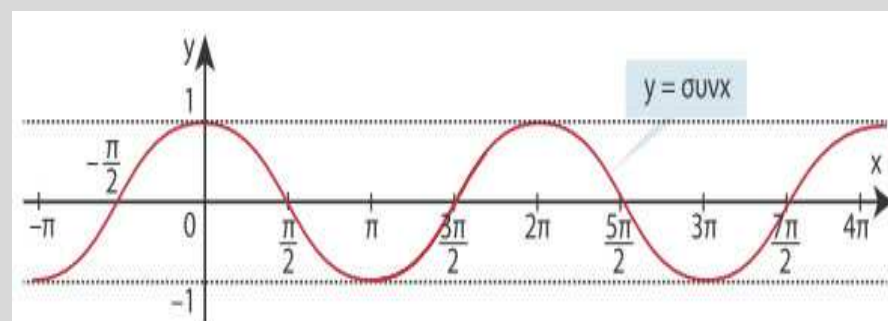
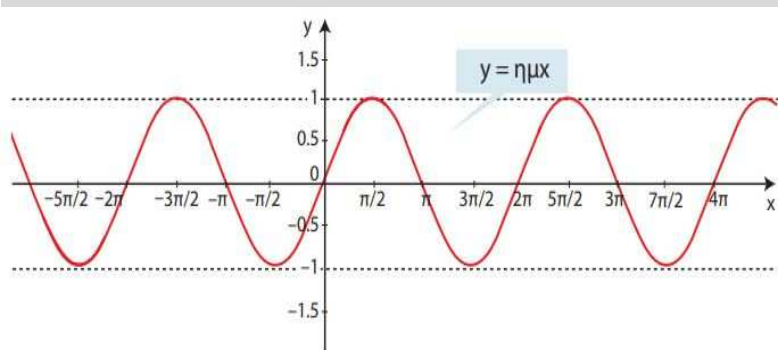


Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Κεπενές Σταύρος (AM 9233)

Γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, βοηθούν στην κατανόηση της συμπεριφοράς των ολοκληρωμάτων τους.
- Επειδή πρόκειται για περιοδικές συναρτήσεις, τα ολοκληρώματά τους σε πλήρη περίοδο έχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες.
- Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα του ημιτόνου ή του συνημιτόνου σε μία πλήρη περίοδο, είναι μηδέν, λόγω της συμμετρίας τους ως προς τον οριζόντιο άξονα.
- Αυτό, αποτελεί σημαντική παρατήρηση που συχνά αξιοποιείται σε ασκήσεις, ιδίως όταν έχουμε να κάνουμε με κυκλικά φαινόμενα.



Ανάλυση Fourier

- Στην ανάλυση αυτή, πολύπλοκες συναρτήσεις εκφράζονται ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Η διαδικασία αυτή, απαιτεί την ολοκλήρωση τέτοιων συναρτήσεων σε καθορισμένα διαστήματα, προκειμένου να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς.
- Η τεχνική αυτή, χρησιμοποιείται ευρέως στην επεξεργασία του σήματος και στην ακουστική.
- Κατά τη διάρκεια της μετατροπής των αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά (αποτελεί τον πυρήνα της σύγχρονης τεχνολογίας), τα σήματα που αρχικά εκφράζονται με ημιτονοειδή μορφή, αναλύονται μέσω της ανάλυσης Fourier που βασίζεται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η ολοκλήρωση των οποίων σε καθορισμένα διαστήματα, είναι απαραίτητη για την εξαγωγή των συνιστωσών του σήματος και για την πιστή αναπαραγωγή του, σε ψηφιακή μορφή.

Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη ναυτιλία 1/2

Πλοήγηση και προσδιορισμός της θέσης

- Κατά τη διάρκεια ενός ταξιδιού, ένα πλοίο κινείται σε καμπύλες τροχιές, πάνω στη σφαιρική επιφάνεια της Γης.
- Η κατεύθυνση του σε σχέση με τον γεωγραφικό βορρά, αλλάζει συνεχώς και συχνά εκφράζεται με γωνιακές μεταβλητές.
- Οι αλλαγές αυτές, μετρούνται σε χρονική βάση και μπορούν να μοντελοποιηθούν, μέσω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Η ολοκλήρωση αυτών των συναρτήσεων, επιτρέπει τον υπολογισμό της συνολικής διανυθείσας απόστασης ή της τελικής θέσης του πλοίου, ακόμη και όταν αυτό κινείται με μεταβαλλόμενη (κατά μέτρο και διεύθυνση) πορεία.

Ανάλυση του θαλάσσιου κύματος

- Τα κύματα της θάλασσας περιγράφονται μέσω των περιοδικών συναρτήσεων, δηλαδή των συναρτήσεων που επαναλαμβάνονται ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
- Οι πιο κατάλληλες μαθηματικές συναρτήσεις για την περιγραφή αυτών των κυματομορφών, είναι οι τριγωνομετρικές.
- Με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης, μπορεί να υπολογιστεί η μέση ενέργεια ενός κύματος, η δύναμη που ασκείται σε ένα πλοίο και ο βαθμός της ταλάντωσης που θα βιώσει το σκάφος, κατά την πλεύση του σε τρικυμιώδη θάλασσα.

Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη ναυτιλία 2/2

Υπολογισμός των παλίρροιών

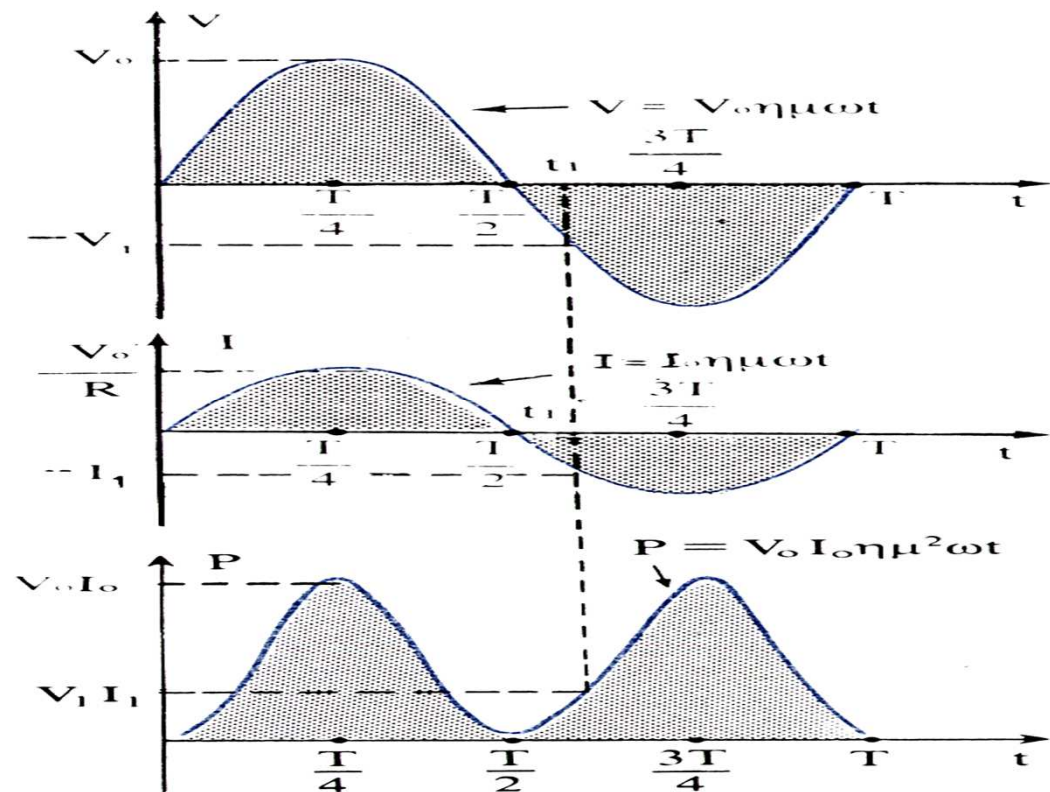
- Οι παλίρροιες, δημιουργούνται από τη βαρυτική έλξη της Σελήνης και του Ήλιου και ακολουθούν έναν περιοδικό κύκλο.
- Για την πρόβλεψη του ύψους της θάλασσας σε ένα λιμάνι, ανάλογα με την ώρα της ημέρας και με τη θέση των ουρανίων σωμάτων, χρησιμοποιούνται μοντέλα που βασίζονται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Η ολοκλήρωσή τους, δίνει την αλλαγή της θαλάσσιας στάθμης σε χρονικά διαστήματα ή την αναμενόμενη παροχή σε εκβολές ποταμών, στοιχεία απαραίτητα για την προσέγγιση των πλοίων σε λιμάνια, για την ασφάλεια της ναυσιπλοΐας και για την αποφυγή των ατυχημάτων.

Αυτόνομη πλοήγηση

- Τα αυτόνομα πλοία με χρήση ΤΝ και αισθητήρων (συλλέγουν συνεχώς δεδομένα), στοχεύουν στη χάραξη της βέλτιστης διαδρομής, ελαχιστοποιώντας την κατανάλωση.
- Οι πορείες που ακολουθούν, υπολογίζονται με μαθηματικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τις κινήσεις φυσικών φαινομένων με περιοδική ή ημιπεριοδική συμπεριφορά (θαλάσσια ρεύματα, κύματα, άνεμοι), την οποία αποδίδουν κατάλληλα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

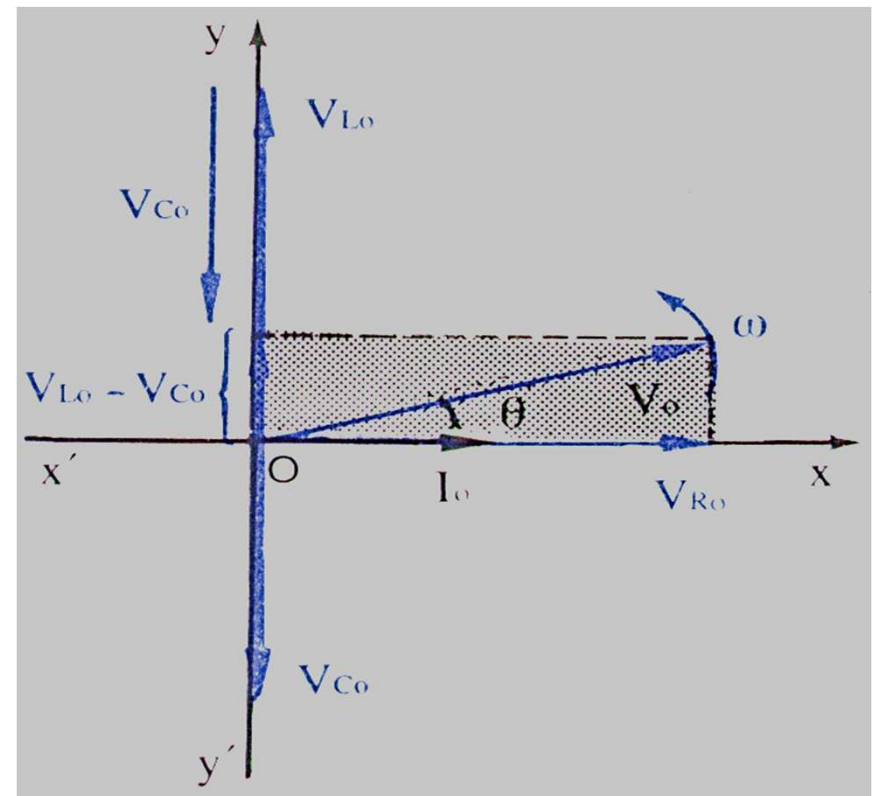
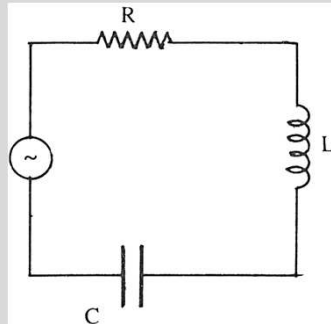
Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στον ηλεκτρισμό 1/2

Το εναλλασσόμενο ρεύμα ακολουθεί περιοδική κυματομορφή και συνήθως περιγράφεται με τη μορφή ημιτονοειδούς κύματος, που επαναλαμβάνεται με σταθερή συχνότητα (π.χ. στη δημόσια παροχή ρεύματος 50 ή 60 Hz)



Εφαρμογές της ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στον ηλεκτρισμό 2/2

- Στα κυκλώματα με πυκνωτές (C) και πηνία (L), δηλαδή με εξαρτήματα που αποθηκεύουν ενέργεια προσωρινά, η ροή του ρεύματος δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τη φάση και από τη συχνότητα του σήματος.
- Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων, απαιτεί τη χρήση ολοκληρωμάτων, στα οποία εμπλέκονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.



Ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta \mu^{\mu} x \cdot \sigma \upsilon \nu^{\nu} x \, dx, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^*$

Υπολογίστε το $I = \int \eta \mu^{10} x \cdot \sigma \upsilon \nu^3 x \, dx$

Λύση

$$\text{Είναι } I = \int \eta \mu^{10} x \sigma \upsilon \nu^2 x \sigma \upsilon \nu x \, dx =$$

$$\int \eta \mu^{10} x (1 - \eta \mu^2 x) \, d(\eta \mu x) =$$

$$\int \eta \mu^{10} x \, d(\eta \mu x) - \int \eta \mu^{12} x \, d(\eta \mu x) =$$

$$\frac{\eta \mu^{11} x}{11} - \frac{\eta \mu^{13} x}{13} + c$$

Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \eta \mu^\mu x \cdot \sigma \upsilon \nu^\nu x \, dx$, μ, ν ρητοί αριθμοί

Υπολογίστε το $I = \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu^2 x}} dx$

Λύση

Έχω $I = \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu^2 x}} dx = \int \frac{\eta \mu^3 x}{(\sigma \upsilon \nu x)^{\frac{2}{3}}} dx = \int \eta \mu^3 x \cdot \sigma \upsilon \nu^{-2/3} x \, dx$

Είναι $\mu = 3$ περιττός, οπότε θέτω $\sigma \upsilon \nu = t$,

άρα $-\eta \mu x \, dx = dt$,

συνεπώς $\eta \mu x \, dx = -dt$,

άρα $I = -\int (1 - t^2) t^{-2/3} dt =$

$$-3t^{1/3} + \frac{3}{7}t^{7/3} + c =$$

$$-3\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu x} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{\sigma \upsilon \nu^7 x} + c$$

Ολοκληρώματα των μορφών $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) \, dx$, $\int \eta\mu(\alpha x) \cdot \eta\mu(\beta x) \, dx$,
 $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) \, dx$

Υπολογίστε το $I = \int \frac{dx}{\eta\mu x}$

Λύση

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \, \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \omega \Rightarrow dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$$

$$\kappa\alpha\iota \, \eta\mu x = \frac{2\omega}{1+\omega^2} \text{ άρα,}$$

$$I = \int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{\frac{2d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{2\omega}{1+\omega^2}} = \int \frac{d\omega}{\omega} = \ln|\omega| + c = \ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

Ολοκληρώματα των μορφών $\int \eta\mu(ax) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$, $\int \eta\mu(ax) \cdot \eta\mu(\beta x) dx$,
 $\int \sigma\upsilon\nu(ax) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$

Υπολογίστε το $I = \int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx$

Λύση

Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση, είναι περιττή ως προς $\eta\mu x$.

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$

Είναι $I = \int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx =$

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x dx =$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \eta\mu x dx =$$

$$- \int \sigma\upsilon\nu^2 x (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) d(\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$- \int (\omega^2 - \omega^4) d\omega =$$

$$- \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} + c =$$

$$- \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} + \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5} + c$$

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας

