

Εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Κάπε Αμαρίλντο (AM 9226)

Φυσική

Ο 2^{ος} νόμος του Newton $F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ αποτελεί μια διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης, που περιγράφει την επιτάχυνση ενός σώματος, υπό την επίδραση μίας σταθερής δύναμης. Τέτοιες εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να μελετηθούν:

- η κίνηση των σωμάτων,
- οι ταλαντώσεις,
- τα ηλεκτρικά κυκλώματα,
- τα κύματα,
- οι θερμικές ροές.

Πρόβλεψη της συμπεριφοράς (κίνησης) των πλοίων στα κύματα

Η ταλάντωση roll (περιστροφή γύρω από τον διαμήκη άξονα), μπορεί να μοντελοποιηθεί ως $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M(t)$ όπου:

- I η ροπή αδράνειας του πλοίου γύρω από τον άξονα
- c ο συντελεστής απόσβεσης (λόγω των ρευστών)
- k η σκληρότητα επαναφοράς (λόγω της άνωσης)
- θ η γωνία ταλάντωσης (roll)
- $M(t)$ η εξωτερική ροπή λόγω των κυμάτων

Δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου (Ship motion dynamics)

Οι περισσότερες από τις κινήσεις του πλοίου, περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, της μορφής $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$, όπου:

- m η μάζα (ή ροπή αδράνειας)
- c η απόσβεση λόγω της αντίστασης του νερού (υδροδυναμικές δυνάμεις)
- k η σταθερά επαναφοράς (π.χ. λόγω της άνωσης)
- $F(t)$ η εξωτερική δύναμη (π.χ. κύματα, άνεμος)
- $x(t)$ η μετατόπιση ή γωνία

Αυτές οι εξισώσεις, χρησιμοποιούνται για να προβλέψουμε αν το πλοίο μπορεί να παραμείνει ευσταθές (εμφάνιση ροπής επαναφοράς), άνετο για τους επιβάτες και ασφαλές για τα φορτία.

Αυτόματος έλεγχος της πορείας (Autopilot systems)

Ο αυτόματος έλεγχος της πορείας ενός πλοίου, απαιτεί τη μοντελοποίηση της δυναμικής απόκρισης του όταν αυτό στρέφεται (yaw motion), κάτι που υλοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης.

Π.χ. η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική απόκριση του πλοίου σε αλλαγή πορείας, είναι η $I \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = u(t)$, όπου:

- y η γωνία στροφής
- I η ροπή αδράνειας, ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- $u(t)$ η είσοδος (π.χ. κίνηση του πηδαλίου)

Καταπόνηση του κύτους (Hull girder response)

Το κύτος του πλοίου, λειτουργεί ως δοκός που παραμορφώνεται ελαστικά, κατά τη διάρκεια των κυματισμών και η δυναμική ανάλυση των παραμορφώσεων του, περιλαμβάνει μορφές ταλάντωσης και κατανομές των διαφόρων φορτίων.

Η διαδικασία, μοντελοποιείται με διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} ή και 4^{ης} τάξης (όπως η εξίσωση της καμπτικής δόνησης Euler–Bernoulli)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(x, t) \text{ όπου } y \text{ είναι η κάθετη μετατόπιση του κύτους.}$$

Με αυτές τις εξισώσεις, γίνεται ανάλυση της παραμόρφωσης, υπολογισμός της κόπωσης και εξασφαλίζεται διαχρονικά η αντοχή.

Κύματα και συντονισμός

Συντονισμός είναι όταν η συχνότητα ταλάντωσης των κυμάτων είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πλοίου.

Αν συμβεί, τότε οι κινήσεις του πλοίου μεγεθύνονται επικίνδυνα (μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης).

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από την ομογενή διαφορική εξίσωση $m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Οι ναυπηγοί, προσπαθούν να σχεδιάσουν τα πλοία έτσι ώστε να αποφεύγουν το φαινόμενο του συντονισμού, με τα τυπικά ωκεάνια κύματα.

Απλό εκκρεμές

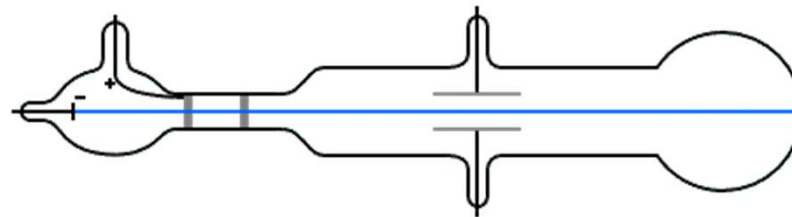
Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του απλού εκκρεμούς μήκους ℓ , με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας του, είναι $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\eta\mu\theta = 0$ **(1)**

Όταν η γωνία θ είναι πολύ μικρή θεωρώ ότι $\eta\mu\theta = \theta$, οπότε η **(1)** γίνεται $m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0$ **(2)**

Οι λύσεις της **(1)**, προσεγγίζουν τις λύσεις της **(2)**, εφόσον οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρές.

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Σε ηλεκτρικό κύκλωμα Thomson αποτελούμενο από πυκνωτή (C) και πηνίο (L), παρατηρείται φθίνουσα ταλάντωση, που οφείλεται στην ωμική αντίσταση (R) του πηνίου που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

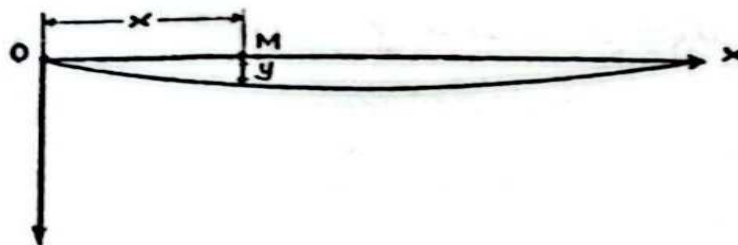


Υπολογισμός του βέλους μιας πακτωμένης δοκού 1/2

Οριζόντια δοκός, στηρίζεται και στα δύο της άκρα σε στηρίγματα. Άξονας x ο άξονας της δοκού και y η κατακόρυφη απομάκρυνση από την αρχική του θέση (οποιοδήποτε σημείου της δοκού) δηλαδή το βέλος της.

Είναι $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$ όπου:

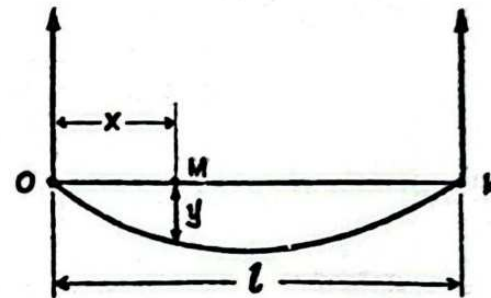
- I η ροπή αδράνειας της τομής S της δοκού, ως προς το κέντρο βάρους της,
- E το μέτρο της ελαστικότητας του μετάλλου,
- M το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων (που εφαρμόζονται δεξιά ή αριστερά της τομής) που παίρνω σε απόσταση x , όταν στον y περιλαμβάνουμε τις ροπές, που οφείλονται στην αντίδραση των στηριγμάτων
- ρ η ακτίνα καμπυλότητας της δοκού σε ένα οποιοδήποτε σημείο τετμημένης x .



Γράφημα 15 Βέλος δοκού y

Υπολογισμός του βέλους μιας πακτωμένης δοκού 2/2

Το βέλος y γίνεται μέγιστο στο μέσο της δοκού, δηλαδή σε απόσταση $OM = x = \frac{\ell}{2}$ και η τιμή του αυτή $y_{\max}$, είναι το βέλος που αποκτά η δοκός. Αυτή είναι

$$y_{\max} = \frac{5 \cdot F \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I} = k \cdot \frac{\ell^4}{I}$$


Γράφημα 16 Μέγιστο βέλος δοκού $y_{\max}$

Αντοχή υλικών

Έστω οριζόντια δοκός, πακτωμένη μόνο στο ένα άκρο, ενώ στο άλλο άκρο της δέχεται κατακόρυφο φορτίο F .

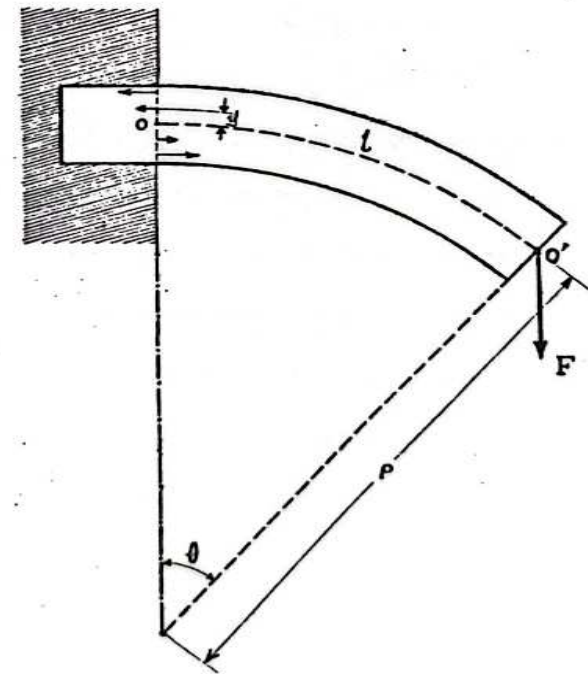
ΟΟ' είναι το ουδέτερο στρώμα της δοκού, δηλαδή το στρώμα του οποίου δεν μεταβάλλεται το μήκος λόγω του φορτίου F και αποτελεί τη διαχωριστική επιφάνεια της δοκού, που πάνω από αυτήν το υλικό της υφίσταται **εφελκυσμό**, ενώ κάτω από αυτήν **κατάθλιψη**.

Αν S είναι η τομή της δοκού, a το πάχος της και dy μια αύξηση της απόστασης y από το μέσο στρώμα, τότε στην επιφάνεια $dS = a \cdot dy$ ασκείται μια δύναμη dF .

Η ανά μονάδα επιφάνειας δύναμη (η), είναι $\eta = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{a \cdot dy}$.

Η ακτίνα καμπυλότητας ρ είναι $\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}$

Η κάμψη της δοκού δίνεται από τον τύπο $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$



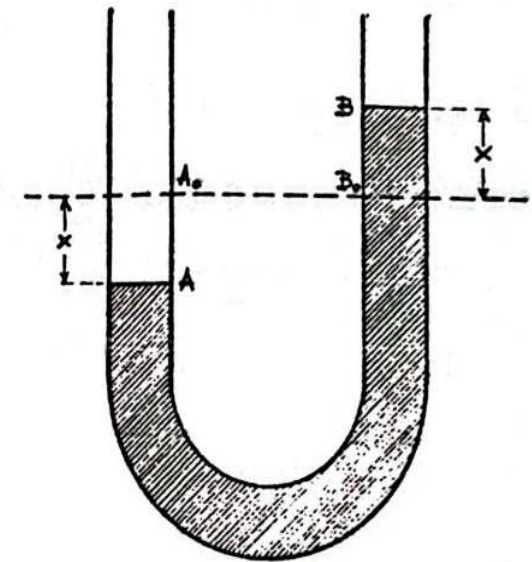
Γράφημα 14 Περιστροφή οριζόντιας πακτωμένης δοκού

Υδροστατική

Μελέτη της κίνησης ενός υγρού που ισορροπεί εντός σωλήνα σχήματος U, όταν η ελεύθερη του επιφάνεια απομακρυνθεί κατά x από την αρχική του στάθμη της κατάστασης ηρεμίας. Τριβές αμελητέες

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του υγρού είναι $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$

Το υγρό εκτελεί αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση περιόδου $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$



Γράφημα 18 Σωλήνας U

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας !

