

Οι λογάριθμοι και οι ιδιότητες τους

Μαργκαριάν Χατσίκ (AM 9068)

Κουλουμπαρίτσης Χρήστος (AM 9147)

Εφαρμογές των λογαρίθμων στη ναυτιλία 1/2

- Υπολογισμός της ταχύτητας και της απόστασης
- Μέθοδοι ναυσιπλοΐας και χαρτογράφηση
- Υπολογισμός της κλίμακας του χάρτη
- Ανάλυση της αντίστασης του νερού και των συνθηκών της κίνησης
- Αξιολόγηση της οικονομίας του καυσίμου
- Ανάλυση του σήματος και επικοινωνίες
- Υπολογισμοί για την ασφαλή φόρτωση και εκφόρτωση των πλοίων

Εφαρμογές των λογαρίθμων στη ναυτιλία 2/2

- **Ανάλυση των καμπυλών πλοήγησης**
- **Ανάλυση του κινδύνου και της ασφάλειας**
- **Αποτίμηση των οικονομικών και των ναυτιλιακών αγορών**

Εφαρμογές των λογαρίθμων στις μηχανές των πλοίων 1/2

- Ανάλυση της απόδοσης του κινητήρα (Κατανάλωση του καυσίμου, Ικανότητα του κινητήρα)
- Διαχείριση της θερμοκρασίας και της πίεσης (Θερμοκρασία του κινητήρα, πίεση του καυσίμου)
- Βελτιστοποίηση της κατανάλωσης του καυσίμου (Οικονομική ταχύτητα, εκθετική αύξηση της κατανάλωσης του καυσίμου)
- Ανάλυση των κραδασμών και των δονήσεων του κινητήρα
- Ανάλυση των εκπομπών ρύπων
- Διαχείριση των συστημάτων προώθησης

Εφαρμογές των λογαρίθμων στις μηχανές των πλοίων 2/2

- Ανάλυση και βελτιστοποίηση της πίεσης στον κυλινδρικό χώρο του κινητήρα

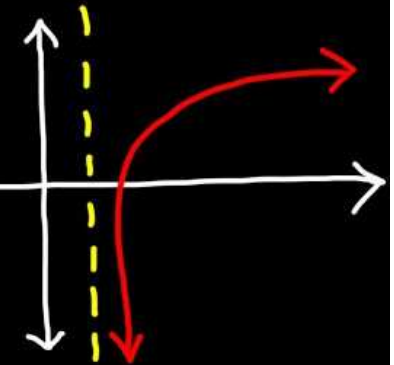
Logarithmic Functions

$$y = \log_3(x-1) + 2$$

x	y
2	2
4	3

$D[1, \infty)$

$R(-\infty, \infty)$



Η έννοια του λογάριθμου 1/3

$$0 < a \neq 1$$

$$\theta > 0$$

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

$$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3$$

$$\log_3 x = 5 \Leftrightarrow x = 3^5 = 243$$

$$\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{-2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$$

Η έννοια του λογάριθμου 2/3

$$\log_a 1 = 0 \text{ διότι } a^0 = 1$$

$$\log_5 1 = 0 \text{ διότι } 5^0 = 1$$

$$\log_{0,5} 1 = 0 \text{ διότι } 0,5^0 = 1$$

$$\log_{10} 1 = \log 1 = 0 \text{ διότι } 10^0 = 1 \text{ (Δεκαδικοί λογάριθμοι)}$$

$$\log_e 1 = \ln 1 = 0 \text{ διότι } e^0 = 1 \text{ (Νεπέρειοι ή φυσικοί λογάριθμοι) John Napier}$$

$$e \cong 2,718281828\dots \text{ (Euler)}$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Βασικές ιδιότητες

$$\log_a (a^x) = x$$

$$\log_4 4^x = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\log 10^x = x$$

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta \Leftrightarrow a^{\log_a \theta} = \theta$$

$$\log_a a = 1$$

Πράξεις με λογαρίθμους

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \dots \cdot \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \dots + \log_a \theta_n$$

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a |\theta_1| + \log_a |\theta_2|$$

$$\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a |\theta_1| - \log_a |\theta_2|$$

$$\log_a (\theta^k) = k \log_a \theta$$

$$\log_a (\sqrt[n]{\theta}) = \log_a \left(\theta^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \log_a \theta$$

Τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων

$$\theta > 0, \beta > 0 \quad 0 < \alpha \neq 1 \quad 0 < \beta \neq 1$$

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$$

$$\log_b a = \frac{\log_7 a}{\log_7 b} = \frac{\log_{2025} a}{\log_{2025} b} = \frac{\log_{0,5} a}{\log_{0,5} b} = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \frac{\ln b}{\ln a} = 1 \quad \text{άρα} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

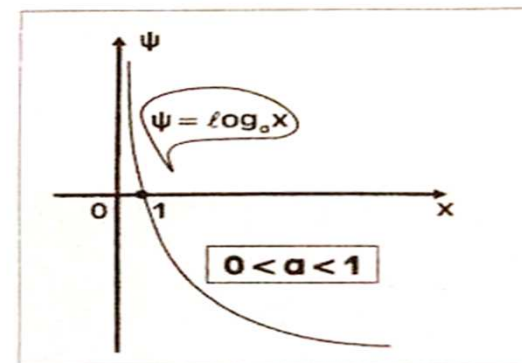
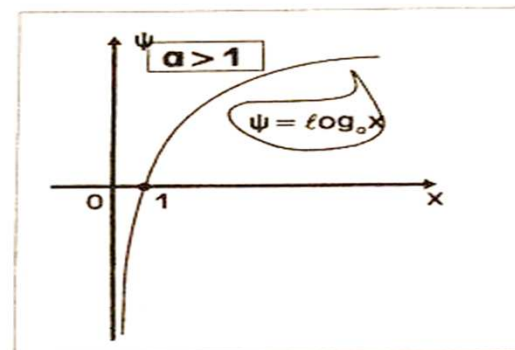
$$\log_6 7 = \frac{1}{\log_7 6}, \quad \log 9 = \frac{1}{\log_9 10}, \quad \ln 5 = \frac{1}{\log_5 e}$$

Λογαριθμική συνάρτηση

- Είναι συνάρτηση 1-1 δηλαδή οι διαφορετικοί θετικοί αριθμοί έχουν διαφορετικούς λογαρίθμους

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Αν $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα
- Αν $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα

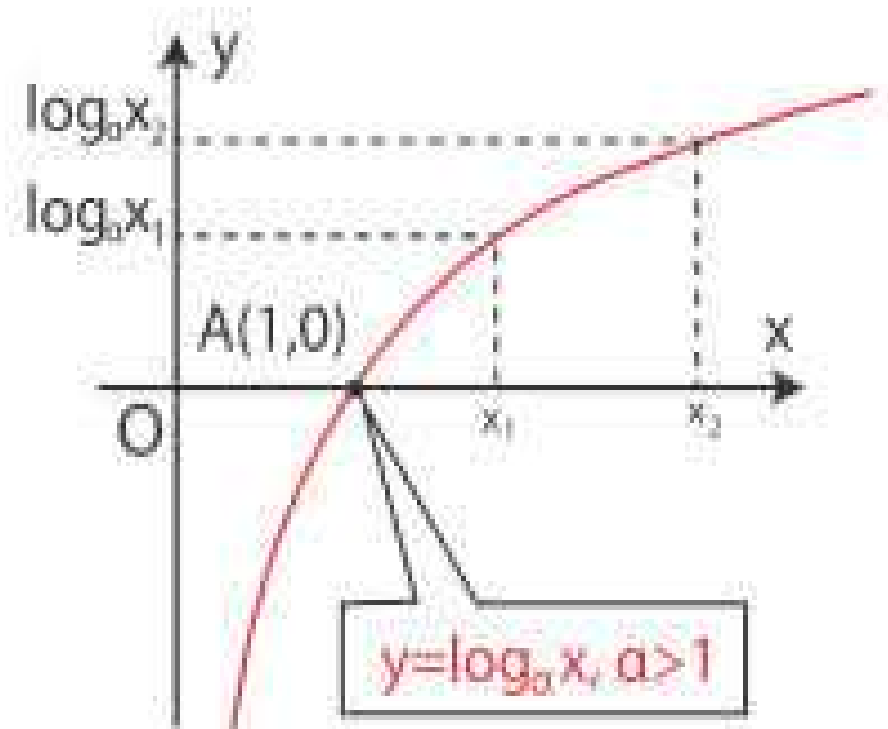


Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης όταν $a > 1$

$$\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

$$\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

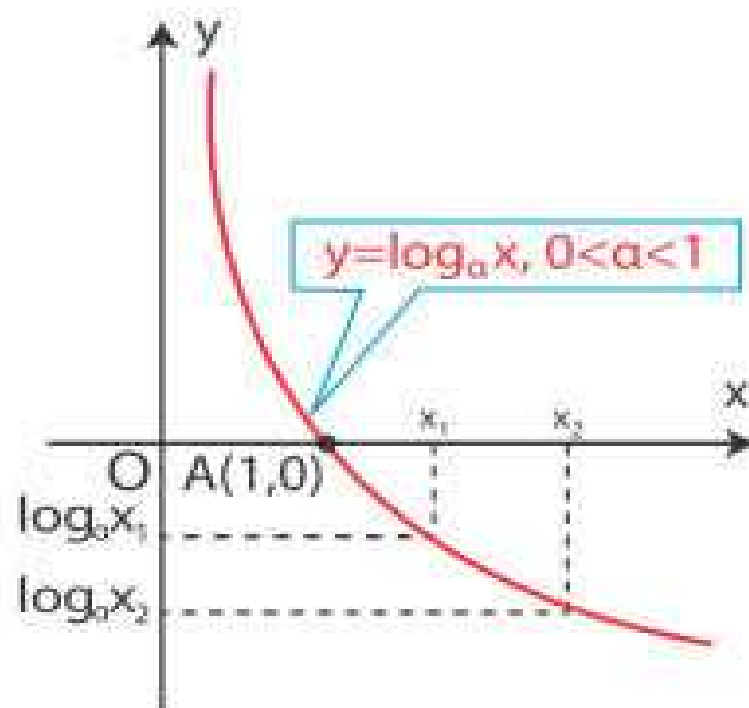


Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης όταν $0 < a < 1$

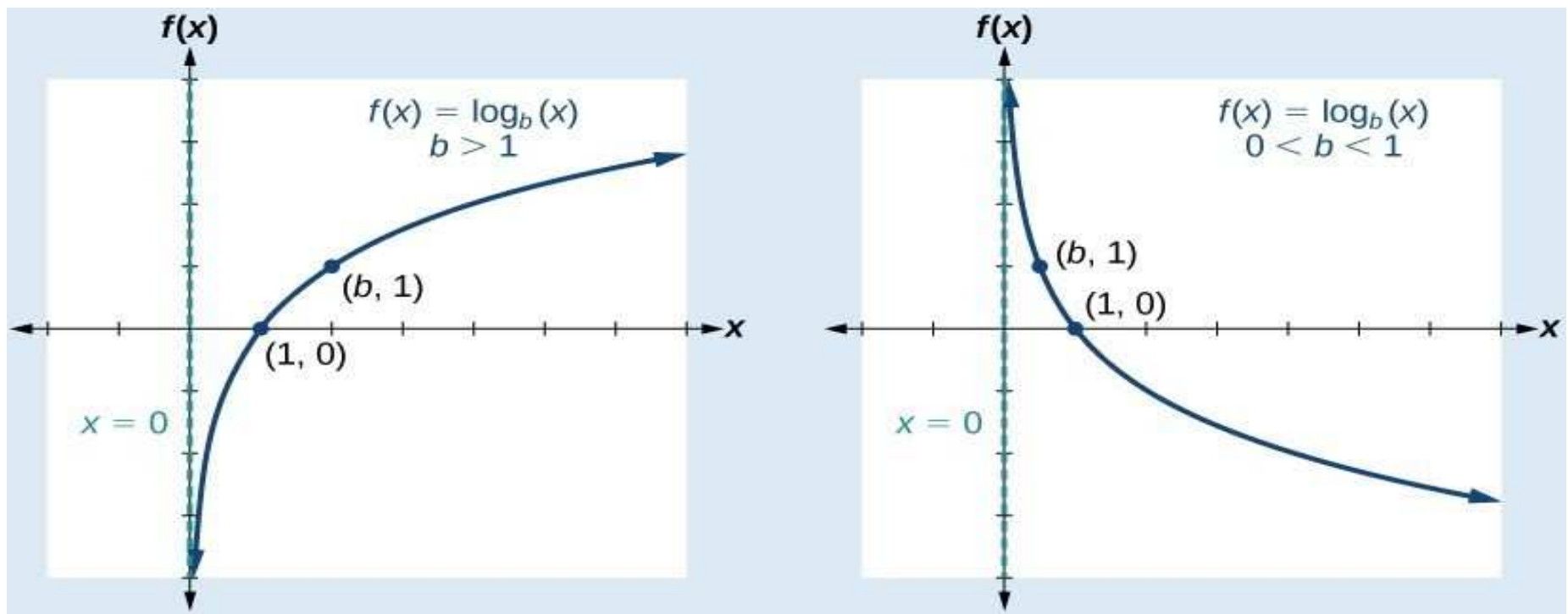
$$\log_{0,1} x > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

$$\log_{0,1} x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

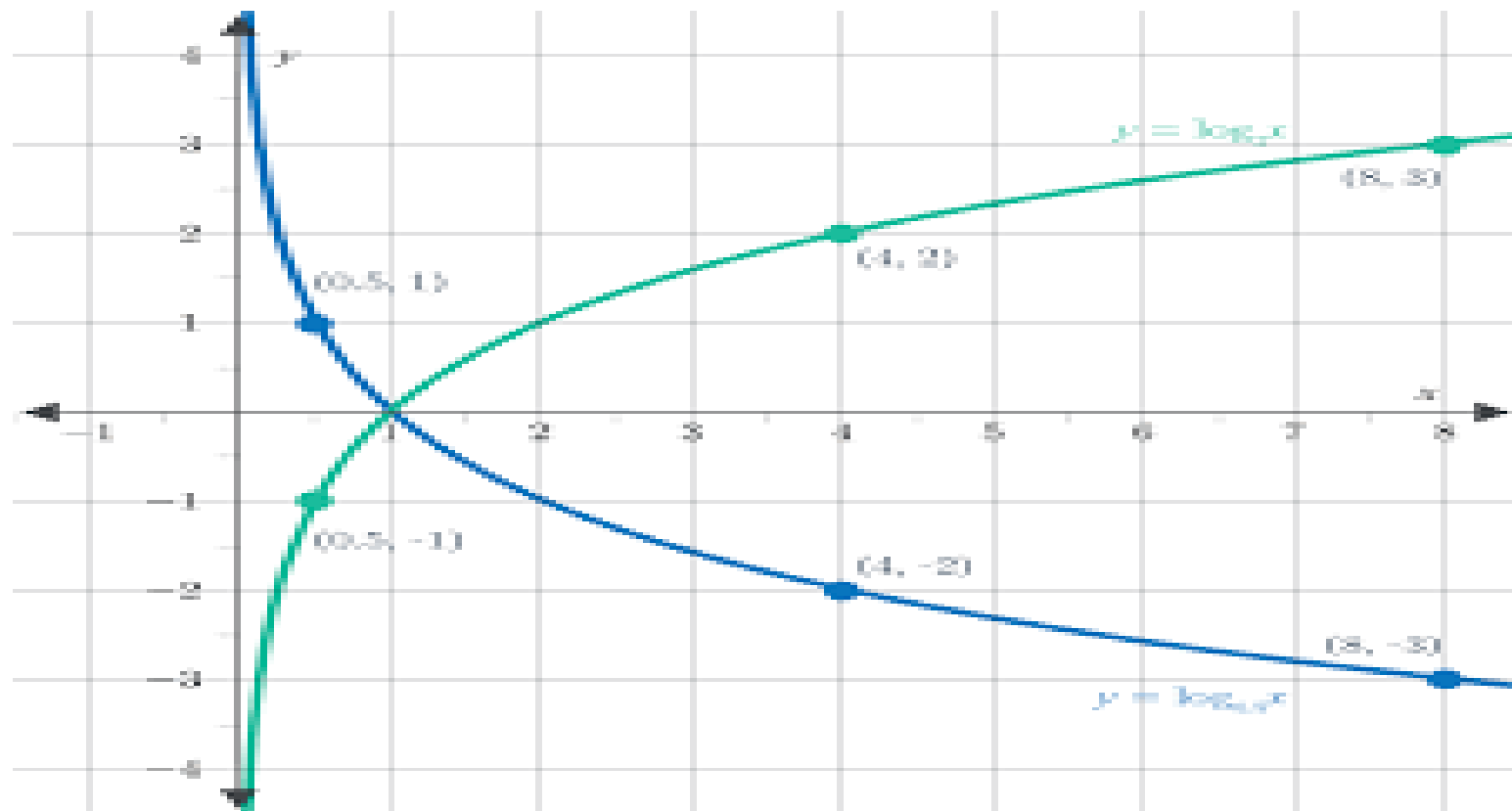
$$\log_{0,1} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



Ισχύει ότι $\log_b b = 1$



Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης διέρχεται πάντα από το σημείο $(1, 0)$ του οριζόντιου άξονα xx'



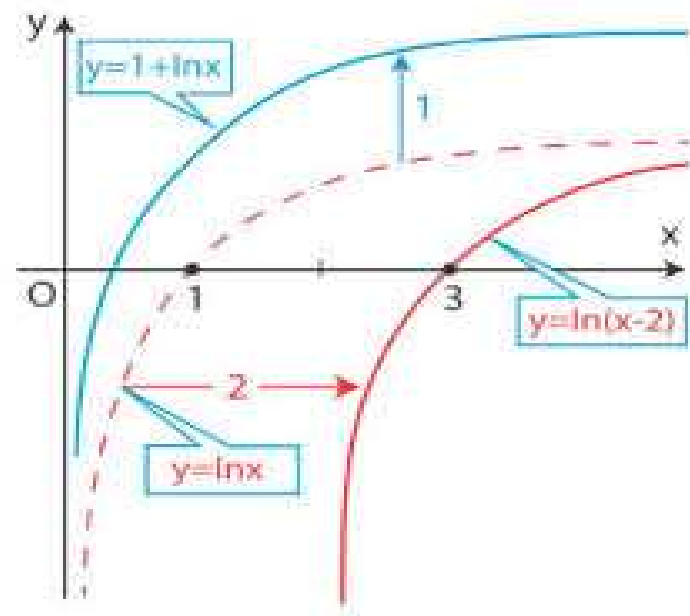
Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της λογαριθμικής συνάρτησης 1/2

Λογαριθμική συνάρτηση $y=\ln x$

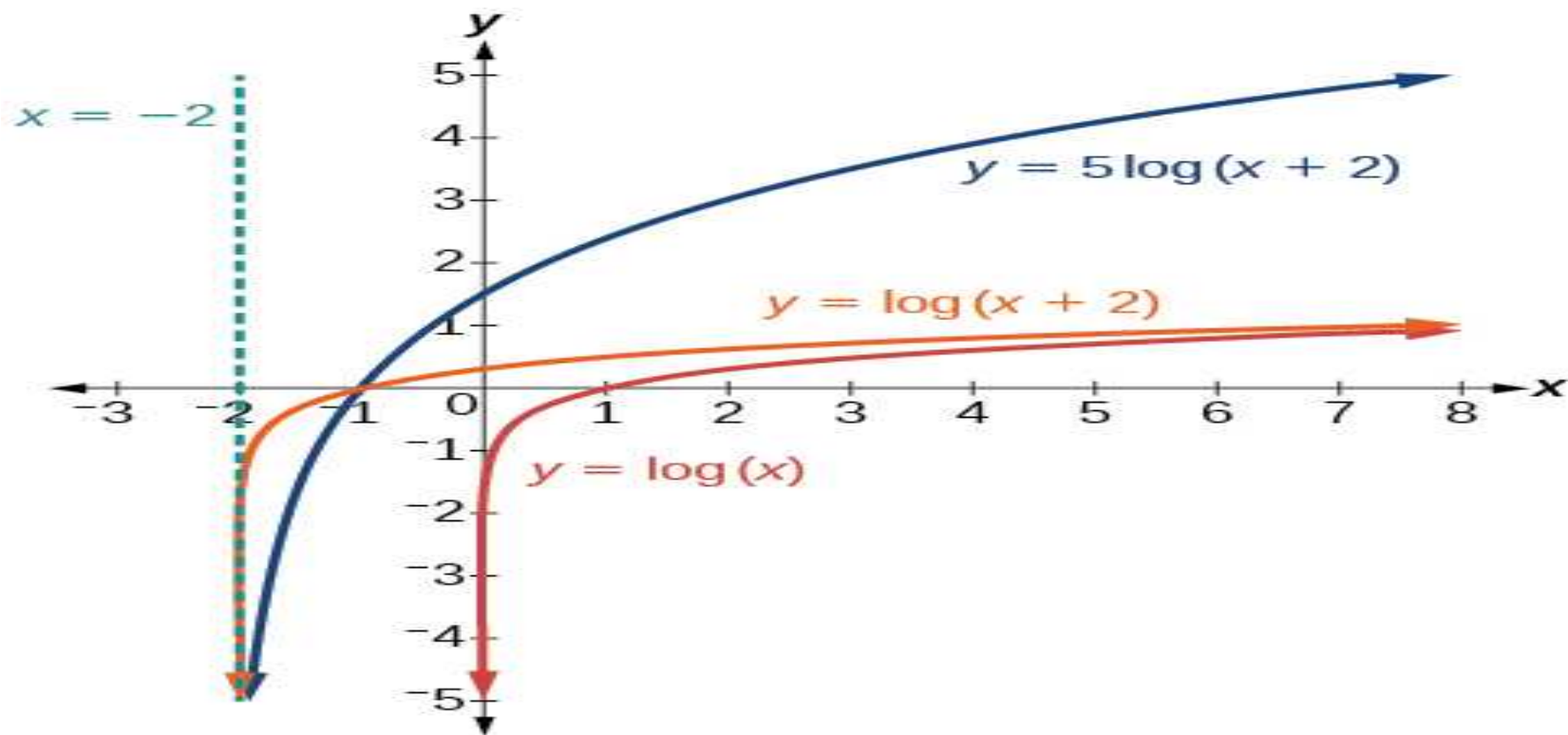
Κόκκινη διακεκομμένη γραμμή

$y=1+\ln x$, **μπλε γραμμή**,
κατακόρυφη ανύψωση κατά 1

$y=\ln(x-2)$, **κόκκινη γραμμή**,
οριζόντια μετατόπιση προς τα
δεξιά κατά 2

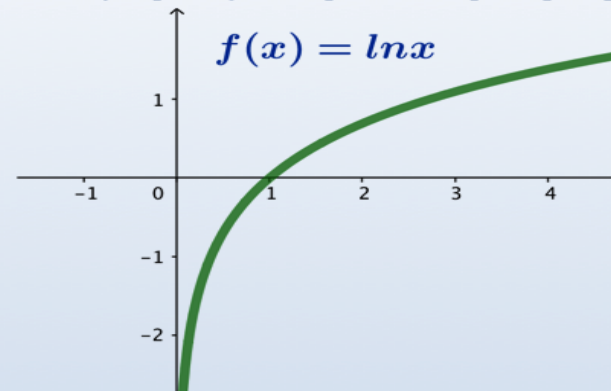


Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της λογαριθμικής συνάρτησης 2/2



$$y = \ln x$$

Λογαριθμική Συνάρτηση



Πεδίο Ορισμού το $(0, +\infty)$

Σύνολο Τιμών το $\mathbb{R}$

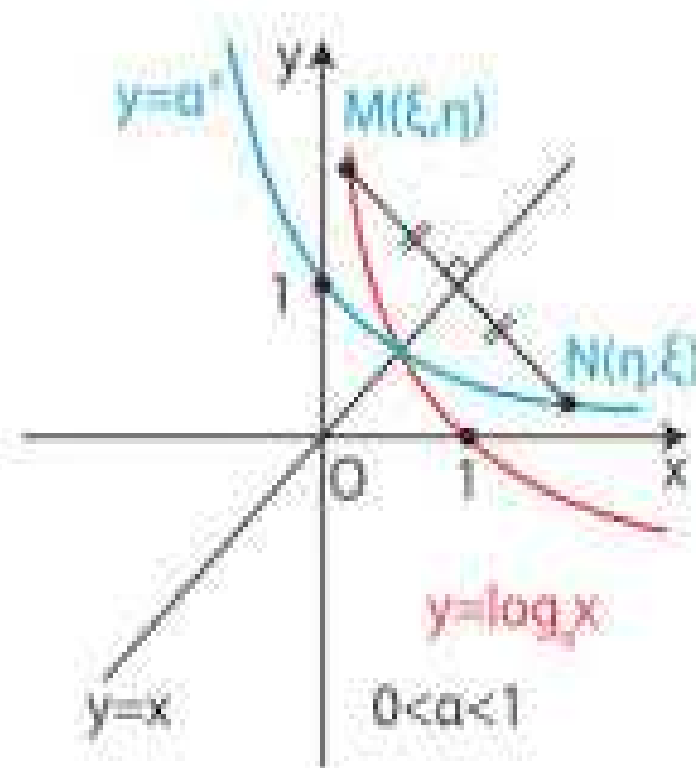
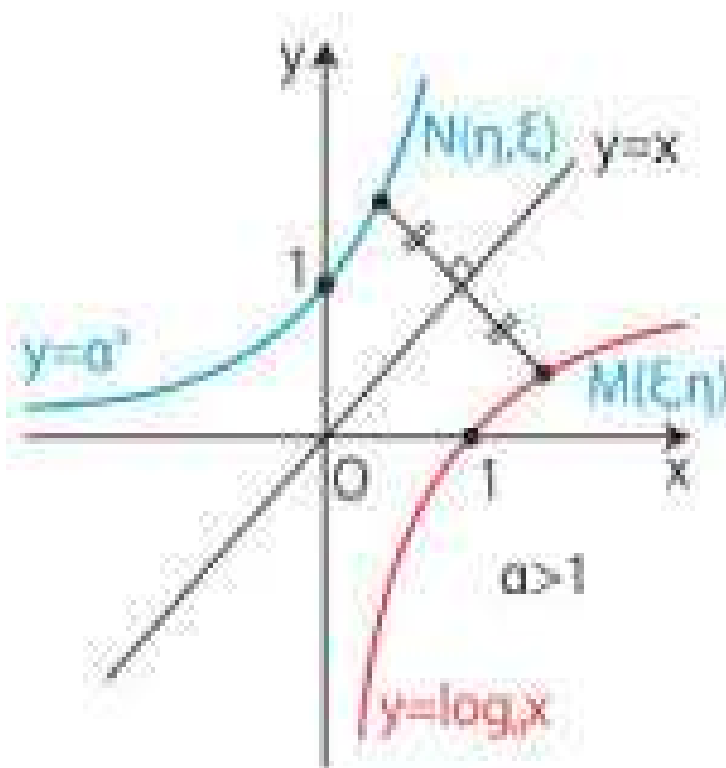
Διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$

Γνησίως Αύξουσα
 $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

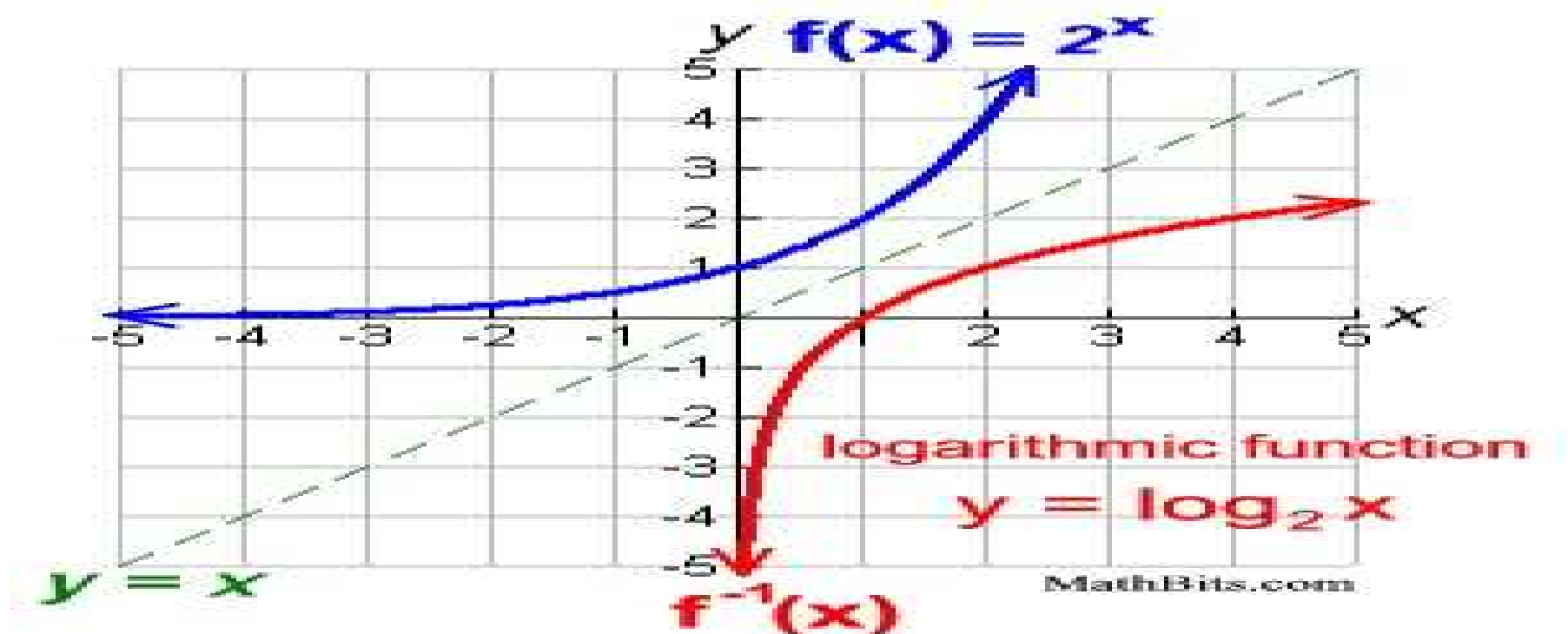
$\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Ασύμπτωτη ο αρνητικός ημιάξονας Oy'

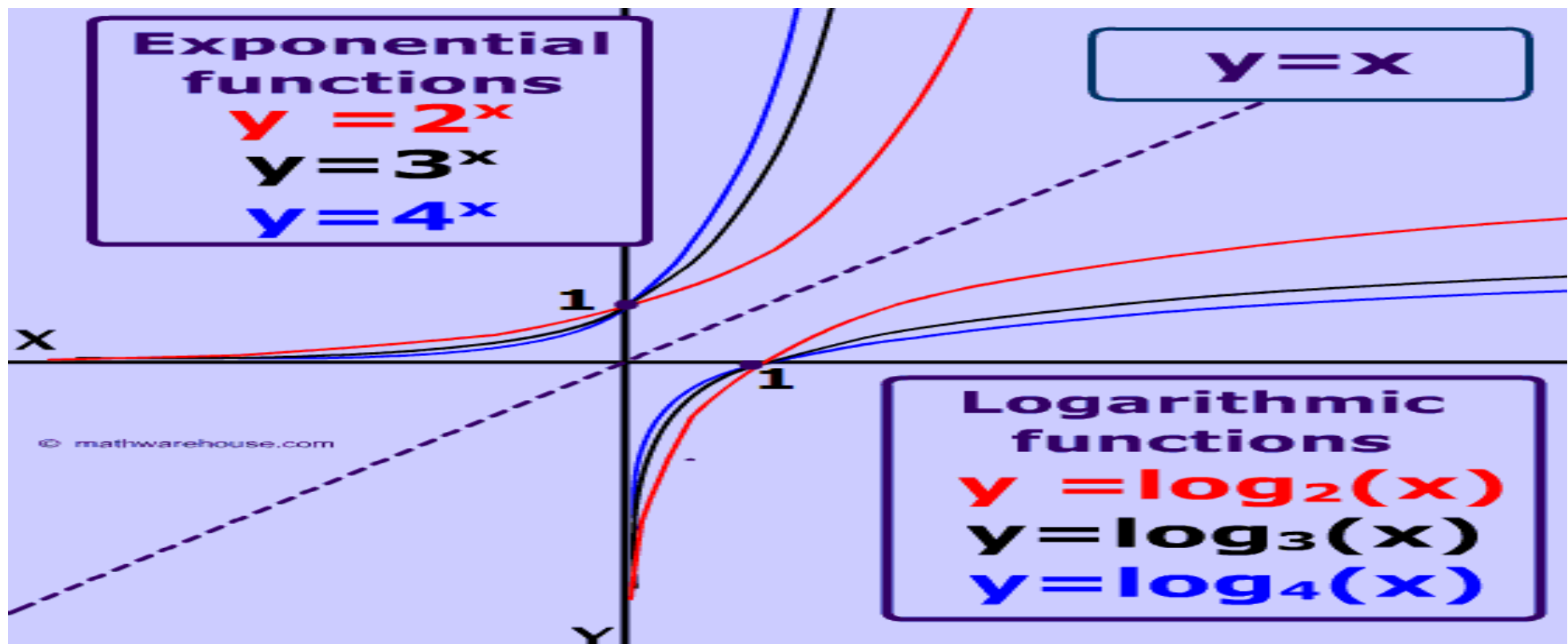
Η λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης 1/3



Η λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $2/3$

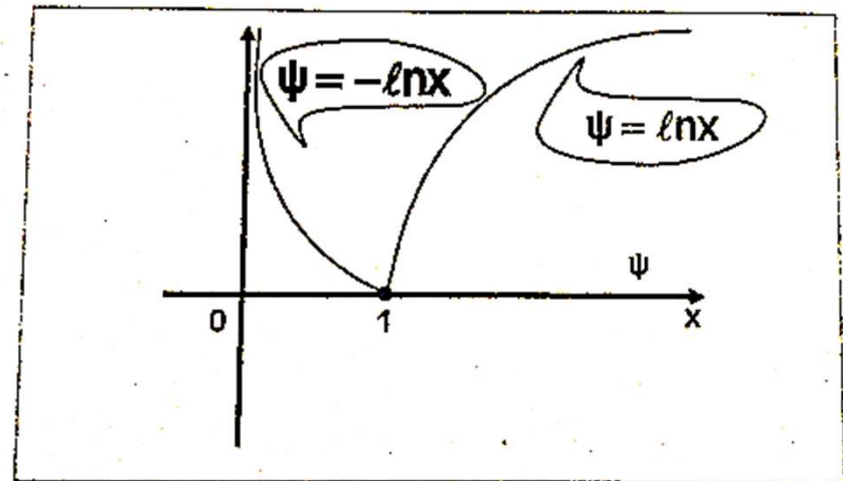
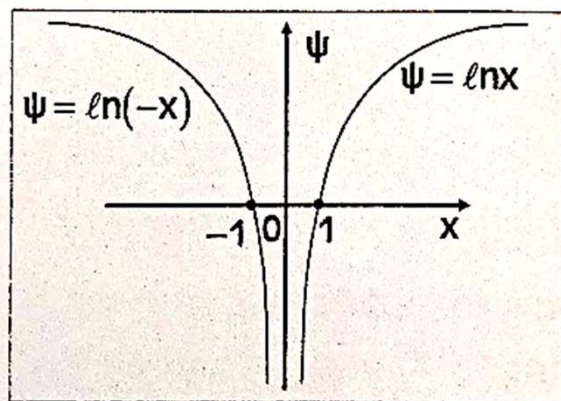


Η λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης 3/3



$$Y = \ln|x|$$

$$y = |\ln x|$$



Γραφικές παραστάσεις της λογαριθμικής συνάρτησης για τις διαφορετικές τιμές της βάσης a

