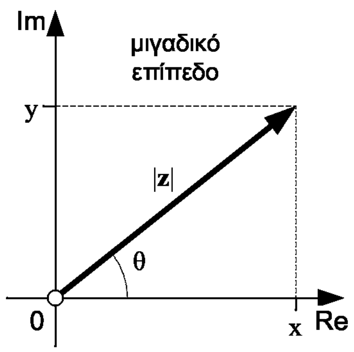
Πραγματικό μέρος, **φανταστικό** μέρος **Πλάτος** ή **μέτρο**, **γωνία** ή **φάση**	$\mathbf{z} = \underbrace{x+jy}_{\text{ορθογωνική μορφή}} = \underbrace{\lvert z\rvert e^{j\theta}}_{\text{πολική μορφή}}$
	Μετατροπή από ορθογωνική σε πολική μορφή $\lvert\mathbf{z}\rvert = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \arctan\dfrac{y}{x}$
	Μετατροπή από πολική σε ορθογωνική μορφή $x = \lvert\mathbf{z}\rvert\cos\theta \qquad y = \lvert\mathbf{z}\rvert\sin\theta$
Η ισότητα δύο μιγαδικών αριθμών ισοδυναμεί με ένα *σύστημα δύο εξισώσεων* $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lvert\mathbf{z}_1\rvert = \lvert\mathbf{z}_2\rvert \\ \theta_1 = \theta_1 \end{cases}$	Τύπος του **Euler** $e^{x+jy} = e^x\left(\cos y + j\cdot\sin y\right)$ $e^{j\theta} = \cos\theta + j\cdot\sin\theta$
Ο μετασχηματισμός $\mathrm{Re}[\cdot]$ $\mathrm{Re}\left[x+jy\right] = x$	Ο μετασχηματισμός $\mathrm{Im}[\cdot]$ $\mathrm{Im}\left[x+jy\right] = y$
Κατά την *πρόσθεση* και την *αφαίρεση* μιγαδικών αριθμών διευκολύνει η *ορθογωνική* μορφή. $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = \left(x_1+x_2\right) + j\left(y_1+y_2\right)$	Κατά τον *πολλαπλασιασμό* και την *διαίρεση* μιγαδικών αριθμών διευκολύνει η *πολική* μορφή. $\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_2 = \lvert\mathbf{z}_1\rvert\lvert\mathbf{z}_2\rvert e^{j(\theta_1+\theta_2)}$
Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού με την φανταστική μονάδα *j* ισοδυναμεί με *αριστερόστροφη* (ανθωρολογιακή) περιστροφή του διανύσματος κατά $90°$ $j\cdot e^{j\theta} = e^{j(\theta-90°)}$	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού με $1/j = -j$ ισοδυναμεί με *δεξιόστροφη* (ωρολογιακή) περιστροφή του διανύσματος κατά $90°$ $\dfrac{1}{j}\cdot e^{j\theta} = -j\cdot e^{j\theta} = e^{j(\theta+90°)}$

Πίνακας 1. - Βασικές Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών

<u>Ημιτονοειδή σήματα</u>

Τα χαρακτηριστικά ενός ημιτονοειδούς σήματος x(t) (τάση ή ρεύμα) φαίνονται παραστατικά παρακάτω:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t+\varphi)$$

πλάτος (amplitude)
γωνιακή συχνότητα (angular frequency)
φάση (phase)

- Το αλγεβρικό άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού ημιτονοειδών σημάτων της ίδιας γωνιακής συχνότητας (και οποιωνδήποτε παραγώγων τους οποιασδήποτε τάξης) είναι ένα ημιτονοειδές σήμα της ίδιας γωνιακής συχνότητας.

$$\begin{aligned}
& a_1 \cdot \sin(\omega t+\phi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega t+\phi_2) + a_3 \cdot \sin(\omega t+\phi_3) + \ldots + \frac{d}{dt}\left[a_4 \cdot \sin(\omega t+\phi_4)\right] + \\
& \frac{d}{dt}\left[a_5 \cdot \cos(\omega t+\phi_5)\right] + \frac{d^2}{dt^2}\left[a_6 \cdot \sin(\omega t+\phi_6)\right] + \ldots + \frac{d^n}{dt^n}\left[a_6 \cdot \sin(\omega t+\phi_6)\right] = \\
& = a \cdot \sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}$$

<u>Φασικά Διανύσματα (Παραστατικοί μιγάδες)</u>

Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός ημιτονοειδούς σήματος προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_m \cos(\omega t+\phi) = \\
&= \mathrm{Re}\left[A_m \cos(\omega t+\phi) + A_m j \cdot \sin(\omega t+\phi)\right] = \\
&= \mathrm{Re}\left[A_m e^{j(\omega t+\phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[A_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right] = \\
&= \mathrm{Re}\left[\mathbf{A} e^{j\omega t}\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \triangleq A_m e^{j\phi}}$$

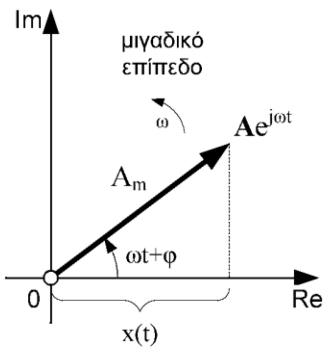
Το ανωτέρω οριζόμενο μέγεθος ονομάζεται φασικό διάνυσμα (phasor) του ημιτονοειδούς σήματος. Εναλλακτικά, το φασικό διάνυσμα ονομάζεται και παραστατικός μιγάδας ή φασιθέτης.

Αν το φασικό διάνυσμα ενός ημιτονοειδούς σήματος Α είναι γνωστός τότε η αναλυτική μορφή του ημιτονοειδούς μπορεί να ανακτηθεί ως εξής:

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = A_m \cos(\omega t + \phi)}$$

Αντί για την συνημιτονοειδή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$y(t) = \mathrm{Im}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = A_m \sin(\omega t + \phi)$$



Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο ενός παραστατικού μιγάδα.

- Ο παραστατικός μιγάδας ενός ημιτονοειδούς περιστρέφεται γύρω από το κέντρο με γωνιακή συχνότητα ω.
- Το ημιτονοειδές μέγεθος $x(t)$ είναι η προβολή του παραστατικού μιγάδα στον πραγματικό άξονα, σε κάθε χρονική στιγμή.

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}_2(t)\right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{z}_1(t)\right] + \mathrm{Re}\left[\mathbf{z}_2(t)\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[a \cdot \mathbf{z}(t)\right] = a \cdot \mathrm{Re}\left[\mathbf{z}(t)\right]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}_d e^{j\omega t}\right]$$

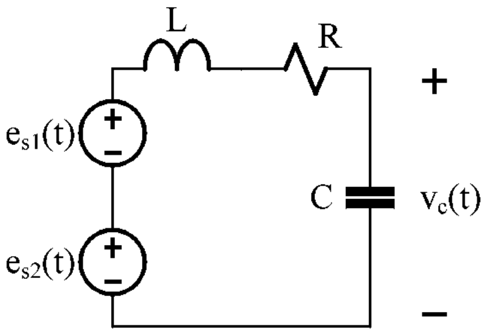
όπου $\mathbf{A}_d = j\omega \cdot \mathbf{A}$

$$a \cdot \cos(\omega t + \phi) = b \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{B}e^{j\omega t}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \mathrm{Re}\left[(j\omega)^n \mathbf{A}e^{j\omega t}\right]$$

<u>Υπέρθεση στην ΗΜΚ</u>

Αν δύο ανεξάρτητες ημιτονοειδείς πηγές με διαφορετικές συχνότητες, $e_{s1} = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi 1)$ και $es2 = A_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi 2)$, διεγείρουν ταυτόχρονα το κύκλωμα RLC, τότε η απόκριση $v_C(t)$ υπολογίζεται ως εξής:



$$LC\frac{d^2 v_{p_1}}{dt^2} + RC\frac{dv_{p_1}}{dt} + v_{p_1} = A_{m_1}\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$LC\frac{d^2 v_{p_2}}{dt^2} + RC\frac{dv_{p_2}}{dt} + v_{p_2} = A_{m_2}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Έστω v_{p1} , v_{p2} οι μερικές λύσεις αν κάθε πηγή επιδρά χωριστά στο κύκλωμα (η άλλη μηδενίζεται), αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

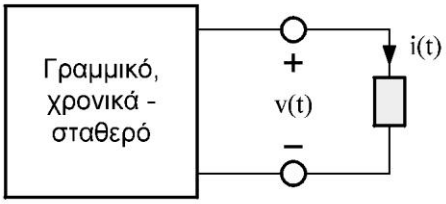
$$LC\frac{d^2(v_{p_1} + v_{p_2})}{dt^2} + RC\frac{d(v_{p_1} + v_{p_2})}{dt} + (v_{p_1} + v_{p_2}) = A_{m_1}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{m_2}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Η παραπάνω Δ.Ε. έχει την ίδια ακριβώς μορφή με την Δ.Ε. του κυκλώματος με μερική λύση το άθροισμα v_{p1} + v_{p2} και διέγερση το άθροισμα των επιμέρους διεγέρσεων.

Αυτό αποδεικνύεται ότι ισχύει για κάθε γραμμικό, χρονικά σταθερό κύκλωμα. Επομένως, η απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά σταθερού κυκλώματος που διεγείρεται από ένα οποιοδήποτε αριθμό ημιτονοειδών πηγών, είναι το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων που προκύπτουν όταν το κύκλωμα διεγείρεται από κάθε πηγή χωριστά (θεώρημα της υπέρθεσης).

Σύνθετη αντίσταση - Σύνθετη αγωγιμότητα

Σε ένα γραμμικό, χρονικά-σταθερό κύκλωμα που βρίσκεται στην ΗΜΚ, εξετάζεται ένα στοιχείο του που εμφανίζει τάση v(t) στα άκρα του και διαρρέεται από ρεύμα i (t) .



$$v(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}e^{j\omega t}\right] \quad \text{όπου} \quad \mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{I}e^{j\omega t}\right] \quad \text{όπου} \quad \mathbf{I} = \mathrm{I}_m e^{j\theta}$$

Αν το εξεταζόμενο στοιχείο αυτο είναι:

1) Ωμική αντίσταση (αντιστάτης)

Για τον αντιστάτη (resistor) ισχύει η σχέση v (t) = R · i (t) και αντικαθιστώντας την v (t) και i (t) , σε συνδυασμό με τα λήμματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι:

$$v(t) = R \cdot i(t) \;\Rightarrow\; \mathbf{V} = R\mathbf{I} \;\Rightarrow\; V_m e^{j\phi} = RI_m e^{j\theta} \;\Rightarrow\; \begin{cases} V_m = RI_m \\ \phi = \theta \end{cases}$$

- Το πλάτος της τάσης και του ρεύματος συνδέονται με τον νόμο του Ohm η φάση της τάσης είναι ίση με τη φάση του ρεύματος (συμφασικά).

2) Πυκνωτής

Για τον πυκνωτή (capacitor) ισχύουν οι σχέσεις:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \;\Rightarrow\; \mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \;\Rightarrow\; I_m e^{j\theta} = j\omega C V_m e^{j\phi} \;\Rightarrow\; \begin{cases} I_m = \omega C V_m \\ \theta = \phi + 90^o \end{cases}$$

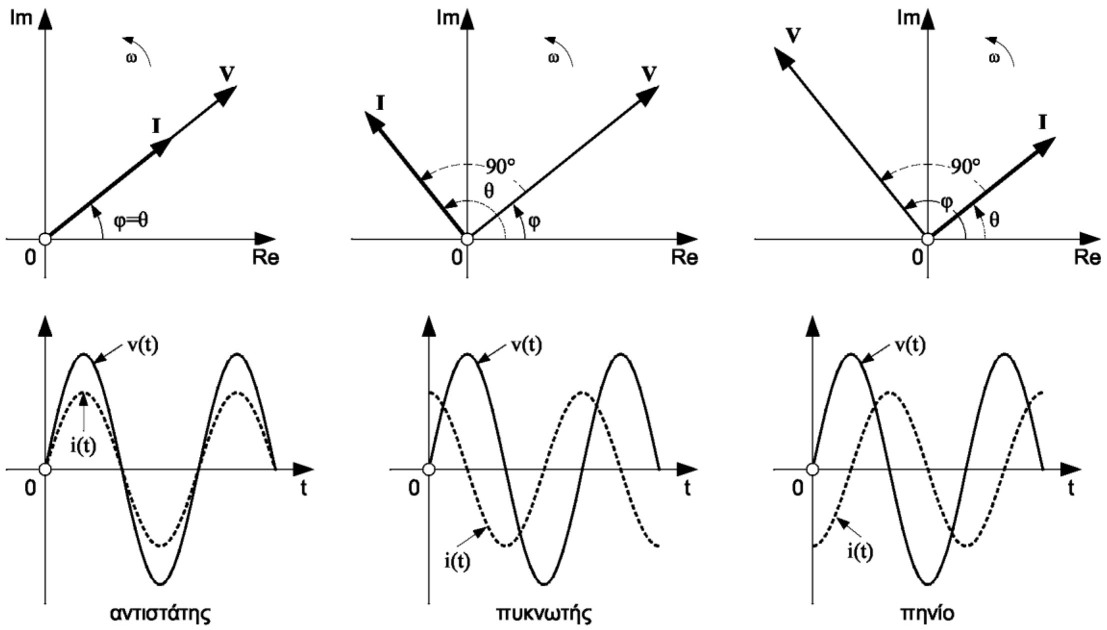
- Η φάση του ρεύματος προηγείται κατά 90° από την τη φάση της τάσης.

3) Πηνίο

Για το πηνίο (inductor) ισχύουν οι σχέσεις:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad V_m e^{j\phi} = j\omega L I_m e^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_m = \omega L I_m \\ \theta = \phi - 90^o \end{cases}$$

- Η φάση της τάσης προηγείται κατά 90° από την τη φάση του ρεύματος. Γραφικές παραστάσεις για τις παραπάνω περιπτώσεις



Ορισμός σύνθετης αντίστασης και σύνθετης αγωγιμότητας

$$\mathbf{Z}(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$$

Σύνθετη αντίσταση
(impedance)
(Νόμος του Ohm)

$$\mathbf{Y}(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

Σύνθετη αγωγιμότητα
(admittance)

- Για το μέτρο και την φάση της σύνθετης αντίσταση ισχύει:

$$|\mathbf{Z}| = Z = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|} = \frac{V}{I} \qquad \text{και} \qquad \angle\mathbf{Z} = \angle\mathbf{V} - \angle\mathbf{I}$$

Η σύνθετη αντίσταση, όπως προκύπτει από τον ορισμό της, είναι γενικά μιγαδικού τύπου. Αν γραφεί σε ορθογωνική μορφή, τότε:

$$\mathbf{Z} = \underset{\substack{\text{ohmic}\\ \text{resistance}}}{R} + \underset{\text{reactance}}{jX} = \underset{\substack{\text{ωμική}\\ \text{αντίσταση}}}{R} + \underset{\text{αντίδραση}}{jX}$$

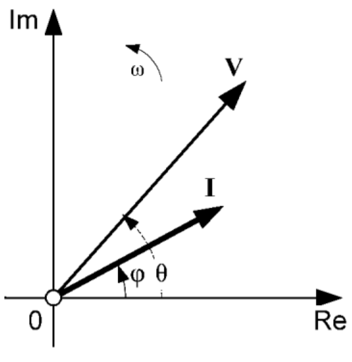
Αντίστοιχα, για την σύνθετη αγωγιμότητα, ισχύει:

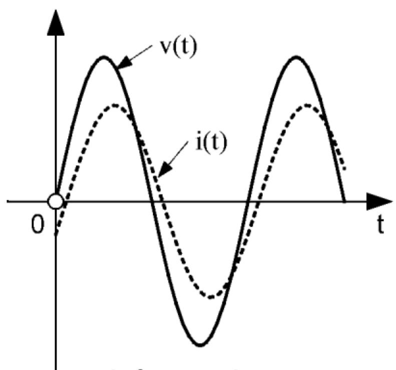
$$\mathbf{Y} = \underset{\text{conductance}}{G} + \underset{\text{succeptance}}{jB} = \underset{\substack{\text{ωμική}\\ \text{αγωγιμότητα}}}{G} + \underset{\text{δεκτικότητα}}{jB}$$

Με βάση τους ορισμούς, προκύπτει για κάθε ένα από τα στοιχεία που εξετάστηκαν παραπάνω:

Στοιχείο	**Σύνθετη αντίσταση**	**Σύνθετη αγωγιμότητα**	**Πλάτος**	**Φάση**
Αντιστάτης	$\mathbf{Z}_R = R$	$\mathbf{Y}_R = \dfrac{1}{R}$	$V_m = RI_m$	$\phi = \theta$
Πυκνωτής	$\mathbf{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y}_C = j\omega C$	$I_m = \omega C V_m$	$\theta = \phi + 90^o$
Πηνίο	$\mathbf{Z}_L = j\omega L$	$\mathbf{Y}_L = \dfrac{1}{j\omega L}$	$V_m = \omega L I_m$	$\theta = \phi - 90^o$

Για ένα κλάδο ενός κυκλώματος που αποτελείται από συνδυασμό αντιστατών, πυκνωτών και πηνίων, η σύνθετη αντίσταση δεν είναι ούτε καθαρά ωμική, ούτε καθαρά φανταστική, αλλά έχει μιγαδική μορφή. Σε τέτοια περίπτωση, η θέση των phasors τάσης και ρεύματος του κλάδου, καθώς και η χρονική εξέλιξή τους δίνονται στο παρακάτω σχήμα.





σύνθετη αντίσταση

Ο νόμος τάσεων του Kirchhoff (ΝΤΚ) στην ΗΜΚ

Σε ένα κλειστό βρόχο ενός κυκλώματος που βρίσκεται σε ΗΜΚ και αποτελείται από δύο κλάδους με τάσεις $v_1(t)$ και v_2 (t) αντίστοιχα, η εφαρμογή του ΝΤΚ δίνει:

$$\begin{aligned}
& v_1(t)+v_2(t)=0 \quad \Rightarrow \\
& V_{m_1}\cos(\omega t+\phi_1)+V_{m_2}\cos(\omega t+\phi_2)=0 \quad \Rightarrow \\
& \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_1 e^{j\omega t}\right]+\mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_2 e^{j\omega t}\right]=0 \quad \Rightarrow \\
& \mathrm{Re}\left[(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)\ e^{j\omega t}\right]=0 \quad \overset{\text{lemma 3}}{\Rightarrow} \\
& \mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2=0
\end{aligned}$$

Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι σε ένα κλειστό βρόχο με οσουσδήποτε κλάδους ισχύει:

$$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\ldots+\mathbf{V}_n=0$$

Ο νόμος τάσεων του Kirchhoff ισχύει στην ΗΜΚ για τους παραστατικούς μιγάδες.

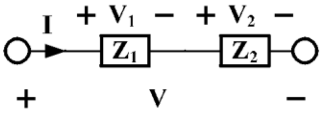
Ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff (ΝΡΚ) στην ΗΜΚ

Σε ένα κόμβο ενός κυκλώματος που βρίσκεται σε ΗΜΚ και συνδέει κλάδους με ρεύματα i_1 (t),…,i_n (t), η εφαρμογή του ΝΡΚ παρομοίως δίνει:

$$\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\ldots+\mathbf{I}_n=0$$

Ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff ισχύει στην ΗΜΚ για τα φασικά διανύσματα.

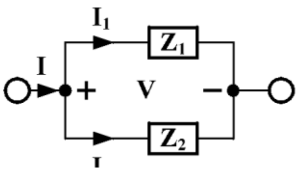
Συνδεσμολογίες σε σειρά και παράλληλα



$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

Γενικά ισχύει: $\mathbf{Z}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i$

(όμοια με την σε σειρά σύνδεση αντιστατών)



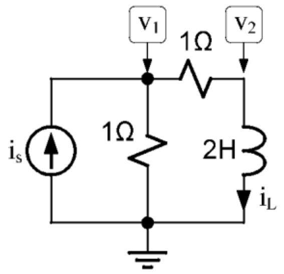
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

Γενικά ισχύει: $\mathbf{Y}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i$

(όμοια με την παράλληλη σύνδεση αντιστατών)

Παράδειγμα ανάλυσης κυκλώματος σε ΗΜΚ

Το κύκλωμα του σχήματος διεγείρεται από ημιτονοειδή πηγή ρεύματος $i_s = 10\cos(2t + 30^o)$ και βρίσκεται στην ΗΜΚ. Ζητείται να υπολογιστεί το ρεύμα του πηνίου i_L με εφαρμογή της μεθόδου των Κόμβων.



Για την πηγή ρεύματος προκύπτει: $i_s = 10\cos(2t + 30^o) \Rightarrow I_s = 10e^{j30^\circ}$ και ω = 2 r s.
Εφαρμόζοντας τον ΝΡΚ στους κόμβους 1 και 2 προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l}1\cdot \mathbf{V}_1 + 1\cdot(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = I_s \\ \dfrac{1}{4j}\mathbf{V}_2 + 1\cdot(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) = 0\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_s \\ -\mathbf{V}_1 + \left(1 + \dfrac{1}{4j}\right)\mathbf{V}_2 = 0\end{array}\right]$$

Επειδή ζητείται το i_L που μπορεί να υπολογιστεί από την τάση του κόμβου 2 και την σύνθετη αντίσταση του πηνίου, με εφαρμογή του κανόνα του Cramer στο παραπάνω σύστημα, υπολογίζεται μόνο το "2:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{I}_s \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+\frac{1}{4j} \end{vmatrix}} = \frac{2j}{1+2j}\mathbf{I}_s$$

Τελικά, λύνοντας ως προς το ζητούμενο IL:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_2}{4j} = \frac{\mathbf{I}_s}{2+4j} = 2.236e^{-33.43^o j}\ A$$

Μετατρέποντας τον παραστατικό μιγάδα του ρεύματος στο πεδίο του χρόνου προκύπτει το ζητούμενο:

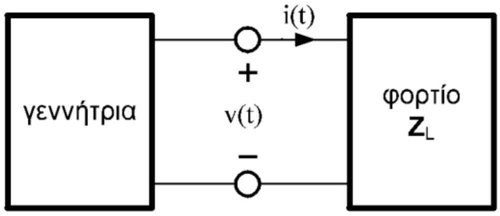
$$i_L(t) = 2.236 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot 180^o t}{\pi} - 33.43^o\right) A$$

- Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται εμφανές ότι, με την εφαρμογή των θεωρήσεων για την σύνθετη αντίσταση και αγωγιμότητα, καθώς και τους νόμους Ohm και Kirchhoff για τους παραστατικούς μιγάδες, μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε μεταβλητή (τάση ή ρεύμα) σε ένα κύκλωμα που βρίσκεται σε ΗΜΚ, με αλγεβρικές μόνο εξισώσεις. Δηλαδή δεν απαιτείται ούτε κατάστρωση διαφορικών εξισώσεων ούτε και λύση τους.

  - Ο συμβιβασμός ότι το κύκλωμα βρίσκεται σε ΗΜΚ (παραλείπεται το μεταβατικό φαινόμενο) έχει ως πλεονέκτημα ότι η ανάλυση ενός κυκλώματος απλοποιείται πολύ.

  - Η ανάλυση με τη μέθοδο των Βρόχων ακολουθεί ίδια διαδικασία όπως στην μέθοδο Κόμβων (ορισμός των ρευμάτων βρόχων, κλπ.)

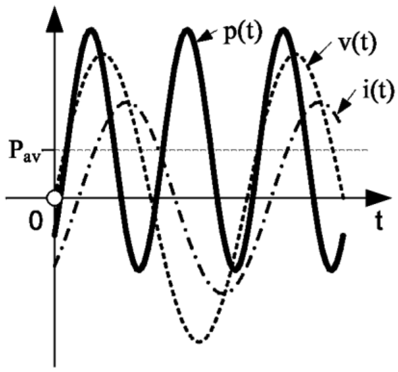
Ισχύς στην ΗΜΚ



Η στιγμιαία ισχύς που παρέχει μια πηγή ημιτονοειδούς εναλλασσόμενου ρεύματος σε ένα φορτίο μα σύνθετη αντίσταση Z_L δίνεται από τη σχέση: p (t) = v (t) · i (t) . Η τάση στα άκρα του
φορτίου περιγράφεται από τη σχέση: v (t) = V_m cos (ωt + $φ_v$) ενώ το ρεύμα είναι:
i (t) = I_m cos (ωt + φI). Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη σχέση της ισχύος προκύπτει:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v)\cos(\omega t + \phi_I) =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_I)}_{\text{σταθερό}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_I)}_{\text{συχνότητα } 2\omega}$$

Ο $1^{ος}$ όρος της παραπάνω σχέσης είναι σταθερός (ανεξάρτητος του χρόνου), ονομάζεται πραγματική ή μέση ισχύς (real or mean power) και μετράται σε Watts. Ο $2^{ος}$ όρος ταλαντώνεται ημιτονοειδώς με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας της πηγής και έχει μέσο όρο σε μια περίοδο μηδενικό. Η γραφική παράσταση της τάσης, του ρεύματος και της ισχύος δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Για τη σύνθετη αντίσταση του φορτίου ισχύει:

$$\mathbf{Z}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \Rightarrow \angle \mathbf{Z}_L = \phi_V - \phi_I = \phi_Z$$

Δηλαδή, η γωνία του παραστατικού μιγάδα της σύνθετης αντίστασης του φορτίου είναι ίση με τη διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης στα άκρα του και του ρεύματος που τον διαρρέει. Η πραγματική ή μέση ισχύς ορίζεται ως:

$$P_{av} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(\tau)d\tau = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi_Z$$

Η P_{av} είναι η ισχύς που παράγει το «έργο» με την έννοια της Φυσικής. Αν, για παράδειγμα, το φορτίο είναι ο κινητήρας ενός ανελκυστήρα, τότε η P_{av} είναι ισχύς που καταναλίσκεται για την ανύψωση της καμπίνας (συμπεριλαμβανομένων των απωλειών).

Ο παράγων $\cos \varphi_Z = PF$ ονομάζεται συντελεστής ισχύος (power factor) του φορτίου.

Μιγαδική ισχύς

Η μιγαδική ισχύς (complex power) ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{S} \triangleq \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*}$$

Η μιγαδική ισχύς είναι μια ποσότητα που δεν αντιστοιχεί σε πραγματικό μέγεθος, αλλά ο ορισμός της διευκολύνει πολύ την ανάλυση ισχύος στην ΗΜΚ. Το μέτρο της μετράται σε VA (Volt-Ampere). Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραστατικών μιγάδων της τάσης και του ρεύματος προκύπτει:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}V_m I_m e^{j(\phi_v - \phi_I)} = \underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_I)}_{P_{av}} + j\underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_I)}_{Q}$$

Ο 1ος όρος είναι η πραγματική ισχύς, για την οποία ισχύει:

$$P_{av} = \mathrm{Re}[\mathbf{S}] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*|\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\mathbf{Y}_L^*|\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}V_m^2\mathbf{Y}_L^*|\right] = \frac{1}{2}V_m^2\,\mathrm{Re}[\mathbf{Y}_L]$$

όπου Re[Y_L] είναι το ωμικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας του φορτίου. Με αντίστοιχη προσέγγιση, ισχύει:

$$P_{av} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{I}\mathbf{Z}_L\mathbf{I}^*\Big|\right] = \frac{1}{2}I_m^2\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{Z}_L\right]$$

Ο 2^{ος} όρος της μιγαδικής ισχύος:

$$Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_I) = \frac{1}{2}V_m I_m \sin\phi_Z$$

Ονομάζεται άεργη (reactive) ισχύς και μετράται σε VAr . Έτσι, η μιγαδική ισχύς μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{S} = P_{av} + jQ}$$

Σε ένα αμιγώς ωμικό φορτίο R ισχύει:

$$P_{av} = \frac{1}{2}V_m I_m = \frac{1}{2}I_m^2 R$$

Αν οριστούν τα μεγέθη V_{eff} (ενεργός τιμή της τάσης) και I_{eff} (ενεργός τιμή του ρεύματος) ως εξής:

$$V_{eff} \triangleq \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{και} \qquad I_{eff} \triangleq \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

τότε η πραγματική ισχύς γίνεται:

$$P_{av} = V_{eff} \cdot I_{eff} = I_{eff}^2 R$$

Η παραπάνω σχέση παραπέμπει την ισχύ για συνεχείς τάσεις και ρεύματα ($P = V^2 R = I^2R$). Δηλαδή, η ενεργός τιμή της ημιτονοειδούς τάσης (ή του ημιτονοειδούς ρεύματος) ενός ωμικού αντιστάτη ισοδυναμούν με την συνεχή τάση (ή ρεύμα) που παράγει την ίδια ισχύ στον αντιστάτη.

Οι ενεργές τιμές (effective) ονομάζονται και μέσες τετραγωνικές (root mean square) τιμές (($V_{eff} \equiv V_{rms}$ και $I_{eff} \equiv I_{rms}$)

Για το ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα του δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας ισχύει:

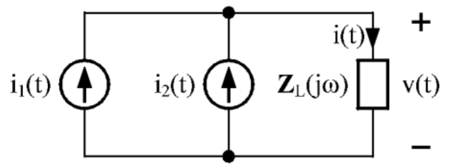
$$V_m = \sqrt{2} \cdot V_{eff} = 220V \cdot \sqrt{2} \approx 311\,V$$

Δηλαδή, η ενεργός τιμή είναι 220 V , αλλά το πλάτος της τάσης (μέγιστη τιμή) έχει τιμή 311V .

Η έννοια της ενεργού ή μέσης τετραγωνικής τιμής υπάρχει γενικά για περιοδικές κυματομορφές μη-ημιτονοειδούς μορφής και ορίζεται ως:

$V_{eff} \triangleq V_{rms} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(\tau)d\tau}$
$I_{eff} \triangleq I_{rms} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(\tau)d\tau}$

Προσθετική ιδιότητα της ισχύος



Αν ένα φορτίο τροφοδοτείται ταυτόχρονα από δύο πηγές με διαφορετικές συχνότητες, όπως δείχνεται στο παραπάνω σχήμα, τότε η ισχύς στο φορτίο υπολογίζεται με τις σχέσεις:

$$i(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t + \phi_{I1}) + I_{m2}\cos(\omega_2 t + \phi_{I2})$$

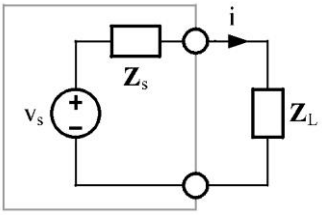
$$v(t) = \underbrace{I_{m1}|Z_L(j\omega_1)|}_{V_{m1}}\cos(\omega_1 t + \phi_{I1} + \phi_{Z1}) + \underbrace{I_{m2}|Z_L(j\omega_2)|}_{V_{m2}}\cos(\omega_2 t + \phi_{I2} + \phi_{Z2})$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)\cdot i(t) = \\ &= \frac{1}{2}V_{m1}I_{m1}\cos\phi_{Z1} + \frac{1}{2}V_{m2}I_{m2}\cos\phi_{Z2} + \\ &+ f\left(2\omega_1, 2\omega_2, \underbrace{\omega_1+\omega_2, \omega_1-\omega_2}_{\text{μη-γραμμικοτητα}}\right) \end{aligned}$$

- Η στιγμιαία ισχύς δεν είναι το άθροισμα της ισχύος κάθε πηγής (ω_1 και ω_2) όταν κάθε μία επιδρά μόνη της στο φορτίο.
- Η μέση (πραγματική) ισχύς είναι το άθροισμα της μέσης ισχύος κάθε πηγής όταν κάθε μία επιδρά μόνη της στο φορτίο.

<u>Μέγιστη μεταφορά ισχύος- Προσαρμογή</u>

Έστω ότι μια μη-ιδανική (πραγματική) πηγή τάσης με σύνθετη εσωτερική αντίσταση $Z_s = R_s + jX_s$ τροφοδοτεί ένα φορτίο με σύνθετη αντίσταση ZL = $R_L + jX_L$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



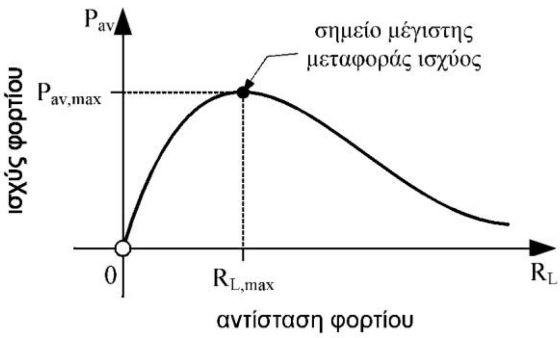
Η μέση ισχύς που αναπτύσσεται στο φορτίο υπολογίζεται ως:

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_m^2 \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_L] = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{V}_s|^2}{|\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_s|^2} \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_L]$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σύνθετων αντιστάσεων προκύπτει:

$$P_{av} = \frac{1}{2} |\mathbf{V}_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2 + (X_s + X_L)^2}$$

Η παραπάνω σχέση, στις δύο ακραίες τιμές του φορτίου, ZL = 0 και ZL → ∞ δίνει ισχύ $P_{av} = 0$. Επομένως, σε ενδιάμεσες τιμές της ZL η ισχύς παίρνει μια μέγιστη τιμή, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ένα πρώτο βήμα για τη μεγιστοποίηση της τιμής της ισχύος είναι η ελαχιστοποίηση του παρονομαστή στην παραπάνω σχέση. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο όρος $(X_s + XL)^2$ προκύπτει για $X_L = -X_s$. Με βάση αυτό η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P_{av} = \frac{1}{2} |\mathbf{V}_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2}$$

Επομένως, συνολικά για τη σύνθετη αντίσταση του φορτίου πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_s^*}$$

➢ Δηλαδή, η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς από την πηγή στο φορτίο επιτυγχάνεται όταν η σύνθετη αντίσταση του φορτίου έχει τιμή συζυγή της σύνθετης αντίστασης της πηγής. Αυτό ονομάζεται και θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (maximum power transfer, MPT).

➢ Στην περίπτωση που ισχύει η ανωτέρω σχέση, έχουμε ***προσαρμογή*** (matching) μεταξύ του (προσαρμοσμένου - matched) φορτίου και της πηγής.

➢ Στο σημείο μέγιστης ισχύος ισχύει:

$$P_{av_{\max}} = \frac{|\mathbf{V}_s|^2}{8R_L} \qquad \text{και} \qquad P_s = \frac{|\mathbf{V}_s|^2}{4R_s}$$

Δηλαδή, στο σημείο μέγιστης ισχύος, από την ισχύ που παράγει η πηγή, η μισή ισχύς καταναλώνεται στο φορτίο και η άλλη μισή στην εσωτερική αντίσταση της πηγής, άρα η συνολική απόδοση είναι 50%.

Για τον παραπάνω λόγο, η αρχή της μέγιστης μεταφοράς ισχύος δεν εφαρμόζεται στα συστήματα ισχύος.

Ειδικές περιπτώσεις προσαρμογής

1) Καθαρά Ωμικό φορτίο ($X_L = 0$)

$$R_L = |Z_{TH}| = \sqrt{R_{TH}^2 + X_{TH}^2}$$

$$P_{\max} = P\{R_L = |Z_{TH}|\} = \frac{|V_{TH}|^2}{4\{R_{TH} + |Z_{TH}|\}}$$

2) Μεταβλητό Ωμικό φορτίο (X_L= σταθερή)

$$R_L = |Z_{TH} + jX_L| = \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} \pm X_L)^2}$$

- Το πρόσημο ***(+) αντιστοιχεί σε επαγωγική φανταστική συνιστώσα*** του φορτίου & το πρόσημο ***(-) αντιστοιχεί σε χωρητική φανταστική συνιστώσα*** του φορτίου.

$$P_{\max} = P\left\{R_L = \left|Z_{TH} + jX_L\right|\right\} = \frac{\left|V_{TH}\right|^2}{4\left\{R_{TH} + \left|Z_{TH}\, jX_L\right|\right\}}$$

3) Μεταβλητό Ωμικό φορτίο & Μεταβλητή Αντίδραση

Στην περίπτωση αυτή, δεν επιτυγχάνεται πλήρης προσαρμογή και η ισχύς που μεταφέρεται στο φορτίο είναι πάντοτε μικρότερη του 50 %.

Για την επίτευξη της καλύτερης δυνατής προσαρμογής ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

a) Επιλέγουμε τη X_L που έχει την πλησιέστερη τιμή στη {- Z_{TH} }.

b) Εφόσον μόνο η R_L παραμένει μεταβλητή, η βέλτιστη τιμή της προσδιορίζεται από τη σχέση

$$R_L^{OPTIMUM} = \left|Z_{TH} + jX_L\right| = \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} \pm X_L)^2}\ .$$

c) Από τις δυνατές τιμές, επιλέγεται αυτή η οποία προσεγγίζει την $R_L^{OPTIMUM}$.