-ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ-

Ως γνωστόν $\pm\sqrt{-1}$ παρίσταται με το i. Εάν α και β είναι δυο πραγματικοί αριθμοί, η παράσταση $(\alpha+\beta i)$ καλείται μιγαδικός αριθμός. Όταν $\beta=0$ ο αριθμός είναι πραγματικός, όταν $\alpha=0$ ο αριθμός λέγεται καθαρώς φανταστικός.

- Για να είναι ένας μιγαδικός αριθμός $(\alpha+\beta i)=0$ πρέπει το πραγματικό μέρος αυτού $\alpha=0$ και ο συντελεστής του $(i\beta)=0$.
- Για να είναι δυο μιγαδικοί ίσοι πρέπει να έχουν ίσα πραγματικά μέρη και ίσους τους συντελεστές του i. Δηλαδή εαν $(\alpha+\beta i)=(\gamma+\delta i)$ τότε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$
- Άθροισμα δυο μιγαδικών αριθμών είναι μιγαδικός αριθμός δηλαδή $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί $(\alpha+\beta i)$ και $(\alpha-\beta i)$ καλούνται συζυγείς μιγαδικοί. Έχουν ίσα πραγματικά μέρη και συντελεστές του i αντίθετους.

Το άθροισμα δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός δηλαδή $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$ πραγματικός.

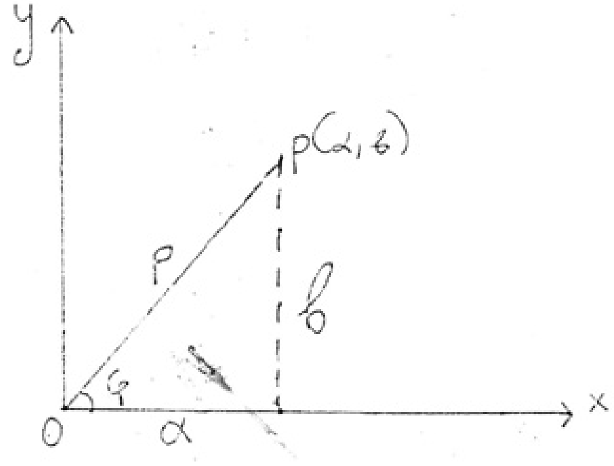
Η διαφορά δυο μιγαδικών αριθμών είναι μιγαδικός αριθμός. Δηλαδή $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

Το γινόμενο δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα θετικός. Δηλαδή $(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$

Το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών είναι μιγαδικός αριθμός. Δηλαδή

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

-Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών-



Έστω το ορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων xOy. Στο μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$ αντιστοιχούμε το σημείο $P(\alpha,\beta)$. Αυτό σε κάθε μιγαδικό αριθμό αντιστοιχεί σε σημείο του επιπέδου και αντιστρόφως σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένας μιγαδικός αριθμός. Το σημείο $P(\alpha,\beta)$ καλείται εικόνα του μιγαδικού $z=(\alpha+\beta i)$.

Οι πραγματικοί αριθμοί παρίστανται με τα σημεία του άξονος Ox, ενώ οι καθαρώς φανταστικοί παρίστανται με τα σημεία του άξονος Oy εκτός της αρχής O.

– Μέτρον και όρισμα μιγαδικού αριθμού. –

Έστω ο μιγαδικός $z=(\alpha+\beta i)$ και $P(\alpha,\beta)$ η εικόνα αυτού. Το μέτρο της διανυσματικής ακτίνος OP καλείται μέτρο του μιγαδικού z και παρίσταται διά του συμβόλου $|z|$. Εάν καλέσωμε $\rho=OP$ είναι $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Ώστε $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Η γωνία $\varphi=x\hat{O}P$ καλείται όρισμα του μιγαδικού z. Ως γνωστόν $\alpha=\rho\,συν\varphi$, $\beta=\rho\,ημ\varphi$ $εφ\varphi=\frac{\beta}{\alpha}$ και $z=\alpha+\beta i=\rho\,συν\varphi+i\rho\,ημ\varphi=\rho(συν\varphi+i\,ημ\varphi)$. Η μορφή $z=\rho(συν\varphi+i\,ημ\varphi)$ καλείται τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού z.

Φυσικά ως όρισμα φ δυνάμεθα να λάβωμε και μια γωνία διαφορετική της φ κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Ώστε όταν δυο μιγαδικοί αριθμοί θα είναι ίσοι θα έχουν το μέτρο αυτό. Τα ορίσματα όμως αυτών φ,θ θα συνδέονται διά της σχέσεως $\theta=\varphi+2\kappa\pi$ όπου κ ακέραιος θετικός ή αρνητικός ή και 0.

– Γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών οι οποίοι δίδονται από τη τριγονομετρική μορφή. –

Έστω οι μιγαδικοί $z_1=\rho_1(συν\varphi_1+i\,ημ\varphi_1)$ και $z_2=\rho_2(συν\varphi_2+i\,ημ\varphi_2)$. Εάν τους πολλαπλασιάσουμε θα έχουμε $z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2[συν(\varphi_1+\varphi_2)+i\,ημ(\varphi_1+\varphi_2)]$. Δηλαδή το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων των δυο μιγαδικών αριθμών.

– Πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών –

Έστω οι μιγαδικοί $z_1=\rho_1(συν\varphi_1+i\,ημ\varphi_1)$, $z_2=\rho_2(συν\varphi_2+i\,ημ\varphi_2)$ είναι

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\left[συν(\varphi_2-\varphi_1)+i\,ημ(\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

Δηλαδή το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο το πηλίκο των μέτρων και όρισμα την διαφορά των ορισμάτων των δυο μιγαδικών.

— Γινόμενο περισσοτέρων μιγαδικών αριθμών. —

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ $z_3 = \rho_3(\sigma\upsilon\nu\varphi_3 + i\eta\mu\varphi_3)$. Το γινόμενο $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ αυτών θα είναι:

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 [\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)]$

Γενικά αν $z_1, z_2, \dots, z_3$ είναι κ μιγαδικοί αριθμοί με μέτρα $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_\kappa$ και ορίσματα $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa$. Το γινόμενο αυτών θα είναι

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_\kappa = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_\kappa [\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2+\dots\varphi_\kappa) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2+\dots\varphi_\kappa)]$

Εάν $z_1 = z_2 = \dots = z_\kappa = z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ θα έχουμε:

$z^\kappa = \rho^\kappa(\sigma\upsilon\nu\kappa\varphi + i\eta\mu\kappa\varphi)$

ή $[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)]^\kappa = \rho^\kappa(\sigma\upsilon\nu\kappa\varphi + i\eta\mu\kappa\varphi)$

ή $(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)^\kappa = \sigma\upsilon\nu\kappa\varphi + i\eta\mu\kappa\varphi$ ΤΥΠΟΣ του Moivre

— Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού —

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)$.
Διαφορίζοντας παίρνουμε:

$$\frac{dz}{d\vartheta} = z' = \rho' \cdot (\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta) + \rho \cdot (\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)' =$$

$$= 0 + \rho[(\sigma\upsilon\nu\vartheta)' + (i\eta\mu\vartheta)'] = \rho(-\eta\mu\vartheta + i\sigma\upsilon\nu\vartheta) =$$

$$= \rho i \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\vartheta - \frac{i\eta\mu\vartheta}{-1}\right) = \rho i(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta) = iz.$$

Άρα $\frac{dz}{d\vartheta} = iz \Rightarrow dz = iz\,d\vartheta \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = i\,d\vartheta$

$\int \frac{dz}{z} = \int i\,d\vartheta \Leftrightarrow \ln z = i\vartheta + c$ και για $\vartheta = 0$ έχω $z = \rho(\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$ $= \rho(1 + i \cdot 0) = \rho$ και $\ln\rho = i0 + c \Rightarrow c = \ln\rho$ και η $\ln z = i\vartheta + c$ γράφεται $\ln z = i\vartheta + \ln\rho \Leftrightarrow \ln z - \ln\rho = i\vartheta \Leftrightarrow \ln\frac{z}{\rho} = i\vartheta \Leftrightarrow \ln\frac{z}{\rho} = \ln e^{i\vartheta} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{z}{\rho} = e^{i\vartheta} \Leftrightarrow z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

Έτσι τώρα αν $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ και $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$ έχω

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\vartheta_1 + i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$ και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\vartheta_1}}{\rho_2 e^{i\vartheta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\vartheta_1 - i\vartheta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$$

— ΝΕΠΕΡΕΙΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ —

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \rho(\text{συν}\vartheta + i\text{ημ}\vartheta) = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ λογαριθμίζοντας παίρνουμε:

$$\ln z = \ln(\rho \cdot e^{i\vartheta}) = \ln\rho + \ln e^{i\vartheta} = \ln\rho + i\vartheta \cdot \ln e = \ln\rho + i\vartheta$$ άρα

με $\ln$ συμβολίζουμε τον νεπέρειο λογάριθμο δηλαδή τον λογάριθμο, με βάση $e = 2,72\ldots$

Έτσι θεωρήθηκε $\vartheta \in (-\pi, \pi)$.

Έτσι έχουμε:

$$\ln z = \ln\rho + i\vartheta, \quad \vartheta \in (-\pi,\pi)$$

$$\ln z = \ln\rho + i(2\kappa\pi + \vartheta), \quad \vartheta \in (-\pi,\pi)$$ σε γενική μορφή.

Με βάση αυτό κάθε αρνητικός αριθμός λογαριθμίζεται αφού μπορεί να τεθεί υπό εκθετική μορφή μιγάδα.

Έστω $\alpha \in R^*_-$ τότε $-\alpha \in R^*_+$ και επειδή $\alpha = \alpha + 0i$ έχουμε $|\alpha| = -\alpha$ και $\text{συν}\vartheta = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{-\alpha} = -1$, $\text{ημ}\vartheta = \frac{0}{|\alpha|} = 0$ και επομένως

$\vartheta = -\pi$ και άρα $\alpha = -\alpha(\text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi)$. Έτσι:

$$\ln\alpha = \ln|\alpha| + i\vartheta = \ln(-\alpha) + i\pi$$

— Ρίζα μιγαδικού αριθμού —

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \rho_1(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi)$ και ένας φυσικός αριθμός ν. Με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{z_1}$ παριστάνεται ένας μιγαδικός αριθμός $z = \rho(\text{συν}\vartheta + i\text{ημ}\vartheta)$ ο οποίος καλείται ν-οστή ρίζα του z_1 και ο οποίος υψωμένος εις τη δύναμη ν δίνει τον z_1. Αυτοί είναι:

$$z^\nu = z_1 \text{ δηλαδή } [\rho(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi)]^\nu = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\text{ημ}\varphi_1)$$

$$\text{ή} \quad \rho^\nu(\text{συν}(\nu\varphi) + i\text{ημ}(\nu\varphi)) = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\text{ημ}\varphi_1)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι ισότητες:

$\rho = \sqrt[\nu]{\rho_1}$ και $\nu\theta = \varphi_1 + 2\kappa\pi$ ή $\theta = \frac{\varphi_1 + 2\kappa\pi}{\nu}$ ένθα κ τυχών φυσικός αριθμός. Εάν στο κ δώσαμε τις τιμές $0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ θα λάβουμε για το θ τις τιμές $\frac{\varphi_1}{\nu}, \frac{\varphi_1}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}, \frac{\varphi_1}{\nu} + 2\cdot\frac{2\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\varphi_1}{\nu} + (\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}$

Εάν δώσαμε στο κ τιμές $\nu, \nu+1, \ldots$ βρίσκουμε ορίσματα θ, τα οποία διαφέρουν από τα παραπάνω κατά πολλαπλάσιο του 2π και συνεπώς μας δίνουν τους αυτούς μιγαδικούς αριθμούς. Κατά τα παραπάνω ο μιγαδικός z_1 έχει ν διακεκριμένες ρίζες τάξεως ν οι οποίες έχουν κοινό μέτρο $\sqrt[\nu]{\rho_1}$ και ορίσματα που διαφέρουν κατά $\frac{2\pi}{\nu}$ το καθένα από το προηγούμενο του. Κατά συνέπεια οι εικόνες των ν αυτών ριζών βρίσκονται επί περιφέρειας κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας $\sqrt[\nu]{\rho_1}$ και ορίζουν επί της περιφέρειας αυτής ίσα τόξα. Ώστε οι εικόνες αυτές αποτελούν τις κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ως άνω κύκλο.

- ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ -

Εάν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ δυο μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

— ΑΣΚΗΣΕΙΣ -

1) Να αποδειχθεί ότι $\frac{(1+i)^2 + (1+2i)^2}{1-2i} = -3$

ΛΥΣΗ:

$$\frac{(1+i)^2 + (1+2i)^2}{1-2i} = \frac{1-1+2i+1-4+4i}{1-2i} = \frac{-3+6i}{1-2i} = -3\left[\frac{1-2i}{1-2i}\right] = -3$$

2) Να τεθούν οι κάτωθι μιγαδικοί αριθμοί υπό τριγωνομετρική μορφή.

α) 1 β) $\sqrt{3}+i$

ΛΥΣΗ:

α) Βρίσκω το μέτρο $\rho=\sqrt{1+0}=1$ και το όρισμα $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{0}{1}=0$ και $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$. Οπότε έχω $1=1(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0)=$
$=1=1(\sigma\upsilon\nu 2\pi+i\eta\mu 2\pi)$

β) $\sqrt{3}+i$ το ρ είναι $\rho=\sqrt{3+1}=2$ και $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $\varphi=\frac{\pi}{6}$ και έχω $\sqrt{3}+i=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$

3) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης.
$A=i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}$, $\nu\in N$

ΛΥΣΗ:

$$A=i^{\nu}\cdot(1+i^{1}+i^{2}+i^{3})=i^{\nu}\left[1+i+(-1)+i^{2}\cdot i\right]=i^{\nu}(1+i-1-1\cdot i)=i^{\nu}\cdot 0=0$$

4) Για ποιες τιμές των x,y ισχύει η ισότητα:
$(2-i)x+(3+i)y=7-i$ $\quad x,y\in R$

ΛΥΣΗ:

$(2-i)x+(3+i)y=7-i \Leftrightarrow 2x-xi+3y+y\cdot i=7-i$

$(2x+3y)+(-x+y)i=7-i$ και σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας δυο μιγαδικών αριθμών έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y=7\\-x+y=-1\end{array}\right\} \quad \text{και} \quad \Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}7 & 3\\-1 & 1\end{vmatrix}=7+3=10 \qquad \Delta y=\begin{vmatrix}2 & 7\\-1 & -1\end{vmatrix}=-2+7=5$$

$$X=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{10}{5}=2, \quad Y=\frac{\Delta y}{y}=\frac{5}{5}=1$$

5) Να εκφραστούν οι επόμενοι μιγαδικοί σε τριγωνομετρική και εκθετική μορφή.

I) $1+i\sqrt{3}$, II) $-3+3i$ III) $-\sqrt{3}-i$, IV) $2-2i$

ΛΥΣΗ:

I) $1+i\sqrt{3}$ μορφή μιγαδικού καρτεσιανή:

$\alpha+\beta i$ εδώ $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{3}$ άρα $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

και $\eta\mu\vartheta=\frac{\beta}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{1}{2}>0$ και επειδή $-\pi<\vartheta\leq\pi$

το ϑ λήγει στο α^o τεταρτημόριο. Άρα $\vartheta=\pi/3$ και

$1+i\sqrt{3}=\rho\underline{|\vartheta} = 2\underline{|\pi/3}$ και $1+i\sqrt{3}=\rho\cdot e^{i\vartheta}=2e^{i\pi/3}$

II) $-3+3i$ μορφή καρτεσιανή $\alpha+\beta i$:
Εδώ $\alpha=-3$, $\beta=3$ άρα $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{3^2+3^2}=$
$=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2}$ και $\eta\mu\vartheta=\frac{\beta}{\rho}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\alpha}{\rho}=$

$=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ και επειδή $-\pi<\vartheta\leq\pi$ και $\eta\mu\vartheta>0$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta<0$ το

ϑ λήγει στο $\beta^{o\upsilon}$ τεταρτημόριο έτσι $\vartheta=\frac{3\pi}{4}$

Άρα $-3+3i=\rho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)=3\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}+i\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right)=\rho\underline{|\vartheta}=3\sqrt{2}\underline{|3\pi/4}=$
$=\rho\cdot e^{i\vartheta}=3\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}$

III) $-\sqrt{3}-i$ μορφή καρτεσιανή $\alpha+\beta i$

Εδώ $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=-1$ άρα $\rho=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ και

$\eta\mu\vartheta=\frac{\beta}{\rho}=\frac{-1}{2}<0$ και $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{-\sqrt{3}}{2}<0$ και επειδή $-\pi<\vartheta\leq\pi$ το

ϑ λήγει στο γ^o τεταρτημόριο έτσι $\vartheta=\frac{7\pi}{6}$ A7

Άρα $-\sqrt{3}-i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}+i\eta\mu\frac{7\pi}{6}\right)=\rho\angle\theta=2\angle 7\pi/6$

$=\rho e^{i\theta}=2e^{i7\pi/6}=$

(IV) $2-2i$ μορφή καρτεσιανή $\alpha+\beta i$

Εδώ $\alpha=2$, $\beta=-2$ άρα $\rho=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2\cdot 2^2}=2\sqrt{2}$

και $\eta\mu\theta=\frac{\beta}{\rho}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\alpha}{\rho}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$

και επειδή $-\pi<\theta\leq\pi$ το θ λήγει στο δ΄ τεταρτημόριο.

Έτσι $\pi=\frac{7\pi}{4}$ Άρα:

$2-2i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=2\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4}+i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)=$

$=\rho\angle\theta=2\sqrt{2}\angle 7\pi/4=\rho e^{i\theta}=2\sqrt{2}\cdot e^{i7\pi/4}$

-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-

6) Γράψτε με τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό $z=1+i\sqrt{3}$

$\rho=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\Rightarrow\rho=2$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\rho}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}\\ \eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\rho}\Rightarrow\eta\mu\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}\quad -\pi<\varphi\leq\pi$$

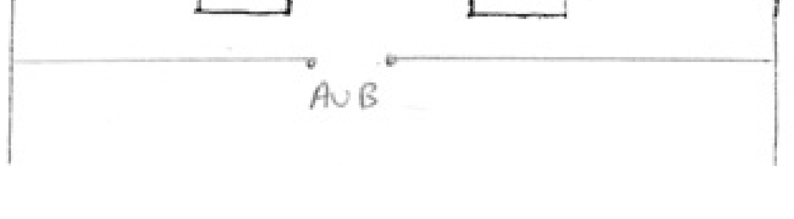
Άρα $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$

7) Γράψτε τον αριθμό $z=3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$ στην μορφή $\alpha+\beta i$

Έχουμε $\rho=3$. Τότε $\alpha=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi=3\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

και $\beta=\rho\eta\mu\varphi=3\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\beta=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Άρα $z=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

-ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟ-



Οι μιγαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στον ηλεκτρισμό για να παραστήσουμε την σύνθετη αντίσταση κάποιου κυκλώματος. Για παράδειγμα θεωρούμε ένα κύκλωμα με τιμές αντιστάσεων $Z_1 = 8+6i$ και $Z_2 = 6-8i$. Η μορφή $Z_1 = 8+6i$ δείχνει ότι η σύνθετη αντίσταση Z_1 αποτελείται από ωμική αντίσταση 8Ω και επαγωγική αντίσταση 6Ω ενώ η μορφή $Z_2 = 6-8i$ δείχνει ότι η σύνθετη αντίσταση Z_2 αποτελείται από ωμική αντίσταση 6Ω και χωρητική αντίσταση 8Ω. Η σύνθετη αντίσταση είναι $z = Z_1 + Z_2 = (8+6i)+(6-8i) = 14$ ή δηλαδή το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά.

- Παραδείγματα -

8) Να λύσετε την εξίσωση $z^3 = 1+i\sqrt{3}$ (1)

Έστω $T = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$, $\rho>0$ μια λύση της (1)

Εξάλλου $1+i\sqrt{3} = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$. Οπότε: $\rho^3(\sigma\upsilon\nu 3\varphi + i\eta\mu 3\varphi) =$

$$= 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2 \\ 3\varphi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \ \kappa = 0,1,2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{2} \\ \varphi = \dfrac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}}{3}, \ \kappa = 0,1,2 \end{cases}$$

Για $\kappa=0$ έχουμε: $Z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} + i\eta\mu\frac{\pi}{9}\right]$

Για $\kappa=1$ έχουμε: $Z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9} + i\eta\mu\frac{7\pi}{9}\right]$

Για $\kappa=2$ έχουμε: $Z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{9} + i\eta\mu\frac{13\pi}{9}\right]$

9) Να λυθεί η εξίσωση $z^4 = i$

ΛΥΣΗ:

Γράφω τον i υπό τριγωνομετρική μορφή. $i = 0+1i = \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$

αφού $\rho = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{0}{1} = 0$, $\eta\mu\theta = \frac{1}{1} = 1$ άρα $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι $z^4 = 1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow z^{\kappa} = \sqrt[4]{1}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi/2 + 2\kappa\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi/2+2\kappa\pi}{4}\right)\right]$,

$\kappa = 0,1,2,3$

$$z_0 = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi/2}{4} + i\eta\mu \frac{\pi/2}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} + i\eta\mu \frac{\pi}{8} = e^{i\pi/8}$$

$$z_1 = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi/2+2\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi/2+2\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{8} + i\eta\mu \frac{5\pi}{8} = e^{i5\pi/8}$$

$$z_2 = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi/2+4\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi/2+4\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{8} + i\eta\mu \frac{9\pi}{8} = e^{i9\pi/8}$$

$$z_3 = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi/2+6\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi/2+6\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{13\pi}{8} + i\eta\mu \frac{13\pi}{8} = e^{i13\pi/8}$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ -

10) Να λυθεί η εξίσωση $z^5 = -243$

ΛΥΣΗ:

Γράφω τον -243 υπό την τριγωνομετρική του μορφή

$-243 = -243 + 0i = 243(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$ Αφού $\rho = |-243| = |243|$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\rho} = -\frac{243}{243} = -1$ και $\eta\mu\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{0}{243} = 0$ Άρα $\theta = \pi$

Έτσι $z^5 = 243(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$

$$z_\kappa = \sqrt[5]{243}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{5}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{5}\right)\right], \quad \kappa = 0,1,2,3,4$$

Άρα: $z_0 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} + i\eta\mu\frac{\pi}{5}\right) = 3e^{i\pi/5}$

$$z_1 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2\pi}{5} + i\eta\mu\frac{\pi+2\pi}{5}\right) = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5} + i\eta\mu\frac{3\pi}{5}\right) = 3e^{i3\pi/5}$$

$$z_2 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+4\pi}{5} + i\eta\mu\frac{\pi+4\pi}{5}\right) = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{5} + i\eta\mu\frac{5\pi}{5}\right) = 3e^{i\pi}$$

$$z_3 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+6\pi}{5} + i\eta\mu\frac{\pi+6\pi}{5}\right) = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{5} + i\eta\mu\frac{7\pi}{5}\right) = 3e^{i7\pi/5}$$

$$z_4 = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+8\pi}{5} + i\eta\mu\frac{\pi+8\pi}{5}\right) = 3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{5} + i\eta\mu\frac{9\pi}{5}\right) = 3e^{i9\pi/5}$$

Ασκηση να λυθει η εξισωση $z^3 = 1$