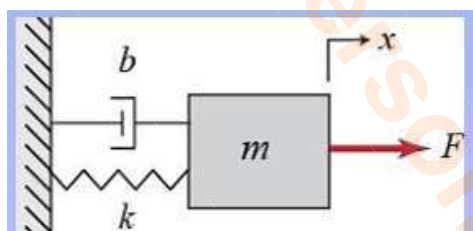


Παράδειγμα Εφαρμογής PID Controller

Έστω ότι έχουμε το εικονιζόμενο μηχανικό σύστημα.



Η μαθηματική περιγραφή είναι: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

Μετασχηματίζοντας σε Laplace, παίρνουμε: $ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$m = 1 \text{ kg}, \quad b = 10 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}, \quad k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad f = 1 \text{ N}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

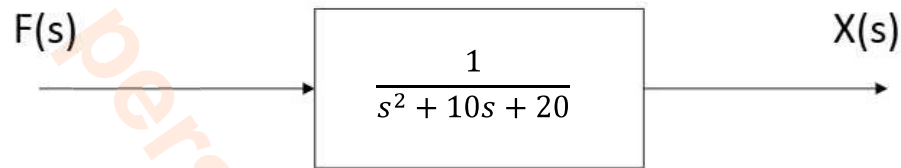
Σκοπός μας είναι να δούμε πώς κάθε ένας από τους όρους

$$K_p, \quad K_i \quad \text{και} \quad K_d$$

συμβάλλει στο να έχουμε:

- Μικρό χρόνο ανόδου
- Ελάχιστη υπερύψωση
- Μηδενικό μόνιμο σφάλμα

Διάγραμμα Open Loop συστήματος χωρίς ελεγκτή



Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόγχου είναι:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

Η τιμή της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση για **βηματική είσοδο** είναι:

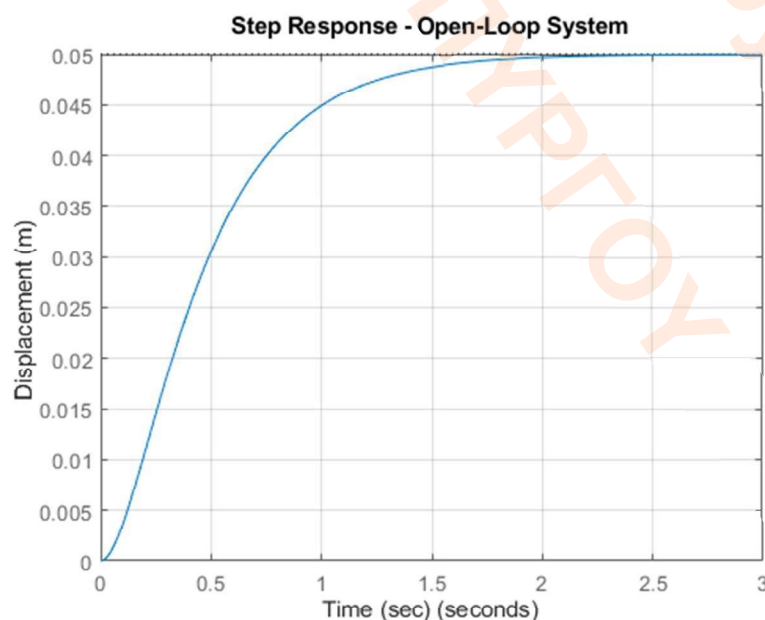
$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Αν η είσοδος είναι **σταθερή μονάδα** (δηλ. $F(s) = \frac{1}{s}$), τότε:

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

Άρα:

$$x_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 10s + 20} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 10s + 20} = \frac{1}{20}$$



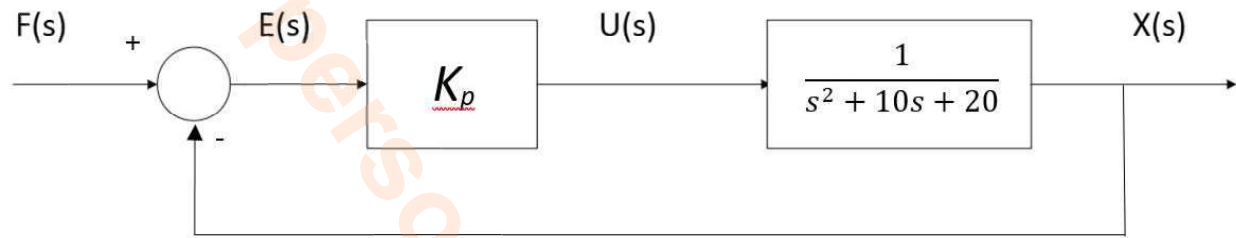
Η είσοδος είναι μονάδα, δηλαδή θέλουμε $X(t) \rightarrow 1$.

Η τελική τιμή της εξόδου $X(t)$ είναι μόνο 0.05 (όπως φαίνεται και στο διάγραμμα και υπολογίστηκε από την προηγούμενη εικόνα).

$$\text{Σφάλμα} = 1 - x_{ss} = 1 - 0.05 = 0.95$$

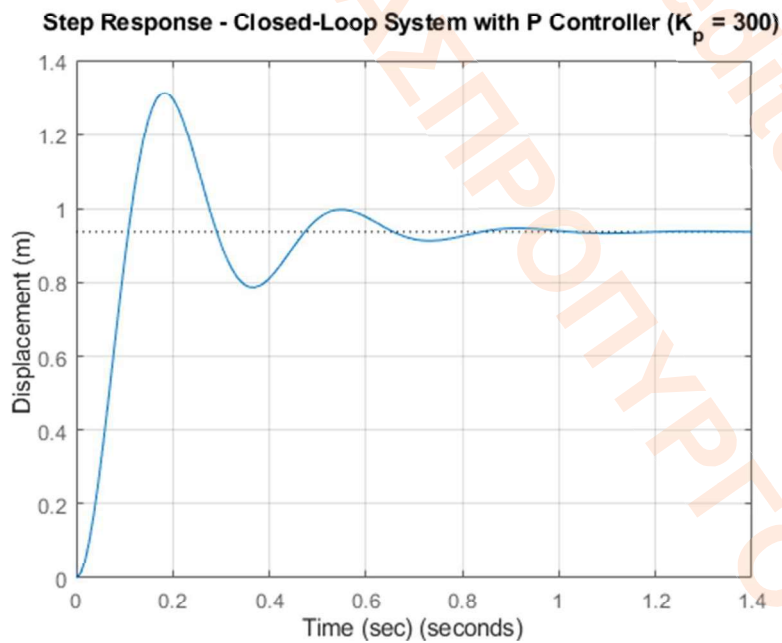
Άρα μόνιμο σφάλμα = 95% και όχι 5%.

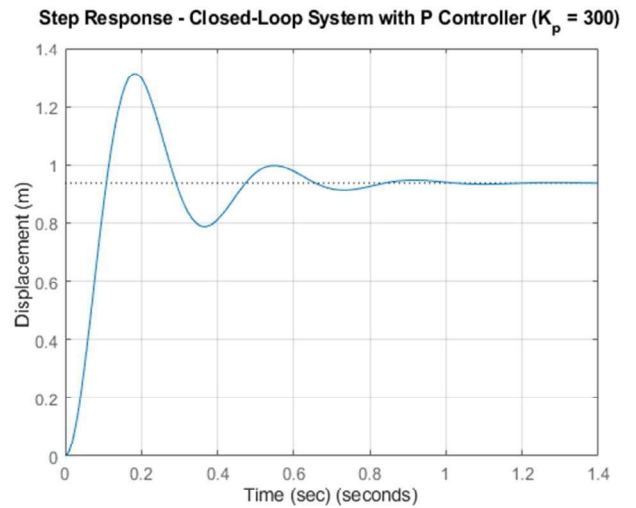
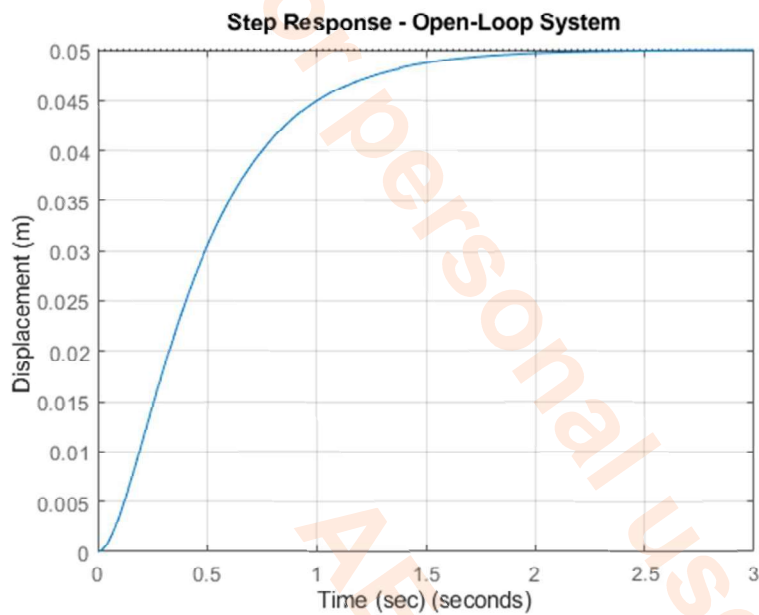
P- Controller



Η Συνάρτηση Μεταφοράς του κλειστού βρόγχου είναι:

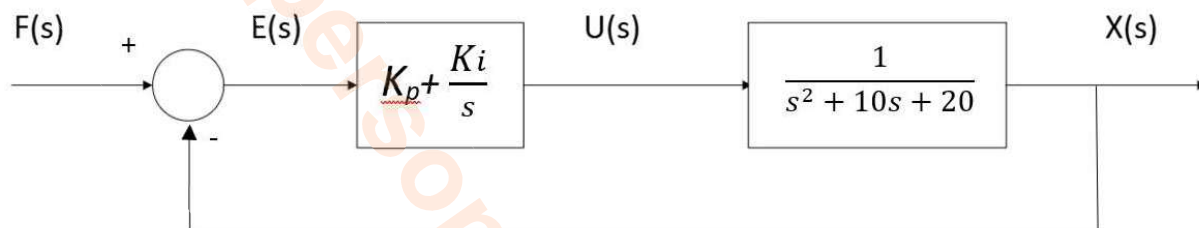
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{K_p}{s^2 + 10s + 20}}{1 + \frac{K_p}{s^2 + 10s + 20}} = \frac{K_p}{s^2 + 10s + (20 + K_p)}$$





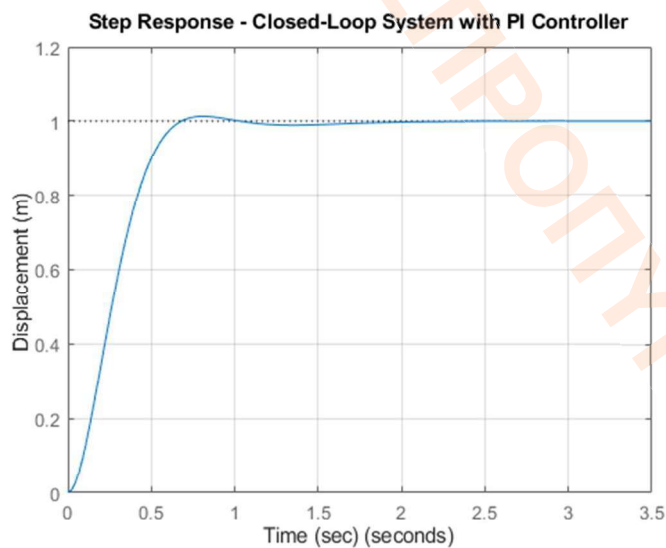
Από τη γραφική παράσταση της απόκρισης φαίνεται ότι ο αναλογικός ελεγκτής, μειώνει το χρόνο ανόδου και το μόνιμο σφάλμα αυξάνει την υπερύψωση και επιφέρει μικρή αλλαγή στο χρόνο αποκατάστασης.

PI Controller



Η Συνάρτηση Μεταφοράς του κλειστού βρόγχου είναι:

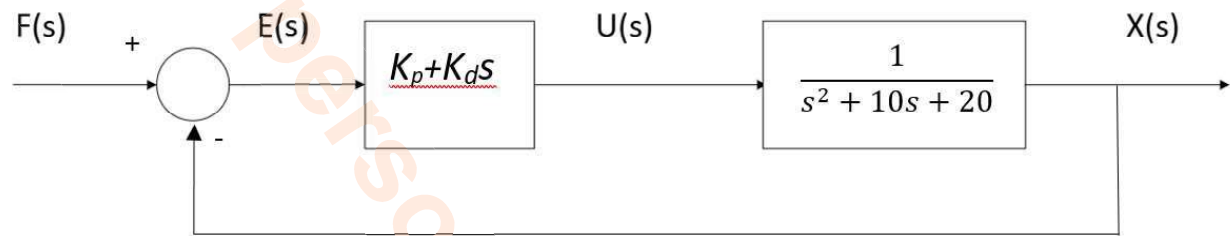
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{K_p + \frac{K_i}{s}}{s^2 + 10s + 20}}{1 + \frac{K_p + \frac{K_i}{s}}{s^2 + 10s + 20}} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 10s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$



$$K_p = 30, K_i = 70$$

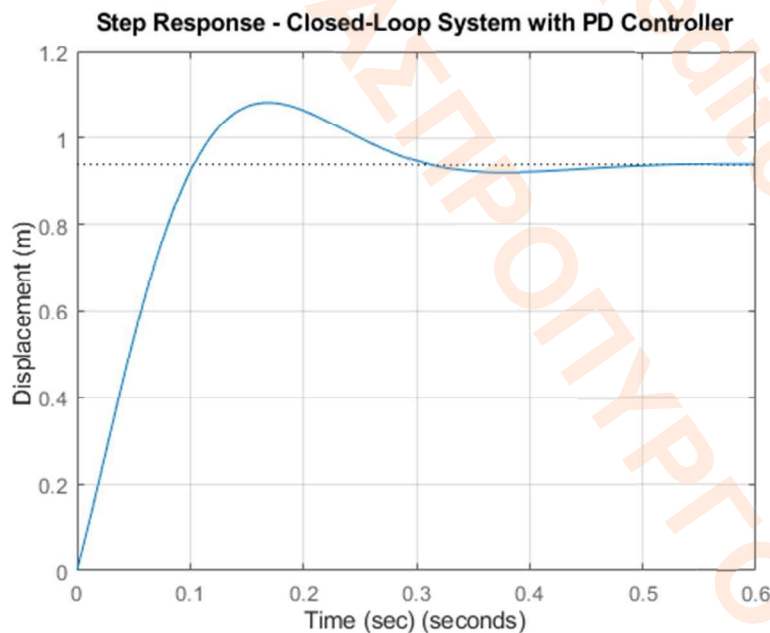
Επιλέγοντας $K_p = 30$ και $K_i = 70$, φαίνεται ότι ο αναλογικός ολοκληρωτικός ελεγκτής, μειώνει το χρόνο ανόδου και μηδενίζει το μόνιμο σφάλμα. Αυξάνει την τάξη κατά ένα βαθμό (η δύναμη στον παρονομαστή είναι τώρα s^3)

PD- Controller



Η Συνάρτηση Μεταφοράς του κλειστού βρόγχου είναι:

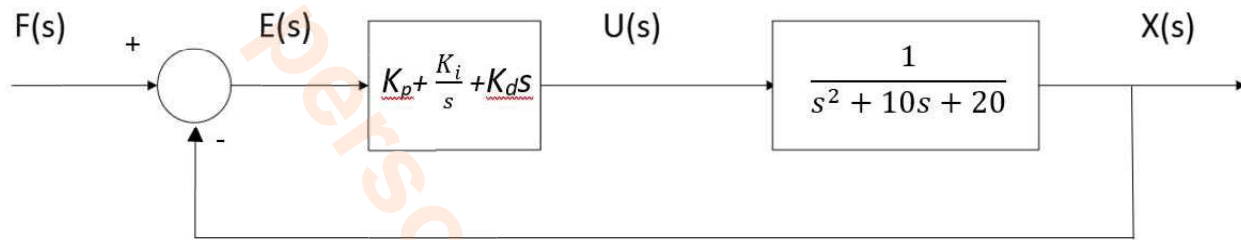
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{K_p + K_d s}{s^2 + 10s + 20}}{1 + \frac{K_p + K_d s}{s^2 + 10s + 20}} = \frac{K_p + K_d s}{s^2 + (10 + K_d)s + (20 + K_p)}$$



$K_p=300$ και $K_d=10$

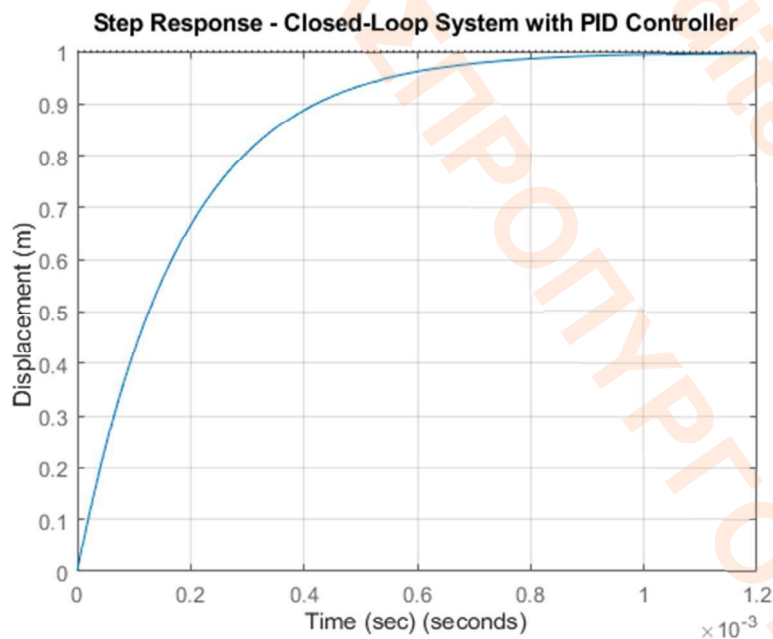
Από τη γραφική παράσταση της απόκρισης φαίνεται ότι ο Αναλογικός-Διαφορικός ελεγκτής, μειώνει την υπερύψωση και το χρόνο αποκατάστασης ενώ έχει μικρή επιρροή στο χρόνο ανύψωσης και στο μόνιμο σφάλμα

PID- Controller



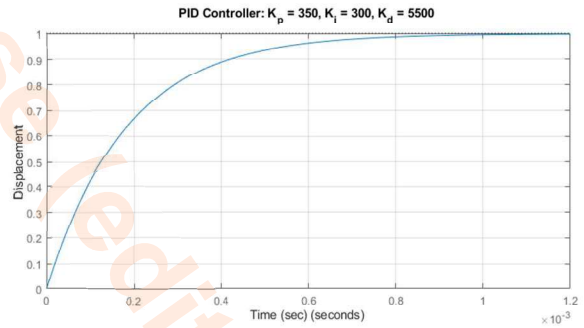
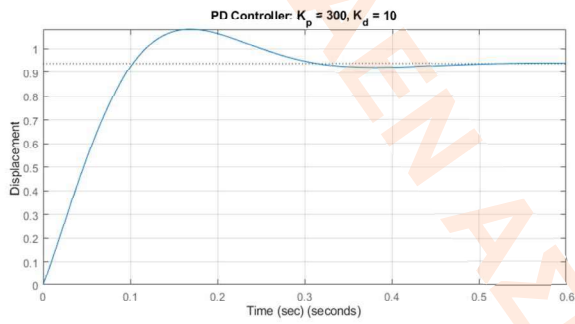
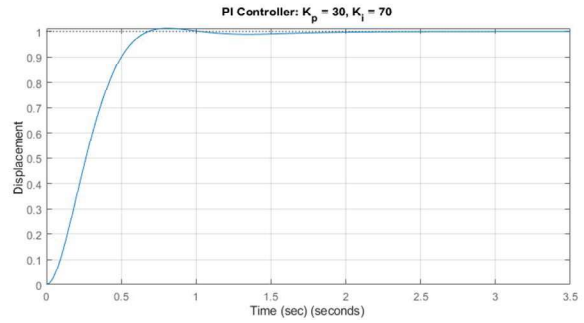
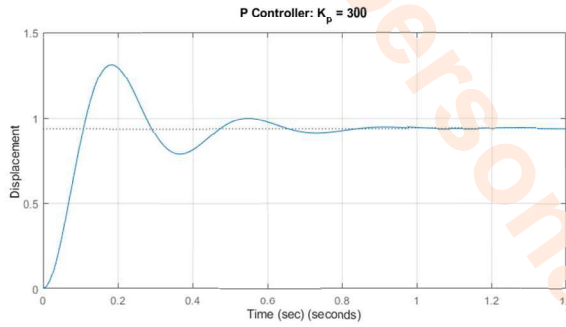
Η Συνάρτηση Μεταφοράς του κλειστού βρόγχου είναι:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}}{s^2 + 10s + 20}}{1 + \frac{K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}}{s^2 + 10s + 20}} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (10 + K_d)s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$



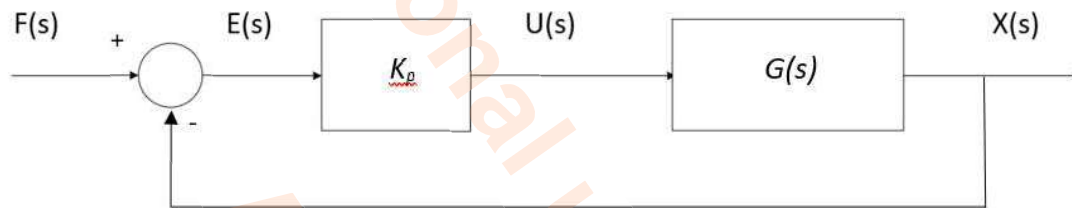
Επιλέγοντας $K_p = 350$, $K_i = 300$, $K_d = 5500$ Έχουμε τη ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Σύγκριση

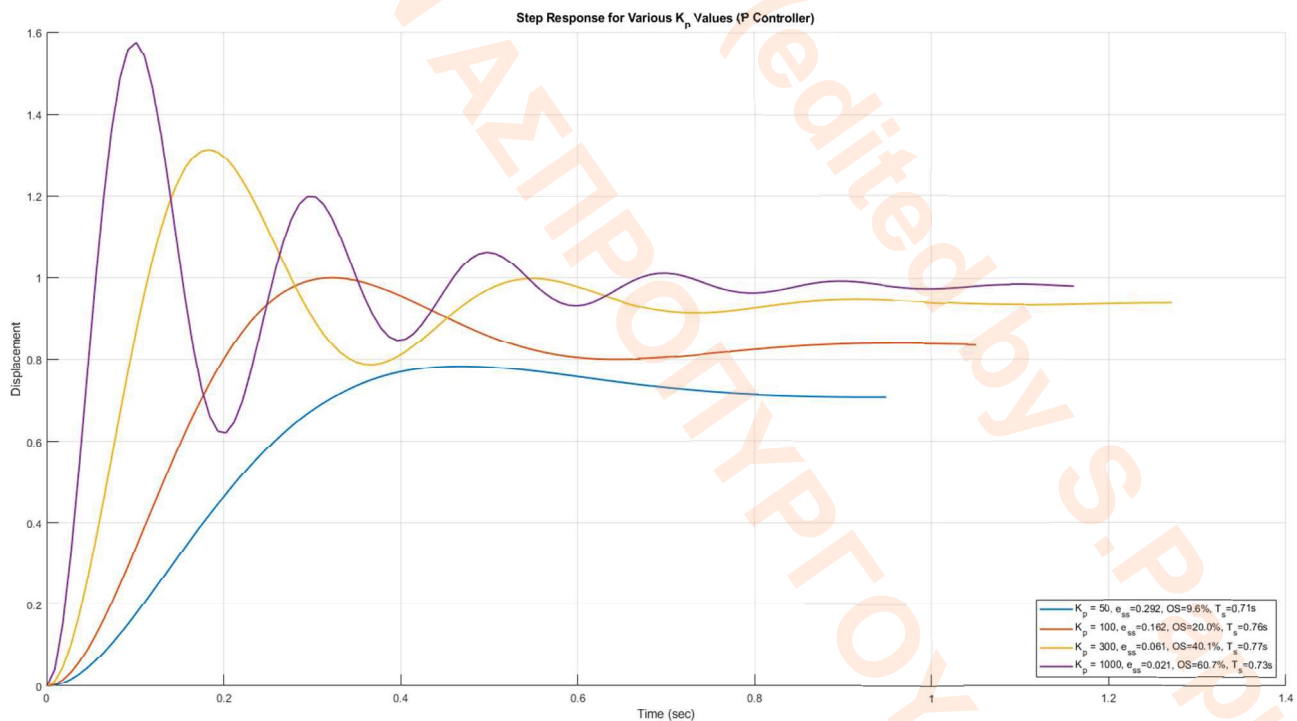


Επίδραση του Αναλογικού, Ολοκληρωτικού και Διαφορικού κέρδους στη Δυναμική Απόκριση του Συστήματος

Αναλογικός Ελεγκτής:



$$U(s) = E(s) K_p \rightarrow u(t) = K_p e(t)$$

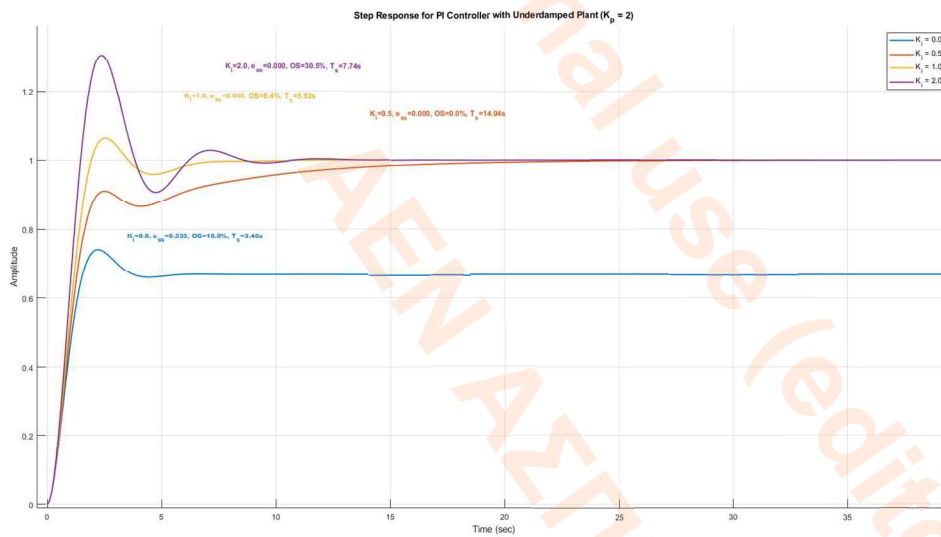
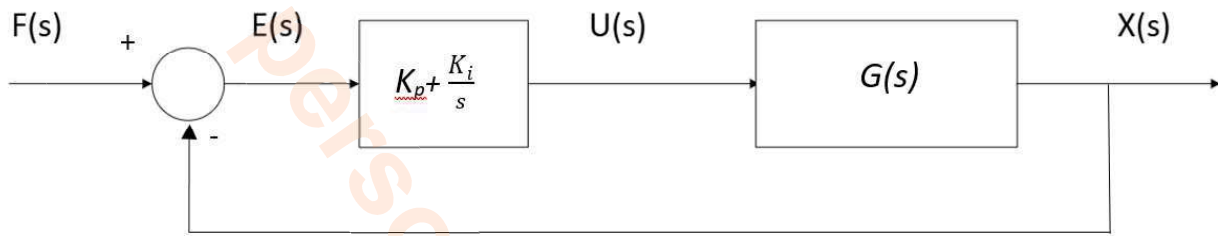


Μεταβολή του κέρδους σε Αναλογικό Ελεγκτή

Αύξηση του κέρδους:

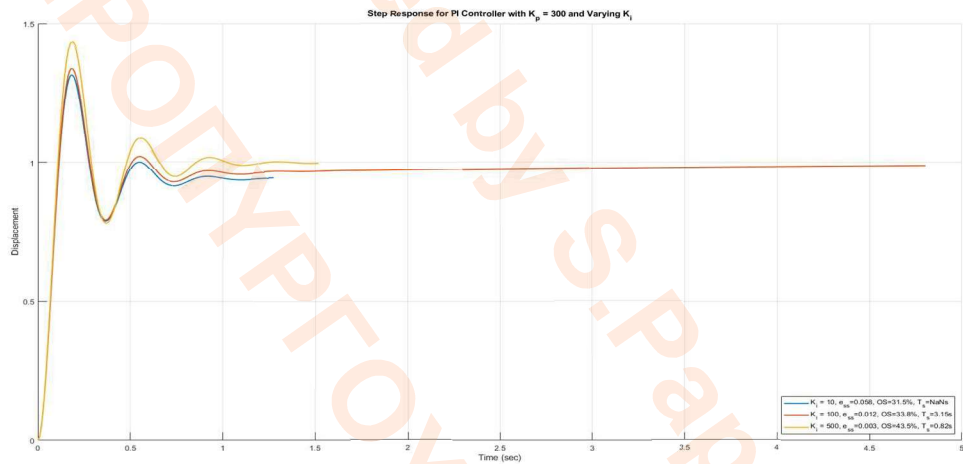
Βελτιώνει την μόνιμη απόκριση, Μειώνει το μόνιμο σφάλμα, Μειώνει την Ευστάθεια !

PI - Controller

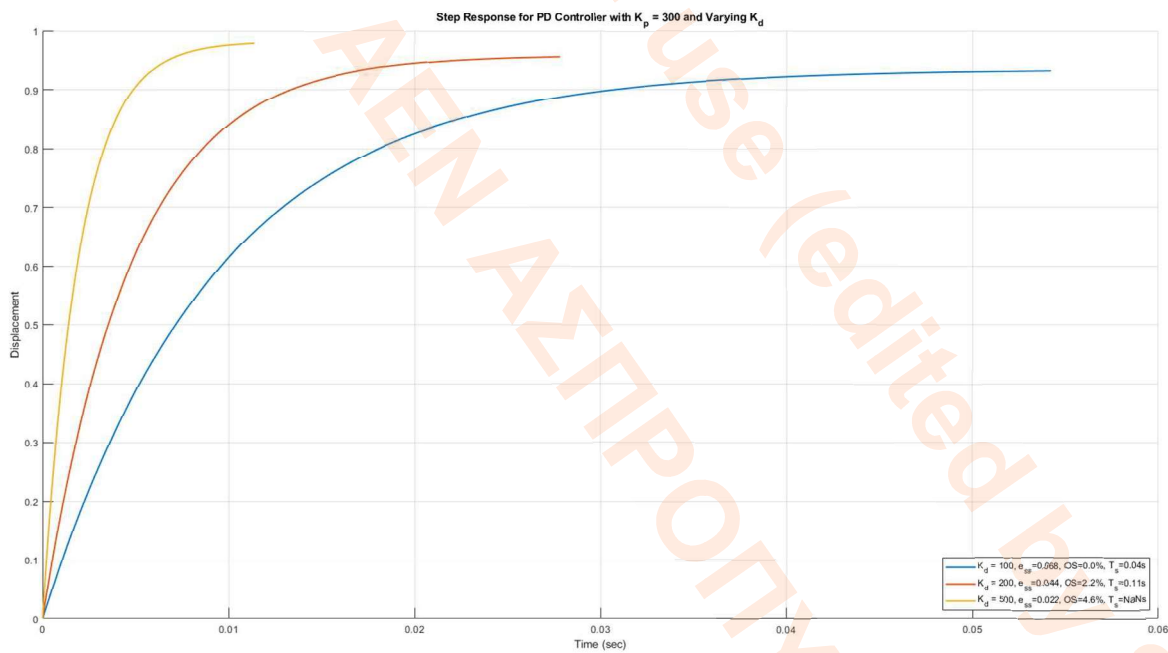
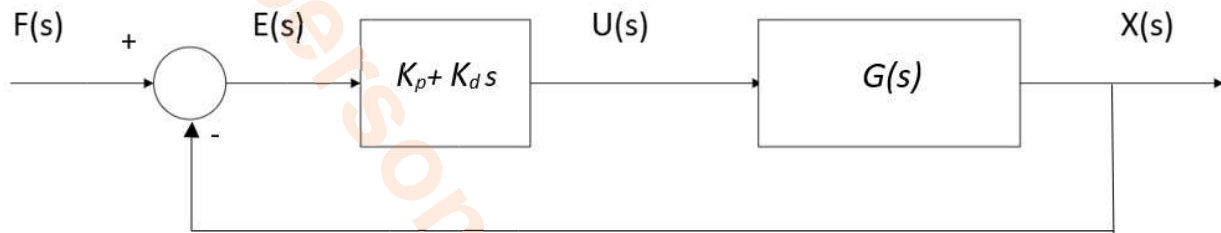


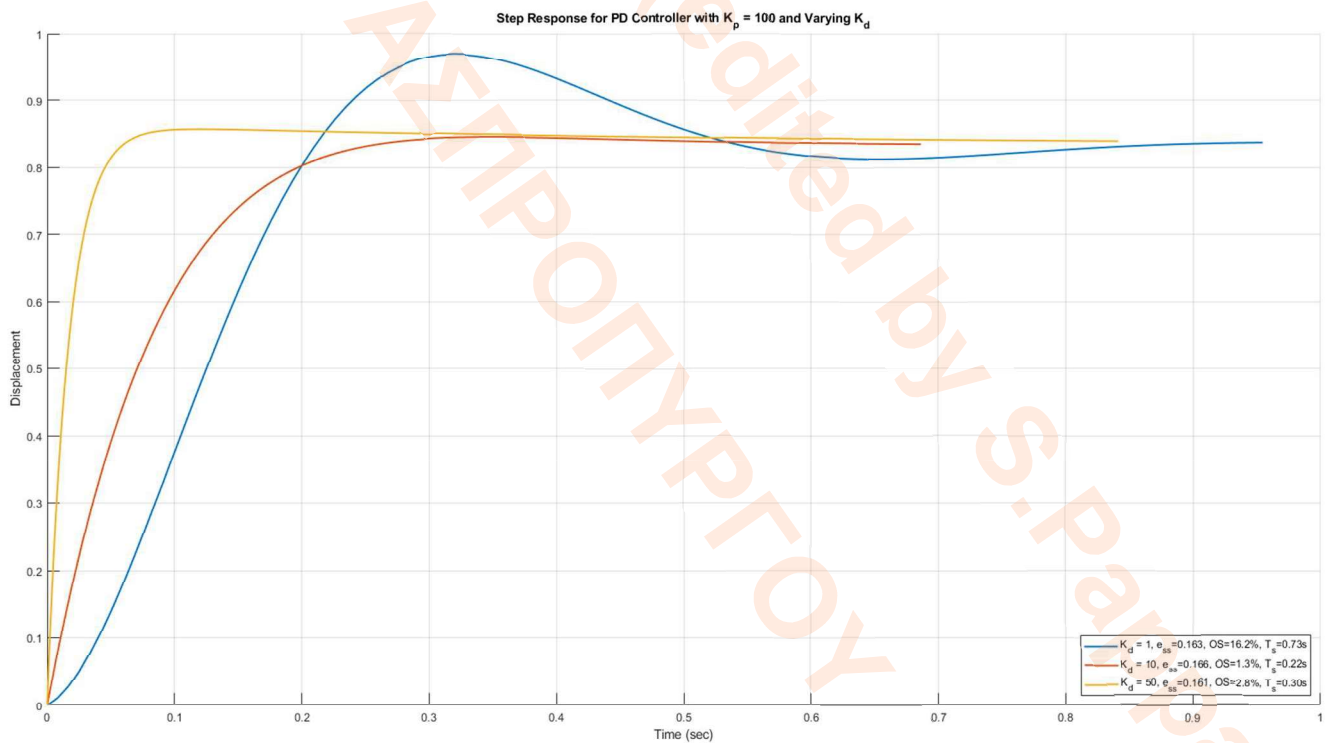
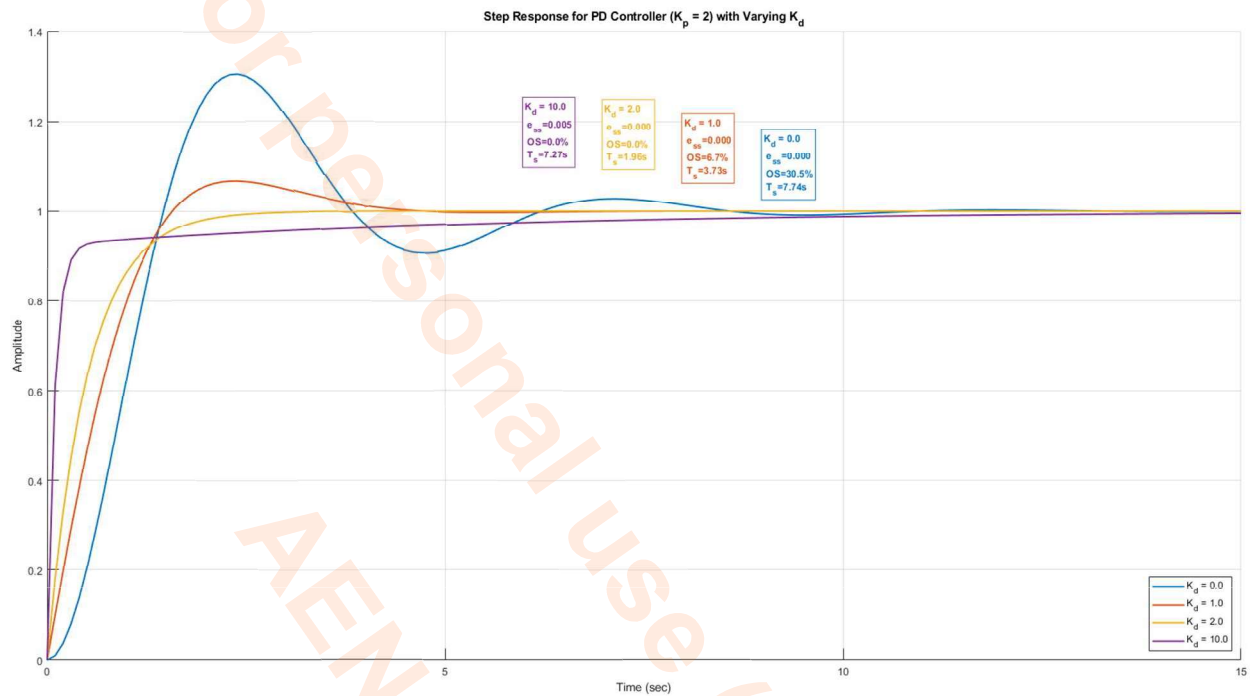
Εξάλειψη του
μονίμου σφάλματος
σε βηματική
διέγερση

Αύξηση της
υπερύψωσης και
των ταλαντώσεων



PD- Controller





Βελτίωση της μεταβατικής απόκρισης

Μείωση της κορυφής και του χρόνου ανόδου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αυξάνοντας το αναλογικό κέρδος μειώνεται το μόνιμο σφάλμα, αν όμως το αυξήσουμε πολύ το σύστημα αποσταθεροποιείται.

Ο Ολοκληρωτικός έλεγχος επιφέρει ισχυρή μείωση του μόνιμου σφάλματος, αλλά συχνά μειώνει την ευστάθεια του συστήματος.

Ο Διαφορικός έλεγχος αυξάνει την απόσβεση και βελτιώνει την ευστάθεια χωρίς να επηρεάζει το μόνιμο σφάλμα