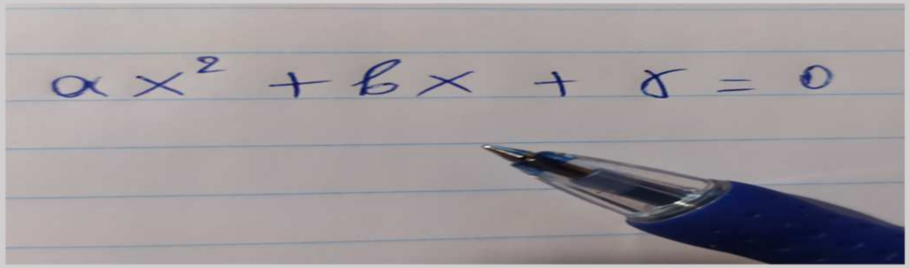


Μελέτη γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Μαραγκός Γεώργιος (ΑΜ 9067)

Εφαρμογές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη ναυτιλία

- Ραντάρ και συστήματα εντοπισμού
- Ναυτική αρχιτεκτονική (σχήμα γάστρας)
- Απόσταση ακινητοποίησης
- Ευστάθεια και μετακεντρικό ύψος
- Κατανάλωση καυσίμου και ταχύτητα

Εφαρμογή 1

Πλοίο καταναλώνει ημερησίως $25\ tn$ καυσίμου όταν ταξιδεύει με 10 κόμβους. Αν αυξηθεί η ταχύτητα στους 12 κόμβους, πόση θα είναι η νέα κατανάλωση;

Βρίσκω τη σταθερά k. Είναι $25 = k10^2 \Leftrightarrow 25 = k100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = k$

Υπολογισμός της νέας κατανάλωσης. $\dfrac{1}{4}12 \cdot 12 = 3 \cdot 12 = 36\ tn$ ημερησίως

Μια μικρή αύξηση της ταχύτητας (2 κόμβοι) προκάλεσε τεράστια αύξηση στην κατανάλωση (11 τόνους), λόγω του τετραγώνου.

Εφαρμογή 2

Έστω ότι ο όγκος του νερού που εκτοπίζει ένα πλοίο δίνεται από τη σχέση $V = 100T - 2T^2$ όπου V το βύθισμα του πλοίου σε m^3

T το βύθισμα του πλοίου σε m

Αν το πλοίο εκτοπίζει $200m^3$ νερού, ποιο είναι το βύθισμα του;

Είναι $200 = 100T - 2T^2 \Leftrightarrow$

$$100 = 50T - T^2 \Leftrightarrow$$

$$T^2 - 50T + 100 = 0 \Leftrightarrow T = \begin{Bmatrix} 47,92\ m \\ 2,085\ m \end{Bmatrix}$$ Δεκτό βύθισμα είναι μόνο το $2,085\ m$

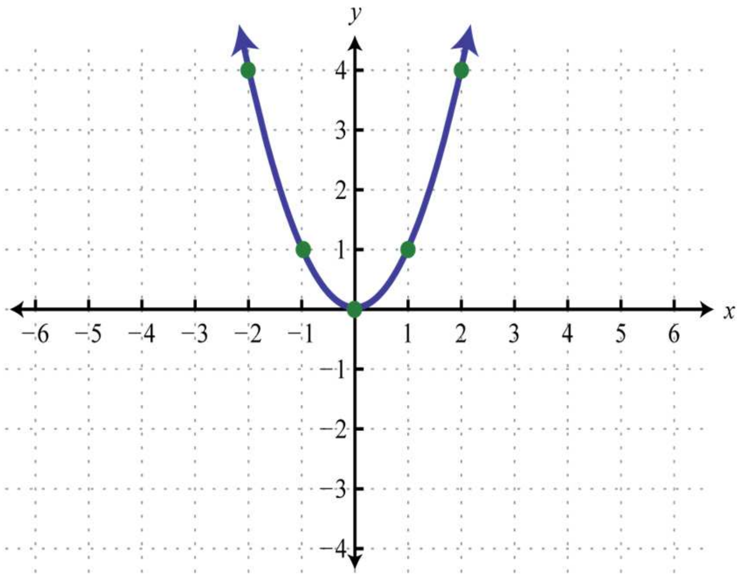
Εφαρμογές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης για μηχανικούς

- Καμπύλη ισχύος και στροφών μηχανής
- Πτώση πίεσης και ροή ρευστών
- Καταπονήσεις των αξόνων
- Θερμοδυναμική και μετάδοση θερμότητας
- Ηλεκτρικές γεννήτριες και απώλειες
- Κινητική
- Αντλίες
- Αντίσταση πλοίου και ισχύς πρόωσης

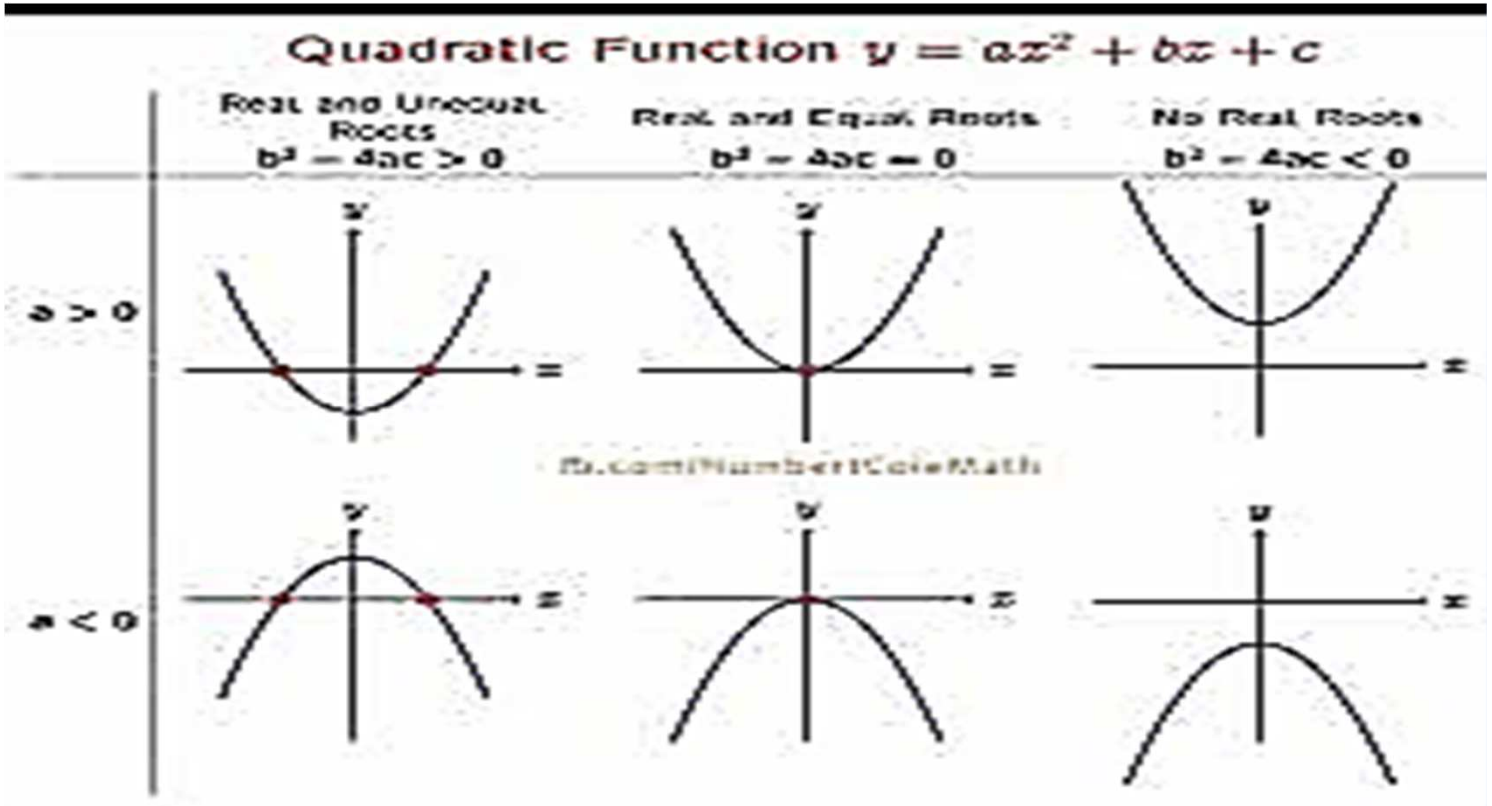
Οι συντεταγμένες των σημείων της παραβολής (γραφική παράστασης του τριωνύμου) επαληθεύουν τον τύπο $ax^2 + bx + c = 0$

$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

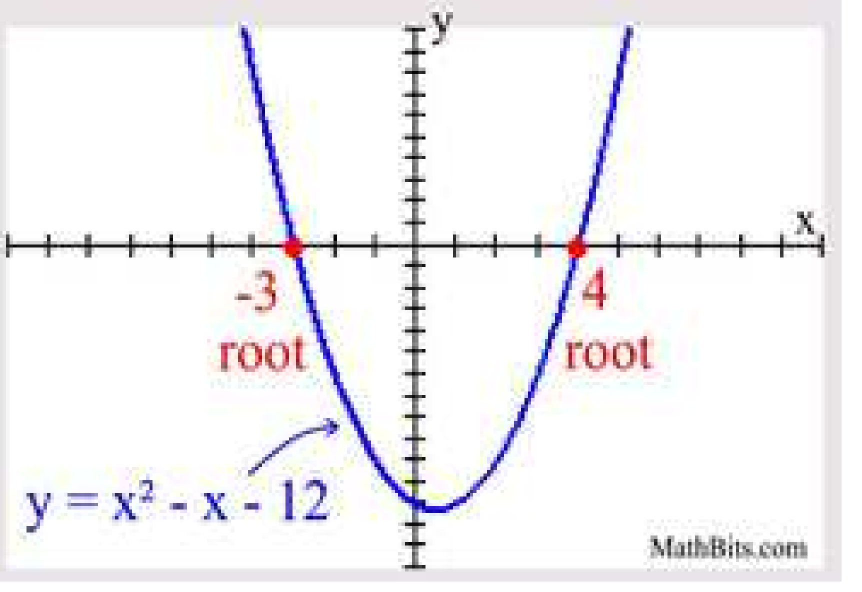


Κυρτότητα (α>0), κοιλότητα (α<0), πλήθος ριζών (Δ>0, Δ=0, Δ<0)

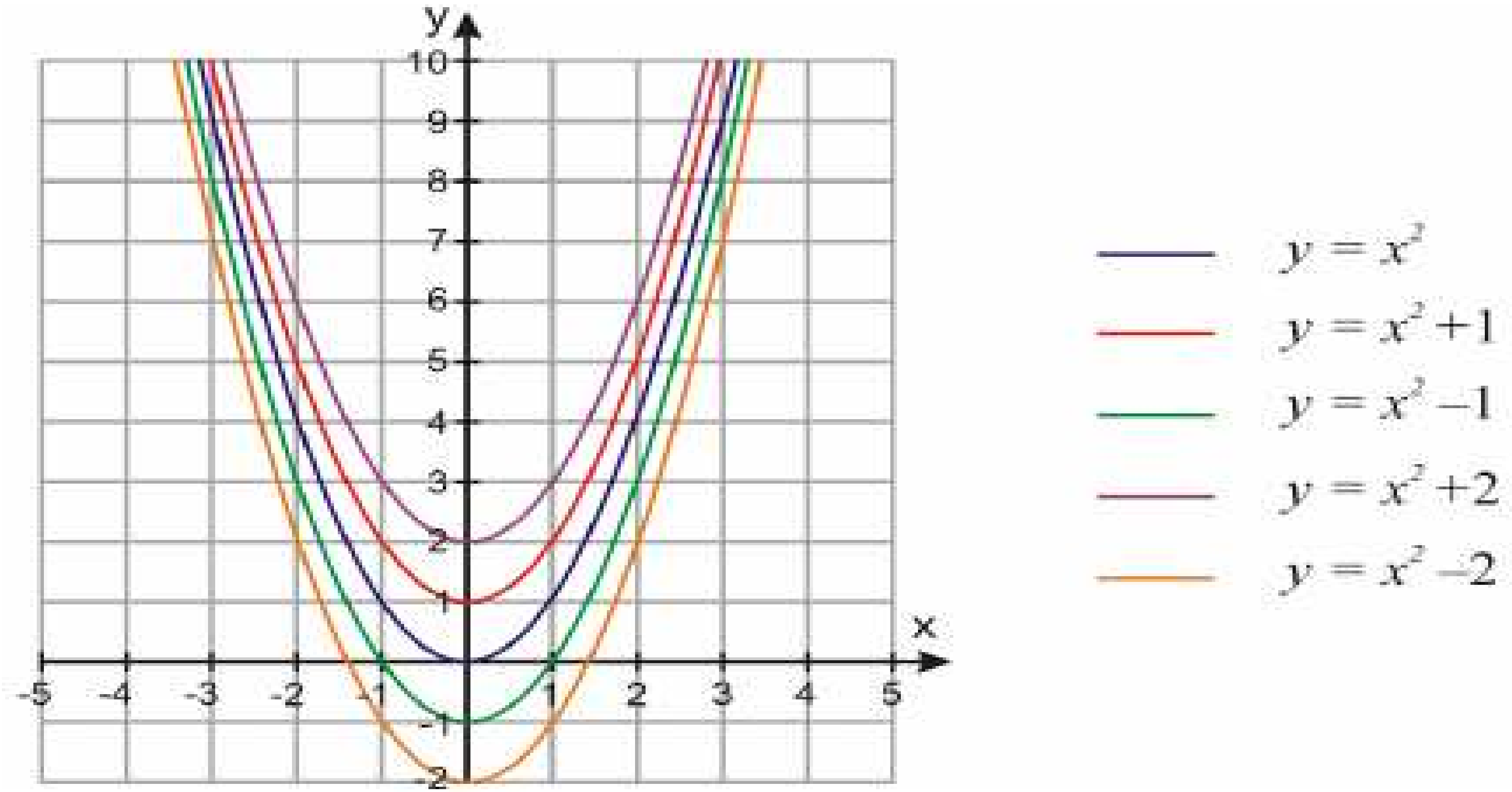


Γραφική παράσταση

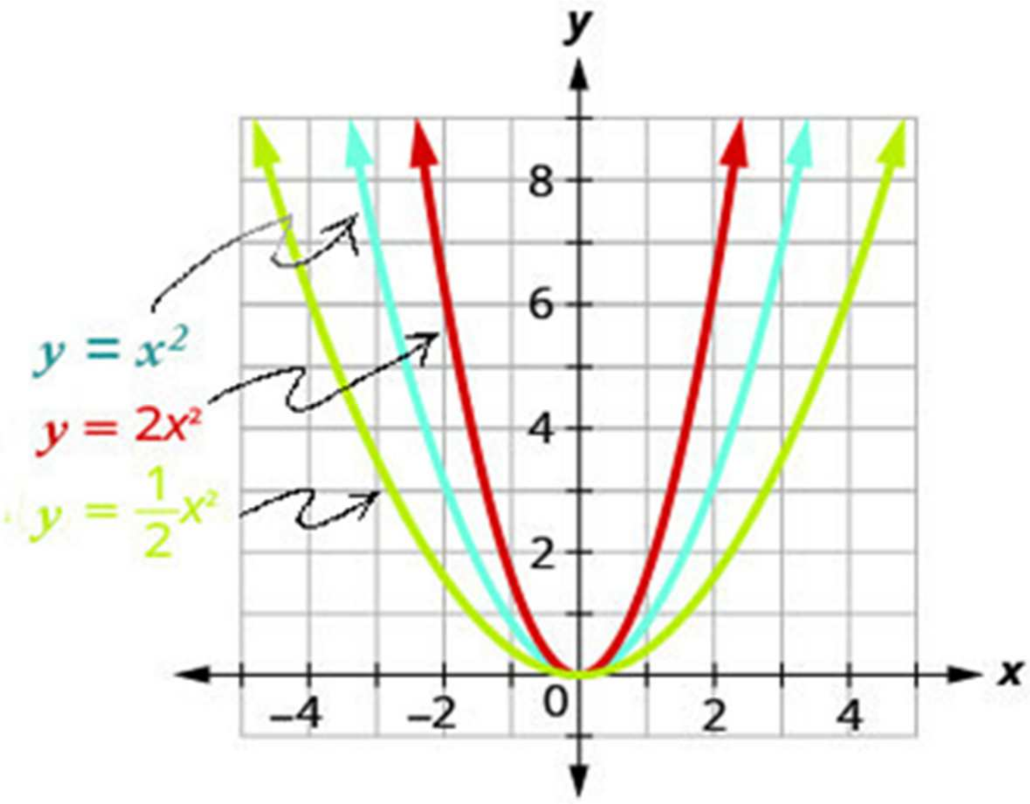
$a = 1 > 0$
$b = -1$
$c = -12 < 0$
$\Delta = 49$
$x_1 = -3$
$x_2 = 4$
$P = \frac{c}{a} = -12$
$P = x_1 \cdot x_2 = -12$



Η τιμή του συντελεστή α, καθορίζει πόσο κοντά (ή μακριά) στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της, δηλαδή στην ευθεία $x = \frac{-b}{2a}$ κείτονται τα σημεία της γραφικής παράστασης της παραβολής.

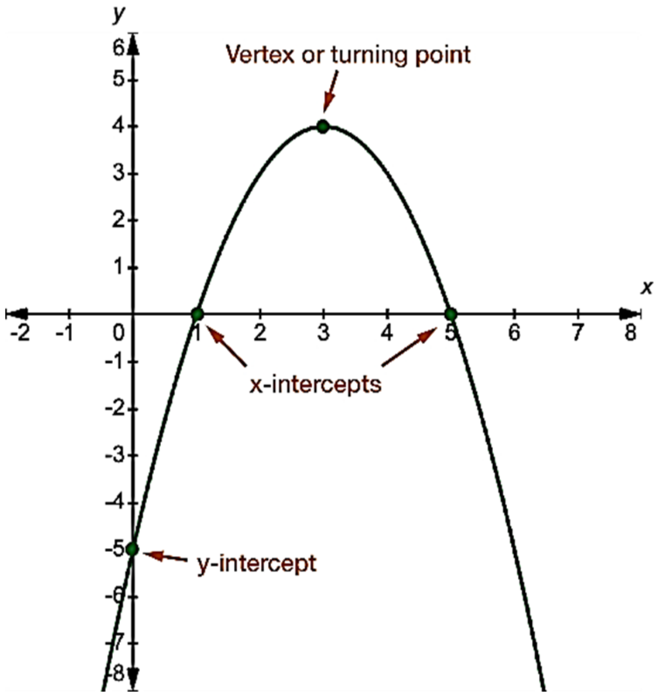


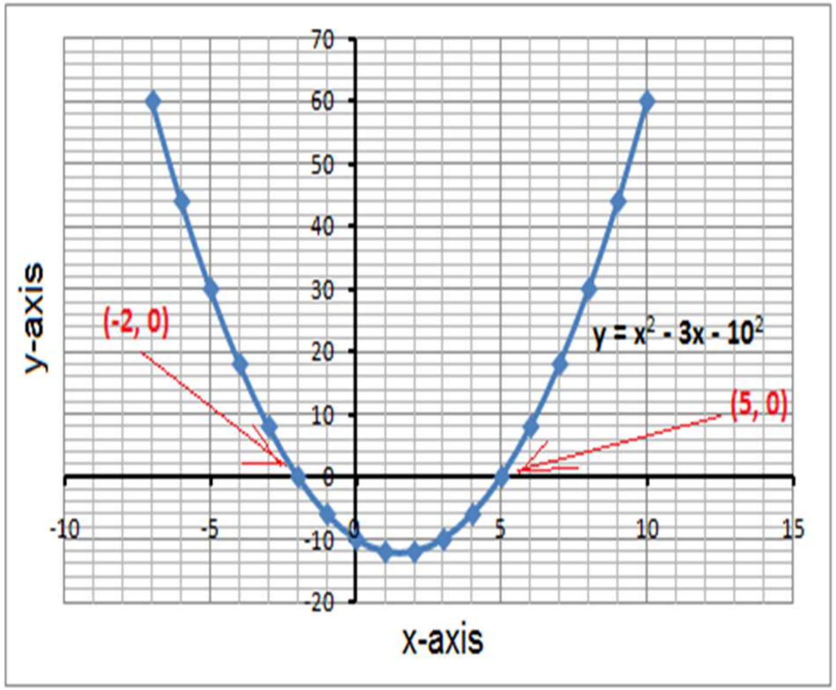
Όσο μεγαλώνει το α, τόσο «κλείνει» η παραβολή
α>0, άρα στρέφει τα κοίλα πάνω
Δ=0, άρα υπάρχει μία διπλή λύση



• Για $a<0$, που τα κοίλα είναι στραμμένα προς τα κάτω, η παραβολή είναι γνησίως αύξουσα όταν $x<\frac{-b}{2a}$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x>\frac{-b}{2a}$

• Για $a>0$, ισχύουν τα αντίθετα.





Η γενική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς τις μεταβλητές x, y έχει τη μορφή

$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \Gamma y^2 + \Delta x + \mathrm{E}y + \mathrm{Z} = 0$ όπου $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z} \in \mathbb{R}$ με $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\Gamma| \neq 0$

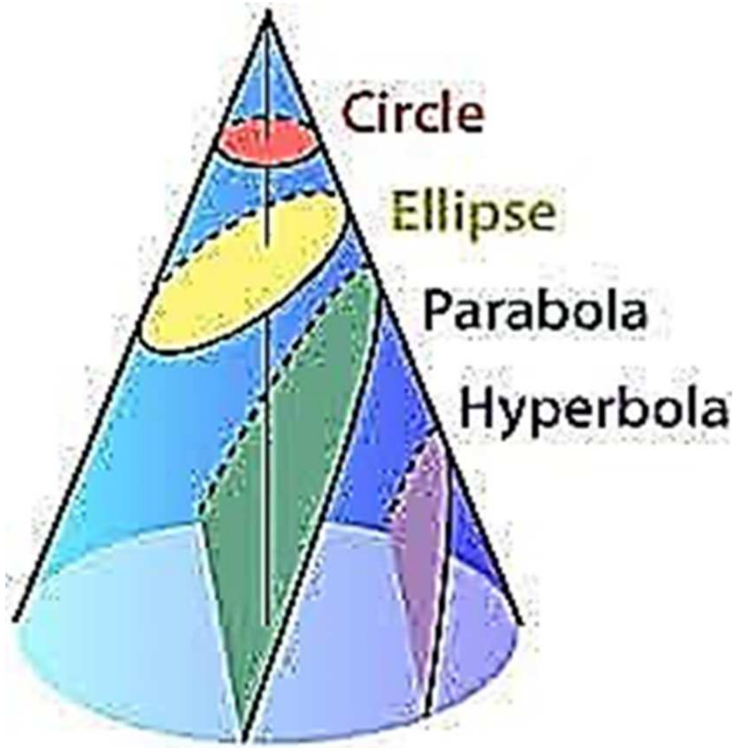
(τουλάχιστον ένας από τους $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι διάφορος του μηδέν).

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix} = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2$$

- ***Κάθε εξίσωση κωνικής με κέντρο ($\delta_1 \neq 0$) είναι ελλειπτική ($\delta_1 > 0$) ή υπερβολική ($\delta_1 < 0$).***
- ***Κάθε ελλειπτική εξίσωση είναι εξίσωση μιας έλλειψης ή μιας εκφυλισμένης έλλειψης ή μιας φανταστικής έλλειψης.***
- ***Κάθε υπερβολική εξίσωση είναι εξίσωση μιας υπερβολής ή μιας εκφυλισμένης υπερβολής.***

Διερεύνηση της εξίσωσης 1/2

$\delta\neq 0$	$\delta_1<0$	Υπερβολή
	$\delta_1=0$	Παραβολή
	$\delta_1>0$	Έλλειψη
$\delta=0$	$\delta_1<0$	Δυο πραγματικές ευθείες τεμνόμενες
	$\delta_1=0$	Δυο πραγματικές ευθείες παράλληλες ή συμπίπτουσες
	$\delta_1>0$	Δυο φανταστικές ευθείες συζυγείς



Διερεύνηση της εξίσωσης 2/2

$A x^2 + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2E y + Z = 0$			
$A\Gamma \neq 0$	$N = \frac{\Delta^2}{A} + \frac{E^2}{\Gamma} - Z$		
	$N > 0$	$A > 0,\ \Gamma > 0$	Έλλειψη
		$A < 0,\ \Gamma < 0$	Καμία πραγματική καμπύλη
		$A\Gamma < 0$	Υπερβολή
	$N = 0$	$A\Gamma > 0$	Σημείο
		$A\Gamma < 0$	Ζεύγος τεμνόμενων ευθειών
	$N < 0$	$A > 0,\ \Gamma > 0$	Καμία πραγματική καμπύλη
		$A < 0,\ \Gamma < 0$	Έλλειψη
		$A\Gamma < 0$	Υπερβολή
$A\Gamma = 0$	$A = 0,\ \Gamma \neq 0$	$\Delta \neq 0$	Παραβολή
		$\Delta = 0$	Ζεύγος παράλληλων ευθειών, συμπιπτουσών αν $E^2 - \Gamma Z = 0$
	$A \neq 0,\ \Gamma = 0$	$E \neq 0$	Παραβολή
		$E = 0$	Ζεύγος παράλληλων ευθειών, συμπιπτουσών αν $\Delta^2 - AZ = 0$
	$A = \Gamma = 0$	Όχι $\Delta = E = 0$	Ευθεία
		$\Delta = E = 0$	Trivial

Εφαρμογή 3 (παραβολή)

Της εξίσωσης $3x^2 - 30x + 8y + 65 = 0$ οι συντελεστές έχουν τιμές Α=3 $\neq 0$, Γ=0 , Δ $\neq 0$ άρα η εξίσωση ορίζει παραβολή. Για να βρω την κορυφή, την εστία και την παράμετρο της, διαιρώ όλα τα μέλη δια 3 και γράφω την εξίσωση στη μορφή $x^2 - 10x + 25 = \frac{-8}{3}y - \frac{65}{3} + \frac{75}{3}$ και στη συνέχεια $(x-5)^2 = \frac{-8}{3}\left(y - \frac{5}{4}\right)$ έτσι για την παραπάνω παραβολή, κορυφή είναι το σημείο $K\left(5, \frac{5}{4}\right)$ και $p = \frac{4}{3}$

Εφαρμογή 4 (έλλειψη)

Η εξίσωση $25x^2 + 49y^2 + 150x - 196y - 804 = 0$ ορίζει μία έλλειψη με κύριο άξονα παράλληλο προς τον άξονα xx' του συστήματος αναφοράς, διότι είναι $\mathrm{A} = 25 \neq 0,\ \Gamma = 49 \neq 0$ και $\mathrm{N} > 0$

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς το κέντρο, είναι $\dfrac{(x+3)^2}{49} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

Κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο $\mathrm{M}(-3, 2)$

Για τον μεγάλο και τον μικρό ημιάξονα α, β είναι αντίστοιχα $\alpha = 7,\ \beta = 5$

Εφαρμογή 5 (υπερβολή)

Η εξίσωση $64x^2 - 25y^2 + 256x + 300y - 2244 = 0$ ορίζει, σύμφωνα με τον προηγούμενο πίνακα, μια υπερβολή, με εξίσωση $64\left(x^2 + 4x\right) - 25\left(y^2 - 12y\right) = 2244$ ή ισοδυνάμως $64\left(x+2\right)^2 - 25\left(y-6\right)^2 = 1600$ και τελικά $\frac{\left(x+2\right)^2}{25} + \frac{\left(y-6\right)^2}{64} = 1$

Κέντρο της είναι το σημείο $\mathrm{M}\left(-2, 6\right)$ και οι ημιάξονες είναι μήκους 5 και 8

Εφαρμογή 6 (2 ευθείες)

Για την κωνική τομή με εξίσωση $9x^2-4y^2=0$ έχω $\mathrm{A}\Gamma \neq 0$ και ειδικότερα $\mathrm{A}\Gamma<0$, $\mathrm{N}=0$ άρα, η κωνική τομή που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση εκφυλίζεται σε δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών. Πράγματι $9x^2-4y^2=(3x-2y)(3x+2y)$ Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με $(3x-2y)(3x+2y)=0$ η οποία ορίζει τις δύο ευθείες $\left\{\begin{matrix} 3x-2y=0 \\ 3x+2y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=\dfrac{3x}{2} \\ y=\dfrac{-3x}{2} \end{matrix}\right\}$ οι οποίες τέμνονται στην αρχή του συστήματος αναφοράς.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας