

Παραδείγματα Laplace με ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ στον ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παρακάτω συνάρτησης, (1^{ος} τρόπος λύσης)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

Βήμα 1: Ανάλυση του Παρονομαστή

Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο στον παρονομαστή:

$$s^2 + 4s + 5$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$s^2 + 4s + 5 = 0$$

Χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

Αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική, οι ρίζες είναι μιγαδικές:

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2j}{2} = -2 \pm j$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον παρονομαστή ως:

$$(s+1)(s+2-j)(s+2+j)$$

Βήμα 2: Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα

Γράφουμε τη συνάρτηση ως:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με τον παρονομαστή $(s+1)(s^2+4s+5)$:

$$s+3 = A(s^2+4s+5) + (Bs+C)(s+1)$$

Αναπτύσσουμε τις παρενθέσεις:

$$s+3 = As^2 + 4As + 5A + Bs^2 + Bs + Cs + C$$

$$s+3 = (A+B)s^2 + (4A+B+C)s + (5A+C)$$

Βήμα 3: Σύγκριση Συντελεστών

Συγκρίνουμε τους συντελεστές των όρων s^2 , s και των σταθερών:

1. Για το s^2 :

$$A + B = 0$$

2. Για το s :

$$4A + B + C = 1$$

3. Για τη σταθερά:

$$5A + C = 3$$

Βήμα 4: Επίλυση του Συστήματος

Από την πρώτη εξίσωση:

$$B = -A$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση:

$$4A - A + C = 1 \Rightarrow 3A + C = 1$$

Από την τρίτη εξίσωση:

$$5A + C = 3$$

Έχουμε το σύστημα:

$$1. \quad 3A + C = 1$$

$$2. \quad 5A + C = 3$$

Αφαιρούμε τις εξισώσεις:

$$(5A + C) - (3A + C) = 3 - 1$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

Αντικαθιστούμε $A = 1$ στην πρώτη εξίσωση:

$$3(1) + C = 1 \Rightarrow C = -2$$

Και από την πρώτη εξίσωση:

$$B = -A = -1$$

Βήμα 5: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Τώρα έχουμε:

$$\frac{1}{s+1} + \frac{-s-2}{s^2+4s+5}$$

Το πρώτο μέρος είναι απλό:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}$$

Για το δεύτερο κλάσμα, ξαναγράφουμε τον παρονομαστή:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$$

και διαχωρίζουμε:

$$\frac{-s-2}{(s+2)^2+1} = \frac{-(s+2)+0}{(s+2)^2+1}$$

Χρησιμοποιούμε γνωστούς μετασχηματισμούς:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \right\} = e^{-at} \cos(bt)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \right\} = e^{-at} \sin(bt)$$

Εδώ, έχουμε $a = 2$ και $b = 1$, οπότε:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-(s+2)}{(s+2)^2+1} \right\} = -e^{-2t} \cos t$$

Άρα, το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} \cos t$$

Παράδειγμα 1 . Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παρακάτω συνάρτησης. (2^{ος} τρόπος λύσης)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

Βήμα 1: Ανάλυση του Παρονομαστή

Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο στον παρονομαστή:

$$s^2 + 4s + 5$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$s^2 + 4s + 5 = 0$$

Χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

Αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική, οι ρίζες είναι μιγαδικές:

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2j}{2} = -2 \pm j$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον παρονομαστή ως:

$$(s+1)(s+2-j)(s+2+j)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση μας ως:

$$F(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2-j} + \frac{k_3}{s+2+j}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία που έχουμε κάνει ως τώρα και σε προηγούμενα παραδείγματα μέσα στην τάξη.

Βήμα 2: Υπολογισμός του k_1

Βρίσκουμε το k_1 πολλαπλασιάζοντας με $s + 1$ και παίρνοντας το όριο στο $s = -1$:

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s + 1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 5}$$

Αντικαθιστούμε $s = -1$:

$$k_1 = \frac{-1 + 3}{(-1)^2 + 4(-1) + 5} = \frac{2}{1 - 4 + 5} = \frac{2}{2} = 1$$

Βήμα 3: Υπολογισμός του k_2

Πολλαπλασιάζουμε με $s + 2 - j$ και παίρνουμε το όριο στο $s = -2 + j$:

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2+j} F(s)(s + 2 - j) = \lim_{s \rightarrow -2+j} \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2 + j)}$$

Αντικαθιστούμε $s = -2 + j$:

Αριθμητής: $s + 3 = -2 + j + 3 = 1 + j$

Παρονομαστής: $(-2 + j + 1)(-2 + j + 2 + j) = (-1 + j)(0 + 2j) = (-1 + j)(2j)$

Υπολογισμός Παρονομαστή:

$$(-1 + j)(2j) = -2j + 2j^2 = -2j + 2(-1) = -2j - 2$$

Άρα,

$$k_2 = \frac{1 + j}{-2j - 2} = \frac{1 + j}{-2(1 + j)} = -\frac{1}{2}$$

Βήμα 4: Υπολογισμός του k_3

Επειδή οι ρίζες του παρονομαστή είναι συζυγείς, έχουμε $k_3 = \overline{k_2}$, δηλαδή:

$$k_3 = -0.5$$

Οι δύο ρίζες $s = -2 + js$ και $s = -2 - js$ είναι συζυγείς, επειδή ο παρονομαστής $s^2 + 4s + 5$ έχει μιγαδικές ρίζες με αντίθετα φανταστικά μέρη.

Στην ανάλυση σε μερικά κλάσματα, **οι συντελεστές των όρων που αντιστοιχούν σε συζυγείς ρίζες είναι επίσης συζυγείς αριθμοί**. Εδώ υπολογίσαμε ότι:

$$k_2 = -0.5$$

Αυτός ο αριθμός είναι μόνο πραγματικός, δηλαδή δεν έχει φανταστικό μέρος. Εφόσον το $k_3 = k_2 = -0.5$, προκύπτει ότι: $k_3 = k_2 = -0.5$

Αυτό συμβαίνει επειδή ο συζυγής ενός πραγματικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός.

Άρα,

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{s+2-j} - \frac{0.5}{s+2+j}$$

Βήμα 5: Εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

1.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{s+2-j} - \frac{0.5}{s+2+j}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας σε κάθε όρο:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 0.5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2-j}\right] - 0.5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2+j}\right] \\ &= e^{-t} - 0.5e^{-(2-j)t} - 0.5e^{-(2+j)t} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{-(2-j)t} &= e^{-2t}e^{jt} = e^{-2t}(\cos t + j \sin t) \\ e^{-(2+j)t} &= e^{-2t}e^{-jt} = e^{-2t}(\cos t - j \sin t) \end{aligned}$$

Τύπος του Euler

Τύπος του Euler λέει ότι:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & -0.5e^{-(2-j)t} - 0.5e^{-(2+j)t} \\ &= -0.5e^{-2t}(\cos t + j \sin t) - 0.5e^{-2t}(\cos t - j \sin t) \\ &= -0.5e^{-2t} \cos t - 0.5je^{-2t} \sin t - 0.5e^{-2t} \cos t + 0.5je^{-2t} \sin t \\ &= -e^{-2t} \cos t \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

είναι η συνάρτηση:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} \cos t$$

Παράδειγμα 2 . Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παρακάτω συνάρτησης. (1^{ος} τρόπος λύσης)

$$F(s) = \frac{3s + 1}{(s - 1)(s^2 + 1)}$$

Βήμα 1: Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα

Γράφουμε τη συνάρτηση ως:

$$\frac{3s + 1}{(s - 1)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με τον παρονομαστή $(s - 1)(s^2 + 1)$ για να απαλλαγούμε από τα κλάσματα:

$$3s + 1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)(s - 1)$$

Αναπτύσσουμε τις παρενθέσεις:

$$3s + 1 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C$$

$$3s + 1 = (A + B)s^2 + (-B + C)s + (A - C)$$

Βήμα 2: Σύγκριση Συντελεστών

Συγκρίνουμε τους συντελεστές των όρων s^2 , s και των σταθερών:

1. Για το s^2 :

$$A + B = 0$$

2. Για το s :

$$-B + C = 3$$

3. Για τη σταθερά:

$$A - C = 1$$

Βήμα 3: Επίλυση του Συστήματος

Από την πρώτη εξίσωση:

$$B = -A$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση:

$$-(-A) + C = 3 \Rightarrow A + C = 3$$

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση:

$$A - C = 1$$

Έχουμε το σύστημα:

1. $A + C = 3$

2. $A - C = 1$

Προσθέτουμε τις εξισώσεις:

$$(A + C) + (A - C) = 3 + 1$$

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

Αντικαθιστούμε $A = 2$ στην πρώτη εξίσωση:

$$2 + C = 3 \Rightarrow C = 1$$

Και από την εξίσωση $B = -A$:

$$B = -2$$

Βήμα 4: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Τώρα έχουμε:

$$\frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

1ος Όρος:

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

Άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} = 2e^t$$

2ος Όρος:

Γνωρίζουμε τους βασικούς μετασχηματισμούς:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = \cos(bt)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+b^2}\right\} = \sin(bt)$$

Εφαρμόζουμε αυτούς τους τύπους:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\}$$

Το γράφουμε ως:

$$-2\frac{s}{s^2+1} + 1\frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-2\frac{s}{s^2+1}\right\} = -2\cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

Άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-2\frac{s}{s^2+1} + 1\frac{1}{s^2+1}\right\} = -2\cos t + \sin t$$

Άρα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$ είναι.

$$f(t) = 2e^t - 2\cos t + \sin t$$

Παράδειγμα 2 . Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παρακάτω συνάρτησης. (2^{ος} τρόπος λύσης)

$$F(s) = \frac{3s + 1}{(s - 1)(s^2 + 1)}$$

$$F(s) = \frac{k_1}{s - 1} + \frac{k_2}{s - j} + \frac{k_3}{s + j}$$

καθώς το πολυώνυμο $s^2 + 1$ παραγοντοποιείται ως $(s - j)(s + j)$.

Βήμα 1: Υπολογισμός του k_1

Πολλαπλασιάζουμε και παίρνουμε το όριο στο $s = 1$:

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow 1} F(s)(s - 1) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(3s + 1)(s - 1)}{(s - 1)(s^2 + 1)}$$

Απλοποιούμε το $s - 1$ και αντικαθιστούμε $s = 1$:

$$k_1 = \frac{3(1) + 1}{(1)^2 + 1} = \frac{3 + 1}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Βήμα 2: Υπολογισμός του k_2

Πολλαπλασιάζουμε και παίρνουμε το όριο στο $s = j$:

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow j} F(s)(s - j) = \lim_{s \rightarrow j} \frac{(3s + 1)(s - j)}{(s - 1)(s + j)}$$

Αντικαθιστούμε $s = j$:

$$k_2 = \frac{(3j + 1)}{(j - 1)(j + j)}$$

Υπολογίζουμε τον παρονομαστή:

$$(j - 1)(2j) = (-1 + j)(2j) = -2j + 2j^2$$

Επειδή $j^2 = -1$, έχουμε:

$$-2j + 2(-1) = -2j - 2 = -2(1 + j)$$

Άρα:

$$k_2 = \frac{3j + 1}{-2(1 + j)}$$

Διαχωρίζουμε το κλάσμα:

$$k_2 = -\frac{3j + 1}{2(1 + j)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $1 + j$:

$$k_2 = -\frac{3j + 1}{2(1 + j)} = -\frac{1 + 3j}{2(1 + j)}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1 + 3j}{1 + j} = 1 + \frac{2j}{1 + j} = 1 + \frac{2j(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)}$$

Επειδή $(1 + j)(1 - j) = 1 - j^2 = 1 - (-1) = 2$, έχουμε:

$$\frac{1 + 3j}{1 + j} = 1 + j$$

Άρα:

$$k_2 = -\left(1 + \frac{1}{2}j\right) = -1 - \frac{1}{2}j$$

Βήμα 3: Υπολογισμός του k_3

Οι ρίζες $s = j$ και $s = -j$ είναι συζυγείς, οπότε το k_3 είναι το συζυγές του k_2 :

$$k_3 = \overline{k_2} = -1 + \frac{1}{2}j$$

(όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα)

Βήμα 4: Αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση

Έχουμε:

$$F(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{-1 - \frac{1}{2}j}{s-j} + \frac{-1 + \frac{1}{2}j}{s+j}$$

Παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$f(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \left(1 + \frac{1}{2}j\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j}\right] - \left(1 - \frac{1}{2}j\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+j}\right]$$

Βήμα 5: Εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες:

1.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

Άρα:

$$f(t) = 2e^t - \left(1 + \frac{1}{2}j\right)e^{jt} - \left(1 - \frac{1}{2}j\right)e^{-jt}$$

Βήμα 6: Απλοποίηση

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Euler:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t, \quad e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

Αντικαθιστούμε:

$$f(t) = 2e^t - \left(1 + \frac{1}{2}j\right)(\cos t + j \sin t) - \left(1 - \frac{1}{2}j\right)(\cos t - j \sin t)$$

Αναπτύσσουμε:

$$\begin{aligned} &= 2e^t - \left(\cos t + j \sin t + \frac{1}{2}j \cos t - \frac{1}{2} \sin t\right) - \left(\cos t - j \sin t + \frac{1}{2}j \cos t + \frac{1}{2} \sin t\right) \\ &= 2e^t - \cos t - j \sin t - \frac{1}{2}j \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \cos t + j \sin t - \frac{1}{2}j \cos t - \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

Οι όροι με $j \sin t$ απλοποιούνται, και μένει:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2e^t - 2 \cos t - \frac{1}{2}j \cos t - \frac{1}{2}j \cos t \\ &= 2e^t - 2 \cos t + \sin t \end{aligned}$$

Άρα, ο αντίστροφος Μετασχηματισμός της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{3s + 1}{(s - 1)(s^2 + 1)}$$

είναι στο πεδίο του χρόνου η συνάρτηση:

$$f(t) = 2e^t - 2 \cos t + \sin t$$