



Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού Ασπροπύργου Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία Εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό

Νικολάου Βασίλειος (AM 8917)
Κολοκάθης Κωνσταντίνος (AM 9053)

Εφαρμογές των διανυσμάτων

1. Φυσική

Κινηματική και δυναμική: Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την ταχύτητα, την επιτάχυνση και τη δύναμη. Για παράδειγμα, η δύναμη F και η επιτάχυνση a συνδέονται μέσω του νόμου του Νεύτωνα $F=ma$, όπου m είναι η μάζα του σώματος.

Ηλεκτρομαγνητισμός: Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία περιγράφονται με διανύσματα. Ο νόμος του Κουλόμπ για την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων είναι διανυσματικός νόμος.

2. Μηχανική

Στατική και ανάλυση δομών: Στη μηχανική, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των δυνάμεων και των ροπών σε κατασκευές, βοηθώντας στον υπολογισμό των φορτίων και της αντοχής των υλικών.

Κινηματική μηχανών: Η ανάλυση της κίνησης των μηχανισμών, όπως οι ρομποτικοί βραχίονες, γίνεται χρησιμοποιώντας διανύσματα για να περιγραφούν οι θέσεις, οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των κινούμενων μερών.

3. Γεωγραφία και πλοήγηση

Χαρτογραφία: Τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών (GIS) χρησιμοποιούν διανύσματα για να αποθηκεύουν δεδομένα σχετικά με την τοποθεσία, το σχήμα και τα χαρακτηριστικά γεωγραφικών αντικειμένων.

Ναυσιπλοΐα και αεροναυτιλία: Οι πορείες πλοίων και αεροπλάνων καθορίζονται και παρακολουθούνται με τη βοήθεια διανυσμάτων για να προσδιοριστεί η θέση, η ταχύτητα και η κατεύθυνση.

4. Υπολογιστική γραφική

Απεικόνιση 3D: Στα βιντεοπαιχνίδια και τις τρισδιάστατες γραφικές εφαρμογές, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις θέσεις, τις κατευθύνσεις και τις κινήσεις των αντικειμένων στον τρισδιάστατο χώρο.

Φωτισμός και σκιές: Η κατεύθυνση του φωτός και η δημιουργία σκιών υπολογίζονται χρησιμοποιώντας διανύσματα για να αποδοθεί ρεαλιστικά η εικόνα.

5. Ρομποτική

Κίνηση ρομπότ: Η πλοήγηση και ο έλεγχος των ρομπότ γίνονται με τη χρήση διανυσμάτων για να προσδιοριστεί η θέση, η ταχύτητα και η κατεύθυνση της κίνησης.

Ανίχνευση και αποφυγή εμποδίων: Τα ρομπότ χρησιμοποιούν διανυσματικές αναλύσεις για να ανιχνεύσουν και να αποφύγουν εμπόδια στο χώρο τους.

6. Οικονομικά και χρηματοοικονομική

Χαρτοφυλάκιο επενδύσεων: Στη θεωρία χαρτοφυλακίου, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις αποδόσεις και τους κινδύνους των επενδύσεων.

Ανάλυση δεδομένων: Τα διανύσματα χρησιμεύουν στην ανάλυση πολυδιάστατων δεδομένων και την εφαρμογή τεχνικών μηχανικής μάθησης.

7. Βιολογία και ιατρική

Μοριακή βιολογία: Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης μορίων, όπως πρωτεϊνών και νουκλεϊκών οξέων, στον χώρο.

Ιατρική απεικόνιση: Οι τεχνικές όπως η μαγνητική τομογραφία (MRI) και η αξονική τομογραφία (CT) χρησιμοποιούν διανυσματική ανάλυση για την απεικόνιση του εσωτερικού του ανθρώπινου σώματος.

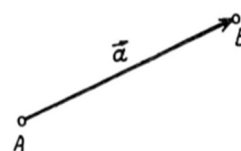
8. Αθλητισμός

Ανάλυση κίνησης: Στα αθλήματα, τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να αναλύσουν και να βελτιστοποιήσουν τις κινήσεις των αθλητών, όπως στη ρίψη δίσκου ή στο σκι.

Πλοήγηση: Σε αθλήματα όπως η ιστιοπλοία και η αεροπορία, η κατεύθυνση και η ταχύτητα του ανέμου ή του νερού αναλύονται χρησιμοποιώντας διανύσματα.

Διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο B.

Το μέτρο του ευθυγράμμου τμήματος AB ισούται με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Δηλαδή $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.

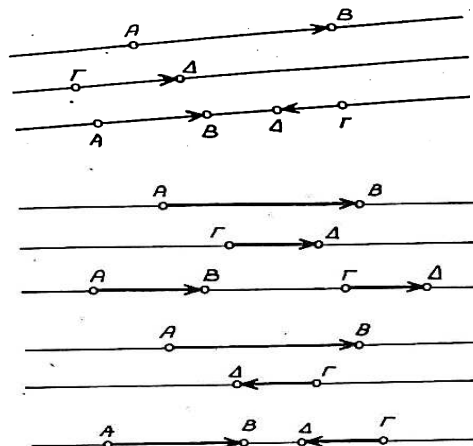


Πάντα ισχύει ότι $\|\overrightarrow{AB}\| \geq 0$.

Διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται η ευθεία γραμμή που ορίζουν τα σημεία A, B.

Παράλληλα ή συγγραμμικά, ονομάζονται δύο διανύσματα αν ανήκουν στην ίδια διεύθυνση.

Τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά.



Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε:

- **ομόρροπα** (αν έχουν την ίδια φορά) και
- **αντίρροπα** (αν έχουν αντίθετη φορά).

Αν τα σημεία A, B συμπίπτουν, τότε έχουμε το **μηδενικό** διάνυσμα που δεν έχει συγκεκριμένη διεύθυνση και φορά, Επιπλέον $\|\vec{0}\| = 0$.

Ιδιότητες της ισότητας των διανυσμάτων

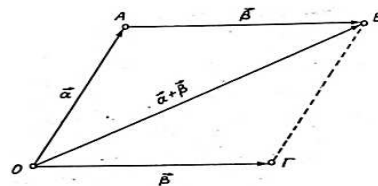
Η διανυσματική ισότητα (ουσιαστικά ισότητα συνόλων) είναι:

- **Ανακλαστική**, αφού $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ είναι $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
- **Συμμετρική**, αφού με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$ είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$
- **Μεταβατική**, αφού με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$ είναι $(\vec{\alpha} = \vec{\beta} \ \& \ \vec{\beta} = \vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

Πρόσθεση διανυσμάτων

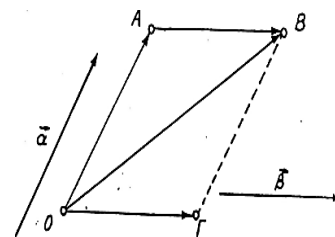
Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{AB} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{AB}$

Σχέση του Chasles $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$

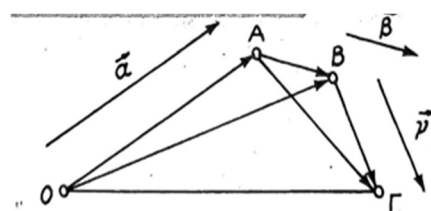


Ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων

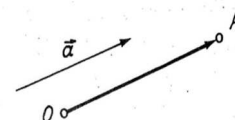
- $\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική)



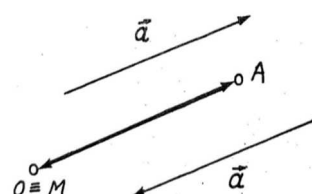
- $\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \in \mathcal{E}$ ισχύει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική)



- $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E} \exists \text{ το } \vec{0} \in \mathcal{E} \text{ ώστε } \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)



- $\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E} \exists \vec{\alpha}' \in \mathcal{E} \text{ ώστε } \vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0}$ (ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου)



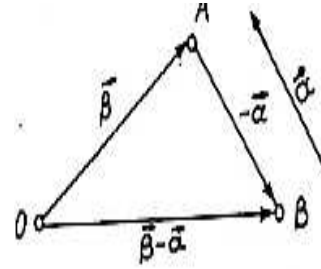
Παρατηρήσεις

- Ισχύει ότι $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$, $-\vec{0} = \vec{0}$
- Ισχύει ότι τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα δηλαδή $\|-\vec{\alpha}\| = \|\vec{\alpha}\|$.
- Ισχύει ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \in \mathcal{E}^3$.
- Ισχύει ότι $(-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta}) = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \quad \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$

Αφαίρεση διανυσμάτων

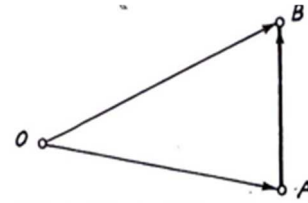
Είναι $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\beta} + (-\vec{\alpha}) = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

Άρα, για να σχηματίσω τη διαφορά $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, αρκεί στο $\vec{\beta}$ να προσθέσω το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\alpha}$.



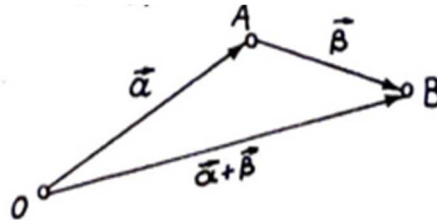
Κάθε διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος $\vec{OB}$ μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής $\vec{OA}$.

Δηλαδή $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$



Η τριγωνική ανισότητα

Για τα μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\| \vec{\alpha} \| - \| \vec{\beta} \| \leq \| \vec{\alpha} \pm \vec{\beta} \| \leq \| \vec{\alpha} \| + \| \vec{\beta} \|$.



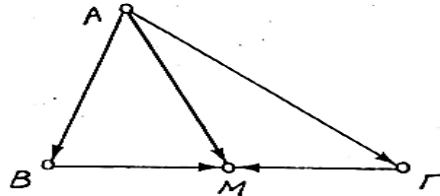
Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα

- Αν $\lambda \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0})$.
- Για κάθε $(\lambda, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R} * \mathcal{E}$ ισχύει $(-\lambda) \vec{\alpha} = \lambda(-\vec{\alpha}) = (\lambda \vec{\alpha})$.
- $\forall \lambda \in \mathcal{E}, \forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ (1^η επιμεριστική)
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ ισχύει $(\lambda + \mu) \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\alpha}$ (2^η επιμεριστική)
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ ισχύει: $\lambda(\mu \vec{\alpha}) = (\lambda \mu) \vec{\alpha}$ (προσεταιριστική)

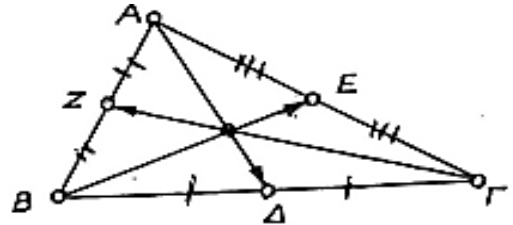
- $\forall a \in \mathcal{E}$ είναι $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{a} \in \mathcal{E} - \{\vec{0}\}$ ισχύει: $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \Rightarrow \lambda = \mu$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{E}^2$ ισχύει: $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Βασικές προτάσεις

- Η ΑΜ είναι η διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, αν και μόνο αν $\vec{AB} + \vec{AG} = 2 \cdot \vec{AM}$



- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ισχύει $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{GZ} = \vec{0}$



- Αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο του χώρου τότε ισχύει $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = 3\vec{MG}$.

