

Το έργο & η ζωή του Cauchy

Δημάκος Χρήστος (AM 9142)
Βουδούρης Βασίλειος (AM 9165)

Ο βαρόνος Augustin Louis Cauchy, (1789–1857) ήταν Γάλλος μαθηματικός από τους πρωτοπόρους της ανάλυσης. Ξεκίνησε να διατυπώνει & να αποδεικνύει τα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού με αυστηρό τρόπο, απορρίπτοντας κάθε ευρετική αρχή της γενικότητας της άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκε από παλιότερους συγγραφείς.

Όρισε την συνέχεια με απειροστικούς όρους, έδωσε αρκετά σημαντικά θεωρήματα στη μιγαδική ανάλυση και ξεκίνησε τη μελέτη των αντιμεταθετικών ομάδων στην αφηρημένη άλγεβρα.

Έγραψε περίπου **800 ερευνητικές δημοσιεύσεις & 5 βιβλία** σε πολλά θέματα των μαθηματικών & της μαθηματικής φυσικής.

Τα σύγχρονα μαθηματικά του οφείλουν 2 από τα κύρια ενδιαφέροντά τους, καθένα από τα οποία συνιστά μια έντονη αλλαγή στάσης σε σχέση με τα μαθηματικά του 18^{ου} αιώνα.

Το 1^ο ήταν η εισαγωγή της αυστηρότητας στη μαθηματική ανάλυση.

Το 2^ο θεμελιώδους σημασίας που έδωσε στα μαθηματικά αφορούσε στη συνδυαστική. Κατανοώντας τη μέθοδο του Lagrange στη θεωρία των εξισώσεων, την έκανε αφηρημένη και άρχισε τη συστηματική δημιουργία της θεωρίας των ομάδων, στην οποία στηρίζεται η γεωμετρία των κρυστάλλων.

Ο **Abel**, γιός παπά και αξιοπρεπής Χριστιανός, σε γράμμα προς τους δικούς του έγραφε «ο Cauchy είναι ένας μισαλλόδοξος καθολικός, πράγμα παράξενο για έναν επιστήμονα».

Η έμφαση πήγαινε στο «μισαλλόδοξος» και όχι στο «καθολικός».

Δύο από τους ωραιότερους χαρακτήρες & μεγαλύτερους μαθηματικούς, ο **Weierstrass** & ο **Hermite**, ήταν καθολικοί.

Ήταν πιστοί αλλά όχι μισαλλόδοξοι.

Ο Lagrange έδειξε ενδιαφέρον για τον μικρό Cauchy & όπως είχε συμβεί με τον Laplace, εντυπωσιάστηκε από το μαθηματικό του ταλέντο. Κάποτε, όταν ο **Laplace** και άλλοι σημαίνοντες ήταν παρόντες, ο **Lagrange** είπε δείχνοντας τον νεαρό Cauchy «*Βλέπετε εκείνον τον μικρό; Λοιπόν, θα μας ξεπεράσει όλους ως μαθηματικούς*».

Στον πατέρα Cauchy, ο Lagrange έδωσε μία συμβουλή, πιστεύοντας ότι το εύθραυστο αγόρι μπορούσε να αναλωθεί: «*Μην τον αφήσετε να πιάσει μαθηματικό βιβλίο, πριν γίνει 17 χρόνων*» και σε άλλη περίπτωση: «*Αν δεν προλάβετε να δώσετε στον Augustin μία καλή φιλολογική μόρφωση, οι προτιμήσεις του θα τον πάρουν μακριά· θα γίνει μεγάλος μαθηματικός αλλά δεν θα ξέρει να γράψει στη γλώσσα του*».

Το **1805** σε ηλικία **16** ετών, πέρασε 1^{ος} στην Polytechnique.

Το **1807** σε ηλικία **18** ετών, πέρασε στη σχολή πολιτικών μηχανικών.

Το **1810** πήγε στο Χερβούργο για την κατασκευή λιμανιών & οχυρώσεων, προς υπεράσπιση των ναυπηγείων από τους Βρετανούς.

Το **1813** σε ηλικία **24** ετών, εξαντλημένος από την υπερβολική δουλειά, επέστρεψε στο Παρίσι, έχοντας τραβήξει την προσοχή των κορυφαίων Γάλλων μαθηματικών με τις εξαιρετικές έρευνές του, ιδιαίτερα με την εργασία πάνω στα **πολύεδρα** & με εκείνη πάνω στις **συμμετρικές συναρτήσεις**.

Μέχρι τα **27** του (**1816**) είχε ανέλθει στην 1^η γραμμή των ζώντων μαθηματικών. Ο μόνος σοβαρός του αντίπαλος ήταν ο **Gauss**, 12 μεγαλύτερος του.

Το **1816** πήρε το μεγάλο βραβείο της Ακαδημίας Επιστημών, για μία «θεωρία διάδοσης κυμάτων στην επιφάνεια βαρέως ρευστού απεριορίστου βάθους». Τα κύματα των ωκεανών προσομοιάζουν σε αυτό τον τύπο κυμάτων.

Από το **1815** (όταν ήταν **26** ετών) παρέδιδε μαθήματα ανάλυσης στην Polytechnique.

Το **1819** έγινε καθηγητής, διορίστηκε στο College de France & στη Σορβόνη. Έγινε γνωστότερος από τον Gauss στους Ευρωπαίους μαθηματικούς. Το ακροατήριο που περιελάμβανε γνωστούς μαθηματικούς από Βερολίνο, Μαδρίτη & Πετρούπολη.

Το **1821** παρουσίασε για δημοσίευση τη σειρά των διαλέξεων στην ανάλυση, που έδινε στην Polytechnique. Αυτό το έργο αποτελούσε επί μακρόν το πρότυπο της αυστηρότητας & της ακρίβειας (ε-δ ορισμοί).

Η παραγωγικότητα του ήταν τόσο εκπληκτική ώστε χρειάστηκε να καταφύγει στη δημιουργία ενός περιοδικού, του **Exercices de Mathematiques** (1826–1830), που συνεχίστηκε σε μία 2^η σειρά, **Exercices d'Analyse Mathematique et de Physique**, για τη δημοσίευση αποκλειστικά δικών του επεξηγηματικών ή πρωτότυπων εργασιών, στα καθαρά & εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Το **1835** η Ακαδημία Επιστημών άρχισε τη δημοσίευση του εβδομαδιαίου δελτίου της (**Comptes rendus**) με τον περιορισμό, ο οποίος ισχύει & σήμερα, ότι **απαγορευόταν η δημοσίευση άρθρων που ξεπερνούσαν τις 4 σελίδες**. Έτσι, το πληθωρικό στυλ του ανάγκασε τον Cauchy να στραφεί σε άλλες κατευθύνσεις για τη δημοσίευση των μεγαλύτερων εργασιών του, ανάμεσα τους & μια μεγάλη 300 σελίδων, στη θεωρία αριθμών.

Το **1829** εξορίσθηκε στην Ελβετία.

Το **1833** επιφορτίστηκε με το καθήκον της εκπαίδευσης του κληρονόμου του Βασιλιά Καρόλου, του 13χρονου Δούκα του Bordeaux.

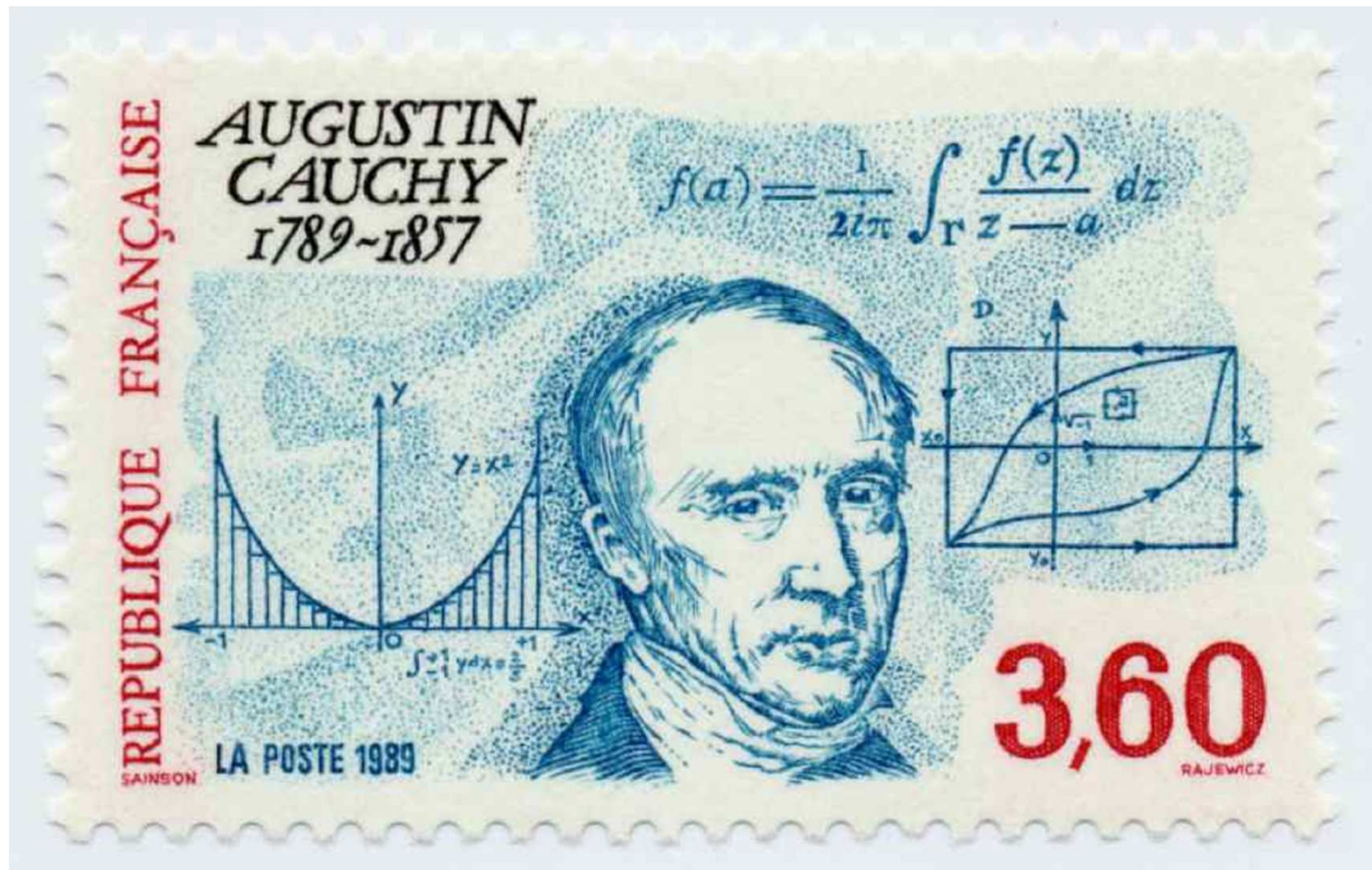
Το **1839** επέστρεψε στο Παρίσι.

Στη διάρκεια των τελευταίων 19 χρόνων της ζωής του παρήγαγε περισσότερα από **500 άρθρα** σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, περιλαμβανόμενης της μηχανικής, της φυσικής & της αστρονομίας. Πολλές από αυτές τις εργασίες ήταν εκτενείς πραγματείες.

Υπάρχουν δύο μεγάλα κενά στις εργασίες του. **1^{ον}** δεν ξεχώρισε την σύγκλιση από την ομοιόμορφη σύγκλιση (όπως ούτε ο Bolzano) & τη συνέχεια από την ομοιόμορφη συνέχεια.

2^{ον} ενώ χρησιμοποίησε πολλά αξιώματα των πραγματικών αριθμών, δεν είχε κατανοήσει πλήρως την φύση της πληρότητας ή τις τοπολογικές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Το **1857** πέθανε ξαφνικά στα **68** του, από βρογχίτιδα & πυρετό



Νέος ορισμός του ολοκληρώματος κατά Cauchy

Τον 18^ο αιώνα δεν υπήρχε ορισμός του ολοκληρώματος & η ολοκλήρωση ορίζονταν ως η αντίστροφη πράξη της παραγωγής.

Όρισε το ολοκλήρωμα ως το όριο αθροισμάτων και κομβικό σημείο της θεωρίας του απετέλεσε η απόδειξη της ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης.

Πριν από τον Cauchy κανείς δεν είχε διανοηθεί να χρησιμοποιήσει αυτά τα αθροίσματα προκειμένου να ορίσει το ολοκλήρωμα.

Έδωσε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, δηλαδή ότι το ολοκλήρωμα είναι το αντίστροφο της παραγώγου.

Οι τεχνικές ολοκλήρωσης τις οποίες ανέπτυξε, προήλθαν από τις προσεγγίσεις των τιμών ορισμένων ολοκληρωμάτων & όχι από κάποια ήδη υπάρχουσα θεωρία ολοκλήρωσης.

Άλλοι ορισμοί του ολοκληρώματος

Ο κατά Leibniz ορισμός του ολοκληρώματος (άπειρο άθροισμα απειροστών) απερρίφθη από τους περισσότερους μαθηματικούς, διότι περιείχε τις προβληματικές έννοιες του απείρου & των απειροστών, ενώ στον αντίποδα αυτού οι Euler, Bernoulli, Lagrange & Laplace έβλεπαν την ολοκλήρωση ως την αντίστροφη πράξη από αυτήν της παραγωγίσης, δηλαδή την εύρεσης της αντιπαραγώγου.

Ο ορισμός αυτός, επέτρεπε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων πολλών συναρτήσεων, οι οποίες μπορούσαν να εκφραστούν αλγεβρικά.

Ο ορισμός που επέλεξε ο Cauchy, αποτελεί πανάκεια για έναν αυστηρό λογισμό, αφού δεν υπάρχει πάντα η αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης, ενώ παράλληλα θα στήριζε μία απόδειξη της ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης.

Η θεωρία του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάστηκε από τον Cauchy σε μια σειρά διαλέξεων, ωθώντας πολλούς μαθηματικούς στην προσεκτική εξέταση των θεμελίων.

Ο χειρισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ως ορίου αθροισμάτων, του έδωσε τη δυνατότητα προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη του ολοκληρώματος μίας συνεχούς συνάρτησης, να μελετήσει ολοκληρώματα συναρτήσεων οι αρχικές συναρτήσεις των οποίων δεν ήταν γνωστές συναρτήσεις και να εξηγήσει τη συμπεριφορά ολοκληρωμάτων κατά μήκος ενός τόξου, απαντώντας κατ' αυτό τον τρόπο στα περίπλοκα ζητήματα, που είχαν θέσει οι Fourier, Gauss, Legendre, Poisson.

Η καινοτομία του ερευνητικού του έργου

Με βάση τον δικό του ορισμό του ολοκληρώματος, η ύπαρξη του ολοκληρώματος εξαρτιόταν από τη συνέχεια της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης, δηλαδή μία ιδιότητά της & όχι από την αναλυτική της αναπαράσταση.

Αυτό επέτρεψε τον υπολογισμό εμβαδού υπό καμπύλη συνάρτησης, ακόμα & στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση δε μπορούσε να παρασταθεί αναλυτικά, οπότε & θα ήταν τετριμμένος ο υπολογισμός της αντιπαραγώγου αυτής.

Ασχολείται επίσης, με τη χρήση των ολοκληρωμάτων για τον προσδιορισμό των εμβαδών μεταξύ δυο επιπέδων καμπυλών, για την εύρεση του εμβαδού καμπυλωτής επιφανείας & για τους όγκους στερεών.

Από τον Cauchy και μετά, τα μαθηματικά άρχισαν να μορφοποιούνται ως η επιστήμη των αφηρημένων λογικών συστημάτων.

Η συμβολή του έγκειται στη χρήση των ήδη υπάρχουσών γνώσεων της εποχής του για την δόμηση ενός νέου & ριζοσπαστικού (για τα δεδομένα της εποχής του), απειροστικού λογισμού.

Ο Cauchy ήταν εκείνος ο οποίος προσέδωσε την απαραίτητη αυστηρότητα στην ανάλυση, έχοντας όμως, στηριχθεί στο έργο των Euler, Poisson, Lagrange, Legendre και πολλών άλλων.

Θερμές ευχαριστίες για την παρακολούθηση

