{E}=\frac{2}{5}$, • $\overline{x}=\frac{\mathrm{M}_y}{E}=\frac{1}{2}$ και $K\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$

Εφαρμογή 10

Εύρεση του κέντρου βάρους του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2=x$ και $x^2=-27y$



Τα σημεία τομής των καμπυλών είναι $(9,-3)$ και $(0,0)$ Οι καμπύλες γράφονται ως $y=-\sqrt{x}$ και $y=\frac{-x^2}{27}$, οπότε • $\mathrm{E}=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}-(-\sqrt{x})\right)dx=\int_0^9\left(-\frac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx=9$

• $M_x = \dfrac{1}{2}\int\left(-\dfrac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)\left(-\dfrac{x}{27}-\sqrt{x}\right)dx = \dfrac{-243}{20}$

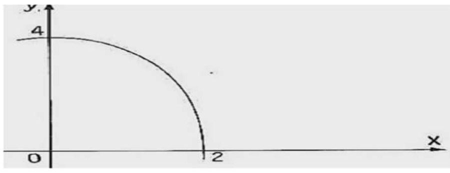
• $M_y = \int_0^9 x\left(-\dfrac{x^2}{27}+\sqrt{x}\right)dx = \int_0^9\left(-\dfrac{x^2}{27}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \dfrac{729}{20}$

Συνεπώς, • $\overline{Y} = \dfrac{\frac{-243}{20}}{9} = -\dfrac{27}{20}$, • $\overline{X} = \dfrac{\frac{729}{20}}{9} = \dfrac{81}{20}$

Άρα, το κέντρο βάρους είναι • $K\left(\dfrac{81}{20},\dfrac{-27}{20}\right)$

Εφαρμογή 11

Εύρεση του κέντρου βάρους $K(\overline{X},0)$ του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή περί τον άξονα xx', του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $y=4-x^2$ και από τις ευθείες $x=0$, $y=0$



Η καμπύλη, τέμνει τους άξονες στα σημεία $(2,0)$ και $(0,4)$. Τότε είναι

• $V = \pi\int_0^2\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_0^2 (4-x^2)^2 dx = \dfrac{256\pi}{15}$

• $M_{yz} = \pi\int_0^2 x[f(x)]^2 dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \dfrac{32\pi}{3}$

Συνεπώς, • $\overline{X} = \dfrac{\frac{32\pi}{2}}{\frac{256\pi}{15}} = \dfrac{5}{8}$ άρα, $\mathrm{K}\left(\dfrac{5}{8},0\right)$

Εφαρμογή 12

Εύρεση του κέντρου βάρους $\mathrm{K}(0,\overline{y})$ του στερεού σώματος του προηγούμενου προβλήματος, αν η περιστροφή γίνει γύρω από τον άξονα yy'

Είναι • $V = 2\pi\int_0^2 xf(x)dx = 2\pi\int_0^2 x(4-x^2)dx = 8\pi$

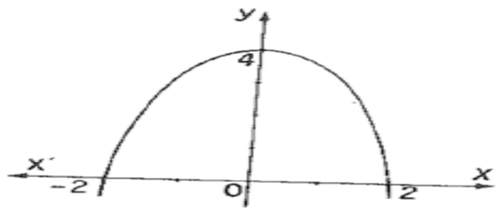
• $M_{xz} = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \dfrac{32\pi}{3}$ και • $\overline{Y} = \dfrac{\frac{32\pi}{3}}{8\pi} = \dfrac{4}{3}$ άρα, $K\left(0,\overline{y}\right) = K\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

Εφαρμογή 13

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα yy', του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y=4-x^2$ και από τον άξονα xx'

Η παραβολή, τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία $(-2,0)$, $(2,0)$ και είναι

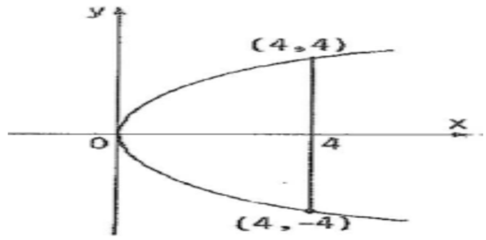
• $\mathrm{I}_y = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)dx = 2\int_{0}^{2}(4x^2-x^4)dx = 2\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{15}$



Επειδή • $\mathrm{E} = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ για την ακτίνα της ροπής αδρανείας από τον $\mathrm{I}_y = E\cdot R^2$ προκύπτει ότι $\frac{128}{15} = \frac{32}{3}R^2$ άρα, • $R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Εφαρμογή 14

Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα yy' , του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y^2 = 4x$ και από την ευθεία $x = 4$



Για το μισό του χωρίου, που βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx', είναι $\mathrm{I}_1 y = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}}dx$ Άρα, η ροπή αδρανείας όλου του επιπέδου χωρίου είναι

• $\mathrm{I}_y = 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^4 (4x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}4^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{256}{5}$

Το εμβαδό του χωρίου, είναι • $\mathrm{E} = 2\int_0^4 f(x)dx = 2\int_0^4 (4x)^{\frac{1}{2}}dx = 2\cdot 4^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$

Άρα, $R^2 = \frac{\mathrm{I}_x}{E} = \frac{\frac{256}{5}}{\frac{64}{3}} = \frac{12}{5}$ δηλαδή, • $R = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

Εφαρμογή 15

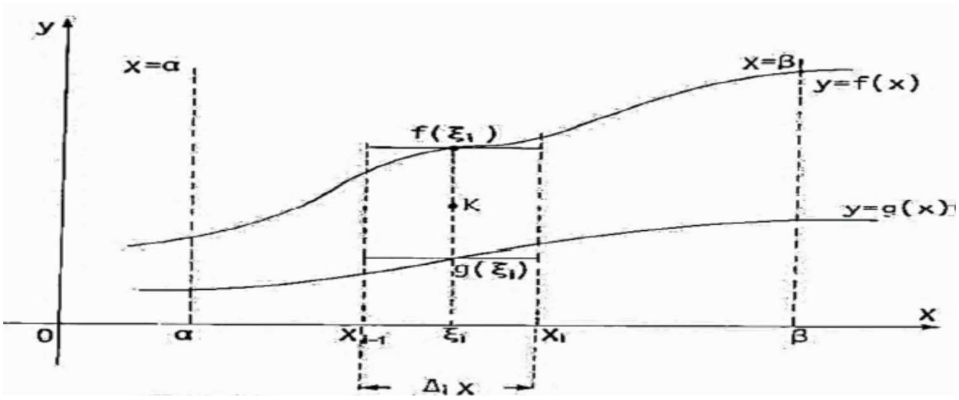
Εύρεση της ροπής αδρανείας του επιπέδου χωρίου, που ορίζεται από τις καμπύλες $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ορισμένων και συνεχών στο $[a,\beta]$, ως προς τους άξονες xx' και yy'

Έστω μια διαμέριση του $[a,\ \beta]$ Στο τυχόν υποδιάστημα $[x_{i-1},\ x_i]$ έστω ένα ενδιάμεσο σημείο ξi, το μέσο αυτού είναι για το κέντρο βάρους του τυχόντος ορθογωνίου $K\left(\xi_i, \dfrac{f(\xi_i)-g(\xi_i)}{2}\right)$

Η απόσταση του Κ από τον άξονα xx' είναι $\dfrac{f(\xi_i)+g(\xi_i)}{2}$

Εξ΄ ορισμού, για το ορθογώνιο είναι $I_i x = \dfrac{[f(\xi_i)+g(\xi_i)]^2}{4}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta_i x$ και αντίστοιχα $I_i y = \xi_i^2[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta_i x$

Αν πάρω τα αθροίσματα για όλα τα ορθογώνια, είναι $I_x = \dfrac{1}{4}\int_\alpha^\beta [f^2(x)-g^2(x)][f(x)+g(x)]dx$ και αντίστοιχα $I_y = \int_\alpha^\beta x^2[f(x)-g(x)]dx$



Εφαρμογή 16

Εύρεση της ροπής αδρανείας περί τον άξονα xx', του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που περιέχεται στο 1^o τεταρτημόριο και ορίζεται από τις γραμμές $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 3$ αν αυτό περιστραφεί περί τον άξονα xx'

Είναι • $I_x = \dfrac{\pi}{2}\int_0^3 [f(x)]^4 dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^3 (4x)^2 dx = 8\pi\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = 72\pi$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι • $V = \pi\int_0^3 4x dx = 4\pi\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 = 18\pi$

Για την ακτίνα της ροπής είναι $R^2 = \dfrac{I_x}{V} = \dfrac{72\pi}{18\pi} = 4$ άρα, • R=2

Εφαρμογή 17

Εύρεση της ροπής αδρανείας, ως προς τον άξονα yy', του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του επιπέδου χωρίου του προηγούμενου παραδείγματος.

Είναι • $I_y = 2\pi\int_0^3 x^3 f(x)dx = 4\pi\int_0^3 x^3 x^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi\int_0^3 x^{\frac{7}{2}} dx = 4\pi\left[\dfrac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\right]_0^3 = 72\sqrt{3}\pi$

Εφαρμογή 18

Εύρεση του κέντρου βάρους του $1^{ου}$ τεταρτημόριου, του τόξου του κύκλου $x^2+y^2=9$

Είναι $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$, $1+[f'(x)]^2=1+\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{9}{y^2}$, $y=\sqrt{9-x^2}$

Από $\overline{x}=\dfrac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$ και $\overline{y}=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$ προκύπτουν

• $\overline{x}=\dfrac{\int_0^3 x\dfrac{3}{y}dx}{\int_0^3 \dfrac{3}{y}dx}=\dfrac{3\int_0^3 \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx}{3\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}}}=\dfrac{-[\sqrt{9-x^2}]_0^3}{[\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{3}]_0^3}=\dfrac{6}{\pi}$ και • $\overline{y}=\dfrac{\int_0^3 y\dfrac{3}{y}dx}{3\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{6}{\pi}$

Άρα, • $K(\overline{x},\overline{y})=K\left(\dfrac{6}{\pi},\dfrac{6}{\pi}\right)$ Οι ροπές του τεταρτημόριου ως προς τους άξονες xx', yy' από $\mathrm{M}_x=\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ και $\mathrm{M}_y=\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ είναι

• $\mathrm{M}_x=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3 dx=9$,

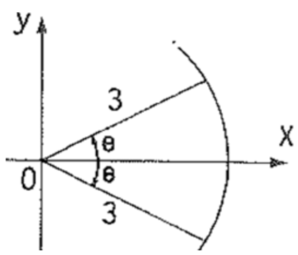
• $\mathrm{M}_y=\int_0^3 x\dfrac{3}{y}dx=3\int_0^3 \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-3\left[\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3=9$

Για τις ροπές αδρανείας από $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ και $\mathrm{I}_y=\int_\alpha^\beta x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ προκύπτουν • $\mathrm{I}_x=\int_0^3 (9-x^2)\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=\dfrac{27\pi}{4}$

• $\mathrm{I}_y=\int_0^3 x^2\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int_0^3 \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\dfrac{27\pi}{4}$

Εφαρμογή 19

Εύρεση του κέντρου βάρους, ενός κυκλικού τόξου ακτίνας $R=3$ και επίκεντρης γωνίας 2θ



Παίρνω τόξο όπως στο σχήμα και το κέντρο βάρους του είναι $(\overline{x},0)$. Η εξίσωση της περιφερείας του κύκλου που ανήκει το τόξο, είναι $x^2+y^2=9$ άρα $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-y}{x}$

Είναι $dS=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy=\frac{3}{x}dy$ Το y μεταβάλλεται από 0 μέχρι $3\eta\mu\theta$ διότι το $\bar{x}$ του τόξου ταυτίζεται με το $\bar{x}$ του άνω του μισού. Έτσι,

• $\bar{\mathrm{X}}=\dfrac{\int_0^{3\eta\mu\theta} x\frac{3}{x}dy}{3\theta}=\dfrac{3[y]_0^{3\eta\mu\theta}}{3\theta}=\dfrac{3\eta\mu\theta}{\theta}$, • $\bar{y}=0$ (το τόξο που έχει γωνία θ σε ακτίνα, έχει μήκος $S=R\cdot\theta$)

Εφαρμογή 20

Εύρεση της ροπής αδρανείας της υποκυκλοειδούς καμπύλης $x=R\cdot\eta\mu^3 t$, $y=R\cdot\sigma\upsilon\nu^3 t$, ως προς τον άξονα xx'

Από $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta [f(x)]^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ προκύπτει ότι $\mathrm{I}_x=\int_\alpha^\beta y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ και

$\frac{dx}{dt}=3R\cdot\eta\mu^2 t\cdot\sigma\upsilon\nu t\ dt$, $\frac{dy}{dt}=-3R\cdot\sigma\upsilon\nu^2 t\cdot\eta\mu t\ dt$. Η I_x είναι τετραπλάσια της ροπής του 1ου τεταρτημόριου, λόγω συμμετρίας. Άρα,

$$\mathrm{I}_x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cdot\sigma\upsilon\nu^6 t\cdot 3R\cdot\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t\ dt=-12R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^7 t\cdot d\left(\sigma\upsilon\nu t\right)=\frac{3}{2}R^3$$

Άρα, • $\mathrm{I}_x=\frac{3}{2}R^3$

Εφαρμογή 21

Εύρεση του κέντρου βάρους, της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της $4y+3x=8$, από 0 μέχρι 2, γύρω από τον άξονα xx'

Είναι $y=\frac{8-3x}{4}$, $\frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{3}{4}$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\frac{5}{4}$

Άρα, • $\bar{\mathrm{X}}=\dfrac{\int_0^2 x(8-3x)dx}{\int_0^2 (8-3x)dx}=\frac{4}{5}$, • $\bar{y}=0$ άρα $\mathrm{K}(\bar{x},\bar{y})=\mathrm{K}\left(\frac{4}{5},0\right)$

Εφαρμογή 22

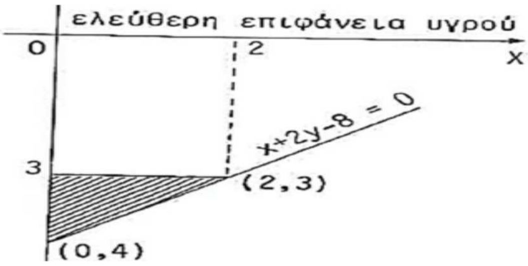
Εύρεση της ροπής αδρανείας, της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της ευθείας $y=2x$ περί τον άξονα xx', από 0 μέχρι 2

Είναι $f'(x)=\frac{dy}{dx}=2$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{5}$ άρα, από $\mathrm{I}x=2\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^3\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

προκύπτει • $\mathrm{I}_x=2\pi\int_0^2 (2x)^3\sqrt{5}dx=16\sqrt{5}\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=64\sqrt{5}\pi$

Εφαρμογή 23

Εύρεση της δύναμης, που ασκείται στη μία όψη της επιφάνειας που ορίζεται από τις γραμμές $x=0$, $y=3$ και $x+2y-8=0$ και είναι βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους ε

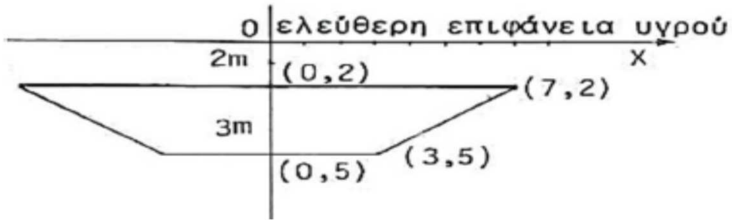


Η $x+2y-8=0$ τέμνεται με την $y=3$ στο σημείο $(2,3)$ ενώ τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $(0,4)$. Από την $x+2y-8=0$ είναι $x=8-2y$ και ο $F=\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} yg(y)dy$ δίνει

- $F=\varepsilon\int_{3}^{4} y(8-2y)dy=\varepsilon\int_{3}^{4}(8y-2y^2)dy=\varepsilon\left[4y^2-\dfrac{2y^3}{3}\right]_3^4=\dfrac{10}{3}\varepsilon$

Εφαρμογή 24

Ισοσκελές τραπέζιο μικρής βάσης $6\ m$, μεγάλης βάσης $14\ m$, ύψους $3\ m$ είναι βυθισμένο κατακόρυφα μέσα σε υγρό, με τη μικρή βάση προς τα κάτω, σε απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια σε σχέση με τη μεγάλη βάση $2\ m$. Βρείτε την ολική δύναμη που του ασκείται, από το υγρό (δίνεται ειδικό βάρος υγρού ε).



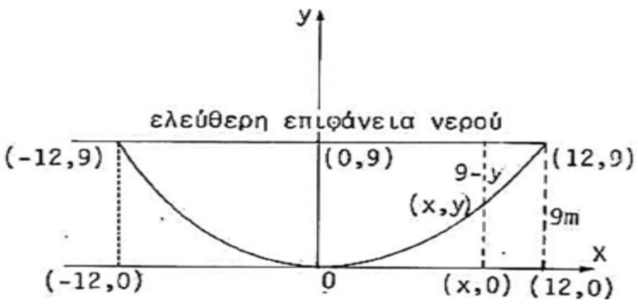
Παίρνω τους άξονες όπως στο παραπάνω σχήμα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (3, 5), (7, 2) έχει εξίσωση $x=\dfrac{29}{3}-\dfrac{4y}{3}$ και από $F=\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta} yg(y)dy$ για την ολική δύναμη, είναι • $F=2\varepsilon\int_{2}^{5} y\left(\dfrac{29}{3}-\dfrac{4y}{3}\right)dy=2\varepsilon\int_{2}^{5}\left(\dfrac{29}{3}y-\dfrac{4y^2}{3}\right)dy=2\varepsilon\left[\dfrac{29y^2}{6}-\dfrac{4y^3}{9}\right]_2^5=99\varepsilon$

Εφαρμογή 25

Δίσκος, μορφής παραβολικού τμήματος, βάσης $24\ m$, ύψους $9\ m$, είναι βυθισμένος μέσα σε υγρό ειδικού βάρους ε, έτσι ώστε η βάση του να είναι στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια του νερού. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στην πλευρά του δίσκου;

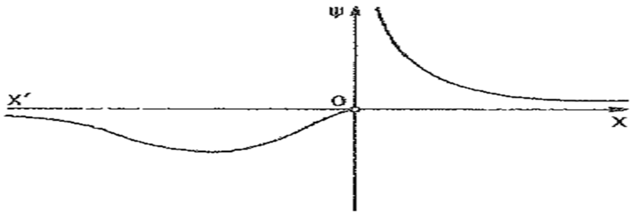
Η παραβολή, έχει εξίσωση $x^2=ky$. Επειδή διέρχεται από το σημείο (12, 9) ισχύει ότι $12^2=k\cdot 9\Rightarrow k=16$ άρα, $x^2=16y$ Για την ολική δύναμη είναι

- $F=2\varepsilon\int_{0}^{9}(9-y)4\sqrt{y}dy=8\varepsilon\int_{0}^{9}(9y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})dy=8\varepsilon\left[6y^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^9=\dfrac{2592}{5}\varepsilon$



Εφαρμογή 26

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή, περί άξονα xx', του χωρίου που περικλείεται από το τόξο της καμπύλης (c), με εξίσωση $y = \frac{1}{x} e^{1/x}$ όταν $x \in (-\infty, 0)$ και από τον ημιάξονα Ox'



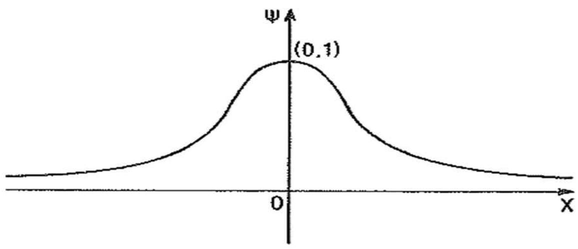
Είναι

$$V = \pi \int_{-\infty}^{0} y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{2/x} dx = \pi \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^- \\ \lambda \to -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2} e^{2/x} dx = \frac{-\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^- \\ \lambda \to -\infty}} \int_{\lambda}^{\varepsilon} e^{2/x} d(2/x) =$$

$$\frac{-\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^- \\ \lambda \to -\infty}} \left[e^{2/x} \right]_{\lambda}^{\varepsilon} = \frac{-\pi}{2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^- \\ \lambda \to -\infty}} \left[e^{2/\varepsilon} - e^{2/\lambda} \right] = \frac{-\pi}{2} \left[\lim_{\varepsilon \to 0^-} e^{2/\varepsilon} - \lim_{\lambda \to -\infty} e^{2/\lambda} \right] = \frac{-\pi}{2}(0-1) = \frac{\pi}{2}$$

Εφαρμογή 27

Εύρεση του όγκου του στερεού σώματος, που προκύπτει από την περιστροφή του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, περί την οριζόντια ασύμπτωτη της.



Είναι $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Άρα, η $y = 0$ (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Θέτω $x = \varepsilon\varphi\omega$ άρα, $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = (1+\varepsilon\varphi^2\omega)d\omega$

• Όταν $x \to -\infty$ από $x = \varepsilon\varphi\omega$ είναι $\omega \to \frac{-\pi}{2}$

• Όταν $x \to +\infty$ από $x = \varepsilon\varphi\omega$ είναι $\omega \to \frac{\pi}{2}$. Έτσι,

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{(1+\varepsilon\varphi^2\omega)^2} d\omega = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\omega \, d\omega = \pi \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin(2\omega)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Εφαρμογή 28

Εύρεση της στατικής ροπής και της ροπής αδρανείας του ημικυκλίου $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ ως προς τον άξονα xx'

• Είναι $M_x = \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} \, dx = r\int_{-r}^{r} dx = 2r^2$

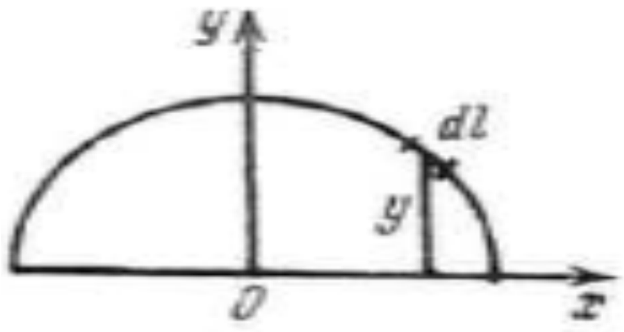
• Είναι $I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}$

$dx = r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx = 2r\int_{0}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx$ (άρτια η συνάρτηση)

Για να υπολογίσω το τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτω $x = r\cdot\sin t \Rightarrow dx = r\cdot\cos t \; dt$

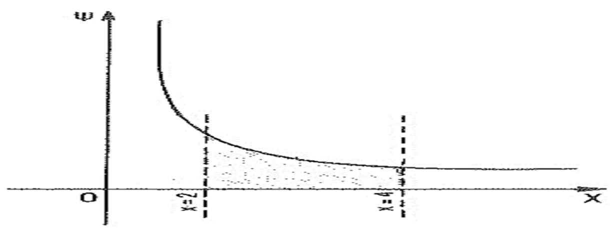
• Αν $x = 0$ τότε $t = 0$ • Αν $x = r$ τότε $t = \frac{\pi}{2}$ Άρα,

$$I_x = 2r\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}dt = r\cdot\cos t \; dt = r^3\int_{0}^{\pi/2} \left[1+\cos(2t)\right] dt = r^3\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t) \right]_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}$$



Εφαρμογή 29

Εύρεση των στατικών ροπών και των ροπών αδρανείας, του τόξου του 1ου τεταρτημόριου, της αστροειδούς με εξισώσεις $x = a\cdot\cos^3 t$, $y = a\cdot\sin^3 t$



Λόγω συμμετρίας της καμπύλης ως προς τους άξονες, είναι $M_\chi = M_y$ και $I_\chi = I_y$

Στο 1ο τεταρτημόριο, η παράμετρος t ανήκει στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Έχω $d\ell=\sqrt{x_t^2+y_t^2}=3a\cdot\sin t\cdot\cos t\ dt$ Άρα,

- $\mathrm{M}_x=\int_{\alpha}^{\beta} y\ d\ell=\int_0^{\pi/2}\left(\alpha\cdot\sin^3 t\cdot 3\alpha\cdot\sin t\cdot\cos t\ \right)dt=\left[\frac{3\alpha^2}{5}\sin^5 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{5}\alpha^2$ και
- $\mathrm{I}_x=\int_{\alpha}^{\beta} y^2 d\ell=\int_0^{\pi/2}\left(\alpha^2\sin^6 t\cdot 3\alpha\cdot\sin t\cdot\cos t\right)\ dt=\left[\frac{3}{8}\alpha^3\sin^8 t\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{8}\alpha^3$

Άρα, $\mathrm{M}_x=\mathrm{M}_y=\frac{3}{5}\alpha^2$, $\mathrm{I}_x=\mathrm{I}_y=\frac{3}{8}\alpha^3$

Εφαρμογή 30

Εύρεση του κέντρου μάζας, του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή $xy=1$ και από τις ευθείες $x=2$, $x=4$

Οι συντεταγμένες, είναι • $x_0=\dfrac{\int_2^4 x\frac{1}{x}dx}{\int_2^4 \frac{1}{x}dx}=\dfrac{2}{\ln 2}$, • $y_0=\dfrac{\int_2^4 \frac{1}{x^2}dx}{2\int_2^4 \frac{dx}{x}}=\dfrac{1}{8\ln 2}$

Εφαρμογή 31

Εύρεση του κέντρου μάζας, του τόξου της κυκλοειδούς καμπύλης $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$ με $0\le t\le 2\pi$

Είναι $x=a\left(t-\sin t\right)\Rightarrow dx=a\left(1-\cos t\right)dt\Rightarrow\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$

Είναι $y=a\left(1-\cos t\right)\Rightarrow dy=a\cdot\sin t\ dt\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\alpha\cdot\sin t$ Έτσι,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1+\cos^2 t-2\cos t\right)\alpha^2\sin^2 t}=\alpha\sqrt{2-2\cos t}=2\alpha\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Είναι $x_0=\dfrac{\int_0^{2\pi}\alpha(t-\sin t)\cdot 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt}{\int_0^{2\pi}2\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt}$

Ο αριθμητής δίνει $\int_0^{2\pi}\alpha(t-\sin t)2\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt=$

$$2\alpha^2\left[-2t\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)+4\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{4}{3}\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=8\pi\alpha^2$$

Ο παρονομαστής δίνει $\int_0^{2\pi}2\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt=16\alpha\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{4}\right)\cos\left(\frac{t}{4}\right)\ d\left(\frac{t}{4}\right)=$

$$16\alpha\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{4}\right)\ d\sin\left(\frac{t}{4}\right)=8\alpha\left[\sin^2\left(\frac{t}{4}\right)\right]_0^{2\pi}=8\alpha$$

Άρα, • $x_0=\dfrac{8\pi\alpha^2}{8\alpha}=\pi\alpha$

Είναι $y_0=\dfrac{\int_0^{2\pi} y2\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt}{\int_0^{2\pi}\alpha\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt}=\dfrac{2\alpha\int_0^{2\pi}\alpha(1-\cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt}{8\alpha}=$

$$\frac{2\alpha^2\left[-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{4}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}}{8\alpha}=\frac{2\alpha^2\frac{16}{3}}{8\alpha}=\frac{4}{3}\alpha$$

Άρα, $K\left(\pi\alpha,\frac{4}{3}\alpha\right)$

Εφαρμογή 32

Εύρεση του έργου του βάρους, κατά την εκτόξευση πυραύλου σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης. Το ζητούμενο έργο A είναι αρνητικό, διότι το βάρος B του πυραύλου σε κάθε σημείο της τροχιάς του, έχει φορά αντίθετη από τη μετατόπιση. Η δύναμη έλξης του πυραύλου είναι B=G $\frac{m_\Pi\cdot m_\Gamma}{x}$ όπου m_Π, m_Γ οι μάζες πυραύλου και Γης αντίστοιχα, x η απόσταση του πυραύλου από κέντρο της Γης και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Έστω R η ακτίνα της Γης. Είναι

$$W=-\int_R^{+\infty}Bdx=-\int_R^{+\infty}\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{x^2}dx=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\int_R^{+\infty}x^{-2}dx=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\int_R^{\beta}x^{-2}dx=$$

$$=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{\beta}=-Gm_\Pi\cdot m_\Gamma\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{R}\right]=-\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{R}=-\frac{Gm_\Pi\cdot m_\Gamma}{R^2}$$

$R=-B_0\cdot R$ Όπου B_0 το βάρος του πυραύλου στην επιφάνεια της Γης.

Εφαρμογή 33

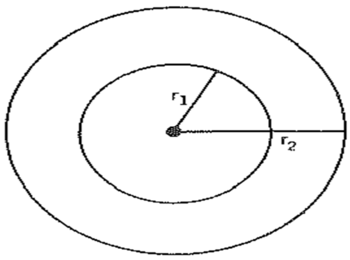
Εύρεση της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου, όταν μεταπηδά από επιτρεπτή τροχιά ακτίνας r_1 σε άλλη επιτρεπτή r_2 σύμφωνα με τις συνθήκες του Bohr.

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ πυρήνα–ηλεκτρονίου είναι από το νόμο του Coulomb $F=K\frac{Q\cdot e}{r^2}$ (όπου Q το φορτίο του πυρήνα, e το φορτίο του ηλεκτρονίου και r η απόσταση πυρήνα–ηλεκτρονίου). Έτσι, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta E_j=\int_{r_1}^{r_2}F\,dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{K\cdot Q\cdot e}{r^2}dr=K\cdot Q\cdot e\int_{r_1}^{r_2}r^{-2}\,dr=$$

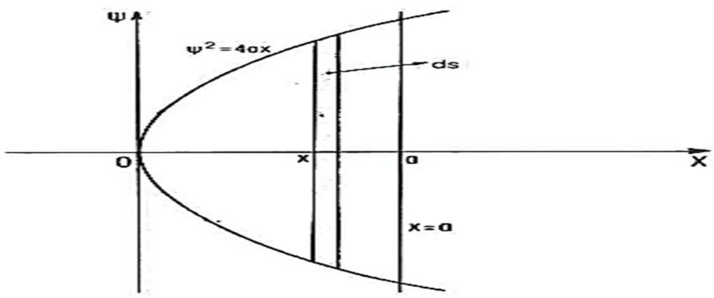
$$K\cdot Q\cdot e\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}=K\cdot Q\cdot e\left[-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right]=K\cdot Q\cdot e\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Τα r_1, r_2 θα υπολογισθούν από την 1η συνθήκη του Bohr $mur=n\frac{h}{2\pi}$ (n=1, 2,…) και την κεντρομόλο δύναμη $\frac{m\cdot u^2}{r}=K\frac{Q\cdot e}{r^2}$



Εφαρμογή 34

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα yy', του σχήματος που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4ax$ και από την ευθεία $x = a$, $a > 0$

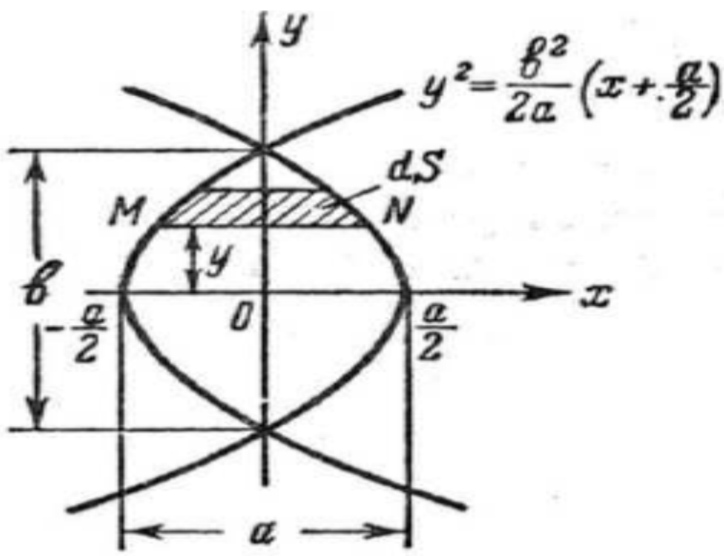


Έστω ds το εμβαδόν της στοιχειώδους ζώνης, που είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' Είναι $dI_x = x^2 ds$ και $ds = 2|y|dx = 2\sqrt{4ax}\ dx$

Η $dI_x = x^2 ds$ δίνει $dI_x = 4x^2\sqrt{ax}\ dx \Rightarrow I_x = \int_0^{\alpha} 4x^2\sqrt{ax}\ dx = 4\sqrt{a}\int_0^{\alpha} x^{5/2}\ dx = \ldots = \frac{8}{7}a^4$

Εφαρμογή 35

Εύρεση της ροπής αδρανείας ως προς τον άξονα xx', του χωρίου που περικλείεται από της παραβολές (c_1): $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$ και (c_2) $y^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)$ και από τον άξονα xx'



Είναι $dI_x = y^2 ds$ όπου ds είναι το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου, που είναι παράλληλο προς τον άξονα xx'. Είναι $ds = |AB| dy$

Είναι $|\mathrm{AB}| = x_2 - x_1 = 2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha}{\beta^2} y^2\right) = \alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2$

Άρα, η $dI_x = y^2 ds$ από τις $ds = |AB| dy$ και $|\mathrm{AB}| = \alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2$ δίνει

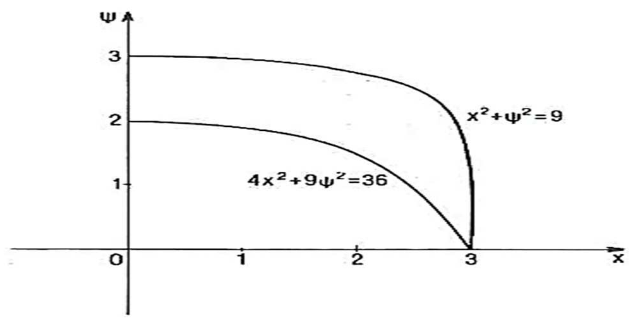
$$dI_x = y^2\left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2\right) dy \Rightarrow \mathrm{I}_x = \int_0^{\beta/2} y^2\left(\alpha - \frac{4\alpha}{\beta^2} y^2\right) dy = \ldots = \frac{\alpha\beta^3}{30}$$

Εφαρμογή 36

Εύρεση των στατικών ροπών ως προς τους άξονες yy', xx' και του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου του 1ου τεταρτημόριου, που περικλείεται από την έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$

Είναι

- $$\mathrm{M}_y = \int_0^3 x(y_2 - y_1) dx = \int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right] dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx = 3$$
- $$\mathrm{M}_x = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[(9-x^2) - \frac{4}{9}(9-x^2)\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9}x^2\right) dx = 5$$



Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους Κ

Είναι $x_0 = \frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}}$, $y_0 = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}}$ όπου Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Είναι • $\mathrm{E} = \frac{3\pi}{4}$ Άρα, • $x_0 = \frac{4}{\pi}$, • $y_0 = \frac{20}{3\pi}$

Εφαρμογή 37

Εύρεση του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου, που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$ με $x \geq 0$

Τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων είναι $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Το εμβαδόν του χωρίου είναι • $\mathrm{E} = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx = \frac{4-\pi}{4}$

Είναι $x_0 = \frac{M_y}{E}$, $y_0 = \frac{M_x}{E}$ και

$$\bullet\ M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24}$$

$$\bullet\ M_y = \int_0^{\pi/2} x\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.\ \text{Άρα,}\ x_0 = \frac{12-\pi^2}{12-3\pi},\ y_0 = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$$

Εφαρμογή 38

Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου ΑΒ, ομογενούς υλικής γραμμής με εξίσωση $y = chx$, όταν $A(0,1)$, $B(a,cha)$

Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους. Είναι $x_0 = \frac{M_y}{\ell}$, $y_0 = \frac{M_x}{\ell}$

Έχω $\ell = \int_0^{\alpha}\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^{\alpha}\sqrt{1+sh^2x}\ dx = \int_0^{\alpha} chx\ dx = sha$

$$M_y = \int_0^{\alpha} x\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^{\alpha} x\sqrt{1+sh^2x}\ dx = \int_0^{\alpha} xchx\ dx = [xshx]_0^a - \int_0^{\alpha} shx\ dx = asha - cha + 1$$

$$\bullet\ M_x = \int_0^{\alpha} y\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_0^{\alpha} y\sqrt{1+sh^2x}\ dx = \int_0^{\alpha} ychx\ dx = \int_0^{\alpha} ch^2x\ dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a (1+ch(2x))\ dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{sh(2x)}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2} + \frac{sh(2a)}{4}$$

Άρα, $\bullet\ x_0 = \frac{asha - cha + 1}{sha}$, $\bullet\ y_0 = \frac{\frac{a}{2} + \frac{ch2a}{4}}{sha}$

Εφαρμογή 39

Εύρεση της στατικής ροπής ως προς τον άξονα xx', του τόξου μίας έλλειψης με $y \geq 0$ και του τόξου ενός κύκλου με $y \geq 0$

Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η εξίσωση της έλλειψης. Είναι $y^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2$

Θέλω να βρω τη στατική ροπή του τόξου ΑΒ της έλλειψης ως προς τον άξονα xx' όπου $A(-a,0)$, $B(a,0)$ Είναι

$$M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y\sqrt{1+(y')^2}\ dx = \int_{-a}^{a}\sqrt{y^2+(yy')^2}\ dx = \int_{-a}^{a}\sqrt{\beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2 + \frac{\beta^4}{\alpha^4}x^2}\ dx =$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}x^2}dx = \frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2x^2}dx =$$

$$\frac{2\beta}{\alpha}\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}\ dx^* = \frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon}\tau o\xi\sin\varepsilon\right) = \beta\left(\beta + \frac{\alpha}{\varepsilon}\tau o\xi\sin\varepsilon\right)$$

$\bullet\ \varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$ εκκεντρότητα της έλλειψης

Στην περίπτωση κύκλου είναι $\alpha=\beta$, $\varepsilon=0$ Είναι $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\tau o\xi\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon}=1$

Άρα, $\mathrm{M}_x=\beta(\beta+\alpha)=\beta(\beta+\beta)=2\beta^2$

*Συνάρτηση άρτια

Εφαρμογή 40

Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου καρδιοειδούς $\rho=\alpha\left(1+\cos\varphi\right)$, που περιέχεται μεταξύ των ημιευθειών $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

Η εξίσωση της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις είναι

$x=\rho\cdot\cos\varphi=\alpha(1+\cos\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi=\alpha(1+\cos\varphi)\sin\varphi$

Είναι $d\ell=\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2+\rho^2}\;d\varphi=2\alpha\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$*

Άρα, $\ell=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2+\rho^2}\;d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=4\alpha$

Είναι • $x_0=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi}x\;d\ell=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi}\left[\alpha(1+\cos\varphi)(\cos\varphi)2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=$

$\alpha\int\limits_0^{\pi}\left[\cos\varphi\cdot\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=\alpha\int\limits_0^{\pi}\left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=$

$\alpha\int\limits_0^{\pi}\left[\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=\alpha\int\limits_0^{\pi}\left[2\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=$

(κάνω την αντικατάσταση $\frac{\varphi}{2}=\omega$)

$2\alpha\int\limits_0^{\pi/2}(2\cos^5\omega-\cos^3\omega)\;d\omega=2\alpha\left[2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4\omega\cdot\cos\omega\;d\omega-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\omega\cdot\cos\omega\;d\omega\right]=$

$4\alpha\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\omega)^2\;d(\sin\omega)-2\alpha\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\omega)\;d(\sin\omega)=4\alpha\frac{4}{5}\frac{2}{3}-2\alpha\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\alpha$

Είναι • $y_0=\frac{1}{4\alpha}\int\limits_0^{\pi}y\;d\ell=\frac{1}{4\alpha}\int\limits_0^{\pi}\left[\alpha(1+\cos\varphi)(\sin\varphi)2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=$

$2\alpha\int\limits_0^{\pi}\left[\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=\left[-\frac{4}{5}\alpha\cos^5\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{4}{5}\alpha$

---

*Είναι:

$\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2+\rho^2}=\sqrt{\left(-\alpha\sin\varphi\right)^2+\alpha^2(1+\cos\varphi)^2}=\alpha\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1+2\cos\varphi}=$

$\alpha\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=2\alpha\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, διότι $0\le\varphi\le\pi\Rightarrow 0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}$

Εφαρμογή 41

Εύρεση του κέντρου βάρους του τόξου μία καμπύλης, με εξίσωση $y=\alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, αν $-\alpha\le x\le\alpha$

Η καμπύλη, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'. Άρα, το κέντρο βάρους βρίσκεται στον άξονα yy'. Έστω x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

Είναι $x_0 = 0$ και $y_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} y d\ell = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} y\sqrt{1+(y')^2}dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sqrt{1+sh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)}dx =$

$\frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\alpha} \alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$

Είναι $\ell = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1+(y')^2}dx = 2\int_0^{\alpha} ch\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \left[2\alpha sh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^{\alpha} = 2\alpha sh1$

Έτσι η $y_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\alpha} \alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$ δίνει

$$y_0 = \frac{2}{2\alpha sh1}\int_0^{\alpha} \alpha ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{sh1}\int_0^{\alpha} ch^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{2sh1}\int_0^{\alpha}\left[1+ch\left(\frac{2x}{\alpha}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2sh1}\left[x+\frac{\alpha}{2}sh\left(\frac{2x}{\alpha}\right)\right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{2sh1}\left(1+\frac{1}{2}sh^2\right)$$

Εφαρμογή 42

Εύρεση του κέντρου βάρους του ομογενούς χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη $x = a\cdot\cos t$, $y = \beta\cdot\sin t$ και από τους άξονες των συντεταγμένων (στο 1^o τεταρτημόριο).

Το εμβαδόν $E_{ΟΛ}$ της έλλειψης είναι $E_{ΟΛ} = \pi\cdot\alpha\cdot\beta$

Άρα, το εμβαδόν του χωρίου είναι $\mathrm{E} = \frac{\pi\cdot\alpha\cdot\beta}{4}$

Στο 1^o τεταρτημόριο, το x μεταβάλλεται από 0 ως α, ενώ το t από $\frac{\pi}{2}$ ως 0

- $x_0 = \frac{1}{\mathrm{E}}\int_0^{\alpha} xy\, dx = \frac{1}{\mathrm{E}}\int_{\pi/2}^{0}\left[\alpha\cos t\cdot\beta\sin t\cdot(-\alpha\sin t)\right]dt = \frac{\alpha^2\beta}{\mathrm{E}}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t\cdot\cos t\right)dt =$

$\frac{\alpha^2\beta}{\mathrm{E}}\cdot\frac{1}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\alpha^2\beta}{3\mathrm{E}} = \frac{4\alpha^2\beta}{3\pi\alpha\beta} = \frac{4\alpha}{3\pi}$

- $y_0 = \frac{1}{\mathrm{E}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} y^2 dx = \frac{1}{2\mathrm{E}}\int_{\pi/2}^{0}\beta^2\sin^2 t(-\alpha\cdot\sin t)dt = \frac{2\alpha\beta^2}{\pi\alpha\beta}\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t) =$

$\frac{2\beta}{\pi}\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{4\beta}{3\pi}$

Εφαρμογή 43

Πόσο έργο χρειάζεται για την επιμήκυνση ελατηρίου κατά $4\ cm$, όταν δύναμη $1\ N$ το επιμηκύνει κατά $1\ cm$;

Η αντίδραση F του ελατηρίου που το ένα άκρο του είναι δεμένο, εκφράζεται από τον νόμο του Hooke $F(x) = kx$ όπου

k είναι ο συντελεστής αναλογίας και
x είναι η μεταβολή του ελατηρίου.

Εφόσον για την επιμήκυνση του ελατηρίου κατά $1\ cm$ ενεργεί δύναμη $1\ N$, βρίσκω τον συντελεστή αναλογίας k από τη συνθήκη $1N = k \cdot 1cm \Rightarrow k = 100\dfrac{N}{m}$ οπότε $F(x) = 100\dfrac{N}{m}x$ και από τον τύπο $W = \int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx$ που δίνει το έργο της μεταβαλλόμενης δύναμης είναι • $W = \int_{0}^{0,04} 100x\ dx = 100\dfrac{x^2}{2}\Big|_{0}^{0,04} = 50(0,04)^2 = 0,08$

Εφαρμογή 44

Ηλεκτρικό φορτίο E συγκεντρωμένο στην αρχή των αξόνων, απωθεί φορτίο e από το σημείο $(a,0)$ στο σημείο $(\beta,0)$. Βρείτε το έργο W της απωστικής δύναμης F.

Η απωστική δύναμη είναι $F = \dfrac{E \cdot e}{x^2}$, το έργο της είναι $W = \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\ dx$ άρα, το διαφορικό του έργου είναι $dW = F(x)dx = \dfrac{E \cdot e}{x^2}dx$

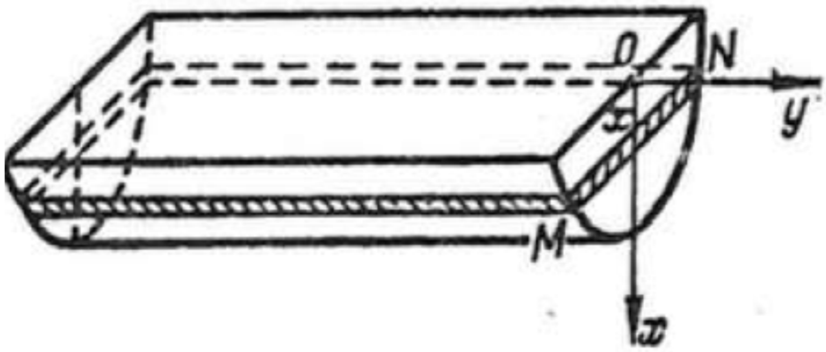
Άρα, • $W = Ee\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{dx}{x^2} = Ee\left(\dfrac{-1}{x}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = Ee\left(\dfrac{-1}{\beta} + \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{Ee(\beta - \alpha)}{\alpha\beta}$

Για την επ΄ άπειρον μετακίνηση του φορτίου e, δηλαδή για $\beta \to \infty$, το έργο είναι $W = \dfrac{E \cdot e}{a}\lim_{\beta\to\infty}\left(1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \dfrac{E \cdot e}{a}$

Εφαρμογή 45

Βρείτε το έργο που απαιτείται για την άντληση νερού, από δοχείο ημικυλινδρικού σχήματος, μήκους α και ακτίνας R

Εκλέγω σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο όγκος του στρώματος του νερού που βρίσκεται σε βάθος x και έχει μήκος α, είναι $dV = \alpha \cdot MN\ dx$ όπου MN χορδή παράλληλη προς τη διάμετρο της ημιπεριφέρειας συνεπώς $MN = 2\sqrt{R^2 + x^2}$

Από $dV = \alpha \cdot MN\ dx$ και $MN = 2\sqrt{R^2 + x^2}$ προκύπτει ότι $dV = 2\alpha\sqrt{R^2 + x^2}dx$

Η στοιχειώδης δύναμη που χρειάζεται για να ανυψωθεί το στρώμα του νερού είναι $dF = 2\alpha g\sqrt{R^2 + x^2}\ dx$ και το στοιχειώδες έργο είναι $dW = x \cdot dF$

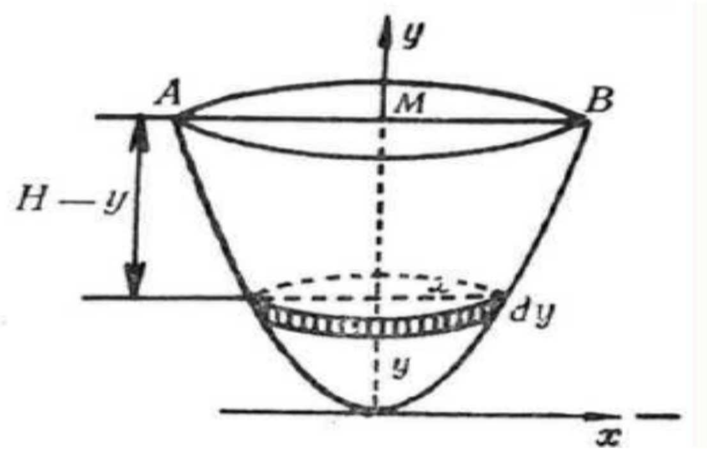
Άρα, • $W = 2\alpha \cdot g\int_0^R \sqrt{R^2+x^2}x\ dx = \frac{-2}{3}\alpha \cdot g\left(R^2+x^2\right)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\alpha \cdot g \cdot R^3$

Εφαρμογή 46

Καζάνι (λέβητας), σχήματος παραβολοειδούς εκ επιστροφής, έχει βάθος $H = 0{,}5\ m$ Βρείτε το έργο που χρειάζεται για την άντληση του νερού που περιέχεται στο καζάνι.

Το στοιχειώδες έργο είναι $dW = \rho \cdot g \cdot dV(H-y)$ όπου $dV = \pi x^2 dy$ και ρ είναι η πυκνότητα του νερού. Άρα, $dW = \rho \cdot g \cdot \pi x^2\left(H-y\right)dy$

Εκλέγοντας ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα, η εξίσωση της παραβολής είναι $x^2 = 2p \cdot y$



Επειδή το σημείο $B\left(R,H\right)$ ανήκει στην παραβολή είναι $R^2 = 2p \cdot H \Rightarrow 2p = \frac{R^2}{H}$

Από $x^2 = 2py$ και $2p = \frac{R^2}{H}$ προκύπτει $x^2 = \frac{R^2}{H}y$

Από $dW = \rho \cdot g \cdot \pi x^2\left(H-y\right)dy$ και $x^2 = \frac{R^2}{H}y$ προκύπτει

• $dW = \rho \cdot g \cdot \pi\frac{R^2}{H}y\left(H-y\right)\ dy = \frac{\rho \cdot g \cdot \pi R^2}{\mathrm{H}}\int_0^{\mathrm{H}}(\mathrm{H}-y)H\ dy =$

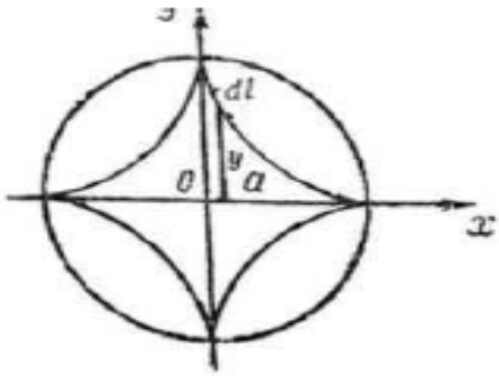
$\frac{\rho \cdot g \cdot \pi R^2}{H}\left(\frac{y^2 H}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \frac{\rho \cdot g \cdot \pi R^2 H^2}{6}$

Εφαρμογή 47

Βρείτε τις στατικές ροπές και τις ροπές αδρανείας του τόξου της καμπύλης $x = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^3 t$, $y = \alpha \cdot \eta\mu^3 t$ που βρίσκεται στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

Επειδή το αστροειδές είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες xx' και yy' ισχύει ότι $M_x = M_y$ και $I_x = I_y$ Είναι $dM_x = y \cdot d\ell$ και $dI_x = y^2 \cdot d\ell$

όπου $d\ell = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(x'\right)^2 dt} = 3\alpha \cdot \eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t\ dt$ με $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ οπότε



• $M_x = \int_0^{\alpha} y\, dl = 3\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 t \cdot \sigma\upsilon\nu t\, dt = \frac{3\alpha^2}{5} \eta\mu^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}$

• $I_x = \int_o^{\alpha} y^2 dl = 3\alpha^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^7 t \cdot \sigma\upsilon\nu t\, dt = \frac{3\alpha^3}{8} \eta\mu^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^3}{8}$

Συνεπώς, • $\mathrm{M}_x = M_y = \frac{3\alpha^2}{5}$ και • $I_x = I_y = \frac{3\alpha^3}{8}$

Εφαρμογή 48

Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που παράγεται απ' την περιστροφή της καρδιοειδούς $\rho = \alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)$ με $0 \le \varphi \le 2\pi$, γύρω από τον πολικό άξονα.

Θα γίνει χρήση του τύπου $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \eta\mu\varphi\, d\varphi$ όπου ρ, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες. Επειδή ο πολικός άξονας διαιρεί το σχήμα σε δύο ίσα μέρη, η ολοκλήρωση γίνεται από το 0 ως το π:

$$V = \frac{2\pi\alpha^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)^3 \eta\mu\varphi\, d\varphi = \frac{-2\pi\alpha^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)^3 d(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) =$$

$$\frac{2\pi\alpha^3}{3} \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)^4}{4} \Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{8}{3}\pi\alpha^3$$

Εφαρμογή 49

Υπολογίστε τον όγκο του στερεού σώματος που παράγεται από την περιστροφή του σχήματος $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, γύρω από τον άξονα Ox

Θέτοντας $x = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y = \rho \cdot \eta\mu\varphi$ στην παραπάνω εξίσωση, παίρνω $\rho = \alpha\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\varphi}$ Εφαρμόζοντας τον τύπο $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \eta\mu\varphi\, d\varphi$, όπου ρ, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες, προκύπτει ότι:

$$V = \frac{2\pi}{3\alpha^3} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^3 (\sigma\upsilon\nu(2\varphi))^{\frac{3}{2}} \eta\mu\varphi\, d\varphi = \frac{-4\pi\alpha^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}}\, d(\sigma\upsilon\nu\varphi) =$$

$$\frac{-4\pi\alpha^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} d(\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{4\pi\alpha^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dz =$$

$$\frac{-4\pi\alpha^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{z}{4}\left(z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=$$

$$\frac{-4\pi\alpha^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{3}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]=\frac{\pi\alpha^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right]$$

Εφαρμογή 50

Βρείτε τη ροπή αδρανείας ομογενούς κώνου ακτίνας βάσης R και ύψους H ως προς τον άξονα του.

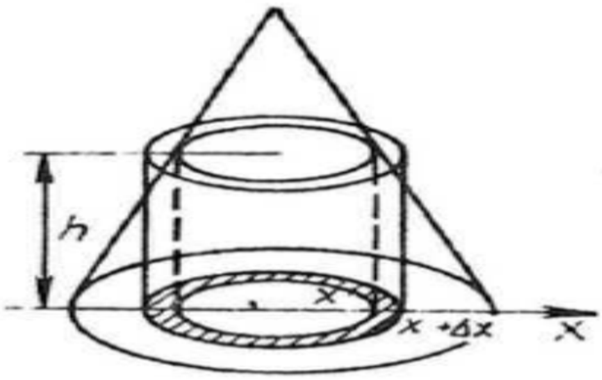
Διαμερίζω τον κώνο σε στοιχειώδεις κυλινδρικούς σωλήνες, παράλληλα προς τον άξονα του κώνου. Ο όγκος ενός τέτοιου στοιχειώδους κυλινδρικού σωλήνα, είναι $dV = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot dr$ όπου r η ακτίνα του σωλήνα (απόσταση από τον άξονα)

$$h = H\left(1-\frac{r}{R}\right) \text{ το ύψος του σωλήνα}$$

Η $dV = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot dr$ επειδή $h = H\left(1-\frac{r}{R}\right)$, γράφεται $dV = 2\pi \cdot H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\, dr$

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα του κώνου, είναι $dI = \rho \cdot r^2\, dV$ όπου ρ η πυκνότητα του ομογενούς κώνου.

Η $dI = \rho \cdot r^2\, dV$ λόγω της $dV = 2\pi \cdot H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\, dr$ γράφεται ως $dI = 2\rho \cdot \pi \cdot H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr$, συνεπώς $I = 2\rho \cdot \pi \cdot H\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^4 \cdot H}{10}$



Επεξήγηση

Η $dV = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot dr$ προκύπτει από τα παρακάτω.

$$dV = \pi\left(r+dr\right)^2 h - \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot h\left(r^2 + 2r\, dr + dr^2 - r^2\right) \Rightarrow dV = 2r \cdot \pi \cdot h\, dr + \pi \cdot h\, dr^2$$

Το dr^2 είναι απειροστό ανώτερης τάξης ως προς dr και για αυτό παραλείπεται δηλαδή $dV = 2\pi \cdot r \cdot h\, dr$

Η ισότητα $h = H\left(1-\frac{r}{R}\right)$ προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$

Εφαρμογή 51

Πόσο έργο χρειάζεται για να αντληθεί νερό, από δοχείο κωνικής μορφής (ακτίνα βάσης $R = 1\ m$, ύψος $H = 2\ m$), γεμάτο νερό μέχρι πάνω, με την κορυφή στραμμένη κάτω;

Σε βάθος x παίρνω στοιχειώδες οριζόντιο στρώμα νερού dx

Το στοιχειώδες έργο που χρειάζεται, για να ανυψωθεί το στοιχειώδες στρώμα μέχρι πάνω είναι $dW = \rho \cdot \pi \cdot \Delta V x$ (1) όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού $\left(\rho = 1000\ \dfrac{kgr}{m^3}\right)$ και $\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot dx$

Για να βρω το r από τα όμοια τρίγωνα ΟΓΑ και O_1BA προκύπτει:

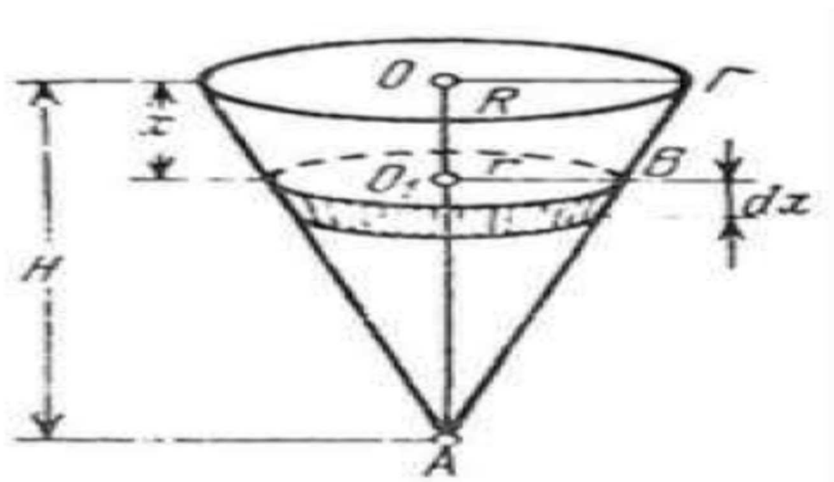
$\dfrac{r}{R} = \dfrac{H-x}{H} \Rightarrow r = \dfrac{R}{H}(H-x)$ Άρα, $dV = \pi \dfrac{R^2}{H^2}(H-x)^2\, dx$ (2)

Η $dW = \rho \cdot \pi \cdot \Delta V x$ με τη βοήθεια της $dV = \pi \dfrac{R^2}{H^2}(H-x)^2\, dx$ γίνεται:

- $dW = 1000 \dfrac{\pi R^2}{H^2}(H-x)^2\, x\, dx$ Άρα,
- $W = 1000 \dfrac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H-x)^2\, x\, dx = \dfrac{1000\pi R^2}{H^2}\left(H^2 \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{3}Hx^3 + \dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H =$

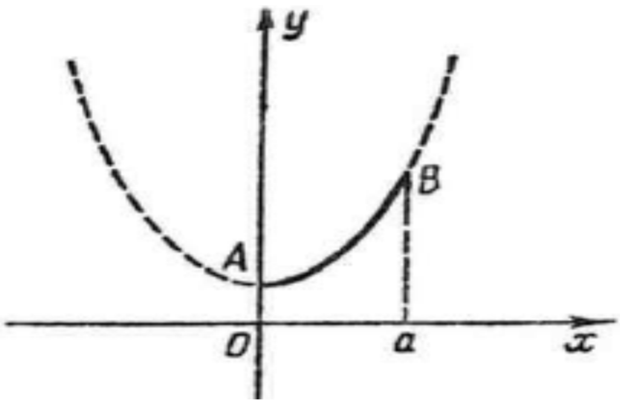
$\dfrac{1000\pi R^2}{12H^2} H^4 = \dfrac{1000\pi R^2}{12} H^2$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των R, H και πολλαπλασιάζοντας με το 9,807 παίρνω (όταν η πυκνότητα του νερού είναι $1000\ \dfrac{kgr}{m^3}$, τότε το βάρος του σε $1\ m^3$ είναι $9{,}807 \cdot 1000 = 9807\ N$) ότι $W = \dfrac{9807 \cdot 1 \cdot 4\pi}{12} = 3269 \cdot \pi\ Joule$



Εφαρμογή 52

Προσδιορίστε το κέντρο βάρους του τόξου, της αλυσοειδούς καμπύλης $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, από το σημείο Α(0,1) ως το σημείο $B\left(\alpha, \dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)\right)$



Είναι

$$dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)^2\right]}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}}\,dx=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx$$

Συνεπώς $M_x=\frac{1}{4}\int_0^\alpha\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^\alpha=$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{2}+2\alpha-\frac{1}{2}e^{-2a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{2}e^{-2a}\right)+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8}\left(e^{2\alpha}-e^{-2a}\right)$$

Ισχύει ότι $\bar{x}=\dfrac{M_y}{\int_L dl}$ και $\bar{y}=\dfrac{M_x}{\int_L dl}$

Είναι $\int_L dl=\frac{1}{2}\int_0^\alpha\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^\alpha=\frac{1}{2}\left(e^a-1-e^{-a}\right)$

Συνεπώς, • $\bar{x}=\dfrac{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8}\left(e^{2a}-e^{-2a}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)}$

Είναι $M_y=\int_L x\,dl=\frac{1}{2}\int_0^a x\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^a xe^xdx+\int_0^a xe^{-x}dx\right)=$

$$\frac{1}{2}\left[xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^xdx+\left(-xe^{-x}\Big|_0^a+\int_0^a e^{-x}dx\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(ae^a-e^x\Big|_0^a-ae^{-a}-e^{-x}\Big|_0^a\right)=\frac{1}{2}\left(ae^a-e^a+1-ae^{-a}-e^{-a}+1\right)=$$

$$\frac{a}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)-\frac{1}{2}\left(e^a+e^{-a}\right)+1$$

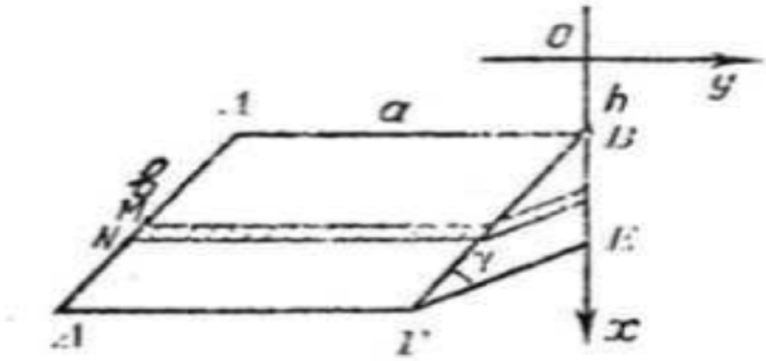
Συνεπώς, • $\bar{y}=\dfrac{M_Y}{\int_L dl}=\dfrac{\frac{a}{2}\left(a^a-e^{-a}\right)-\frac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)}$

Το κέντρο βάρους του τόξου της αλυσοειδούς καμπύλης από το σημείο Α(α,0) ως το σημείο $B\left(a,\frac{1}{2}\right)\left(e^a+e^{-a}\right)$ είναι το σημείο $K\left(\bar{x},\bar{y}\right)$

Εφαρμογή 53

Υπολογίστε τη δύναμη που υφίσταται ορθογώνια πλάκα μήκους α και πλάτους β $(\alpha > \beta)$, που έχει κλίση γ^0 ως προς το οριζόντιο επίπεδο του νερού και η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται σε βάθος h

Εκλέγοντας σύστημα συντεταγμένων όπου φαίνεται στο σχήμα, είναι $dp = \gamma \cdot \alpha \cdot \mathrm{MN} \cdot x$ και επειδή $MN = \dfrac{dx}{\eta\mu\gamma}$ είναι $dp = \gamma \dfrac{\alpha \cdot x\, dx}{\eta\mu\gamma}$



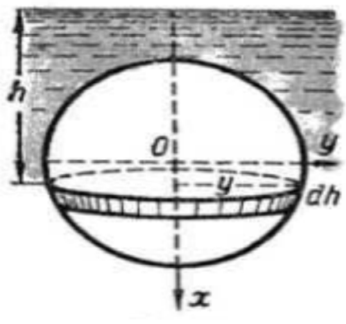
Άρα, $p = \dfrac{\alpha \cdot \gamma}{\eta\mu\gamma} \int_h^{h+BE} x\, dx$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι $\mathrm{BE} = \beta \cdot \eta\mu\gamma$, άρα

$$p = \left(\frac{\alpha \cdot \gamma}{\eta\mu\gamma}\right) \frac{x^2}{2}\Bigg|_h^{h+\beta\eta\mu\gamma} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{2\eta\mu\gamma}\left[(h+\beta\eta\mu\gamma)^2 - h^2\right] = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \left(h + \frac{\beta}{2}\eta\mu\gamma\right)$$

Εφαρμογή 54

Υπολογίστε τη δύναμη του νερού, πάνω στη επιφάνεια μίας σφαίρας διαμέτρου $4\ m$, όταν το κέντρο της βρίσκεται σε βάθος $3\ m$ από την επιφάνεια του νερού.



Από το κέντρο της σφαίρας, θεωρώ επίπεδο κατακόρυφο στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy Κόβω οριζόντια τη σφαίρα, σε βάθος h, οπότε η πίεση του νερού πάνω στη αποκομμένη επιφάνεια της είναι συνάρτηση $F(h)$

Όταν μεταβάλλεται το μέγεθος h κατά dh, τότε το εμβαδόν της αποκομμένης επιφάνειας της σφαίρας μεταβάλλεται κατά $dS = 2\pi y dl \approx \Delta S$, ως εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον άξονα Ox, όπου $d\ell$ είναι διαφορικό τόξο της περιφέρειας κύκλου. Η δύναμη $F(h)$ θα μεταβληθεί κατά $dF = 2\pi \cdot h \cdot y \cdot d\ell$

Εκφράζοντας τη $F(h)$ μέσω μιας μεταβλητής x και ολοκληρώνοντας από -2 μέχρι $+2$, βρίσκω τη δύναμη του νερού στην επιφάνεια όλης της σφαίρας.

Από την εξίσωση της περιφέρειας $x^2+y^2=4 \Rightarrow 2yy'+2x=0 \Rightarrow$

$y'=\dfrac{-x}{y} \Rightarrow d\ell=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\ dx=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\ dx=\dfrac{2}{y}dx$ Από το σχήμα είναι $h=3+x$

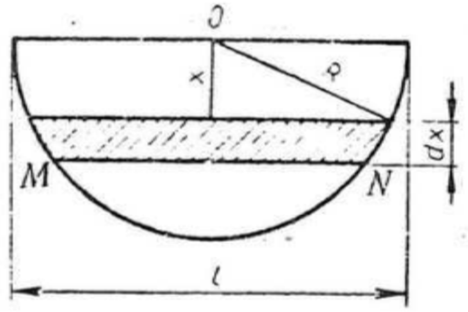
Άρα, $F=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,y\dfrac{2}{y}dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,dx=2\pi\left(3+x\right)^2\Big|_{-2}^{2} \simeq 470880\cdot\pi$

Η δύναμη στη μισή άνω επιφάνεια είναι $F_1=2\pi\left(3+x\right)\Big|_{-2}^{0}\approx 157000\cdot\pi$

Η δύναμη στη μισή κάτω επιφάνεια $F_2=2\pi\left(3+x\right)\left(3+x\right)\Big|_{0}^{2}=314000\cdot\pi$

Εφαρμογή 55

Πόση δύναμη ασκεί το νερό, σε κατακόρυφη πλάκα ημικυκλικού σχήματος διαμέτρου $6\ m$ που η διάμετρος της βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού;



Για τη δύναμη στη στοιχειώδη ζώνη, είναι $dF=\rho\left(MN\right)x\ dx$ όπου ρ η πυκνότητα του νερού $\left(\rho=1000\ \dfrac{kgr}{m^3}\right)$ Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι

$$R^2=x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell}{2}\right)^2=R^2-x^2 \Rightarrow l^2=4\left(R^2-x^2\right) \Rightarrow l=2\sqrt{R^2-x^2}$$

Άρα, $dF=2\rho\sqrt{R^2+x^2}x\ dx$ Συνεπώς,

$$F=2\rho\int_0^R\sqrt{R^2+x^2}x\ dx=\frac{-2\rho}{2}\int_0^R\left(R^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\ d\left(R^2-x^2\right)=-\rho\left.\frac{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^R=\frac{2}{3}\rho R^3$$

Αντικαθιστώντας όπου $R=3\ m$ και $\rho=1000\ \dfrac{kgr}{m^3}$ προκύπτει $F=176400$

Εφαρμογή 56

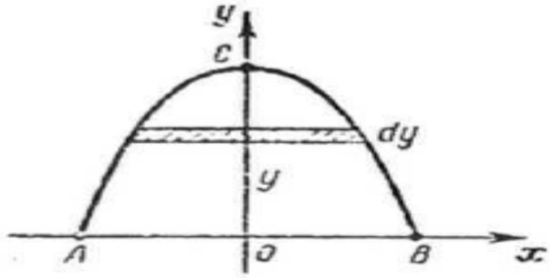
Βρείτε τη ροπή αδρανείας του παραβολοειδούς τμήματος, του οποίου η χορδή ισούται με a και το ύψος με h

Εκλέγω σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα, οπότε $AB=a$, $OC=h$ Γράφω την εξίσωση της παραβολής $y=h-Nx^2$, όπου N είναι προσδιοριστέος συντελεστής. Ο συντελεστής Ν προσδιορίζεται ως εξής:

Το σημείο Β$\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$ανήκει στην παραβολή, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της, συνεπώς $0 = h - N\dfrac{a^2}{4} \Rightarrow N = \dfrac{4h}{a^2}$ άρα, $y = h - \dfrac{4h}{a^2}x^2$ οπότε

$dI_x = y^2 x\, dy = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} y^2\sqrt{h-y}\; dy$

Άρα, $I_x = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}\int_0^h y^2\sqrt{h-y}\; dy = \dfrac{16}{105}a \cdot h^3$



Παρατήρηση. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της αντικατάστασης $\sqrt{h-y} = t$

Εφαρμογή 57

Βρείτε το κέντρο βάρους ενός ημικύκλιου ακτίνας R

Επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy είναι $\overline{x} = 0$

Για την εύρεση της $\overline{y}$, από το θεώρημα του Πάππου είναι $V = 2\pi \cdot S \cdot \overline{y} \Rightarrow \overline{y} = \dfrac{V}{2\pi \cdot S}$

Επειδή το εμβαδόν του ημικύκλιου είναι $S = \dfrac{1}{2}\pi R^2$ και ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής του ημικύκλιου (όγκος σφαίρας) είναι $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ προκύπτει ότι

$$\overline{y} = \frac{V}{2\pi \cdot S} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi \cdot R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Βιβλιογραφία

- Πέππας, Χρ. και Λάμπρου, Χρ. (1981). Ανώτερα μαθηματικά, Αθήνα
- Αναστασιάδη, Ι. και Γεωργανοπούλου, Γ. (1967). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Β΄, Θεσσαλονίκη.
- Αντωνόπουλου, Π. (1983). *Μαθηματικά ΙΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Βαρελά, Γ. (1970). *Γενικά μαθηματικά*, τόμος Α΄, Θεσσαλονίκη.
- Βασιλείου, Φ. (1970). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Ι και ΙΙ.
- Βουλασίκη, Σ. (1981). *Μαθηματικά ΙΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά ΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Μαθηματικά ΙΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Γάγαλη, Ν. (1981). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Α΄ και Β΄
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1968). *Γενικά μαθηματικά*.
- Δασκαλόπουλου, Δ. (1967). *Ανώτερα μαθηματικά*, τόμοι Β΄ και Γ΄, Αθήνα.
- Κάππου, Δ. (1962). *Μαθήματα αναλύσεως – απειροστικός λογισμός*, Αθήνα
- Λαζαρίδη, Λ. (1974). *Στοιχεία μαθηματικής αναλύσεως*, Λάρισα.

- Λαζαρίδη, Λ. (1981). *Εφαρμοσμένα μαθηματικά*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μακρυγιάννη, Α. (1986). *Μαθηματικά ΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
- Μπαρμπάνη, Β. (1970). *Μαθήματα διαφορικών εξισώσεων*, Πάτρα
- Μπίτη, Γ. (1973). *Ασκήσεις ανωτέρων μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη.
- Παντελίδη, Γ. (1974). *Σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών*, τόμοι Β΄ και Γ΄, Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1977). Μαθηματική ανάλυση, τόμοι 1, 2, Αθήνα.
- Παντελίδη, Γ. (1979). Μαθήματα αναλύσεως, Αθήνα, εκδόσεις Ρώσση.
- Παπαμιχαήλ, Δ. (1966). *Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών*, Αθήνα.
- Σοφιανός, Γ. (1984). *Μαθηματικά ΙΙΙ*, Αθήνα, ΟΕΔΒ.