

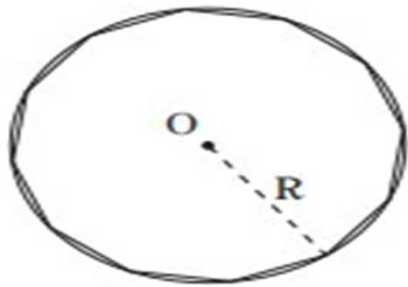
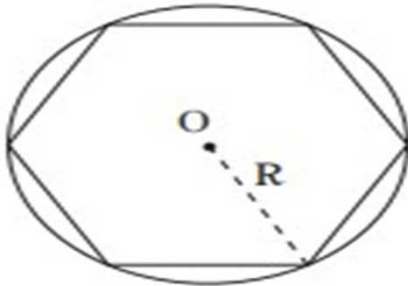
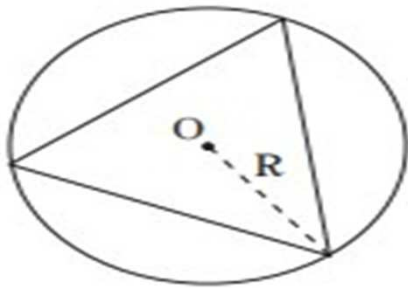
Μήκος τόξου καμπύλης

Μητσακόπουλος Παναγιώτης (ΑΜ 9073)

Μερσινάϊ Μαρίνος (ΑΜ 9072)

Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

1/2



Έστω κύκλος (O,R) .

Εγγράφω σε αυτόν διαδοχικά,

ένα ισόπλευρο τρίγωνο,

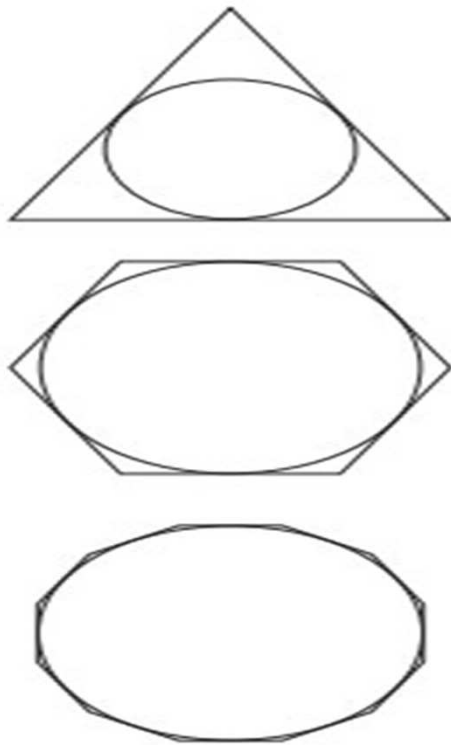
ένα κανονικό 6-γωνο,

ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο.

Καθώς ο αριθμός των πλευρών των κανονικών πολυγώνων διπλασιάζεται, από το σχήμα φαίνεται ότι «το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο».

Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

2/2

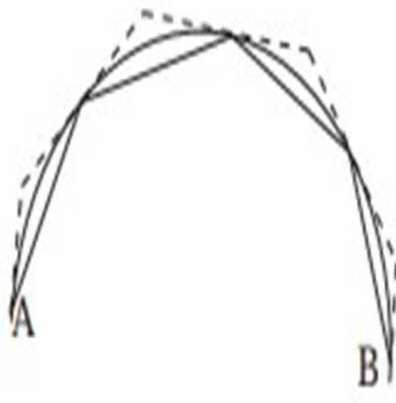


Αν αντί των εγγεγραμμένων πολυγώνων, θεωρήσω κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα στον κύκλο (O,R) και διπλασιάζω διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους, καταλήγω στο ίδιο συμπέρασμα δηλαδή ότι «το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο».

$$\text{Ισχύει πάντα ότι } \frac{\ell}{2R} = \pi$$

- Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε 1^{ος} ότι ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του, είναι σταθερός, δηλαδή ίδιος για κάθε κύκλο.
- Η σταθερά αυτή συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα (αρχικό της λέξης περιφέρεια).
- Ο αριθμός π είναι άρρητος, υπερβατικός. Μια προσέγγισή του, που στην πράξη χρησιμοποιείται, είναι το 3,14.

Μήκος τόξου



Έστω τόξο AB ενός κύκλου (O, R) .

Μία τεθλασμένη γραμμή, με άκρα τα σημεία A , B και τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου λέγεται **εγγεγραμμένη** στο τόξο AB .

Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται **κανονική τεθλασμένη** γραμμή.

Μια τεθλασμένη με άκρα τα A , B και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου AB , λέγεται **περιγεγραμμένη** τεθλασμένη στο τόξο AB .

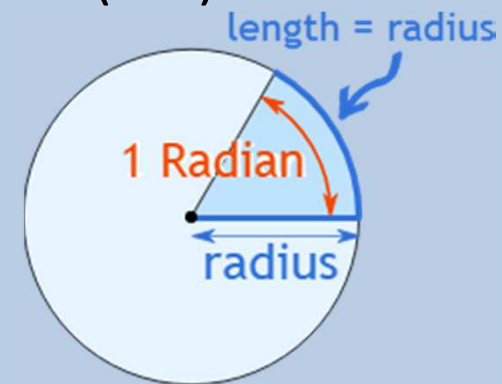
Η έννοια της **κανονικής περιγεγραμμένης** γραμμής ορίζεται, όπως στην περίπτωση της εγγεγραμμένης.

Το μήκος του τόξου AB κύκλου (O, R) ορίζεται όπως και το μήκος του κύκλου.

Ακτίνιο (rad)

Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° με μήκος $2\pi R$,
ένα τόξο 1° έχει μήκος $2\pi R/360 = \pi R/180$ και
ένα τόξο μ° έχει μήκος $2\pi R\mu/360 = \pi R\mu/180$.

- Ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται **ακτίνιο** (rad).

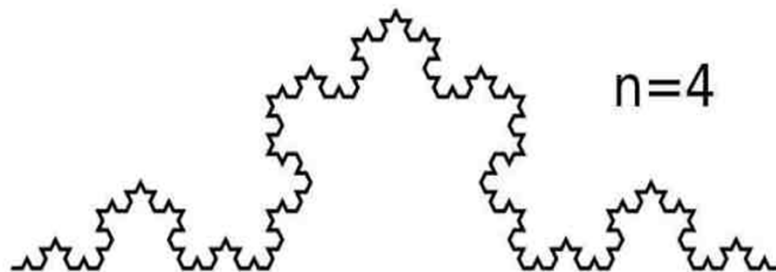
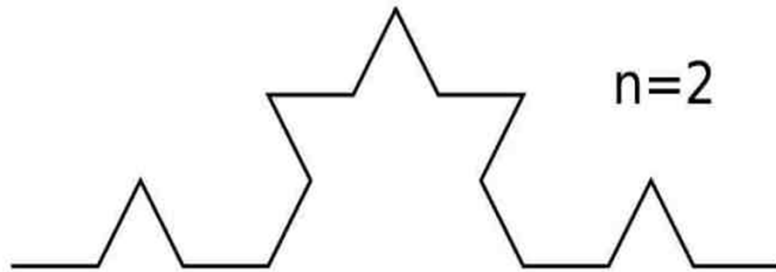
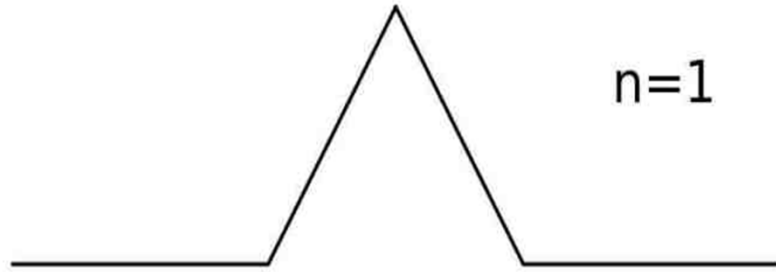


- Το τόξο ενός ακτινίου ισούται με το $1/2\pi$ του κύκλου.

Σχέση μεταξύ ακτινίου (rad) & μοίρας

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} 360^\circ = \frac{1}{\pi} 180^\circ = \frac{1}{3,14159} 180^\circ = 57,295828$$

**Καμπύλες γραμμές με άπειρο μήκος
Π.χ. Καμπύλη ή (χιονο)νιφάδα του Koch**



Μήκος πλευράς

$$L_v = \left(\frac{1}{3}\right)^v$$

Πλήθος πλευρών

$$\Pi_v = 3 \cdot 4^v$$

Περίμετρος

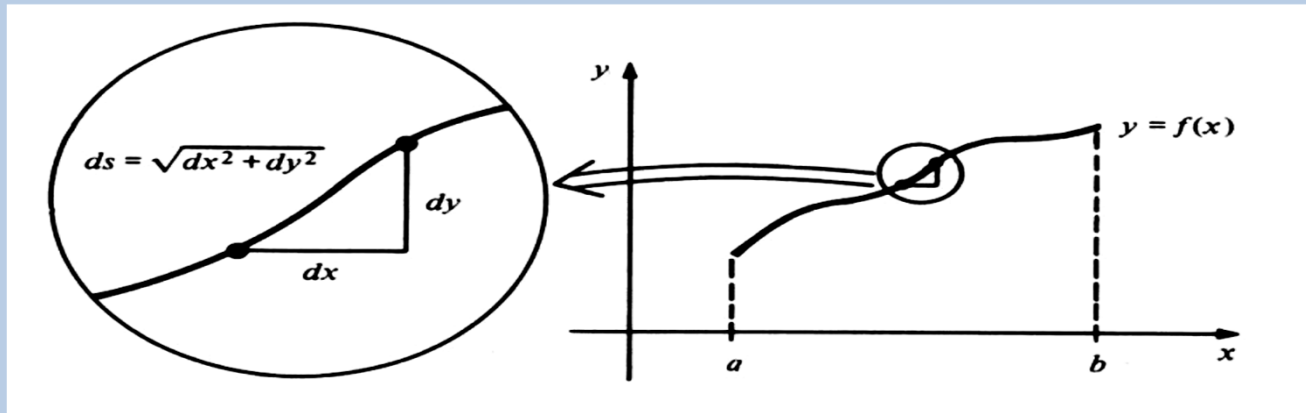
$$P_v = L_v \cdot \Pi_v = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^v$$

Μήκος καμπύλης

$$\ell = \lim_{v \rightarrow +\infty} P_v = 3 \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^v = +\infty$$

Μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής

Θεωρώ μία καμπύλη γραμμή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$ από $x=a$ ως $x=b$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η καμπύλη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από απειροστά τμήματα. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι το μήκος κάθε απειροστού τμήματος ds είναι

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Εφαρμογή 1 1/2

Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $y=x^{3/2}$
από $x=0$ ως $x=5$

$$y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής δίνεται από τον τύπο

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\ell = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \left[\frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5$$

Εφαρμογή 1 2/2

συνέχεια

$$= \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4} 5 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{49}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left[\frac{7^3}{2^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} \left(\frac{343 - 8}{8} \right) = \frac{335}{27}$$

Μήκος τόξου επίπεδης καμπύλης γραμμής που δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής η οποία ορίζεται από παραμετρικές εξισώσεις, δίνεται από το ολοκλήρωμα $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ (1)

Αν τα x, y, z είναι συναρτήσεις του t , δηλαδή αν είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε ο γενικός τύπος (1) γίνεται

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

δηλαδή, ο τύπος (1) είναι γενικός και ισχύει αν τα x, y, z είναι συναρτήσεις κάθε άλλης μεταβλητής.

Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $x = \omega - \eta\mu\omega$, $y = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$ από $\omega = 0$ ως $\omega = 2\pi$.

Το μήκος της καμπύλης γραμμής, δίνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2} d\omega$.

Βρίσκω τις παραγώγους

$$dx = (1 - \sigma\upsilon\nu\omega) d\omega \Rightarrow \frac{dx}{d\omega} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$dy = \eta\mu\omega \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dy}{d\omega} = \eta\mu\omega \quad \text{Αντικαθιστώ και έχω}$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 d\omega^2 + \eta\mu^2\omega d\omega^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu^2\omega} d\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\omega} d\omega = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} d\omega = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = 4 \int_0^{2\pi} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$4 \left[-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 4 \left[-\sigma\upsilon\nu\pi - (-\sigma\upsilon\nu 0) \right] = 4(1 + 1) = 8$$

Μήκος τόξου επίπεδης καμπύλης γραμμής που δίνεται με πολικές συντεταγμένες

Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γραμμής, της οποίας η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, λαμβάνεται από τον τύπο $\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} d\theta$ ή από τον

τύπο $\ell = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{p^2 \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + 1} dp$, όπου θ_1, θ_2 οι μεταβολές της πολικής γωνίας και ρ_1, ρ_2 οι μεταβολές της πολικής ακτίνας.

Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης γραμμής $p = \alpha(1 - \sigma \nu \theta)$ από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$.

$$\text{Είναι } \ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{και} \quad dp = \alpha \eta \mu \theta d\theta, \quad \frac{dp}{d\theta} = \alpha \eta \mu \theta$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 (1 - \sigma \nu \theta)^2 + \alpha^2 \eta \mu^2 \theta} d\theta =$$

$$\alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\sigma \nu \theta + \sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sigma \nu \theta} d\theta = \alpha \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sigma \nu \theta} d\theta$$

$$= \alpha \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\eta \mu^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2\alpha \int_0^{2\pi} \eta \mu \frac{\theta}{2} d\theta = \left[-4\alpha \sigma \nu \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8\alpha$$