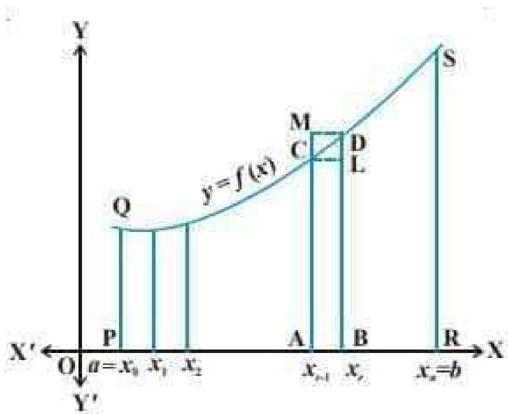
ΑΕΝ Ασπροπύργου
Σχολή Μηχανικών

Πτυχιακή εργασία

Το ορισμένο ολοκλήρωμα στη μηχανική

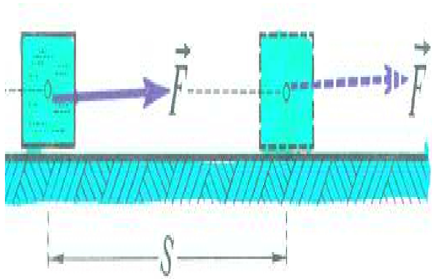
Μητροπάνος Ερρίκος (AM 9258)

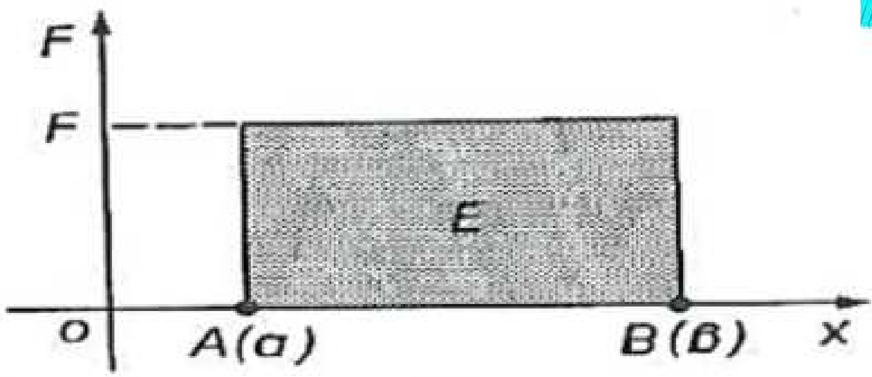


Έργο σταθερής δύναμης

Το έργο, δίνεται αριθμητικά από το εμβαδό του χωρίου Ε και είναι

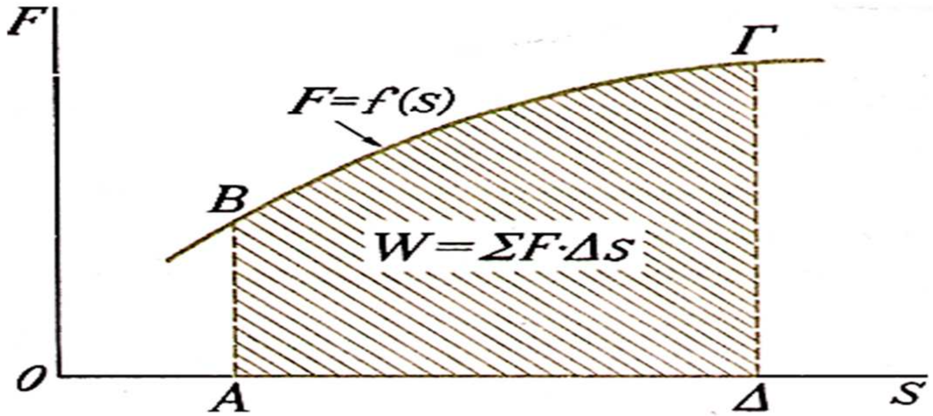
$$E = W = \int_a^\beta F\,dx = F\int_a^\beta dx = F(\beta - \alpha)$$





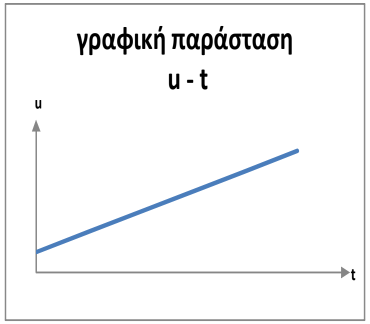
Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου

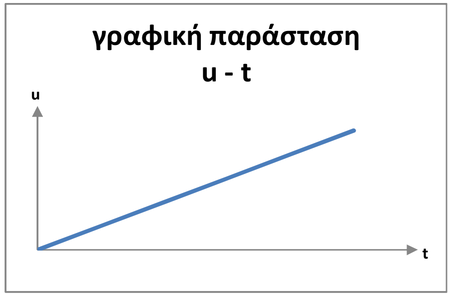
Το έργο W της δύναμης μεταβλητού μέτρου f που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνση της από τη θέση x_1 στη θέση x_2 είναι $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ και αριθμητικά ορίζει το ολοκλήρωμα της f ως προς το x, από το x_1 ως το x_2



Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

Αν η ταχύτητα ενός σώματος δεν είναι σταθερή, τότε η απόσταση d που διανύει, υπολογίζεται από το $d = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, dt$





Ταχύτητα και θέση σώματος

Η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος που επιταχύνεται (ή επιβραδύνεται), υπολογίζονται από τα $u(t)=\int a(t)\,dt$ και $x(t)=\int u(t)\,dt$ όπου:

$u(t)$ η ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου

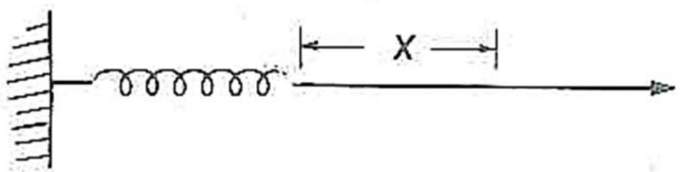
$a(t)$ η επιτάχυνση, ως συνάρτηση του χρόνου

$x(t)$ η θέση, ως συνάρτηση του χρόνου

Νόμος του Hooke

Σε ιδανικό ελατήριο ασκείται δύναμη, ώστε να το επιμηκύνει κατά x
Η αντίσταση του ελατηρίου είναι $F = k \cdot x$ όπου k η σταθερά του
Η διεύθυνση της F είναι η διεύθυνση της κίνησης.
Άρα, το έργο της για απομάκρυνση από τη θέση $x = a$ ως τη θέση $x = \beta$ είναι

$$W = \int_{a}^{\beta} (k \cdot x)\ dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a}^{\beta} = k\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$



Νόμος του Coulomb

Το ηλεκτρικό φορτίο q_1 (τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος αξόνων) απωθεί το φορτίο q_2, από τη θέση A_1 που απέχει από το q_1 απόσταση R_1, στη θέση A_2 που απέχει απόσταση R_2 από το q_1, ασκώντας του δύναμη $F = K\dfrac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$

Το παραγόμενο έργο είναι

$$W = \int_{R_1}^{R_2} F dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} = K \cdot q_1 \cdot q_2 \left[-\frac{1}{R} \right]_{R_1}^{R_2} = K \cdot q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Στατική ροπή και κέντρο βάρους επίπεδης καμπύλης

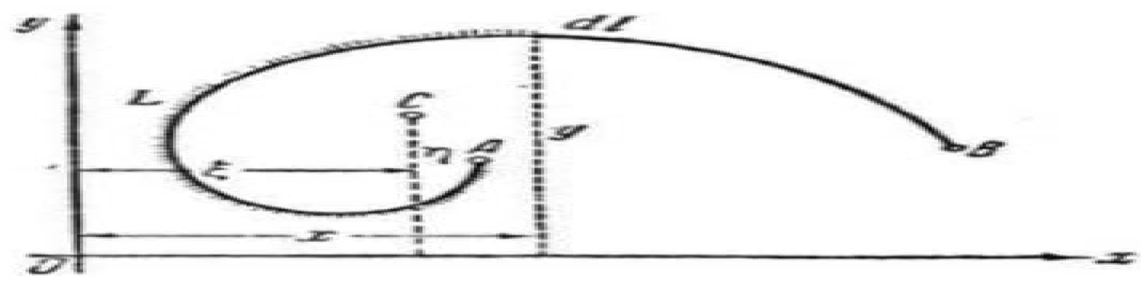
Στην καμπύλη παίρνω κάποιο στοιχείο μήκους $d\ell$ και μάζας $\rho\, d\ell$.
Θεωρώντας αυτό το στοιχείο κατά προσέγγιση ως υλικό σημείο που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα Ox, έχω $dM_x = y \cdot \rho\, dl$.

Αν $\rho = 1$ τότε $M_x = \int_\alpha^\beta y\, dl$.

Ομοίως, είναι $M_y = \int_\alpha^\beta x\, dl$

Οι συντεταγμένες (ξ, η) του κέντρου βάρους είναι

$$\left(\frac{M_Y}{L}, \frac{M_x}{L}\right) = \left(\frac{\int_\alpha^\beta x\, dl}{\int_\alpha^\beta dl}, \frac{\int_\alpha^\beta y\, dl}{\int_\alpha^\beta dl}\right) = \left(\frac{\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(y')^2}\, dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(y')^2}\, dx}, \frac{\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+(y')^2}\, dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(y')^2}\, dx}\right)$$



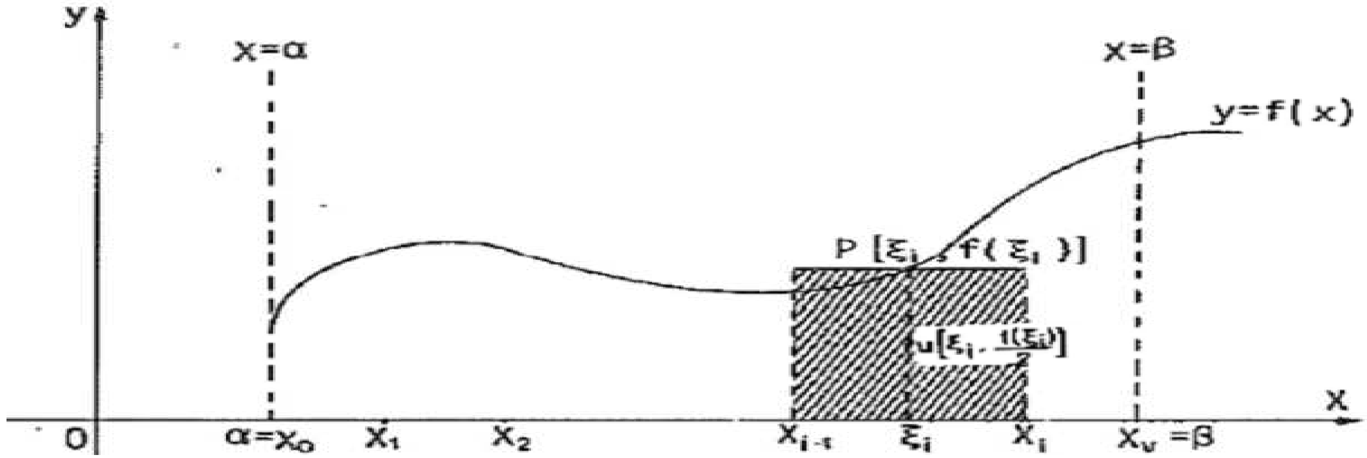
Ροπή αδρανείας επίπεδων επιφανειών

Ροπή αδράνειας μιας επίπεδης επιφάνειας,

$\mathrm{I}_x = \dfrac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta} [\,f(x)\,]\,dx$ ως προς τον άξονα xx'

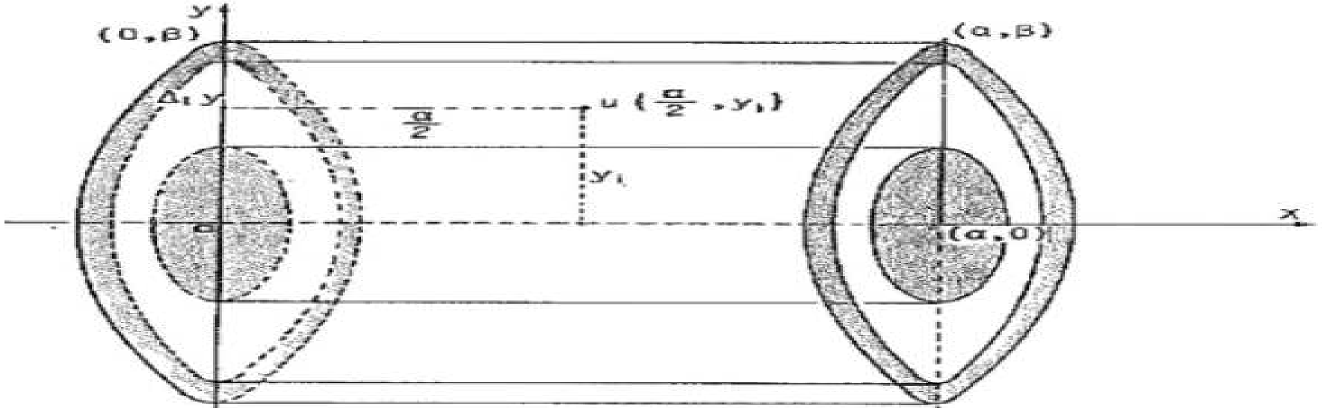
$\mathrm{I}_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)\,dx$ ως προς τον άξονα yy'

είναι το γινόμενο του εμβαδού Ε της επιφάνειας επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της από τους άξονες Ox , Oy



Ροπή αδρανείας του όγκου ενός στερεού

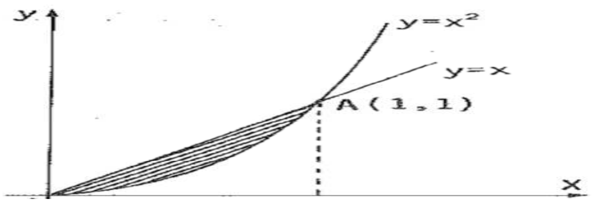
Ροπή αδρανείας του όγκου $V = \pi \cdot \alpha \cdot \beta^2$ ενός στερεού, που παράγεται από την περιστροφή μιας επίπεδης επιφάνειας περί άξονα του στερεού, είναι το γινόμενο του όγκου του παραγόμενου στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της επιφάνειας, από τον άξονα.



- $\mathrm{I}_x = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^4 \, dx$
- $\mathrm{I}_y = 2\pi \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} x^3 f(x) \, dx$

Εφαρμογή

Εύρεση του κέντρου βάρους, του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$



Τα σημεία που τέμνονται οι καμπύλες είναι τα A(1,1) και O(0,0). Τότε

- $E = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$,
- $M_y = \int_0^1 x\left(x - x^2\right)dx = \frac{1}{12}$
- $M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x + x^2)(x - x^2)dx = \frac{1}{15}$

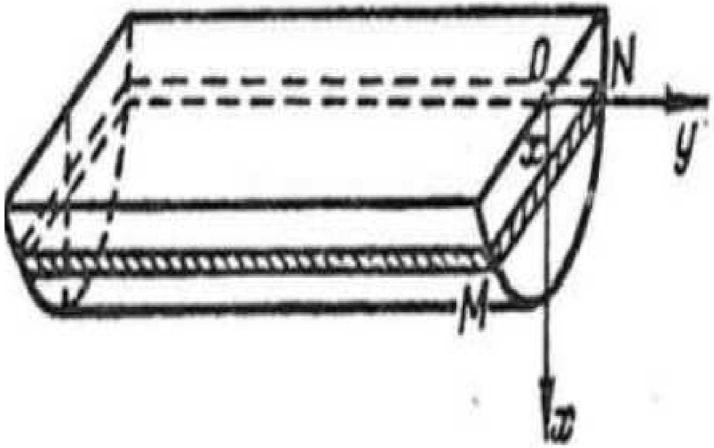
Άρα,
- $\overline{y} = \frac{M_x}{E} = \frac{2}{5}$,
- $\overline{x} = \frac{M_y}{E} = \frac{1}{2}$

δηλαδή $K\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

Υπολογισμός έργου

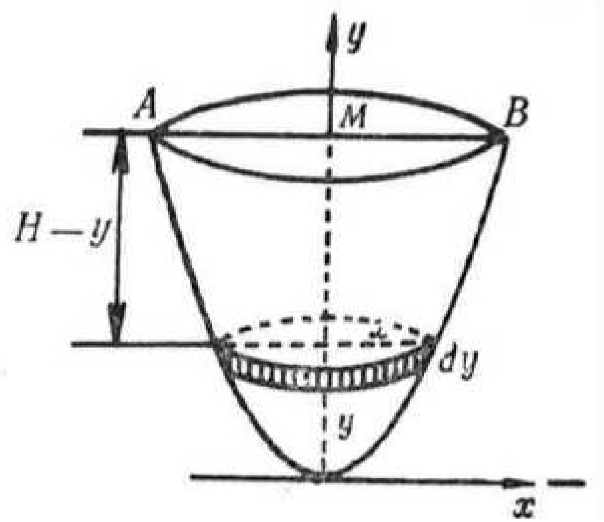
Βρείτε το έργο που απαιτείται για την άντληση νερού, από δοχείο ημικυλινδρικού σχήματος, μήκους α και ακτίνας R

Εκλέγω σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



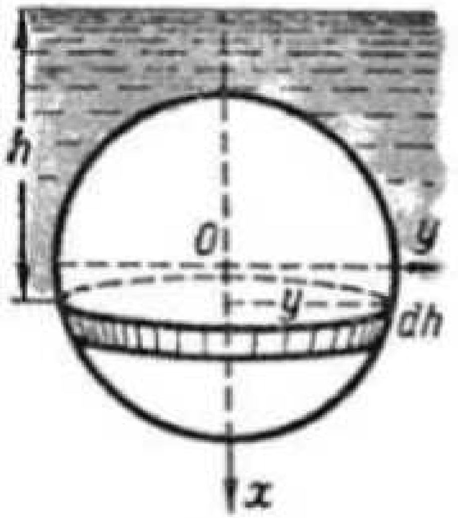
Καζάνι (λέβητας), σχήματος παραβολοειδούς εκ επιστροφής, έχει βάθος $H=0{,}5m$

Βρείτε το έργο που χρειάζεται για την άντληση του νερού που περιέχεται στο καζάνι

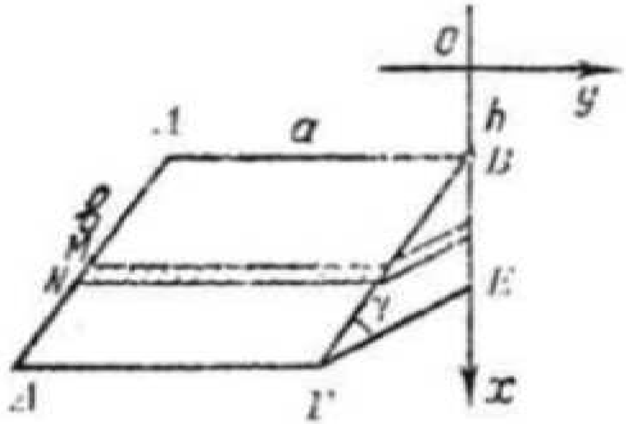


Υπολογισμός δυνάμεων

Υπολογίστε τη δύναμη του νερού, πάνω στη επιφάνεια μίας σφαίρας διαμέτρου $4\,m$, όταν το κέντρο της βρίσκεται σε βάθος $3\,m$ από την επιφάνεια του νερού



Ποια δύναμη δέχεται ορθογώνια πλάκα μήκους α και πλάτους β $(\alpha > \beta)$, που έχει κλίση γ^0 ως προς το οριζόντιο επίπεδο του νερού, αν η μεγαλύτερη πλευρά της βρίσκεται σε βάθος h



Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας