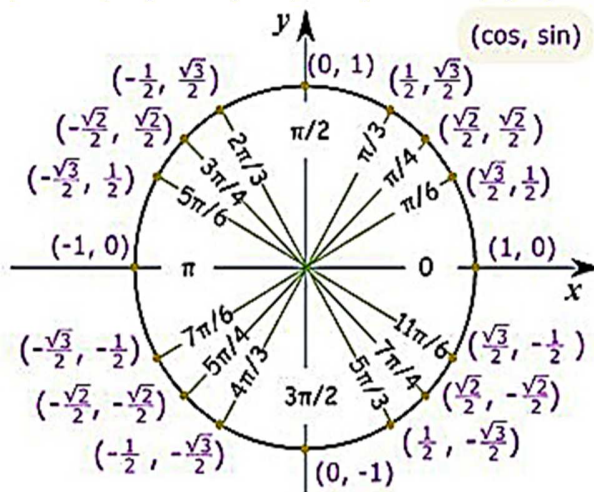




Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς τόξων



Σπουδαστής: Καρβέλης Βασίλειος (AM 9229)

Επιβλέπων Καθηγητής: Στέφανος Ι. Καρναβάς, Μαθηματικός (MEd, PhD)
Επίκουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό έτος: 2025–2026

Ημερομηνία ανάθεσης: 15.11.2024

Ημερομηνία κατάθεσης: ...02.2026

Ημερομηνία εξέτασης: 02.03.2026

A/A	Όνοματεπώνυμο	Χαρακτηρισμός	Υπογραφή
1	Στέφανος Ι. Καρναβάς Μαθηματικός (PhD) Επίκουρος Καθηγητής	Άριστα 10	
2	Δρ. Λάλου Παναγιώτα Μαθηματικός (PhD) Καθηγήτρια	Άριστα 10	
3	Τσαγκανός Γεώργιος Αυτοματιστής (Msc) ΕΔΙΠ	Άριστα 10	
Τελικός χαρακτηρισμός		Άριστα 10	

Περίληψη

Η εργασία, ασχολείται με τη μελέτη και με την εφαρμογή των τριγωνομετρικών αριθμών του άθροισματος και της διαφοράς των τόξων και των σχετικών ταυτοτήτων, για τα ακέραια πολλαπλάσια των τόξων. Αρχικά, παρουσιάζεται η έννοια του τριγωνομετρικού (μοναδιαίου) κύκλου και η χρήση του για την απόδειξη των βασικών ταυτοτήτων του ημιτόνου, του συνημίτονου, της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης.

Στη συνέχεια, επεκτείνεται η ανάλυση σε πιο σύνθετες ταυτότητες που αφορούν στο άθροισμα τριών τόξων και στους μετασχηματισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από άθροισμα σε γινόμενο και αντίστροφα. Η εργασία, περιλαμβάνει πλήθος αποδείξεων και εφαρμογών σε προβλήματα της τριγωνομετρίας, με στόχο την ουσιαστική κατανόηση και τη σύνδεσή με τη γεωμετρία και με τη φυσική.

Λέξεις κλειδιά

Τριγωνομετρία, άθροισμα τόξων, διαφορά τόξων, πολλαπλάσια τόξων, τριγωνομετρικές ταυτότητες, τριγωνομετρικός κύκλος, μοναδιαίος κύκλος, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα, συντέμνουσα,

Περιεχόμενα

Λέξεις κλειδιά.....	2
Εισαγωγή.....	5
1. Εφαρμογές των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων.....	5
1.1 Στη φυσική.....	5
1.2 Στην ηλεκτροτεχνία.....	6
1.3 Στην τεχνολογία των επικοινωνιών.....	6
1.4 Στη μηχανική.....	6
1.5 Στην οπτική.....	6
1.5.1 Στις ταλαντώσεις.....	7
1.6 Στην ακουστική και στη μουσική.....	7
1.7 Εφαρμογές στη ναυτιλία.....	7
1.7.1 Πλοήγηση πάνω σε μέγιστο κύκλο (Great circle navigation).....	7
1.7.2 Υπολογισμός της αρχικής και της τελικής πορείας (Initial and final course).....	8
1.7.3 Αστροναυτιλία (Celestial navigation).....	8
1.7.4 Τριγωνισμός ραντάρ – Στίγμα από αποστάσεις / διόπτρευση.....	8
1.7.5 Μετατροπές μεταξύ πλάτους, απόκλισης και ανύψωσης.....	9
1.7.6 Υπολογισμοί ανέμων και ρευμάτων (Vector navigation).....	9
1.7.7 Χρήση σε ηλεκτρονικά ναυτιλιακά συστήματα.....	9
2. Ο τριγωνομετρικός κύκλος.....	9
2.1 Απόδειξη των ταυτοτήτων με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.....	10
2.1.1 Υπολογισμός του $\cos(\alpha-\beta)$	10
2.1.2 Υπολογισμός του $\cos(\alpha+\beta)$	12
2.1.3 Υπολογισμός του $\sin(\alpha+\beta)$	12
2.1.4 Υπολογισμός του $\sin(\alpha-\beta)$	12
2.1.5 Υπολογισμός της $\tan(\alpha+\beta)$	12
2.1.6 Υπολογισμός της $\tan(\alpha-\beta)$	13
2.1.7 Υπολογισμός της $\cot(\alpha+\beta)$	13
2.1.8 Υπολογισμός της $\cot(\alpha-\beta)$	13
2.2 Εφαρμογές.....	14
Εφαρμογή 1.....	14
Εφαρμογή 2.....	15
Εφαρμογή 3.....	15
Εφαρμογή 4.....	15
3. Ταυτότητες υπό συνθήκες.....	15
3.1 Ταυτότητα 1.....	15
3.2 Ταυτότητα 2.....	16
3.3 Ταυτότητα 3.....	17
4. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος τριών τόξων.....	17
4.1 Υπολογισμός του $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$	17
4.2 Υπολογισμός του $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$	17
4.3 Υπολογισμός της $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$	17
4.4 Υπολογισμός της $\cot(\alpha+\beta+\gamma)$	18
Εφαρμογή 5.....	18
5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 2α	18
5.1 Υπολογισμός του $\sin(2\alpha)$	18
5.2 Υπολογισμός του $\cos(2\alpha)$	18
5.3 Υπολογισμός του $\tan(2\alpha)$	19
5.4 Υπολογισμός του $\cot(2\alpha)$	19
5.5 Τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου (3α)	19
5.6 Τύποι του Simpson.....	19

5.7 Εφαρμογές.....	20
Εφαρμογή 6.....	20
Εφαρμογή 7.....	20
Εφαρμογή 8.....	21
Εφαρμογή 9.....	22
Εφαρμογή 10.....	23
Εφαρμογή 11.....	23
Εφαρμογή 12.....	23
Εφαρμογή 13.....	24
Εφαρμογή 14.....	24
Εφαρμογή 15.....	25
Εφαρμογή 16.....	25
Εφαρμογή 17.....	26
Εφαρμογή 18.....	26
6. Μετασχηματισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.....	26
6.1 Μετασχηματισμός του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο ομώνυμων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, σε γινόμενο ή πηλίκο.....	26
6.2 Ειδικές περιπτώσεις.....	27
6.2.1 Περίπτωση 1.....	27
6.2.2 Περίπτωση 2.....	28
6.2.3 Περίπτωση 3.....	28
6.2.4 Περίπτωση 4.....	28
6.2.5 Περίπτωση 5.....	28
6.2.6 Περίπτωση 6.....	28
6.2.7 Περίπτωση 7.....	28
6.3 Εφαρμογές.....	29
Εφαρμογή 19.....	29
Εφαρμογή 20.....	29
Εφαρμογή 21.....	29
Εφαρμογή 22.....	30
Εφαρμογή 23.....	31
6.4 Μετασχηματισμός των γινομένων σε αθροίσματα ή σε διαφορές.....	32
Εφαρμογή 24.....	32
Εφαρμογή 25.....	32
Εφαρμογή 26.....	32
7. Ταυτότητες υπό συνθήκες.....	33
7.1 Τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ.....	33
7.1.1 Σχέση 1.....	34
7.1.2 Σχέση 2.....	34
7.1.3 Σχέση 3.....	35
7.1.4 Σχέση 4.....	35
7.2 Εφαρμογές.....	36
Εφαρμογή 27.....	36
Εφαρμογή 28.....	37
Βιβλιογραφία.....	37

Εισαγωγή

Η τριγωνομετρία αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις κλάδους των μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στη φυσική, στη μηχανική και στην τεχνολογία διότι παρέχει τα εργαλεία για τη μελέτη των φαινομένων και των πολύπλοκων διεργασιών που επαναλαμβάνονται περιοδικά (ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις διαφορετικών φάσεων ή συχνοτήτων, διάδοση του ήχου). Η λεπτομερής μελέτη των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων, επιτρέπει την ανάλυση και τον συνδυασμό των κυματομορφών, των ταλαντώσεων και των περιοδικών φαινομένων, οδηγώντας σε βαθύτερη κατανόηση των φυσικών φαινομένων ενισχύοντας τη σύνδεση της θεωρίας και των πρακτικών εφαρμογών. Ο τριγωνομετρικός κύκλος αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση και την απόδειξη των βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Οι ταυτότητες του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων (για \sin , \cos , \tan , \cot) είναι θεμελιώδεις για την ανάλυση των συναρτήσεων και τη μελέτη των περιοδικών φαινομένων.

Οι τύποι των πολλαπλασίων τόξων (2α , 3α , ...) και οι τύποι της μετατροπής (από άθροισμα σε γινόμενο και αντίστροφα) επιτρέπουν την απλοποίηση των πολύπλοκων εκφράσεων και βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα φυσικής, κυμάτων και ταλαντώσεων. Μέσα από πλήθος παραδειγμάτων και εφαρμογών, αποδεικνύεται η ισχυρή συσχέτιση αυτών των μαθηματικών εννοιών με τη γεωμετρία των τριγώνων, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις με ειδικές συνθήκες (όπως όταν το άθροισμα των γωνιών ισούται με π ή 2π).

Οι ταυτότητες υπό συνθήκες (όπως σε τρίγωνα), βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων και οδηγούν σε γενικεύσεις και συμπεράσματα που επεκτείνονται πέραν της βασικής τριγωνομετρίας. Η τριγωνομετρία, αποτελεί κρίσιμη γλώσσα περιγραφής της φύσης και της μηχανικής κίνησης. Οι ταυτότητες και οι σχέσεις των τριγωνομετρικών μεγεθών, βρίσκουν άμεση εφαρμογή σε πρακτικά προβλήματα που απαιτούν υπολογισμό γωνιών, αποστάσεων ή περιοδικών φαινομένων.

1. Εφαρμογές των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων

Οι τύποι του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων, δίνουν τη δυνατότητα να εκφράζουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο τόξων, μέσω των τριγωνομετρικών αριθμών των επιμέρους τόξων. Αυτή η ιδιότητα, επιτρέπει τη μαθηματική περιγραφή των φαινομένων που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες ταλαντώσεις, διαφορετικών φάσεων ή συχνοτήτων. Στη φυσική, αυτό αντιστοιχεί στη σύνθεση δύο κυματομορφών, που έχουν διαφορετική φάση ή συχνότητα.

1.1 Στη φυσική

Στη φυσική, οι τύποι αυτοί χρησιμοποιούνται εκτενώς στην ανάλυση των κυματικών φαινομένων και στη μελέτη των ταλαντώσεων. Για παράδειγμα, όταν δύο αρμονικά κύματα της ίδιας συχνότητας αλλά διαφορετικής φάσης συμβάλλουν, τότε η συνισταμένη κυματομορφή περιγράφεται με τη βοήθεια των τύπων του αθροίσματος. Το πλάτος της συνισταμένης, εξαρτάται από τη διαφορά φάσης. Η ίδια μαθηματική αρχή, εφαρμόζεται και στην περιγραφή των διακροτημάτων. Όταν δύο κύματα με ελαφρώς διαφορετικές συχνότητες συμβάλλουν, τότε το αποτέλεσμα είναι μία περιοδική μεταβολή του πλάτους, με συχνότητα ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων.

1.2 Στην ηλεκτροτεχνία

Στην ηλεκτροτεχνία, τα εναλλασσόμενα ρεύματα και οι τάσεις, εκφράζονται συχνά με ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Οι τύποι του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συνισταμένης τάσης ή του ρεύματος όταν δύο ή περισσότερες πηγές εναλλασσόμενης τάσης λειτουργούν ταυτόχρονα με διαφορετικές φάσεις. Αυτή η μέθοδος, επιτρέπει την ανάλυση πολύπλοκων κυκλωμάτων AC και φαινομένων. Κατά τον υπολογισμό της ενεργού τιμής της στιγμιαίας τάσης σε ένα κύκλωμα όπου δύο πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος συνδέονται παράλληλα και για να βρεθεί η συνισταμένη κυματομορφή, γίνεται χρήση των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων.

1.3 Στην τεχνολογία των επικοινωνιών

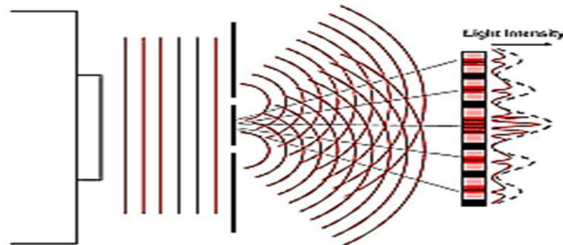
Στην τεχνολογία των επικοινωνιών, οι τύποι του αθροίσματος και της διαφοράς, είναι απαραίτητοι για τη μελέτη της διαμόρφωσης και της αποδιαμόρφωσης των σημάτων. Η διαμόρφωση, επιτυγχάνεται όταν ένα σήμα χαμηλής συχνότητας (το ηχητικό) πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα υψηλής συχνότητας (το φέρον κύμα). Από τους τριγωνομετρικούς τύπους, προκύπτει ότι το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος περιλαμβάνει τη φέρουσα και δύο πλευρικές ζώνες, που αντιστοιχούν στο άθροισμα και στη διαφορά των συχνοτήτων.

1.4 Στη μηχανική

Στη μηχανική, αυτοί οι τύποι εφαρμόζονται στην ανάλυση των δονήσεων και των ταλαντώσεων, σε συστήματα όπως οι γέφυρες, οι μηχανές και οι οικοδομές. Ο συνδυασμός των ταλαντώσεων (δηλαδή όταν ένα μηχανικό σύστημα δέχεται δύο δυνάμεις ταλάντωσης, διαφορετικών φάσεων), περιγράφεται μέσω της χρήσης των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων, βοηθώντας με τον τρόπο αυτό, στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς των συστημάτων, υπό περιοδικές διεγέρσεις, προς αποφυγή των συντονισμών και προς ενίσχυση της σταθερότητας.

1.5 Στην οπτική

Στην οπτική, τα φαινόμενα της συμβολής και της περίθλασης του φωτός, εξηγούνται μέσω των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων. Όταν δύο δέσμες του φωτός, με μικρή διαφορά φάσης, συναντώνται, τότε το αποτέλεσμα (η ένταση του φωτός που προκύπτει) εξαρτάται από τη διαφορά φάσης τους. Η κατανόηση αυτών των φαινομένων (περιοδική εναλλαγή των περιοχών ενίσχυσης και ακύρωσης), είναι θεμελιώδης για όργανα όπως τα συμβολόμετρα.



1.5.1 Στις ταλαντώσεις

Έστω δύο ταλαντώσεις $y_1 = A \cdot \sin(\omega t)$ και $y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Η συνισταμένη ταλάντωση, προκύπτει από τη σχέση $y = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ η οποία δείχνει ότι το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη διαφορά φάσης. Όταν η φάση είναι μηδενική, τότε τα κύματα ενισχύονται πλήρως, ενώ όταν η διαφορά φάσης είναι 180° , τότε αναιρούνται πλήρως.

1.6 Στην ακουστική και στη μουσική

Η ακουστική, ως κλάδος της φυσικής, κάνει εκτεταμένη χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την περιγραφή των ηχητικών κυμάτων. Τα φαινόμενα των διακροτημάτων και της ανάλυσης των σύνθετων ήχων, εξηγούνται μέσω των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων. Όταν δύο ήχοι με ελαφρώς διαφορετικές συχνότητες συμβάλλουν, τότε δημιουργούνται περιοδικές μεταβολές στην ένταση του ήχου. Αυτό το φαινόμενο, αξιοποιείται στη ρύθμιση των μουσικών οργάνων και στη δημιουργία των ηχητικών εφέ.

1.7 Εφαρμογές στη ναυτιλία

Στη ναυτιλία, μεγάλο μέρος των αριθμητικών υπολογισμών γίνεται πάνω στη γήινη σφαίρα και όχι πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται συστηματικά οι τύποι της σφαιρικής τριγωνομετρίας, μεταξύ των οποίων κεντρική θέση κατέχουν οι τύποι του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων. Οι τύποι αυτοί, εμφανίζονται σε πλειάδα σχέσεων–εξισώσεων και βρίσκουν εφαρμογή:

- στη χάραξη της πορείας του πλοίου (course calculations)
- στον υπολογισμό των αποστάσεων, πάνω σε μέγιστους κύκλους (great-circle navigation)
- στον υπολογισμό των αλλαγών της πορείας του πλοίου
- στη ναυσιπλοΐα, με χρήση των άστρων (position fixing using celestial bodies)
- στις διορθώσεις των ναυτιλιακών χαρτών
- στους υπολογισμούς του στίγματος (γεωγραφικό πλάτος και μήκος).

1.7.1 Πλοήγηση πάνω σε μέγιστο κύκλο (Great circle navigation)

Η πιο άμεση εφαρμογή των τύπων των τόξων, είναι στον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο σημείων της γήινης επιφάνειας. Ο βασικός τύπος του μέγιστου κύκλου είναι $\cos d = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos(\Delta\lambda)$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω σχέσης, προκύπτει από τον τύπο $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ και χρησιμοποιείται για:

- τον υπολογισμό των μεγάλων ωκεάνιων διαδρομών
- την επιλογή της οικονομικότερης πορείας (shortest path)
- τον υπολογισμό των σημείων αλλαγής της πορείας (waypoints)
- τα αυτόματα συστήματα Electronic Chart Display Identity System (ECDIS) και Global Positioning System (GPS)

1.7.2 Υπολογισμός της αρχικής και της τελικής πορείας (Initial and final course)

Για τον υπολογισμό της πορείας ενός πλοίου, κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου, ισχύει ότι $\sin C = \frac{\cos \varphi_2 \cdot \sin(\Delta\lambda)}{\sin D}$

Η ποσότητα $\sin(\Delta\lambda)$ και η χρήση των τύπων της διαφοράς των τόξων, είναι απαραίτητη διότι το γεωγραφικό μήκος αλλάζει με τη σύγκλιση των μεσημβρινών. Η εφαρμογή, αφορά:

- τον καθορισμό της πορείας από το σημείο A στο σημείο B
- τις διορθώσεις της πορείας στο radar / ECDIS
- τη σύνδεση της πραγματικής πορείας (course made good) με την επιθυμητή πορεία (course over ground)

1.7.3 Αστροναυτιλία (Celestial navigation)

Στην αστροναυτιλία, η σχέση μεταξύ πλοίου – άστρου – πόλου, περιγράφεται από ένα σφαιρικό τρίγωνο. Το θεμελιώδες σφαιρικό τρίγωνο, έχει κορυφές:

- το ζενίθ του πλοίου,
- τον αστρονομικό πόλο,
- το προβολικό σημείο του άστρου (GP).

Για να βρεθεί η ανύψωση ενός άστρου (altitude), εφαρμόζεται ο τύπος $\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos(LHA)$, όπου

- h: το ύψος του άστρου (μετριέται με τη χρήση του εξάντα),
- φ : το γεωγραφικό πλάτος του παρατηρητή,
- δ : η απόκλιση του άστρου,
- (LHA): η τοπική ωριαία γωνία.

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω σχέσης, είναι εφαρμογή των τύπων του αθροίσματος και της διαφοράς των γωνιών και χρησιμοποιείται για:

- την εύρεση του γεωγραφικού πλάτους και του γεωγραφικού μήκους,
- τον υπολογισμό intercept,
- τη διόρθωση των μετρήσεων του εξάντα,
- τον υπολογισμό των ναυτιλιακών γραμμών θέσης (LOPs).

Χωρίς αυτούς τους τύπους, δε μπορεί να υπάρξει αστροπλοΐα.

1.7.4 Τριγωνισμός ραντάρ – Στίγμα από αποστάσεις / διόπτευση

Στη σφαιρική τριγωνομετρία του ραντάρ, για τρίγωνα με γνωστές αποστάσεις και γωνίες, χρησιμοποιούνται τύποι όπως ο $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

Αυτοί οι μαθηματικοί τύποι, χρησιμοποιούνται όταν δίνεται η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία της ξηράς, όταν μετρούνται δύο διοπτεύσεις και όταν δίνονται οι γωνίες μεταξύ των κατευθύνσεων και πρέπει να υπολογισθούν:

- η θέση του πλοίου,
- η αλλαγή της πορείας για την αποφυγή σύγκρουσης,
- το CPA / TCPA (closest point of approach).

1.7.5 Μετατροπές μεταξύ πλάτους, απόκλισης και ανύψωσης

Στην ναυτιλία, συχνά απαιτούνται μετατροπές των γωνιών τύπου $\cos(\varphi - \delta) = \cos \varphi \cdot \cos \delta + \sin \varphi \cdot \sin \delta$ που προέρχονται άμεσα από τον τύπο της διαφοράς των γωνιών και χρησιμοποιούνται για:

- τον προσδιορισμό της ανώτερης (ή της κατώτερης) μεσημβρινής διέλευσης ενός άστρου,
- τους υπολογισμούς εύρεσης του γεωγραφικού πλάτους, από τον Ήλιο (meridian altitude method),
- τη διόρθωση της στιγμιαίας θέσης, με βάση τις χρονικές μεταβολές.

1.7.6 Υπολογισμοί ανέμων και ρευμάτων (Vector navigation)

Σε προβλήματα όπου η πορεία του πλοίου και το drift λόγω του ανέμου ή του θαλασσιού ρεύματος σχηματίζουν γωνίες, εφαρμόζονται τύποι όπως $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$, $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$ για τον προσδιορισμό:

- της πραγματικής πορείας (course made good),
- της πραγματικής ταχύτητας (speed made good),
- της απόκλισης λόγω των ανέμων,
- του τριγωνικού διαγράμματος του ρεύματος (current triangle).

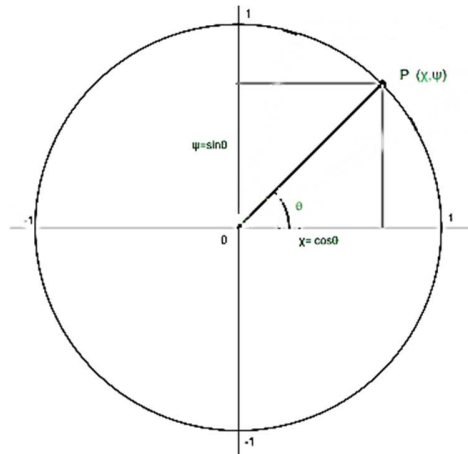
1.7.7 Χρήση σε ηλεκτρονικά ναυτιλιακά συστήματα

Συγκροτήματα όπως GPS receivers, INS (inertial navigation systems), ECDIS, AIS, αυτόματοι υπολογιστές της πορείας των πλοίων, χρησιμοποιούν ενσωματωμένα σφαιρικά τριγωνομετρικά μοντέλα, που βασίζονται σε τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων για:

- τον υπολογισμό της νέας θέσης, από την προηγούμενη θέση (dead reckoning),
- τη διόρθωση της θέσης με φίλτρα Kalman,
- την πρόβλεψη της πορείας και της εκτροπής,
- τα μοντέλα του γεωειδούς.

2. Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Ο τριγωνομετρικός κύκλος, αποτελεί θεμελιώδη έννοια στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στην τριγωνομετρία. Είναι γνωστός και ως μοναδιαίος κύκλος, έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων $(0,0)$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έχει ακτίνα ίση με 1 και ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Κάθε σημείο $P(x, y)$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, αντιστοιχεί σε μια μοναδική γωνία θ . Αυτή η γωνία μετριέται συνήθως από τον θετικό ημιάξονα Ox με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά). Επειδή η ακτίνα είναι 1, ισχύει η θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = x^2 + y^2 = R^2 = 1$



Σχήμα 1 Τριγωνομετρικός κύκλος

Η έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου, προσφέρει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και σχέσεων.

- Επιτρέπει τη γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων, βοηθώντας στη διαισθητική κατανόηση της έννοιας της γωνίας και των μεταβολών των συναρτήσεων.
- Παρέχει τη γεωμετρική απεικόνιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα, συντέμνουσα).
- Επιτρέπει την κατανόηση της περιοδικότητας, της μονοτονίας κατά διαστήματα και της μεταβολής των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ως προς τη γωνία.
- Αποτελεί βασικό εργαλείο στη μελέτη των κυκλικών φαινομένων (κύματα, αρμονικές ταλαντώσεις, περιοδικές κινήσεις).
- Προσφέρει έναν ακριβή μαθηματικό τρόπο για τον υπολογισμό των τιμών των συναρτήσεων, σε οποιαδήποτε γωνία.
- Συνδέει αρμονικά τις έννοιες του κύκλου και του τριγώνου, ενώ επιτρέπει τον ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για όλες τις πραγματικές γωνίες.
- Χρησιμοποιείται ευρέως στη διδασκαλία και στην κατανόηση της τριγωνομετρίας, διότι κάνει σαφή τη σχέση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και της γεωμετρικής ερμηνείας τους.
- Είναι χρήσιμος σε πληθώρα εφαρμογών σε επιστήμες (φυσική, μηχανική, πληροφορική, γραφικά των υπολογιστών, ανάλυση των σημάτων) και ιδιαίτερα χρήσιμος σε εφαρμοσμένες υπολογιστικές μεθόδους μεγάλου πλήθους επιστημονικών πεδίων που εφαρμόζονται στην ναυτική εκπαίδευση.

2.1 Απόδειξη των ταυτοτήτων με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου

2.1.1 Υπολογισμός του $\cos(\alpha-\beta)$

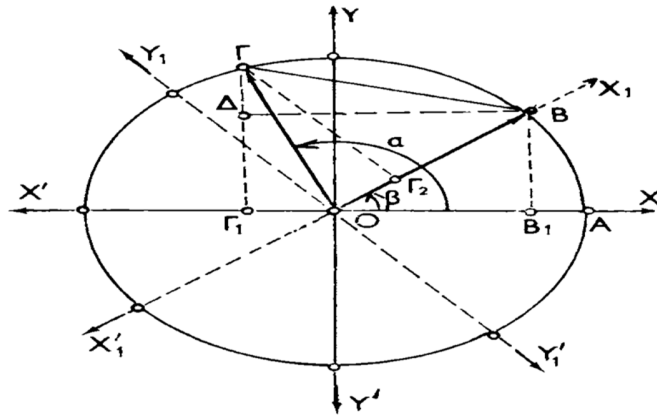
1^{ος} τρόπος

Θεωρώ τον τριγωνομετρικό κύκλο του παρακάτω σχήματος με το σύστημα αξόνων ΧΟΨ Έστω δύο τόξα \widehat{AB} και $\widehat{A\Gamma}$ με μέτρο α , β και Α η κοινή αρχή τους. Οι συντεταγμένες των σημείων Γ, Β είναι αντιστοίχως

$$\text{Σημείο Β } x = \overline{O\Gamma_1} = \cos \alpha \text{ και } y = \overline{\Gamma\Gamma_1} = \sin \alpha$$

$$\text{Σημείο Γ: } x' = \overline{O\Gamma_1} = \cos \beta \text{ και } y' = \overline{\Gamma\Gamma_1} = \sin \beta$$

Φέρνω την ΒΔ κάθετη προς τη Γ₁Γ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ και από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω τα ακόλουθα.



Σχήμα 2 Διαφορά τόξων $\alpha - \beta$

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \\ &= 2 - 2(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) \end{aligned}$$

Η τιμή του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι $\alpha - \beta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Φέρνω την ευθεία $X_1'O B X_1$ και επάνω σε αυτή την κάθετο $\Psi_1'O\Psi_1$, τις οποίες θεωρώ ως πρωτεύοντες άξονες για το τόξο $\widehat{B\Gamma} = \alpha - \beta$. Από το Γ φέρνω την κάθετη $\Gamma\Gamma_2$ προς την $X_1'X$ και τότε οι συντεταγμένες των σημείων Β, Γ είναι αντιστοίχως οι ακόλουθες.

$$\text{Σημείο } B: x_1' = \overline{OB} = 1 \text{ και } y_1' = 0$$

$$\text{Σημείο } \Gamma: x_1 = \overline{O\Gamma_2} = \cos(\alpha - \beta) \text{ και } y_1 = \overline{\Gamma\Gamma_2} = \sin(\alpha - \beta)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma_2\Gamma$ με πυθαγόρειο θεώρημα έχω

$$B\Gamma^2 = B\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 0)^2 \text{ ή}$$

$$B\Gamma^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$\cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Άρα, $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)$, άρα

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι } \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

2^{ος} τρόπος

Από το θεώρημα του Charles για τα μέτρα των γωνιών ισχύει ότι

$$\overline{\gamma\omega\nu}(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \overline{\gamma\omega\nu}(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OB}) - \overline{\gamma\omega\nu}(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Gamma}) + 2k\pi \text{ με } k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου οι τιμές των γωνιών αυτών εκφράζονται σε ακτίνια, άρα } \overline{\gamma\omega\nu}(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \beta - \alpha + 2k\pi$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{O\Gamma}$ και \overrightarrow{OB} , έχω ότι $\overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{O\Gamma}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})$, επειδή όμως $|\overrightarrow{O\Gamma}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ και $\cos(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) =$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta), \text{ έχω } \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta)$$

Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, για το γινόμενο των διανυσμάτων ισχύει ότι

$$\overline{OG} \cdot \overline{OB} = xx' + yy' = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Από τις (α₁), (α₂) προκύπτει ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

2.1.2 Υπολογισμός του $\cos(\alpha+\beta)$

Επειδή η $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ισχύει για κάθε τόξο α, β ισχύει και όταν αντικαταστήσω το β με $-\beta$ προκύπτει ότι $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$

Επειδή $\cos(-\beta) = \cos\beta$ και $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ έχω ότι

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

2.1.3 Υπολογισμός του $\sin(\alpha+\beta)$

Αντικαθιστώ στην $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ το τόξο α με το $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ και έχω

$$\text{ότι } \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta$$

$$\text{Επειδή } \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin(\alpha + \beta) \text{ και}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \text{ και } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\text{η } \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta \text{ γίνεται}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

2.1.4 Υπολογισμός του $\sin(\alpha-\beta)$

Στην $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$ αντικαθιστώ το β με $-\beta$ και έχω ότι

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha, \text{ άρα}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

2.1.5 Υπολογισμός της $\tan(\alpha+\beta)$

Για $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ που ισχύει όταν $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, έχω ότι

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad (5), \text{ με } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \text{ και } \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

για $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Διαιρώ τους όρους του κλάσματος } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} \text{ δια } \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\text{και έχω ότι } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}, \text{ άρα ισχύει ότι}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

2.1.6 Υπολογισμός της $\tan(\alpha - \beta)$

Στην $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, αντικαθιστώ το β με $-\beta$ υποθέτω ότι

$$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ με } k \in \mathbb{Z} \text{ και έχω } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)}$$

$$\text{Από } \tan(-\beta) = -\tan \beta \text{ έχω } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

2.1.7 Υπολογισμός της $\cot(\alpha + \beta)$

Για $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ που ισχύει όταν $\alpha + \beta \neq k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ και

για $\sin \alpha \cdot \sin \beta \neq 0$ που ισχύει όταν $\alpha \neq k_1\pi$ και $\beta \neq k_2\pi$ με $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{έχω ότι } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{Διαιρώ τους όρους του κλάσματος } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha} \text{ δια } \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\text{και έχω ότι } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta},$$

$$\text{Άρα, } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

2.1.8 Υπολογισμός της $\cot(\alpha - \beta)$

Στην $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$ θέτω όπου β το $-\beta$ και έχω ότι

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot(-\beta) - 1}{\cot \alpha + \cot(-\beta)} = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha},$$

$$\text{Άρα, } \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \text{ όταν } \alpha - \beta \neq k\pi \text{ και } \alpha \neq k_1\pi \text{ και } \beta \neq k_2\pi \text{ με}$$

$$k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Μερικές περιπτώσεις των ταυτοτήτων της εφαπτομένης του αθροίσματος και της διαφοράς των τόξων

$$\text{Αν } \beta = \frac{\pi}{4}, \text{ τότε } \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ και από τις } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \text{ και}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \text{ έχω αντιστοίχως ότι}$$

$$\bullet \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \alpha + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}, \text{ για } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}, \text{ για } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k_2\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_3\pi \text{ με } k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Παρακάτω, παρουσιάζεται συνοπτικός πίνακας των ταυτοτήτων τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς τόξων.

Τύπος	Σχέση
$\sin(a \pm \beta)$	$\sin a \cdot \cos \beta \pm \cos a \cdot \sin \beta$
$\cos(a \pm \beta)$	$\cos a \cdot \cos \beta \mp \sin a \cdot \sin \beta$
$\tan(a \pm \beta)$	$\frac{\tan a \pm \tan \beta}{1 \mp \tan a \cdot \tan \beta}$

2.2 Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ και $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{9}{41}$ υπολογίστε τις παραστάσεις $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$, $\cot(\alpha + \beta)$

Λύση

Επειδή $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ έχω ότι

$$\bullet \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\bullet \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = \frac{40}{41}$$

$$\text{Άρα, } \bullet \tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \bullet \tan \beta = \frac{\frac{9}{41}}{\frac{40}{41}} = \frac{9}{40}, \bullet \cot \alpha = \frac{4}{3}, \bullet \cot \beta = \frac{40}{9} \text{ άρα,}$$

$$\bullet \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{40}{41} - \frac{9}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{160 - 27}{205} = \frac{133}{205}$$

$$\bullet \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{9}{40}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{40}} = \frac{\frac{30 - 9}{40}}{1 + \frac{27}{160}} = \frac{\frac{21}{40}}{\frac{187}{160}} = \frac{21 \cdot 4}{187} = \frac{84}{187}$$

$$\bullet \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{-40}{9} \right) - 1}{\frac{4}{3} + \left(\frac{-40}{9} \right)} = \frac{187}{84}$$

Εφαρμογή 2

Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των τόξων 15° και 75°

Λύση

Επειδή $15 + 75 = 90$, έχω ότι

$$\bullet \sin 15 = \cos 75 = \cos(45+30) = \cos 45 \cos 30 - \sin 30 \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet \cos 15 = \sin 75 = \sin(45+30) = \sin 45 \cos 30 + \sin 30 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet \tan 15 = \cot 75 = \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\bullet \cot 15 = \tan 75 = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

Εφαρμογή 3

Δείξτε ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

Λύση

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) &= \\ (\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha) (\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha) &= \\ \sin^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\beta \cos^2\alpha &= \\ \sin^2\alpha (1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta (1 - \sin^2\alpha) &= \\ \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta &= \\ \sin^2\alpha - \sin^2\beta &= \\ 1 - \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\beta) &= \\ \cos^2\beta - \cos^2\alpha \end{aligned}$$

Εφαρμογή 4

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ και γωνίες A, B, Γ δείξτε ότι

$$A = \alpha \sin(B-\Gamma) + \beta \sin(\Gamma-A) + \gamma \sin(A-B) = 0$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } \alpha &= 2R \sin A = 2R \sin(B+\Gamma) \text{ είναι} \\ \alpha \sin(B-\Gamma) &= 2R \sin(B+\Gamma) \sin(B-\Gamma) = 2R(\sin^2 B - \sin^2 \Gamma) \\ \text{ομοίως με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων είναι} \\ A &= 2R(\sin^2 B - \sin^2 \Gamma) + 2R(\sin^2 \Gamma - \sin^2 A) + 2R(\sin^2 A - \sin^2 B) = \\ &= 2R(\sin^2 B - \sin^2 \Gamma + \sin^2 \Gamma - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B) = 2R \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

3. Ταυτότητες υπό συνθήκες

3.1 Ταυτότητα 1

Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ με $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\beta \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\gamma \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

Απόδειξη

Από $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ άρα

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \gamma) = -\tan\gamma \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = -\tan\gamma \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

Αντιστρόφως

Αν για τις γωνίες ισχύει ότι $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$, τότε ποια σχέση τις συνδέει;

Απόδειξη

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = -\tan\gamma(1 - \tan\alpha \tan\beta)$$

Αν $1 - \tan\alpha \tan\beta = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha \tan\beta = 1$ τότε $\tan\alpha + \tan\beta = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = -\tan\beta$, η οποία δε συμβιβάζεται με την $\tan\alpha \tan\beta = 1$, άρα $1 - \tan\alpha \tan\beta \neq 0$, άρα $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = -\tan\gamma \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = -\tan\gamma$

$$\tan\gamma = \tan(\pi - \gamma) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma + \nu\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + \nu\pi = (\nu + 1)\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Άρα, οι γωνίες συνδέονται με τη σχέση $\alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.2 Ταυτότητα 2

Αν οι γωνίες α, β, γ με $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, τότε $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$

Απόδειξη

Από $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ άρα

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = -\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχω ότι

$$\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) =$$

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$$

Αντιστρόφως

Αν $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$, με ποια σχέση συνδέονται αυτές οι γωνίες;

Απόδειξη

$$\text{Η σχέση γράφεται } 1 \cdot \cos^2\gamma + (2\cos\alpha \cdot \cos\beta) \cdot \cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0$$

Το 1^ο μέλος της ισότητας, μπορεί να θεωρηθεί τριώνυμο ως προς $\cos\gamma$. Αν Δ είναι η διακρίνουσα, τότε είναι

$$\frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 1 = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) = \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta$$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta = -\cos(\alpha \pm \beta)$,

$$\text{Άρα } \alpha \pm \beta = \pm(\pi - \gamma) + 2k\pi \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Σημείωση Τα διπλά σημεία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

Ομοίως, μπορώ να δείξω ότι, αν οι γωνίες α, β, γ επαληθεύουν την ισότητα

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1, \text{ τότε αυτές συνδέονται με τις σχέσεις}$$

$$a \pm \beta \pm \gamma = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3.3 Ταυτότητα 3

Αν μεταξύ των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ είναι $\alpha = 2\beta \cdot \cos\Gamma$ τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta \cdot \cos\Gamma \Leftrightarrow \\ 2R \cdot \sin A &= 2 \cdot 2R \cdot \sin B \cdot \cos\Gamma \Leftrightarrow \\ \sin A &= 2\sin B \cdot \cos\Gamma \end{aligned}$$

Επειδή $A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow \sin A = \sin(B + \Gamma)$, η $\sin A = 2\sin B \cdot \cos\Gamma$ γίνεται

$$\begin{aligned} \sin(B + \Gamma) &= 2\sin B \cdot \cos\Gamma \Leftrightarrow \\ \sin B \cdot \cos\Gamma + \sin\Gamma \cdot \cos B &= 2\sin B \cdot \cos\Gamma \Leftrightarrow \\ \sin B \cdot \cos\Gamma - \sin\Gamma \cdot \cos B &= 0 \Leftrightarrow \\ B - \Gamma &= k\pi \end{aligned}$$

όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή B, Γ είναι γωνίες επίπεδου τριγώνου πρέπει να είναι $k = 0$, άρα $B - \Gamma = 0$, δηλαδή πρέπει $B = \Gamma$ άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος τριών τόξων

4.1 Υπολογισμός του $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin((\alpha + \beta) + \gamma) = \\ \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\gamma &= \\ (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \cos\gamma + (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \sin\gamma &= \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \end{aligned}$$

Άρα, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

4.2 Υπολογισμός του $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\gamma = \\ (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \cos\gamma - (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \sin\gamma &= \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

4.3 Υπολογισμός της $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \\ \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma} \end{aligned}$$

Πρέπει $\cos(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, άρα $\alpha + \beta + \gamma \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Πρέπει $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \neq 0$, άρα $\alpha \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2}$, $\gamma \neq k_3\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή δια $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$ και προκύπτει ότι

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \cdot \tan \gamma - \tan \gamma \cdot \tan \alpha}$$

4.4 Υπολογισμός της $\cot(\alpha + \beta + \gamma)$

Αν $\sin(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, που ισχύει για $\alpha + \beta + \gamma \neq k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$\cot(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} =$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$$

Πρέπει $\sin(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, που ισχύει για $\alpha + \beta + \gamma \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbb{Z}$

Πρέπει $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \neq 0$, που ισχύει για $\alpha \neq k_1\pi$, $\beta \neq k_2\pi$, $\gamma \neq k_3\pi$ με $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή δια $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ και προκύπτει ότι

$$\cot(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sec \alpha \cdot \sec \beta \cdot \sec \gamma - \sec \alpha - \sec \beta - \sec \gamma}{\sec \beta \cdot \sec \gamma + \sec \gamma \cdot \sec \alpha + \sec \alpha \cdot \sec \beta - 1}$$

Εφαρμογή 5

Αν $\tan \alpha = \frac{1}{12}$, $\tan \beta = \frac{2}{5}$, $\tan \gamma = \frac{1}{3}$ δείξτε ότι $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη

Στην $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \cdot \tan \gamma - \tan \gamma \cdot \tan \alpha}$ αντικαθιστώ και βρίσκω

ότι $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ άρα, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί ακέραιων πολλαπλασίων τόξων

Θα αποδείξω τις σχέσεις για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των τόξων 2α , 3α , ..., $n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, όταν γνωρίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ενός τόξου α

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 2α

5.1 Υπολογισμός του $\sin(2\alpha)$

Από την $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, θέτω όπου β το α και έχω ότι $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$ ή $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

5.2 Υπολογισμός του $\cos(2\alpha)$

Από $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, θέτω όπου β το α και έχω

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \text{ ή}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \text{ επίσης}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{Άρα, } \cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

5.3 Υπολογισμός του $\tan(2\alpha)$

Στην $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, θέτω όπου β το α και έχω ότι

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \text{ όταν } \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \alpha \neq k_1\pi + \frac{\pi}{4}, \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

5.4 Υπολογισμός του $\cot(2\alpha)$

Στην $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$, θέτω όπου β το α και έχω ότι

$$\cot(\alpha + \alpha) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \alpha - 1}{\cot \alpha + \cot \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}, \text{ όταν } \alpha \neq k\pi, \alpha \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

5.5 Τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου (3α)

$$\begin{aligned} \bullet \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos(2\alpha) = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cos \alpha - \sin(2\alpha) \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\bullet \tan(3\alpha) = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \text{ όταν } 3\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \neq k \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \alpha \neq k_1\pi + \frac{\pi}{6}, \text{ με } k_1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \cot(3\alpha) = \cot(2\alpha + \alpha) = \frac{\sec^3 \alpha - 3 \sec \alpha}{3 \sec^2 \alpha - 1} \text{ όταν } 3\alpha \neq k_2\pi \Rightarrow \alpha \neq k_2 \frac{\pi}{3}, \alpha \neq k_3\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ με } k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

5.6 Τύποι του Simpson

Από $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ είναι $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$

Από $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ είναι $\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)$

Αν θέσω όπου α το $(\mu\alpha)$ και όπου β το α , βρίσκω

$$\sin((\mu + 1)\alpha) = 2 \sin(\mu\alpha) \cos \alpha - \sin((\mu - 1)\alpha)$$

$$\cos((\mu + 1)\alpha) = 2 \cos(\mu\alpha) \cos \alpha - \cos((\mu - 1)\alpha)$$

Από τους παραπάνω τύπους για $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ μπορώ να υπολογίζω τα ημίτονα και τα συνημίτονα των πολλαπλασίων τόξων.

5.7 Εφαρμογές

Εφαρμογή 6

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$

Λύση

Έχω διαδοχικά $36+54=90 \Leftrightarrow 36=90-54 \Leftrightarrow$

$$\sin(36)=\sin(90-54) \Leftrightarrow$$

$$\sin(2 \cdot 18)=\cos(3 \cdot 18) \Leftrightarrow$$

$$2\sin(18) \cos(18)=4\cos^3 18-3\cos 18 \Leftrightarrow$$

$$2\sin 18=4\cos^2(18)-3 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2(18)+2\sin(18)=1 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2(18)+2\sin(18)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(2\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left|2\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin 18^\circ \approx 0,3090 \cdot$$

$$\text{Άρα, } \cos^2 18=1-\sin^2 18=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\bullet \tan 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

$$\text{Από } \cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha, \text{ για } \alpha=18, \text{ έχω } \cos 36=1-2\sin^2 18=1-2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ και}$$

$$\bullet \sin 36^\circ = 1-\cos^2 36^\circ = 1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \text{ και άρα}$$

$$\bullet \tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Επειδή $18+72=90$ και $36+54=90$ προκύπτει ότι

$$\bullet \sin 72=\cos 18=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \bullet \sin 36=\cos 54=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\bullet \sin 18=\cos 72=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \bullet \sin 54=\cos 36=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\bullet \tan 18=\cot 72=\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \quad \bullet \tan 36=\cot 54=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\bullet \cot 18=\tan 72=\sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \bullet \cot 36=\tan 54=\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Εφαρμογή 7

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας (2α) , από την $\tan \alpha$

Λύση

$$\text{Από } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} \text{ και } \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}, \text{ αν } \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ με } k \in \mathbb{Z}, \text{ έχω}$$

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 2 \tan \alpha \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, αν $\alpha \neq k_1 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\alpha \neq k_2 \pi \pm \frac{\pi}{4}$ με $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
- $\cot(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$, αν $\alpha \neq (2k_3 + 1) \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq k_4 \pi + \frac{\pi}{2}$ με $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

Εφαρμογή 8

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α , από την $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Λύση

Στους παραπάνω τύπους, αντικαθιστώ τη γωνία α με $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \bullet \sin \alpha &= \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \bullet \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \bullet \tan \alpha &= \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \bullet \cot \alpha &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

Οι τύποι του $\sin \alpha$ και του $\cos \alpha$, ορίζονται όταν $\alpha \neq 2k\pi \pm \pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

Ο τύπος της $\tan \alpha$, ορίζεται όταν $\alpha \neq (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq 2k_2 \pi \pm \frac{\pi}{2}$ με $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Ο τύπος της $\cot \alpha$, ορίζεται όταν $\alpha \neq (k_3 + 1) \pi$, $\alpha \neq 2k_4 \pi \pm \frac{\pi}{4}$ με $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας α από το $\cos \alpha$

Από $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ και $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$ προκύπτουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \\ \bullet \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \Leftrightarrow |\cos \alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω.

$$\bullet \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} \Leftrightarrow |\tan \alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}},$$

$$\alpha \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \cot^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)} \Leftrightarrow |\cot \alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)}} \Leftrightarrow \cot \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)}},$$

$$\alpha \neq k_1\pi \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Οι παραπάνω σχέσεις, οδηγούν στα εξής ζεύγη λύσεων για $\sin \alpha$ και $\cos \alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = -\sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = -\sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \end{array} \right\}$$

Εφαρμογή 9

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, από το $\cos \alpha$

Λύση

Στους παραπάνω τύπους, αντικαθιστώ την γωνία α με $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ και προκύπτουν

$$\bullet \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \bullet \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\bullet \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad \bullet \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

Οι παραπάνω σχέσεις, οδηγούν στα εξής ζεύγη λύσεων για $\sin \alpha$ και $\cos \alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \end{array} \right\}$$

Εφαρμογή 10

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $22,5^\circ$

Λύση

Επειδή $0 < 22,5 < 90$, προκύπτει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.

$$\bullet \sin 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\bullet \cos 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\bullet \tan 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\bullet \cot 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

Εφαρμογή 11

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας 165°

Λύση

Η γωνία των 165 είναι στο 2° τεταρτημόριο, άρα έχει θετικό ημίτονο και αρνητικό

συνημίτονο. Επειδή $165^\circ = \frac{330^\circ}{2}$, ισχύουν οι παρακάτω τύποι.

$$\bullet \sin 165^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 330^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\bullet \cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\bullet \tan 165^\circ = \frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ} = \sqrt{3}-2 \quad \bullet \cot 165^\circ = \frac{\cos 165^\circ}{\sin 165^\circ} = -(2+\sqrt{3})$$

Εφαρμογή 12

Δείξτε ότι $A = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}$

Λύση

Επειδή $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$ και $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$, προκύπτει ότι $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ και

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ οπότε η Α δίνει διαδοχικά

$$A = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2} \right)^2 =$$

$$2 \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right)^2 =$$

$$\frac{2(2 - \sqrt{2})^2}{16} + \frac{2(2 + \sqrt{2})^2}{16} = \frac{4 + 2 - 4\sqrt{2}}{8} + \frac{4 + 2 + 4\sqrt{2}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{4}$$

Εφαρμογή 13

Δείξτε ότι η $B = \cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 120) + \cos^2(\alpha - 120)$, είναι ανεξάρτητη από το τόξο α

Λύση

$$B = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha + 240)}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha - 240)}{2} =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [\cos(2\alpha) + \cos(2\alpha + 240) + \cos(2\alpha - 240)] =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [\cos(2\alpha) + 2 \cos(2\alpha) \cdot \cos 240] =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [\cos(2\alpha) + 2 \cos(2\alpha) \cdot (-\cos 60)] =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos(2\alpha) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2}$$

Εφαρμογή 14

Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α , από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$

Λύση

Παίρνω τους παρακάτω τύπους για τη γωνία $2a$

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$
- $\cot(2a) = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$

Στους παραπάνω τύπους όπου α , θέτω $\frac{\alpha}{2}$ οπότε προκύπτουν οι παρακάτω τύποι.

$$\bullet \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\bullet \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 1 = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad \bullet \cot \alpha = \frac{\cot^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 1}{2 \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

Εφαρμογή 15

$$\text{Δείξτε ότι } A = \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

Λύση

$$A = \frac{1 + 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)}{1 + 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)} = \frac{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} =$$

$$\frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Εφαρμογή 16

$$\text{Δείξτε ότι } \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

Λύση

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2}{\left(1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2} = \frac{\left(1 + \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2}{\left(1 - \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right)^2}{\left(1 - \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right)^2} =$$

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$$

Εφαρμογή 17

Υπολογισμός της $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, από την $\tan\alpha$

Λύση

Από $\tan\alpha = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ προκύπτει ότι $\tan\alpha \cdot \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\alpha = 0$ άρα,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$$

Διερεύνηση της παραπάνω σχέσης

- Όταν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ τότε $\tan\alpha > 0$, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ και $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$
- Όταν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, τότε $\tan\alpha < 0$, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ και $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$
- Όταν $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, τότε $\tan\alpha > 0$, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ και $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$
- Όταν $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, τότε $\tan\alpha < 0$, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ και $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

Εφαρμογή 18

Από την $\tan 4800 = -\sqrt{3}$, υπολογίστε την $\tan 2400$

Λύση

Είναι $\tan 2400 = \tan(360 \cdot 6 + 240) = \tan 240 = \tan(180 + 60) = \tan 60 = \sqrt{3}$

6. Μετασχηματισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Περιλαμβάνονται οι αποδείξεις των τύπων με τους οποίους μια παράσταση αθροίσματος ή διαφοράς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μετασχηματίζεται σε γινόμενο και αντίστροφα.

6.1 Μετασχηματισμός του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο ομόνυμων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, σε γινόμενο ή πηλίκο

Από τις γνωστές ταυτότητες

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha \cos\beta-\sin\beta \cos\alpha$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκω

- $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha \cos\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta \cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)= 2\cos\alpha \cos\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)=2\sin\alpha \sin\beta=\sin\alpha \sin(-\beta)$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{A+B}{2} \\ \beta = \frac{A-B}{2} \\ -\beta = \frac{B-A}{2} \end{cases} \text{οπότε από τις παραπάνω ταυτότητες, προκύπτουν οι}$$

ακόλουθες

- $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$
- $\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}$

Αφού θα είναι $A \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ και $B \neq k_1\pi \pm \frac{\pi}{2}$ με $k, k_1 \in \mathbb{Z}$

- $\tan A - \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}$
- $\cot A + \cot B = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin B \cdot \cos A + \sin A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}$

Αφού θα είναι $A \neq (k_2+1)\pi$ και $B \neq (k_3+1)\pi$ με $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

- $\cot A - \cot B = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin B \cdot \cos A - \sin A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \cdot \sin B}$

6.2 Ειδικές περιπτώσεις

6.2.1 Περίπτωση 1

$\sin A + \cos A = \sin A + \sin(90 - A) = 2 \sin 45 \cdot \cos(A - 45) = \sqrt{2} \cos(A - 45)$ και επειδή $\cos(A - 45) = \cos(45 - A) = \sin(45 + A)$ προκύπτει ότι

- $\sin A + \cos A = \sqrt{2} \cos(45 - A) = \sqrt{2} \sin(45 + A)$

6.2.2 Περίπτωση 2

$$\sin A - \cos A = \sin A - \sin(90 - A) = 2 \cos 45 \cdot \sin(A - 45) = \sqrt{2} \sin(A - 45) = -\sqrt{2} \sin(45 - A) = -\sqrt{2} \cos(45 + A), \text{ \acute{a}\rho\alpha}$$

- $\sin A - \cos A = -\sqrt{2} \sin(45 - A) = -\sqrt{2} \cos(45 + A)$

6.2.3 Περίπτωση 3

$$1 + \sin A = \sin 90 + \sin A = 2 \sin\left(45 + \frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(45 - \frac{A}{2}\right) \text{ και επειδή}$$

$$\sin\left(45 + \frac{A}{2}\right) = \cos\left(45 - \frac{A}{2}\right) \text{ προκύπτει ότι}$$

- $1 + \sin A = 2 \sin^2\left(45 + \frac{A}{2}\right) = 2 \cos^2\left(45 - \frac{A}{2}\right)$

6.2.4 Περίπτωση 4

$$1 - \sin A = \sin 90^\circ - \sin A = 2 \sin\left(45 - \frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(45 + \frac{A}{2}\right) =$$

$$2 \sin^2\left(45 - \frac{A}{2}\right) = 2 \cos^2\left(45 + \frac{A}{2}\right), \text{ \acute{a}\rho\alpha}$$

- $1 - \sin A = 2 \sin^2\left(45 - \frac{A}{2}\right) = 2 \cos^2\left(45 + \frac{A}{2}\right)$

6.2.5 Περίπτωση 5

$$1 + \cos A = \cos 0 + \cos A = 2 \cos\left(\frac{0+A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{0-A}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$1 - \cos A = \cos 0 - \cos A = 2 \sin\left(\frac{0+A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-0}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right), \text{ \acute{a}\rho\alpha,}$$

- $1 + \cos A = 2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$ και • $1 - \cos A = 2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$

6.2.6 Περίπτωση 6

Αν $A \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbb{Z}$, έχω

- $1 + \tan A = \tan 45 + \tan A = \frac{\sin(45+A)}{\cos 45 \cdot \cos A} = \frac{\sqrt{2} \sin(45+A)}{\cos A} = \frac{\sqrt{2} \cos(45-A)}{\cos A}$

- $1 - \tan A = \tan 45 - \tan A = \frac{\sin(45-A)}{\cos 45 \cdot \cos A} = \frac{\sqrt{2} \sin(45-A)}{\cos A} = \frac{\sqrt{2} \cos(45+A)}{\cos A}$

6.2.7 Περίπτωση 7

Αν $A \neq (k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, με παρόμοιο τρόπο βρίσκω

$$1 + \cot A = \frac{\sqrt{2} \sin(45 + A)}{\sin A} = \frac{\sqrt{2} \cos(45 - A)}{\sin A}$$

$$1 - \cot A = \frac{\sqrt{2} \sin(45 - A)}{\sin A} = \frac{-\sqrt{2} \cos(45 + A)}{\sin A}$$

6.3 Εφαρμογές

Εφαρμογή 19

Απλοποιείστε την παράσταση $A = \frac{(\cos \alpha - \cos(3\alpha))(\sin(8\alpha) + \sin(2\alpha))}{(\sin(5\alpha) - \sin \alpha)(\cos(4\alpha) - \cos(6\alpha))}$

Λύση

$$A = \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha + 3\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{3\alpha - \alpha}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{8\alpha + 2\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{8\alpha - 2\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{5\alpha - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{5\alpha + \alpha}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{4\alpha + 6\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{6\alpha - 4\alpha}{2}\right)} =$$

$$\frac{2 \sin(2\alpha) \sin \alpha \cdot 2 \sin(5\alpha) \cos(3\alpha)}{2 \sin(2\alpha) \cos(3\alpha) \cdot 2 \sin(5\alpha) \sin \alpha} = 1 \text{ με } \alpha \neq k\pi, \alpha \neq k_1 \frac{\pi}{5}, \alpha \neq k_2 \frac{\pi}{2}, \alpha \neq (2k_3 + 1) \frac{\pi}{5},$$

με $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

Εφαρμογή 20

Απλοποιείστε το κλάσμα $A = \frac{\sin \alpha - \sin(5\alpha) + \sin(9\alpha) - \sin(13\alpha)}{\cos \alpha - \cos(5\alpha) - \cos(9\alpha) + \cos 13\alpha}$

Λύση

$$A = \frac{(\sin(9\alpha) + \sin \alpha) - (\sin(13\alpha) + \sin(5\alpha))}{(\cos \alpha - \cos(5\alpha)) - (\cos(9\alpha) - \cos(13\alpha))} =$$

$$\frac{2 \sin(5\alpha) \cdot \cos(4\alpha) - 2 \sin(9\alpha) \cdot \cos(4\alpha)}{2 \sin(3\alpha) \cdot \sin(2\alpha) - 2 \sin(11\alpha) \cdot \sin(2\alpha)} =$$

$$\frac{\cos(4\alpha) \cdot (\sin(5\alpha) - \sin(9\alpha))}{\sin(2\alpha) \cdot (\sin(3\alpha) - \sin(11\alpha))} =$$

$$\frac{\cos(4\alpha) \cdot 2 \sin(2\alpha) \cos(7\alpha)}{\sin(2\alpha) \cdot 2 \sin(4\alpha) \cdot \cos(7\alpha)} = \cot(4\alpha) \text{ με } \alpha \neq k \frac{\pi}{2}, \alpha \neq k_1 \frac{\pi}{4}, \alpha \neq k_2 \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Εφαρμογή 21

Παραγοντοποιήστε την παράσταση $A = \sin x + \sin y + \sin \omega - \sin(x + y + \omega)$

Λύση

$$A = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\omega-x-y-\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega+x+y+\omega}{2}\right) =$$

$$2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{2\omega+x+y}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\omega+x+y}{2}\right) \right] = \\
& 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{x-y+2\omega+x+y}{4}\right) \sin\left(\frac{2\omega+x+y-x+y}{4}\right) = \\
& 4 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Σημείωση

Αν οι γωνίες x, y, ω είναι αντιστοίχως οι γωνίες A, B, Γ ενός επίπεδου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $\sin A + \sin B + \sin \Gamma - \sin(A+B+\Gamma) =$

$$\begin{aligned}
& \sin A + \sin B + \sin \Gamma - \sin 180^\circ = \\
& \sin A + \sin B + \sin \Gamma = \\
& 4 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right) = \\
& 4 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right)
\end{aligned}$$

διότι αφού $\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ$ έπεται ότι $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$

διότι αφού $\sin\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$ έπεται ότι $\sin\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{B}{2}\right)$

Άρα, σε κάθε επίπεδο τρίγωνο ισχύει $\sin A + \sin B + \sin \Gamma = 4 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right)$

Εφαρμογή 22

Παραγοντοποιήστε την παράσταση $A = \cos x + \cos y + \cos \omega + \cos(x+y+\omega)$

Λύση

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\omega+x+y+\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega-x-y-\omega}{2}\right) = \\
& 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y+2\omega}{2}\right) = \\
& 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y+2\omega}{2}\right) \right] = \\
& 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{x-y+x+y+2\omega}{4}\right) \cos\left(\frac{x-y-x-y-2\omega}{4}\right) = \\
& 4 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{y+\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

Σημείωση

Αν οι γωνίες x, y, ω είναι αντιστοίχως οι γωνίες A, B, Γ ενός επίπεδου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $\cos x + \cos y + \cos \omega + \cos(x+y+\omega) =$

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos \Gamma + \cos(A + B + \Gamma) &= \\ \cos A + \cos B + \cos \Gamma + \cos 180 &= \\ \cos A + \cos B + \cos \Gamma - 1 & \end{aligned}$$

Και επειδή, $\cos\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{B}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$

η $\cos x + \cos y + \cos \omega + \cos(x + y + \omega) = 4 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{y+\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\omega}{2}\right)$

για κάθε επίπεδο τρίγωνο ΑΒΓ γίνεται

$$\cos A + \cos B + \cos \Gamma = 1 + 4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

Εφαρμογή 23

Παραγοντοποιήστε την παράσταση $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2$

Λύση

Είναι $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta =$

$$\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{1 + \cos(2\beta)}{2} =$$

$$1 + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)) =$$

$$1 + \frac{1}{2}2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$$

$$1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

Είναι $\cos^2 \gamma + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) =$

$$\frac{1 + \cos(2\gamma)}{2} + \frac{1 + \cos 2(\alpha + \beta + \gamma)}{2} =$$

$$1 + \frac{1}{2}[\cos(2\gamma) + \cos 2(\alpha + \beta + \gamma)] =$$

$$1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

Άρα, $\Gamma = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$

$$\cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)] =$$

$$\cos(\alpha + \beta) 2 \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma) =$$

$$2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma)$$

Συνεπώς,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2 = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma)$$

Σημείωση

Αν οι γωνίες x, y, ω είναι αντιστοίχως οι γωνίες Α, Β, Γ ενός επίπεδου τριγώνου ΑΒΓ, τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 \Gamma = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos \Gamma$

6.4 Μετασχηματισμός των γινομένων σε αθροίσματα ή σε διαφορές

Από τις γνωστές ταυτότητες

- $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin(A+B)$ και
- $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A-B)$

με πρόσθεση και με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτουν αντίστοιχα

- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ και
- $2\sin B \cos A = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

Επίσης, από τις γνωστές ταυτότητες

- $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B)$ και
- $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B)$

με πρόσθεση και με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτουν αντίστοιχα

- $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ και
- $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

Εφαρμογή 24

Απλοποιήστε το κλάσμα $A = \frac{\sin(8\alpha)\cos\alpha - \sin(6\alpha)\cos(3\alpha)}{\cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(3\alpha)\sin(4\alpha)}$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sin(8\alpha)\cos\alpha - 2\sin(6\alpha)\cos(3\alpha)}{2\cos(2\alpha)\cos\alpha - 2\sin(3\alpha)\sin(4\alpha)} = \\ &= \frac{(\sin(9\alpha) + \sin(7\alpha)) - (\sin(9\alpha) + \sin(3\alpha))}{(\cos(3\alpha) + \cos\alpha) - (\cos\alpha - \cos(7\alpha))} = \\ &= \frac{\sin(7\alpha) - \sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha) + \cos(7\alpha)} = \\ &= \frac{2\sin(2\alpha)\cos(5\alpha)}{2\cos(5\alpha)\cos(2\alpha)} = \tan(2\alpha) \text{ με } \alpha \neq (2k_1 + 1)\frac{\pi}{4}, \alpha \neq (2k_2 + 1)\frac{\pi}{10} \text{ με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Εφαρμογή 25

Δείξτε ότι $A = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) = \frac{1}{2^7}$

Λύση

Είναι $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sin(2x)}{2\sin x}$ άρα,

$$A = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{8\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{10\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{12\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{15}\right)} = \frac{1}{2^7}$$

Εφαρμογή 26

Δείξτε ότι $A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{2}$

Λύση

Επειδή $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ και $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ η προς απόδειξη σχέση γράφεται ως $A = 2(\cos 20 - \cos 60)(\cos 20 + \cos 40) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A &= 2(\cos 20 - \cos 60)(\cos 20 + \cos 40) = \\ &= 2(\cos^2 20 - \cos 20 \cdot \cos 60 + \cos 20 \cdot \cos 40 - \cos 40 \cdot \cos 60) = \\ &= 2\cos^2 20 - 2\cos 20 \cdot \cos 60 + 2\cos 20 \cdot \cos 40 - 2\cos 40 \cdot \cos 60 = \\ &= 1 + \cos 40 - (\cos 80 + \cos 40) + (\cos 60 + \cos 20) - (\cos 100 + \cos 20) = \\ &= 1 - (\cos 80 + \cos 100) + \cos 60 = \\ &= 1 - 2\cos 90 \cdot \cos 10 + \frac{1}{2} = \\ &= 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

7. Ταυτότητες υπό συνθήκες

Η παράγραφος περιλαμβάνει αποδείξεις ταυτοτήτων και σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όταν ισχύουν ειδικοί περιορισμοί μεταξύ των γωνιών, όπως συμβαίνει με τις γωνίες ενός επίπεδο τριγώνου.

7.1 Τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $A + B + \Gamma = \pi$ άρα, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, οπότε

προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις.

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin \Gamma & \sin(B + \Gamma) &= \sin A \\ \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) & \sin\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) &= \sin\left(\frac{A}{2}\right) \\ \cos(A + B) &= -\cos \Gamma & \cos(B + \Gamma) &= -\cos A \\ \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) &= \sin\left(\frac{A}{2}\right) \\ \sin(\Gamma + A) &= \sin B \\ \sin\left(\frac{\Gamma + A}{2}\right) &= \sin\left(\frac{B}{2}\right) \\ \cos(\Gamma + A) &= -\cos B \\ \cos\left(\frac{\Gamma + A}{2}\right) &= \sin\left(\frac{B}{2}\right) \end{aligned}$$

Με χρήση των παραπάνω σχέσεων και των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών, αποδεικνύονται διάφορες χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις ανάμεσα στις γωνίες Α, Β, Γ ενός επίπεδου τριγώνου ΑΒΓ και στα μισά αυτών των γωνιών. Οι κυριότερες σχέσεις είναι οι ακόλουθες.

7.1.1 Σχέση 1

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο $AB\Gamma$ δείξτε ότι $\sin A + \sin B + \sin \Gamma = 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin \Gamma &= \\ 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) &= \\ 2 \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) &= \\ 2 \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \right] &= \\ 2 \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) &= \\ 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

7.1.2 Σχέση 2

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$ με $\nu \in \mathbb{Z}^*$, τότε $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = (-1)^{\nu-1} 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} = \nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \nu\pi - \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Είναι } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2 \sin\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{και } \sin \gamma = 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Επειδή ο ν μπορεί να είναι άρτιος ή περιττός, είναι

$$\sin\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{και} \quad \cos\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \pm \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ Άρα, και στις δύο}$$

$$\text{περιπτώσεις είναι } \sin\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{\nu-1} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \text{ και}$$

$$\cos\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -(-1)^{\nu-1} \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\text{Άρα, οι } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \text{ και } \sin \gamma = 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\text{γίνονται } \sin \alpha + \sin \beta = (-1)^{\nu-1} 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \text{ και}$$

$$\sin \gamma = -(-1)^{\nu-1} \left[-2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει ότι}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \\ (-1)^{\nu-1} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right] &= \\ (-1)^{\nu-1} 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \\ (-1)^{\nu-1} 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \end{aligned}$$

7.1.3 Σχέση 3

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι

$$\cos A + \cos B + \cos \Gamma = 1 + 4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos \Gamma &= \\ 2 \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) &= \\ 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) + 1 &= \\ 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\left(\frac{A}{2}\right) \right] + 1 &= \\ 1 + 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] &= \\ 1 + 2 \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) 2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) &= \\ 1 + 4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right) & \end{aligned}$$

7.1.4 Σχέση 4

Αν $\cos A + \cos B + \cos \Gamma = 1 + 4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$, τότε με ποιες σχέσεις συνδέονται οι

γωνίες α, β, γ ;

Απόδειξη

Η ισότητα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) &= \\ 1 + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \right] - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \right] &= \\ -\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \right] & \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \right] \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \right] = 0$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = 2k_1\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} = (2k_1 + \pi) - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} \end{array} \right. \\ \text{ή} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = 2k_2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} = (2k_2 + 1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Δηλαδή $\alpha \pm \beta \pm \gamma = (4\lambda + 1)\pi$, όπου $k_1, k_2, k_3, \lambda \in \mathbb{Z}$

- Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1 + (-1)^\nu 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$

- Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2(\nu+1)\pi \Leftrightarrow$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1 + (-1)^\nu 4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

7.2 Εφαρμογές

Εφαρμογή 27

Σε κάθε επίπεδο μη ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\tan A + \tan B + \tan \Gamma = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma$

Λύση

Έχω $A+B+\Gamma=\pi$, οπότε $A+B=\pi-\Gamma$ και

$$\tan(A+B) = \tan(\pi-\Gamma) = -\tan\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\tan A + \tan B + \tan \Gamma = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma$$

$$\tan(A+B) = \tan(\pi-\Gamma) = -\tan\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\tan A + \tan B + \tan \Gamma = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma$$

όπου $A \neq \frac{\pi}{2}$, $B \neq \frac{\pi}{2}$, $\Gamma \neq \frac{\pi}{2}$, $A+B+\Gamma=\pi$

Αντιστρόφως

Αν τρεις γωνίες A, B, Γ διαφορετικές από $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ικανοποιούν την

$$\tan A + \tan B + \tan \Gamma = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma \text{ τότε είναι}$$

$$\tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma - \tan \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B &= -\tan \Gamma (1 - \tan A \cdot \tan B) \Leftrightarrow \\ \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} &= -\tan \Gamma \Leftrightarrow \\ \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} &= -\tan(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow \\ \tan A + \tan B &= \tan(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow \\ A + B &= \nu\pi + \pi - \Gamma \Leftrightarrow \\ A + B + \Gamma &= (\nu + 1)\pi \end{aligned}$$

Εφαρμογή 28

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot \Gamma + \cot \Gamma \cdot \cot A = 1$

Λύση

Είναι $A+B+\Gamma=\pi$, άρα $A+B=\pi-\Gamma$ άρα,

$$\cot(A+B) = \cot(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\cot(A+B) = -\cot \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot \Gamma, \text{ άρα}$$

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot \Gamma + \cot \Gamma \cdot \cot A = 1$$

Αντιστρόφως

Αν τρεις γωνίες A, B, Γ ικανοποιούν την $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot \Gamma + \cot \Gamma \cdot \cot A = 1$ τότε είναι $\cot A \cdot \cot B - 1 = -\cot \Gamma (\cot A + \cot B) \Leftrightarrow$

$$\frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\cot(A+B) = -\cot \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\cot(A+B) = \cot(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$A+B = \nu\pi + (\pi - \Gamma) \text{ με } \nu \in \mathbb{Z}$$

Βιβλιογραφία

- Κανέλλος, Σ. (1976). «Τριγωνομετρία εις πλήρη έκταση», εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου, Αθήνα
- Πανάκη, Ι. (1977). «Μαθηματικά β' λυκείου-τριγωνομετρία», εκδόσεις ΟΕΔΒ, Αθήνα
- Ζήβας, Μ. (1973). «Τριγωνομετρία», εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα
- Κοντογεωργόπουλος, Η. (1995). «Τριγωνομετρία», εκδόσεις ΙΕ, Αθήνα
- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος (2012). «Άλγεβρα β' Λυκείου», Εκδόσεις ΙΤΥ-Διόφαντος, Αθήνα