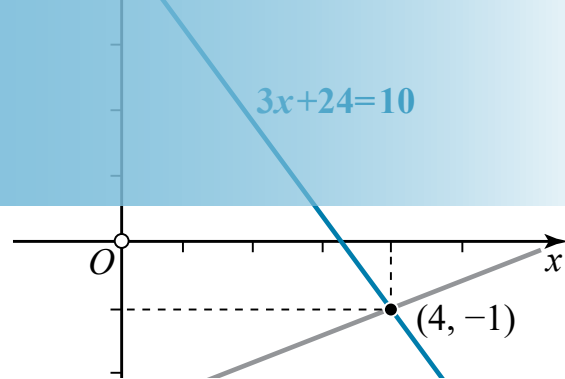


Στοιχεία Άλγεβρας



Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά σε βασικές γνώσεις άλγεβρας, όπως δυνάμεις, ταυτότητες, εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού και γραμμικά συστήματα. Οι περισσότερες έννοιες είναι ήδη γνωστές από το σχολείο, οπότε γίνεται μια επανάληψη αυτών, δίνοντας έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

1.1 Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε τα σύνολα των αριθμών, με τους αντίστοιχους συμβολισμούς τους:

- 1) Το σύνολο των **φυσικών αριθμών**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- 2) Το σύνολο των **ακέραιων αριθμών**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- 3) Το σύνολο των **ρητών αριθμών**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \mid \mu, \nu \text{ ακέραιοι με } \nu \neq 0 \text{ και } \text{ΜΚΔ}(\mu, \nu) = 1 \right\}$$

Δηλαδή, **ρητός** λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος.

- 4) Το σύνολο των **άρρητων αριθμών** $\mathbb{Q}'$ που περιλαμβάνει τους αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος, όπως για παράδειγμα:

$$\pi \simeq 3,14 \quad e \simeq 2,71 \quad \sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ κ.ά.}$$

- 5) Το σύνολο των **πραγματικών** $\mathbb{R}$ αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους. Προφανώς ισχύει: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

– Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η δύναμη με βάση έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a . Δηλαδή:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

$$\text{Άρα: } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9, \quad (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Παρατήρηση

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικός αριθμός, ενώ όταν η βάση είναι αρνητικός και ο εκθέτης περιττός, τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός.

Ισχύει: $a^0 := 1, a \neq 1$ ενώ 0^0 δεν ορίζεται.

Επίσης ορίζουμε $a^{-\nu} := \frac{1}{a^{\nu}}$

Ομοίως ορίζουμε δυνάμεις πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη:

$a^{\frac{1}{\nu}} := \sqrt[\nu]{a}$ με εξαίρεση την περίπτωση $a < 0$ και ν άρτιος

Επομένως η $\sqrt[\nu]{a}$ **ν -οστή ρίζα του a** είναι ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε: $x^{\nu} = a$.

Για παράδειγμα: $\sqrt[3]{4} = \sqrt{4} = 2$, ενώ $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται, ενώ $\sqrt[3]{27} = 3$ και $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Έτσι, μπορεί κάποιος να ορίσει δυνάμεις με ρητό εκθέτη: $a^{\frac{\mu}{\nu}} := \left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$

Για παράδειγμα:

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \left((-27)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (-3)^2 = 9 = 3^2 = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 27^{\frac{2}{3}}$$

Ιδιότητες δυνάμεων

$$\begin{array}{lll} 1) a^{\kappa} \cdot a^{\lambda} = a^{\kappa+\lambda} & 2) \frac{a^{\kappa}}{a^{\lambda}} = a^{\kappa-\lambda} & 3) (a \cdot b)^{\kappa} = a^{\kappa} \cdot b^{\kappa} \\ 4) \left(\frac{a}{b}\right)^{\kappa} = \frac{a^{\kappa}}{b^{\kappa}} & 5) (a^{\kappa})^{\lambda} = a^{\kappa \cdot \lambda} & 6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-\kappa} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\kappa} \end{array}$$

για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς $\kappa, \lambda \neq 0$.



Παράδειγμα 1.1

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-5} \quad x, y \neq 0 \quad \beta) B = \frac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \frac{30^4}{(-15)^4} - \frac{8^{-10}}{12^{-10}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \frac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-5} = \frac{(x^{-4})^3 \cdot (y^5)^3 \cdot x^3}{x^{-6} \cdot x^2 \cdot y^{10}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^{-12} \cdot y^{15} \cdot x^3}{x^{-6+2} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-12+3} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \\ &= \frac{x^{-9} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-9}}{x^{-4}} \cdot \frac{y^{15}}{y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-9-(-4)} \cdot y^{15-10} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{1}{x^5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{y^5}{x^5} \cdot \frac{x^5}{y^5} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) B &= \frac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \frac{30^4}{(-15)^4} - \frac{8^{-10}}{12^{-10}} = \left(\frac{3}{-2}\right)^{10} - \left(\frac{30}{-15}\right)^4 - \left(\frac{8}{12}\right)^{-10} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-10} = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{3^4}{2^4} = -\frac{81}{16} \end{aligned}$$

1.1.2 Πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων

Είναι γνωστό, ότι η επίλυση πολλών προβλημάτων γίνεται με χρήση μεταβλητών και εκφράσεων που περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές. Οι μαθηματικές αυτές εκφράσεις λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, ονομάζονται **μονώνυμα**. Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής του μονωνύμου**, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος του μονωνύμου**.

Για παράδειγμα: στο μονώνυμο $-5x^2yz^3$ έχουμε συντελεστή -5 και κύριο μέρος x^2yz^3 .

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**.

Για παράδειγμα: τα μονώνυμα $-4a^2x$, $\frac{5}{3}a^2x$ και a^2x είναι όμοια.

Το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια ονομάζεται **πολυώνυμο**. Πολυώνυμα είναι για παράδειγμα τα:

$$3a^3 - 4b^2 + 5ab, \quad 2x^3 - 6xy^4 + x^2y^2 \text{ και } x^4 - 2x^3 - 8x - 9$$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.

- Πράξεις με πολυώνυμα

1) Πρόσθεση - Αφαίρεση πολυωνύμων:

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα ή όπως λέμε όμοιοι όροι, μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους, όπου προστίθενται οι συντελεστές και παραμένει ίδιο το κύριο μέρος. Η διαδικασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**. Έτσι όταν θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα κάνουμε αναγωγή στους όμοιους όρους.

Για παράδειγμα, το άθροισμα και η διαφορά των πολυωνύμων:

$$5x^2y - 4x^3 + 6y \text{ και } x^2y - x^3 - 3y \text{ υπολογίζονται ως εξής:}$$

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) + (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y + x^2y - x^3 - 3y = 6x^2y - 5x^3 + 3y$$

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) - (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y - x^2y + x^3 + 3y = 4x^2y - 3x^3 + 9y$$

2) Πολλαπλασιασμός μονωνύμου επί πολυώνυμο

Πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο επί μονώνυμο πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές μεταξύ τους και τις μεταβλητές με τις δυνάμεις μεταξύ τους.

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

Για παράδειγμα:

$$\alpha) 2x^2 (x^3 - 4xy) = 2x^5 - 8x^3y$$

$$\beta) 3xy^2 (4xy^2 - x - 5y + 1) = 12x^2y^4 - 3x^2y^2 - 15xy^3 + 3xy^2$$

3) Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου επί πολυώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την διπλή επιμεριστική ιδιότητα:

$$(a + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = a \cdot \gamma + a \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

Για παράδειγμα:

$$(6x^2 + 3xy + y^2) \cdot (3x - y) = 18x^3 - 6x^2y + 9x^2y - 3xy^2 + 3xy^2 - y^3 = 18x^3 + 3x^2y - y^3$$

1.1.3 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της, λέγεται **ταυτότητα**. Παρακάτω βλέπουμε κάποιες απ' τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ταυτότητες.

- 1) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- 2) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- 3) $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- 4) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- 5) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- 6) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- 7) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$



Παράδειγμα 1.2

Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(x - 3y)^2 - (2y + 3x)(2y - 3x) - (3x - y)^2$

β) $(3x - 2)^2(x + 3) - (x - 3)^3$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) (x - 3y)^2 - (2y + 3x)(2y - 3x) - (3x - y)^2 &= \\ &= x^2 - 6xy + (3y)^2 - [(2y)^2 - (3x)^2] - [(3x)^2 - 6xy + y^2] = \\ &= x^2 - 6xy + 9y^2 - (4y^2 - 9x^2) - (9x^2 - 6xy + y^2) = \\ &= x^2 - 6xy + 9y^2 - 4y^2 + 9x^2 - 9x^2 + 6xy - y^2 = \\ &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (3x - 2)^2(x + 3) - (x - 3)^3 &= \\ &= [(3x)^2 - 12x + 4](x + 3) - (x^2 - 6x + 9) = \\ &= (9x^2 - 12x + 4)(x + 3) - x^2 + 6x - 9 = 9x^3 + 27x^2 - 12x^2 - 36x + 4x + 12 - x^2 + 6x - 9 = \\ &= 9x^3 + 14x^2 - 26x + 3 \end{aligned}$$

1.2 Εξισώσεις

Ένα σημαντικό εργαλείο των μαθηματικών, είναι οι εξισώσεις. Πολλά προβλήματα της Ναυτιλίας, αλλά και προβλήματα πολλών επιστημών και ακόμα προβλήματα της καθημερινής ζωής βρίσκουν λύση επιλύοντας εξισώσεις.

Μια ισότητα δύο παραστάσεων που περιέχει μια μεταβλητή ονομάζεται **εξίσωση** με έναν άγνωστο. Η μεταβλητή ονομάζεται **άγνωστος της εξίσωσης**. Για παράδειγμα:

$$3(x - 1) = 4x - 5 \text{ εξίσωση με άγνωστο το } x$$

Η παράσταση $3(x - 1)$ λέγεται **1ο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $4x - 5$ λέγεται **2ο μέλος** της εξίσωσης. Κάθε τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την ισότητα, ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης. Για παράδειγμα αν βάλουμε στην παραπάνω εξίσωση όπου x τον αριθμό 2:

$$3(2 - 1) = 4 \cdot 2 - 5 \text{ ή } 3 = 3 \text{ (αληθεύει)}$$

Επομένως ο αριθμός 3 είναι **λύση της εξίσωσης**.

Όταν τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι πολυώνυμα, ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου ονομάζεται **βαθμός** της εξίσωσης.

1.2.1 Εξίσωση 1^{ου} βαθμού

Όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι το 1, λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 1^{ου} βαθμού**.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις $4x - 3 = 3(2 - x) + 6$ και $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-5}{2}$ είναι εξισώσεις 1^{ου} βαθμού.

Κάθε εξίσωση 1^{ου} βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax = -\beta$$

Για την επίλυση της παραπάνω διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$

2) Αν $a = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = -\beta$, οπότε:

α) Αν $\beta \neq 0$ τότε δεν έχει λύση, δηλαδή είναι **αδύνατη**

β) Αν $\beta = 0$ γίνεται $0 \cdot x = 0$, οπότε αληθεύει για κάθε αριθμό, δηλαδή είναι **αόριστη** ή **ταυτότητα**.



Παράδειγμα 1.3

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x-5}{3} - 2x = 2 - \frac{x+6}{4}$

Λύση

$$\frac{2x-5}{3} - 2x = 2 - \frac{x+6}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{2x-5}{3} - 12 \cdot 2 \cdot x = 12 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{x+6}{4} \Leftrightarrow \text{απαλοιφή παρονομαστών}$$

$$4(2x-5) - 24 \cdot x = 24 - 3 \cdot (x+6) \Leftrightarrow$$

$$8x - 20 - 24x = 24 - 3x - 18 \Leftrightarrow$$

$$8x - 24x + 3x = 24 - 18 + 20 \Leftrightarrow$$

$$-13x = 26 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-13x}{-13} = \frac{26}{-13} \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \text{ (Μοναδική λύση)}$$

επιμεριστική ιδιότητα

χωρισμός γνωστών από αγνώστους

αναγωγή ομοίων όρων

διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου

Παράδειγμα 1.4

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{5-2x}{4}$

Λύση

$$\frac{3}{2} - \frac{2x+1}{4} = \frac{5-2x}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2x+1}{4} = 4 \cdot \frac{5-2x}{4} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 3 - (2x+1) = 5-2x \Leftrightarrow 6-2x-1 = 5-2x \Leftrightarrow -2x+2x = 5-6+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \text{ (Αόριστη)}$$

Παράδειγμα 1.5

Να λυθεί η εξίσωση: $3(1-2x) - 4(2-x) = x - 3(x+2)$

Λύση

$$3(1-2x) - 4(2-x) = x - 3(x+2) \Leftrightarrow 3 - 6x - 8 + 4x = x - 3x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x + 4x - x + 3x = -6 - 3 + 8 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -1 \text{ (Αδύνατη)}$$



Πρόβλημα 1.1

Ένα πλοίο ταξίδεψε από ένα λιμάνι A σε ένα λιμάνι B με σταθερή ταχύτητα 21 κόμβων (knots). Άφου έμεινε 3 h στο λιμάνι B , επέστρεψε στο λιμάνι A με σταθερή ταχύτητα 24 knots. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 18 h πόση είναι η απόσταση των δύο λιμανιών σε ναυτικά μίλια (ν.μ.);

Λύση

Έστω ότι η ζητούμενη απόσταση είναι x ν.μ.

Το πλοίο ταξίδεψε από το λιμάνι A στο λιμάνι B με ταχύτητα 21 knots. Θυμίζουμε ότι 1 knot = 1 ν.μ./h. Άρα:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 21 = \frac{x}{t} \Leftrightarrow t = \frac{x}{21} \text{ h}$$

Δηλαδή ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι A στο λιμάνι B ήταν $\frac{x}{21}$ h. Ομοίως ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι B στο λιμάνι A ήταν $\frac{x}{24}$ h. Ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24}$. Ο χρόνος αυτός δίνεται 18 h. Επομένως:

$$\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24} = 18 \Leftrightarrow \text{(ΕΚΠ=168)}$$

$$168 \cdot \frac{x}{21} + 168 \cdot 3 + 168 \cdot \frac{x}{24} = 168 \cdot 18 \Leftrightarrow 8x + 504 + 7x = 3024 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x + 7x = 3024 - 504 \Leftrightarrow 15x = 2520 \Leftrightarrow x = \frac{2520}{15} = 168$$

Άρα η απόσταση των δύο λιμανιών είναι 168 ν.μ.

1.2.2 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο, στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2, λέγεται **εξίσωση 2^{ου} βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση**.

Για παράδειγμα $x^2 = 16$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - x - 12 = 0$, $(x - 2) \cdot x = 3$ είναι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \text{ με } a \neq 0$$

Στα παραπάνω παραδείγματα $x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$ $a = 1, \beta = 0, \gamma = -16$

$$x^2 + 5x = 0 \quad a = 1, \beta = 5, \gamma = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad a = 1, \beta = -1, \gamma = -12$$

$$(x - 2) \cdot x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad a = 1, \beta = -2, \gamma = -3$$

Για την επίλυση της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Γενική μορφή: Επίλυση με τύπο

Θα επιλύσουμε την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου»:

$$a x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a} x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2a} x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2a} x + \left(\frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{\gamma}{a} = \left(\frac{\beta}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4a^2} - \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a^2}$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ έχουμε:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (1)$$

Οπότε για να επιλύσουμε ως προς x , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$: τότε ορίζεται η $\sqrt{\Delta}$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή πιο συνοπτικά:}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (\text{δύο άνισες ρίζες})$$

β) Αν $\Delta = 0$: (1) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ (μία ρίζα διπλή)

γ) Αν $\Delta < 0$: Η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, εφόσον $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geq 0$, ενώ $\frac{\Delta}{4\alpha^2} < 0$

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Ο τρόπος επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης συνοψίζεται στον πίνακα 1.1:

Πίνακας 1.1

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$
$\Delta > 0$	Έχει 2 ρίζες άνισες: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει 1 ρίζα (διπλή): $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$



Παράδειγμα 1.6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

β) $36x^2 - 12x + 1 = 0$

γ) $2x^2 + 4x + 3 = 0$

δ) $(3x - 1)^2 - (4 - x)^2 = x^2 + 9$

Λύση

α) Είναι $\alpha = 5$, $\beta = -4$ και $\gamma = -1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 36 > 0$$

Οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) + \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{4 + 6}{10} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) - \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{4 - 6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

β) Είναι $a = 36, \beta = -12$ και $\gamma = 1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 144 - 144 = 0$$

Οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 36} = \frac{1}{6}$

γ) Είναι $a = 2, \beta = 4$ και $\gamma = 3$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Επομένως, η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

$$\delta) (3x - 1)^2 - (4 - x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - (16 - 8x + x^2) = x^2 + 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 16 + 8x - x^2 - x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 24 = 0$$

Είναι $a = 7, \beta = 2$ και $\gamma = -24$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 7(-24) = 676 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 + 26}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7},$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 - 26}{14} = \frac{-28}{14} = -2$$

2) Ελλειπείς μορφές: $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$

Η επίλυση στις περιπτώσεις αυτές γίνεται με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$x \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = 0$$

α) Μορφή: $ax^2 + \beta x = 0$ ($\gamma = 0$)

Για παράδειγμα,

$$2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow (\text{βγάζω κοινό παράγοντα το } x)$$

$$x \cdot (2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{5}{2}$$

β) Μορφή: $ax^2 + \gamma = 0$ ($\beta = 0$)

Για παράδειγμα,

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3) \cdot (2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (\text{διαφορά τετραγώνων})$$

$$2x - 3 = 0 \text{ ή } 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -\frac{3}{2}$$



Πρόβλημα 1.2

Η πισίνα ενός κρουαζιερόπλοιου σχήματος ορθογωνίου έχει εμβαδόν 135 m^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις της πισίνας, αν είναι γνωστό ότι το μήκος της είναι μεγαλύτερο του πλάτους της κατά 6 m (σχ. 1.1).

Λύση

Έστω ότι το πλάτος της πισίνας είναι x . Τότε το μήκος της θα είναι $x + 6$. Το εμβαδόν δίνεται 135 m^2 , επομένως ισχύει:

$$(x + 6) \cdot x = 135 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 135 = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής:

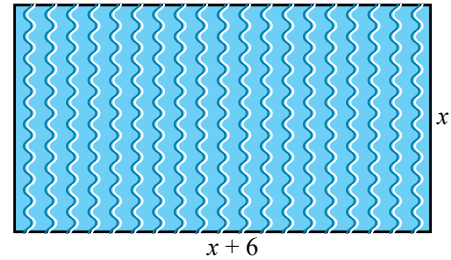
$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } a = 1, \beta = 6 \text{ και } \gamma = -135.$$

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-135) = 576 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 24}{2} = 9 \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = -15 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα το πλάτος της πισίνας είναι 9 m και το μήκος είναι $9 + 6 = 15 \text{ m}$

**Σχ. 1.1****1.3 Γραμμικά συστήματα**

Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, λέγεται **γραμμική εξίσωση** και παριστάνει ευθεία γραμμή (σχ. 1.2).

Ειδικές περιπτώσεις

1) Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = c$ ($c = \frac{\gamma}{\beta}$) και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον x' .

Για παράδειγμα η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον x' που τέμνει τον y' στο σημείο (0,2) (σχ. 1.3).

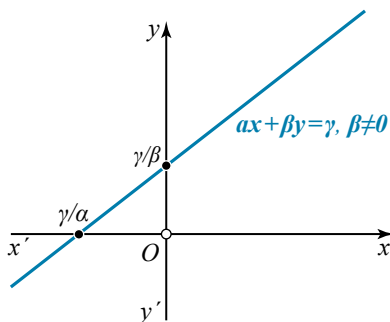
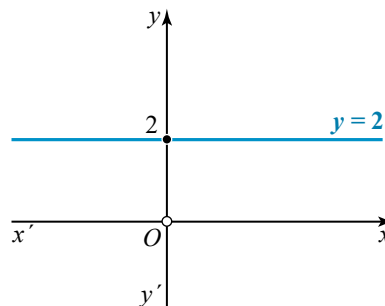
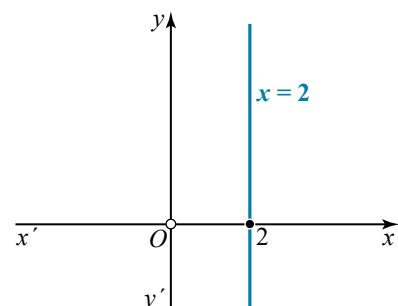
2) Αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $x = c$ ($c = \frac{\gamma}{a}$) και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον y' .

Για παράδειγμα η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον y' που τέμνει τον x' στο σημείο (2,0) (σχ. 1.4).

– Γραμμικό σύστημα 2×2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους** ή πιο σύντομα ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** .

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

**Σχ. 1.2****Σχ. 1.3****Σχ. 1.4**

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Για παράδειγμα η λύση του συστήματος: $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ είναι το ζεύγος $(x, y)=(4, -1)$ διότι:

- 1) Στην $x-3y=7$ για $x=4$ και $y=-1$ έχουμε $4-3 \cdot (-1)=7$ (αληθεύει) και
- 2) στην $3x+2y=10$ για $x=4$ και $y=-1$ έχουμε $3 \cdot 4+2(-1)=10$ (αληθεύει)

1) Γραφική αναπαράσταση

Οι 2 εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν 2 ευθείες. Η λύση $(4, -1)$ του συστήματος, επαληθεύει συγχρόνως και τις 2 εξισώσεις, επομένως βρίσκεται πάνω και στις 2 ευθείες. Άρα το $(4, -1)$ είναι **το σημείο τομής των 2 ευθειών** (σχ. 1.5). (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. κεφ. 2).

2) Πλήθος λύσεων γραμμικού συστήματος 2×2 (διερεύνηση)

Οι 2 εξισώσεις παριστάνουν 2 ευθείες, οι οποίες μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Ειδικότερα:

α) Όταν οι ευθείες του συστήματος τέμνονται, το σύστημα έχει **μοναδική λύση**, η οποία είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των 2 ευθειών.

β) Όταν οι ευθείες είναι παράλληλες, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

γ) Όταν οι ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι **αόριστο**.

Για παράδειγμα το $(\Sigma): \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ είναι αδύνατο, διότι αν πολλαπλασιάσουμε την 1^η

εξίσωση με το 2, το (Σ) γίνεται ισοδύναμο: $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$

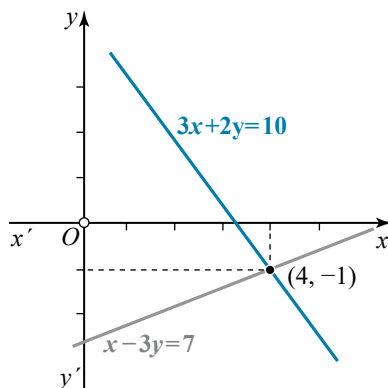
Οι δύο ευθείες του συστήματος είναι παράλληλες (σχ. 1.6).

Το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$

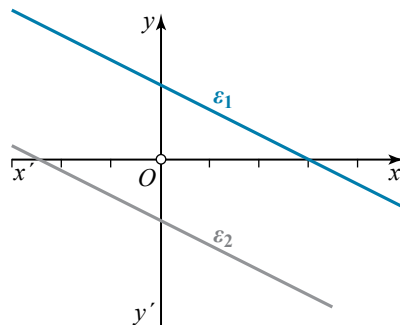
Και επομένως έχει άπειρες λύσεις (αόριστο), αφού οι 2 ευθείες ταυτίζονται (σχ. 1.7).

1.4 Αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων

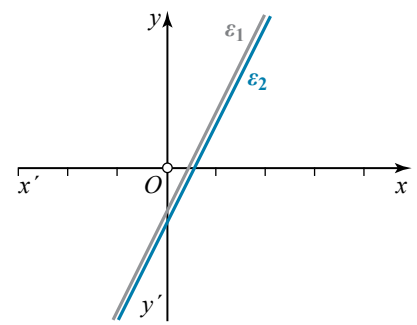
Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων ονομάζονται **ισοδύναμα**. Δύο ισοδύναμα συστήματα σχετίζονται με την εφαρμογή των παρακάτω **γραμμοπράξεων**,



Σχ. 1.5



Σχ. 1.6



Σχ. 1.7

τις οποίες χρησιμοποιούμε για να δώσουμε απλούστερη μορφή στο σύστημα.

- 1) Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων.
- 2) Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.
- 3) Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό στα αντίστοιχα μέλη μίας άλλης εξίσωσης.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο από τις μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2×2 , την μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1) Μέθοδος της αντικατάστασης

Την προτιμάμε στα συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

α) **Βήμα 1.** Λύνουμε ως προς έναν άγνωστο τη μία απ' τις δύο εξισώσεις του συστήματος (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) **Βήμα 2.** Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει μια εξίσωση ενός άγνωστου, που μπορούμε να λύσουμε.

γ) **Βήμα 3.** Τη λύση που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση του βήματος 1, οπότε βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.



Παράδειγμα 1.7

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3(3y+7)+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+21+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+2y=10-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 11y=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3(-1)+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (x, y) = (4, -1)$$

2) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

α) **Βήμα 1.** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της μίας ή και των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές ενός εκ των αγνώστων να γίνουν αντίθετοι αριθμοί, (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) **Βήμα 2.** Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε.

γ) **Βήμα 3.** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία απ' τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.



Παράδειγμα 1.8

Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{x+1}{2}=8-\frac{y-1}{2} \\ \frac{y+1}{2}=9-\frac{x-1}{3} \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-3) \\ \cdot 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y=-21 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$$

$$\underline{-3x+3x+9y+2y=-21+10} \Leftrightarrow 11y=-11 \Leftrightarrow y=-1$$

$$x-3y=7 \Leftrightarrow x-3(-1)=7 \Leftrightarrow x+3=7 \Leftrightarrow x=4$$

$$\text{Άρα: } (x, y) = (4, -1)$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{x+1}{2}=8-\frac{y-1}{2} \\ \frac{y+1}{2}=9-\frac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{x+1}{2}=2 \cdot 8-2 \cdot \frac{y-1}{2} \\ 6 \cdot \frac{y+1}{2}=6 \cdot 9-6 \cdot \frac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=16-(y-1) \\ 3(y+1)=54-2(x-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=16-y+1 \\ 3y+3=54-2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=54+2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-32 \\ 2x+3y=53 \end{cases}$$

$$\underline{-2x-2y=-32} \quad -2y+3y=-32+53 \Leftrightarrow y=21$$

$$x+y=16 \Leftrightarrow x+21=16 \Leftrightarrow x=-5 \quad \text{Άρα: } (x, y) = (-5, 21)$$

Παρατηρήσεις

1) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $0x + 0y = a$ όπου $a \neq 0$, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.

2) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $0x + 0y = 0$, τότε το σύστημα είναι **αόριστο**.

**Παράδειγμα 1.9**

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ 3y-5x=4x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \begin{matrix} (-3) \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x-3y=-3 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \quad \text{Άρα το σύστημα είναι αδύνατο}$$

$$\underline{9x-3y=-3} \quad 0x+0y=-5$$

Παράδειγμα 1.10

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases}$

Λύση

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3-6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \\ \hline \end{matrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \quad \text{Άρα το σύστημα είναι αόριστο.} \\ &\quad 0x+0y=0 \\ x-3y=1 &\Rightarrow x=3y+1 \\ \text{Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: } (x, y) &= (3y+1, y) \end{aligned}$$

1.5 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Στις καθημερινές μας δραστηριότητες, συχνά χρειάζεται να κάνουμε μετρήσεις διαφόρων μεγεθών με όργανα. Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί με απόλυτη ακρίβεια. Όταν κάνουμε μια μέτρηση με ένα όργανο, η τιμή του μεγέθους που βρίσκουμε, δεν είναι η *πραγματική τιμή*, αλλά είναι μια *προσεγγιστική τιμή*. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό, όταν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η απόκλιση του αποτελέσματος της μέτρησης από την πραγματική τιμή καλείται **σφάλμα**. Τα σφάλματα μπορεί να οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης, λάθη του παρατηρητή ή σε ασταθείς εξωτερικούς παράγοντες.

Έστω $\hat{x}$ η προσεγγιστική τιμή και x η πραγματική τιμή ενός μεγέθους. Ονομάζουμε **απόλυτο σφάλμα**, την απόλυτη τιμή της διαφοράς αυτών των αριθμών. Δηλαδή το απόλυτο σφάλμα Δx είναι:

$$\Delta x = |\hat{x} - x|$$

Μερικές φορές η τιμή του απόλυτου σφάλματος δεν μας δίνει σαφή εικόνα ως προς το αν το σφάλμα είναι σημαντικό. Δηλαδή είναι δυνατόν ή ίδια ακριβώς τιμή απόλυτου σφάλματος, σε μια μέτρηση να δείχνει μικρό σφάλμα, ενώ σε μια άλλη μεγάλο. Για παράδειγμα, ένας σπουδαστής μέτρησε το μήκος του θρανίου του. Το πραγματικό μήκος ήταν 80 cm και η μέτρηση του σπουδαστή ήταν 75 cm. Δηλαδή απόλυτο σφάλμα: $80 - 75 = 5$ cm. Ένας άλλος σπουδαστής μέτρησε την περίμετρο του πίνακα. Το πραγματικό μήκος ήταν 6,4 m ή 640 cm και η μέτρηση 645 cm. Δηλαδή, το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές όμως ότι το σφάλμα 5 cm σε πραγματική τιμή 80 cm θεωρείται σημαντικότερο σφάλμα απ' ό,τι σε πραγματική τιμή 640 cm. Έτσι, ορίζουμε το σχετικό σφάλμα, το οποίο μας δείχνει το ποσοστό σφάλματος επί της ακριβούς τιμής. Ονομάζουμε **σχετικό σφάλμα** τον λόγο του απόλυτου σφάλματος προς το απόλυτο της πραγματικής τιμής:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}$$

Το σχετικό σφάλμα δεν έχει μονάδα μέτρησης, είναι καθαρός αριθμός. Εάν υπολογίσουμε τα σχετικά σφάλματα των μετρήσεων των δύο σπουδαστών:

1^η μέτρηση: $x = 80$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{80} = 0,0625 \text{ ή } 6,25\%$$

2^η μέτρηση: $x = 640$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{640} = 0,0078125 \text{ ή } 0,78125\%$$

Βλέπουμε πόσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό σφάλματος της μέτρησης του πρώτου σπουδαστή.



Παράδειγμα 1.11

Να βρεθεί το απόλυτο και σχετικό σφάλμα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x = 3,141592$ και $\hat{x} = 3,14$

β) $x = 1.000.000$ και $\hat{x} = 999.998$

γ) $x = 0,000026$ και $\hat{x} = 0,000021$

Λύση

α) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |3,14 - 3,141592| = 0,001592$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0,001592}{3,141592} = 0,000507 \text{ ή } 0,0507\%$$

β) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |999.998 - 1.000.000| = 2$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0,000002}{1.000.000} = 0,000002 \text{ ή } 0,0002\%$$

γ) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |0,000021 - 0,000026| = 0,000005$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0,000005}{0,000026} = 0,19230769 \text{ ή } 19,230769\%$$

– Κανόνες μετάδοσης σφαλμάτων

Εκτός από τα φυσικά μεγέθη που μετρούνται με χρήση κάποιου οργάνου, υπάρχουν και τα μεγέθη που υπολογίζονται εμμέσως, μέσω κάποιας σχέσης. Δηλαδή ο παρατηρητής μετράει 2 ή περισσότερα μεγέθη με όργανα μέτρησης και στη συνέχεια υπολογίζει την τιμή ενός άλλου μεγέθους που εξαρτάται από αυτά, με μαθηματικούς υπολογισμούς. Παρακάτω θα δούμε, πώς υπολογίζεται το σφάλμα στο μέγεθος αυτό, αν είναι γνωστά τα σφάλματα των μετρούμενων μεγεθών, ανάλογα με τη μαθηματική σχέση υπολογισμού.

1) **Αθροίσματα και διαφορές:** Αν $x = A \pm B$, τότε σφάλμα: $\Delta x = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$

2) **Γινόμενα και πηλίκα:** $x = A \cdot B$ ή $x = \frac{A}{B}$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$
 οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$

3) **Μετρούμενη ποσότητα επί σταθερό αριθμό:** $x = \lambda \cdot A$ τότε σφάλμα: $\Delta x = \lambda \cdot \Delta A$ και σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A}$

4) **Σφάλμα δύναμης μετρούμενης ποσότητας:** $x = A^n$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$
 οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$



Πρόβλημα 1.3

Σε μία δεξαμενή νερού κυβικού σχήματος, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 3 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,2 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

Λύση

3 cm = 0,03 m

Ο υπολογισμός του όγκου γίνεται από τον τύπο $V = a^3$. Άρα σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a} = 3 \cdot \frac{0,03}{1,2} = 0,075 \text{ ή } 7,5\%$$

Η πραγματική τιμή του όγκου είναι $V = (1,2 \text{ m})^3 = 1,728 \text{ m}^3$

Άρα το σφάλμα στη μέτρηση του όγκου είναι: $\Delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot V = 0,075 \cdot 1,728 = 0,1296 \text{ m}^3$ ή 129,6 lt.

Στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε ότι ένα σφάλμα μέτρησης 3 cm στο μήκος, επιφέρει σφάλμα 129,6 lt στον όγκο της δεξαμενής!

Πρόβλημα 1.4

Η ελεύθερη επιφάνεια μίας δεξαμενής έρματος πλοίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το μήκος μετρήθηκε 15,3 m, ενώ η αληθινή τιμή του είναι 15,1 m και το πλάτος 10,7 m, με αληθινή τιμή 10,3 m. Ποιο είναι το σχετικό σφάλμα στη μέτρηση του μήκους και του πλάτους και ποιο το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού;

Λύση

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση μήκους: $\frac{\Delta A}{A} = \frac{0,2}{15,1} \cong 0,0132$

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση πλάτους: $\frac{\Delta B}{B} = \frac{0,4}{10,3} \cong 0,0388$

Άρα το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού $E = A \cdot B$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} = \\ &= \sqrt{0,0132^2 + 0,0388^2} = \sqrt{0,00017424 + 0,001444} = \sqrt{0,00161824} \cong 0,040227 \text{ ή } 4,0227\% \end{aligned}$$

1.6 Συμμιγείς αριθμοί

Συμμιγής λέγεται οποιοσδήποτε αριθμός αποτελείται από δύο ή περισσότερους ακεραίους, οι οποίοι αναφέρονται στο ίδιο φυσικό μέγεθος, και των οποίων οι μονάδες μέτρησης είναι πολλαπλάσια ή υποδιαίρεσεις της ίδιας αρχικής μονάδας μέτρησης. Μερικά μεγέθη που εκφράζονται με συμμιγείς αριθμούς είναι το βάρος, ο χρόνος, το μήκος, οι γωνίες.

Για παράδειγμα:

2 κιλά 300 γραμμάρια

5 ημέρες 6 ώρες 40 λεπτά 16 δευτερόλεπτα

10 μέτρα 5 δέκατα 7 εκατοστά

1.6.1 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης χρόνου

Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την **ώρα (h)** και τις υποδιαίρεσεις της, το **λεπτό (min)** και το **δευτερόλεπτο (s)**.

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

Για μεγάλες χρονικές διάρκειες χρησιμοποιούμε την **ημέρα** και τα πολλαπλάσιά της, τον **μήνα** και το **έτος**.

$$1 \text{ ημέρα} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ μήνας} = 30 \text{ ημέρες}$$

$$1 \text{ έτος} = 12 \text{ μήνες} = 360 \text{ ημέρες}$$



Πρόβλημα 1.5

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι του Πειραιά στις 21:45:00. Αν η απόσταση Πειραιάς – Χανιά είναι 150 ν.μ. και το πλοίο ταξιδεύει με ταχύτητα 20 knots, τι ώρα θα φτάσει στα Χανιά;

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 20 = \frac{150}{t} \Leftrightarrow t = \frac{150}{20} \Leftrightarrow t = 7,5 \text{ h}$$

$$7,5 \text{ h} = 7 \text{ h} + 0,5 \text{ h} = 7 \text{ h } (0,5 \cdot 60) \text{ min} = 7 \text{ h } 30 \text{ min}$$

$$\begin{array}{r} 21 \text{ h } 45 \text{ min} \\ + 7 \text{ h } 30 \text{ min} \\ \hline 28 \text{ h } 75 \text{ min} \\ 29 \text{ h } 15 \text{ min} \end{array}$$

Επειδή $29 > 24$ το πλοίο θα φτάσει την επόμενη ημέρα. Αφαιρώ $29 - 24 = 5 \text{ h}$ (κάνω την αφαίρεση επειδή αλλάζει ημέρα). Άρα φτάνει στο λιμάνι των Χανίων: 05:15:00 την επόμενη ημέρα.

Πρόβλημα 1.6

Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου 22:50:00 από ένα σημείο Α και πλέει με ταχύτητα 15 knots για 400 ν.μ. έως ένα σημείο Β. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{400}{t} \Leftrightarrow t = \frac{400}{15} \Leftrightarrow t = 26,667 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} t = 26,667 \text{ h} &= 26 \text{ h} + 0,667 \text{ h} = 26 \text{ h } (0,667 \cdot 60) \text{ min} = 26 \text{ h } 40,02 \text{ min} = \\ &= 26 \text{ h } 40 \text{ min} + 0,02 \text{ min} = 26 \text{ h } 40 \text{ min } (0,02 \cdot 60) \text{ s} = 26 \text{ h } 40 \text{ min } 1,2 \text{ s} \\ &\text{ή } 26 \text{ h } 40 \text{ min } 1 \text{ s} \quad (\text{στρογγυλοποιήσαμε τα δευτερόλεπτα}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 22 \text{ h } 50 \text{ min } 0 \text{ s} \\ + 26 \text{ h } 40 \text{ min } 1 \text{ s} \\ \hline 48 \text{ h } 90 \text{ min } 1 \text{ s} \end{array}$$

ή

$$49 \text{ h } 30 \text{ min } 1 \text{ s}$$

Αφαιρώ $49 - 48 = 1 \text{ h}$ (αφαιρώ δύο 24ωρα). Άρα άφιξη: 12 Νοεμβρίου 1:30:01

Πρόβλημα 1.7

Ένα πλοίο ξεκίνησε από το λιμάνι Α στις 21:45:00 και έφτασε στο λιμάνι Β στις 6:10:00 το επόμενο πρωινό, πλέοντας με μέση ταχύτητα 18 knots. Πόση είναι η απόσταση των 2 λιμανιών σε ν.μ.;

Λύση

6 h + 24 h = 30 h (Προσθέτουμε 24 ώρες γιατί αλλάζει ημέρα)

$$\left. \begin{array}{r} 30 \text{ h } 10 \text{ min } 0 \text{ s} \\ -21 \text{ h } 45 \text{ min } 0 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{29 \text{ h } 70 \text{ min } 0 \text{ s}}{8 \text{ h } 25 \text{ min } 0 \text{ s}}$$

$$8 \text{ h } 25 \text{ min} = 8 \text{ h} + \frac{25}{60} \text{ h} = 8 \text{ h} + 0,417 \text{ h} = 8,417 \text{ h}$$

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 18 = \frac{x}{8,417} \Leftrightarrow x = 18 \cdot 8,417 \Leftrightarrow x = 146,646 \text{ h}$$

1.6.2 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης γωνιών

Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε **μοίρες** και στις υποδιαιρέσεις της, **πρώτα λεπτά** και **δεύτερα λεπτά**.

1 μοίρα: 1°

1 πρώτο λεπτό: 1'

1 δεύτερο λεπτό: 1''

Ισχύει: **1° = 60' = 3600''** και **1' = 60''**

**Παράδειγμα 1.12**

Να μετατραπεί η γωνία 36,14° σε συμμιγή αριθμό.

Λύση

$$\begin{aligned} 36,14^\circ &= 36^\circ + 0,14^\circ = 36^\circ (0,14 \cdot 60)' = 36^\circ 8,4' = 36^\circ 8' + 0,4' = \\ &= 36^\circ 8' (0,4 \cdot 60)'' = 36^\circ 8' 24'' \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.13

Να μετατραπεί η γωνία 16° 38' 46'' σε μοίρες.

Λύση

$$\begin{aligned} 16^\circ 38' 46'' &= 16^\circ 38' + \left(\frac{46}{60}\right)' = 16^\circ 38' + 0,767' = 16^\circ 38,767' = \\ &= 16^\circ + \left(\frac{38,767}{60}\right)^\circ = 16^\circ + 0,646^\circ = 16,646^\circ \end{aligned}$$

Ασκήσεις**1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

$$\alpha) A = 3 \cdot (7^2 - 6 \cdot 2^3)^{2022} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : [(-2)^4 - 17]^{10}$$

$$\beta) B = \frac{10^4}{(-5)^4} + \frac{28^5}{14^5} - \frac{(-24)^3}{8^3}$$

$$\gamma) \Gamma = (-2)^3 \cdot 3 - (-2)^5 : 4 + (-4)^2 : (-2) + 5$$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$1) \frac{(-3)^4 \cdot (3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 2^7}{(-5)^4 \cdot [(-5)^3]^2} \quad 2) \frac{(2^3 \cdot 2^{-2})^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^2}{(3^3)^{-3} \cdot 3^3} \quad 3) \left(\frac{x}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{-1} \cdot (x^2 \cdot y^{-1})^{-1}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) (5x - 2y)^2 + 3 \cdot (x - y)^2 - (3x + 4y)^2$$

$$\beta) 2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2 - (2\alpha + \beta) \cdot (2\alpha - \beta) - 3 \cdot (3\alpha - 2\beta)^2$$

$$\gamma) (x - 3)^3 - x(x + 2)(x - 2) - 3(2x + 3)^2$$

4. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$\alpha) (x + y)^3 = x(x - 3y)^2 + y(y - 3x)^2 \quad \beta) 2(2x - 1)^3 - (x - 2)(4x + 1)^2 = 27x$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1-x}{4} - \frac{3x-2}{3} = \frac{2x+5}{6} \quad \beta) \frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{2} = x - \frac{13}{6}$$

$$\gamma) \frac{3}{7}(x-1) = 2(x-1) - \frac{5(x+3)}{14} \quad \delta) \frac{3x-5}{2} - \frac{4x-2}{5} = \frac{3(x-2)}{10} + \frac{x-23}{2}$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 3(5 + 2x) - 2(x - 1) = 18 + 2(3 + 2x) \quad \beta) 4(x - 1) - 2(x - 2) = 3 - x - 3(1 - x)$$

$$\gamma) x - \frac{2x-7}{4} + \frac{1-x}{2} = 0 \quad \delta) \frac{x+1}{2} - \frac{2(x-3)}{5} = \frac{x+17}{10}$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 = 16 \quad \beta) 2x^2 = 10x \quad \gamma) 9y^2 - 49 = 0$$

$$\delta) x^2 + 8x = 0 \quad \epsilon) 3\omega^2 + 12 = 0$$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \beta) 5x^2 - 14x - 3 = 0 \quad \gamma) \omega^2 - 2\omega - 15 = 0$$

$$\delta) 36x^2 + 12x + 1 = 0 \quad \epsilon) y^2 - y - 2 = 0 \quad \sigma\tau) x^2 - 2x + 7 = 0$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) (3 - 2x)^2 + 20 = (5 - x)(x + 5) \quad \beta) (2x - 3)^2 - (x - 1)(x - 4) = 9x$$

$$\gamma) \frac{x^2}{2} - \frac{2(x+2)}{5} = \frac{7(x-2)}{10} \quad \delta) \frac{5}{6} - \frac{(\omega-1)(\omega+1)}{2} = \frac{2-\omega}{3} - \frac{(\omega-4)^2}{6}$$

10. Ένα πλοίο Α ξεκινάει από το λιμάνι των Χανίων με προορισμό τον Πειραιά και πλέει με μέση ταχύτητα 16 knots. Ένα άλλο πλοίο Β ξεκινάει μετά από 2 ώρες από τα Χανιά προς την ίδια κατεύθυνση με μέση ταχύτητα 24 knots. Σε πόσο χρόνο το πλοίο Β θα φτάσει το Α;

11. Ένα επιβατικό πλοίο έχει συνολικά 30 δίκλινες και τρίκλινες καμπίνες. Πόσες είναι οι δίκλινες και πόσες οι τρίκλινες καμπίνες, αν ο συνολικός αριθμός κρεβατιών είναι 68;

12. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = -5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -9 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$$

13. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 4x - 3(y - 2x) = -8y \\ 4(2x - 3y) - 15(x + y) = 3 - 25y \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 3(x + y) - 5(y - x) = 14 \\ 3(x + y) - 2(x - y) = 7 \end{cases}$$

14. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 11x + 2(y - x) = \frac{12x+1}{2} \\ 6x + 4y = 1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{y}{2} = 1 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$$

15. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} + 3 + x \\ -5(x+1) = 6(y+1) \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{2x-4}{2} + \frac{2(3y-1)}{3} = \frac{13}{3} \\ \frac{2x+y}{6} - \frac{x+2y}{2} = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{x+2y}{2} - \frac{3x-2y}{6} = \frac{4y}{3} \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = \frac{2y-x+2}{6} \end{cases} \quad \epsilon) \begin{cases} \frac{7x+y}{3} - \frac{y-1}{2} = x+3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases}$$

16. Σε μία δεξαμενή νερού σχήματος κύβου, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 18 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,6 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

17. Το μήκος της ακτίνας ενός κύκλου μετρήθηκε 0,8 m. Αν το πραγματικό μήκος της ακτίνας είναι 0,86 m, να βρεθεί το σφάλμα και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους και του εμβαδού του. (Μήκος κύκλου: $l = 2\pi r$ και εμβαδόν κύκλου $E = \pi r^2$).

18. Μια δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: μήκος = 1,25 m, πλάτος = 1,82 m και ύψος = 2,2 m. Ο μηχανικός αποφάσισε να μετρήσει μόνος του τις διαστάσεις, ώστε να μπορεί να ελέγξει την προμήθεια στα καύσιμα. Οι μετρήσεις του μηχανικού ήταν: μήκος = 1,26 m, πλάτος = 1,85 m και ύψος = 2,24 m. Να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

19. Ένα πλοίο ξεκινάει στις 6 Απριλίου 19:50:00 από το λιμάνι Ηρακλείου και πλέει με ταχύτητα 18 knots για 337 ν.μ. έως την Καβάλα. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

20. Η απόσταση Πειραιάς – Γιβραλτάρ είναι 1500 ν.μ. Ένα πλοίο ξεκινάει 6 Σεπτεμβρίου 20:45:35 από το λιμάνι του Πειραιά και πλέει με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης στο Γιβραλτάρ. (Σημείωση: Η ώρα στο Γιβραλτάρ είναι μια ώρα πίσω σε σχέση με τον Πειραιά).

21. Πλοίο κινείται με ταχύτητα 10 knots. Να υπολογιστεί η απόσταση που διανύει από τις 22:30:00 έως τις 5:10:00 του επόμενου πρωινού.

22. Να μετατραπούν οι γωνίες σε συμμιγή αριθμό:

$$\alpha) 50,42^\circ \quad \beta) 13,085^\circ \quad \gamma) 105,521^\circ$$

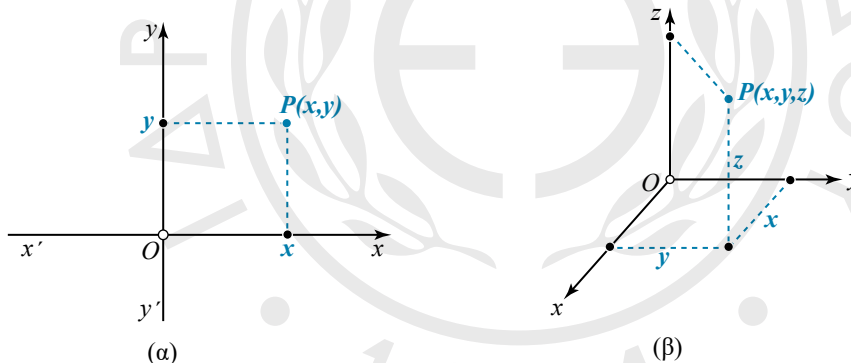
23. Να μετατραπούν οι παρακάτω γωνίες σε μοίρες:

$$\alpha) 16^\circ 38' 46'' \quad \beta) 43^\circ 9' 15'' \quad \gamma) 38^\circ 42' 18''$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφημάτων και τη χρήση αυτών για τον υπολογισμό τιμών μεγεθών. Η γραφική αναπαράσταση δεδομένων χρησιμοποιείται σε όλες τις εφαρμοσμένες επιστήμες, καθώς παρέχει μια εύκολη, εποπτική παρουσίαση της μεταβολής ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Στη Ναυτιλία, χρησιμοποιούμε πολύ συχνά γραφήματα δεδομένων πλοίου, ώστε να εξάγουμε την τιμή μιας μεταβλητής ποσότητας, που εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης.

2.1 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στον χώρο. Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο καθορίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x,y) [σχ. 2.1(α)], ενώ στον χώρο από μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) [σχ. 2.1(β)]. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

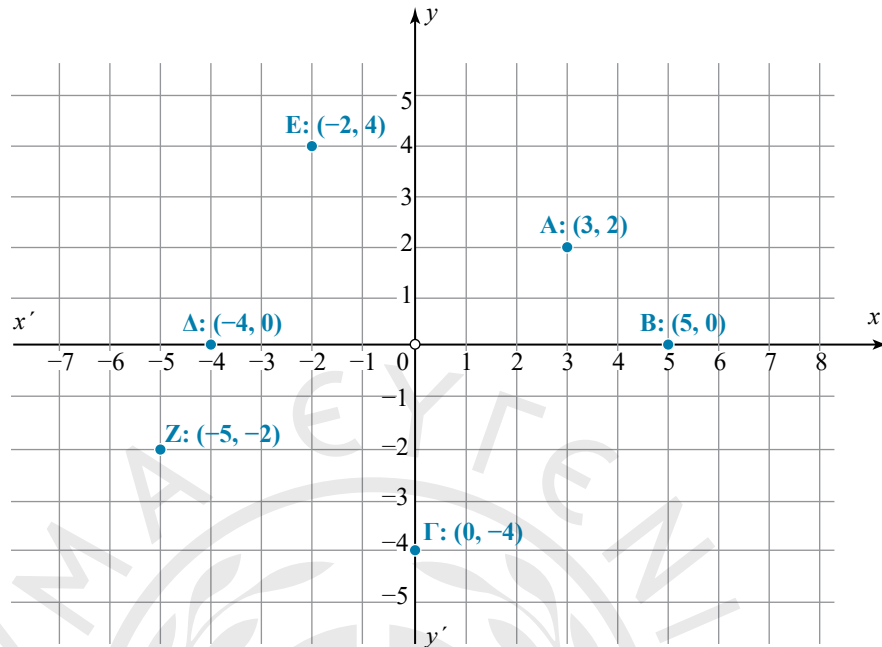


Σχ. 2.1

Στο επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ ίδιας κλίμακας. Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ έχει φορά προς τα δεξιά και ο κατακόρυφος $y'y$ προς τα πάνω, ενώ το μηδέν σε κάθε άξονα είναι στο σημείο τομής O , το οποίο ονομάζεται **αρχή των αξόνων**. Οι δύο άξονες αποτελούν ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή αλλιώς **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο**, το οποίο συμβολίζεται Oxy . Το σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό** διότι είναι **ορθογώνιο** και **κανονικό**. Ορθογώνιο είναι επειδή οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, και κανονικό επειδή έχουν ίδια κλίμακα. Εάν οι άξονες δεν έχουν ίδια κλίμακα, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Η θέση ενός σημείου P στο καρτεσιανό επίπεδο καθορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών (x,y) . Για να προσδιορίσουμε τους αριθμούς αυτούς φέρνουμε από το P τις κάθετους στους δύο άξονες. Ο αριθμός x που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η μία κάθετος τον άξονα $x'x$ λέγεται **τετμημένη του σημείου P** και ο αριθμός y που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η άλλη κάθετος τον $y'y$, λέγεται **τεταγμένη του σημείου P** . Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες του σημείου P** . Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων**, ενώ ο $y'y$ λέγεται **άξονας των τεταγμένων**. Ένα σημείο P που έχει τετμημέ-

νη x και τεταγμένη y συμβολίζεται $P(x,y)$. Στο σχήμα 2.2 απεικονίζεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, όπου μπορούμε να δούμε τις συντεταγμένες διάφορων σημείων.



Σχ. 2.2

Παρατηρούμε ότι τα σημεία που είναι πάνω στον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη μηδέν και τα σημεία που είναι πάνω στον $y'y$ έχουν τετμημένη μηδέν.

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Ισχύει και το αντίστροφο: σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο στο επίπεδο, που έχει συντεταγμένες το ζεύγος αυτό.

Για να βρούμε το σημείο που αντιστοιχεί σε δοσμένο ζεύγος (x,y) , σχεδιάζουμε την κάθετη ευθεία στον $x'x$ στο x και την κάθετη ευθεία στον $y'y$ στο y . Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (x,y) . Για παράδειγμα το σημείο του επιπέδου που έχει συντεταγμένες $(-3,5)$, είναι το σημείο τομής της κάθετης ευθείας στον $x'x$ στο -3 και της κάθετης ευθείας στον $y'y$ στο 5 (σχ. 2.3).

Οι δύο άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 τμήματα τα οποία ονομάζουμε **τεταρτημόρια**. Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε το πρόσημο των συντεταγμένων, σε κάθε τεταρτημόριο.

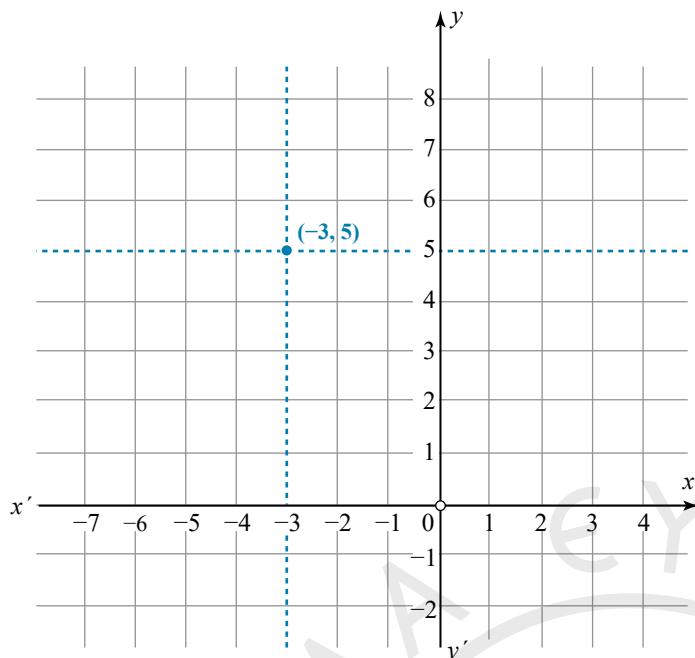
2.2 Σχεδιασμός γραφημάτων από δεδομένα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφήματος δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών x,y , από γνωστές τιμές τους, οι οποίες έχουν προκύψει από μετρήσεις. Αν σε ένα σύστημα αξόνων σημειώσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη των «αντίστοιχων τιμών» των μεγεθών x, y , και τα ενώσουμε μεταξύ τους, η γραμμή που σχηματίζεται ονομάζεται **γράφημα**. Η χάραξη γραφημάτων (ή γραφικών παραστάσεων) είναι μια πολύ σημαντική εργασία, καθώς το γράφημα:

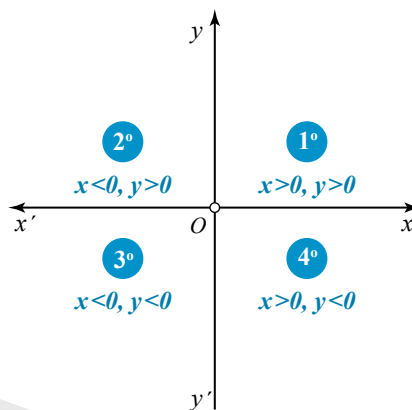
- 1) Αποτελεί μια οπτική παρουσίαση της σχέσης μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών.
- 2) Παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού άλλων «ενδιάμεσων τιμών».

Για τον σωστό σχεδιασμό του γραφήματος $y=f(x)$, του μεγέθους y ως συνάρτηση του μεγέθους x , ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

- 1) **Χαράσσουμε τους άξονες** και αναγράφουμε το μέγεθος που παριστά ο καθένας. Το



Σχ. 2.3



Σχ. 2.4

μέγεθος δηλώνεται είτε με λέξη είτε με το σύμβολο (μεταβλητή). Θα πρέπει επίσης να συμπεριλαμβάνονται (σε παρένθεση) και οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης της μεταβλητής. Κατά συνθήκη, το y (η εξαρτημένη μεταβλητή) θα πρέπει να σχεδιάζεται κατά μήκος του κάθετου άξονα, και το x (η ανεξάρτητη μεταβλητή) θα πρέπει να ορίζεται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα.

2) **Επιλέγουμε κατάλληλη κλίμακα** για κάθε άξονα (βαθμονόμηση άξονα). Η κλίμακα επιλέγεται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι εύκολο να σχεδιάζονται τα δεδομένα και να διαβάζονται. Έτσι:

α) Με βάση τις τιμές των μεταβλητών, επιλέγουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή κάθε άξονα, καθώς και το «βήμα» κάθε άξονα.

β) Χρησιμοποιούμε ως «βήμα» πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 1, του 2 και του 5. Άλλες επιλογές (όπως 3) κάνουν τη σχεδίαση και την ανάγνωση των δεδομένων πολύ δύσκολη.

γ) Δεν είναι απαραίτητο η αρχή των αξόνων να είναι το σημείο (0,0).

δ) Δεν είναι απαραίτητο οι άξονες να έχουν την ίδια κλίμακα.

3) **Εισάγουμε τα σημεία δεδομένων στο γράφημα.** Έτσι:

α) Δεν χαράσσουμε διακεκομμένες γραμμές στις συντεταγμένες των σημείων.

β) Δεν αναγράφουμε στους άξονες τις συντεταγμένες των σημείων.

4) **Σχεδιάζουμε μια απλή ομαλή καμπύλη** διά μέσου των σημείων δεδομένων. Η καμπύλη δεν θα περάσει απαραίτητα από όλα τα σημεία, αλλά θα πρέπει να περάσει όσο γίνεται πιο κοντά σε όλα τα σημεία.



Παράδειγμα 2.1

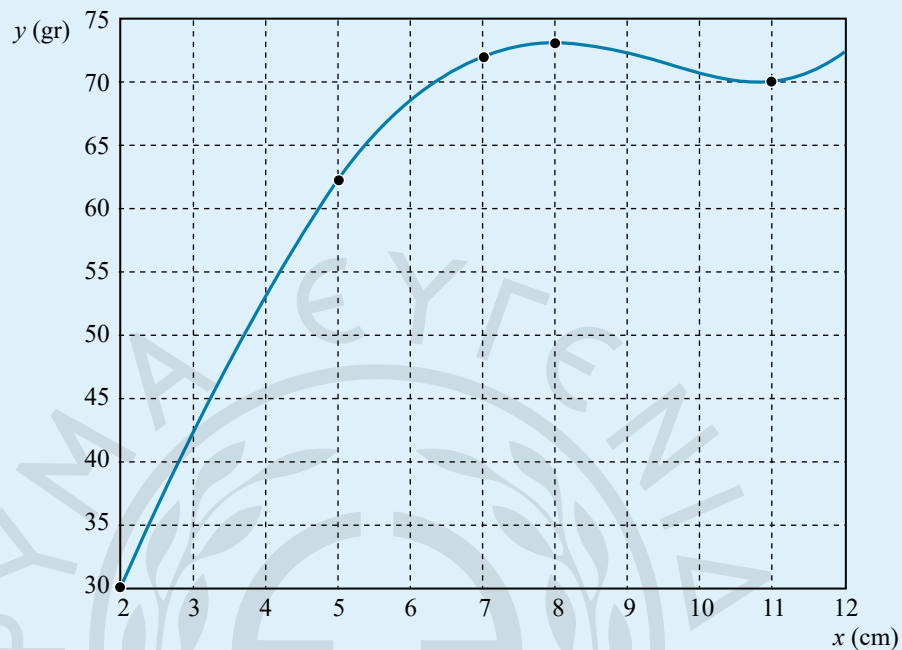
Να γίνει το γράφημα $y=f(x)$ για τον παραπλευρο πίνακα τιμών.

Λύση

Η μεταβλητή x που θα τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα έχει ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη 11. Επομένως θα βάλουμε στον οριζόντιο άξονα τιμές από 2 έως 11 (τουλάχιστον) και

x (cm)	y (gr)
2	30
5	62
7	72
8	73
11	70

το βήμα θα είναι 1. Η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 30 έως 73. Επομένως η αρίθμηση στον κατακόρυφο άξονα ξεκινάει από το 30, και θα χρησιμοποιήσουμε βήμα 5 (λόγω μεγάλου εύρους τιμών). Σημειώνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών που προκύπτουν από τον πίνακα, και τα ενώνουμε με μια ομαλή καμπύλη (σχ. 2.5).



Σχ. 2.5



Παράδειγμα 2.2

Να σχεδιαστεί το γράφημα της απόστασης x , σε ν.μ., που διανύει ένα πλοίο ως συνάρτηση του χρόνου t , σε h, για χρονική διάρκεια ενός 24ώρου και για συγκεκριμένες ταχύτητες $v_1 = 10$ knots, $v_2 = 15$ knots, $v_3 = 20$ knots, $v_4 = 25$ knots, $v_5 = 30$ knots. Στη συνέχεια, μέσω των γραφημάτων να απαντηθούν οι ερωτήσεις:

- Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 25 knots, πόση απόσταση θα διανύσει σε 12 h;
- Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 20 knots, σε πόση ώρα θα διανύσει 300 ν.μ.;
- Με ποια ταχύτητα πρέπει να πλεύσει ένα πλοίο, ώστε να διανύσει 550 ν.μ. σε 22 h;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του πλοίου δίνεται από τον τύπο:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = v \cdot t$$

Όπως θα αναφερθεί και στα παρακάτω, δύο μεγέθη x και y που συνδέονται με σχέση της μορφής $y = a \cdot x$ όπου a σταθερός αριθμός, λέγονται ανάλογα και το γράφημά τους είναι μια ευθεία γραμμή. Επομένως από τη σχέση $x = v \cdot t$ συμπεραίνουμε ότι το γράφημα που θα σχεδιάσουμε για τον χρόνο t και την απόσταση x που διανύει το πλοίο θα είναι μια ευθεία. Και επομένως για να τη σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε δύο σημεία. Έτσι, έχουμε τους παρακάτω 5 πίνακες τιμών για τις 5 διαφορετικές ταχύτητες:

$$v = 10 \text{ knots} \quad x = 10 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	240

$$v = 15 \text{ knots} \quad x = 15 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	360

$$v = 20 \text{ knots} \quad x = 20 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	480

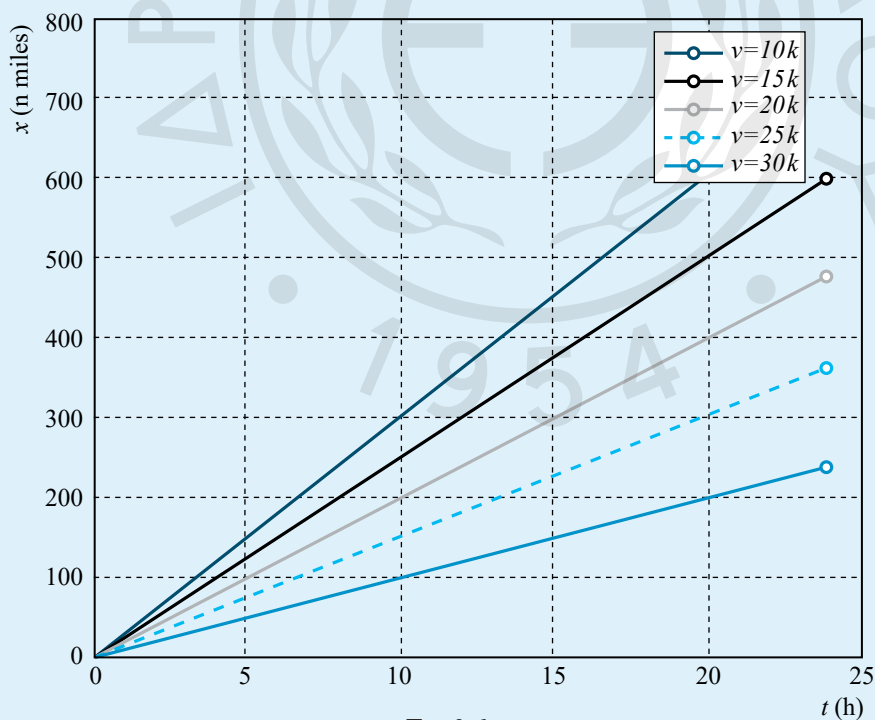
$$v = 25 \text{ knots} \quad x = 25 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	600

$$v = 30 \text{ knots} \quad x = 30 \cdot t$$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	720

Στη συνέχεια θα παραστήσουμε γραφικά τις 5 ευθείες. Στον οριζόντιο άξονα θα τοποθετηθεί ο χρόνος t . Οι τιμές που θα βάλουμε είναι από 0 έως 24 h, οπότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το βήμα 5. Η απόσταση x που θα μπει στον κατακόρυφο άξονα έχει τιμές από 0 έως 720. Επομένως ένα κατάλληλο βήμα είναι 100 (σχ. 2.6)



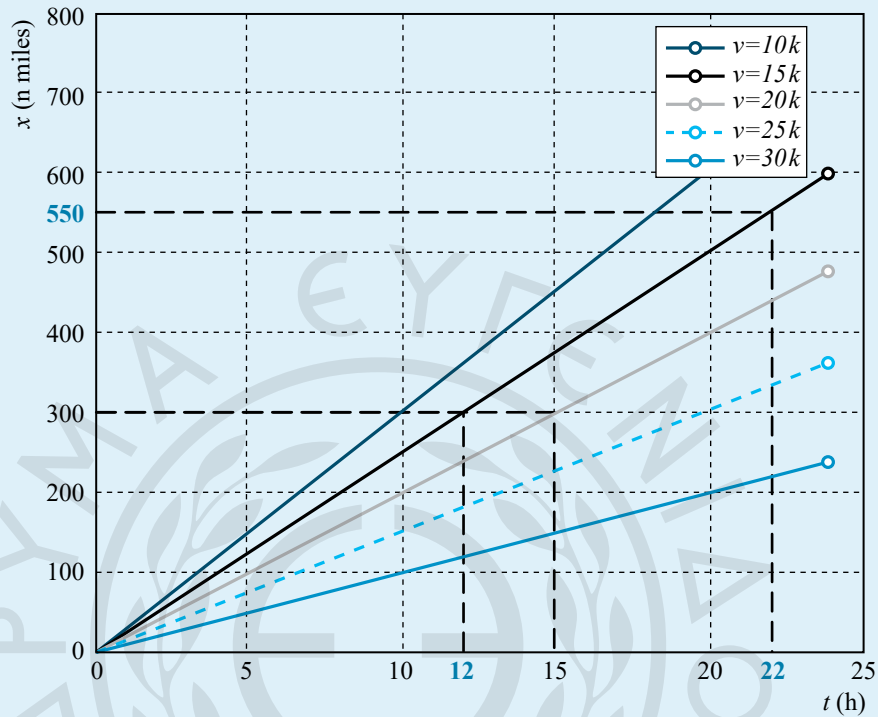
Σχ. 2.6

α) Από το γράφημα βλέπουμε ότι για $t=12$ h η αντίστοιχη τεταγμένη του σημείου του γραφήματος ($v=25$ knots) είναι 300. Άρα όταν το πλοίο κινείται με ταχύτητα 25 knots, σε 12 h θα διανύσει 300 ν.μ. (σχ. 2.7).

β) Στον κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε την τιμή 300. Από το γράφημα ($v=20$ knots) βλέ-

πουμε ότι η αντίστοιχη τετμημένη του σημείου της ευθείας που αντιστοιχεί σε ταχύτητα 20 knots είναι 15. Άρα όταν ένα πλοίο πλέει με 20 knots θα διανύσει 300 ν.μ. σε 15 h (σχ. 2.7).

γ) Φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο $t=22$ και στον κατακόρυφο στο $x=550$. Το σημείο με συντεταγμένες $(22, 550)$ βλέπουμε ότι βρίσκεται πάνω στην ευθεία ταχύτητας 25 knots (σχ. 2.7).



Σχ. 2.7

2.3 Γραφήματα βασικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, όπως *ευθεία*, *παραβολή*, *υπερβολή*, $y=x^3$, $y=a\sqrt{x}$, *λογαριθμική* και *εκθετική*. (Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων θα παρουσιαστούν στο κεφάλαιο 5).

1) $y = a \cdot x + \beta$

Η γραφική παράσταση της $y=ax+\beta$ είναι *ευθεία γραμμή*. Ο αριθμός a λέγεται *κλίση της ευθείας* ή *συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας*. Για τον υπολογισμό της κλίσης χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ (σχ. 2.8).

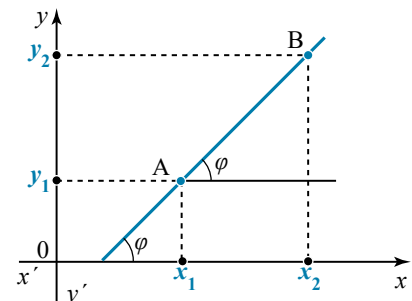
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, δηλαδή αν οι άξονες έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε ισχύει:

$$a = \epsilon\varphi\varphi$$

όπου: φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον ημιάξονα Ox , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9.

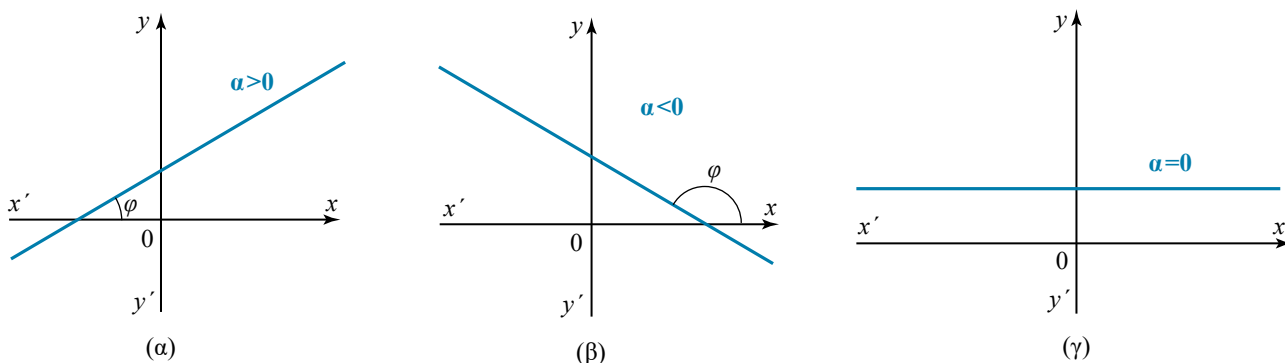
α) Αν $a > 0$ τότε $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ [σχ. 2.9(α)]



Σχ. 2.8

β) Αν $a < 0$ τότε $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ [σχ. 2.9(β)]

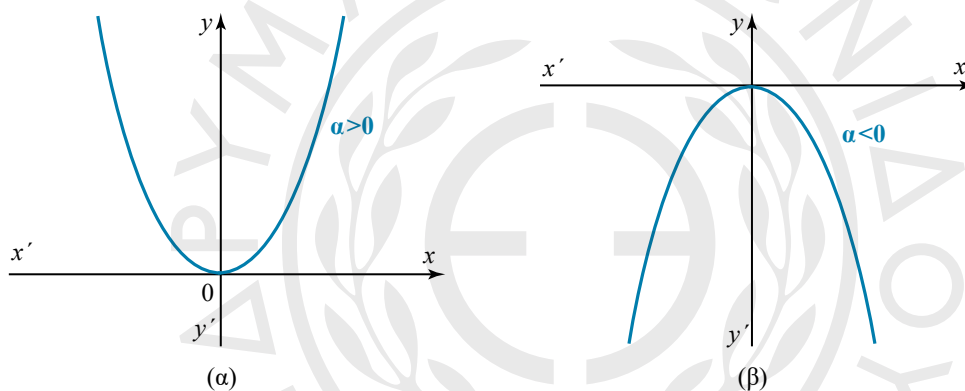
γ) Αν $a = 0$ τότε $\varphi = 0^\circ$, που σημαίνει ότι η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x' [σχ. 2.9(γ)]



Σχ. 2.9

2) $y = a \cdot x^2$

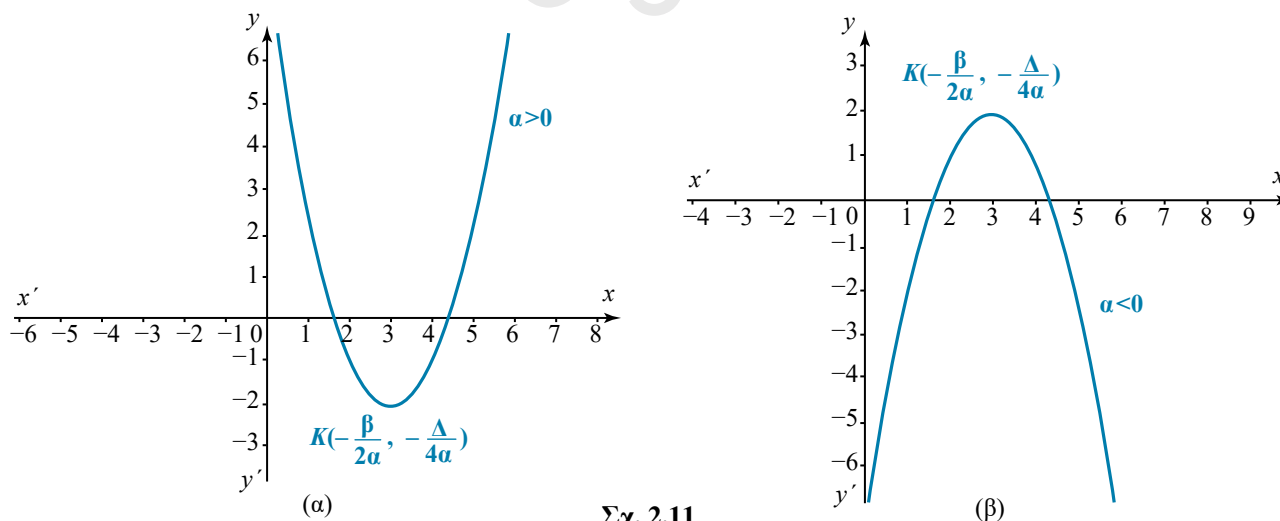
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = a \cdot x^2$ ονομάζεται **παραβολή** (σχ. 2.10).



Σχ. 2.10

Γενική περίπτωση: $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

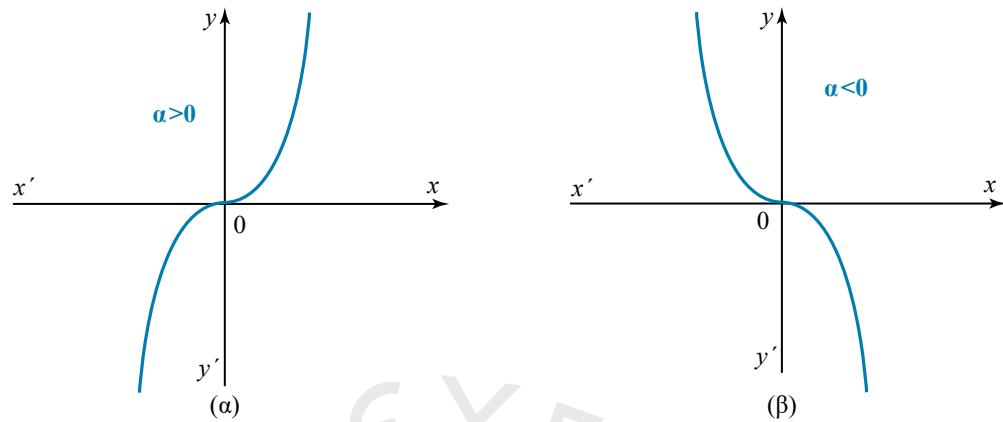
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ είναι επίσης **παραβολή**, η οποία έχει την κορυφή της στο σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ [σχ. 2.11(α),(β)].



Σχ. 2.11

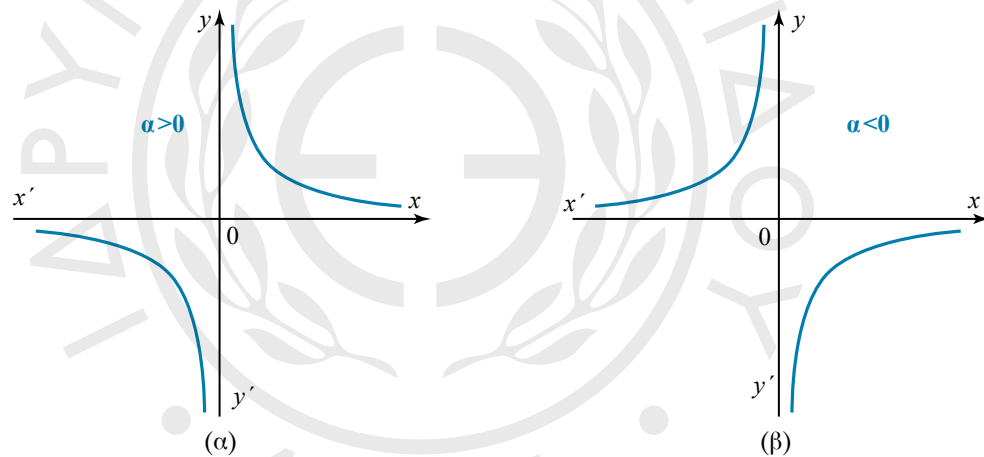
$$3) y = a \cdot x^3$$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = a \cdot x^3$ εικονίζεται στο σχήμα 2.12.



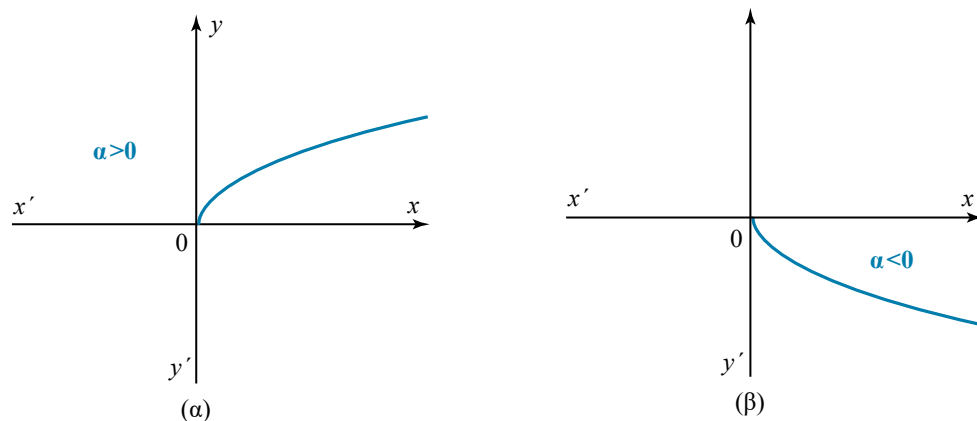
$$4) y = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ λέγεται *υπερβολή* (σχ. 2.13).



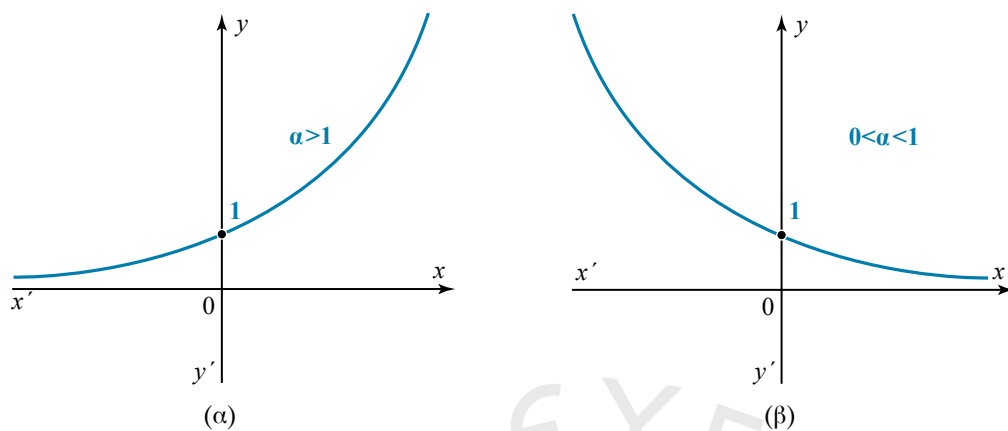
$$5) y = a\sqrt{x}$$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = a\sqrt{x}$ εικονίζεται στο σχήμα 2.14.



6) **Εκθετική συνάρτηση:** $y = a^x$, $0 < a \neq 1$

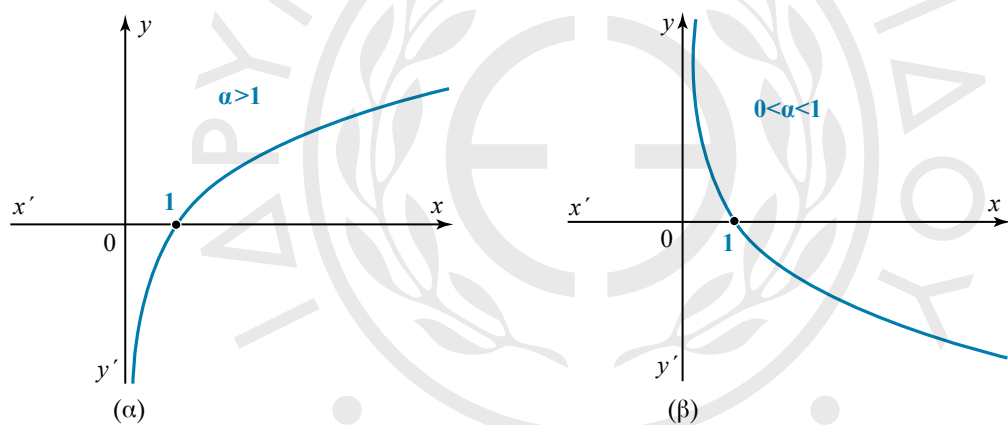
Το γράφημα της συνάρτησης $y = a^x$, $0 < a \neq 1$ εικονίζεται στο σχήμα 2.15.



Σχ. 2.15

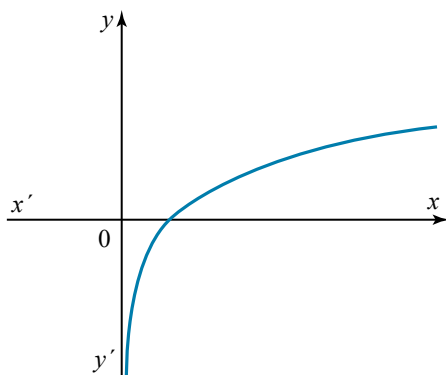
7) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ εικονίζεται στο σχήμα 2.16.



Σχ. 2.16

Ειδικά όταν $a = e$ η συνάρτηση $y = \ln x$ έχει το γράφημα που εικονίζεται στο σχήμα 2.17.



Σχ. 2.17

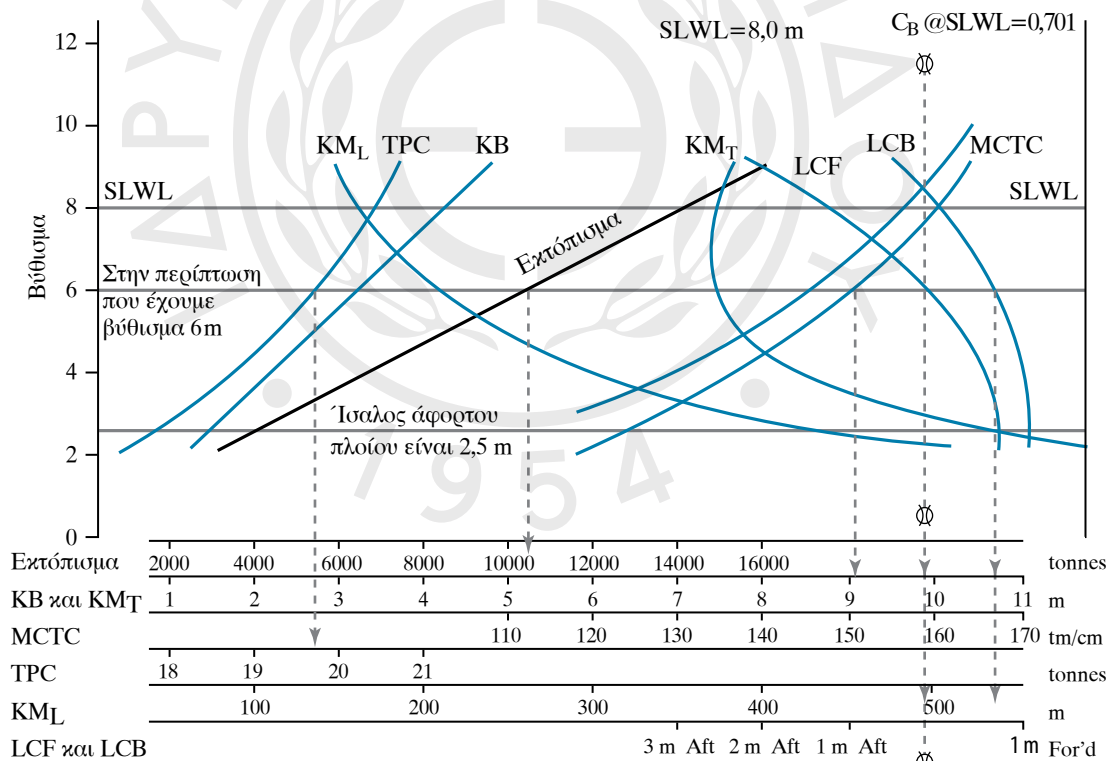
2.4 Μελέτη γραφημάτων δεδομένων πλοίου

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποια γραφήματα που χρησιμοποιούνται στη ναυπηγία, όπως υδροστατικές καμπύλες, καμπύλες ευστάθειας. Τα γραφήματα αυτά αποτελούν τη γεωμετρική ταυτότητα ενός πλοίου, και παρέχουν τα απαραίτητα στοιχεία για τον υπολογισμό ισορροπίας του στις διάφορες καταστάσεις φόρτωσης.

2.4.1 Υδροστατικό διάγραμμα πλοίου

Το υδροστατικό διάγραμμα ενός πλοίου αποτελείται από ένα σύνολο καμπυλών που μας δίνουν πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλοίου, συναρτήσει του μέσου βυθίσματος. Στο σχήμα 2.18 βλέπουμε ένα τυπικό υδροστατικό διάγραμμα πλοίου, όπου ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο βύθισμα, και ο οριζόντιος στα υδροστατικά στοιχεία του. Κάποια από τα μεγέθη που αναπαριστούν οι καμπύλες είναι:

- 1) Το εκτόπισμα Δ (Displacement).
- 2) Θέση κέντρου άντωσης KB.
- 3) Κατακόρυφη θέση διαμήκους μετακέντρου KML.
- 4) Τόνοι ανά εκατοστό βύθισης TPC.
- 5) Εγκάρσιο μετακεντρικό ύψος KMT.
- 6) Διαμήκης μετακεντρικό ύψος MTc.
- 7) Διαμήκης θέση κέντρου άντωσης LCB.



LCB Διαμήκης θέση κέντρου όγκου	MCT (MCTC) Ροπή για μεταβολή της διαγωγής κατά 1 cm
LCF Διαμήκης θέση κέντρου πλευστότητας	TPC Αυξηση του εκτοπίσματος σε τόνους για βύθιση κατά 1cm
KMT Εγκάρσια θέση μετακεντρικού ύψους	KB Κατακόρυφη θέση κέντρου όγκου
KML Διαμήκης θέση μετακεντρικού ύψους	SLWL Ίσαλος θερικής φόρτωσης
aft Προς την πρύμνη (πρϋμνηθεν)	for Προς την πλώρη (πρῳάραθεν)

Σχ. 2.18
Υδροστατικές καμπύλες πλοίου

2.4.2 Καμπύλες ευστάθειας

Το κριτήριο ευστάθειας ενός πλοίου είναι η παραγόμενη ροπή $\Delta \cdot GZ$, όπου Δ το εκτόπισμα και GZ ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς. Για κάθε πλοίο ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς, είναι συνάρτηση του εκτοπίσματος Δ , της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ και της θέσης του κέντρου βάρους KG .

$$GZ = f(\Delta, \varphi, KG)$$

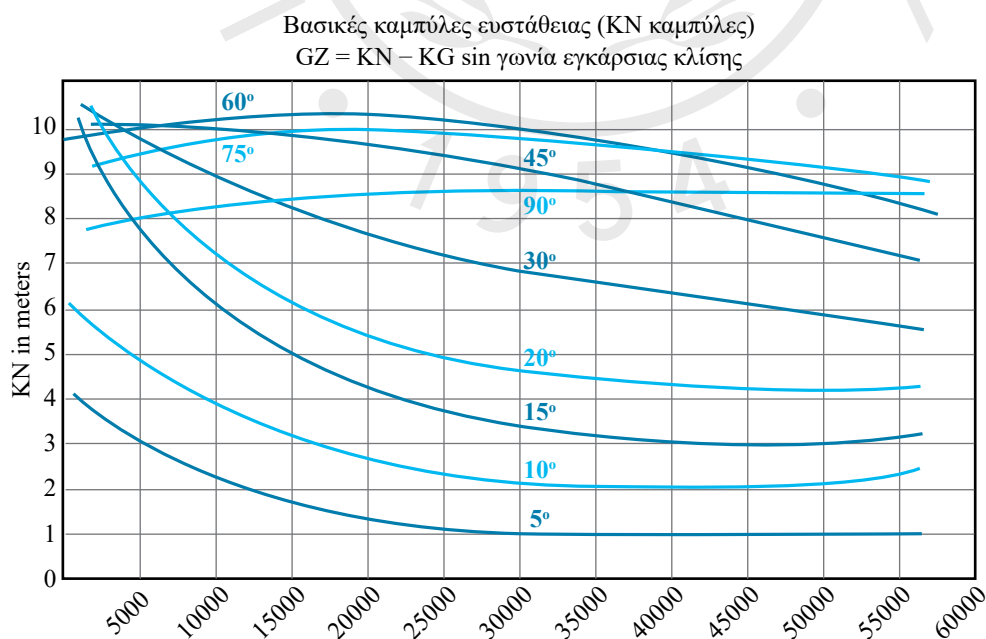
Επειδή το κέντρο βάρους θεωρείται σταθερό, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μοχλοβραχίονα επαναφοράς, για διάφορα εκτόπισματα και για διάφορες γωνίες κλίσης. Αν μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του μοχλοβραχίονα για ένα συγκεκριμένο εκτόπισμα και μια συγκεκριμένη κλίση, μπορεί να υπολογιστεί και η παραγόμενη ροπή, η οποία ή θα επαναφέρει το πλοίο στην αρχική θέση ή θα προκαλέσει ακόμη μεγαλύτερη κλίση και τελικά ανατροπή. Στη συνέχεια, θα δούμε δύο γραφήματα που παριστάνουν τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα συναρτήσει του εκτοπίσματος και της γωνίας κλίσης.

1) Παραμετρικές καμπύλες ευστάθειας πλοίου (γραφική απεικόνιση του GZ συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ)

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας είναι το εκτόπισμα Δ και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο μοχλοβραχίονας GZ . Το γράφημα σχεδιάζεται για μια συγκεκριμένη τιμή του KG – θέση κέντρου βάρους.

Έστω ότι το πλοίο έχει συγκεκριμένο εκτόπισμα. Για να βρούμε μέσω του γραφήματος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί το εκτόπισμα αυτό. Η κάθετη τέμνει σε ένα σημείο κάθε καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε γωνία κλίσης. Η τεταγμένη των σημείων αυτών είναι η τιμή του μοχλοβραχίονα για τη συγκεκριμένη γωνία.

Στο σχήμα 2.19 ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το εκτόπισμα Δ σε t και ο κατακόρυφος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, αν θεωρήσουμε θέση κέντρου βάρους $KG=0$ m, ο οποίος για τη θέση αυτή ($KG=0$) συμβολίζεται KN . Για να βρούμε την τιμή του μοχλοβρα-



Σχ. 2.19

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m, συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ σε t.

Για τη χάραξη των καμπυλών θεωρήθηκε θέση κέντρου βάρους $KG=0$ m

χίονα επαναφοράς GZ , για συγκεκριμένη τιμή του KG , βρίσκουμε από το γράφημα την τιμή του KN (για $KG=0$), και υπολογίζουμε τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς GZ αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi$$

όπου: φ η γωνία εγκάρσιας κλίσης.



Παράδειγμα 2.3

Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι 30.000 t και $KG = 10$ m, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

Λύση

Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την τιμή του εκτοπίσματος 30.000 και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Η κάθετος τέμνει κάθε καμπύλη σε ένα σημείο. Από το σημείο αυτό φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του KN για την αντίστοιχη γωνία.

α) Για $\varphi=5^\circ$: $KN = 1$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 1 - 10 \cdot \eta\mu 5^\circ = 1 - 10 \cdot 0,087 = 0,13$

β) Για $\varphi=10^\circ$: $KN = 2,1$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 2,1 - 10 \cdot \eta\mu 10^\circ = 2,1 - 10 \cdot 0,174 = 0,36$

γ) Για $\varphi=15^\circ$: $KN = 3,45$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 3,45 - 10 \cdot \eta\mu 15^\circ = 3,45 - 10 \cdot 0,259 = 0,86$

δ) Για $\varphi=20^\circ$: $KN = 4,65$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 4,65 - 10 \cdot \eta\mu 20^\circ = 4,65 - 10 \cdot 0,342 = 1,23$

ε) Για $\varphi=30^\circ$: $KN = 6,85$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 6,85 - 10 \cdot \eta\mu 30^\circ = 6,85 - 10 \cdot 0,5 = 1,85$

στ) Για $\varphi=45^\circ$: $KN = 9,1$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 9,1 - 10 \cdot \eta\mu 45^\circ = 9,1 - 10 \cdot 0,707 = 2,03$

ζ) Για $\varphi=60^\circ$: $KN = 10$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 10 - 10 \cdot \eta\mu 60^\circ = 10 - 10 \cdot 0,866 = 1,34$

η) Για $\varphi=75^\circ$: $KN = 9,8$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 9,8 - 10 \cdot \eta\mu 75^\circ = 9,8 - 10 \cdot 0,966 = 0,14$

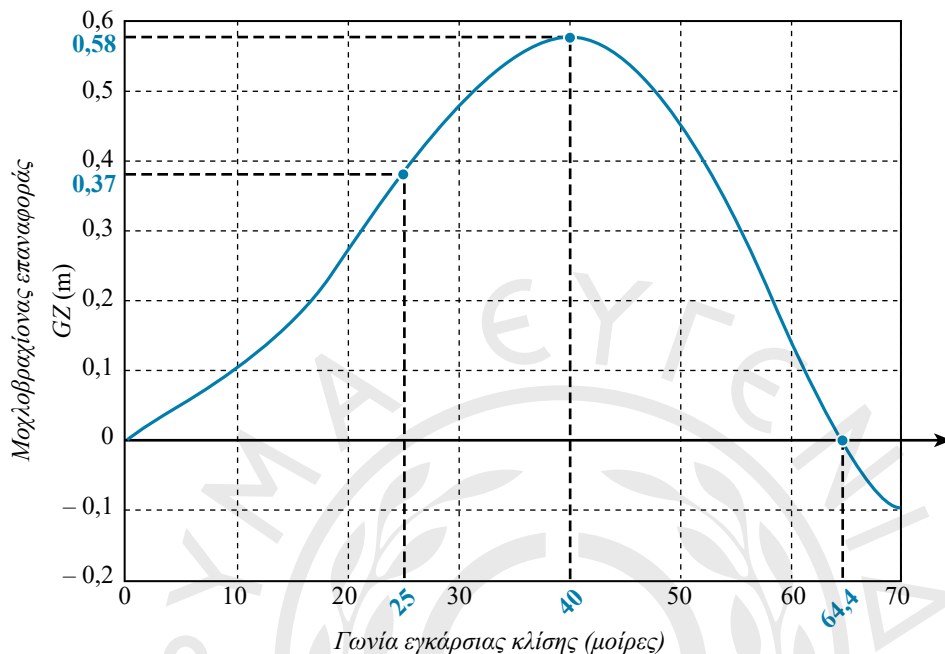
θ) Για $\varphi=90^\circ$: $KN = 8,6$ m και $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi = 8,6 - 10 \cdot \eta\mu 90^\circ = 8,6 - 10 \cdot 1 = -1,4$

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται και στον παρακάτω πίνακα:

φ	KN	$\eta\mu\varphi$	GZ
5°	1	0,087	0,13
10°	2,1	0,174	0,36
15°	3,45	0,259	0,86
20°	4,65	0,342	1,23
30°	6,85	0,5	1,85
45°	9,1	0,707	2,03
60°	10	0,866	1,34
75°	9,8	0,966	0,14
90°	8,6	1	-1,4

2) Καμπύλη στατικής ευστάθειας

Η καμπύλη στατικής ευστάθειας περιγράφει γραφικά τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς ως συνάρτηση της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ (σχ. 2.20). Η αναπαράσταση αφορά σε συγκεκριμένη κατάσταση φόρτωσης, δηλαδή συγκεκριμένο εκτόπισμα και θέση κέντρου βάρους.



Σχ. 2.20

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης



Παράδειγμα 2.4

Με βάση το σχήμα 2.20 να βρεθούν:

- Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^\circ$.
- Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο GZ και η μέγιστη τιμή του GZ .
- Η περιοχή θετικής ευστάθειας, όπου: ο GZ έχει θετική τιμή.
- Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου: ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.

Λύση

α) Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την γωνία $\varphi = 25^\circ$ και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Από το σημείο που τέμνει η κάθετη την καμπύλη, φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του GZ . Άρα $GZ = 0,37 \text{ m}$.

β) Ο μέγιστος μοχλοβραχίονας εμφανίζεται εκεί που η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο. Από το ψηλότερο σημείο φέρνουμε κάθετη στο οριζόντιο άξονα, και βρίσκουμε ότι η γωνία που μεγιστοποιείται ο GZ είναι $\varphi = 40^\circ$. Στη συνέχεια φέρνουμε κάθετη στον κατακόρυφο άξονα και βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς είναι $GZ = 0,58 \text{ m}$.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας φτάνει μέχρι το σημείο που η καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή από 0° έως $64,4^\circ$. Για κλίση μεγαλύτερη από $64,4^\circ$, έχουμε αρνητική ευστάθεια, δηλαδή μη επαναφορά στην αρχική θέση και ανατροπή του πλοίου.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας είναι η τιμή που τέμνει η καμπύλη τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή $\varphi = 64,4^\circ$.

2.5 Γραφική επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Στο κεφάλαιο 1 είδαμε την έννοια της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$. Όπως αναφέρθηκε, η γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή. Επίσης ασχοληθήκαμε με την επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Η λύση (x,y) του συστήματος επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Κατά συνέπεια, εάν σχεδιάσουμε την κάθε ευθεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, το σημείο με συντεταγμένες την λύση του συστήματος θα πρέπει να βρίσκεται πάνω και στις δύο ευθείες εφόσον επαληθεύει τις εξισώσεις τους, και άρα είναι το σημείο τομής τους. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.



Παράδειγμα 2.5

Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

Λύση

Γράφουμε κάθε μία απ' τις εξισώσεις στην μορφή $y = a \cdot x + \beta$:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad 2x - 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Κατασκευάζουμε για κάθε μια ευθεία τον πίνακα τιμών της. Για να σχεδιαστεί μια ευθεία, αρκούν 2 σημεία:

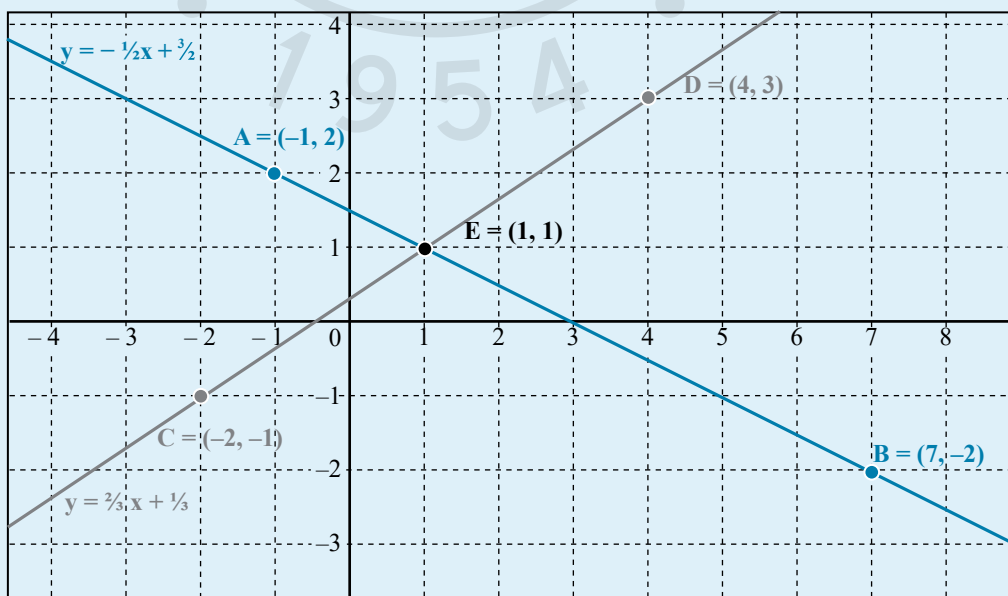
$$\varepsilon_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

x	-1	7
y	2	-2

$$\varepsilon_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

x	-2	4
y	-1	3

Κατασκευάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος. Άρα η λύση είναι $(x,y)=(1,1)$ (σχ. 2.21).



Σχ. 2.21

Ασκήσεις

1. Να δοθεί γράφημα $y=f(x)$ για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

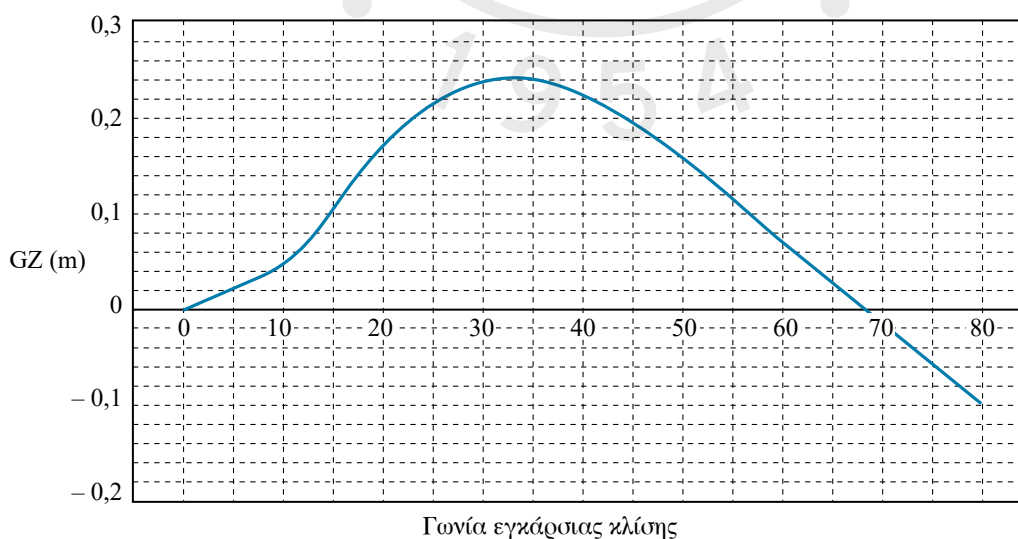
x	y
200	30
500	62
760	82
850	70
1100	60

2. Να δοθεί γράφημα $y=f(x)$ όπου x : εκτόπισμα σε και y βύθισμα σε m για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Εκτόπισμα x	Βύθισμα y (m)
21.800	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

3. Στο σχήμα 2.22 φαίνεται η καμπύλη στατικής ευστάθειας ενός πλοίου. Να βρεθούν:

- Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^\circ$.
- Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο GZ και η μέγιστη τιμή του GZ .
- Η περιοχή θετικής ευστάθειας.
- Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.



Σχ. 2.22

4. Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι

25.000 και $KG = 11\text{ m}$, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

5. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:

$$\alpha) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$$

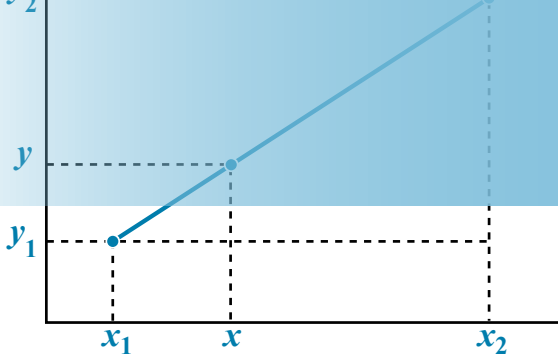
6. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

$$\alpha) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} y = x(x - 3) \\ y = -x^2 + 5x - 24 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} y = x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$$





Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι έννοιες αναλογία, ανάλογα ποσά, κλίμακες, αντιστρόφως ανάλογα ποσά και γραμμική παρεμβολή, δίνοντας έμφαση σε εφαρμογές τους σε προβλήματα σχετικά με την Ναυτιλία.

3.1 Αναλογίες

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, λέγεται το πηλίκο των μέτρων τους.

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Για να συγκρίνουμε δύο μεγέθη σχηματίζουμε τον λόγο-κλάσμα, που έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.



Παράδειγμα 3.1

Από τους 112 πρωτοετείς της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού οι 84 είναι σπουδαστές και οι 28 σπουδάστριες. Ο λόγος σπουδαστών-σπουδαστριών είναι:

$$\frac{\text{Αριθμός σπουδαστών}}{\text{Αριθμός σπουδαστριών}} = \frac{84}{28} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα ο λόγος αριθμός σπουδαστών προς αριθμός σπουδαστριών είναι $3:1 = 3$. Δηλαδή, οι άντρες σπουδαστές είναι τριπλάσιοι από τις γυναίκες.

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων. Δηλαδή, η παρακάτω ισότητα είναι μια αναλογία:

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Στην αναλογία αυτή, οι όροι b και γ ονομάζονται **μέσοι** όροι, ενώ οι a και δ ονομάζονται **άκροι** όροι.

Ιδιότητες αναλογιών:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = b \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\delta}{\gamma}$$

$$4) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$

$$2) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{b} = \frac{\gamma}{a}$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$$

$$3) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{b}{\delta}$$

$$6) \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{a + \gamma + \dots + \kappa}{b + \delta + \dots + \lambda} = \frac{a}{b}$$



Παράδειγμα 3.2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+4}{3} = \frac{6-x}{7}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την 1^η ιδιότητα αναλογιών:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{3} &= \frac{6-x}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot (x+4) = 3 \cdot (6-x) \Leftrightarrow 7x + 28 = 18 - 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7x + 3x = 18 - 28 \Leftrightarrow 10x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{10} \Leftrightarrow x = -1\end{aligned}$$

3.2 Κλίμακες

Κλίμακα ονομάζουμε τον λόγο της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου.

$$\text{κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}}$$

Η κλίμακα χρησιμοποιείται κυρίως στην κατασκευή χαρτών. Για παράδειγμα, όταν σε έναν χάρτη η κλίμακα είναι 1:1.000.000, αυτό σημαίνει ότι απόσταση 1cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 1.000.000 cm ή 10.000 m ή 10 km.

Όταν η κλίμακα είναι μικρότερη του 1, όπως συμβαίνει πάντα στους χάρτες τότε έχουμε σμίκρυνση. Όταν η κλίμακα είναι μεγαλύτερη του 1, τότε έχουμε μεγέθυνση.



Πρόβλημα 3.1

Η απόσταση δύο πόλεων σε χάρτη κλίμακας 1:10.000.000 είναι 3,8 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων;

Λύση

Έστω x η πραγματική απόσταση. Αφού η κλίμακα είναι 1:10.000.000, ο λόγος της απόστασης στον χάρτη προς την πραγματική απόσταση θα πρέπει να είναι ίσος με 1/10.000.000. Άρα:

$$\frac{3,8}{x} = \frac{1}{10.000.000} \Leftrightarrow x \cdot 1 = 3,8 \cdot 10.000.000 \Leftrightarrow x = 38.000.000$$

Άρα η πραγματική απόσταση είναι:

$$x = 38.000.000 \text{ cm} = (38.000.000:100) \text{ m} = 380.000 \text{ m} = (380.000:1000) \text{ km} = 380 \text{ km}.$$

Πρόβλημα 3.2

Ένας σπουδαστής, θέλει να σχεδιάσει την κάτοψη ενός πλοίου ολικού μήκους 262 m. Πόσο πρέπει να κάνει το μήκος του πλοίου στο σχέδιο αν η κλίμακα είναι 1:400;

Λύση

Έστω x το μήκος στο σχέδιο. Τότε:

$$\frac{x}{262} = \frac{1}{400} \Leftrightarrow 400 \cdot x = 262 \Leftrightarrow x = \frac{262}{400} \Leftrightarrow x = 0,655$$

Άρα 0,655 m ή 65,5 cm

3.3 Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον παρακάτω πίνακα (πίν. 3.1) φαίνεται το βάρος του λαδιού που περιέχει μια δεξαμενή πλοίου και το ύψος στάθμης του λαδιού στον καταμετρικό σωλήνα.

Πίνακας 3.1

Βάρος λαδιού σε MT	21,36	42,72	53,4	64,08	74,76	85,44
Ύψος στάθμης σε m	1	2	2,5	3	3,5	4

Προφανώς, όσο αυξάνεται το ύψος στον καταμετρικό σωλήνα, τόσο αυξάνεται και η ποσότητα λαδιού στην δεξαμενή και άρα και το βάρος του. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών τους βρίσκουμε ότι τα δύο μεγέθη είναι ανάλογα, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{21,36}{1} = \frac{42,72}{2} = \frac{53,4}{2,5} = \frac{64,08}{3} = \frac{74,76}{3,5} = \frac{85,44}{4} = 21,36$$

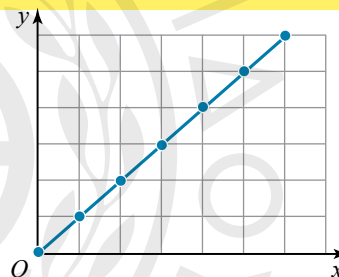
Βλέπουμε ότι όλοι οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Γενικά ισχύει:

Αν δύο μεγέθη x και y είναι ανάλογα τότε ο λόγος των τιμών του ενός προς τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$\frac{y}{x} = a \text{ ή } y = a \cdot x$$

Το πηλίκο a ονομάζεται **συντελεστής αναλογίας**.

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.1) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) δυο ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.



Σχ. 3.1

Πρόβλημα 3.3

Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 2 h και 15 min διανύει 54 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 90 ν.μ.;

Λύση

$$2 \text{ h } 15 \text{ min} = 2 \text{ h} + \left(\frac{15}{60}\right) \text{ h} = 2,25 \text{ h}$$

Εφόσον η ταχύτητα του πλοίου είναι σταθερή, η απόσταση που διανύει το πλοίο και ο χρόνος είναι μεγέθη ανάλογα. Επομένως οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Οπότε:

$$\frac{54}{2,25} = \frac{90}{x} \Leftrightarrow 54 \cdot x = 2,25 \cdot 90 \Leftrightarrow 54 \cdot x = 202,5 \Leftrightarrow x = \frac{202,5}{54} \Leftrightarrow x = 3,75 \text{ h}$$

$$3,75 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,75 \text{ h} = 3 \text{ h } (0,75 \cdot 60) \text{ min} = 3 \text{ h } 45 \text{ min}$$

Πρόβλημα 3.4

Μια ορθογωνική δεξαμενή πλοίου ύψους 5m περιέχει πετρέλαιο βάρους 91,2 MT και

το ύψος της στάθμης του πετρελαίου φτάνει στα 3,8 m. Πόσο είναι το βάρος του πετρελαίου που μπορούμε να προσθέσουμε, ώστε η δεξαμενή να είναι πλήρης;

Λύση

Εφόσον η δεξαμενή είναι ορθογωνική, το βάρος του πετρελαίου και το ύψος της στάθμης είναι μεγέθη ανάλογα. Έστω x το συνολικό βάρος πετρελαίου που χωράει στη δεξαμενή. Επομένως:

$$\frac{91,2}{3,8} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow 91,2 \cdot 5 = 3,8 \cdot x \Leftrightarrow 456 = 3,8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{456}{3,8} \Leftrightarrow x = 120 \text{ MT}$$

Άρα χωράει ακόμα $120 - 91,2 = 28,8 \text{ MT}$.

3.4 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον πίνακα 3.2 παρουσιάζεται η ταχύτητα ενός πλοίου και ο χρόνος που διάνυσε την απόσταση από το λιμάνι του Πειραιά στο λιμάνι Χανίων.

Πίνακας 3.2

Ταχύτητα σε knots	15	20	25	30
Χρόνος σε h	10	7,5	6	5

Προφανώς όταν διπλασιάζεται η ταχύτητα του πλοίου μειώνεται στο μισό ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το πλοίο μια συγκεκριμένη απόσταση. Επομένως, τα μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν υπολογίσουμε τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών, έχουμε:

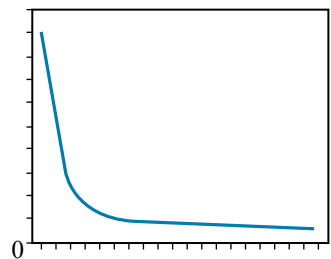
$$15 \cdot 10 = 150, \quad 20 \cdot 7,5 = 150, \quad 25 \cdot 6 = 150, \quad 30 \cdot 5 = 150$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα. Γενικά ισχύει:

Αν δύο ποσά x και y είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, τότε το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους είναι **σταθερό**. Δηλαδή:

$$y \cdot x = a \quad \text{ή} \quad y = \frac{a}{x}$$

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.2) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία **καμπύλη**, η οποία είναι **υπερβολή**.



Σχ. 3.2

Πρόβλημα 3.5

Ένα πλοίο ξεκινάει απ' το λιμάνι της Ραφήνας, κινείται με ταχύτητα 14 knots και φτάνει στο λιμάνι της Σαντορίνης μετά από 8 ώρες και 30 λεπτά. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του πλοίου για να πραγματοποιήσει την ίδια διαδρομή σε 7 ώρες;

Λύση

8 ώρες 30 λεπτά = 8,5 ώρες

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι

αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x η ζητούμενη ταχύτητα του πλοίου έχουμε:

$$7 \cdot x = 8,5 \cdot 14 \Leftrightarrow 7 \cdot x = 119 \Leftrightarrow x = \frac{119}{7} \Leftrightarrow x = 17 \text{ knots}$$

Πρόβλημα 3.6

Το γεμάτο αμπάρι ενός πλοίου αδειάζει σε 30 h όταν δουλεύουν 8 εργάτες. Σε πόσες ώρες θα αδειάσουν το ίδιο αμπάρι 12 εργάτες;

Λύση

Ο αριθμός εργατών και οι ώρες εργασίας, ώστε να ολοκληρωθεί ένα έργο είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα. Επομένως αν x είναι οι ζητούμενες ώρες:

$$12 \cdot x = 8 \cdot 30 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{12} \Leftrightarrow x = 10 \text{ h}$$

Πρόβλημα 3.7

Ένα κρουαζιερόπλοιο αναχωρεί από το λιμάνι της Πάρου στις 17:10 και κινούμενο με σταθερή ταχύτητα 15 knots φτάνει στο λιμάνι της Σύρου στις 18:45. Τι ώρα θα έφτανε στο λιμάνι της Σύρου εάν έπλεε με ταχύτητα 18 knots;

Λύση

Η ώρα 17:10 = 17 h 10 min και 18:45 = 18 h 45 min

$$\begin{array}{r} 18 \text{ h } 45 \text{ min} \\ - 17 \text{ h } 10 \text{ min} \\ \hline 1 \text{ h } 35 \text{ min} \end{array}$$

Επομένως, η διάρκεια της μετάβασης είναι:

$$1 \text{ h } 35 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{35}{60} \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,583 \text{ h} = 1,583 \text{ h}$$

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x ο χρόνος για να φτάσει στο λιμάνι της Σύρου:

$$1,583 \cdot 15 = x \cdot 18 \Leftrightarrow 23,745 = 18 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{23,745}{18} \Leftrightarrow x = 1,319 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} 1,319 \text{ h} &= 1 \text{ h} + 0,319 \text{ h} = 1 \text{ h } (0,319 \cdot 60) \text{ min} = 1 \text{ h } 19,14 \text{ min} = 1 \text{ h } (19 + 0,14) \text{ min} = \\ &= 1 \text{ h } 19 \text{ min } (0,14 \cdot 60) \text{ s} = 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8,4 \text{ s} \end{aligned}$$

Στρογγυλοποιώντας τα s στη μονάδα: 1 h 19 min 8 s. Άρα:

$$\begin{array}{r} 17 \text{ h } 10 \text{ min } 0 \text{ s} \\ + 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8 \text{ s} \\ \hline 18 \text{ h } 29 \text{ min } 8 \text{ s} \end{array}$$

Άρα άφιξη στο λιμάνι της Σύρου στις 18:29:08.

3.5 Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής

Πολλές φορές σε πρακτικές εφαρμογές είναι γνωστές οι αντίστοιχες τιμές (x_i, y_i) δύο μεγεθών x, y , χωρίς να είναι γνωστή η συνάρτηση που συνδέει τα δύο μεγέθη. Έχουμε δη-

λαδή έναν πίνακα τιμών, με κάποιες αντίστοιχες τιμές του x (ανεξάρτητη μεταβλητή) και του y (εξαρτημένη μεταβλητή). Τι γίνεται όμως αν χρειαζόμαστε την τιμή του μεγέθους y για κάποια τιμή του x που δεν υπάρχει στον πίνακα;

Η διαδικασία κατά την οποία, γνωρίζοντας τις τιμές $y_1, y_2, \dots, y_k$ της εξαρτημένης μεταβλητής y , που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x , προσεγγίζουμε τις τιμές της y για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται **ενδιάμεσα** στις δεδομένες τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ ονομάζεται **παρεμβολή**.

Η διαδικασία αυτή λέγεται παρεμβολή γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές, ανάμεσα στις υπάρχουσες.

Όταν έχουμε 2 σημεία στο επίπεδο, ο πιο απλός τρόπος να τα ενώσουμε είναι με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ενώνοντας όλα τα διαδοχικά σημεία, σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή, η οποία προσεγγίζει την άγνωστη καμπύλη που συνδέει όλα τα σημεία. Θεωρώντας ότι δύο γνωστά σημεία έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) η **γραμμική παρεμβολή** βασίζεται στην παραδοχή ότι τα σημεία αυτά ενώνονται με μία ευθεία (σχ. 3.3). Έστω ένα τυχαίο σημείο (x, y) (όπου x) μεταξύ των x_1 και x_2 . Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Επειδή τα σημεία (x_1, y_1) , (x, y) και (x_2, y_2) είναι συνευθειακά, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3, προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x, y) είναι πάλι λ :

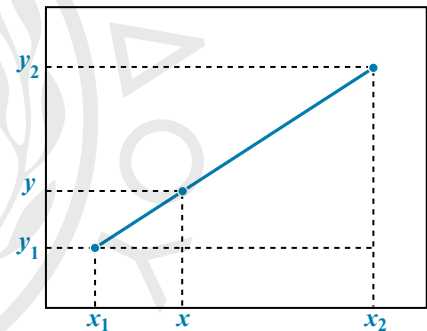
$$\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Άρα:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ή από την ιδιότητα των αναλογιών:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$



Σχ. 3.3

Λύνοντας ως προς y παίρνουμε την παρακάτω σχέση της γραμμικής παρεμβολής:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad (2)$$

Αντίστροφη παρεμβολή ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία, με γνωστές τις τιμές $y_1, y_2, \dots, y_k$ της εξαρτημένης μεταβλητής y , που αντιστοιχούν σε τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x , προσεγγίζουμε τις τιμές της x για τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y που βρίσκονται **ενδιάμεσα** στις δεδομένες τιμές $y_1, y_2, \dots, y_k$. Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς x παίρνουμε τον τύπο της αντίστροφης παρεμβολής:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot (y - y_1) \quad (3)$$

3.6 Εφαρμογές της γραμμικής παρεμβολής στην Ναυτιλία

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία διαδικασία που χρησιμοποιείται συχνά στη Ναυτιλία, και ειδικότερα στην αντιμετώπιση προβλημάτων ευστάθειας. Στα συνηθισμένα προβλήματα ευστάθειας, γίνεται χρήση πινάκων όπως οι πίνακες υδροστατικών στοιχείων και οι πίνακες μοχλοβραχιόνων επαναφοράς. Συχνά, η τιμή που χρειαζόμαστε δεν υπάρχει στον

πίνακα, αλλά είναι ενδιαμέση δύο τιμών του πίνακα. Τότε θα «προσεγγίσουμε» την τιμή με την διαδικασία της γραμμικής παρεμβολής.

Πρόβλημα 3.8

Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές (πίν. 3.3) για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι, κατά προσέγγιση, το βύθισμα που θα έχουμε εάν το εκτόπισμα είναι 27.100 MT;

Πίνακας 3.3*

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (MT)	Βύθισμα (m)
29.391	6,60
28.432	6,40
27.480	6,20
26.535	6,00
25.576	5,8

Λύση

Η τιμή 27.100 είναι ανάμεσα στις τιμές 26.535 και 27.480. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή, όπου θα θεωρήσουμε: $x_1 = 26.535$, $x_2 = 27.480$, $y_1 = 6$ και $y_2 = 6,2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{y - 6}{6,2 - 6} = \frac{27.100 - 26.535}{27.480 - 26.535} = \frac{y - 6}{0,2} = \frac{565}{945} \Leftrightarrow \\ 945 \cdot (y - 6) &= 0,2 \cdot 565 \Leftrightarrow 945 \cdot y - 5.670 = 113 \Leftrightarrow 945 \cdot y = 5.783 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5.783}{945} \Leftrightarrow y = 6,12 \text{ m} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3.9

Στον πίνακα 3.4 έχουμε τον ειδικό όγκο αερίου και πώς επηρεάζεται απ' την θερμοκρασία. Να βρεθεί ο ειδικός όγκος του αερίου για θερμοκρασία $T = 385^\circ\text{C}$.

Πίνακας 3.4

Θερμοκρασία ($^\circ\text{C}$)	Ειδικός όγκος (m^3/kg)
300	0,05138
350	0,05842
400	0,06477

Λύση

Η τιμή 385 βρίσκεται ανάμεσα στις 350 και 400. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 350$, $x_2 = 400$, $y_1 = 0,05842$ και $y_2 = 0,06477$. Έχουμε:

* Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλιναίτη, Β' έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-0,05842}{0,06477-0,05842} = \frac{385-350}{400-350} \Leftrightarrow \frac{y-0,05842}{0,00635} = \frac{35}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50(y-0,05842) = 0,22225 \Leftrightarrow 50y - 2,921 = 0,22225 \Leftrightarrow 50y = 3,14325 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3,14325}{50} = 0,062865 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Πρόβλημα 3.10

Ο πίνακας 3.5 δίνει τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) ενός πλοίου για θέση του κέντρου βάρους του KG = 10,67 m. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για το πλοίο σε γωνία 30°, όταν το εκτόπισμα του είναι 33.000 MT.

Πίνακας 3.5*
Μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) πλοίου A

Εκτόπισμα (MT)	Βύθισμα (m)	Μοχλοβραχίονας επαναφοράς (GZ) σε m για KG = 10,67 στις αντίστοιχες γωνίες						
		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
12.000	2,85	0,000	3,03	3,36	2,48	1,40	-0,04	-1,79
16.000	3,74	0,000	2,15	2,87	2,45	1,55	-0,02	-1,80
20.000	4,61	0,000	1,54	2,47	2,38	1,54	-0,05	-1,81
24.000	5,47	0,000	1,10	2,14	2,28	1,40	-0,11	-1,81
28.000	6,31	0,000	0,82	1,87	2,11	1,21	-0,22	-1,82
32.000	7,15	0,000	0,62	1,64	1,90	1,00	-0,36	-1,82
36.000	7,98	0,000	0,50	1,45	1,66	0,88	-0,49	-1,84
40.000	8,80	0,000	0,43	1,27	1,39	0,56	-0,63	-1,86
44.000	9,61	0,000	0,39	1,08	1,11	0,33	-0,75	-1,87
48.000	10,42	0,000	0,38	0,90	0,81	0,10	-0,88	-1,88
52.000	11,21	0,000	0,39	0,70	0,49	-0,14	-1,00	-1,90
56.000	11,99	0,000	0,40	0,50	0,18	-0,38	-1,10	-1,91

Λύση

Η τιμή 33.000 βρίσκεται ανάμεσα στις 32.000 και 36.000. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με $x_1=32.000$, $x_2=36.000$, $y_1=1,64$ και $y_2=1,45$ για γωνία 30°. Έχουμε

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-1,64}{1,45-1,64} = \frac{33.000-32.000}{36.000-32.000} \Leftrightarrow \frac{y-1,64}{-0,019} = \frac{1.000}{4.000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1,64}{-0,019} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(y-1,64) = -0,19 \Leftrightarrow 4y-6,56 = -0,19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 6,56-0,19 \Leftrightarrow 4y = 6,37 \Leftrightarrow y = \frac{6,37}{4} = 1,593$$

Άρα GZ = 1,593 m

* Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλινιάτη, Β' έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016

Πρόβλημα 3.11

Στον πίνακα 3.5 έχουμε τις τιμές του εκτόπισματος και του βύθισματος ενός πλοίου. Για βύθισμα 6 m να υπολογιστεί το εκτόπισμα.

Λύση

Έστω x το εκτόπισμα και y το βύθισμα. Η τιμή $y = 6$ m βρίσκεται μεταξύ των τιμών 5,47 και 6,31. Θα κάνουμε αντίστροφη γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 24.000$, $x_2 = 28.000$, $y_1 = 5,47$ και $y_2 = 6,31$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{6 - 5,47}{6,31 - 5,47} = \frac{x - 24.000}{28.000 - 24.000} \Leftrightarrow \frac{0,53}{0,84} = \frac{x - 24.000}{4.000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,84(x - 24.000) = 2.120 \Leftrightarrow 0,84x - 20.160 = 2120 \Leftrightarrow 0,84x = 20.160 + 2.120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,84x = 22.280 \Leftrightarrow x = \frac{22.280}{0,84} \Leftrightarrow x = 26.523,81 \text{ MT}$$

Ασκήσεις

1. Η κάτοψη ενός πλοίου έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 1:250. Ποιο είναι το πραγματικό μήκος του πλοίου αν το μήκος του στο σχέδιο είναι 0,8 m;
2. Η απόσταση Αθήνα – Βόλος είναι 168,3 km. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.000.000;
3. Η απόσταση Ρόδος – Ρέθυμνο είναι 358 ν.μ. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.500.000; (Δίνεται ότι 1 ναυτικό μίλι = 1852 m).
4. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κλίμακα	Απόσταση στον χάρτη	Πραγματική απόσταση
1:100.000		8 km
1:2.000.000	2,6 cm	
1:500.000	47 cm	
	18 cm	36 km

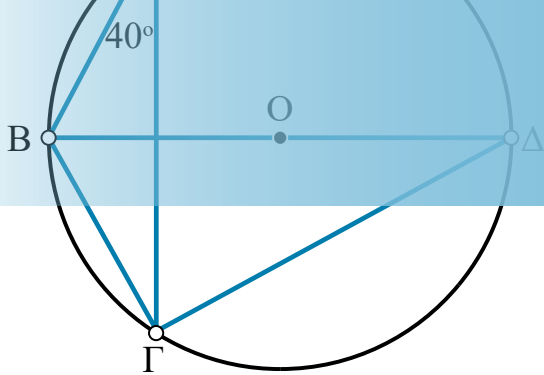
5. Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι το βύθισμα που θα έχουμε αν το εκτόπισμα είναι 21.220 MT;

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (MT)	Βύθισμα (m)
21.827	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

6. Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 3 h και 45 min διανύει 75 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 110 ν.μ.;
7. Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α στις 14:20 και φτάνει στο λιμάνι Β στις 19:46, πλέοντας με σταθερή ταχύτητα 15 knots. Ποια θα έπρεπε να είναι η ταχύτητα πλεύσης, ώστε το πλοίο να φτάσει στο λιμάνι Β νωρίτερα, στις 19:00;
8. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για πλοίο Α, σε γωνία 60° , όταν το εκτόπισμά του είναι 47.000 MT, αν ο πίνακας με τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς είναι ο πίνακας 3.5.
9. Στον πίνακα 3.6 έχουμε τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς KN για κέντρο βάρους $KG=0$, σε σχέση με το βύθισμα και τη γωνία κλίσης. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας GZ, όταν το κέντρο βάρους είναι $KG = 8 \text{ m}$, για βύθισμα 11,15 m και γωνία $\varphi = 60^\circ$. Δίνεται ότι: $GZ = KN - KG \cdot \eta\mu\varphi$

Πίνακας 3.6

Βύθισμα σε (m)	Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m για $KG = 0$, για διάφορες γωνίες κλίσης								
	5°	10°	12°	20°	30°	40°	50°	60°	75°
10.00	1.218	2.448	2.943	4.958	7.500	9.369	10.610	11.210	11.169
10.20	1.213	2.438	2.931	4.937	7.442	9.309	10.560	11.166	11.144
10.40	1.209	2.429	2.920	4.919	7.383	9.250	10.509	11.120	11.118
10.60	1.205	2.421	2.911	4.902	7.323	9.192	10.457	11.074	11.092
10.80	1.201	2.414	2.903	4.887	7.264	9.134	10.404	11.027	11.066
11.00	1.199	2.408	2.895	4.874	7.204	9.077	10.349	10.980	11.040
11.20	1.196	2.403	2.889	4.863	7.145	9.019	10.293	10.933	11.014
11.40	1.194	2.399	2.884	4.854	7.087	8.961	10.236	10.885	10.988
11.60	1.193	2.396	2.880	4.846	7.030	8.901	10.177	10.837	10.961
11.80	1.191	2.393	2.877	4.838	6.976	8.840	10.117	10.788	10.935
12.00	1.190	2.391	2.875	4.829	6.924	8.778	10.056	10.739	10.909
12.20	1.190	2.390	2.873	4.818	6.875	8.714	9.994	10.689	10.883
12.40	1.190	2.390	2.872	4.804	6.828	8.650	9.930	10.639	10.856
12.60	1.190	2.390	2.872	4.787	6.782	8.586	9.866	10.587	10.830
12.80	1.190	2.390	2.873	4.768	6.738	8.521	9.801	10.535	10.803
13.00	1.191	2.392	2.874	4.746	6.696	8.456	9.735	10.482	10.776
13.20	1.192	2.393	2.876	4.722	6.655	8.390	9.668	10.428	10.749



Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη επανάληψη βασικών ορισμών και θεωρημάτων της Γεωμετρίας, τους οποίους οι σπουδαστές έχουν διδαχθεί στο σχολείο. Στα περισσότερα θεωρήματα παραλείπεται η απόδειξη, καθώς ο σκοπός της επανάληψης είναι η σωστή εφαρμογή αυτών και όχι η θεωρητική τους προσέγγιση.

4.1 Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει με πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες όπως **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο**, τις οποίες αντιλαμβανόμαστε από την εμπειρία μας και δεχόμαστε χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις.

Ένα σημείο στο επίπεδο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα. Για παράδειγμα σημείο A.

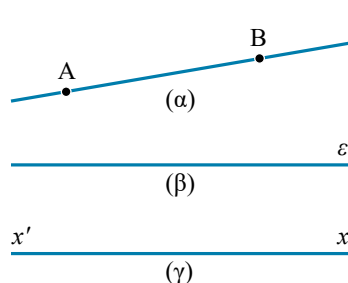
Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B ονομάζεται **ευθεία AB** [σχ. 4.1(α)]. Επίσης **η ευθεία συμβολίζεται και με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα ευθεία ε** [σχ. 4.1(β)] ή με δύο μικρά γράμματα, για παράδειγμα **ευθεία x'x** [σχ. 4.1(γ)].

Θεωρούμε μια ευθεία x'x και ένα σημείο A πάνω στην ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Το σημείο A χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax'. Το καθένα από αυτά το ονομάζουμε **ημιευθεία με αρχή** το σημείο A. Η ευθεία x'x ονομάζεται **φορέας της ημιευθείας Ax**. **Δύο ημιευθείες που έχουν μόνο κοινό σημείο την κοινή αρχή τους και έχουν κοινό φορέα λέγονται αντικείμενες**. Για παράδειγμα, οι ημιευθείες Ax και Ay του σχήματος 4.3 είναι αντικείμενες, όπως είναι προφανώς και οι ημιευθείες Ax και Ax' του σχήματος 4.2.

Θεωρούμε ευθεία ε και δύο διαφορετικά σημεία A, B πάνω σε αυτή. **Ευθύγραμμο τμήμα AB ή BA** (σχ. 4.4) **λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους**. Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται **φορέας του ευθύγραμμου τμήματος**.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **μονάδα μήκους**. Έτσι, αν χρησιμοποιούμε ως μονάδα μήκους το ευθύγραμμο τμήμα AB, και αν για το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda AB$, ο αριθμός λ λέγεται **μήκος** του ευθύγραμμου



Σχ. 4.1



Σχ. 4.2



Σχ. 4.3



Σχ. 4.4

τμήματος ΓΔ, αλλά και απόσταση των σημείων Γ και Δ. Στη πράξη, για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα μέτρησης. Αυτή η μονάδα είναι το **μέτρο (m)** και οι υποδιαιρέσεις της. (Οι μονάδες μέτρησης μήκους θα μελετηθούν διεξοδικά στο κεφ. 6.)

Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB συμβολίζεται (AB) ή πιο απλά AB. Δηλαδή με το σύμβολο **AB** εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα AB, αλλά και το μήκος αυτού. Στο βιβλίο αυτό θα αναφερόμαστε στο μήκος του AB γράφοντας απλά AB.

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται το εσωτερικό του σημείο M τέτοιο ώστε $AM=MB$ (σχ. 4.5).



Σχ. 4.5

– Είδη γωνιών

Θεωρούμε δύο ημιευθείες Ox και Oy με κοινή αρχή O . Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2 . Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται **γωνία** (σχ. 4.6).

Η μικρότερη ονομάζεται **κυρτή γωνία** και η μεγαλύτερη **μη κυρτή γωνία**.

Το σημείο O λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Ox και Oy **πλευρές** της γωνίας.

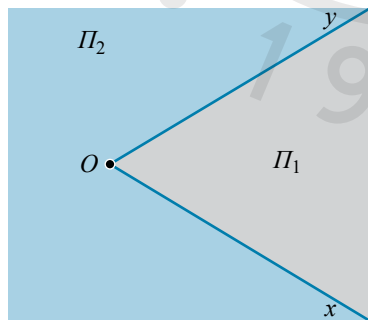
1) Συμβολισμός γωνίας

Η γωνία του σχήματος 4.7 μπορεί να συμβολιστεί με τους εξής τρόπους:

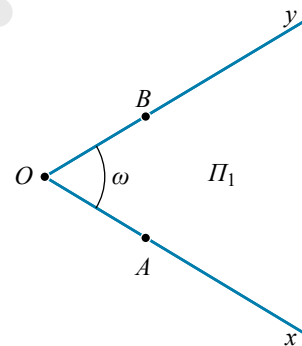
- α) Γωνία $\hat{\omega}$
- β) Γωνία $x\hat{O}y$
- γ) Γωνία $A\hat{O}B$ (το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της γωνίας)
- δ) Γωνία $\hat{O}$

Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται, η κυρτή γωνία λέγεται **μηδενική γωνία** [σχ. 4.8(α)] και η μη κυρτή **πλήρης γωνία** [σχ. 4.8(β)]. Αν οι ημιευθείες Ox , Oy είναι αντικείμενες, τότε κάθε μία από τις δύο γωνίες (κυρτή και μη κυρτή) λέγεται **ευθεία γωνία** [σχ. 4.8(γ)].

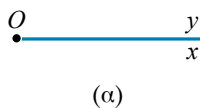
Σε κάθε γωνία αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που ονομάζεται **μέτρο** της γωνίας. Ως μο-



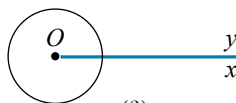
Σχ. 4.6



Σχ. 4.7



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 4.8

(α) Μηδενική γωνία, (β) πλήρης γωνία και (γ) ευθεία γωνία

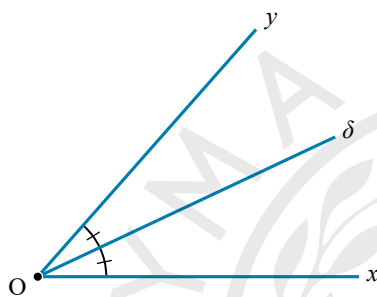
νάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε συνήθως τη **μοίρα** και τις υποδιαιρέσεις της, την οποία είδαμε και στο κεφάλαιο 1. Η πλήρης γωνία έχει μέτρο 360° , η ευθεία γωνία 180° και η μηδενική 0° . Δύο γωνίες που έχουν ίσα μέτρα, λέγονται **ίσες**.

2) Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας $\hat{xOy}$ λέγεται η ημιευθεία $O\delta$, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{xO\delta} = \hat{\delta Oy}$ (σχ. 4.9).

3) Είδη γωνιών

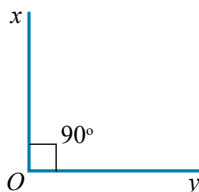
Η γωνία που έχει μέτρο 90° ονομάζεται **ορθή γωνία**. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται **ευθείες κάθετες** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ. 4.10). Η ορθή γωνία συμβολίζεται $\perp$. Δηλαδή αν η γωνία $\hat{\omega}$ είναι ορθή γράφουμε $\hat{\omega} = 90^\circ$ ή $\hat{\omega} = \perp$ [σχ. 4.11(α)].



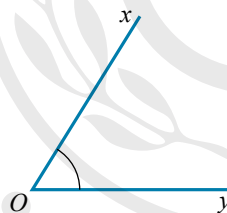
Σχ. 4.9



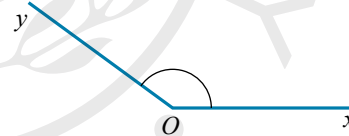
Σχ. 4.10



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 4.11

Είδη γωνιών:

(α) Ορθή γωνία, (β) οξεία γωνία και (γ) αμβλεία γωνία

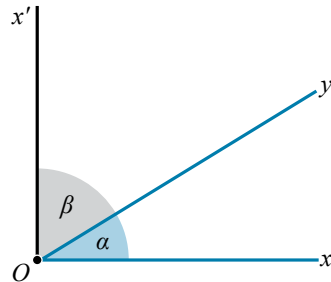
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται **οξεία** αν είναι μικρότερη από την ορθή γωνία (σχ. 4.11), δηλαδή έχει μέτρο μικρότερο από 90° [σχ. 4.11(β)]. Μια κυρτή γωνία θα λέγεται **αμβλεία** αν είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία [σχ. 4.11(γ)]. Τότε έχει μέτρο στο διάστημα $(90^\circ, 180^\circ)$.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται όλα τα είδη γωνιών που έχουμε δει μέχρι τώρα.

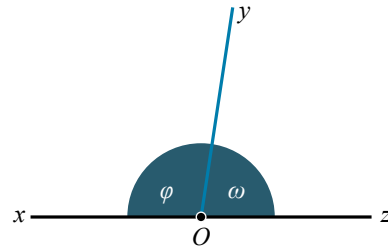
Πίνακας 4.1

Μηδενική	Οξεία	Ορθή	Αμβλεία	Ευθεία	Μη ΚΥΡΤΗ	Πλήρης
$\hat{\omega} = 0^\circ$	$\hat{\omega} < 90^\circ$	$\hat{\omega} = 90^\circ$	$90^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$	$\hat{\omega} = 180^\circ$	$180^\circ < \hat{\omega} < 360^\circ$	$\hat{\omega} = 360^\circ$

Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα 90° (μια ορθή γωνία). Για παράδειγμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ του σχήματος 4.12 είναι συμπληρωματικές. Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα 180° (δηλ. μια ευθεία γωνία). Στο σχήμα 4.13 οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματικές.



Σχ. 4.12



Σχ. 4.13

Δύο κυρτές γωνίες λέγονται **κατά κορυφήν** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης (σχ. 4.14)

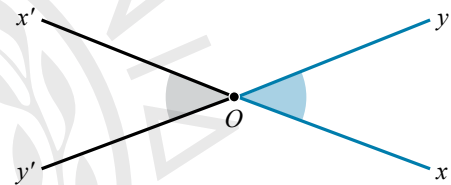
Θεώρημα 4.1: Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.14 είναι:

$$\hat{xOy} = \hat{x'O'y'}$$

Αλλά και $\hat{x'O'y} = \hat{x'O'y'}$

Πράγματι αυτό ισχύει εφόσον δύο κατά κορυφήν γωνίες είναι παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας.



Σχ. 4.14



Παράδειγμα 4.1

Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής της. Να υπολογιστεί η γωνία.

Λύση

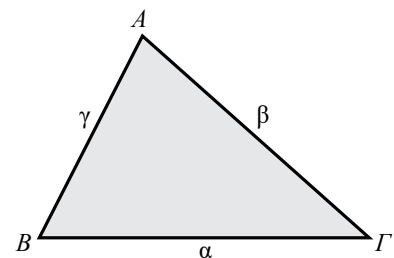
Έστω $\hat{\omega}$ η ζητούμενη γωνία. Η παραπληρωματική της είναι: $180^\circ - \hat{\omega}$ και η συμπληρωματική της: $90^\circ - \hat{\omega}$. Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \hat{\omega} &= 3 \cdot (90^\circ - \hat{\omega}) \Leftrightarrow 180^\circ - \hat{\omega} = 270^\circ - 3\hat{\omega} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\hat{\omega} - \hat{\omega} = 270^\circ - 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 45^\circ \end{aligned}$$

4.2. Στοιχεία και είδη τριγώνων

1) Κύρια στοιχεία τριγώνου

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι 3 γωνίες του και οι 3 πλευρές του. Έστω το τρίγωνο ABΓ του σχήματος 4.15. Οι πλευρές του τριγώνου συμβολίζονται: ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ή για ευκολία α, β, γ. Οι γωνίες του συμβολίζονται: $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



Σχ. 4.15

2) Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

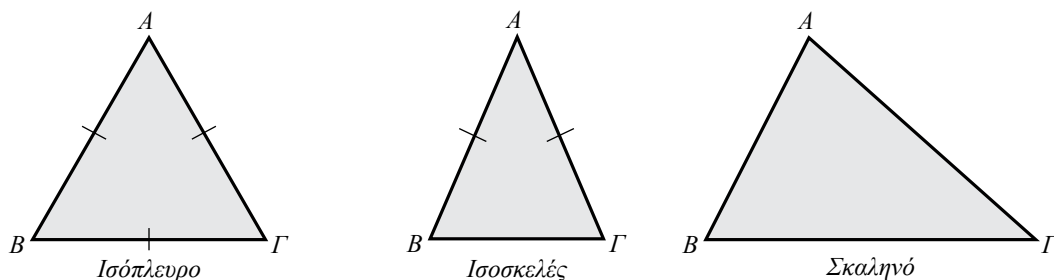
Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, διακρί-

νουμε 3 είδη τριγώνου (σχ. 4.16):

α) **Ισόπλευρο**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) **Ισοσκελές**, όταν έχει 2 πλευρές ίσες. Η πλευρά που είναι άνιση με τις άλλες δύο, λέγεται **βάση** του ισοσκελούς τριγώνου.

γ) **Σκαληνό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



Σχ. 4.16

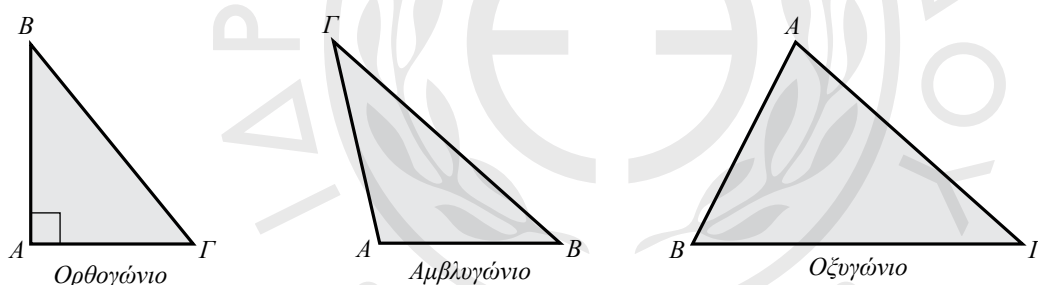
3) Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Ανάλογα με το είδος των γωνιών του τριγώνου διακρίνουμε τα εξής 3 είδη (σχ. 4.17):

α) **Ορθογώνιο**, όταν έχει μια ορθή γωνία. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο πλευρές λέγονται **κάθετες πλευρές**.

β) **Αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

γ) **Οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

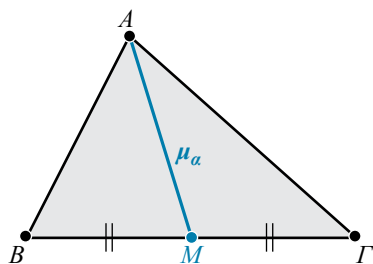


Σχ. 4.17

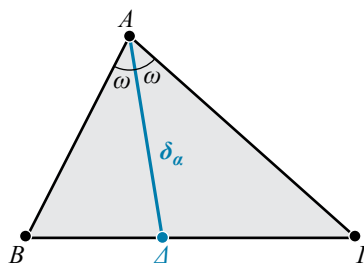
4) Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχήμα 4.18 το ευθύγραμμο τμήμα AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ABΓ και συμβολίζεται με μ_a . Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_b και μ_γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχήμα 4.19 το ευθύγραμμο τμήμα AD εί-



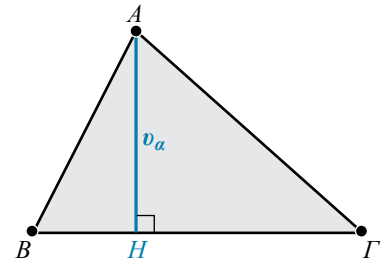
Σχ. 4.18



Σχ. 4.19

ναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, και συμβολίζεται με δ_a . Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{C}$ συμβολίζονται με δ_b και δ_c αντίστοιχα.

Ύψος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει μια κορυφή με την ευθεία της απέναντι πλευράς και είναι κάθετο προς αυτήν. Στο σχήμα 4.20 του ευθύγραμμο τμήμα AH είναι το ύψος που φέρεται από την κορυφή A και συμβολίζεται με v_a . Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές B και C συμβολίζονται αντίστοιχα με v_b και v_c .



Σχ. 4.20

4.3 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία

Δύο διαφορετικές ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι τέμνονται ή δεν θα έχουν κανένα κοινό σημείο (σχ. 4.21).

Δυο ευθείες e_1 και e_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες ευθείες**. Δύο παράλληλες ευθείες e_1 και e_2 τις συμβολίζουμε $e_1 \parallel e_2$.

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες e_1 και e_2 του επιπέδου, και ευθεία d που τέμνει τις e_1 και e_2 στα σημεία A και B αντίστοιχα (σχ. 4.22). Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Οι τέσσερις έχουν κορυφή το σημείο A και οι άλλες τέσσερις το σημείο B . Για τις γωνίες αυτές, ανάλογα με τη θέση τους, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ονομασίες:

1) Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες e_1 και e_2 λέγονται «**εντός**» και όλες οι άλλες «**εκτός**».

2) Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας d λέγονται «**επί τα αυτά μέρη**», ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της d λέγονται «**εναλλάξ**».

Με συνδυασμό των δύο χαρακτηρισμών, για κάθε ζευγάρι γωνιών (μία γωνία με κορυφή το A και η άλλη με κορυφή το B) προκύπτει μια ονομασία που δείχνει τις θέσεις τους σε σχέση με τις παράλληλες ευθείες, αλλά και σε σχέση με την τέμνουσα d . Έτσι:

1) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_4$ είναι **εντός εναλλάξ**.

2) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_3$ είναι **εντός και επί τα αυτά**.

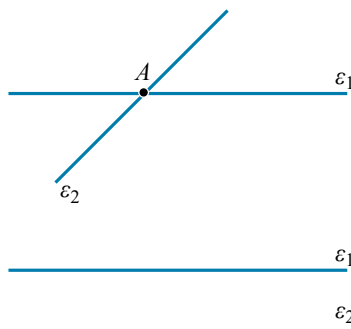
3) Οι γωνίες $\hat{A}_4$ και $\hat{B}_4$ είναι **εντός εκτός και επί τα αυτά**.

Από τις 8 γωνίες που σχηματίζονται οι 4 είναι οξείες και οι 4 αμβλείες. Αποδεικνύεται ότι όλες οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και όλες οι αμβλείες είναι επίσης ίσες. Μια οξεία γωνία και μία αμβλεία είναι παραπληρωματικές. Επομένως, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

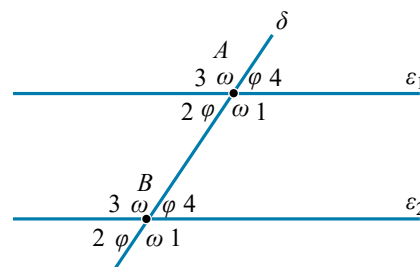
Θεώρημα 4.2: Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

- 1) τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,
- 2) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
- 3) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Θεώρημα 4.3: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .



Σχ. 4.21



Σχ. 4.22

Απόδειξη

Στο σχήμα 4.23 θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Από μία κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$. Τότε:

$\hat{B} = B\hat{A}x = \omega$ ως εντός εναλλάξ των $B\Gamma \parallel xy$ που τέμνονται από την ΑΒ.

$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}y = \varphi$ ως εντός εναλλάξ των $B\Gamma \parallel xy$ που τέμνονται από την ΑΓ. Η $x\hat{A}y$ είναι ευθεία γωνία, άρα:

$$\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\varphi} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω πορίσματα:

Πόρισμα 4.1: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.24 ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

$$\hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{\Gamma} \quad (2)$$

Από (1) και (2) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\varphi}$, δηλαδή η εξωτερική γωνία $A\hat{\Gamma}x = \varphi$ ισούται με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών $\hat{A}, \hat{B}$.

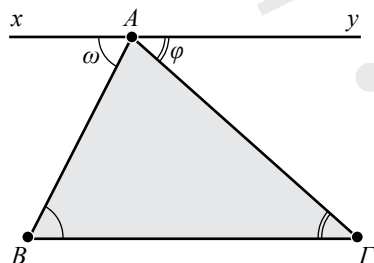
Πόρισμα 4.2: Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

Απόδειξη

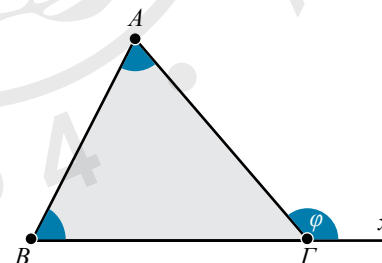
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ.$$

Άρα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές.



Σχ. 4.23



Σχ. 4.24

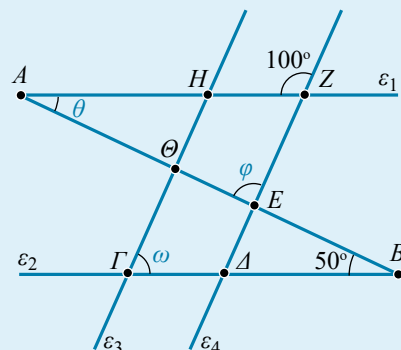
**Παράδειγμα 4.2**

Αν για τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ του σχήματος 4.25 ισχύει: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$, να υπολογιστούν οι γωνίες θ, ω, φ .

Λύση

$\hat{\theta} = 50^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ΑΒ.

$\hat{\Gamma}\hat{A}Z = 120^\circ$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά των $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ε_4 .



Σχ. 4.25

$\hat{\omega} + \Gamma\hat{\Delta}Z = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ$ ως εντός κι επί τα αυτά των $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$ που τέμνονται από την ε_2 .

$$E\hat{Z}H + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{Z}H = 60^\circ$$

$$\text{Στο τρίγωνο AEZ: } \hat{\theta} + \hat{\varphi} + E\hat{Z}H = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{\varphi} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 70^\circ$$

4.4 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

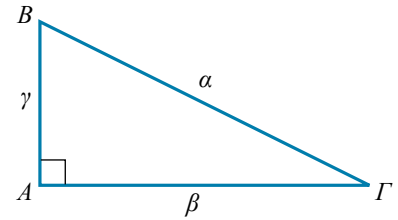
Θεώρημα 4.4: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Δηλαδή, στο τρίγωνο του σχήματος 4.26 έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \text{ ή}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$



Σχ. 4.26

Πρόβλημα 4.1

Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο. Το 1^ο πλοίο πλέει με ταχύτητα 20 knots με κατεύθυνση προς Βορρά και το 2^ο πλοίο με ταχύτητα 16 knots με κατεύθυνση προς Δύση. Ποια θα είναι η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 ώρες;

Λύση

Αν μετά από 3 ώρες το 1^ο πλοίο βρίσκεται στο σημείο Α και το 2^ο στο σημείο Β, τότε όπως φαίνεται στο σχήμα 4.27 το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο με $A\hat{O}B = 90^\circ$

Τα μήκη των πλευρών ΟΑ και ΟΒ είναι:

$$OA = 20 \cdot 3 = 60 \text{ ν.μ.}$$

$$OB = 16 \cdot 3 = 48 \text{ ν.μ.}$$

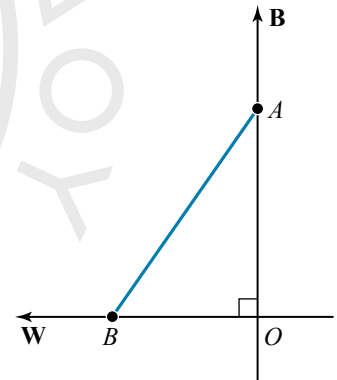
Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΟΒ έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow$$

$$AB^2 = 60^2 + 48^2 \Leftrightarrow$$

$$AB^2 = 5904 \Leftrightarrow$$

$$AB = \sqrt{5904} = 76,837 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 4.27

Θεώρημα 4.5: (Αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος)

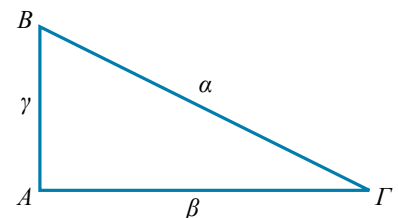
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Δηλαδή, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.28 ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^\circ$.

Για παράδειγμα ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 13$ και $\gamma = 5$ είναι ορθογώνιο, διότι:

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= 13^2 = 169 \\ \alpha^2 + \gamma^2 &= 12^2 + 5^2 = 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

$$\text{Άρα } \hat{B} = 90^\circ$$



Σχ. 4.28

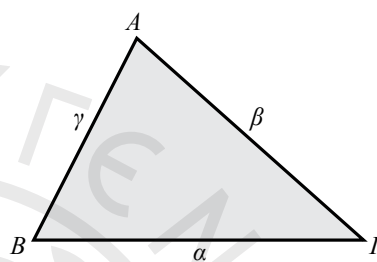
4.5 Ισότητα τριγώνων

Η γωνία ενός τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη γωνία** των πλευρών αυτών. Έτσι, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 4.29 η γωνία $\hat{A}$, λέγεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών β και γ . Οι γωνίες που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκειμένες γωνίες** της πλευράς αυτής. Δηλαδή οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ λέγονται **προσκειμένες γωνίες** στη πλευρά α .

Δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα** όταν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός προς το άλλο ταυτίζονται. Συνεπώς:

Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, και αντιστρόφως, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Όμως, για να αποδειχθεί ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, δεν είναι απαραίτητο να αποδειχθεί ότι όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες. Υπάρχουν κάποιες προτάσεις – κανόνες με τις οποίες εξασφαλίζεται η ισότητα δύο τριγώνων με την απόδειξη ισότητας τριών μόνο κατάλληλων κύριων στοιχείων. Οι προτάσεις αυτές ονομάζονται **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.



Σχ. 4.29

– 1° Κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

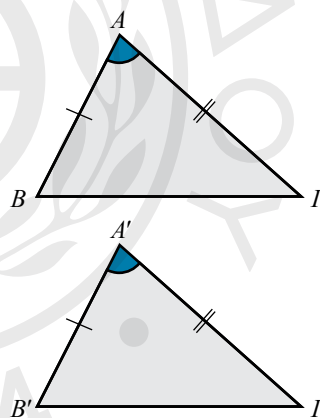
Δηλαδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος 4.30 έχουν:

$$AB = A'B'$$

$$A\Gamma = A'\Gamma'$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

Άρα είναι ίσα.



Σχ. 4.30

Σχόλιο: Η συντομογραφία Π-Γ-Π σημαίνει: Πλευρά – Γωνία – Πλευρά.

– 2° Κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκειμένες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

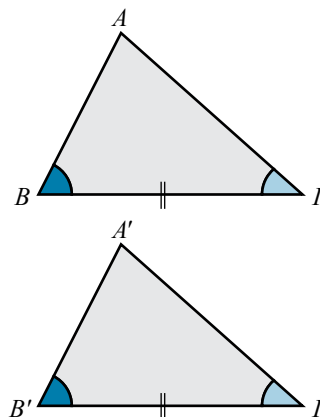
Δηλαδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος 4.31 έχουν:

$$B\Gamma = B'\Gamma'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

Άρα είναι ίσα.



Σχ. 4.31

– 3° Κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Δηλαδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος 4.32 έχουν:

$$B\Gamma = B'\Gamma'$$

$$AB = A'B'$$

$$A\Gamma = A'\Gamma'$$

Άρα είναι ίσα.

Θεώρημα 4.6: Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο:

- 1) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- 2) Η διχοτόμος προς τη βάση είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

1) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ (σχ. 4.33). Φέρνουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:

$$AB = A\Gamma \text{ από υπόθεση}$$

$$A\Delta \text{ κοινή και}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ διότι η } A\Delta \text{ είναι διχοτόμος της } \hat{A}$$

Άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Δηλαδή οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.

2) Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν $B\Delta = \Delta\Gamma$. Επομένως η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου. Επίσης θα έχουν $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Ισχύει:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$$

Επομένως το $A\Delta$ είναι και ύψος του τριγώνου.

Θεώρημα 4.7: Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο του σχήματος 4.33 και έστω ότι η $A\Delta$ είναι διάμεσος. Τότε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:

$$AB = A\Gamma \text{ από υπόθεση,}$$

$$A\Delta \text{ κοινή και}$$

$$B\Delta = \Delta\Gamma \text{ επειδή } A\Delta \text{ είναι διάμεσος.}$$

Άρα από κριτήριο Π-Π-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ οπότε η $A\Delta$ είναι διχοτόμος. Επίσης, θα έχουν:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \text{ Ισχύει:}$$

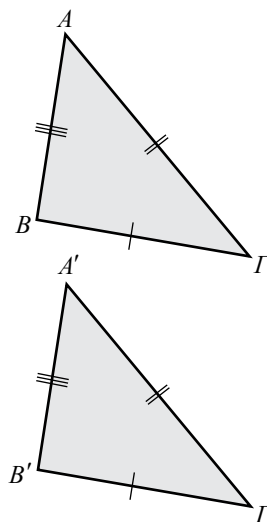
$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$$

Επομένως το $A\Delta$ είναι και ύψος του τριγώνου.

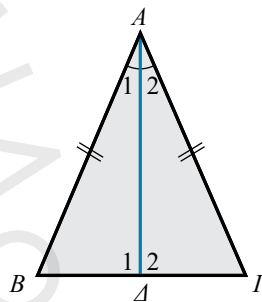
– Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση, την ορθή, τα προηγούμενα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων απλοποιούνται.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Κριτήριο Π-Π-Π).



Σχ. 4.32



Σχ. 4.33

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οποιαδήποτε πλευρά και μία οξεία γωνία ίση, τότε θα είναι ίσα. Πράγματι, επειδή είναι ορθογώνια θα έχουν μαζί με την ορθή 2 ίσες γωνίες. Οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Κριτήριο Γ-Π-Γ).

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε τα παρακάτω κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- 1) δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- 2) μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Θεώρημα 4.8: Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Απόδειξη

Θεωρούμε γωνία $\angle xOy$ και έστω Oz η διχοτόμος της (σχ. 4.34).

Έστω A τυχαίο σημείο της Oz . Αν $AB, \Gamma\Gamma$ είναι οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές της γωνίας, θα δείξουμε ότι:

$$AB = \Gamma\Gamma.$$

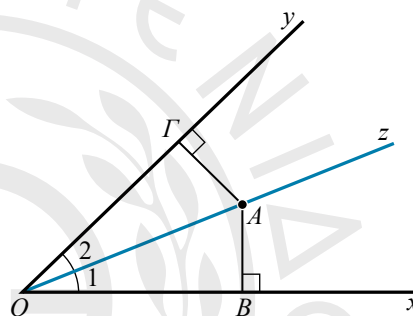
Τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle A\Gamma\Gamma$ έχουν:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ (ορθογώνια)}$$

OA κοινή

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ αφού } Oz \text{ διχοτόμος.}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $AB = \Gamma\Gamma$.



Σχ. 4.34

4.6 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η ευθεία ϵ που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος** του AB (σχ. 4.35).

Θεώρημα 4.9: Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ϵ ενός ευθύγραμμου τμήματος AB που το τέμνει στο σημείο M (σχ. 4.36). Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι $\Sigma A = \Sigma B$.

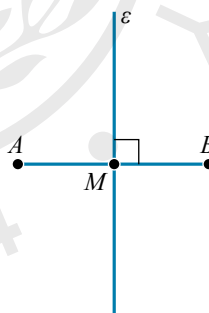
Τα τρίγωνα $\triangle AM\Sigma$, $\triangle BM\Sigma$ έχουν:

$$\hat{\Sigma}MA = \hat{\Sigma}MB = 90^\circ \text{ (ορθογώνια)}$$

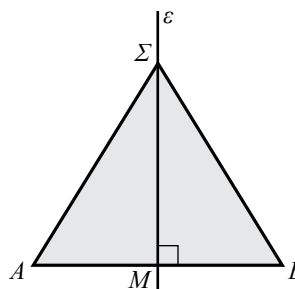
ΣM κοινή και

$$AM = MB, \text{ αφού το } M \text{ είναι μέσον του } AB.$$

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\Sigma A = \Sigma B$.



Σχ. 4.35



Σχ. 4.36

Σχόλιο: Ισχύει και το αντίστροφο της Θεώρημα 4.9: Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι σημείο της μεσοκαθέτου του (προφανές, αφού σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο).

4.7 Ομοιότητα τριγώνων

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, λέγονται **όμοια**.

Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών δύο πολυγώνων λέγεται **λόγος ομοιότητας** αυτών και συμβολίζεται με λ . Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με $\approx$.

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.

Για τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' του σχήματος 4.37 ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \frac{2}{3} \text{ και } \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta},$$

Επομένως τα τετράπλευρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{2}{3}$

Στην ειδική περίπτωση των τριγώνων, η ομοιότητά τους μπορεί να τεκμηριωθεί απλούστερα. Παρακάτω έχουμε τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων:

-Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

1^ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

2^ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

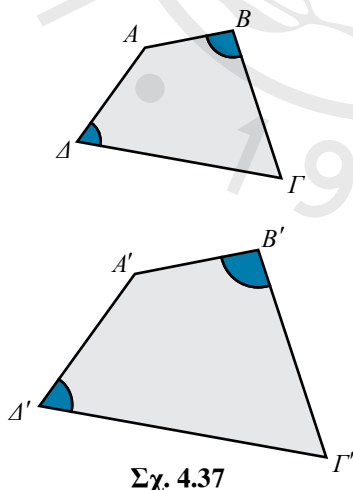
3^ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες τότε είναι όμοια.

Έτσι για τα τρίγωνα του σχήματος 4.38 έχουμε:

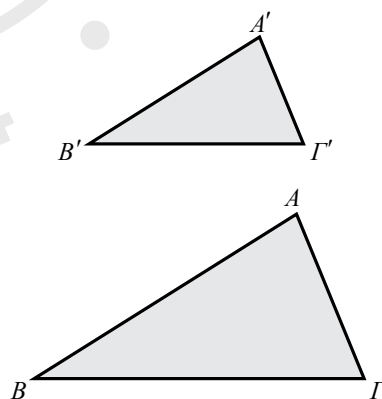
1) Αν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (1^ο κριτήριο)

2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (2^ο κριτήριο)

3) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ τότε: $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ (3^ο κριτήριο)



Σχ. 4.37



Σχ. 4.38



Παράδειγμα 4.3

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 4.39). Να υπολογιστούν τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ αν γνωρίζουμε ότι ΒΓ=13 cm και ΑΒ=5 cm.

Λύση

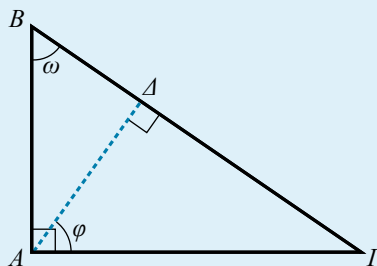
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta B$ έχουν:

$\hat{A} = \hat{A\Delta B} = 90^\circ$ και $\hat{B}$ κοινή.

Άρα έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε από 1° κριτήριο είναι όμοια. Επομένως θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους είναι ίσοι. (Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες). Άρα ισχύει:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{13} = \frac{B\Delta}{5} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{25}{13} \text{ cm}$$

$$\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \text{ cm}$$



Σχ. 4.39

Πρόβλημα 4.2

Ένας φαροφύλακας ύψους 1,8 m θέλει να υπολογίσει το ύψος του φάρου. Για να το πετύχει αυτό μέτρησε την ίδια χρονική στιγμή το μήκος της σκιάς του και της σκιάς του φάρου. Πόσο ύψος έχει ο φάρος αν η σκιά του φαροφύλακα έχει μήκος 3,6m και η σκιά του φάρου 18 m;

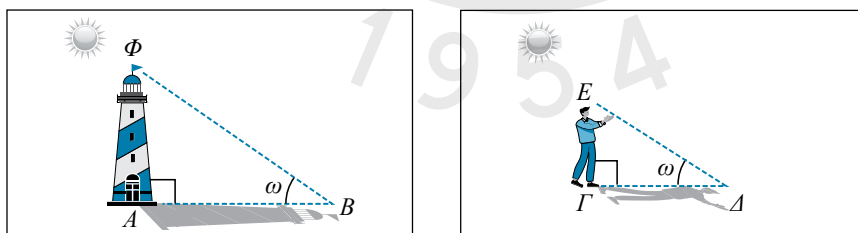
Λύση

Τα τρίγωνα ΦAB και $E\Gamma\Delta$ του σχήματος 4.40 είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες:

$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\Phi A}{E\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\Phi A}{1,8} = \frac{18}{3,6} \Leftrightarrow 3,6 \cdot \Phi A = 32,4 \Leftrightarrow \Phi A = 9 \text{ m}$$



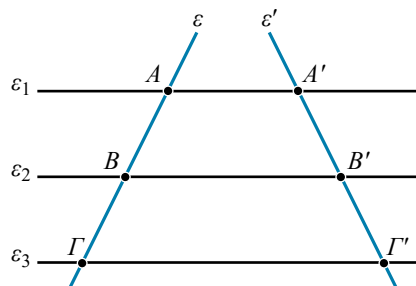
Σχ. 4.40

4.8 Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

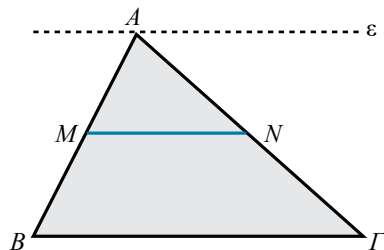
Θεώρημα 4.10: Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Δηλαδή, αν στο σχήμα 4.41 οι ευθείες ε_1 , ε_2 , ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν την ευθεία ε σε σημεία Α, Β και Γ και ορίζουν σε αυτήν ίσα τμήματα, δηλαδή $AB = B\Gamma$, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε' , δηλαδή θα ισχύει: $A'B' = B'T'$.

Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 4.42, φέρουμε από την κορυφή A ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$ και από το μέσο M της AB φέρουμε $MN \parallel B\Gamma$, τότε οι παράλληλες ε , MN , $B\Gamma$ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Άρα $AN = N\Gamma$.



Σχ. 4.41



Σχ. 4.42

Επομένως οδηγηθήκαμε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.11: Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

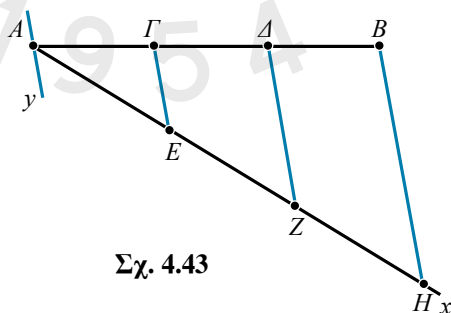
Πόρισμα 4.3: (Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ίσα τμήματα)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ. 4.43) σε 3 ίσα τμήματα, χωρίς να μετρήσουμε με τον χάρακα το μήκος.

Λύση

Από το σημείο A φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Ax . Στην Ax παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα AE , EZ , ZH . Ενώνουμε τα σημεία B , H και από τα σημεία Z , E , A φέρουμε $Z\Delta$, $E\Gamma$, $A\gamma$ παράλληλες προς τη BH . Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Ax ίσα τμήματα, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.10 θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AB . Έτσι διαιρέθηκε το AB σε 3 ίσα τμήματα: $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔB .

Σχόλιο: Στην παράγραφο 4.12 αυτού του κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε με γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Εκεί θα δούμε πώς σχεδιάζεται μια ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία.

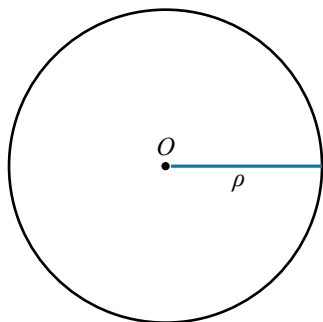


Σχ. 4.43

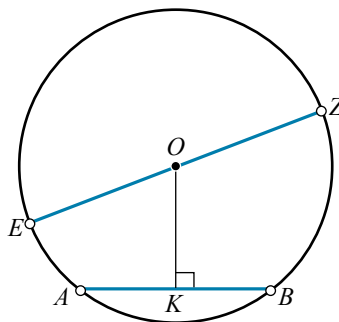
4.9 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε σταθερό σημείο O του επιπέδου. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν την ίδια απόσταση ρ από το σημείο O ονομάζεται **κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα ρ** , και συμβολίζεται (O, ρ) (σχ. 4.44)

Έστω δύο σημεία A και B του κύκλου (σχ. 4.45). Τα A και B χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται **τόξο** του κύκλου με άκρα A και B και συμβολίζεται με $\widehat{AB}$.



Σχ. 4.44



Σχ. 4.45

Ειδικά, το τόξο του κύκλου που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**. Άρα ένα τόξο α rad κύκλου ακτίνας ρ, έχει μήκος:

$$l = \alpha \cdot \rho$$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ορίζεται από τα άκρα A,B ενός τόξου λέγεται **χορδή** του τόξου. Μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου. Η διάμετρος είναι η διπλάσια της ακτίνας. Χωρίζει το κύκλο σε δύο ίσα μέρη καθένα από τα οποία λέγεται **ημικύκλιο**. Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα EZ (σχ. 4.45) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία E, Z είναι αντιδιαμετρικά σημεία

4.9.1 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

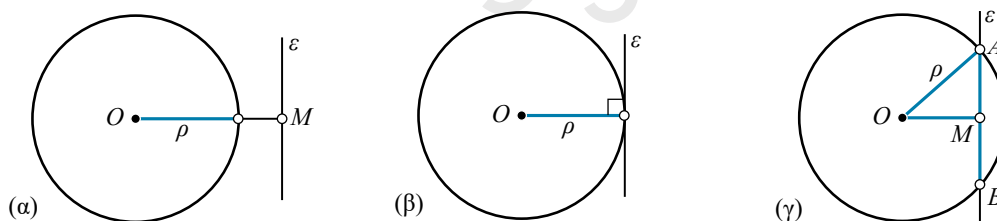
Θεωρούμε έναν κύκλο (O, ρ) μία ευθεία ε και την απόσταση $\delta = OM$ του κέντρου O από την ε.

Αν $\delta > \rho$, η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική του κύκλου** [σχ. 4.46(α)]

Αν $\delta = \rho$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M. Τότε η ευθεία λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο M, ή λέμε ότι εφαπτεται του κύκλου στο σημείο M [σχ. 4.46(β)]. Το κοινό σημείο M λέγεται **σημείο επαφής**. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Αν $\delta < \rho$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία A και B, η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα A και B [σχ. 4.46(γ)].



Σχ. 4.46

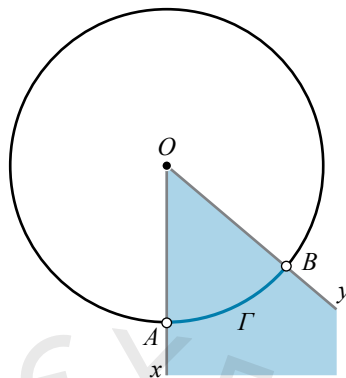
4.9.2 Μέτρο τόξου

Μία γωνία λέγεται **επίκεντρο** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου. Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.47 η $\angle XOY$ είναι μία επίκεντρο γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και B. Το τόξο $\widehat{AB}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα A, B λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρος γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρο γωνία $\angle AOB$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{AB}$.

Ως **μέτρο του τόξου** ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, επομένως ο κύκλος θεωρείται τόξο μέτρου 360° .

Το ημικύκλιο είναι τόξο μέτρου 180° .



Σχ. 4.47

4.9.3 Εγγεγραμμένη γωνία

Μια γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ που η κορυφή της A είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** του κύκλου (σχ. 4.48)

Το $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία **βαίνει** στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Θεώρημα 4.12: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Δηλαδή στο σχήμα 4.49:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2}$$

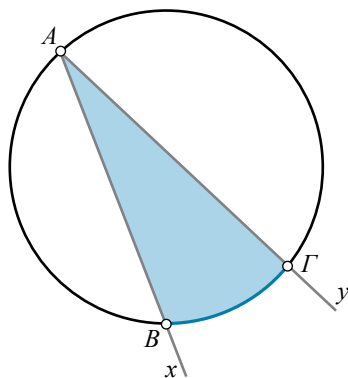
Επειδή γνωρίζουμε ότι η επίκεντρη γωνία έχει ίδιο μέτρο με το αντίστοιχο τόξο της, προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω πορίσματα.

Πορίσματα:

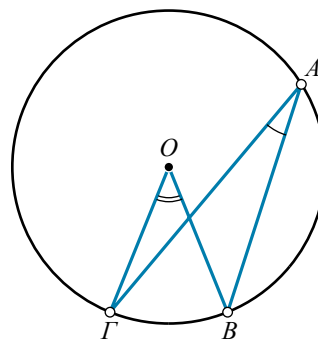
1) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Δηλαδή στο σχήμα 4.49:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2}$$



Σχ. 4.48

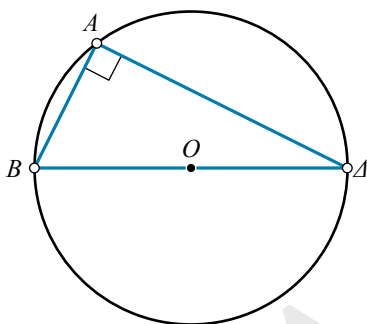


Σχ. 4.49

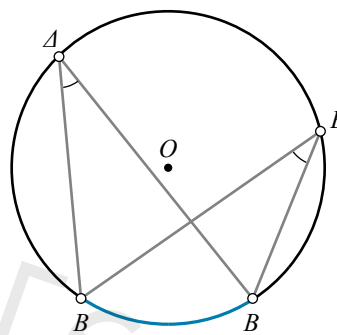
2) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Δηλαδή στο σχήμα 4.50

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = 90^\circ$$

3) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα. Δηλαδή στο σχήμα 4.51 $\hat{A} = \hat{E}$.



Σχ. 4.50



Σχ. 4.51



Παράδειγμα 4.4

Στο σχήμα 4.52 η BD είναι διάμετρος και $\hat{A} = 40^\circ$. Να βρεθούν:

α) Οι γωνίες του τριγώνου BΓΔ.

β) Το τόξο ΓΔ.

Λύση

α) $\hat{\Delta} = \hat{A} = 40^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο BΓ.

Η BΓΔ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή:

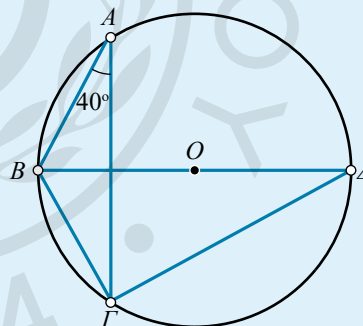
$$\widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο BΓΔ ισχύει:

$$\Delta\hat{B}\Gamma + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 50^\circ$$

β) Η ΓΒΔ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ΓΔ. Άρα:

$$\Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 50^\circ = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 100^\circ$$



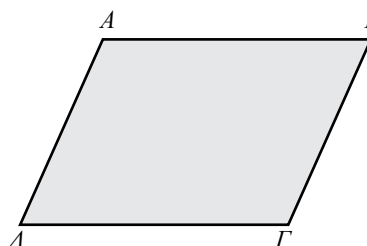
Σχ. 4.52

4.10 Τετράπλευρα

4.10.1 Παραλληλόγραμμο – Ιδιότητες παραλληλογράμμου

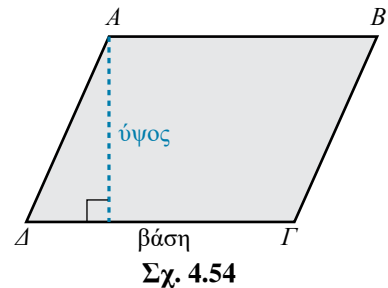
Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.53 το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$



Σχ. 4.53

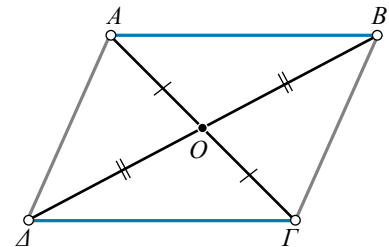
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι συγκεκριμένες απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς το ύψος αυτό (σχ. 4.54).



– Ιδιότητες παραλληλογράμμου

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος 4.55: $AB = ΔΓ$ και $ΑΔ = ΒΓ$
- 2) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
- 3) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΒΟ = ΟΔ$ (σχ. 4.55).



4.10.2 Ειδικά παραλληλόγραμμα

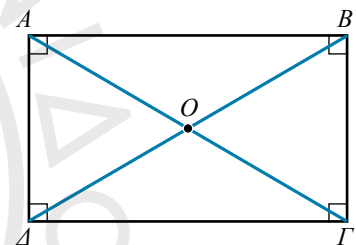
– Ορθογώνιο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Επειδή σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, τελικά προκύπτει ότι το ορθογώνιο έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

Ιδιότητα ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες. Στο σχήμα 4.56: $ΑΓ = ΒΔ$.



– Ρόμβος

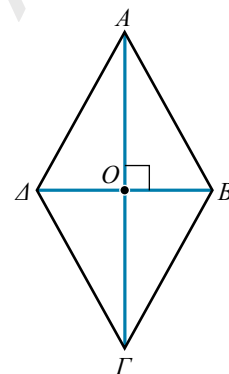
Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (σχ. 4.57).

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

Εκτός απ' τις κοινές ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε παραλληλόγραμμο, στο ρόμβο ισχύουν επιπλέον οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες ρόμβου

- 1) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- 2) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.



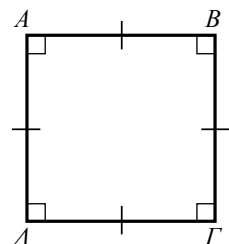
– Τετράγωνο

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος (σχ. 4.58).

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

Ιδιότητες τετραγώνου

- 1) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- 2) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- 3) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



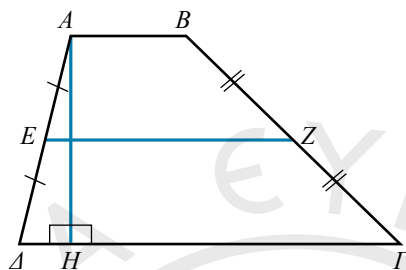
4.10.3 Τραπεζίιο

Τραπεζίιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται **βάσεις** του τραπεζίου (οι πλευρές AB και ΓΔ του σχ. 4.59).

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου και έχει τα άκρα του στους φορείς αυτών λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Δηλαδή στο σχήμα 4.59 το ΑΗ ύψος του τραπεζίου.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου (σχ. 4.59).



Σχ. 4.59

Θεώρημα 4.13: Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή στο τραπεζίιο του σχήματος 4.59 ισχύει:

$$EZ // AB // \Delta\Gamma \text{ και } EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$$

– Ισοσκελές τραπεζίιο

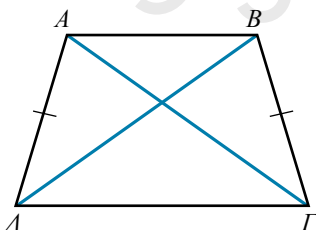
Ισοσκελές τραπεζίιο λέγεται το τραπεζίιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

- 1) Οι προσκειμένες γωνίες σε κάθε βάση του είναι ίσες.
- 2) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.60 έχουμε: $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

$$ΑΓ = ΒΔ.$$



Σχ. 4.60



Παράδειγμα 4.5

Θεωρούμε ισοσκελές τραπεζίιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) όπου ΑΒ=ΑΔ. Από τη κορυφή Β φέρνουμε ΒΕ//ΑΔ (Ε σημείο της ΔΓ)

- 1) Να αποδειχθεί ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$
- 2) Αν επιπλέον $\hat{A} = 120^\circ$ να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΔΒΓ.

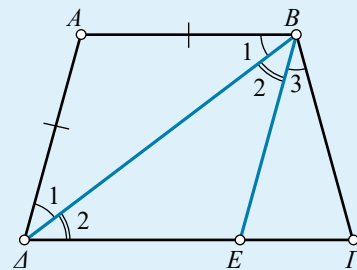
Λύση

α) Το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ (σχ. 4.61) είναι ισοσκελές αφού $AB=AD$. Άρα οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες, δηλαδή:

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1)$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2 \quad (2)$$

ως εντός εναλλάξ των $AB//\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$



Σχ. 4.61

Από (1) και (2): $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, δηλαδή δείξαμε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$

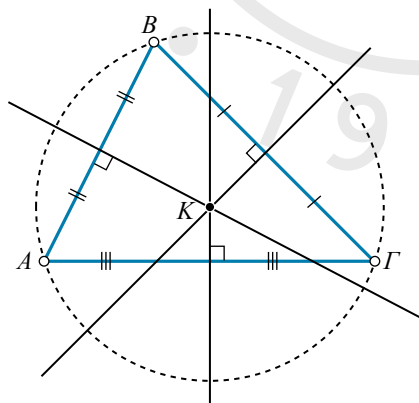
β) $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ ως εντός κι επί τα αυτά των $AB//\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AD . Άρα: $\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Επειδή $B\Delta$ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 30^\circ$, $\hat{B} = \hat{A} = 120^\circ$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$. Άρα: $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{B}_1 = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$. Τέλος $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου.

4.11 Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου**1) Περίκεντρο**

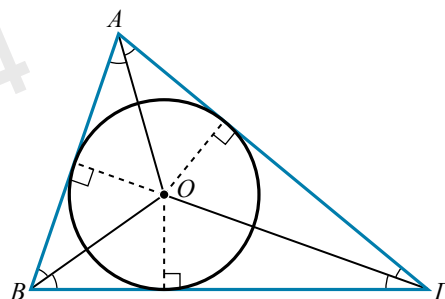
Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τριών πλευρών ενός τριγώνου λέγεται **περίκεντρο**. Το περίκεντρο είναι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου (σχ. 4.62).

2) Έγκεντρο

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **έγκεντρο**. Το έγκεντρο είναι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου (σχ. 4.63).



Σχ. 4.62



Σχ. 4.63

3) Βαρύκεντρο

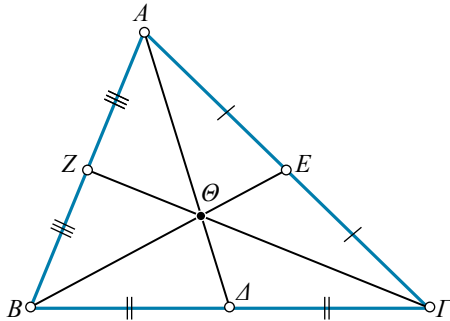
Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που ονομάζεται **βαρύκεντρο**.

Θεώρημα 4.14: Η απόσταση του βαρύκεντρου από κάθε κορυφή του τριγώνου είναι ίση με τα $2/3$ της αντίστοιχης διαμέσου. Δηλαδή στο σχήμα 4.64 ισχύει:

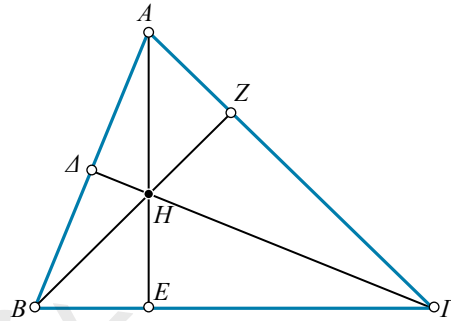
$$A\Theta = \frac{2}{3} AD \text{ και άρα } \Theta D = \frac{1}{3} AD$$

4) Ορθόκεντρο

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο του τριγώνου**. Στο σχήμα 4.65 το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχ. 4.64



Σχ. 4.65

4.12 Γεωμετρικές κατασκευές

Με τον όρο **γεωμετρική κατασκευή** εννοούμε την κατασκευή ενός σχήματος χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα γεωμετρικά όργανα, τα οποία είναι ο **κανόνας** και ο **διαβήτης**. Ο κανόνας είναι χάρακας χωρίς υποδιαίρέσεις. Δηλαδή τον χρησιμοποιούμε για να σχεδιάσουμε μια ευθεία, αλλά δεν μπορούμε να μετρήσουμε μήκη.

Θα ξεκινήσουμε με την κατασκευή της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος, στην οποία στηρίζονται οι περισσότερες απ' τις υπόλοιπες γεωμετρικές κατασκευές.

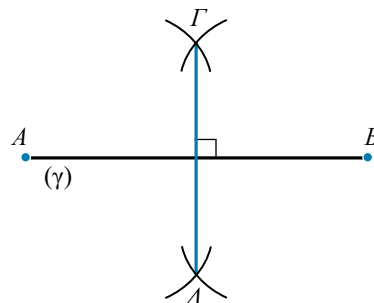
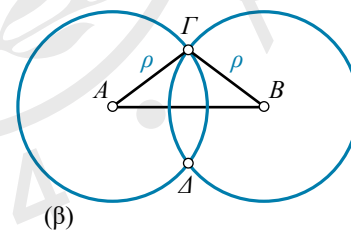
1) Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

Για την κατασκευή οποιασδήποτε ευθείας, άρα και της μεσοκαθέτου χρειαζόμαστε δύο σημεία της. Επειδή γνωρίζουμε ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν απ' τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, αρκεί να βρούμε 2 τέτοια σημεία.

α) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB .

β) Με κέντρα τα A και B , αντίστοιχα, σχεδιάζουμε κύκλους με ακτίνα μεγαλύτερη απ' το μισό του AB .

γ) Τα σημεία Γ και Δ , στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB , εφόσον τα Γ και Δ , ισαπέχουν από τα A και B , αφού είναι $A\Gamma = \Gamma B = A\Delta = \Delta B = \rho$. Επομένως με τον κανόνα σχεδιάζω την ευθεία που διέρχεται από τα Γ, Δ (σχ. 4.66).



Σχ. 4.66

Σχόλιο: Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος βρίσκουμε συγχρόνως και το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

2) Κατασκευή καθέτου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής

Έστω ευθεία ε και ένα σημείο A εκτός αυτής.

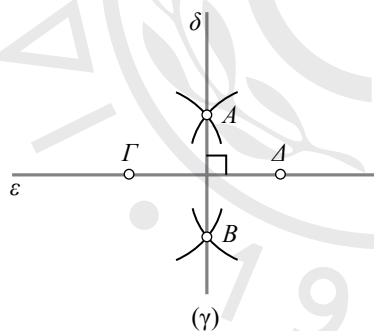
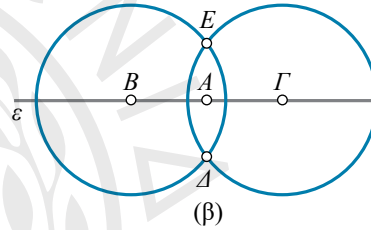
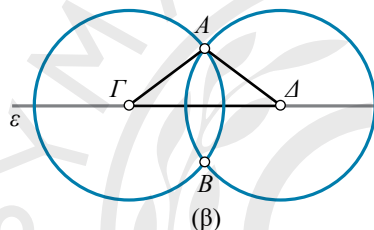
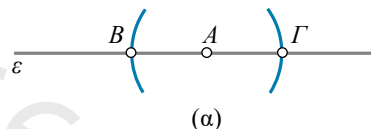
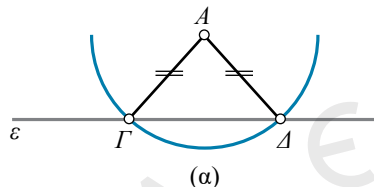
α) Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα τέτοια, ώστε ο κύκλος να τέμνει την ευθεία.

β) Αν Γ, Δ τα σημεία τομής του κύκλου με την ε , σχεδιάζουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος $\Gamma\Delta$, η οποία διέρχεται από το A . Δηλαδή χαράσσω κύκλους με κέντρα τα σημεία Γ και Δ και ακτίνα ίση με ΓA .

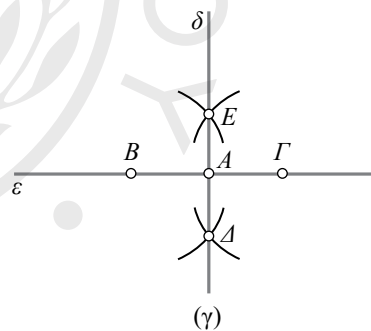
γ) Με τον κανόνα ενώνω τα σημεία τομής A και B των κύκλων (σχ. 4.67).

3) Κατασκευή καθέτου προς ευθεία σε δοσμένο σημείο αυτής

Έστω ευθεία ε και ένα σημείο A της ε . Με κέντρο το A και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία B και Γ . Τότε το A είναι μέσο του τμήματος $B\Gamma$ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. Άρα συνεχίζω όπως στην κατασκευή 1 (σχ. 4.68).



Σχ. 4.67



Σχ. 4.68

4) Κατασκευή διχοτόμου γωνίας

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη διχοτόμο της $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ (σχ. 4.69).

α) Με τον διαβήτη σχεδιάζουμε τόξο με κέντρο το A και με τυχαία ακτίνα, το οποίο τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία K και Λ αντίστοιχα.

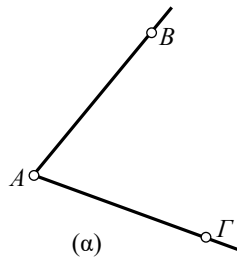
β) Με κέντρα τα σημεία K και Λ και σχεδιάζουμε τόξα τα οποία τέμνονται στο σημείο Δ .

γ) Με τον κανόνα σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ το οποίο διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

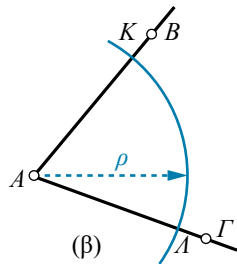
Εξήγηση: Πράγματι η ευθεία $A\Delta$, ως μεσοκάθετος της χορδής $K\Lambda$ του κύκλου, θα είναι ύψος και διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AK\Lambda$. Άρα θα είναι και διχοτόμος αυτού.

5) Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου

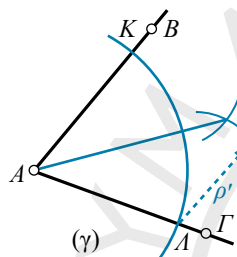
α) Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο A εκτός αυτού.



(α)

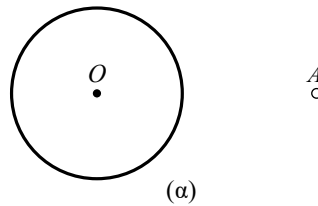


(β)

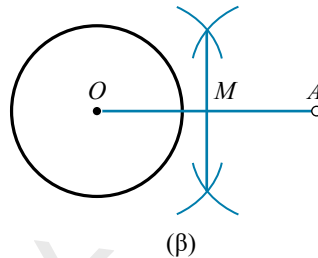


(γ)

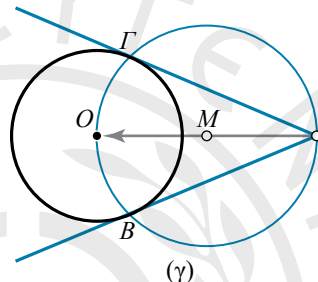
Σχ. 4.69



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 4.70

β) Ενώνω το σημείο A με το κέντρο O του κύκλου και κατασκευάζω την μεσοκάθετη του OA (κατασκευή 1) Έτσι βρίσκω το μέσο M του OA.

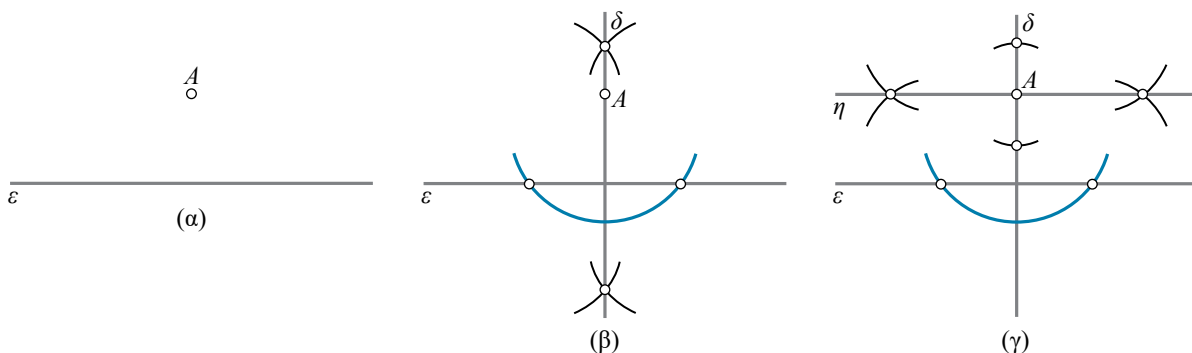
γ) Με κέντρο το M και ακτίνα ίση με OM κατασκευάζω κύκλο, που τέμνει τον αρχικό κύκλο στα σημεία Γ και Β. Οι ευθείες ΑΓ και ΑΒ εφάπτονται στον κύκλο (σχ. 4.70).

Εξήγηση: Τα σημεία Β και Γ είναι σημεία του κύκλου (O, ρ) αφού είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Επίσης, οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}O$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}O$ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (M, OM) που βαίνουν σε ημικύκλιο. Άρα οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής, οπότε είναι εφαπτομένες του (O, ρ).

6) Κατασκευή παράλληλης ευθείας από σημείο A προς δοσμένη ευθεία ε.

α) Κατασκευάζουμε την κάθετη ευθεία δ στην ε από το σημείο A (κατασκευή 2).

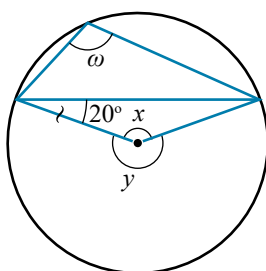
β) Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την ευθεία η κάθετη στην δ στο σημείο A, όπως περιγράψαμε (κατασκευή 3). Η η είναι παράλληλη στην ε (σχ. 4.71).



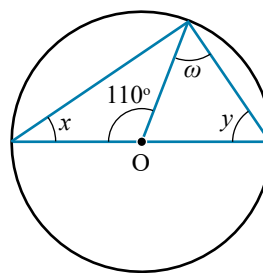
Σχ. 4.71

Ασκήσεις

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς AG , τέτοιο, ώστε $BA = B\Gamma$
 - Να υπολογιστούν οι γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A}$
- Αν AD διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $DE \parallel AB$ να δειχθεί ότι:
 - Το E είναι μέσο της πλευράς AG
 - $AD = \frac{B\Gamma}{2}$
- Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο O . Το 1^ο πλοίο πλέει με ταχύτητα 25 knots με κατεύθυνση προς Βορρά και το 2^ο πλοίο με ταχύτητα 20 knots με κατεύθυνση προς Ανατολή. Ποια θα είναι η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 ώρες;
- Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο O . Το 1^ο πλοίο πλέει με ταχύτητα 18 knots με κατεύθυνση προς Δ και το 2^ο πλοίο πλέει με κατεύθυνση προς N . Μετά από 2 ώρες η απόσταση των δύο πλοίων είναι 80 ν.μ. Να βρεθεί η ταχύτητα του δεύτερου πλοίου.
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, φέρνουμε το ύψος AD . Αν $DB=4\text{ cm}$ και $D\Gamma=9\text{ cm}$, να βρεθεί το ύψος AD .
- Να αποδειχθούν οι ιδιότητες παραλληλογράμμου.
- Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ορθογωνίου.
- Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ρόμβου.
- Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπέζιου.
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\chi} = 120^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $AD = AB$. Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$.
- Να διαιρεθεί ευθυγραμμο τμήμα AB σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.
- Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.
 - Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
 - Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED και $BZ\Gamma$ είναι ίσα
- Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $BD = B\Gamma$. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 25^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ .
- Στα σχήματα 4.72(α) (β) να υπολογιστούν οι γωνίες x , y και ω .

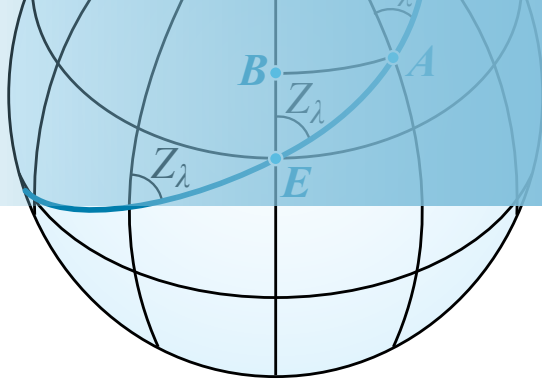


(α)



(β)

Σχ. 4.72



Επίπεδη τριγωνομετρία

Σε αυτό το κεφάλαιο, υπενθυμίζουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της επίπεδης τριγωνομετρίας. Η τριγωνομετρία αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση πολλών προβλημάτων της Ναυτιλίας γι' αυτόν το λόγο, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

5.1 Μονάδες μέτρησης γωνιών

1) Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε **μοίρες** και τις υποδιαιρέσεις της: **πρώτα λεπτά** και **δεύτερα λεπτά**.

1 μοίρα: 1°

Το **1 πρώτο λεπτό** συμβολίζεται $1'$ και είναι τέτοιο ώστε: $1' = \frac{1}{60} 1^\circ$

Το **1 δεύτερο λεπτό** συμβολίζεται $1''$ και είναι τέτοιο ώστε: $1'' = \frac{1}{60} 1'$

Ισχύει: $1^\circ = 60' = 3600''$ και $1' = 60''$

Για παράδειγμα αν μια γωνία ω είναι 30 μοίρες, 24 πρώτα λεπτά και 52 δεύτερα λεπτά, γράφουμε: $\omega = 30^\circ 24' 52''$

2) Μια άλλη μονάδα μέτρησης γωνιών είναι το ακτίνιο.

Ακτίνιο ή rad είναι η γωνία που όταν είναι επίκεντρη σε κύκλο, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου (σχ. 5.1).

Εφόσον γνωρίζουμε ότι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι $2\pi\rho$, η γωνία που είναι 360° είναι ίση με 2π ακτίνια.

Άρα, η σχέση μοιρών και ακτίνων είναι: $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\mu}{360^\circ}$ ή με απλοποίηση:

$$\text{Σχέση μοιρών ακτίνων} \quad \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^\circ}$$

όπου: μ οι μοίρες μιας γωνίας και α τα ακτίνια της ίδιας γωνίας.

Θέτοντας στον παραπάνω τύπο όπου α το 1, και λύνοντας ως προς μ προκύπτει ότι:

$$1 \text{ rad αντιστοιχεί σε } \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,29578^\circ$$

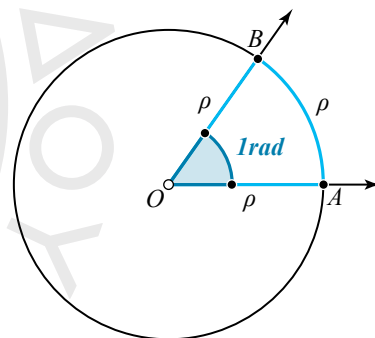
Με τον παραπάνω τύπο μπορούμε να μετατρέψουμε μια γωνία από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα. Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε τη γωνία 72° σε ακτίνια, θέτουμε στον παραπάνω τύπο όπου: $\mu = 72^\circ$:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{72^\circ}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μοίρες και ακτίνια για τις πιο συνηθισμένες γωνίες παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Θεωρούμε **ορθογώνιο** τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90$. Ορίζουμε τους τρι-



Σχ. 5.1

Πίνακας 5.1

Μοίρες		Ακτίνια
0°	$\leftrightarrow$	0 rad
30°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$
45°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$
60°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
90°	$\leftrightarrow$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
180°	$\leftrightarrow$	$\pi \text{ rad}$
360°	$\leftrightarrow$	$2\pi \text{ rad}$

γωνομετρικούς αριθμούς της **οξείας** γωνίας $\hat{B} = \omega$ (σχ. 5.2) ως εξής:

Ημίτονο της ω :

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

Συνημίτονο της ω :

$$\sigma\eta\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

Εφαπτομένη της ω :

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$

Συνεφαπτομένη της ω :

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{AG} = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$$

Τέμνουσα της ω :

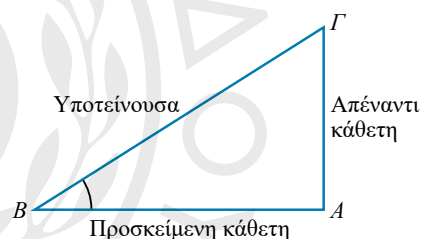
$$\tau\epsilon\mu\omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{BG}{AB} = \frac{1}{\sigma\eta\omega}$$

Συντέμνουσα της ω :

$$\sigma\tau\epsilon\mu\omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{BG}{AG} = \frac{1}{\eta\mu\omega}$$

Συμβολισμοί

Ελληνικός συμβολισμός	Αγγλικός συμβολισμός
ημ	sin
συν	cos
εφ	tan
σφ	cot
τεμ	s
στεμ	csc



Σχ. 5.2



Παράδειγμα 5.1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ (σχ. 5.3) με $\hat{A} = 90^\circ$, δίνονται η πλευρά BG = 50 cm και η γωνία $\hat{B} = 48^\circ$. Να βρεθούν οι υπόλοιπες πλευρές του και η γωνία $\hat{\Gamma}$

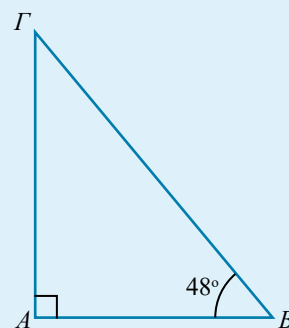
Λύση

$$\begin{aligned}\eta\mu B = \frac{AG}{BG} &\Leftrightarrow \eta\mu 48^\circ = \frac{AG}{50} \Leftrightarrow 0,74314 = \frac{AG}{50} \Leftrightarrow AG = \\ &= 0,74314 \cdot 50 \Leftrightarrow AG = 37,157 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\eta B = \frac{AB}{BG} &\Leftrightarrow \sigma\eta 48^\circ = \frac{AB}{50} \Leftrightarrow 0,66913 = \frac{AB}{50} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AB = 0,66913 \cdot 50 \Leftrightarrow AB = 33,4565 \text{ cm}\end{aligned}$$

Για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 48^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 42^\circ\end{aligned}$$



Σχ. 5.3



Πρόβλημα 5.1

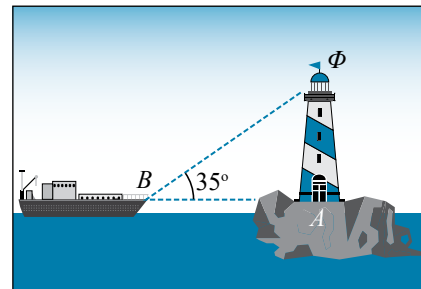
Ένας φαροφύλακας εντοπίζει ένα σκάφος κοντά στην ακτή, και εστιάζει πάνω του με τον προβολέα. Αν το φως του προβολέα σχηματίζει γωνία 35° με τον οριζοντα, να βρεθεί η απόσταση της βάρκας από τον φάρο. Δίνεται ότι ο προβολέας βρίσκεται σε ύψος 42 m.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Phi$ του σχήματος 5.4 έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 35^\circ = \frac{A\Phi}{AB} \Leftrightarrow 0,7 = \frac{42}{AB} \Leftrightarrow 0,7 \cdot AB = 42 \Leftrightarrow AB = \frac{42}{0,7} \Leftrightarrow AB = 60.$$

Άρα η βάρκα βρίσκεται σε απόσταση 60 m από τον φάρο.



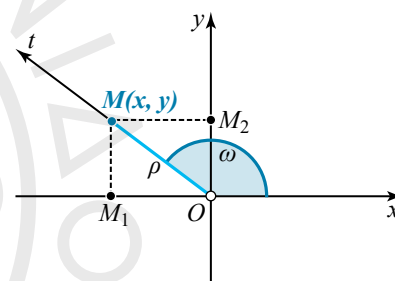
Σχ. 5.4

5.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$. Μια γωνία μεγαλύτερη των 90° , δεν μπορεί να είναι γωνία ορθογωνίου τριγώνου. Επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της με τους τύπους της παραγράφου 5.2.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Ox στο επίπεδο, και Ot μια ημιευθεία. Έστω ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί με φορά αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά) γύρω από το O μέχρι να συμπίψει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot . Ο ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά της γωνίας ω** , ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται **τελική πλευρά της ω** (σχ. 5.5).

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της τελικής πλευράς της γωνίας. Αν



Σχ. 5.5

$$\rho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων, ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της ω ως εξής:

$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$	$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$ (εφόσον $x \neq 0$)	όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$	$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$ (εφόσον $y \neq 0$)	

Για τις γωνίες 90° και 270° δεν ορίζεται η εφαπτομένη ($x = 0$) αντίστοιχα για τις γωνίες 0° και 180° δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη ($y = 0$).

1) Τριγωνομετρικός κύκλος

Για την καλύτερη απεικόνιση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών μάς διευκολύνει η χρήση του **τριγωνομετρικού κύκλου**. Ονομάζεται έτσι ο κύκλος ο οποίος έχει ως κέντρο των αρχή των αξόνων, ακτίνα $\rho = 1$ και είναι προσανατολισμένος θεωρώντας ως θετική φορά αυτή που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Όταν το σημείο $M(x, y)$ μιας γωνίας ω ανήκει και στον τριγωνομετρικό κύκλο (σχ. 5.6), δηλαδή όταν $OM = 1$, τότε οι παραπάνω τύποι παίρνουν την πιο απλή μορφή:

$$\eta\mu\omega = y \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \text{ με } x \neq 0$$

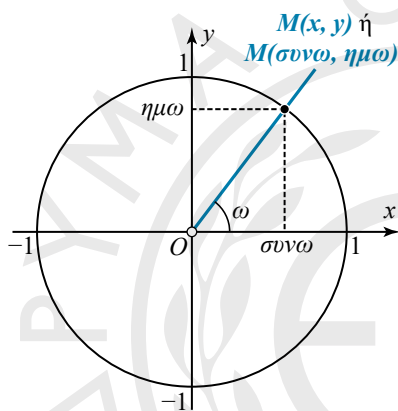
$$\sigma\upsilon\nu\omega = x \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \text{ με } y \neq 0$$

και θα ισχύει: $M(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$

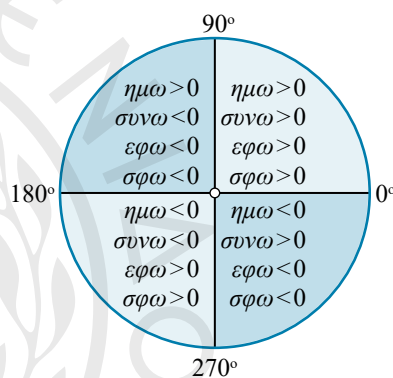
Παρατηρούμε ότι, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

2) Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω εξαρτάται από το πρόσημο των συντεταγμένων του σημείου $M(x, y)$ της τελικής πλευράς της. Στο σχήμα 5.7 φαίνεται το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική της πλευρά.



Σχ. 5.6



Σχ. 5.7



Παράδειγμα 5.2

Να υπολογιστούν το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη των γωνιών: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Λύση

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος 5.8.

Γωνία 0° : Χρησιμοποιούμε το σημείο $A(1,0)$ του τριγωνομετρικού κύκλου, οπότε:

$$\eta\mu 0^\circ = y = 0, \quad \sigma\upsilon\nu 0^\circ = x = 1, \quad \varepsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

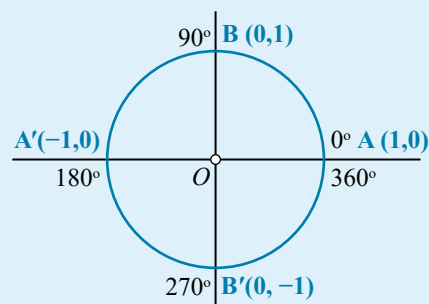
$$\sigma\varphi 0^\circ = \frac{x}{y} \text{ δεν ορίζεται, αφού } y = 0$$

Γωνία 90° : Χρησιμοποιούμε το σημείο $B(0,1)$ οπότε:

$$\eta\mu 90^\circ = y = 1, \quad \sigma\upsilon\nu 90^\circ = x = 0, \quad \varepsilon\varphi 90^\circ = \frac{y}{x}$$

$$\text{δεν ορίζεται, αφού } x = 0, \quad \sigma\varphi 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

Γωνία 180° : Χρησιμοποιούμε το σημείο $A'(-1,0)$:



Σχ. 5.8

$$\eta\mu 180^\circ = y = 0, \sigma\upsilon\nu 180^\circ = x = -1, \varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\sigma\varphi 180^\circ = \frac{x}{y} \text{ δεν ορίζεται, αφού } y = 0$$

Γωνία 270°: Χρησιμοποιούμε το σημείο $B'(0, -1)$:

$$\eta\mu 270^\circ = y = -1, \sigma\upsilon\nu 270^\circ = x = 0, \varepsilon\varphi 270^\circ = \frac{y}{x}, \text{ δεν ορίζεται, αφού } x = 0,$$

$$\sigma\varphi 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Στον πίνακα 5.2 παρατίθενται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των βασικότερων γωνιών.

Πίνακας 5.2

ω σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ω σε rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\varepsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\sigma\varphi\omega$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

5.4 Τύποι αναγωγής τριγωνομετρικών αριθμών στο 1° τεταρτημόριο

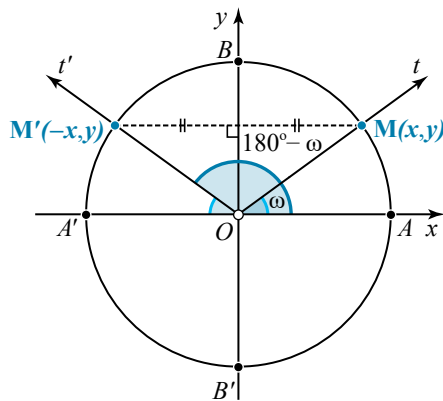
5.4.1 Παραπληρωματικές γωνίες

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο τομής της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω και του τριγωνομετρικού κύκλου, το αντίστοιχο σημείο για την παραπληρωματική της γωνία $180^\circ - \omega$ θα είναι το $M'(-x, y)$ (σχ. 5.9). Έχοντας υπόψη τους ορισμούς της παραγράφου 5.3, συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\eta\mu(180^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) &= -\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(180^\circ - \omega) &= -\sigma\varphi\omega\end{aligned}$$

Επομένως, **οι παραπληρωματικές γωνίες ω , $180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

Με τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.



Σχ. 5.9

Για παράδειγμα:

$$\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 120^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 120^\circ = \sigma\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\varphi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Παράδειγμα 5.3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = \sigma\upsilon\nu 55^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ + \sigma\upsilon\nu 125^\circ + 2\eta\mu 150^\circ$

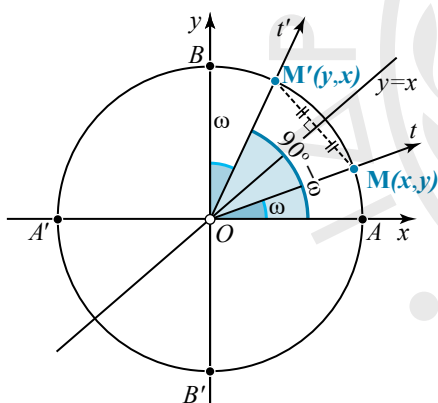
Λύση

$$\varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu 125^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 55^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 55^\circ$$

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$A = \sigma\upsilon\nu 55^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ + \sigma\upsilon\nu 125^\circ + 2\eta\mu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu 55^\circ - 1 - \sigma\upsilon\nu 55^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0$$



Σχ. 5.10

5.4.2 Συμπληρωματικές γωνίες

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.10, τα σημεία M και M' πάνω στις τελικές πλευρές των γωνιών ω και $90^\circ - \omega$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $1^{\text{ης}} - 3^{\text{ης}}$ γωνίας, οπότε η τετμημένη του ενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς, έχουμε:

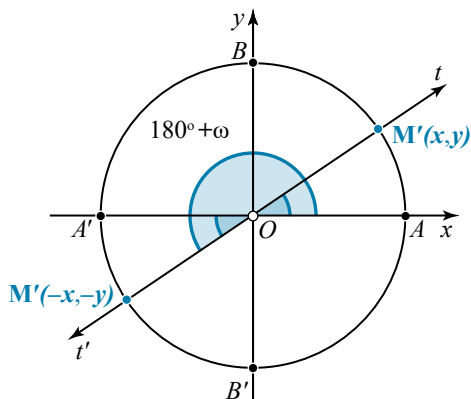
$$\begin{aligned}\eta\mu(90^\circ - \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) &= \sigma\varphi\omega \\ \sigma\varphi(90^\circ - \omega) &= \varepsilon\varphi\omega\end{aligned}$$

Επομένως, στις συμπληρωματικές γωνίες ισχύει ότι το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

5.4.3 Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11, το σημείο $M'(-x, -y)$ θα βρίσκεται πάνω στη τελική πλευρά της γωνίας $180^\circ + \omega$. Εάν εφαρμόσουμε τους ορισμούς, για τις γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ισχύουν:

$$\begin{aligned}\eta\mu(180^\circ + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) &= \varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi(180^\circ + \omega) &= \sigma\varphi\omega\end{aligned}$$



Σχ. 5.11

Επομένως, οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, και έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.



Παράδειγμα 5.4

Να αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3 \cdot \epsilon\varphi^2 135^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 250^\circ - \sigma\upsilon\nu 36^\circ + \sigma\upsilon\nu 110^\circ = 3$$

Λύση

$$\epsilon\varphi 135^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\varphi 45^\circ = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 54^\circ) = \eta\mu 54^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu 250^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 70^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu 110^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 70^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3 \cdot \epsilon\varphi^2 135^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 250^\circ - \sigma\upsilon\nu 36^\circ + \sigma\upsilon\nu 110^\circ &= \\ = \eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + 3 \cdot (-1)^2 - 2(-\sigma\upsilon\nu 70^\circ) - \eta\mu 54^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ &= \\ = 3 \cdot 1 + 2\sigma\upsilon\nu 70^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 70^\circ &= 3 \end{aligned}$$

5.5 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1, ταυτότητα είναι μια ισότητα που ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της. Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι σχέσεις που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικούς αριθμούς και ισχύουν για κάθε τιμή των γωνιών. Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικότερες τριγωνομετρικές ταυτότητες και μετασχηματισμοί.

1) Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$	$\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$	$\sigma\varphi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}$
$\sigma\varphi \omega = \frac{1}{\epsilon\varphi \omega}$	$\tau\epsilon\mu \omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \omega}$	$\sigma\tau\epsilon\mu \omega = \frac{1}{\eta\mu \omega}$
$\epsilon\varphi \omega \cdot \sigma\varphi \omega = 1$	$\tau\epsilon\mu^2 \omega = 1 + \epsilon\varphi^2 \omega$	$\sigma\tau\epsilon\mu^2 \omega = 1 + \sigma\varphi^2 \omega$

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu \alpha \cdot \eta\mu \beta$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \beta - \sigma\upsilon\nu \alpha \cdot \eta\mu \beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \beta - \eta\mu \alpha \cdot \eta\mu \beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \beta + \eta\mu \alpha \cdot \eta\mu \beta$$

$$\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta}{1 - \epsilon\varphi \alpha \cdot \epsilon\varphi \beta}$$

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi \alpha - \epsilon\varphi \beta}{1 + \epsilon\varphi \alpha \cdot \epsilon\varphi \beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi \alpha \cdot \sigma\varphi \beta - 1}{\sigma\varphi \alpha + \sigma\varphi \beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi \alpha \cdot \sigma\varphi \beta + 1}{\sigma\varphi \beta - \sigma\varphi \alpha}$$

3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

5.6 Επίλυση τυχαίου τριγώνου

Επίλυση τριγώνου ονομάζουμε την εύρεση όλων των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, δηλαδή όλων των πλευρών και όλων των γωνιών του. Κάθε τρίγωνο, ορθογώνιο ή μη, μπορεί να επιλυθεί εάν γνωρίζουμε 3 οποιαδήποτε στοιχεία του, από τα οποία το ένα τουλάχιστον είναι πλευρά. (Δεν είναι δυνατή η επίλυση όταν γνωρίζουμε τις 3 γωνίες του τριγώνου και καμία πλευρά του, εφόσον όλα τα όμοια τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες). Η επίλυση τυχαίου τριγώνου γίνεται με τους Νόμους Ημιτόνου και Συνημιτόνου:

5.6.1 Θεώρημα 1: Νόμος Ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

Απόδειξη

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 5.12 φέρνουμε το ύψος του $\Gamma\Delta$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

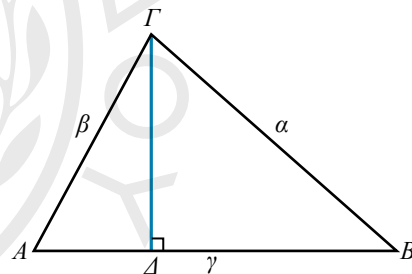
ενώ από το ορθογώνιο $\Gamma\Delta B$ έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{a} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = a\eta\mu B \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε:

$$\beta\eta\mu A = a\eta\mu B \Leftrightarrow \frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$



Σχ. 5.12

Παρατήρηση

Χρησιμοποιούμε τον Νόμο Ημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:

- 1) Μια πλευρά και 2 γωνίες (Γ-Γ-Π ή Γ-Π-Γ).
- 2) Δύο πλευρές και μια γωνία, εκτός της περιεχόμενης (Π-Π-Γ).



Παράδειγμα 5.5

Να επιλυθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 25$, $\hat{B} = 48^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 63^\circ$ (σχ. 5.13).

Λύση

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Επομένως, αφού είναι γνωστές οι 2 γωνίες του μπορεί να υπολογιστεί η τρίτη:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (48^\circ + 63^\circ) = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$$

Γνωρίζουμε μία πλευρά και όλες τις γωνίες. Επομένως θα εφαρμόσουμε Νόμο Ημιτό-

νων για να βρούμε τις 2 άγνωστες πλευρές:

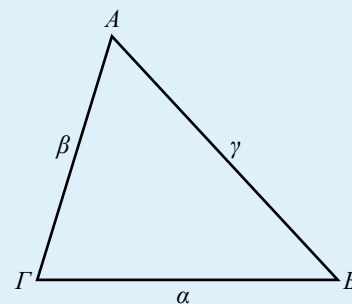
$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{25}{\eta\mu 69^\circ} = \frac{25}{\eta\mu 48^\circ} \Leftrightarrow \frac{25}{0,93358} = \frac{\beta}{0,74314} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,93358 \cdot \beta = 25 \cdot 0,74314 \Leftrightarrow 0,93358 \cdot \beta = 18,5785 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{18,5785}{0,93358} \Leftrightarrow \beta = 19,90028$$

$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{25}{\eta\mu 69^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 63^\circ} \Leftrightarrow \frac{25}{0,93358} = \frac{\gamma}{0,89101} \Leftrightarrow 0,93358 \cdot \gamma =$$

$$= 25 \cdot 0,89101 \Leftrightarrow 0,93358 \cdot \gamma = 22,27525 \Leftrightarrow \gamma = \frac{22,27525}{0,93358} \Leftrightarrow \gamma = 23,86003$$



Σχ. 5.13

– Τόξο ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Κατά την επίλυση τριγώνου, αναζητούμε όλες τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου. Η εύρεση μιας γωνίας, τις περισσότερες φορές, γίνεται μέσω της εύρεσης ενός από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της. Έστω ότι έχουμε υπολογίσει το ημίτονο μιας γωνίας και είναι ο αριθμός x , όπου $-1 \leq x \leq 1$. Η γωνία που το ημίτονο της είναι ίσο με x ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** x και συμβολίζεται:

$$\arcsin x \text{ ή } \operatorname{asin} x \text{ ή } \sin^{-1} x \text{ ή } \eta\mu^{-1} x$$

Είναι γνωστό ότι περισσότερες από μια γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο. Για παράδειγμα $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ αλλά και $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu(30^\circ) = 0,5$. Άρα θα πρέπει να καθοριστεί ποια από όλες τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο x θεωρείται το τόξο ημιτόνου x . Παρατηρούμε ότι οι γωνίες που ανήκουν στο διάστημα από -90° έως 90° έχουν όλες διαφορετικά ημίτονα, που καλύπτουν όλες τις τιμές στο $[-1, 1]$. Έτσι, ορίζουμε:

$$\omega = \eta\mu^{-1} x \text{ αν } \eta\mu \omega = x \text{ όπου } -90^\circ \leq \omega \leq 90^\circ \text{ (σε μοίρες) ή } -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \text{ (σε rad)}$$

$$\text{Δηλαδή τελικά } \eta\mu^{-1} 0,5 = 30^\circ$$

Ομοίως, το **τόξο συνημιτόνου** x , όπου $-1 \leq x \leq 1$, συμβολίζεται:

$$\arccos x \text{ ή } \operatorname{acos} x \text{ ή } \cos^{-1} x \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^{-1} x$$

και είναι η γωνία ω που το συνημιτόνό της είναι x και ισχύει $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ ή $0 \leq \omega \leq \pi$, εφόσον όλες οι γωνίες στο διάστημα από 0° έως 180° έχουν διαφορετικά συνημίτονα, που καλύπτουν όλες τις τιμές στο $[-1, 1]$.

$$\text{Δηλαδή: } \omega = \sigma\upsilon\nu^{-1} x \text{ αν } \sigma\upsilon\nu \omega = x \text{ όπου } 0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ \text{ ή } 0 \leq \omega \leq \pi.$$

Για παράδειγμα:

$$\sigma\upsilon\nu^{-1} 0,5 = 60^\circ \text{ διότι } \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0,5 \text{ και } \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0,5) = 120^\circ \text{ διότι } \sigma\upsilon\nu 120^\circ = -0,5$$

Επίσης το **τόξο εφαπτομένης** x συμβολίζεται:

$$\arctan x \text{ ή } \operatorname{atan} x \text{ ή } \tan^{-1} x \text{ ή } \epsilon\varphi^{-1} x$$

και είναι η γωνία ω που η εφαπτομένη της ισούται με x όπου $x \in (-\infty, \infty)$ και ισχύει $-90^\circ < \omega < 90^\circ$ ή $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$, εφόσον οι γωνίες μεταξύ -90° και 90° , έχουν διαφορετικές εφαπτόμενες που καλύπτουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

$$\text{Για παράδειγμα: } \epsilon\varphi^{-1} 1 = 45^\circ \text{ διότι } \epsilon\varphi 45^\circ = 1$$



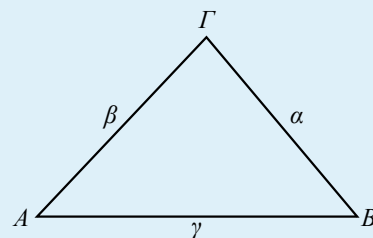
Παράδειγμα 5.6

Να επιλυθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 23$, $\beta = 31$ και $\hat{B} = 35^\circ$ (σχ. 5.14).

Λύση

Γνωρίζουμε 2 πλευρές και μία γωνία από τις απέναντί τους.

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την γωνία A .



Σχ. 5.14

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^\circ} \Leftrightarrow \frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{0,57358}$$

$$31 \cdot \eta\mu A = 13,19234 \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{13,19234}{31} \Leftrightarrow \eta\mu A = 0,42556$$

$$\eta\mu^{-1}0,42556 = 25,18611^\circ$$

$$\text{Άρα: } \hat{A} = 25,18611^\circ \text{ ή } \hat{A} = 180^\circ - 25,18611^\circ = 154,81389^\circ$$

↓

Απορρίπτεται διότι:

είναι $\alpha < \beta$ άρα πρέπει

και $\hat{A} < \hat{B}$ επομένως $\hat{A} < 35^\circ$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (25,18611^\circ + 35^\circ) = 119,81389^\circ$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την πλευρά γ

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{31}{0,57358} = \frac{\gamma}{0,86764} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,57358 \cdot \gamma = 31 \cdot 0,86764 \Leftrightarrow 0,57358 \cdot \gamma = 26,89684$$

$$\gamma = \frac{26,89684}{0,57358} \Leftrightarrow \gamma = 46,89292$$

Παράδειγμα 5.7

Να επιλυθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 24$, $\gamma = 33$, και $\hat{A} = 42^\circ$

Λύση

Είναι γνωστές 2 πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες. Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων για να βρούμε την άλλη απέναντι γωνία

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^\circ} = \frac{33}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{24}{0,66913} = \frac{33}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cdot \eta\mu \Gamma = 22,08129 \Leftrightarrow \eta\mu \Gamma = \frac{22,08129}{24} \Leftrightarrow \eta\mu \Gamma = 0,92005$$

$$\text{Άρα: } \hat{\Gamma} = \eta\mu^{-1}0,92005 = 66,93339^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma} = 180^\circ - 66,93339^\circ = 113,06661^\circ$$

Επειδή $\gamma > \alpha$, θα πρέπει και $\hat{\Gamma} > \hat{A}$.

Όμως δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία, διότι είναι και οι δύο γωνίες μεγαλύτερες από την $\hat{A} = 42^\circ$. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\hat{\Gamma} = 66,93339^\circ$:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (42^\circ + 66,93339^\circ) = 71,06661^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 71,06661^\circ} \Leftrightarrow \frac{24}{0,66913} = \frac{\beta}{0,9459} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,66913 \cdot \beta = 22,7016 \Leftrightarrow \beta = \frac{22,7016}{0,66913} \Leftrightarrow \beta = 33,92704$$

Οπότε η λύση είναι το τρίγωνο του σχήματος 5.15(α)

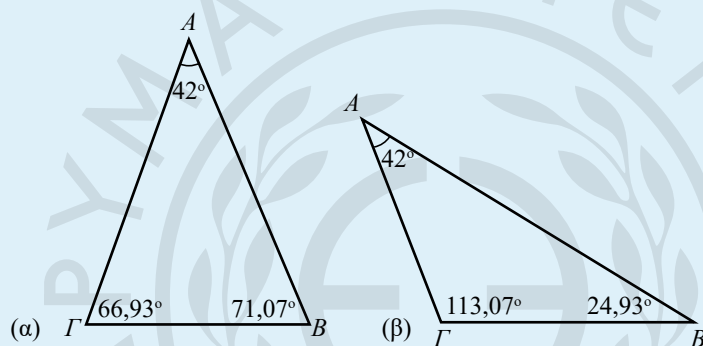
β) Αν $\hat{\Gamma} = 113,06661^\circ$:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - (42^\circ + 113,06661^\circ) = 24,93339^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \frac{24}{\eta\mu 42^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 24,93339^\circ} \Leftrightarrow \frac{24}{0,66913} = \frac{\beta}{0,42156} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,66913 \cdot \beta = 10,11744 \Leftrightarrow \beta = \frac{10,11744}{0,66913} \Leftrightarrow \beta = 15,12029$$

Η λύση είναι το τρίγωνο του σχήματος 5.15(β).



Σχ. 5.15

5.6.2 Θεώρημα 2: Νόμος Συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 5.16 και φέρουμε το ύψος του $\Gamma\Delta$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

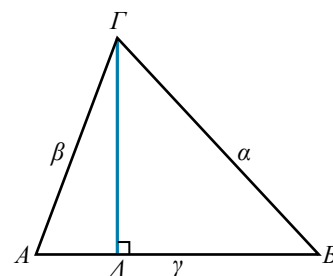
$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2 \quad (1)$$

Επειδή $\Delta B = \gamma - \Delta\Delta$ η (1) γίνεται:

$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - \Delta\Delta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + \Delta\Delta^2 - 2\gamma \cdot \Delta\Delta \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + \Delta\Delta^2 = \beta^2 \text{ και } \sigma\upsilon\nu A = \frac{\Delta\Delta}{\beta} \Leftrightarrow \Delta\Delta = \beta \cdot \sigma\upsilon\nu A$$



Σχ. 5.16

Με αντικατάσταση στην ισότητα (2) προκύπτει:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sin A$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες 2 ισότητες.

Παρατήρηση

Χρησιμοποιούμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την επίλυση τριγώνου, όταν είναι γνωστές:

1) Οι 3 πλευρές (Π-Π-Π)

2) Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (Π-Γ-Π)



Παράδειγμα 5.8

Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{A} = 67^\circ$

Λύση

Από τον Νόμο Συνημιτόνων έχουμε διαδοχικά:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A$$

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 67^\circ$$

$$a^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 0,39073$$

$$a^2 = 5 - 2 \cdot 2,44949 \cdot 0,39073$$

$$a^2 = 5 - 1,91418$$

$$a^2 = 3,08582$$

$$a = \sqrt{3,08582}$$

$$a = 1,75665$$

Γνωρίζοντας τώρα τις τρεις πλευρές του τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις γωνίες του πάλι από τον Νόμο των Συνημιτόνων.

Αναλυτικά έχουμε:

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cdot \sin B$$

$$\sin B = \frac{a^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2a\gamma}$$

$$\sin B = \frac{(1,75665)^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1,75665 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\sin B = \frac{3,08583 + 3 - 2}{2 \cdot 1,75665 \cdot 1,73205}$$

$$\sin B = \frac{4,08582}{6,08521} = 0,67143$$

Άρα $\hat{B} = \sin^{-1} 0,67143 = 47,82247^\circ$ και άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow \hat{C} = 180^\circ - 67^\circ - 47,82247^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 65,17753^\circ$$



Παράδειγμα 5.9

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται οι πλευρές του: $\alpha = 8$, $\beta = 11$ και $\gamma = 14$. Να επιλυθεί το τρίγωνο.

Λύση

Δίνονται οι 3 πλευρές του τριγώνου και ζητούνται οι γωνίες του. Επειδή δεν γνωρίζουμε καμία γωνία, δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί με τον Νόμο Ημιτόνων. Εφαρμόζοντας τον Νόμο Συνημιτόνων για την πλευρά α , μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sin A$ και επομένως να βρούμε τη γωνία A :

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A \Leftrightarrow 8^2 = 11^2 + 14^2 - 2 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \sin A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 64 &= 121 + 196 - 308 \cdot \sin A \Leftrightarrow 308 \cdot \sin A = 121 + 196 - 64 \Leftrightarrow 308 \cdot \sin A = 253 \Leftrightarrow \\ \sin A &= \frac{253}{308} \Leftrightarrow \sin A = 0,82142 \quad \text{άρα: } \hat{A} = \sin^{-1} 0,82142 = 34,77281^\circ\end{aligned}$$

Ομοίως για να βρούμε τη γωνία B , εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την πλευρά β :

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \sin B \Leftrightarrow 11^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \sin B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 121 &= 64 + 196 - 224 \cdot \sin B \Leftrightarrow 224 \cdot \sin B = 64 + 196 - 121 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 224 \cdot \sin B &= 139 \Leftrightarrow \sin B = \frac{139}{224} \Leftrightarrow \sin B = 0,62053\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } B = \sin^{-1} 0,62053 = 51,64515^\circ$$

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} &= 180^\circ - 34,77281^\circ - 51,64515^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 93,58204^\circ\end{aligned}$$

5.7 Γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

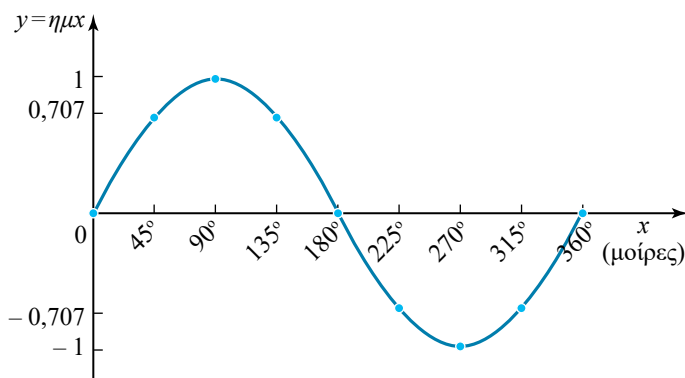
Στη συνέχεια θα δούμε τα γραφήματα των βασικότερων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

1) $y = \eta\mu x$

Για την κατασκευή του γραφήματος φτιάχνουμε πίνακα τιμών:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \eta\mu x$	0	0,707	1	0,707	0	-0,707	-1	-0,707	0

Με τη βοήθεια των τιμών του πίνακα, σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης $y = \eta\mu x$ του σχήματος 5.17



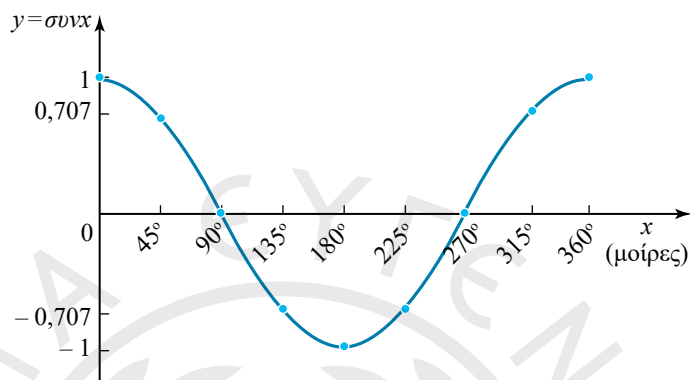
Σχ. 5.17

2) $y = \sigma\upsilon\nu x$

Ο πίνακας τιμών για τον σχεδιασμό του γραφήματος της $y = \sigma\upsilon\nu x$ είναι:

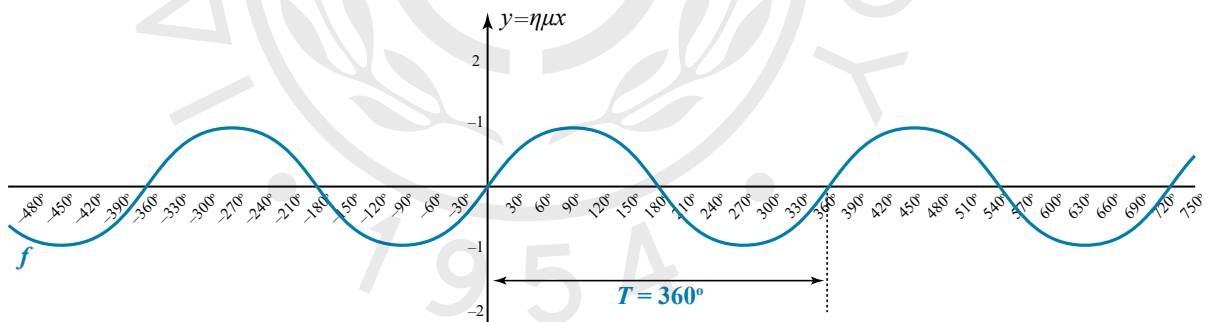
x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \sigma\upsilon\nu x$	1	0,707	0	-0,707	-1	-0,707	0	0,707	1

Οπότε παίρνουμε το γράφημα του σχήματος 5.18



Σχ. 5.18

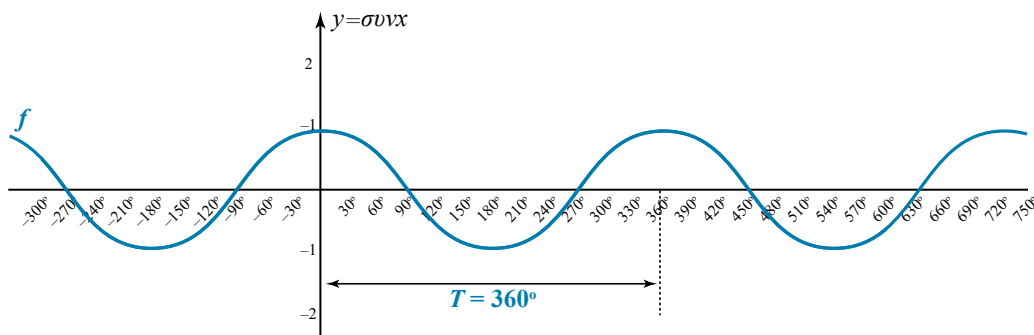
Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις έχουν σχεδιαστεί για γωνίες από 0° έως 360° . Εάν επεκτείνουμε το διάστημα των τιμών του x για γωνίες μεγαλύτερες από 360° και για αρνητικές γωνίες, προκύπτει το γράφημα του σχήματος 5.19 για τη συνάρτηση $y = \eta\mu x$:



Σχ. 5.19

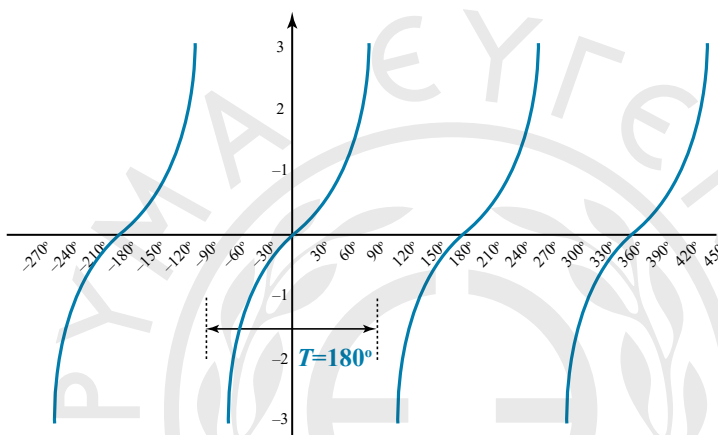
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \eta\mu x$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης, που επαναλαμβάνεται. Ξεκινώντας από τις 0° , το τμήμα αυτό ολοκληρώνεται στις 360° . Μετατοπίζοντας το τμήμα αυτό κατά μήκος του άξονα x σχηματίζεται όλη η γραφική παράσταση. Το μήκος του διαστήματος του x που ολοκληρώνεται αυτό το τμήμα, ονομάζεται **περίοδος T** της συνάρτησης. Άρα η περίοδος της $y = \eta\mu x$ είναι $T = 360^\circ$. Οι συναρτήσεις που το γράφημά τους παρουσιάζει αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται **περιοδικές**. Παρατηρούμε ότι τα σημεία που οι τετμημένες τους διαφέρουν κατά μία περίοδο έχουν ίδια τεταγμένη. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \sigma\upsilon\nu x$ και $y = \epsilon\phi x$ είναι επίσης περιοδικές. Η περίοδος της $y = \sigma\upsilon\nu x$ είναι $T = 360^\circ$, ενώ της $y = \epsilon\phi x$ είναι $T = 180^\circ$. Στα σχήματα 5.20 και 5.21 βλέπουμε τα γραφήματά τους.



Σχ. 5.20

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin x$



Σχ. 5.21

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \cot x$

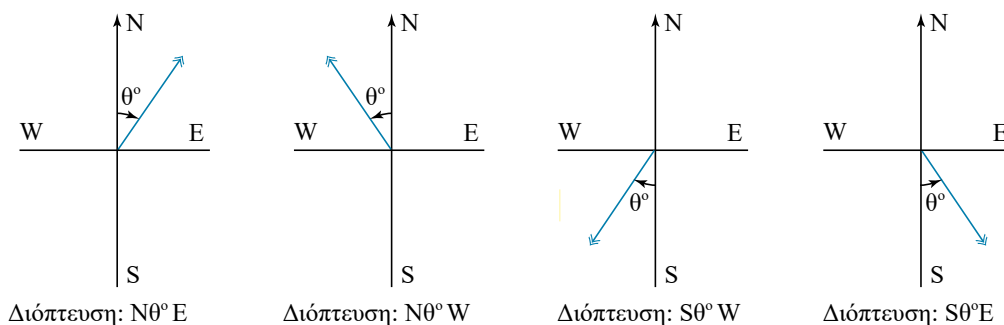
5.8. Εφαρμογές επίπεδης τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία

5.8.1 Διόπτευση

Διόπτευση ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάποιας γραμμής αναγωγής και της κατεύθυνσης ενός αντικειμένου στον ορίζοντα.

Στη Ναυτιλία χρησιμοποιούμε την τεταρτοκυκλική και την ολοκυκλική διόπτευση.

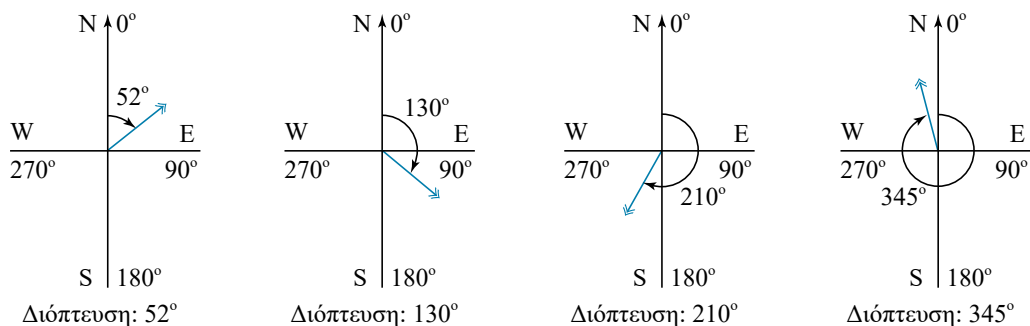
1) Στην **τεταρτοκυκλική** διόπτευση μετράμε τη γωνία από Βορρά ή Νότο προς Ανατολή ή Δύση. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 90° , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.22.



Σχ. 5.22

Τεταρτοκυκλική διόπτευση

2) Στην **απόλυτη** ή **ολοκυκλική** διόπτευση, κάθε γωνία μετρείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ξεκινώντας από τον Βορρά. Η γωνία παίρνει τιμές από 0° έως 360° και η αντιστοιχία έχει ως εξής (σχ. 5.23):



Σχ. 5.23

Ολοκυκλική διόπτευση



Πρόβλημα 5.2

Ένα πλοίο μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση $N 34^\circ W$ με ταχύτητα 25 knots. Να βρεθεί κατά πόσο έχει μετατοπιστεί κατά τον Βορρά και κατά πόσο κατά τη Δύση, μετά από 2 h.

Λύση

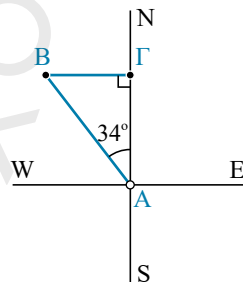
Έστω A η αρχική θέση του πλοίου και B η τελική. Από τη θέση B φέρνουμε κάθετη BΓ προς τον άξονα N-S οπότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του σχήματος 5.24.

Η απόσταση που διανύει το πλοίο σε 2 h είναι:

$$(AB) = v \cdot t = 25 \cdot 2 = 50 \text{ ν.μ.}$$

$$\eta\mu\hat{A} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu 34^\circ = \frac{B\Gamma}{50} \Leftrightarrow 0,55919 = \frac{B\Gamma}{50} \Leftrightarrow B\Gamma = 27,9595 \text{ ν.μ.}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 34^\circ = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow 0,82904 = \frac{A\Gamma}{50} \Leftrightarrow A\Gamma = 41,452 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 5.24

Πρόβλημα 5.3

Τρία πλοία A, B και Γ είναι τοποθετημένα ως εξής: το B είναι 180 ν.μ. δυτικά του A και το Γ είναι βόρεια του A και διοπτεύεται από το B υπό γωνία $N 43^\circ E$. Να βρεθεί:

- Η διόπτευση του B από το Γ.
- Η απόσταση του Γ από το B.
- Η απόσταση του Γ από το A.

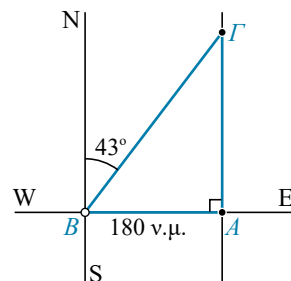
Λύση

α) Η διόπτευση του B από το Γ είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του σχήματος 5.25.

$\hat{\Gamma} = \angle B\Gamma A = 43^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Επομένως η ζητούμενη διόπτευση είναι: $S 43^\circ W$.

$$\begin{aligned} \beta) \eta\mu\hat{\Gamma} &= \frac{AB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu 43^\circ = \frac{180}{B\Gamma} \Leftrightarrow 0,79864 = \frac{180}{B\Gamma} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B\Gamma = \frac{180}{0,79864} \Leftrightarrow B\Gamma = 225,38315 \text{ ν.μ.} \end{aligned}$$



Σχ. 5.25

$$\gamma) \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 43^\circ = \frac{180}{A\Gamma} \Leftrightarrow 0,93252 = \frac{180}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{180}{0,93252} \Leftrightarrow A\Gamma = 193,02535 \text{ ν.μ.}$$

5.8.2 Τρίγωνο πλεύσης – Υπολογισμός λοξοδρομικής απόστασης

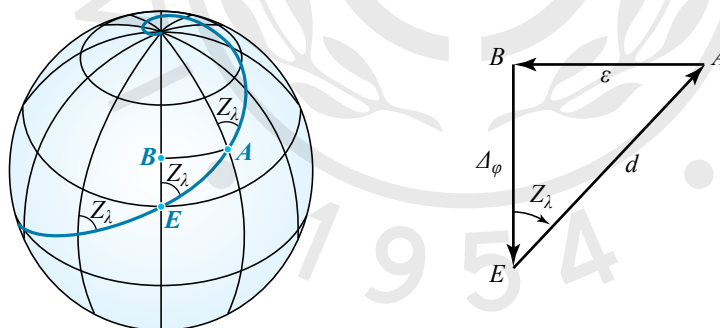
Το **τρίγωνο πλεύσης** χρησιμοποιείται στους λοξοδρομικούς πλόες, όταν η απόσταση – διάγραμμα (d) μεταξύ του σημείου αναχώρησης E και του σημείου άφιξης A δεν υπερβαίνει τα 600 ν.μ.. Τότε, η επιφάνεια της γης θεωρείται επίπεδη και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με μεθόδους επίπεδης τριγωνομετρίας.

Λοξοδρομία ονομάζεται η πλεύση ενός πλοίου που διατηρεί σταθερή πορεία, η οποία τέμνει όλους τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία. Σε μερκατορικό χάρτη, η απεικόνιση του λοξοδρομικού πλου είναι μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο αναχώρησης E και από το σημείο άφιξης A. Με το τρίγωνο πλεύσης που θα μελετήσουμε παρακάτω, μπορούμε να υπολογίσουμε την **λοξοδρομική απόσταση**, δηλαδή την απόσταση που διανύει ένα πλοίο εκτελώντας λοξοδρομία.

Το **τρίγωνο πλεύσης** είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο EAB (σχ. 5.26) με κορυφές το αρχικό στίγμα E, το τελικό στίγμα A και το σημείο τομής B του αρχικού μεσημβρινού και του τελικού παράλληλου. Τα σημεία A και B βρίσκονται πάνω στον ίδιο παράλληλο και επομένως ισχύει: $\varphi_A = \varphi_B$. Η υποτείνουσα EA είναι το μέτρο της λοξοδρομικής απόστασης.

Στο σχήμα 5.26, φαίνεται το τρίγωνο πλεύσης, όπου:

- 1) Η πλευρά AB ονομάζεται **αποχώρηση** και συμβολίζεται με ε .
- 2) Η πλευρά BE ονομάζεται **διαφορά πλάτους** και συμβολίζεται με $\Delta\varphi$.
- 3) Η υποτείνουσα EA ονομάζεται **διάγραμμα**, συμβολίζεται με d , και είναι η απόσταση που διανύει το πλοίο.
- 4) Η γωνία BEA ονομάζεται **αληθής πορεία** και συμβολίζεται με Z_λ .



Σχ. 5.26

Για τον υπολογισμό του $\Delta\varphi$ ισχύει:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} |\varphi_A - \varphi_E|, & \text{αν } \varphi_A, \varphi_E \text{ ομώνυμα} \\ \varphi_A + \varphi_E, & \text{αν } \varphi_A, \varphi_E \text{ ετερόνυμα} \end{cases}$$

Στο τρίγωνο πλεύσης, η πλευρά BE που είναι ίση με $\Delta\varphi$ μετριέται σε ν.μ. όπως και οι άλλες πλευρές του τριγώνου.

Σημείωση: Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το τρίγωνο πλεύσης χρησιμοποιείται μόνο σε μικρές λοξοδρομικές αποστάσεις (<600 ν.μ.), ώστε η επιφάνεια της γης να μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη. Στη πράξη, μπορούμε να επιλύσουμε το λοξοδρομικό πρόβλημα απερί-

όριστα, σε οποιαδήποτε απόσταση, με το **τρίγωνο αυξομερών πλατών**. Το τρίγωνο αυξομερών πλατών είναι επίσης ορθογώνιο τρίγωνο και είναι το αντίστοιχο τρίγωνο του τριγώνου πλευύσης στον Μερκατορικό χάρτη, όπου η πλευρά $BE = \Delta\varphi$ γίνεται $\Delta\varphi_\xi$ (διαφορά αυξομερών πλατών). Η μεθοδολογία επίλυσης είναι ανάλογη με αυτήν του τριγώνου πλευύσης. Για την επίλυση είναι απαραίτητη η χρήση πίνακα αυξομερών πλατών.

Παρατήρηση

Το 1 ν.μ. είναι το μήκος 1 πρώτου λεπτού της γεωγραφικής μοίρας. Συγκεκριμένα είναι το μήκος τόξου 1', που ανήκει σε μέγιστο κύκλο. Στο κεφάλαιο 8 (Β' Μέρος) θα μελετήσουμε αναλυτικά τους κύκλους σφαίρας και θα ορίσουμε τον μέγιστο κύκλο σφαίρας.



Πρόβλημα 5.4

Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο E με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 15^\circ 32'N$ και πλέει προς $N 25^\circ 12'W$ έως ένα σημείο A με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 18^\circ 47'N$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.

Λύση

Σχηματίζουμε το τρίγωνο πλευύσης του σχήματος 5.27

$$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| = 18^\circ 47' - 15^\circ 32' = 3^\circ 15'$$

Η πλευρά $EB = \Delta\varphi$ πρέπει να υπολογιστεί σε ν.μ..

Γνωρίζουμε ότι 1' αντιστοιχεί σε 1 ν.μ. Επομένως, θα μετατρέψουμε τη γωνία σε πρώτα λεπτά. Άρα:

$$3^\circ 15' = (3 \cdot 60)' + 15' = 180' + 15' = 195'$$

Άρα: $\Delta\varphi = 195$ ν.μ.

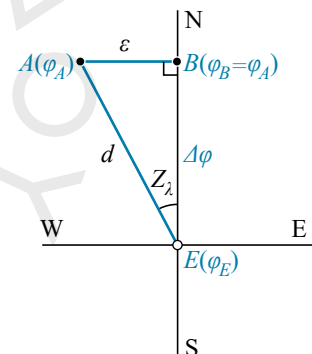
$$Z_\lambda = 25^\circ 12' = 25^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ = 25^\circ + 0,2^\circ = 25,2^\circ$$

$$\sin Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow \sin 25,2 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow 0,90483 = \frac{195}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,90483 \cdot d = 195 \Leftrightarrow d = \frac{195}{0,90483} \Leftrightarrow d = 215,5101 \text{ ν.μ.}$$

$$\cos Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\varphi} \Leftrightarrow \cos 25,2 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow 0,47056 = \frac{\varepsilon}{195} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 0,47056 \cdot 195 = 91,7592 \text{ ν.μ.}$$



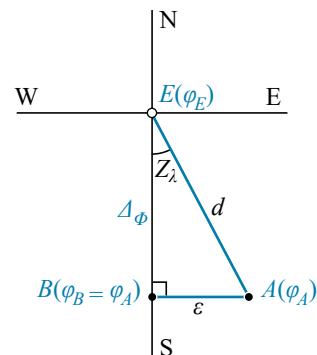
Σχ. 5.27

Πρόβλημα 5.5

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο E με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 2^\circ 24'N$ και πλέει νοτιοανατολικά, 400 ν.μ. ως ένα σημείο A με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 3^\circ 28'S$ (σχ. 5.28). Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρησή του.

Λύση

Τα φ_A και φ_E είναι ετερόνυμα. Επομένως η διαφορά πλάτους υπολογίζεται ως εξής:



Σχ. 5.28

$$\Delta\varphi = \varphi_A + \varphi_E = 3^\circ 28' + 2^\circ 24' = 5^\circ 52'$$

$$5^\circ 52' = (5 \cdot 60)' + 52' = 352' \text{ ή } 352 \text{ ν.μ.}$$

$$\sin Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{352}{400} = 0,88$$

$$\text{Άρα: } Z_\lambda = \sin^{-1} 0,88 = 28,35764^\circ$$

$$\eta\mu Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow \eta\mu 28,35764 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow 0,47497 = \frac{\varepsilon}{400} \Leftrightarrow \varepsilon = 189,988 \text{ ν.μ.}$$

Πρόβλημα 5.6

Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο E με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 48^\circ 40'N$ και πλέει προς $N33^\circ 45'E$ για 296 ν.μ. (σχ. 5.29). Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρησή του.

Λύση

$$Z_\lambda = 33^\circ 45' = 33^\circ \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = 33^\circ + 0,75^\circ = 33,75^\circ$$

$$\eta\mu Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{d} \Leftrightarrow \eta\mu 33,75^\circ = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow 0,55557 = \frac{\varepsilon}{296} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 164,44872 \text{ ν.μ.}$$

$$\sin Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow 0,83147 = \frac{\Delta\varphi}{296} \Leftrightarrow \Delta\varphi = 246,11512 \text{ ν.μ.}$$

$$246,11512' = \left(\frac{246,11512}{60}\right)^\circ = 4,10192^\circ = 4^\circ (0,10192 \cdot 60)' = 4^\circ 6,1152' =$$

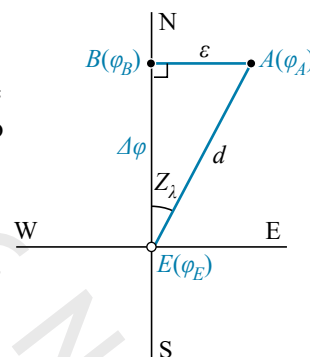
$$= 4^\circ 6' (0,1152 \cdot 60)'' = 4^\circ 6' 6,912''$$

Άρα με στρογγυλοποίηση στα δεύτερα λεπτά: $\Delta\varphi = 4^\circ 6' 7''$

Τα φ_A, φ_E είναι ομώνυμα, διότι το σημείο εκκίνησης E είναι στο βόρειο ημισφαίριο και κινείται βόρεια. Άρα και το σημείο A θα είναι στο βόρειο ημισφαίριο.

$$\Delta\varphi = |\varphi_A - \varphi_E| \xLeftrightarrow{\varphi_A > \varphi_E} \Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_E \Leftrightarrow 4^\circ 6' 7'' = \varphi_A - 48^\circ 40' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_A = 4^\circ 6' 7'' + 48^\circ 40' \Leftrightarrow \varphi_A = 52^\circ 46' 7''N$$



Σχ. 5.29

Πρόβλημα 5.7

Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου, στις 21:50, από ένα λιμάνι E με $\varphi_E = 8^\circ 24'N$ και πλέει προς $S 36^\circ 12'W$ με ταχύτητα 15 knots, ως ένα λιμάνι A με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 6^\circ 28'N$.

α) Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το πλοίο.

β) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.

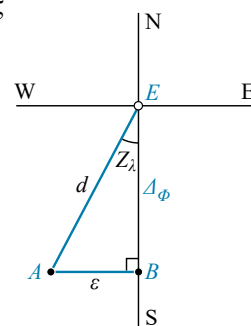
γ) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Παρατήρηση: Το πλοίο δεν αλλάζει ζώνη ώρας.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε το τρίγωνο πλευσης του σχήματος 5.30

$$Z_\lambda = 36^\circ 12' = 36^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ = 36,2^\circ$$



Σχ. 5.30

$$\Delta\varphi = |\Phi_A - \Phi_E| = 8^\circ 24' - 6^\circ 28' = 7^\circ 84' - 6^\circ 28' = 1^\circ 56' = 116' \text{ ή } 116 \text{ ν.μ.}$$

$$\sigma_{\nu\nu} Z_\lambda = \frac{\Delta\varphi}{d} \Leftrightarrow 0,80696 = \frac{116}{d} \Leftrightarrow d = 143,74938 \text{ ν.μ.}$$

$$\beta) \varepsilon\varphi Z_\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta\varphi} \Leftrightarrow 0,73189 = \frac{\varepsilon}{116} \Leftrightarrow \varepsilon = 84,89924 \text{ ν.μ.}$$

$$\gamma) \nu = \frac{d}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{143,74938}{t} \Leftrightarrow t = 9,583292 \text{ h}$$

$$9,583292 \text{ h} = 9 \text{ h} + (0,583292 \cdot 60) \text{ min} = 9 \text{ h } 34,99752 \text{ min} = \\ = 9 \text{ h } 34 \text{ min } (0,99752 \cdot 60) \text{ s} = 9 \text{ h } 34 \text{ min } 59,8512 \text{ s}$$

Στρογγυλοποιώντας τα δευτερόλεπτα:

$$9 \text{ h } 34 \text{ min } 60 \text{ s} \text{ ή } 9 \text{ h } 35 \text{ min}$$

$$21 \text{ h } 50 \text{ min}$$

$$+ \quad 9 \quad 35 \text{ min}$$

$$30 \text{ h } 85 \text{ min}$$

$$31 \text{ h } 25 \text{ min}$$

$$31 - 24 = 7 \text{ h}$$

Άρα ώρα άφιξης: 11 Νοεμβρίου 7:25:00

5.8.3 Πλους επί παραλλήλου

Πλους επί παραλλήλου ονομάζεται η πλεύση κατά την οποία το πλοίο κινείται επάνω στον ίδιο παράλληλο ως προς τον ισημερινό, δηλαδή έχει σταθερή πορεία ή προς Ανατολή ή προς Δύση. Όταν το πλοίο κινείται πάνω στον ίδιο παράλληλο από έναν τόπο Α έως έναν τόπο Β, οι 2 τόποι έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος (του παραλλήλου) και διαφορετικά μήκη λ_1, λ_2 .

Έστω $u = (\widehat{AB})$ το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ δηλαδή η απόσταση που διανύει το πλοίο σε ν.μ. (σχ. 5.31)

Φέρνουμε $AH \perp OZ$.

Ισχύει $\angle ZOA = \varphi$ (ίση με το γεωγραφικό πλάτος των Α και Β).

Γνωρίζουμε ότι το μήκος ενός τόξου ισούται με το γινόμενο της γωνίας του (μετρημένη σε rad) επί την ακτίνα του κύκλου. Άρα για τα μήκη των τόξων $\widehat{Z\Theta}$ και $\widehat{AB}$ έχουμε:

$$(\widehat{Z\Theta}) = OZ \cdot \widehat{ZO\Theta}$$

$$(\widehat{AB}) = A\Gamma \cdot \widehat{A\Gamma B}$$

Επειδή $\widehat{ZO\Theta} = \widehat{A\Gamma B}$ προκύπτει:

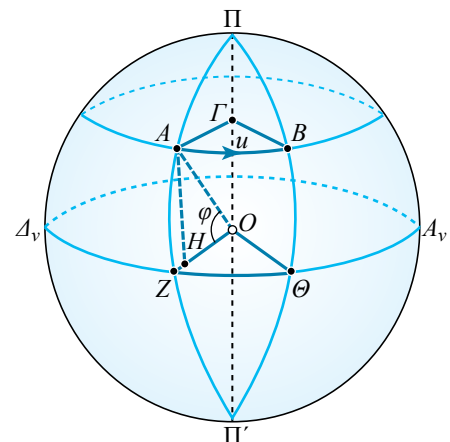
$$\frac{(\widehat{Z\Theta})}{(\widehat{AB})} = \frac{OZ}{A\Gamma} = \frac{AO}{OH}$$

διότι $OZ = AO$ ως ακτίνες της σφαίρας και $A\Gamma = OH$ ως απέναντι πλευρές στο ορθογώνιο $A\Gamma O H$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHO ισχύει:

$$\tau\epsilon\mu\varphi = \frac{AO}{OH}$$

Άρα έχουμε καταλήξει:



Σχ. 5.31

$$\frac{(\widehat{Z\Theta})}{(\widehat{AB})} = \text{τεμφ} \Leftrightarrow (\widehat{Z\Theta}) = (\widehat{AB}) \cdot \text{τεμφ} \Leftrightarrow \Delta\lambda = u \cdot \text{τεμφ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = u \cdot \frac{1}{\text{συν}\varphi} \Leftrightarrow u = \Delta\lambda \cdot \text{συν}\varphi$$

Δηλαδή:

$$u = \Delta\lambda \cdot \text{συν}\varphi$$

Το μήκος τόξου ενός παραλλήλου ισούται με το γινόμενο του μήκους του αντίστοιχου τόξου του ισημερινού ($\Delta\lambda$) $\times$ το συνημίτονο του γεωγραφικού πλάτους του παραλλήλου

ή

$$\Delta\lambda = u \cdot \text{τεμφ}$$

Η διαφορά μήκους (σε πρώτα λεπτά) = Μήκος τόξου $\times$ τέμνουσα του γεωγραφικού πλάτους.



Πρόβλημα 5.8

Ένα πλοίο που βρίσκεται σε τόπο Α ($\varphi_A = 48^\circ 18'N$) πλέει κατά 60 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο. Να βρεθεί η διαφορά μήκους μεταξύ του τόπου άφιξης και του Α.

Λύση

$$\varphi = \varphi_A = 48^\circ 18' = \left(48 + \frac{18}{60}\right)^\circ = 48,3^\circ$$

$$u = \Delta\lambda \cdot \text{συν}\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\text{συν}\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{60}{0,66523} \Leftrightarrow \Delta\lambda = 90,19437' \text{ ή}$$

$$\Delta\lambda = 1^\circ 30,19437' = 1^\circ 30' (0,19437 \cdot 60)'' = 1^\circ 30' 11,7''$$

Πρόβλημα 5.9

Ένα πλοίο που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο πλέει για 750 ν.μ. στον ίδιο παράλληλο. Εάν Α ($\lambda_A = 39^\circ 15'W$) είναι το σημείο εκκίνησης και Β ($\lambda_B = 56^\circ 45'W$) το σημείο άφιξης, να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων Α και Β.

Λύση

Το πλοίο κινείται όπως φαίνεται στο σχήμα 5.32. Τα λ_A, λ_B είναι ομώνυμα. Επομένως για την διαφορά μήκους ισχύει:

$$\Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_B| = 56^\circ 45' - 39^\circ 15' = 17^\circ 30' = (17 \cdot 60)' + 30' = 1050' \text{ ή } \Delta\lambda = 1050 \text{ ν.μ.}$$

$$u = \Delta\lambda \cdot \text{συν}\varphi \Leftrightarrow \text{συν}\varphi = \frac{u}{\Delta\lambda} \Leftrightarrow \text{συν}\varphi = \frac{750}{1050} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\varphi = 0,71428$$

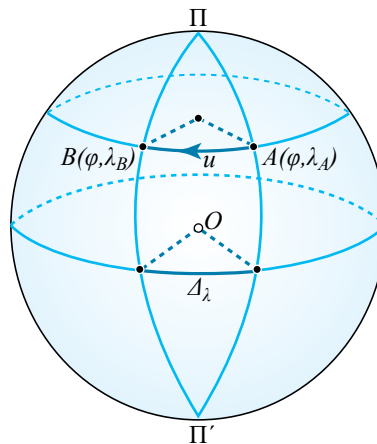
$$\text{Άρα: } \varphi = \text{συν}^{-1}0,71428 = 44,41578^\circ \text{ ή}$$

$$44,41578^\circ = 44^\circ 24,9468' = 44^\circ 24'57''$$

Επομένως οι γεωγραφικές συντεταγμένες είναι:

$$A (\varphi_A = 44^\circ 24'57''N, \lambda_A = 39^\circ 15'W)$$

$$B (\varphi_B = 44^\circ 24'57''N, \lambda_B = 56^\circ 45'W)$$



Σχ. 5.32

Πρόβλημα 5.10

Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A ($\varphi_A = 54^\circ N$) για 510 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο έως ένα σημείο B ($\lambda_B = 144^\circ 3' W$). Να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων.

Λύση

Η κίνηση του πλοίου φαίνεται στο σχήμα 5.33

$$u = \Delta\lambda \cdot \sin\varphi \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{u}{\sin\varphi} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{510}{0,58779} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = 867,65682' \text{ ή } \Delta\lambda = 867,65682 \text{ ν.μ.}$$

Επειδή το σημείο άφιξης B είναι στο δυτικό ημισφαίριο και η κίνηση είναι προς Ανατολή, το σημείο A θα είναι επίσης στο δυτικό ημισφαίριο και ως εκ τούτου θα ισχύει $\lambda_A > \lambda_B$. Άρα:

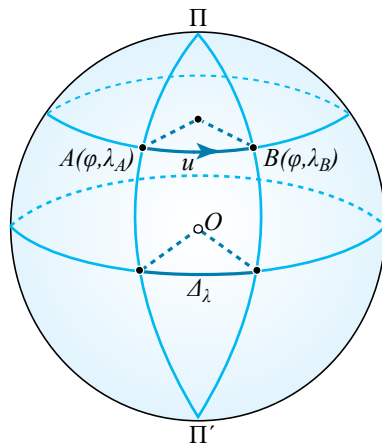
$$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B \Leftrightarrow 867,65682' = \lambda_A - 144^\circ 3' \Leftrightarrow 867,65682' = \lambda_A - 8643' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_A = 8643' + 867,65682' \Leftrightarrow \lambda_A = 9510,65682 = 158,51095^\circ =$$

$$= 158^\circ (0,51095 \cdot 60)' = 158^\circ 30,657' = 158^\circ 30' (0,657 \cdot 60)'' = 158^\circ 30' 39,42''$$

Άρα: A ($\varphi_A = 54^\circ N$, $\lambda_A = 158^\circ 30' 39,42'' W$)

B ($\varphi_B = 54^\circ N$, $\lambda_B = 144^\circ 3' W$)



Σχ. 5.33

5.8.4 Εφαρμογές του Νόμου Ημιτόνων και Συνημιτόνων



Πρόβλημα 5.11

Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα. Το ένα κινείται προς $S34^\circ W$ με ταχύτητα 20 knots και το άλλο προς $S41^\circ E$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από δύο h.

Λύση

Έστω ότι τα δύο πλοία ξεκινούν από το λιμάνι O και ότι μετά από 2 ώρες βρίσκονται στις θέσεις A και B (σχ. 5.34). Η ζητούμενη απόσταση d είναι η πλευρά AB του τριγώνου AOB

$$OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ ν.μ.}$$

$$OB = 2 \cdot 16 = 32 \text{ ν.μ.}$$

$$\widehat{AOB} = 34^\circ + 41^\circ = 75^\circ$$

Από τον Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο AOB:

$$d^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} \Leftrightarrow$$

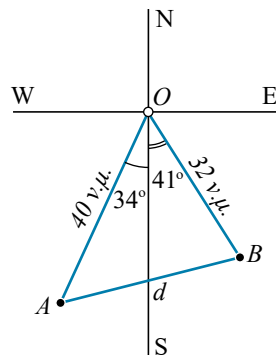
$$\Leftrightarrow d^2 = 40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot \sin 75^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 1.600 + 1.024 - 2.560 \cdot 0,25882 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 1.961,4208 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{1.961,4208} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 44,28793 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 5.34

Πρόβλημα 5.12

Δύο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο ταυτόχρονα. Το Α κινείται προς $540^\circ W$ με ταχύτητα 20 knots και το Β προς $N32^\circ W$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 h.

Λύση

Η ζητούμενη απόσταση d είναι η πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΟΒ του σχήματος 5.35.

$$\hat{A}OB = 180^\circ - (32^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ ν.μ.}$$

$$OB = 2 \cdot 16 = 32 \text{ ν.μ.}$$

Από τον Νόμο Σνημιτόνων:

$$d^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \hat{A}OB$$

$$d^2 = 40^2 + 32^2 - 2 \cdot 40 \cdot 32 \cdot \sin 108^\circ$$

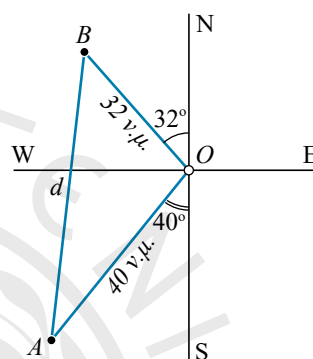
$$d^2 = 1600 + 1024 - 2560 \cdot (-0,30902)$$

$$d^2 = 1600 + 1024 + 791,0912$$

$$d^2 = 3.415,0912$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{3.415,0912}$$

$$d = 58,43878 \text{ ν.μ.}$$



Σχ. 5.35

Πρόβλημα 5.13

Μια τράτα που κινείται σε απόσταση 5,8 ν.μ βορειοδυτικά ενός φάρου Φ, παθαίνει βλάβη και σταματάει. Ένα ταχύπλοο, βρίσκεται 4,4 ν.μ. δυτικά του φάρου, στη θέση Β. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην τράτα, εάν πλεύσει με ταχύτητα 32 knots, και η διόπτευση της τράτας από τη θέση Β είναι $N 31^\circ W$.

Λύση

Η τράτα βρίσκεται στο σημείο Α του σχήματος 5.36.

$$\hat{A}B\Phi = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$$

Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση $x = AB$ που θα διανύσει το ταχύπλοο. Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων:

$$\frac{A\Phi}{\eta\mu 59^\circ} = \frac{B\Phi}{\eta\mu A} \Leftrightarrow \frac{5,8}{0,85717} = \frac{4,4}{\eta\mu A} \Leftrightarrow$$

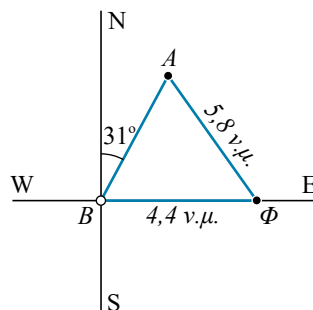
$$\Leftrightarrow 5,8 \eta\mu A = 3,77155 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{3,77155}{5,8} = 0,65027$$

$$\text{Άρα: } \hat{A} = \eta\mu^{-1} 0,65027 = 40,56196^\circ$$

$$\text{ή } \hat{A} = 180^\circ - 40,56196^\circ = 139,43804^\circ$$

Επειδή $B\Phi < A\Phi$ θα ισχύει και $\hat{A} = \hat{A}B\Phi$,
 άρα: $\hat{A} = 40,56196^\circ$



Σχ. 5.36

$$B\hat{\Phi}A = 180^\circ - (59^\circ + 40,56196^\circ) = 80,43804^\circ$$

$$\frac{AB}{\eta\mu 80,43804^\circ} = \frac{A\Phi}{\eta\mu 59^\circ} \Leftrightarrow \frac{AB}{0,98611} = \frac{5,8}{0,85717} \Leftrightarrow 0,85717 \cdot AB = 5,71944 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{5,71944}{0,85717} \Leftrightarrow AB = 6,67247 \text{ ν.μ.}$$

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 32 = \frac{6,67247}{t} \Leftrightarrow t = \frac{6,67247}{32} \Leftrightarrow t = 0,20851 \text{ h}$$

$$0,20851 \text{ h} = (0,20851 \cdot 60) \text{ min} = 12,5106 \text{ min} = 12 \text{ min} + 0,5106 \text{ min} \\ = 12 \text{ min } (0,5106 \cdot 60) \text{ s} = 12 \text{ min } 30,636 \text{ s}$$

Άρα θα φτάσει στην τράτα μετά από 12 λεπτά και 31 δευτερόλεπτα.

Πρόβλημα 5.14

Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση Α, πλέει με κατεύθυνση προς Ε με ταχύτητα 18 knots, και διοπτρεύει έναν φάρο κατά $S 68^\circ E$. Μετά από 2 ώρες και 24 λεπτά βρίσκεται στη θέση Β, όπου διοπτρεύει τον φάρο κατά $S 20^\circ W$. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις του πλοίου από τον φάρο, στις θέσεις Α και Β.

Λύση

Αναζητούμε τις πλευρές ΑΦ και ΒΦ του τριγώνου ΑΦΒ του σχήματος 5.37

$$2 \text{ h } 24 \text{ min} = 2 \text{ h} + \frac{24}{60} \text{ h} = 2,4 \text{ h}$$

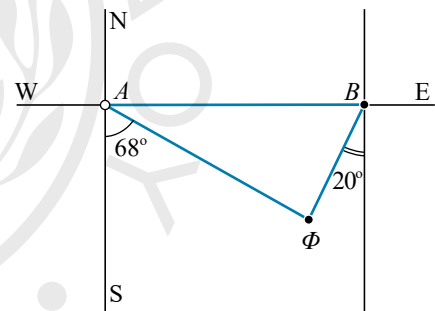
Η απόσταση που διανύει το πλοίο είναι:

$$x = v \cdot t = 18 \cdot 2,4 = 43,2 \text{ ν.μ.}$$

$$\Phi\hat{A}B = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

$$\Phi\hat{A}B = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$\hat{\Phi} = 180^\circ - (70^\circ + 22^\circ) = 88^\circ$$



Σχ. 5.37

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{A\Phi}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{AB}{\eta\mu 88^\circ} \Leftrightarrow \frac{A\Phi}{0,93969} = \frac{43,2}{0,99939} \Leftrightarrow 0,99939 \cdot A\Phi = 40,59461 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Phi = \frac{40,59461}{0,99939} \Leftrightarrow A\Phi = 40,61939 \text{ ν.μ.}$$

$$\frac{B\Phi}{\eta\mu 22^\circ} = \frac{AB}{\eta\mu 88^\circ} \Leftrightarrow \frac{B\Phi}{0,37461} = \frac{43,2}{0,99939} \Leftrightarrow 0,99939 \cdot B\Phi = 16,18315 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\Phi = \frac{16,18315}{0,99939} \Leftrightarrow B\Phi = 16,19303 \text{ ν.μ.}$$

Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 7 \text{ cm}$ και $B = 40^\circ$.
 - α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
 - β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓ.

2. Να βρεθεί η σκιά ενός κτηρίου ύψους 180 m, όταν ο ήλιος είναι 30° επάνω από τον ορίζοντα.
3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης χωρίς την χρήση υπολογιστή τσέπης:

$$A = \frac{\eta\mu 160^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 330^\circ \cdot \eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 250^\circ \cdot \eta\mu 220^\circ}$$

4. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 16$, $\hat{A} = 46^\circ$ και $\hat{B} = 95^\circ$.

5. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 22$, $\beta = 35$ και $\hat{B} = 48^\circ$.

6. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 30$, $\gamma = 26$ και $\hat{B} = 56^\circ$.

7. Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 34$, $\hat{A} = 42^\circ$ και $\hat{C} = 73^\circ$.

8. Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 32$, $\beta = 35$ και $\gamma = 28$.

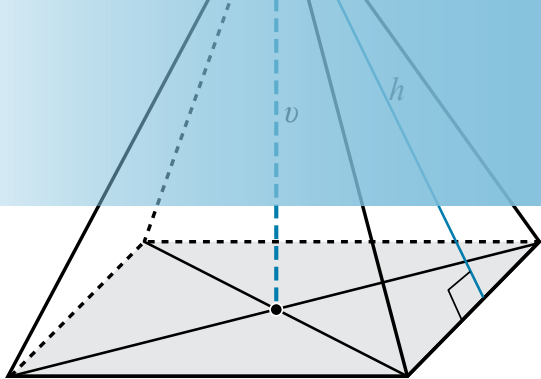
9. Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 10$, $\beta = 15$ και $\hat{C} = 53^\circ$.

10. Τρία πλοία Α, Β και Γ είναι τοποθετημένα ως εξής: το Β βρίσκεται 200 ν.μ. βόρεια του Α και το Γ βρίσκεται 320 ν.μ. ανατολικά του Α. Να βρεθεί η διόπτειση:

- α) του Β από το Γ και
- β) του Γ από το Β.

11. Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 5^\circ 15' N$ και πλέει προς $N 30^\circ 12' E$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 7^\circ 30' N$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.
12. Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 1^\circ 24' N$ και πλέει νοτιοανατολικά, 400 ν.μ. ως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^\circ 28' S$. Να βρεθεί η αληθής πορεία και η αποχώρησή του.
13. Ένα πλοίο ξεκινά από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 5^\circ 15' N$ και πλέει προς $S 36^\circ 12' E$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^\circ 30' S$. Να βρεθούν η απόσταση που διένυσε το πλοίο και η αποχώρησή του.
14. Ένα πλοίο ξεκινάει από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 18^\circ 24' S$ και πλέει προς $S 60^\circ 30' W$, 300 ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρησή του.
15. Ένα πλοίο αναχωρεί από ένα λιμάνι Ε γεωγραφικού πλάτους $\varphi_E = 34^\circ 20' N$ και πλέει προς $N 23^\circ 14' E$, 250 ν.μ. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος του σημείου άφιξης και η αποχώρηση.
16. Ένα πλοίο ξεκινάει στις 5 Αυγούστου, 21:50, από ένα σημείο Ε με $\varphi_E = 1^\circ 14' S$ και πλέει με ταχύτητα 16 knots, προς $N 72^\circ 36' W$ έως ένα σημείο Α με $\varphi_A = 2^\circ 38' N$.
 - α) Να βρεθεί η απόσταση που διένυσε το πλοίο.
 - β) Να βρεθεί η αποχώρηση του πλοίου.
 - γ) Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.
17. Ένα πλοίο ξεκινά στις 11 Μαΐου 19:45, από ένα σημείο Ε με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 5^\circ 28' N$ και πλέει με ταχύτητα 16 knots προς $N 65^\circ 12' E$ έως ένα σημείο Α με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 8^\circ 43' N$. Να βρεθούν:
 - α) Η απόσταση που διένυσε το πλοίο.
 - β) Η αποχώρηση του πλοίου.
 - γ) Η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

18. Ένα πλοίο ξεκινά στις 22 Οκτωβρίου 13:50, από ένα σημείο E με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_E = 1^\circ 46'S$ και πλέει βορειοδυτικά 380 ν.μ. με ταχύτητα 16 knots, έως ένα σημείο A με γεωγραφικό πλάτος $\varphi_A = 2^\circ 38'N$. Να βρεθούν:
- α) Η αληθής πορεία.
 - β) Η αποχώρηση του πλοίου.
 - γ) Η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.
19. Ένα πλοίο που βρίσκεται στο νότιο ημισφαίριο, πλέει για 1272,82 ν.μ. δυτικά στον ίδιο παράλληλο. Εάν A ($\lambda_A = 20^\circ 10' W$) είναι το σημείο εκκίνησης και B ($\lambda_B = 43^\circ 12' W$) το λιμάνι άφιξης να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των δύο λιμανιών.
20. Ένα πλοίο που βρίσκεται στο βόρειο ημισφαίριο πλέει για 1070 ν.μ. στον ίδιο παράλληλο. Αν A ($\varphi_A, \lambda_A = 126^\circ 18' E$) είναι το σημείο εκκίνησης και B ($\varphi_B, \lambda_B = 146^\circ 32' E$) το σημείο άφιξης, να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των δύο σημείων A και B.
21. Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A ($\varphi_A = 64^\circ 20' N$) για 620 ν.μ. ανατολικά στον ίδιο παράλληλο έως ένα σημείο B ($\lambda_B = 124^\circ 23' W$). Να βρεθούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες των 2 σημείων.
22. Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση A ($\varphi_A = 38^\circ 16' 24'' N, \lambda_A = 98^\circ 50' 20'' W$) πλέει με ταχύτητα 20 knots στον ίδιο παράλληλο. Σε πόση ώρα θα φτάσει σε σημείο B με $\lambda_B = 90^\circ 39' 40'' W$;
23. Δύο πλοία A και B ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το A κινείται προς $S 41^\circ E$ με ταχύτητα 20 knots και το B προς $S 34^\circ W$ με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 2 h.
24. Δύο πλοία A και B ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα. Το A κινείται προς $N 20^\circ E$ με ταχύτητα 12 knots και το B προς $S 60^\circ E$ με ταχύτητα 18 knots. Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 h.
25. Ένα πλοίο απέχει από ένα σημείο A της στεριάς 10 ν.μ. και διοπτρεύεται από αυτό κατά $S 36^\circ E$. Το πλοίο κατευθύνεται δυτικά και μετά από 2 h απέχει από το σημείο A 11,8 ν.μ. Να βρεθούν:
- α) Η ταχύτητα του πλοίου.
 - β) Η διόπτρευση του πλοίου από το A στη δεύτερη θέση του.



6.1 Μονάδες μέτρησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την μέτρηση μηκών, εμβαδών επίπεδων σχημάτων και όγκων στερεών. Ας θυμηθούμε τις βασικές μονάδες μέτρησης.

6.1.1 Μονάδες μέτρησης μήκους

Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους, η οποία χρησιμοποιείται διεθνώς είναι το **μέτρο (m)**. Εκτός από το *m* για μεγάλες αποστάσεις χρησιμοποιείται το **χιλιόμετρο (km)**, όπου **1 km = 1000 m**.

Για μικρότερα μήκη χρησιμοποιούνται οι **υποδιαίρεσεις** του *m*:

Δεκατόμετρο ή δέκατο	dm	$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$
Εκατοστόμετρο ή εκατοστό	cm	$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$
Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό	mm	$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m} = 0,001 \text{ m}$

Φυσικά, πρέπει να αναφέρουμε τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται στη Ναυτιλία: το **ναυτικό μίλι** ή (ν.μ.) όπου: **1 ν.μ. = 1852 m**. Το ν.μ. το έχουμε ορίσει ήδη στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας και το έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη σε πολλές εφαρμογές.

6.1.2 Μονάδες μέτρησης εμβαδού

Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο (m^2)**, που είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο. Οι υποδιαίρεσεις του m^2 είναι:

Τετραγωνικό δεκατόμετρο	dm^2	$1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2 = 0,01 \text{ m}^2$
Τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2	$1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{10.000} \text{ m}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$
Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2	$1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{1.000.000} \text{ m}^2 = 0,000001 \text{ m}^2$

Για μεγάλες επιφάνειες στην Ελλάδα χρησιμοποιούμε το **στρέμμα**. Ισχύει: **1 στρέμμα = 1000 m^2** .

6.1.3 Μονάδες μέτρησης όγκου

Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (m^3)**, που είναι ο όγκος ενός κύβου ακμής ενός μέτρου.

Υποδιαίρεσεις του κυβικού μέτρου:

Κυβικό δεκατόμετρο	dm^3	$1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$
Κυβικό εκατοστόμετρο	cm^3	$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1.000.000} \text{ m}^3 = 0,000001 \text{ m}^3$
Κυβικό χιλιοστόμετρο	mm^3	$1 \text{ mm}^3 = \frac{1}{1.000.000.000} \text{ m}^3 = 0,000000001 \text{ m}^3$

Ειδικά για μέτρηση όγκου υγρών, το 1 dm^3 λέγεται **1 λίτρο (1 lt)** και το 1 cm^3 λέγεται **1 χιλιοστόλιτρο (1 ml)**.

6.2 Υπολογισμός εμβαδού και περιμέτρου πολυγώνων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι τύποι υπολογισμού περιμέτρου και εμβαδού των βασικών ευθυγράμμων σχημάτων, του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και τραπεζίου.

Συμβολισμός εμβαδού. Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν πολυγώνου, το γράφουμε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται με (ΑΒΓ) κ.λπ. Εάν δεν θέλουμε να δηλώσουμε το όνομα του πολυγώνου, το εμβαδόν μπορεί να συμβολιστεί απλώς με Ε.

Η περίμετρος όλων των ευθυγράμμων σχημάτων ισούται με το άθροισμα των μηκών όλων των πλευρών τους και θα τη συμβολίζουμε με Π.

6.2.1 Εμβαδόν και περίμετρος τετραγώνου

Θεώρημα 6.1: Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2 , (σχ. 6.1) δηλαδή:

$$E = \alpha^2$$

Περίμετρος: Εφόσον το τετράγωνο έχει όλες του τις πλευρές ίσες με α, το άθροισμα αυτών θα ισούται με 4α . Άρα:

$$\Pi = 4 \cdot \alpha$$

6.2.2 Εμβαδόν και περίμετρος ορθογωνίου

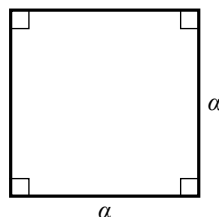
Θεώρημα 6.2: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή, αν α, β τα μήκη των πλευρών του (σχ. 6.2) ισχύει

Εμβαδόν

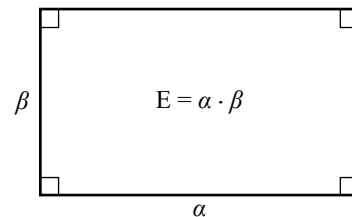
$$E = \alpha \cdot \beta$$

Περίμετρος

$$\Pi = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$$



Σχ. 6.1



Σχ. 6.2

6.2.3 Εμβαδόν και περίμετρος παραλληλογράμμου

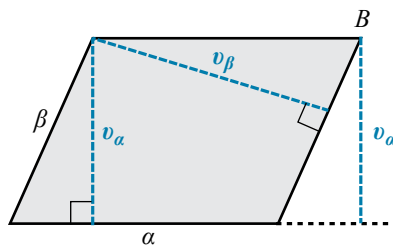
Θεώρημα 6.3: Το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή. Δηλαδή στο σχήμα 6.3:

Εμβαδόν

$$E = a \cdot v_a = \beta \cdot v_\beta$$

Περίμετρος

$$\Pi = 2 \cdot a + 2 \cdot \beta$$



Σχ. 6.3

6.2.4 Εμβαδόν και περίμετρος τριγώνου

Θεώρημα 6.4: Το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημικινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος. Δηλαδή στο σχήμα 6.4:

$$E = \frac{1}{2} a \cdot v_a$$

Ο τύπος αυτός εξηγείται εύκολα, αν σε ένα παραλληλόγραμμο φέρουμε τη διαγώνιο που το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ABH του σχήματος 6.4, προκύπτει:

$$\eta\mu B = \frac{v_a}{\gamma} \Leftrightarrow v_a = \gamma \cdot \eta\mu B$$

Με αντικατάσταση του v_a στον τύπο του εμβαδού έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} a \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$$

Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται και στην περίπτωση που $\hat{B} > 90^\circ$ όπου το v_a είναι εξωτερικό του τριγώνου, και ισχύει και στη περίπτωση που $\hat{B} = 90^\circ$. Έτσι αποδείξαμε το παρακάτω θεώρημα:

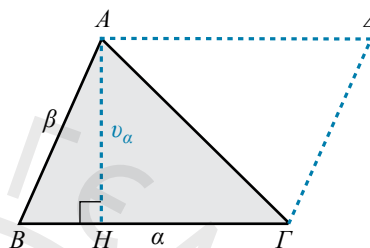
Θεώρημα 6.5: Το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται και από τον τύπο:

Εμβαδόν

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} a \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} a \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma$$

Περίμετρος

$$\Pi = a + \beta + \gamma$$



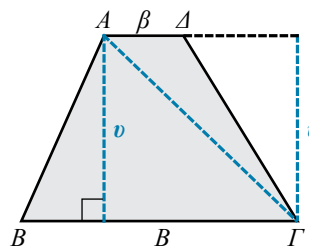
Σχ. 6.4

6.2.5 Εμβαδόν και περίμετρος τραπεζίου

Θεώρημα 6.6: Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή στο σχήμα 6.5:

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2}$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται εύκολα εάν φέρει κάποιος μια διαγώνιο και υπολογίσει τα εμβαδά των δύο τριγώνων, χρησιμοποιώντας το ίδιο ύψος.



Σχ. 6.5

Εφαρμογή 6.1

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημικινόμενο των διαγωνίων του.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον ρόμβο του σχήματος 6.6. Είναι προφανές ότι:

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) \quad (1)$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot B\Delta \cdot AO$$

Επειδή οι διαγώνιοι στον ρόμβο είναι κάθετες και διχοτομούνται, ισχύει ότι:

$$AO = \frac{\delta_1}{2}$$

Επομένως:

$$(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{4} \quad (2)$$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα, διότι έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες, άρα είναι και ισεμβαδικά. Οπότε από (1) και (2) έχουμε:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

Εφαρμογή 6.2

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a είναι ίσο με:

$$E = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Απόδειξη

Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 6.7. Φέρνουμε το ύψος του $AB\Gamma$. Το ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι και διάμεσος. Επομένως $B\Delta = \Delta\Gamma = \frac{a}{2}$. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + v^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

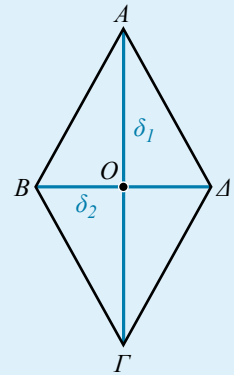
$$\Leftrightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

Άρα:

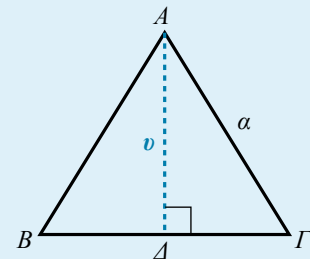
$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot v = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Σχ. 6.6



Σχ. 6.7



Παράδειγμα 6.1

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος 6.8 είναι ισοσκελές με $AB=AG$, $B\Gamma=6\text{ cm}$ και έχει περίμετρο 16 cm . Να βρεθούν:

- Οι ίσες πλευρές του τριγώνου.
- Το εμβαδόν του τριγώνου.

Λύση

$$\alpha) \Pi = 16 \Leftrightarrow B\Gamma + AB + AG = 16 \Leftrightarrow 6 + 2AB = 16 \Leftrightarrow AB = 5\text{ cm} = AG$$

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος, άρα $BA = \Delta\Gamma = 3\text{ cm}$
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = BA^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{16} = 4\text{ cm}$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\text{ cm}^2$$

Παράδειγμα 6.2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma$ και $\hat{B} = 135^\circ$ (σχ. 6.9). Αν $A\Delta = 4\sqrt{2}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τραpezίου.

Λύση

$\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά των $AB//\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$. Άρα:

$$135^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$$

Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ του τραpezίου.

$$\angle ZB\Gamma = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BZ^2 + Z\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2BZ^2 \Leftrightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2BZ^2 \Leftrightarrow 32 = 2BZ^2 \Leftrightarrow BZ^2 = 16 \Leftrightarrow BZ = 4$$

Άρα και $Z\Gamma = 4$.

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν:

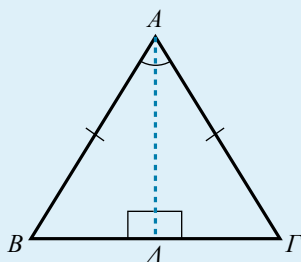
$A\Delta = B\Gamma$ επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές και

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραpezίου.

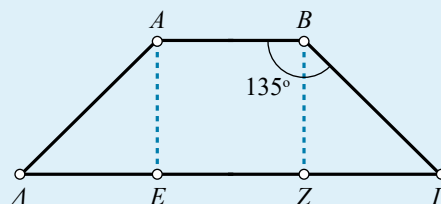
Άρα θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\Delta E = Z\Gamma = 4$.

$EZ = AB = 4\sqrt{2}$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ABZE$.

Επομένως $A\Gamma = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 8 + 4\sqrt{2}$.



Σχ. 6.8



Σχ. 6.9

Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2} = \frac{(8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \cdot 4}{2} = 16(1 + \sqrt{2})$$

6.3 Μετρήσεις κύκλου

6.3.1 Μήκος κύκλου και τόξου

Θεώρημα 6.7: Το μήκος L κύκλου ακτίνας ρ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = 2\pi\rho$$

ή

$$L = \pi\delta$$

όπου: $\delta = 2\rho$ είναι η διάμετρος του κύκλου.

Θεώρημα 6.8: Το μήκος l ενός τόξου μ° κύκλου ακτίνας ρ (σχ. 6.10), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$l = \frac{\pi\rho\mu}{180}$$

Πράγματι, σύμφωνα με την απλή μέθοδο των τριών:

Ένα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος $2\pi\rho$.

Ένα τόξο μ° έχει μήκος l

$$\text{Άρα: } \frac{360}{\mu} = \frac{2\pi\rho}{l} \quad \text{ή} \quad l = \frac{\pi\rho\mu}{180}$$

6.3.2 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

1) Κυκλικός δίσκος

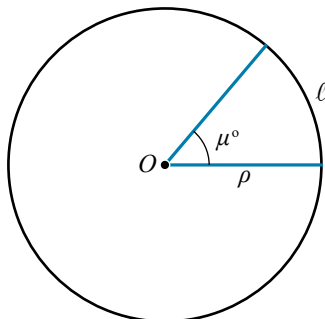
Έστω ένας κύκλος (O, ρ) . Ο κύκλος μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο** με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Θεώρημα 6.9: Το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ δίνεται από τη σχέση

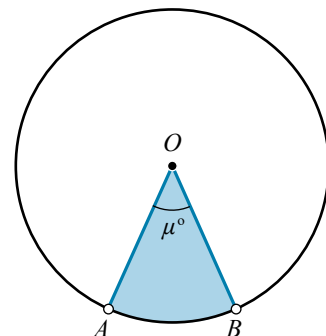
$$E = \pi\rho^2$$

2) Κυκλικός τομέας

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, ρ) και μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ (σχ. 6.11). Το σύνολο



Σχ. 6.10



Σχ. 6.11

των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\widehat{AOB}$ και του κυκλικού δίσκου (O, ρ) λέγεται **κυκλικός τομέας** κέντρου O και ακτίνας ρ , και συμβολίζεται $\widehat{OAB}$. Αν η επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ είναι μ° , λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας είναι μ° .

Με απλή μέθοδο των τριών προκύπτει ότι το **εμβαδόν του κυκλικού τομέα μ°** που βρίσκεται σε κύκλο ακτίνας ρ δίνεται από τη σχέση:

$$(\widehat{OAB}) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360}$$

3) Κυκλικό τμήμα

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και μια χορδή του AB (σχ. 6.12). Η χορδή χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη καθένα από τα οποία λέγεται **κυκλικό τμήμα**.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία AOB , αρκεί να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου AOB από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\widehat{OAB}$. Δηλαδή:

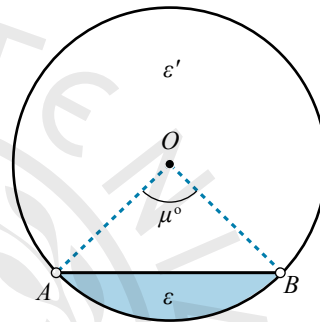
$$\varepsilon = (AOB) - (\widehat{OAB})$$

Το (AOB) σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5 είναι:

$$(AOB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\mu = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu\mu$$

Επομένως:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \eta\mu\mu - \frac{\pi \rho^2 \mu}{360}$$



Σχ. 6.12



Παράδειγμα 6.3

Το τόξο $\widehat{AB}$ του σχήματος 6.13 έχει μήκος $l = 2\pi$ cm. Να βρεθούν:

- Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- Το εμβαδόν του τριγώνου AOB .
- Το εμβαδόν του γραμμωσκιωμένου κυκλικού τμήματος.

Λύση

$$\alpha) l = \frac{\pi \rho \mu}{180} \Leftrightarrow 2\pi = \frac{\pi \rho 60}{180} \Leftrightarrow 2\pi = \frac{\pi \rho}{3} \Leftrightarrow \rho = 6 \text{ cm}$$

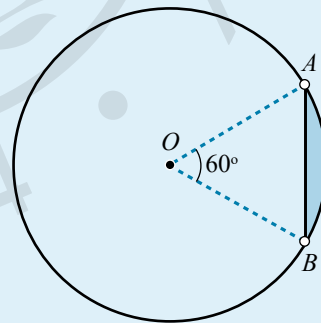
$$E = \pi \rho^2 = \pi 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

β) Το τρίγωνο AOB είναι ισόπλευρο διότι είναι ισοσκελές αφού $OA = OB = \rho$ κι έχει $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Άρα σύμφωνα με την Εφαρμογή 6.2 το εμβαδόν του είναι:

$$(AOB) = \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Εναλλακτικά:

$$(AOB) = \frac{1}{2} \rho^2 \eta\mu 60^\circ = \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



Σχ. 6.13

γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\widehat{OAB}$ είναι:

$$(\widehat{OAB}) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360} = \frac{\pi 6^2 \cdot 60}{360} = 6\pi \text{ cm}^2$$

Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι:

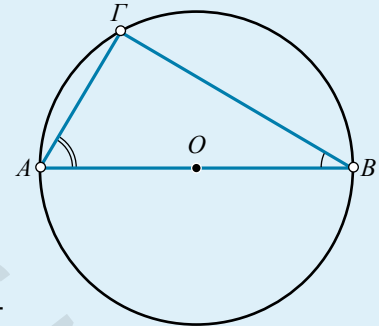
$$\varepsilon = (\widehat{AOB}) - (\widehat{OAB}) = (6\pi - 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Παράδειγμα 6.4

Στο σχήμα 6.14 η AB είναι διάμετρος και ισχύει:

$AG = 4 \text{ cm}$ και $BG = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. Να βρεθούν:

- Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.
- Οι γωνίες του τριγώνου ABG .
- Το μέτρο και το μήκος του τόξου $\widehat{BG}$.



Σχ. 6.14

Λύση

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημι-κύκλιο. Άρα:

$$\hat{\Gamma} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Δηλαδή το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 4^2 \cdot 3 = 64$$

Άρα $AB = 8 \text{ cm}$. Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 8:2 = 4 \text{ cm}$.

Το μήκος του κύκλου είναι:

$$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 25,12 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

β) Δείξαμε ήδη ότι $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

$$\eta\mu B = \frac{AG}{AB} = \frac{4}{8} = 0,5 \quad \text{άρα} \quad \hat{B} = \eta\mu^{-1} 0,5 = 30^\circ$$

Άρα $\hat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

γ) Η $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\widehat{BG}$. Άρα ισχύει:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BG}}{2} = \Leftrightarrow \widehat{BG} = 2 \cdot \hat{A} = 120^\circ$$

Το μήκος του $\widehat{BG}$ είναι:

$$l = \frac{\pi\rho\mu}{180} = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 120}{180} = 8,373 \text{ cm}$$

6.4 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος στερεών σχημάτων

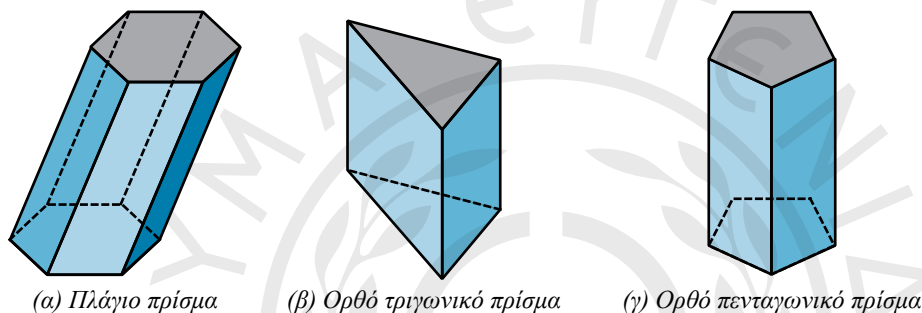
Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε δύο κατηγορίες στερεών σχημάτων, τα πολύεδρα και τα στερεά εκ περιστροφής. Τα πολύεδρα αποτελούνται από τμήματα επιπέδων, κατάλληλα τοποθετημένα, ώστε να σχηματίζουν ένα κλειστό στερεό σχήμα. Από τα διάφορα είδη πολυέδρων που υπάρχουν, θα μελετήσουμε τα πρίσματα και τις πυραμίδες.

Τα στερεά εκ περιστροφής με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα. Τα στερεά αυτά ονομάζονται έτσι γιατί σχηματίζονται κατά την περιστροφή επιπέδων σχημάτων.

6.4.1 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πρίσματος

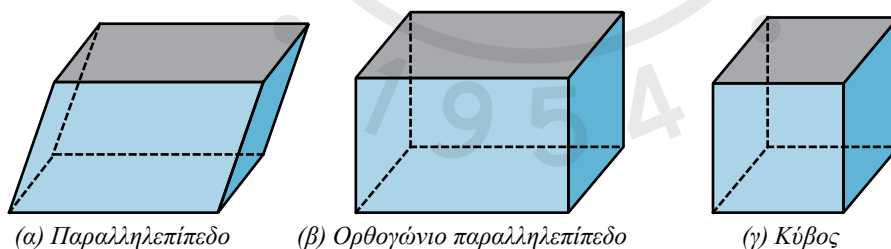
Πρίσμα ονομάζεται το πολύεδρο που έχει δύο απέναντι έδρες ίσες και παράλληλες και όλες τις άλλες έδρες του παραλληλόγραμμα. Οι παράλληλες έδρες λέγονται **βάσεις** του πρίσματος, ενώ όλες οι υπόλοιπες έδρες που περικλείονται μεταξύ των επιπέδων των βάσεων λέγονται **παράπλευρες έδρες**. Οι πλευρές των εδρών λέγονται **ακμές**. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα στα επίπεδα των βάσεων και είναι κάθετο σε αυτά λέγεται **ύψος** του πρίσματος. **Ορθό** λέγεται το πρίσμα που οι έδρες του είναι κάθετες στις βάσεις του, διαφορετικά λέγεται **πλάγιο**.

Ένα πρίσμα παίρνει την ονομασία του από το σχήμα των βάσεών του. Αν είναι τρίγωνα τότε το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, αν είναι εξάγωνα εξαγωνικό κ.λπ. (σχ. 6.15).



Σχ. 6.15

Αν και οι βάσεις ενός πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα, τότε το πρίσμα λέγεται **παραλληλεπίπεδο**. Αν το πρίσμα είναι ορθό και οι βάσεις είναι ορθογώνια, το πρίσμα λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ειδικότερα, αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές ίσες, λέγεται **κύβος** (σχ. 6.16).



Σχ. 6.16

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας

$$E_{\pi} = \Pi_{\text{βάσης}} \cdot \upsilon$$

Είναι προφανές ότι για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας αρκεί να προσθέσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης με το εμβαδόν των δύο βάσεων:

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας

$$E_{\text{ολ}} = 2E_{\text{βάσης}} + E_{\pi}$$

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος, δηλαδή:

Όγκος

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot v$$

6.4.2 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και κύβος

1) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ειδικά στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές a , β , γ , (σχ. 6.17) οι παραπάνω τύποι γίνονται:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

$$E_{\pi} = 2a\gamma + 2\beta\gamma$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = 2a\beta + 2a\gamma + 2\beta\gamma$$

Όγκος

$$V = a \cdot \beta \cdot \gamma$$

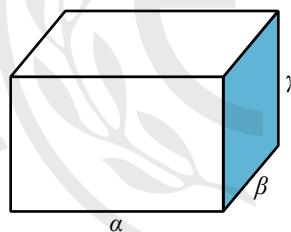
2) Κύβος

Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου ακμής a , (σχ. 6.18):

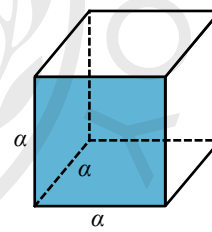
$$E_{ολ} = 6a^2$$

και ο όγκος του κύβου:

$$V = a^3$$



Σχ. 6.17



Σχ. 6.18



Παράδειγμα 6.5

Μια κλειστή δεξαμενή πλοίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 11 m, 7 m και 6,2 m περιέχει 500 m³ πετρέλαιο. Να βρεθούν:

- Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.
- Πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει η δεξαμενή.

Λύση

$$\alpha) E_{ολ} = 2a\beta + 2a\gamma + 2\beta\gamma = 2 \cdot 11 \cdot 7 + 2 \cdot 11 \cdot 6,2 + 2 \cdot 7 \cdot 6,2 = 377,2 \text{ m}^2.$$

β) Ο όγκος της δεξαμενής είναι: $V = a \cdot \beta \cdot \gamma = 11 \cdot 7 \cdot 6,2 = 477,4 \text{ m}^3$. Άρα η δεξαμενή χωράει ακόμα $500 - 477,4 = 22,6 \text{ m}^3$.

6.4.3 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κυλίνδρου

Το σχήμα που παράγεται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο εκτελεί μία πλήρη περιστροφή στον χώρο γύρω από τη μία πλευρά του, ονομάζεται **κύλινδρος**. Ένας κύλινδρος αποτελείται από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι

βάσεις του, και την παράπλευρη ή κυρτή επιφάνεια, που αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου. Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται *ύψος* του κυλίνδρου.

Θεωρούμε τον κύλινδρο του σχήματος 6.19 ύψους v , στον οποίο οι βάσεις του έχουν ακτίνα ρ . Τότε:

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

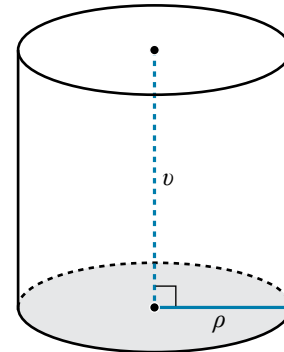
$$E_{\pi} = \text{Περίμετρος βάσης} \cdot v = 2\pi\rho \cdot v$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = 2E_{\text{βάσης}} + E_{\pi} = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho \cdot v$$

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot v = \pi\rho^2 \cdot v$$



Σχ. 6.19



Παράδειγμα 6.6

Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 10 m. Οι εργάτες θέλουν να κατασκευάσουν μια ίδια. Δεν μπορούν να μετρήσουν τη διάμετρο της βάσης. Γνωρίζουν όμως ότι η δεξαμενή χωράει 502.650 l πετρέλαιο. Ποιο θα είναι το κόστος της κατασκευής αν το υλικό είναι λαμαρίνα που κοστίζει 4 € το m^2 ;

Λύση

$$502.650 \text{ l} = 502.650 : 1000 \text{ m}^3 = 502,65 \text{ m}^3$$

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot v \Leftrightarrow 502,65 = E_{\text{βάσης}} \cdot 10 \Leftrightarrow E_{\text{βάσης}} = 50,265 \text{ m}^2$$

$$E_{\text{βάσης}} = 50,265 \Leftrightarrow \pi \cdot \rho^2 = 50,265 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{50,265}{\pi} \approx 16 \text{ m}. \text{ Άρα } \rho = 4 \text{ m}$$

Επομένως το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

$$E_{ολ} = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho v = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 = 351,86 \text{ m}^2.$$

Άρα το κόστος κατασκευής είναι: $351,86 \cdot 4 = 1407,44 \text{ €}$.

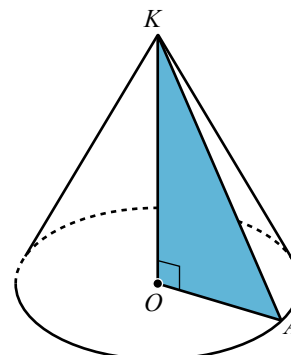
6.4.4 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος κώνου

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ του σχήματος 6.20. Η βάση του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου ΚΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται **ακτίνα του κώνου**.

Η κάθετη πλευρά ΚΟ γύρω από την οποία περιστρέψαμε το ορθογώνιο τρίγωνο, λέγεται *ύψος* του κώνου.

Η κυρτή επιφάνεια που παράγεται από την υποτείνουσα ΚΑ λέγεται **παράπλευρη ή κυρτή επιφάνεια** του κώνου.



Σχ. 6.20

Η τυχαία θέση της ΚΑ λέγεται γενέτειρα του κώνου και τη συμβολίζουμε λ .

Το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κώνου του σχήματος 6.21 είναι κυκλικός τομέας κέντρου Κ και ακτίνας λ , που βλέπει σε τόξο μήκους $2\pi\rho$. Έτσι προκύπτει ο τύπος:

Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας:

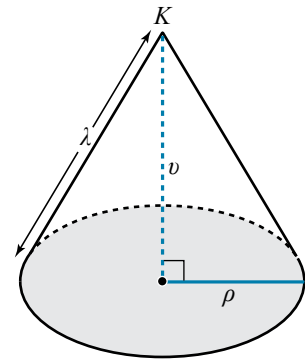
$$E_k = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = E_{βάσης} + E_k = \pi\rho^2 + \pi\rho \cdot \lambda$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot v$$



Σχ. 6.21

Παρατηρούμε ότι ο όγκος κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου κυλίνδρου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

6.4.5 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος πυραμίδας

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Το πολύγωνο λέγεται **βάση** της πυραμίδας, ενώ τα τρίγωνα με κοινή κορυφή και απέναντι πλευρές τις πλευρές της βάσης λέγονται **παράπλευρες έδρες**. Το σύνολο των παράπλευρων εδρών λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια** της πυραμίδας. Η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική κ.λπ., αν η βάση είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.λπ.

Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας κάθετα στο επίπεδο της βάσης λέγεται **ύψος της πυραμίδας** (το v στο σχ. 6.22)

Μία πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου. Σε μία κανονική πυραμίδα, οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους και το ύψος κάθε παράπλευρης έδρας που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας λέγεται **απόστημα** ή **παράπλευρο ύψος** της κανονικής πυραμίδας (το h στο σχ. 6.22)

Κανονική πυραμίδα

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

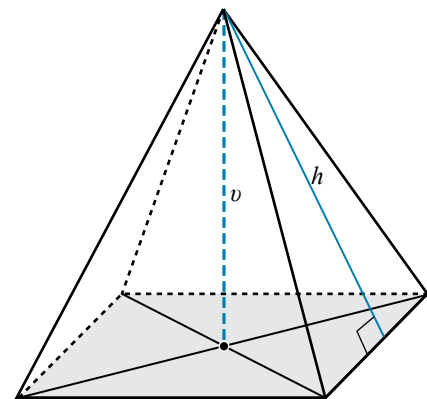
$$E_p = \frac{1}{2} \text{Περίμετρος βάσης} \cdot h$$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας:

$$E_{ολ} = E_b + E_p$$

Όγκος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_b \cdot v$$



Σχ. 6.22

Παρατηρούμε ότι ο όγκος πυραμίδας είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου παραλληλεπιπέδου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

6.4.6 Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος σφαίρας

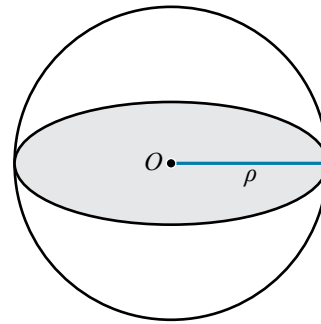
Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του. Η ακτίνα του κυκλικού δίσκου λέγεται και ακτίνα της σφαίρας. Θεωρούμε τη σφαίρα ακτίνας ρ του σχήματος 6.23.

Εμβαδόν επιφάνειας:

$$Επ = 4\pi\rho^2$$

Όγκος:

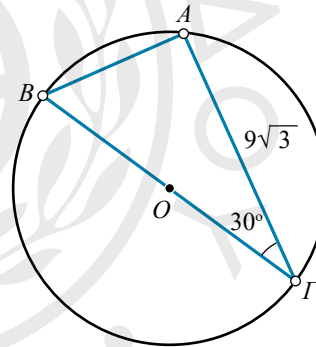
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$$



Σχ. 6.23

Ασκήσεις

- Να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τραπέζιου.
- Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ, ΑΒ=6 cm, ΓΔ=3 cm, και περίμετρο Π = 14 cm. Να βρεθούν:
 - Οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ.
 - Το εμβαδόν του τραπέζιου.
- Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) όπου ΑΒ=12, ΑΔ=8 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεθούν:
 - Όλες οι γωνίες του τραπέζιου
 - Η περίμετρος και το εμβαδόν του τραπέζιου.
- Στο σχήμα 6.24 δίνεται: $\widehat{ΑΓ} = 9\sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να βρεθούν:
 - Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
 - Τα τόξα $\widehat{ΑΒ}$ και $\widehat{ΑΓ}$.
 - Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
 - Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.
 - Το μήκος του τόξου $\widehat{ΑΓ}$.
 - Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΒ.



Σχ. 6.24

- Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1256 cm². Να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 45°.
- Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 7 cm, πλάτος 6 cm, και ύψος 5 cm. Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς του.
- Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4 m, πλάτος 3 m και όγκο 120 m³. Να υπολογιστεί το ύψος του και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
- Να υπολογιστεί το εμβαδόν και ο όγκος ορθού πρίσματος, του οποίου το ύψος είναι 6 cm, και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm, και 4 cm.
- Μια κλειστή δεξαμενή πλοίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 9 m, 8 m και 6,5 m περιέχει 420 m³ πετρέλαιο. Να βρεθούν:
 - Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.
 - Πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει η δεξαμενή.
- Ένας κύλινδρος έχει ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης 4 cm. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και ο όγκος του.

11. Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με $175\pi \text{ m}^3$. Αν το ύψος του είναι ίσο με 7 m, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
12. Μία κυλινδρική δεξαμενή έχει ύψος 6 m και ακτίνα βάσης 4 m. Αν η δεξαμενή έχει μέσα 200 m^3 πετρέλαιο, πόσο επιπλέον πετρέλαιο χωράει;
13. Να αποδειχθεί ο τύπος εμβαδού κυρτής επιφάνειας κώνου.
14. Η διάμετρος μίας σφαίρας είναι $\delta = 4 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.
15. Η επιφάνεια μίας σφαίρας είναι $36\pi \text{ m}^2$. Να βρείτε τον όγκο της.

