



**ΑΕΝ Ασπροπύργου  
Σχολή Μηχανικών**

**Πτυχιακή εργασία  
Ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων**

**Νταλλής Κωνσταντίνος (ΑΜ 9274)**

## Τι είναι αριθμητική πρόοδος

Έστω ακολουθία **3, 7, 11, 15, 19, ...**

παρατηρώ ότι ο κάθε όρος της, από τον 2<sup>ο</sup> και μετά, προκύπτει αν προσθέσω στον προηγούμενο του, έναν σταθερό αριθμό, που στην προκειμένη περίπτωση είναι ο **4**

Έστω ακολουθία **10, 7, 4, 1, -2, -5, ...**

παρατηρώ πως κάθε όρος της, εκτός από τον 1<sup>ο</sup>, προκύπτει αν προσθέσω στον προηγούμενό του, τον **-3**

## Αριθμητικός μέσος

Για να είναι τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου, πρέπει να ισχύει η σχέση  $2\beta = \alpha + \gamma$

Ο  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$  ονομάζεται **αριθμητικός μέσος** (ή μέσος όρος) των  $\alpha, \gamma$

Αριθμητικός μέσος των  $n$  το πλήθος αριθμών  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ονομάζεται ο αριθμός  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$

## Όροι της αριθμητικής προόδου

Γενικά, μια αριθμητική πρόοδος έχει τη μορφή  $\alpha_1, \alpha_1 + \omega, \alpha_1 + 2\omega, \dots, \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ , όπου:

- $\alpha_1$ : ο 1<sup>ος</sup> όρος
- $\omega$ : η κοινή διαφορά
- $\nu$ : η θέση του όρου στην ακολουθία (φυσικός αριθμός)

### Διάρκεια ταξιδιού

Πλοίο διανύει μία διαδρομή χωρισμένη σε πέντε τμήματα, ίσου μήκους. Για το 1<sup>ο</sup> τμήμα θέλει 10 ώρες και για κάθε επόμενο τμήμα προσθέτει από 0,5 ώρα λόγω του αυξανόμενου, με σταθερό ρυθμό, κυματισμού. Ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού, δίνεται από τον τύπο  $S_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} n = \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + (n-1)\omega}{2} n$  δηλαδή

$$S_5 = \frac{2\alpha_1 + (n-1)\omega}{2} n = \frac{2 \cdot 10 + (5-1)0,5}{2} 5 = 55$$

Τμήμα του ταξιδιού	Διάρκεια (σε ώρες)
1 <sup>ο</sup>	10
2 <sup>ο</sup>	10,5
3 <sup>ο</sup>	11
4 <sup>ο</sup>	11,5
5 <sup>ο</sup>	12
<b>Σύνολο</b>	<b>55</b>

## Προληπτική συντήρηση

Η προληπτική συντήρηση, προγραμματίζεται σε σταθερά χρονικά διαστήματα λειτουργίας (π.χ. κάθε 500 ώρες). Αν οι ώρες της συντήρησης ακολουθούν μία αριθμητική πρόοδο, τότε από τη σχέση  $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$  προκύπτει ότι η 5<sup>η</sup> προγραμματισμένη συντήρηση θα γίνει μετά από 2500 ώρες λειτουργίας, διότι  $\alpha_5 = 500 + (5-1)500 = 500 + 2000 = 2500$

Συντήρηση	Χρόνος (σε ώρες)
1 <sup>η</sup>	500
2 <sup>η</sup>	1000
3 <sup>η</sup>	1500
4 <sup>η</sup>	2000
5 <sup>η</sup>	2500

## Μισθοδοσία

Υπάλληλος, προσλαμβάνεται με μηνιαίο μισθό 1.000 € και αύξηση του μισθού 100 € κατ' έτος. Ποιος είναι ο μηνιαίος μισθός του, το 5<sup>ο</sup> έτος; Ποιες οι συνολικές μηνιαίες αποδοχές του, την πενταετία;

Οι κατ' έτος μισθοί του υπαλλήλου, σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με  $a_1 = 1.000$  ,  $\omega = 100$  Το 1<sup>ο</sup> έτος λαμβάνει 1.000 € ανά μήνα, το 2<sup>ο</sup> έτος 1.100 €, το 3<sup>ο</sup> έτος 1.200 €, το 4<sup>ο</sup> έτος 1.300 € και το 5<sup>ο</sup> έτος 1.400 € διότι από τη σχέση  $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$  προκύπτει για το 5<sup>ο</sup> έτος ότι ο μηνιαίος μισθός του είναι  $a_5 = 1000 + (5 - 1)100 = 1000 + 400 = 1400$

Από  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  προκύπτει ότι  $S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{1000 + 1400}{2} \cdot 5 = 1200 \cdot 5 = 6000$

Έτος	Μηνιαίος μισθός	Ετήσιες αποδοχές
1 <sup>ο</sup>	1.000 €	12.000 €
2 <sup>ο</sup>	1.100 €	13.200 €
3 <sup>ο</sup>	1.200 €	14.400 €
4 <sup>ο</sup>	1.300 €	15.960 €
5 <sup>ο</sup>	1.400 €	17.280 €
<b>Άθροισμα</b>	<b>6.000 €</b>	<b>72.840 €</b>

## Αξιοσημείωτα αθροίσματα

Με χρήση των σχέσεων των αριθμητικών προόδων, αποδεικνύεται ότι:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 = S_1^2$$

### Τι είναι η γεωμετρική πρόοδος

Έστω η ακολουθία  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ . Παρατηρώ ότι ο κάθε όρος της, από τον  $2^{\circ}$

και μετά, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενο του επί το  $\frac{1}{2}$

Έστω η ακολουθία  $-2, -4, -8, -16, -32, -64, \dots$ . Παρατηρώ ότι κάθε όρος της, εκτός από τον  $1^{\circ}$ , προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενό του επί το 2.

## Ορισμός γεωμετρικής προόδου

Υπάρχουν ακολουθίες που κάθε όρος τους, από τον 2<sup>ο</sup> και μετά, προκύπτει αν πολλαπλασιάσω τον προηγούμενο του επί έναν σταθερό αριθμό που λέγεται **λόγος** και συμβολίζεται με το γράμμα  $\lambda$ . Οι ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα, ονομάζονται **γεωμετρικές πρόοδοι**. Μία ακολουθία αριθμών  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$  είναι **γεωμετρική πρόοδος**, αν και μόνο τότε, αν υπάρχει αριθμός  $\lambda$  έτσι ώστε  $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda$   
 $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

## Γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου

$$\text{Είναι } \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 \lambda \\ a_3 = \lambda a_2 \\ a_4 = \lambda a_3 \\ \dots \\ a_{v-1} = \lambda a_{v-2} \\ a_v = \lambda a_{v-1} \end{array} \right\} \Rightarrow a_v = a_1 \lambda^{v-1}$$

## Αξία μηχανής

Ένα σήμα, σε κάθε κύκλο χάνει το 30% της έντασης του. Αν η αρχική ένταση είναι  $a_1 = 100$  μονάδες, ποια θα είναι η ένταση μετά από τον 6<sup>ο</sup> κύκλο;

Είναι  $\lambda = 0,7$  και από τη σχέση  $a_v = a_1 \lambda^{v-1}$  προκύπτει ότι

$$a_6 = 100 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{6-1} = \frac{7^5}{1000} = 16,807 \text{ μονάδες}$$

## Ιατρική

Ένα βακτήριο, διπλασιάζεται κάθε 30 λεπτά. Σε 5 ώρες (δηλαδή σε 10 κύκλους), πόσα βακτήρια θα υπάρχουν; Είναι  $a_1=1$ ,  $\lambda=2$  και από τη σχέση  $a_n = a_1 \lambda^{n-1}$  προκύπτει ότι  $a_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9 = 512$  βακτήρια

Κύκλος	Χρόνος (h)	Βακτήρια
1	0,5	1
2	1	2
3	1,5	4
4	2	8
5	2,5	16
6	3	32
7	3,5	64
8	4	128
9	4,5	256
10	5	512

## Κατανάλωση καυσίμου

Πλοίο έχει ημερήσια κατανάλωση 20 τόνων, όταν κινείται με ταχύτητα 12 κόμβων. Ποια θα είναι η ημερήσια κατανάλωση για ταχύτητα 14 κόμβων; Δίνεται ότι, η αύξηση της ταχύτητας κατά 1 κόμβο συνοδεύεται από αύξηση 10% της κατανάλωσης, δηλαδή  $\lambda = 1,1$ . Από τη σχέση  $a_v = a_1 \lambda^{v-1}$  είναι  $a_3 = 20 \cdot 1,1^{3-1} = 20 \cdot 1,1^2 = 20 \cdot 1,21 = 24,2$  τόνοι ανά ημέρα

Ταχύτητα (σε κόμβους)	Καύσιμα (σε τόνους)
12	20
13	22
14	24,2

### Κόστος καυσίμων

Πλοίο που κινείται με την οικονομική ταχύτητα, δαπανά ημερησίως για καύσιμα 100.000 €. Αν η αύξηση της ταχύτητας αυξάνει το κόστος των καυσίμων κατά 15% (δηλαδή  $\lambda = 1,15$ ), ανά επίπεδο ταχύτητας, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, για 3 επίπεδα είναι

$$S_3 = 100.000 \frac{1,15^3 - 1}{1,15 - 1} = 100.000 \frac{1,52 - 1}{0,15} = 100.000 \frac{0,52}{0,15} = 346.666, \bar{6} \text{ €}$$

## Απόδοση κινητήρα

Καινούργιος κινητήρας έχει αρχική απόδοση 100%, η οποία μειώνεται ετησίως κατά 5% (δηλαδή  $\lambda = 0,95$ ). Πόση θα είναι η απόδοση του κινητήρα, μετά από 6 έτη; Από τον τύπο  $a_v = a_1 \lambda^{v-1}$  είναι  $a_6 = a_1 \lambda^{6-1} = 100 \cdot 0,95^5 = 77,378$

Έτος	Απόδοση
1 <sup>ο</sup>	100
2 <sup>ο</sup>	95
3 <sup>ο</sup>	90,25
4 <sup>ο</sup>	85,737
5 <sup>ο</sup>	81,45
6 <sup>ο</sup>	77,378

## Διάβρωση μετάλλου

Ετήσια διάβρωση μετάλλου  $1 \text{ mm}$ , αυξάνεται ετησίως κατά  $20\%$  (δηλαδή  $\lambda = 1,2$ ). Πόσα  $\text{mm}$  θα είναι η διάβρωση του μετάλλου, μετά από 5 έτη;

Από τον τύπο  $a_v = a_1 \lambda^{v-1}$  είναι  $a_5 = a_1 \lambda^{5-1} = 1 \cdot 1,2^4 = 1,2^4 = 1,44 \cdot 1,44 = 2,0736 \text{ mm}$

Έτος	Διάβρωση (σε mm)
1 <sup>ο</sup>	1
2 <sup>ο</sup>	1,2
3 <sup>ο</sup>	1,44
4 <sup>ο</sup>	1,728
5 <sup>ο</sup>	2,0736

## Αρμονική πρόοδος

Έστω η ακολουθία 6, 3, 2, ... Παρατηρώ ότι η ακολουθία  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$  είναι μία αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega = \frac{1}{6}$

Βλέπω ότι υπάρχουν ακολουθίες αριθμών που αν πάρω τους αντίστροφους των όρων τους, με την ίδια τάξη, προκύπτει μία νέα ακολουθία, που είναι αριθμητική πρόοδος. Οι ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **αρμονικές προόδους**. Μία ακολουθία μη μηδενικών αριθμών  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v-2}, \alpha_{v-1}, \alpha_v$  είναι αρμονική πρόοδος, αν και μόνο αν, η ακολουθία  $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_v}$  είναι αριθμητική πρόοδος, δηλαδή αν

υπάρχει αριθμός  $\omega$  τέτοιος, ώστε να ισχύει ότι  $\frac{1}{\alpha_{v+1}} = \frac{1}{\alpha_v} + \omega \quad \forall v \in \mathbb{N}$