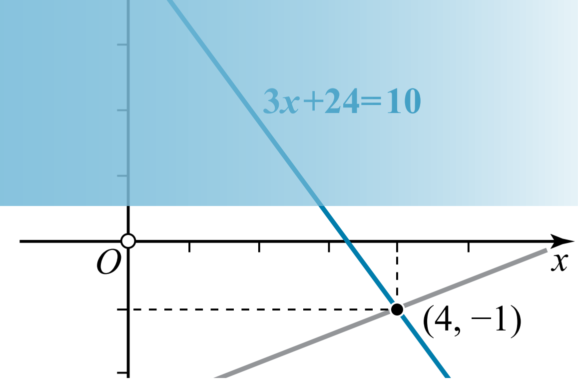
κεφάλαιο **1**

Στοιχεία Άλγεβρας



Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά σε βασικές γνώσεις άλγεβρας, όπως δυνάμεις, ταυτότητες, εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού και γραμμικά συστήματα. Οι περισσότερες έννοιες είναι ήδη γνωστές από το σχολείο, οπότε γίνεται μια επανάληψη αυτών, δίνοντας έμφαση σε ναυτικές εφαρμογές.

1.1 Αλγεβρικές παραστάσεις

1.1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε τα σύνολα των αριθμών, με τους αντίστοιχους συμβολισμούς τους:

1) Το σύνολο των ***φυσικών αριθμών:***

$$\mathbb{N}:=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

2) Το σύνολο των ***ακέραιων αριθμών***:

$$\mathbb{Z}:=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

3) Το σύνολο των ***ρητών αριθμών***:

$$\mathbb{Q}:=\left\{\frac{\mu}{\nu}\middle|\ \mu,\nu \text{ ακέραιοι με } \nu\neq 0 \text{ και ΜΚΔ } (\mu,\nu)=1\right\}$$

Δηλαδή, ***ρητός*** λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος.

4) Το σύνολο των ***άρρητων αριθμών*** $\mathbb{Q}'$ που περιλαμβάνει τους αριθμούς που δεν μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος, όπως για παράδειγμα:

$$\pi \simeq 3{,}14 \quad e \simeq 2{,}18 \quad \sqrt{2},\sqrt{3} \text{ κ.ά.}$$

5) Το σύνολο των ***πραγματικών*** $\mathbb{R}$ αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους. Προφανώς ισχύει: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

– ***Δυνάμεις πραγματικών αριθμών***

Η δύναμη με βάση έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό α και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $\nu\geq 1$ συμβολίζεται με α^ν και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α. Δηλαδή:

$$\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

Άρα: $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$, $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$, $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$

Παρατήρηση

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι όταν η βάση είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι θετικός αριθμός, ενώ όταν η βάση είναι αρνητικός και ο εκθέτης περιττός, τότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός.

Ισχύει: $\alpha^0 := 1, \alpha \neq 1$ ενώ 0^0 δεν ορίζεται.

Επίσης ορίζουμε $\boxed{\alpha^{-\nu} := \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}}$

Ομοίως ορίζουμε δυνάμεις πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη:

$\boxed{\alpha^{\frac{1}{\nu}} := \sqrt[\nu]{\alpha}}$ με εξαίρεση την περίπτωση $\alpha<0$ και ν άρτιος

Επομένως η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ***ν-οστή ρίζα του α*** είναι ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε: $x^{\nu} = \alpha$.

Για παράδειγμα: $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$, ενώ $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται, ενώ $\sqrt[3]{27} = 3$ και $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Έτσι, μπορεί κάποιος να ορίσει δυνάμεις με ρητό εκθέτη: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} := \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$

Για παράδειγμα:

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \left((-27)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (-3)^2 = 9 = 3^2 = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 27^{\frac{2}{3}}$$

Ιδιότητες δυνάμεων

1) $\alpha^{\varkappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\varkappa+\lambda}$	2) $\dfrac{\alpha^{\varkappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\varkappa-\lambda}$	3) $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$
4) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\varkappa} = \dfrac{\alpha^{\varkappa}}{\beta^{\varkappa}}$	5) $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$	6) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\varkappa} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\varkappa}$

για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς $\varkappa, \lambda \neq 0$.

Παράδειγμα 1.1

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-5} \quad x, y \neq 0$ β) $B = \dfrac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \dfrac{30^4}{(-15)^4} - \dfrac{8^{-10}}{12^{-10}}$

Λύση

$$α)\ A = \frac{(x^{-4} \cdot y^5 \cdot x)^3}{(x^2)^{-3} \cdot (y^2)^5 \cdot x^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-5} = \frac{(x^{-4})^3 \cdot (y^5)^3 \cdot x^3}{x^{-6} \cdot x^2 \cdot y^{10}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^{-12} \cdot y^{15} \cdot x^3}{x^{-6+2} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-12+3} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} =$$

$$= \frac{x^{-9} \cdot y^{15}}{x^{-4} \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{x^{-9}}{x^{-4}} \cdot \frac{y^{15}}{y^{10}} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-9-(-4)} \cdot y^{15-10} \cdot \frac{x^5}{y^5} = x^{-5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{1}{x^5} \cdot y^5 \cdot \frac{x^5}{y^5} = \frac{y^5}{x^5} \cdot \frac{x^5}{y^5} = 1$$

$$β)\ B = \frac{3^{10}}{(-2)^{10}} - \frac{30^4}{(-15)^4} - \frac{8^{-10}}{12^{-10}} = \left(\frac{3}{-2}\right)^{10} - \left(\frac{30}{-15}\right)^4 - \left(\frac{8}{12}\right)^{-10} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-10} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{3^4}{2^4} = -\frac{81}{16}$$

1.1.2 Πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων

Είναι γνωστό, ότι η επίλυση πολλών προβλημάτων γίνεται με χρήση μεταβλητών και εκφράσεων που περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές. Οι μαθηματικές αυτές εκφράσεις λέγονται ***αλγεβρικές παραστάσεις***.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, ονομάζονται ***μονώνυμα***. Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται ***συντελεστής του μονωνύμου***, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται ***κύριο μέρος του μονωνύμου***.

Για παράδειγμα: στο μονώνυμο $-5x^2yz^3$ έχουμε συντελεστή -5 και κύριο μέρος x^2yz^3.

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος λέγονται ***όμοια***.

Για παράδειγμα: τα μονώνυμα $-4\alpha^2x$, $\frac{5}{3}\alpha^2x$ και α^2x είναι όμοια.

Το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια ονομάζεται ***πολυώνυμο***. Πολυώνυμα είναι για παράδειγμα τα:

$$3\alpha^3 - 4\beta^2 + 5\alpha\beta,\ 2x^3 - 6xy^4 + x^2y^2 \text{ και } x^4 - 2x^3 - 8x - 9$$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται ***όρος*** του πολυωνύμου.

– Πράξεις με πολυώνυμα

1) ***Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων:***

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα ή όπως λέμε όμοιοι όροι, μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους, όπου προστίθενται οι συντελεστές και παραμένει ίδιο το κύριο μέρος. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***αναγωγή ομοίων όρων.*** Έτσι όταν θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα κάνουμε αναγωγή στους όμοιους όρους.

Για παράδειγμα, το άθροισμα και η διαφορά των πολυωνύμων:

$5x^2y - 4x^3 + 6y$ και $x^2y - x^3 - 3y$ υπολογίζονται ως εξής:

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) + (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y + x^2y - x^3 - 3y = 6x^2y - 5x^3 + 3y$$

$$(5x^2y - 4x^3 + 6y) - (x^2y - x^3 - 3y) = 5x^2y - 4x^3 + 6y - x^2y + x^3 + 3y = 4x^2y - 3x^3 + 9y$$

2) ***Πολλαπλασιασμός μονωνύμου επί πολυώνυμο***

Πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο επί μονώνυμο πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές μεταξύ τους και τις μεταβλητές με τις δυνάμεις μεταξύ τους.

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

Για παράδειγμα:

α) $2x^2(x^3 - 4xy) = 2x^5 - 8x^3y$

β) $3xy^2(4xy^2 - x - 5y + 1) = 12x^2y^4 - 3x^2y^2 - 15xy^3 + 3xy^2$

3) ***Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου επί πολυώνυμο***

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο επί πολυώνυμο εφαρμόζουμε την διπλή επιμεριστική ιδιότητα:

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}$$

Για παράδειγμα:

$$(6x^2 + 3xy + y^2) \cdot (3x - y) = 18x^3 - 6x^2y + 9x^2y - 3xy^2 + 3xy^2 - y^3 = 18x^3 + 3x^2y - y^3$$

1.1.3 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της, λέγεται ***ταυτότητα***. Παρακάτω βλέπουμε κάποιες απ' τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ταυτότητες.

1) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3) $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$
4) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5) $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
7) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Παράδειγμα 1.2

Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(x-3y)^2 - (2y+3x)(2y-3x) - (3x-y)^2$

β) $(3x-2)^2(x+3) - (x-3)^3$

Λύση

α) $(x-3y)^2 - (2y+3x)(2y-3x) - (3x-y)^2 =$
$= x^2 - 6xy + (3y)^2 - [(2y)^2 - (3x)^2] - [(3x)^2 - 6xy + y^2] =$
$= x^2 - 6xy + 9y^2 - (4y^2 - 9x^2) - (9x^2 - 6xy + y^2) =$
$= x^2 - 6xy + 9y^2 - 4y^2 + 9x^2 - 9x^2 + 6xy - y^2 =$
$= x^2 + 4y^2$

β) $(3x-2)^2(x+3) - (x-3)^3 =$
$= [(3x)^2 - 12x + 4](x+3) - (x^2 - 6x + 9) =$
$= (9x^2 - 12x + 4)(x+3) - x^2 + 6x - 9 = 9x^3 + 27x^2 - 12x^2 - 36x + 4x + 12 - x^2 + 6x - 9 =$
$= 9x^3 + 14x^2 - 26x + 3$

1.2 Εξισώσεις

Ένα σημαντικό εργαλείο των μαθηματικών, είναι οι εξισώσεις. Πολλά προβλήματα της Ναυτιλίας, αλλά και προβλήματα πολλών επιστημών και ακόμα προβλήματα της καθημερινής ζωής βρίσκουν λύση επιλύοντας εξισώσεις.

Μια ισότητα δύο παραστάσεων που περιέχει μια μεταβλητή ονομάζεται ***εξίσωση*** με έναν άγνωστο. Η μεταβλητή ονομάζεται ***άγνωστος της εξίσωσης***. Για παράδειγμα:

$$3(x-1) = 4x - 5 \text{ εξίσωση με άγνωστο το } x$$

Η παράσταση $3(x-1)$ λέγεται ***1ο μέλος*** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $4x-5$ λέγεται ***2ο μέλος*** της εξίσωσης. Κάθε τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την ισότητα, ονομάζεται ***λύση*** ή ***ρίζα*** της εξίσωσης. Για παράδειγμα αν βάλουμε στην παραπάνω εξίσωση όπου x τον αριθμό 2:

$$3(2-1) = 4\cdot 2 - 5 \quad \text{ή} \quad 3 = 3 \text{ (αληθεύει)}$$

Επομένως ο αριθμός 3 είναι ***λύση της εξίσωσης***.

Όταν τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι πολυώνυμα, ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου ονομάζεται ***βαθμός*** της εξίσωσης.

1.2.1 Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού

Όταν ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι το 1, λέμε ότι έχουμε ***εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού***.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις $4x - 3 = 3(2-x) + 6$ και $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-5}{2}$ είναι εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού.

Κάθε εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta}$$

Για την επίλυση της παραπάνω διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ τότε η εξίσωση έχει ***μοναδική λύση*** την $\boldsymbol{x = -\frac{\beta}{\alpha}}$

2) Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$ τότε η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = -\beta$, οπότε:
   α) Αν $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ τότε δεν έχει λύση, δηλαδή είναι ***αδύνατη***
   β) Αν $\boldsymbol{\beta = 0}$ γίνεται $0 \cdot x = 0$, οπότε αληθεύει για κάθε αριθμό, δηλαδή είναι ***αόριστη*** ή ***ταυτότητα***.

Παράδειγμα 1.3

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x-5}{3} - 2x = 2 - \frac{x+6}{4}$

Λύση

$\frac{2x-5}{3} - 2x = 2 - \frac{x+6}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{2x-5}{3} - 12 \cdot 2 \cdot x = 12 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{x+6}{4} \Leftrightarrow$ απαλοιφή παρονομαστών

$4(2x-5) - 24 \cdot x = 24 - 3 \cdot (x+6) \Leftrightarrow$

$8x - 20 - 24x = 24 - 3x - 18 \Leftrightarrow$ επιμεριστική ιδιότητα

$8x - 24x + 3x = 24 - 18 + 20 \Leftrightarrow$ χωρισμός γνωστών από αγνώστους

$-13x = 26 \Leftrightarrow$ αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{-13x}{-13} = \frac{26}{-13} \Leftrightarrow$ διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου

$x = -2$ (Μοναδική λύση)

Παράδειγμα 1.4

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{5-2x}{4}$

Λύση

$\frac{3}{2} - \frac{2x+1}{4} = \frac{5-2x}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2x+1}{4} = 4 \cdot \frac{5-2x}{4} \Leftrightarrow$

$2 \cdot 3 - (2x+1) = 5 - 2x \Leftrightarrow 6 - 2x - 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow -2x + 2x = 5 - 6 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ (Αόριστη)

Παράδειγμα 1.5

Να λυθεί η εξίσωση: $3(1-2x) - 4(2-x) = x - 3(x+2)$

Λύση

$3(1-2x) - 4(2-x) = x - 3(x+2) \Leftrightarrow 3 - 6x - 8 + 4x = x - 3x - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6x + 4x - x + 3x = -6 - 3 + 8 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -1$ (Αδύνατη)

Πρόβλημα 1.1

Ένα πλοίο ταξίδεψε από ένα λιμάνι A σε ένα λιμάνι B με σταθερή ταχύτητα 21 κόμβων (knots). Άφου έμεινε 3 h στο λιμάνι B, επέστρεψε στο λιμάνι A με σταθερή ταχύτητα 24 knots. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 18 h πόση είναι η απόσταση των δύο λιμανιών σε ναυτικά μίλια (ν.μ.);

Λύση

Έστω ότι η ζητούμενη απόσταση είναι x ν.μ.

Το πλοίο ταξίδεψε από το λιμάνι στο λιμάνι με ταχύτητα 21 knots. Θυμίζουμε ότι 1 knot = 1 ν.μ./h. Άρα:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 21 = \frac{x}{t} \Leftrightarrow t = \frac{x}{21}\text{ h}$$

Δηλαδή ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι A στο λιμάνι B ήταν $\frac{x}{21}$ h. Ομοίως ο χρόνος για να πάει από το λιμάνι B στο λιμάνι A ήταν $\frac{x}{24}$ h. Ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24}$. Ο χρόνος αυτός δίνεται 18 h. Επομένως:

$$\frac{x}{21} + 3 + \frac{x}{24} = 18 \Leftrightarrow \qquad (\text{ΕΚΠ}=168)$$

$$168 \cdot \frac{x}{21} + 168 \cdot 3 + 168 \cdot \frac{x}{24} = 168 \cdot 18 \Leftrightarrow 8x + 504 + 7x = 3024 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x + 7x = 3024 - 504 \Leftrightarrow 15x = 2520 \Leftrightarrow x = \frac{2520}{15} = 168$$

Άρα η απόσταση των δύο λιμανιών είναι 168 ν.μ.

1.2.2 Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο, στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2, λέγεται ***εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού*** ή ***δευτεροβάθμια εξίσωση***.

Για παράδειγμα $x^2 = 16$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - x - 12 = 0$, $(x - 2) \cdot x = 3$ είναι εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού. Κάθε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού παίρνει τη γενική μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0} \text{ με } \boldsymbol{\alpha \neq 0}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα $x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \quad \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -16$

$$x^2 + 5x = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = 5,\ \gamma = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -12$$

$$(x - 2) \cdot x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -3$$

Για την επίλυση της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Γενική μορφή: Επίλυση με τύπο

Θα επιλύσουμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ *με* $\alpha \neq 0$, *με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου»:*

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ με το γράμμα $\boldsymbol{\Delta}$ έχουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (1)$$

Οπότε για να επιλύσουμε ως προς x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$: τότε ορίζεται η $\sqrt{\Delta}$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$ ή πιο συνοπτικά:

$$\boldsymbol{x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}} \qquad (\textit{δύο άνισες ρίζες})$$

β) Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$: $(1) \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$ (*μία ρίζα διπλή*)

γ) Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$: Η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, εφόσον $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\geq 0$, ενώ $\frac{\Delta}{4\alpha^2}<0$

Η αλγεβρική παράσταση $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$ από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης, ονομάζεται ***διακρίνουσα*** αυτής.

Ο τρόπος επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης συνοψίζεται στον πίνακα 1.1:

Πίνακας 1.1

$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$	$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$
$\boldsymbol{\Delta > 0}$	Έχει 2 ρίζες άνισες: $\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	Έχει 1 ρίζα (διπλή): $\boldsymbol{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Παράδειγμα 1.6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5x^2-4x-1=0$ β) $36x^2-12x+1=0$

γ) $2x^2+4x+3=0$ δ) $(3x-1)^2-(4-x)^2=x^2+9$

Λύση

α) Είναι $\alpha=5, \beta=-4$ και $\gamma=-1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot5\cdot(-1)=36>0$$

Οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\cdot5}=\frac{4+6}{10}=1 \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\cdot5}=\frac{4-6}{10}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}$$

β) Είναι $\alpha = 36, \beta = -12$ και $\gamma = 1$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 144 - 144 = 0$$

Οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-12)}{2 \cdot 36} = \dfrac{1}{6}$

γ) Είναι $\alpha = 2, \beta = 4$ και $\gamma = 3$. Οπότε η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Επομένως, η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

δ) $(3x-1)^2 - (4-x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - (16 - 8x + x^2) = x^2 + 9 \Leftrightarrow$
$9x^2 - 6x + 1 - 16 + 8x - x^2 - x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 24 = 0$

Είναι $\alpha = 7, \beta = 2$ και $\gamma = -24$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 7(-24) = 676 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 + \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 + 26}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7},$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 - \sqrt{676}}{2 \cdot 7} = \frac{-2 - 26}{14} = \frac{-28}{14} = -2$$

2) Ελλιπείς μορφές: $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$

Η επίλυση στις περιπτώσεις αυτές γίνεται με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$\varkappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \varkappa = 0 \;\text{ ή }\; \lambda = 0$$

α) Μορφή: $\alpha x^2 + \beta x = 0$ ($\gamma = 0$)

Για παράδειγμα,

$$2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \quad \textit{(βγάζω κοινό παράγοντα το x)}$$

$$x \cdot (2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\text{ ή }\; x = -\frac{5}{2}$$

β) Μορφή: $\alpha x^2 + \gamma = 0$ ($\beta = 0$)

Για παράδειγμα,

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3) \cdot (2x+3) = 0 \Leftrightarrow \quad \textit{(διαφορά τετραγώνων)}$$

$$2x - 3 = 0 \text{ ή } 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \;\text{ ή }\; x = \frac{3}{-2}$$

Πρόβλημα 1.2

Η πισίνα ενός κρουαζιερόπλοιου σχήματος ορθογωνίου έχει εμβαδόν 135 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις της πισίνας, αν είναι γνωστό ότι το μήκος της είναι μεγαλύτερο του πλάτους της κατά 6 m (σχ. 1.1).

Λύση

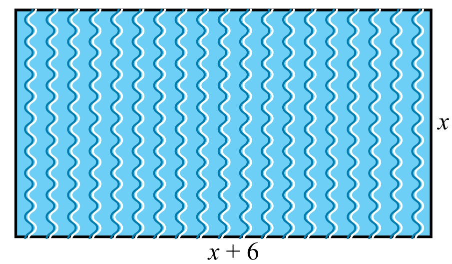
Έστω ότι το πλάτος της πισίνας είναι x. Τότε το μήκος της θα είναι $x + 6$. Το εμβαδόν δίνεται 135 m^2, επομένως ισχύει:

$$(x + 6) \cdot x = 135 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 135 = 0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha = 1, \beta = 6$ και $\gamma = -135$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-135) = 576 > 0$



Σχ. 1.1

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 24}{2} = 9 \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = -15 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα το πλάτος της πισίνας είναι 9 m και το μήκος είναι 9 + 6 = 15 m

1.3 Γραμμικά συστήματα

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, λέγεται ***γραμμική εξίσωση*** και παριστάνει ευθεία γραμμή (σχ. 1.2).

Ειδικές περιπτώσεις

1) Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = c$ $\left(c = \frac{\gamma}{\beta}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$.

Για παράδειγμα η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0,2) (σχ. 1.3).

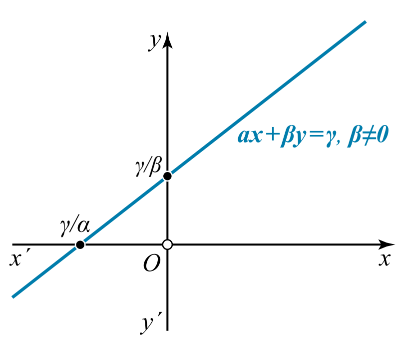
2) Αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $x = c$ $\left(c = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$.

Για παράδειγμα η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (2,0) (σχ. 1.4).

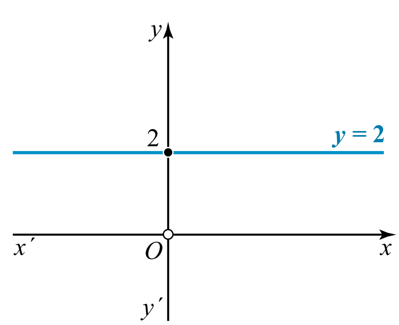
– Γραμμικό σύστημα 2 × 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με 2 αγνώστους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ***γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους*** ή πιο σύντομα ένα ***γραμμικό σύστημα 2 × 2***.

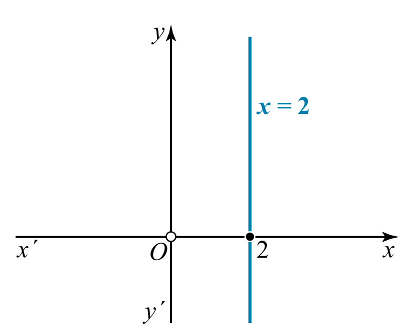
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$



Σχ. 1.2



Σχ. 1.3



Σχ. 1.4

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται ***λύση του συστήματος***.

Για παράδειγμα η λύση του συστήματος: $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ είναι το ζεύγος (x, y)=(4, –1) διότι:

1) Στην $x - 3y = 7$ για x= 4 και y= –1 έχουμε 4 – 3 · (–1) = 7 (αληθεύει) και

2) στην $3x + 2y = 10$ για x = 4 και y = –1 έχουμε 3 · 4 + 2 (–1) = 10 (αληθεύει)

1) ***Γραφική αναπαράσταση***

Οι 2 εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν 2 ευθείες. Η λύση (4, –1) του συστήματος, επαληθεύει συγχρόνως και τις 2 εξισώσεις, επομένως βρίσκεται πάνω και στις 2 ευθείες. Άρα το (4, –1) είναι το ***σημείο τομής των 2 ευθειών*** (σχ. 1.5). (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. κεφ. 2).

2) ***Πλήθος λύσεων γραμμικού συστήματος 2×2 (διερεύνηση)***

Οι 2 εξισώσεις παριστάνουν 2 ευθείες, οι οποίες μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Ειδικότερα:

α) Όταν οι ευθείες του συστήματος τέμνονται, το σύστημα έχει ***μοναδική λύση***, η οποία είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των 2 ευθειών.

β) Όταν οι ευθείες είναι παράλληλες, το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

γ) Όταν οι ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι ***αόριστο***.

Για παράδειγμα το (Σ): $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ είναι αδύνατο, διότι αν πολλαπλασιάσουμε την 1η εξίσωση με το 2, το (Σ) γίνεται ισοδύναμα: $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$

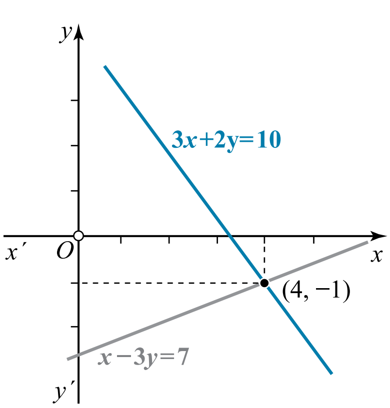
Οι δύο ευθείες του συστήματος είναι παράλληλες (σχ. 1.6).

Το σύστημα: (Σ): $\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$

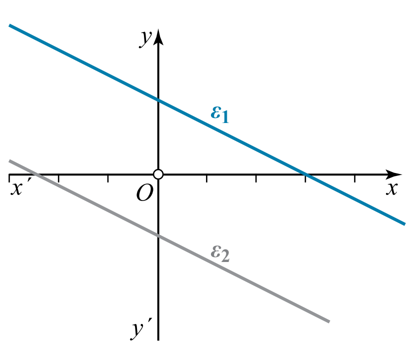
Και επομένως έχει άπειρες λύσεις (αόριστο), αφού οι 2 ευθείες ταυτίζονται (σχ. 1.7).

1.4 Αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων

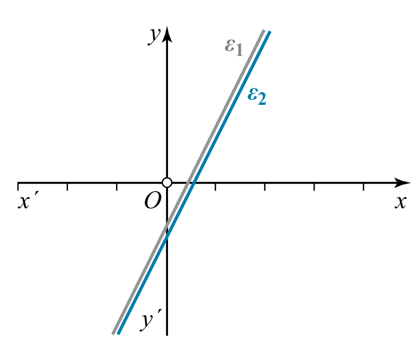
Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων ονομάζονται ***ισοδύναμα***. Δύο ισοδύναμα συστήματα σχετίζονται με την εφαρμογή των παρακάτω ***γραμμοπράξεων***,



Σχ. 1.5



Σχ. 1.6



Σχ. 1.7

τις οποίες χρησιμοποιούμε για να δώσουμε απλούστερη μορφή στο σύστημα.

1) Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων.

2) Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

3) Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης πολλαπλασιασμένης με έναν αριθμό στα αντίστοιχα μέλη μίας άλλης εξίσωσης.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο από τις μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2×2, την μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1) Μέθοδος της αντικατάστασης

Την προτιμάμε στα συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

α) ***Βήμα 1.*** Λύνουμε ως προς έναν άγνωστο τη μία απ' τις δύο εξισώσεις του συστήματος (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) ***Βήμα 2.*** Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει μια εξίσωση ενός άγνωστου, που μπορούμε να λύσουμε.

γ) ***Βήμα 3.*** Τη λύση που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση του βήματος 1, οπότε βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Παράδειγμα 1.7

$$\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 3(3y+7)+2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+21+2y=10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 9y+2y=10-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ 11y=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3(-1)+7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα $(x, y) = (4, -1)$

2) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

α) ***Βήμα 1***. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της μίας ή και των δύο εξισώσεων με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές ενός εκ των αγνώστων να γίνουν αντίθετοι αριθμοί, (εφαρμογή γραμμοπράξεων).

β) ***Βήμα 2.*** Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε.

γ) ***Βήμα 3.*** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία απ' τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα 1.8

Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=8-\dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y+1}{2}=9-\dfrac{x-1}{3} \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} x-3y=7 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y=-21 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$

$-3x + 3x + 9y + 2y = -21 + 10 \Leftrightarrow 11y = -11y \Leftrightarrow y = -1$

$x - 3y = 7 \Leftrightarrow x - 3(-1) = 7 \Leftrightarrow x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$

Άρα: $(x, y) = (4, -1)$

β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = 8 - \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y+1}{2} = 9 - \dfrac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot\dfrac{x+1}{2} = 2\cdot 8 - 2\cdot\dfrac{y-1}{2} \\ 6\cdot\dfrac{y+1}{2} = 6\cdot 9 - 6\cdot\dfrac{x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 16-(y-1) \\ 3(y+1) = 54-2(x-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 16-y+1 \\ 3y+3 = 54-2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=54+2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+3y=53 \end{cases} \begin{vmatrix} (-2) \\ \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-32 \\ 2x+3y=53 \end{cases}$

$-2y + 3y = -32 + 53 \Leftrightarrow y = 21$

$x + y = 16 \Leftrightarrow x + 21 = 16 \Leftrightarrow x = -5$ Άρα: $(x, y) = (-5, 21)$

Παρατηρήσεις

1) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $\mathbf{0x + 0y = a}$ όπου $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

2) Αν κατά τη διαδικασία επίλυσης προκύψει εξίσωση της μορφής: $\mathbf{0x + 0y = 0}$, τότε το σύστημα είναι ***αόριστο***.

Παράδειγμα 1.9

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases}$

Λύση

$\begin{cases} y+1=3x \\ 3y-5x=2(2x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ 3y-5x=4x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=1 \\ -9x+3y=-2 \end{cases} \begin{vmatrix} (-3) \\ \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 9x-3y=-3 \\ -9x+3y=-2 \end{cases}$

$0x+0y=-5$

Άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**

Παράδειγμα 1.10

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3(1-2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+1=3-6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Bigg| (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \qquad \overline{0x+0y=0}$$

Άρα το σύστημα είναι **αόριστο**.

$x-3y=1 \Rightarrow x=3y+1$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y) = (3y+1, y)$

1.5 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Στις καθημερινές μας δραστηριότητες, συχνά χρειάζεται να κάνουμε μετρήσεις διαφόρων μεγεθών με όργανα. Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί με απόλυτη ακρίβεια. Όταν κάνουμε μια μέτρηση με ένα όργανο, η τιμή του μεγέθους που βρίσκουμε, δεν είναι η *πραγματική τιμή*, αλλά είναι μια *προσεγγιστική τιμή*. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό, όταν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η απόκλιση του αποτελέσματος της μέτρησης από την πραγματική τιμή καλείται ***σφάλμα***. Τα σφάλματα μπορεί να οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης, λάθη του παρατηρητή ή σε ασταθείς εξωτερικούς παράγοντες.

Έστω $\hat{x}$ η προσεγγιστική τιμή και x η πραγματική τιμή ενός μεγέθους. Ονομάζουμε ***απόλυτο σφάλμα***, την απόλυτη τιμή της διαφοράς αυτών των αριθμών. Δηλαδή το απόλυτο σφάλμα Δx είναι:

$$\boldsymbol{\Delta x = |\hat{x} - x|}$$

Μερικές φορές η τιμή του απόλυτου σφάλματος δεν μας δίνει σαφή εικόνα ως προς το αν το σφάλμα είναι σημαντικό. Δηλαδή είναι δυνατόν ή ίδια ακριβώς τιμή απόλυτου σφάλματος, σε μια μέτρηση να δείχνει μικρό σφάλμα, ενώ σε μια άλλη μεγάλο. Για παράδειγμα, ένας σπουδαστής μέτρησε το μήκος του θρανίου του. Το πραγματικό μήκος ήταν 80 cm και η μέτρηση του σπουδαστή ήταν 75 cm. Δηλαδή απόλυτο σφάλμα: 80 – 75 = 5 cm. Ένας άλλος σπουδαστής μέτρησε την περίμετρο του πίνακα. Το πραγματικό μήκος ήταν 6,4 m ή 640 cm και η μέτρηση 645 cm. Δηλαδή, το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές όμως ότι το σφάλμα 5 cm σε πραγματική τιμή 80 cm θεωρείται σημαντικότερο σφάλμα απ' ό,τι σε πραγματική τιμή 640 cm. Έτσι, ορίζουμε το σχετικό σφάλμα, το οποίο μας δείχνει το ποσοστό σφάλματος επί της ακριβούς τιμής. Ονομάζουμε ***σχετικό σφάλμα*** τον λόγο του απόλυτου σφάλματος προς το απόλυτο της πραγματικής τιμής:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|}}$$

Το σχετικό σφάλμα δεν έχει μονάδα μέτρησης, είναι καθαρός αριθμός. Εάν υπολογίσουμε τα σχετικά σφάλματα των μετρήσεων των δύο σπουδαστών:

1η μέτρηση: $x = 80$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{80} = 0{,}0625 \text{ ή } 6{,}25\%$$

2η μέτρηση: $x = 640$ cm, $\Delta x = 5$ cm

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{5}{640} = 0{,}0078125 \text{ ή } 0{,}78125\%$$

Βλέπουμε πόσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό σφάλματος της μέτρησης του πρώτου σπουδαστή.

Παράδειγμα 1.11

Να βρεθεί το απόλυτο και σχετικό σφάλμα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) x = 3,141592 και $\hat{x}$ = 3,14

β) x = 1.000.000 και $\hat{x}$ = 999.998

γ) x = 0,000026 και $\hat{x}$ = 0,000021

Λύση

α) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |3{,}14 - 3{,}141592| = 0{,}001592$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}001592}{3{,}141592} = 0{,}000507 \text{ ή } 0{,}0507\%$$

β) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |999.998 - 1.000.000| = 2$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}000002}{1.000.000} = 0{,}000002 \text{ ή } 0{,}0002\%$$

γ) $\Delta x = |\hat{x} - x| = |0{,}000021 - 0{,}000026| = 0{,}000005$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{|\hat{x} - x|}{|x|} = \frac{0{,}000005}{0{,}000026} = 0{,}19230769 \text{ ή } 19{,}230769\%$$

– Κανόνες μετάδοσης σφαλμάτων

Εκτός από τα φυσικά μεγέθη που μετριούνται με χρήση κάποιου οργάνου, υπάρχουν και τα μεγέθη που υπολογίζονται εμμέσως, μέσω κάποιας σχέσης. Δηλαδή ο παρατηρητής μετράει 2 ή περισσότερα μεγέθη με όργανα μέτρησης και στη συνέχεια υπολογίζει την τιμή ενός άλλου μεγέθους που εξαρτάται από αυτά, με μαθηματικούς υπολογισμούς. Παρακάτω θα δούμε, πώς υπολογίζεται το σφάλμα στο μέγεθος αυτό, αν είναι γνωστά τα σφάλματα των μετρούμενων μεγεθών, ανάλογα με τη μαθηματική σχέση υπολογισμού.

1) ***Αθροίσματα και διαφορές:*** Αν $\boldsymbol{x = A \pm B}$, τότε σφάλμα: $\Delta x = \sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$

2) ***Γινόμενα και πηλίκα:*** $\boldsymbol{x = A \cdot B}$ ή $\boldsymbol{x = \frac{A}{B}}$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$ οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$

3) ***Μετρούμενη ποσότητα επί σταθερό αριθμό:*** $\boldsymbol{x = \lambda \cdot A}$ τότε σφάλμα: $\Delta x = \lambda \cdot \Delta A$ και σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A}$

4) ***Σφάλμα δύναμης μετρούμενης ποσότητας:*** $\boldsymbol{x = A^n}$ τότε, σχετικό σφάλμα: $\frac{\Delta x}{x} = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$ οπότε σφάλμα: $\Delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot x$

Πρόβλημα 1.3

Σε μία δεξαμενή νερού κυβικού σχήματος, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 3 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,2 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

Λύση

3 cm = 0,03 m

Ο υπολογισμός του όγκου γίνεται από τον τύπο $V = \alpha^3$. Άρα σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 3 \cdot \frac{0{,}03}{1{,}2} = 0{,}075 \text{ ή } 7{,}5\%$$

Η πραγματική τιμή του όγκου είναι $V = (1{,}2\,\text{m})^3 = 1{,}728\,\text{m}^3$

Άρα το σφάλμα στη μέτρηση του όγκου είναι: $\Delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot V = 0{,}075 \cdot 1{,}728 = 0{,}1296\,\text{m}^3$ ή 129,6 lt.

Στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε ότι ένα σφάλμα μέτρησης 3 cm στο μήκος, επιφέρει σφάλμα 129,6 lt στον όγκο της δεξαμενής!

Πρόβλημα 1.4

Η ελεύθερη επιφάνεια μίας δεξαμενής έρματος πλοίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το μήκος μετρήθηκε 15,3 m, ενώ η αληθινή τιμή του είναι 15,1 m και το πλάτος 10,7 m, με αληθινή τιμή 10,3 m. Ποιο είναι το σχετικό σφάλμα στη μέτρηση του μήκους και του πλάτους και ποιο το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού;

Λύση

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση μήκους: $\frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}2}{15{,}1} \cong 0{,}0132$

Σχετικό σφάλμα στη μέτρηση πλάτους: $\frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}4}{10{,}3} \cong 0{,}0388$

Άρα το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού $E = A \cdot B$:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0132^2 + 0{,}038^2} = \sqrt{0{,}00017424 + 0{,}001444} = \sqrt{0{,}00161824} \cong 0{,}040227 \text{ ή } 4{,}0227\%$$

1.6 Συμμιγείς αριθμοί

Συμμιγής λέγεται οποιοσδήποτε αριθμός αποτελείται από δύο ή περισσότερους ακεραίους, οι οποίοι αναφέρονται στο ίδιο φυσικό μέγεθος, και των οποίων οι μονάδες μέτρησης είναι πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις της ίδιας αρχικής μονάδας μέτρησης. Μερικά μεγέθη που εκφράζονται με συμμιγείς αριθμούς είναι το βάρος, ο χρόνος, το μήκος, οι γωνίες.

Για παράδειγμα:

2 κιλά 300 γραμμάρια

5 ημέρες 6 ώρες 40 λεπτά 16 δευτερόλεπτα

10 μέτρα 5 δέκατα 7 εκατοστά

1.6.1 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης χρόνου

Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την ***ώρα (h)*** και τις υποδιαιρέσεις της, το ***λεπτό (min)*** και το ***δευτερόλεπτο (s)***.

1 h = 60 min = 3600 s

1 min = 60 s

Για μεγάλες χρονικές διάρκειες χρησιμοποιούμε την ***ημέρα*** και τα πολλαπλάσιά της, τον ***μήνα*** και το ***έτος***.

1 ημέρα = 24 h
1 μήνας = 30 ημέρες
1 έτος = 12 μήνες = 360 ημέρες

Πρόβλημα 1.5

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι του Πειραιά στις 21:45:00. Αν η απόσταση Πειραιάς – Χανιά είναι 150 ν.μ. και το πλοίο ταξιδεύει με ταχύτητα 20 knots, τι ώρα θα φτάσει στα Χανιά;

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 20 = \frac{150}{t} \Leftrightarrow t = \frac{150}{20} \Leftrightarrow t = 7{,}5 \text{ h}$$

7,5 h = 7 h + 0,5 h = 7 h (0,5 · 60) min =7h 30 min

$$\begin{array}{rll} & 21\text{ h} & 45\text{ min} \\ + & 7\text{ h} & 30\text{ min} \\ \hline & 28\text{ h} & 75\text{ min} \\ & 29\text{ h} & 15\text{ min} \end{array}$$

Επειδή 29>24 το πλοίο θα φτάσει την επόμενη ημέρα. Αφαιρώ 29 – 24 = 5h (κάνω την αφαίρεση επειδή αλλάζει ημέρα). Άρα φτάνει στο λιμάνι των Χανίων: 05:15:00 την επόμενη ημέρα.

Πρόβλημα 1.6

Ένα πλοίο ξεκινάει στις 10 Νοεμβρίου 22:50:00 από ένα σημείο Α και πλέει με ταχύτητα 15 knots για 400 ν.μ. έως ένα σημείο Β. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

Λύση

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 15 = \frac{400}{t} \Leftrightarrow t = \frac{400}{15} \Leftrightarrow t = 26{,}667 \text{ h}$$

t = 26,667 h = 26 h + 0,667 h= 26 h (0,667 · 60) min = 26 h 40,02 min =
= 26 h 40 min + 0,02 min = 26 h 40 min (0,02 · 60) s = 26 h 40min 1,2 s
ή 26 h 40 min 1 s (στρογγυλοποιήσαμε τα δευτερόλεπτα)

$$\begin{array}{rlll} & 22\text{ h} & 50\text{ min} & 0\text{ s} \\ + & 26\text{ h} & 40\text{ min} & 1\text{ s} \\ \hline & 48\text{ h} & 90\text{min} & 1\text{ s} \end{array}$$

ή

49 h 30min 1 s

Αφαιρώ 49 – 48 = 1 h (αφαιρώ δύο 24ωρα). Άρα άφιξη: 12 Νοεμβρίου 1:30:01

Πρόβλημα 1.7

Ένα πλοίο ξεκίνησε από το λιμάνι Α στις 21:45:00 και έφτασε στο λιμάνι Β στις 6:10:00 το επόμενο πρωινό, πλέοντας με μέση ταχύτητα 18 knots. Πόση είναι η απόσταση των 2 λιμανιών σε ν.μ.;

Λύση

6 h + 24 h = 30 h (Προσθέτουμε 24 ώρες γιατί αλλάζει ημέρα)

$$\left.\begin{array}{r} 30\,\text{h}\,10\,\text{min}\,0\,\text{s} \\ \underline{-21\,\text{h}\,45\,\text{min}\,0\,\text{s}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 29\,\text{h}\;70\,\text{min}\;\;0\,\text{s} \\ \underline{-21\,\text{h}\;\;45\,\text{min}\;0\,\text{s}} \\ 8\text{h}\;\;25\,\text{min}\;\;\;0\,\text{s} \end{array}\right\}$$

$$8\text{ h }25\text{ min} = 8\text{ h} + \frac{25}{60}\text{ h} = 8\text{ h} + 0{,}417\text{ h} = 8{,}417\text{ h}$$

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow 18 = \frac{x}{8{,}417} \Leftrightarrow x = 18 \cdot 8{,}147 \Leftrightarrow x = 146{,}646\text{ h}$$

1.6.2 Συμμιγείς με μονάδες μέτρησης γωνιών

Το μέτρο μιας γωνίας εκφράζεται σε ***μοίρες*** και στις υποδιαιρέσεις της, ***πρώτα λεπτά*** και ***δεύτερα λεπτά***.

1 μοίρα: 1°
1 πρώτο λεπτό: 1΄
1 δεύτερο λεπτό: 1΄΄
Ισχύει: **1° = 60΄ = 3600΄΄** και **1΄ = 60΄΄**

Παράδειγμα 1.12

Να μετατραπεί η γωνία 36,14° σε συμμιγή αριθμό.

Λύση

$$36{,}14^{\circ} = 36^{\circ} + 0{,}14^{\circ} = 36^{\circ}\,(0{,}14 \cdot 60)' = 36^{\circ}\,8{,}4' = 36^{\circ}\,8' + 0{,}4' =$$
$$= 36^{\circ}\;8'\,(0{,}4 \cdot 60)'' = 36^{\circ}\;8'\;24''$$

Παράδειγμα 1.13

Να μετατραπεί η γωνία 16° 38΄ 46΄΄σε μοίρες.

Λύση

$$16^{\circ}38'46'' = 16^{\circ}38' + \left(\frac{46}{60}\right)' = 16^{\circ}38' + 0{,}767' = 16^{\circ}38{,}767' =$$

$$= 16^{\circ} + \left(\frac{38{,}767}{60}\right)^{\circ} = 16^{\circ} + 0{,}646^{\circ} = 16{,}646^{\circ}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = 3 \cdot (7^2 - 6 \cdot 2^3)^{2022} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left[(-2)^4 - 17\right]^{10}$

β) $B = \frac{10^4}{(-5)^4} + \frac{28^5}{14^5} - \frac{(-24)^3}{8^3}$

γ) $Γ = (-2)^3 \cdot 3 - (-2)^5 : 4 + (-4)^2 : (-2) + 5$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\dfrac{(-3)^4 \cdot (3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 2^7}{(-5)^4 \cdot \left[(-5)^3\right]^2}$ 2) $\dfrac{(2^3 \cdot 2^{-2})^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^2}{(3^3)^{-3} \cdot 3^3}$ 3) $\left(\dfrac{x}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^{-1} \cdot (x^2 \cdot y^{-1})^{-1}$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(5x - 2y)^2 + 3 \cdot (x - y)^2 - (3x + 4y)^2$

β) $2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2 - (2\alpha + \beta) \cdot (2\alpha - \beta) - 3 \cdot (3\alpha - 2\beta)^2$

γ) $(x - 3)^3 - x(x + 2)(x - 2) - 3(2x + 3)^2$

4. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $(x + y)^3 = x(x - 3y)^2 + y(y - 3x)^2$ β) $2(2x - 1)^3 - (x - 2)(4x + 1)^2 = 27x$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{1-x}{4} - \dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{2x+5}{6}$ β) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x-4}{2} = x - \dfrac{13}{6}$

γ) $\dfrac{3}{7}(x-1) = 2(x-1) - \dfrac{5(x+3)}{14}$ δ) $\dfrac{3x-5}{2} - \dfrac{4x-2}{5} = \dfrac{3(x-2)}{10} + \dfrac{x-23}{2}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(5 + 2x) - 2(x - 1) = 18 + 2(3 + 2x)$ β) $4(x - 1) - 2(x - 2) = 3 - x - 3(1 - x)$

γ) $x - \dfrac{2x-7}{4} + \dfrac{1-x}{2} = 0$ δ) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2(x-3)}{5} = \dfrac{x+17}{10}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 = 16$ β) $2x^2 = 10x$ γ) $9y^2 - 49 = 0$

δ) $x^2 + 8x = 0$ ε) $3\omega^2 + 12 = 0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ β) $5x^2 - 14x - 3 = 0$ γ) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

δ) $36x^2 + 12x + 1 = 0$ ε) $y^2 - y - 2 = 0$ στ) $x^2 - 2x + 7 = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(3 - 2x)^2 + 20 = (5 - x)(x + 5)$ β) $(2x - 3)^2 - (x - 1)(x - 4) = 9x$

γ) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2(x+2)}{5} = \dfrac{7(x-2)}{10}$ δ) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{(\omega-1)(\omega+1)}{2} = \dfrac{2-\omega}{3} - \dfrac{(\omega-4)^2}{6}$

10. Ένα πλοίο Α ξεκινάει από το λιμάνι των Χανίων με προορισμό τον Πειραιά και πλέει με μέση ταχύτητα 16 knots. Ένα άλλο πλοίο Β ξεκινάει μετά από 2 ώρες από τα Χανιά προς την ίδια κατεύθυνση με μέση ταχύτητα 24 knots. Σε πόσο χρόνο το πλοίο Β θα φτάσει το Α;

11. Ένα επιβατικό πλοίο έχει συνολικά 30 δίκλινες και τρίκλινες καμπίνες. Πόσες είναι οι δίκλινες και πόσες οι τρίκλινες καμπίνες, αν ο συνολικός αριθμός κρεβατιών είναι 68;

12. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

13. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x-3(y-2x)=-8y \\ 4(2x-3y)-15(x+y)=3-25y \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3(x+y)-5(y-x)=14 \\ 3(x+y)-2(x-y)=7 \end{cases}$

14. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3} \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 11x+2(y-x)=\dfrac{12x+1}{2} \\ 6x+4y=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{2}=1 \\ x-4y=8 \end{cases}$

15. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}+3+x \\ -5(x+1)=6(y+1) \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2x-4}{2}+\dfrac{2(3y-1)}{3}=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{2x+y}{6}-\dfrac{x+2y}{2}=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{3x-2y}{6}=\dfrac{4y}{3} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{2y-x+2}{6} \end{cases}$ ε) $\begin{cases} \dfrac{7x+y}{3}-\dfrac{y-1}{2}=x+3 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{9y-1}{4}=-x+1 \end{cases}$

16. Σε μία δεξαμενή νερού σχήματος κύβου, μετρήθηκε η ακμή της. Αν το σφάλμα της μέτρησης ήταν 18 cm και η πραγματική τιμή της ακμής είναι 1,6 m, να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

17. Το μήκος της ακτίνας ενός κύκλου μετρήθηκε 0,8 m. Αν το πραγματικό μήκος της ακτίνας είναι 0,86 m, να βρεθεί το σφάλμα και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό του μήκους και του εμβαδού του. (Μήκος κύκλου: $l = 2\pi r$ και εμβαδόν κύκλου $E = \pi r^2$).

18. Μια δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: μήκος = 1,25 m, πλάτος = 1,82 m και ύψος = 2,2 m. Ο μηχανικός αποφάσισε να μετρήσει μόνος του τις διαστάσεις, ώστε να μπορεί να ελέγξει την προμήθεια στα καύσιμα. Οι μετρήσεις του μηχανικού ήταν: μήκος = 1,26 m, πλάτος = 1,85 m και ύψος = 2,24 m. Να βρεθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου της δεξαμενής.

19. Ένα πλοίο ξεκινάει στις 6 Απριλίου 19:50:00 από το λιμάνι Ηρακλείου και πλέει με ταχύτητα 18 knots για 337 ν.μ. έως την Καβάλα. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης.

20. Η απόσταση Πειραιάς – Γιβραλτάρ είναι 1500 ν.μ. Ένα πλοίο ξεκινάει 6 Σεπτεμβρίου 20:45:35 από το λιμάνι του Πειραιά και πλέει με ταχύτητα 16 knots. Να βρεθεί η ημερομηνία και η ώρα άφιξης στο Γιβραλτάρ. (***Σημείωση:*** Η ώρα στο Γιβραλτάρ είναι μια ώρα πίσω σε σχέση με τον Πειραιά).

21. Πλοίο κινείται με ταχύτητα 10 knots. Να υπολογιστεί η απόσταση που διανύει από τις 22:30:00 έως τις 5:10:00 του επόμενου πρωινού.

22. Να μετατραπούν οι γωνίες σε συμμιγή αριθμό:

α) $50{,}42^\circ$ β) $13{,}085^\circ$ γ) $105{,}521^\circ$

23. Να μετατραπούν οι παρακάτω γωνίες σε μοίρες:

α) $16^\circ\,38'\,46''$ β) $43^\circ\,9'\,15''$ γ) $38^\circ\,42'\,18''$

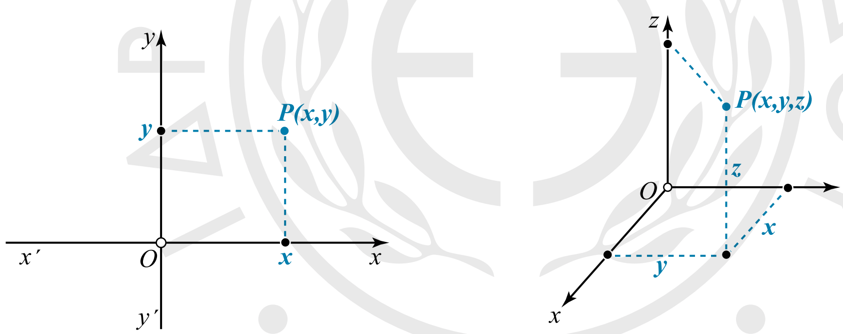
κεφάλαιο 2

Γραφήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφημάτων και τη χρήση αυτών για τον υπολογισμό τιμών μεγεθών. Η γραφική αναπαράσταση δεδομένων χρησιμοποιείται σε όλες τις εφαρμοσμένες επιστήμες, καθώς παρέχει μια εύκολη, εποπτική παρουσίαση της μεταβολής ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Στη Ναυτιλία, χρησιμοποιούμε πολύ συχνά γραφήματα δεδομένων πλοίου, ώστε να εξάγουμε την τιμή μιας μεταβλητής ποσότητας, που εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης.

2.1 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στον χώρο. Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο καθορίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x,y) [σχ. 2.1(α)], ενώ στον χώρο από μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) [σχ. 2.1(β)]. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

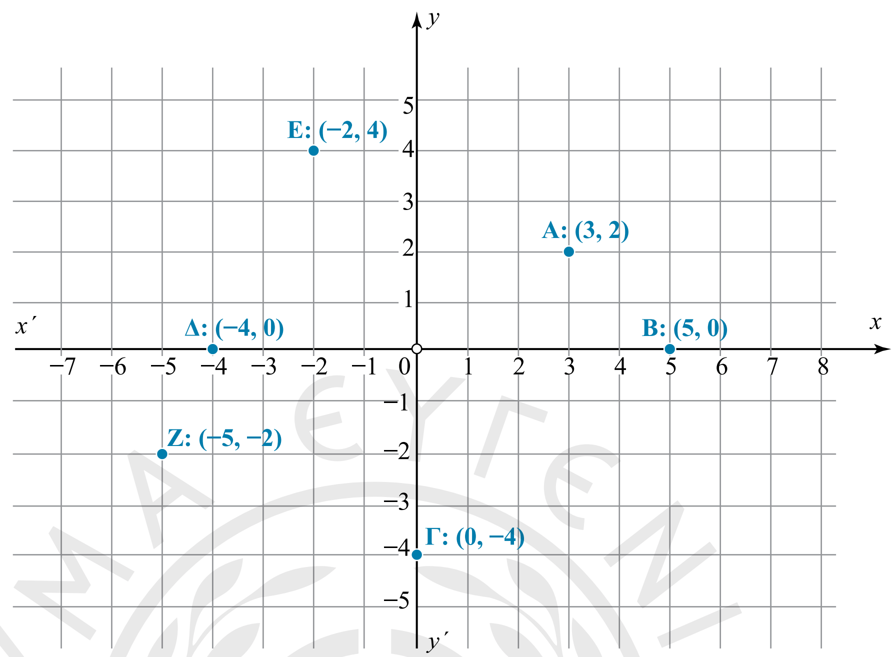


(α) (β)

Σχ. 2.1

Στο επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες *x΄x* και *y΄y* ίδιας κλίμακας. Ο οριζόντιος άξονας *x΄x* έχει φορά προς τα δεξιά και ο κατακόρυφος *y΄y* προς τα πάνω, ενώ το μηδέν σε κάθε άξονα είναι στο σημείο τομής ***O***, το οποίο ονομάζεται ***αρχή των αξόνων***. Οι δύο άξονες αποτελούν ένα ***ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο*** ή αλλιώς ***καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο***, το οποίο συμβολίζεται ***Oxy***. Το σύστημα λέγεται ***ορθοκανονικό*** διότι είναι ***ορθογώνιο*** και ***κανονικό***. Ορθογώνιο είναι επειδή οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, και κανονικό επειδή έχουν ίδια κλίμακα. Εάν οι άξονες δεν έχουν ίδια κλίμακα, τότε λέμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Η θέση ενός σημείου *P* στο καρτεσιανό επίπεδο καθορίζεται μοναδικά από ένα ***ζεύγος αριθμών (x,y)***. Για να προσδιορίσουμε τους αριθμούς αυτούς φέρνουμε από το *P* τις καθέτους στους δύο άξονες. Ο αριθμός ***x*** που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η μία κάθετος τον άξονα *x΄x* λέγεται ***τετμημένη του σημείου P*** και ο αριθμός *y* που αντιστοιχεί στο σημείο που τέμνει η άλλη κάθετος τον *y΄y*, λέγεται ***τεταγμένη του σημείου P***. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται ***συντεταγμένες του σημείου P***. Ο οριζόντιος άξονας *x΄x* λέγεται ***άξονας των τετμημένων***, ενώ ο *y΄y* λέγεται ***άξονας των τεταγμένων***. ΄Ενα σημείο P που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται $\boldsymbol{P(x,y)}$. Στο σχήμα 2.2 απεικονίζεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, όπου μπορούμε να δούμε τις συντεταγμένες διάφορων σημείων.



Σχ. 2.2

Παρατηρούμε ότι τα σημεία που είναι πάνω στον άξονα $x΄x$ έχουν τεταγμένη μηδέν και τα σημεία που είναι πάνω στον $y΄y$ έχουν τετμημένη μηδέν.

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Ισχύει και το αντίστροφο: σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο στο επίπεδο, που έχει συντεταγμένες το ζεύγος αυτό.

Για να βρούμε το σημείο που αντιστοιχεί σε δοσμένο ζεύγος (x,y), σχεδιάζουμε την κάθετη ευθεία στον $x΄x$ στο x και την κάθετη ευθεία στον $y΄y$ στο y. Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (x,y). Για παράδειγμα το σημείο του επιπέδου που έχει συντεταγμένες (–3,5), είναι το σημείο τομής της κάθετης ευθείας στον $x΄x$ στο –3 και της κάθετης ευθείας στον $y΄y$ στο 5 (σχ. 2.3).

Οι δύο άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 τμήματα τα οποία ονομάζουμε ***τεταρτημόρια***. Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε το πρόσημο των συντεταγμένων, σε κάθε τεταρτημόριο.

2.2 Σχεδιασμός γραφημάτων από δεδομένα

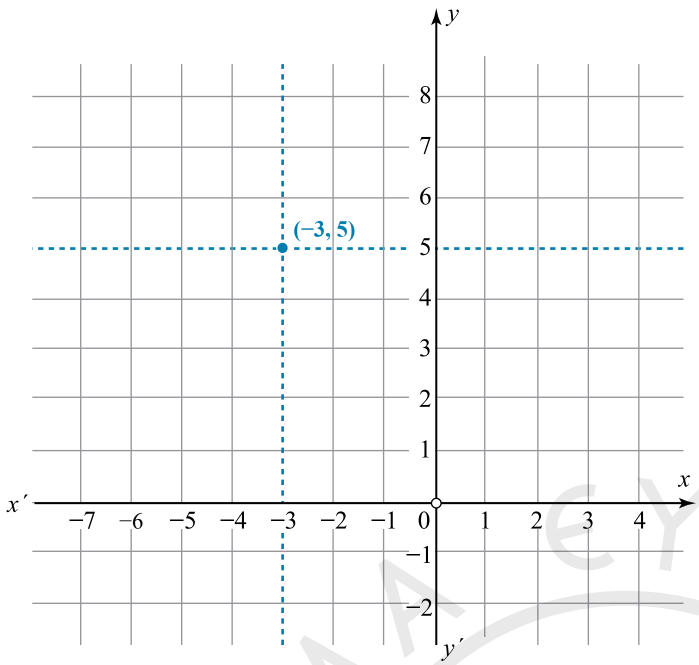
Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον σχεδιασμό γραφήματος δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών x,y, από γνωστές τιμές τους, οι οποίες έχουν προκύψει από μετρήσεις. Αν σε ένα σύστημα αξόνων σημειώσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη των «αντίστοιχων τιμών» των μεγεθών x, y, και τα ενώσουμε μεταξύ τους, η γραμμή που σχηματίζεται ονομάζεται ***γράφημα***. Η χάραξη γραφημάτων (ή γραφικών παραστάσεων) είναι μια πολύ σημαντική εργασία, καθώς το γράφημα:

1) Αποτελεί μια οπτική παρουσίαση της σχέσης μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών.

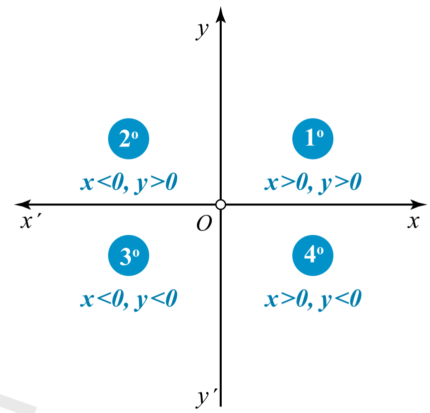
2) Παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού άλλων «ενδιάμεσων τιμών».

Για τον σωστό σχεδιασμό του γραφήματος $y=f(x)$, του μεγέθους y ως συνάρτηση του μεγέθους x, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1) ***Χαράσσουμε τους άξονες*** και αναγράφουμε το μέγεθος που παριστά ο καθένας. Το



Σχ. 2.3



Σχ. 2.4

μέγεθος δηλώνεται είτε με λέξη είτε με το σύμβολο (μεταβλητή). Θα πρέπει επίσης να συμπεριλαμβάνονται (σε παρένθεση) και οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης της μεταβλητής. Κατά συνθήκη, το y (η εξαρτημένη μεταβλητή) θα πρέπει να σχεδιάζεται κατά μήκος του κάθετου άξονα, και το x (η ανεξάρτητη μεταβλητή) θα πρέπει να ορίζεται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα.

2) ***Επιλέγουμε κατάλληλη κλίμακα*** για κάθε άξονα (βαθμονόμηση άξονα). Η κλίμακα επιλέγεται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι εύκολο να σχεδιάζονται τα δεδομένα και να διαβάζονται. ΄Ετσι:

α) Με βάση τις τιμές των μεταβλητών, επιλέγουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή κάθε άξονα, καθώς και το ***«βήμα»*** κάθε άξονα.

β) Χρησιμοποιούμε ως «βήμα» πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 1, του 2 και του 5. Άλλες επιλογές (όπως 3) κάνουν τη σχεδίαση και την ανάγνωση των δεδομένων πολύ δύσκολη.

γ) Δεν είναι απαραίτητο η αρχή των αξόνων να είναι το σημείο (0,0).

δ) Δεν είναι απαραίτητο οι άξονες να έχουν την ίδια κλίμακα.

3) ***Εισάγουμε τα σημεία δεδομένων στο γράφημα.*** ΄Ετσι:

α) Δεν χαράσσουμε διακεκομμένες γραμμές στις συντεταγμένες των σημείων.

β) Δεν αναγράφουμε στους άξονες τις συντεταγμένες των σημείων.

4) ***Σχεδιάζουμε μια απλή ομαλή καμπύλη*** διά μέσου των σημείων δεδομένων. Η καμπύλη δεν θα περάσει απαραίτητα από όλα τα σημεία, αλλά θα πρέπει να περάσει όσο γίνεται πιο κοντά σε όλα τα σημεία**.**

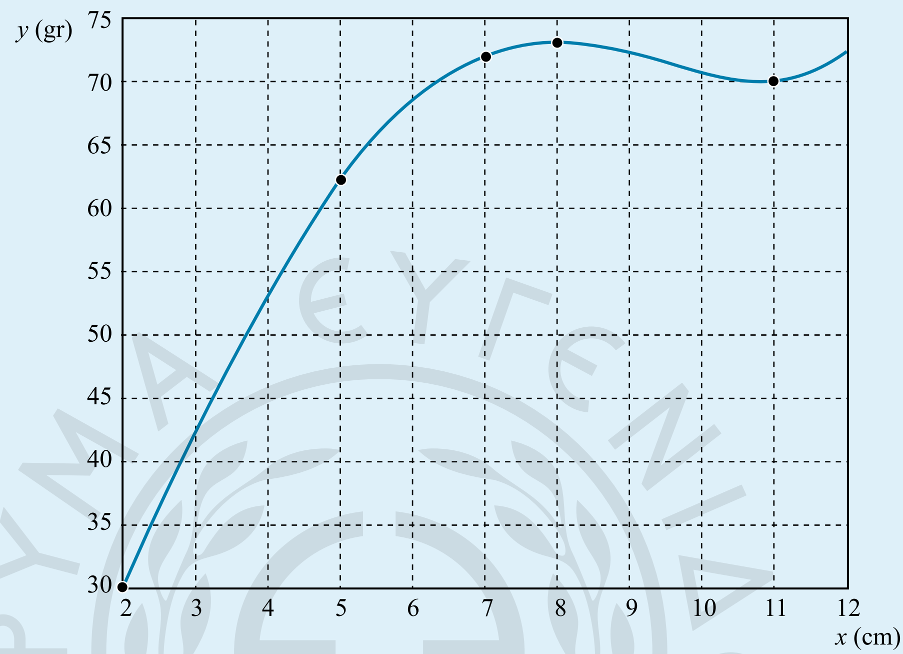
Παράδειγμα 2.1

Να γίνει το γράφημα $y=f(x)$ για τον παράπλευρο πίνακα τιμών.

x (cm)	y (gr)
2	30
5	62
7	72
8	73
11	70

Λύση

Η μεταβλητή x που θα τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα έχει ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη 11. Επομένως θα βάλουμε στον οριζόντιο άξονα τιμές από 2 έως 11 (τουλάχιστον) και το βήμα θα είναι 1. Η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 30 έως 73. Επομένως η αρίθμηση στον κατακόρυφο άξονα ξεκινάει από το 30, και θα χρησιμοποιήσουμε βήμα 5 (λόγω μεγάλου εύρους τιμών). Σημειώνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών που προκύπτουν από τον πίνακα, και τα ενώνουμε με μια ομαλή καμπύλη (σχ. 2.5).



Σχ. 2.5

Παράδειγμα 2.2

Να σχεδιαστεί το γράφημα της απόστασης x, σε ν.μ., που διανύει ένα πλοίο ως συνάρτηση του χρόνου t, σε h, για χρονική διάρκεια ενός 24ώρου και για συγκεκριμένες ταχύτητες $v_1 = 10$ knots, $v_2 = 15$ knots, $v_3 = 20$ knots, $v_4 = 25$ knots, $v_5 = 30$ knots. Στη συνέχεια, μέσω των γραφημάτων να απαντηθούν οι ερωτήσεις:

α) Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 25 knots, πόση απόσταση θα διανύσει σε 12 h;

β) Αν ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 20 knots, σε πόση ώρα θα διανύσει 300 ν.μ.;

γ) Με ποια ταχύτητα πρέπει να πλεύσει ένα πλοίο, ώστε να διανύσει 550 ν.μ. σε 22 h;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του πλοίου δίνεται από τον τύπο:

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = v \cdot t$$

Όπως θα αναφερθεί και στα παρακάτω, δύο μεγέθη x και y που συνδέονται με σχέση της μορφής $y = \alpha \cdot x$ όπου α σταθερός αριθμός, λέγονται ανάλογα και το γράφημά τους είναι μια ευθεία γραμμή. Επομένως από τη σχέση $x = v \cdot t$ συμπεραίνουμε ότι το γράφημα που θα σχεδιάσουμε για τον χρόνο t και την απόσταση x που διανύει το πλοίο θα είναι μια ευθεία. Και επομένως για να τη σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε δύο σημεία. Έτσι, έχουμε τους παρακάτω 5 πίνακες τιμών για τις 5 διαφορετικές ταχύτητες:

$v = 10$ knots $x = 10 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	240

$v = 15$ knots $x = 15 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	360

$v = 20$ knots $x = 20 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	480

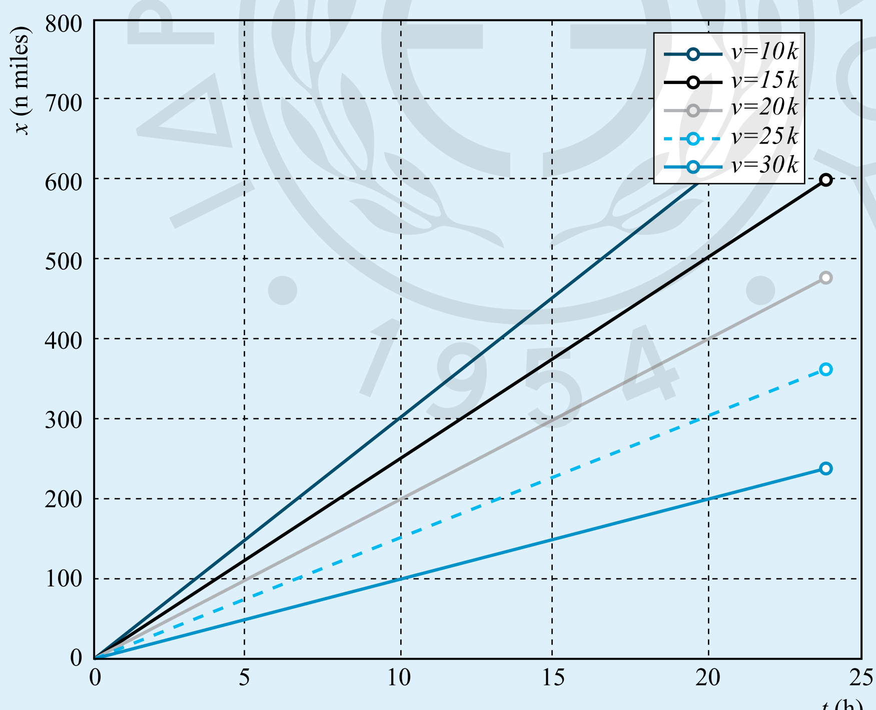
$v = 25$ knots $x = 25 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	600

$v = 30$ knots $x = 30 \cdot t$

t (h)	0	24
x (ν.μ.)	0	720

Στη συνέχεια θα παραστήσουμε γραφικά τις 5 ευθείες. Στον οριζόντιο άξονα θα τοποθετηθεί ο χρόνος t. Οι τιμές που θα βάλουμε είναι από 0 έως 24 h, οπότε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το βήμα 5. Η απόσταση x που θα μπει στον κατακόρυφο άξονα έχει τιμές από 0 έως 720. Επομένως ένα κατάλληλο βήμα είναι 100 (σχ. 2.6)

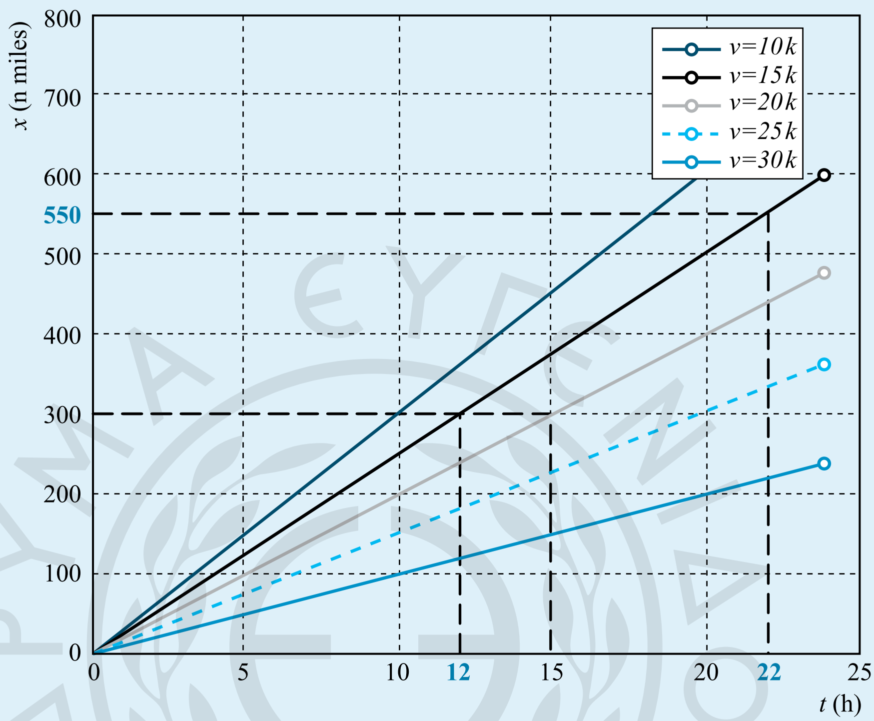


Σχ. 2.6

α) Από το γράφημα βλέπουμε ότι για t=12 h η αντίστοιχη τεταγμένη του σημείου του γραφήματος (v =25 knots) είναι 300. Άρα όταν το πλοίο κινείται με ταχύτητα 25 knots, σε 12 h θα διανύσει 300 ν.μ. (σχ. 2.7).

β) Στον κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε την τιμή 300. Από το γράφημα (v=20 knots) βλέπουμε ότι η αντίστοιχη τετμημένη του σημείου της ευθείας που αντιστοιχεί σε ταχύτητα 20 knots είναι 15. Άρα όταν ένα πλοίο πλέει με 20 knots θα διανύσει 300 ν.μ. σε 15 h (σχ. 2.7).

γ) Φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο t=22 και στον κατακόρυφο στο x=550. Το σημείο με συντεταγμένες (22, 550) βλέπουμε ότι βρίσκεται πάνω στην ευθεία ταχύτητας 25 knots (σχ. 2.7).



Σχ. 2.7

2.3 Γραφήματα βασικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, όπως ***ευθεία***, ***παραβολή***, ***υπερβολή***, $y=x^3$, $y=a\sqrt{x}$, ***λογαριθμική*** και ***εκθετική***. (Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων θα παρουσιαστούν στο κεφάλαιο 5).

1) $y = a \cdot x + \beta$

Η γραφική παράσταση της $y=\alpha x+\beta$ είναι ***ευθεία γραμμή***. Ο αριθμός α λέγεται ***κλίση της ευθείας*** ή ***συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας***. Για τον υπολογισμό της κλίσης χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ (σχ. 2.8).

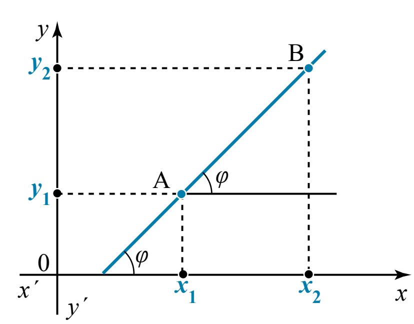
$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, δηλαδή αν οι άξονες έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε ισχύει:

$$\alpha = \varepsilon\varphi\varphi$$

όπου: φ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον ημιάξονα Ox, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9.

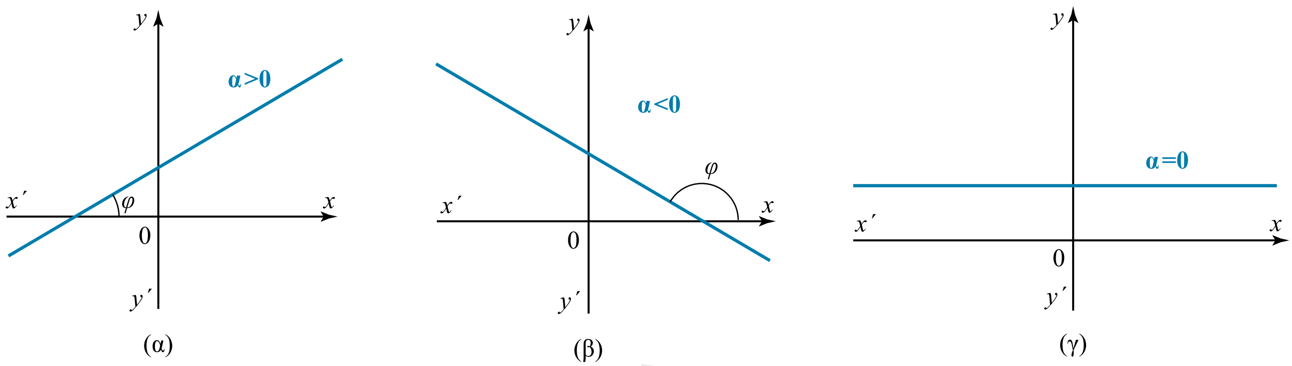
α) Αν $\alpha>0$ τότε $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ [σχ. 2.9(α)]



Σχ. 2.8

β) Αν $\alpha<0$ τότε $90^{\circ} < \varphi < 180^{\circ}$ [σχ. 2.9(β)]

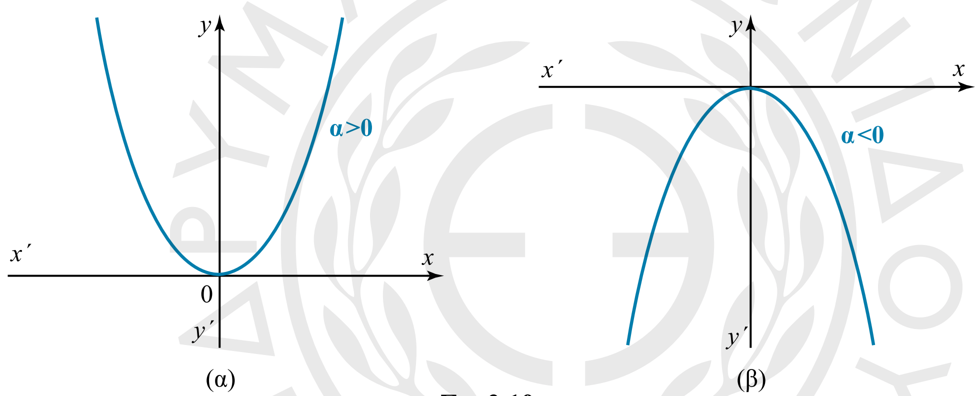
γ) Αν $\alpha=0$ τότε $\varphi=0^{\circ}$, που σημαίνει ότι η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ [σχ. 2.9(γ)]



Σχ. 2.9

2) $y = a \cdot x^2$

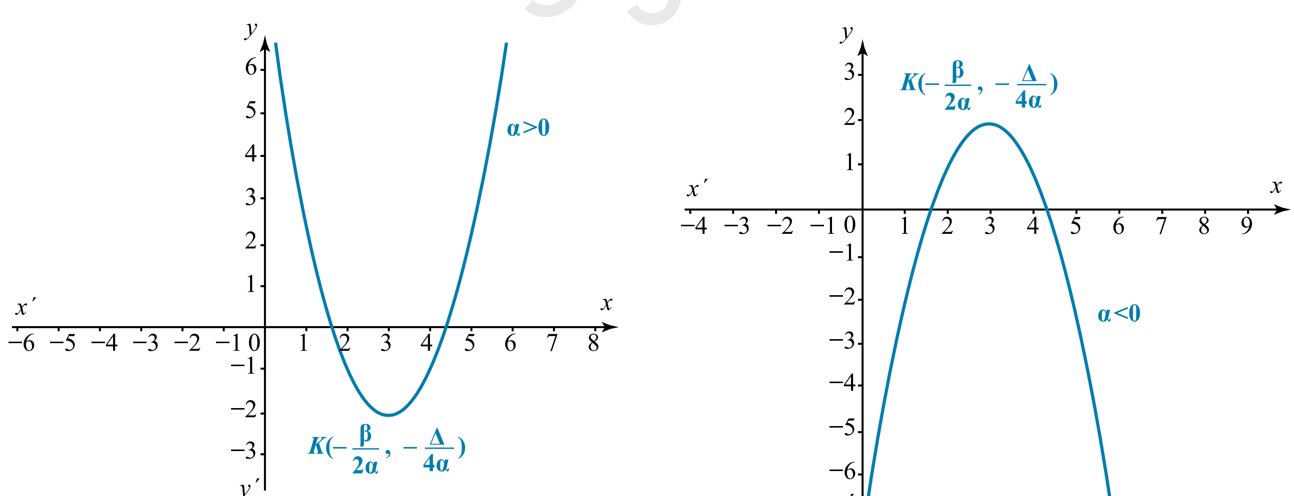
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = a \cdot x^2$ ονομάζεται ***παραβολή*** (σχ. 2.10).



Σχ. 2.10

Γενική περίπτωση: $\boldsymbol{y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0}$

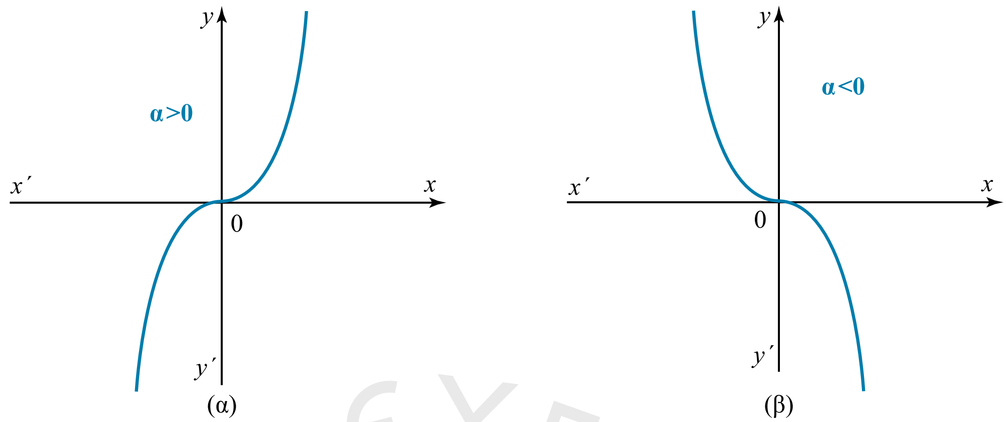
Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\boldsymbol{y = ax^2 + \beta x + \gamma}$ είναι επίσης ***παραβολή***, η οποία έχει την κορυφή της στο σημείο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ [σχ. 2.11(α),(β)].



Σχ. 2.11

3) $y = a \cdot x^3$

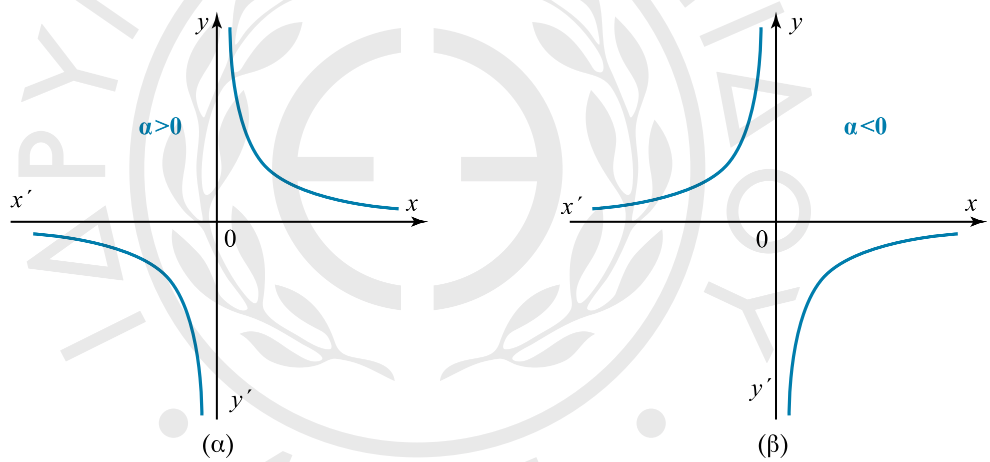
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \alpha \cdot x^3$ εικονίζεται στο σχήμα 2.12.



Σχ. 2.12

4) $y = \dfrac{a}{x}, a \neq 0$

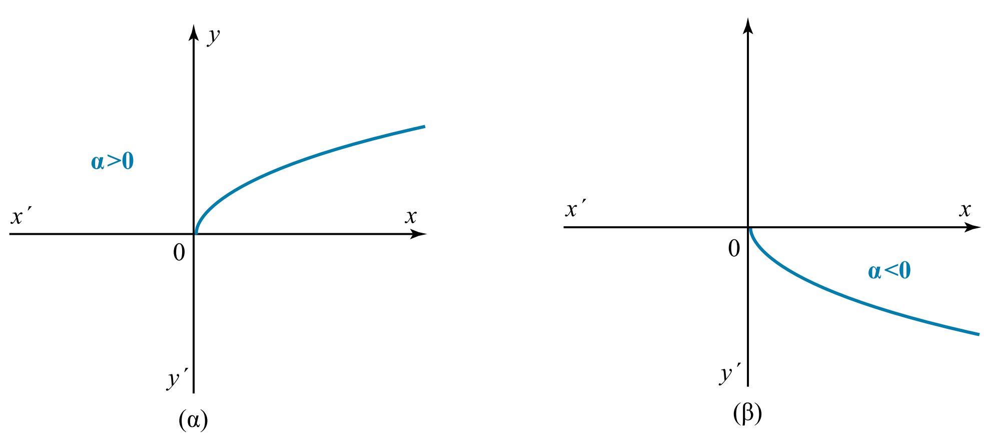
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \dfrac{a}{x}$ λέγεται ***υπερβολή*** (σχ. 2.13).



Σχ. 2.13

5) $y = a\sqrt{x}$

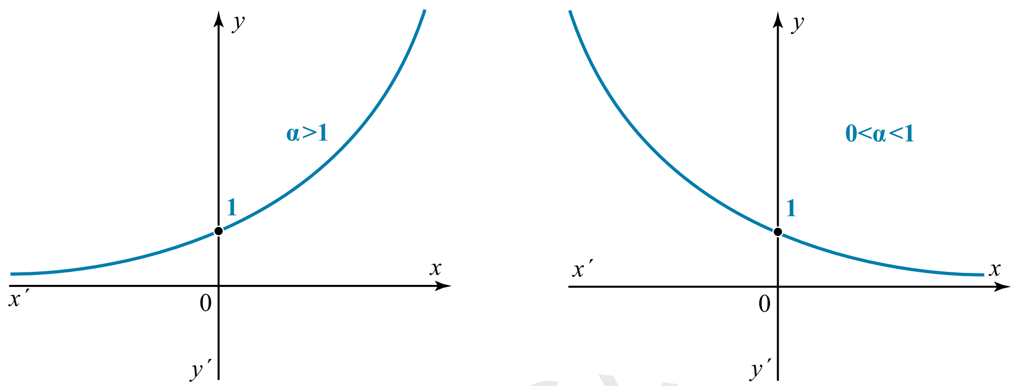
Το γράφημα της συνάρτησης $y = a\sqrt{x}$ εικονίζεται στο σχήμα 2.14.



Σχ. 2.14

6) *Εκθετική συνάρτηση:* $y = a^x$, $0 < a \neq 1$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = a^x$, $0 < a \neq 1$ εικονίζεται στο σχήμα 2.15.

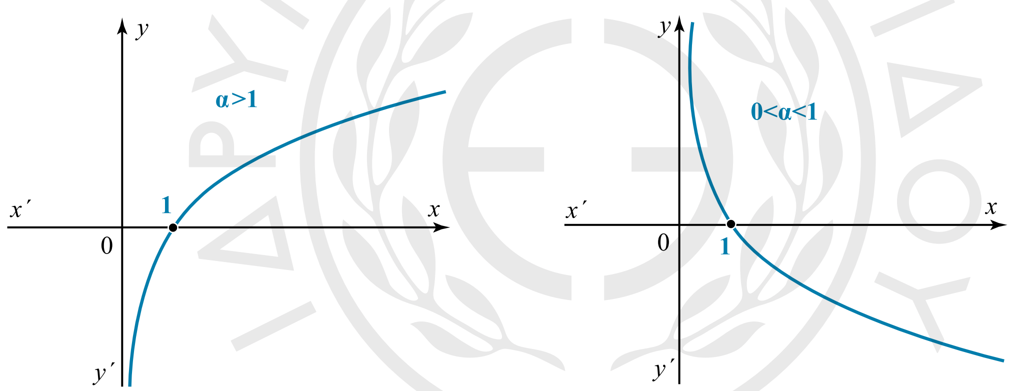


(α) (β)

Σχ. 2.15

7) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$

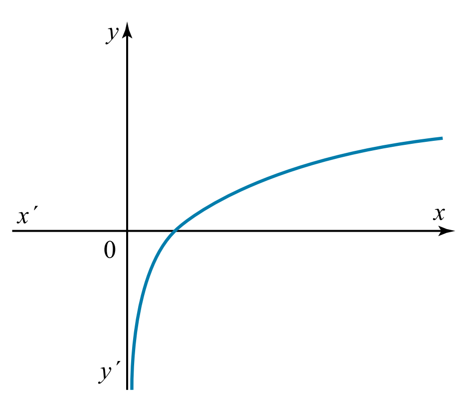
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ εικονίζεται στο σχήμα 2.16.



(α) (β)

Σχ. 2.16

Ειδικά όταν $a = e$ η συνάρτηση $y = \ln x$ έχει το γράφημα που εικονίζεται στο σχήμα 2.17.



Σχ. 2.17

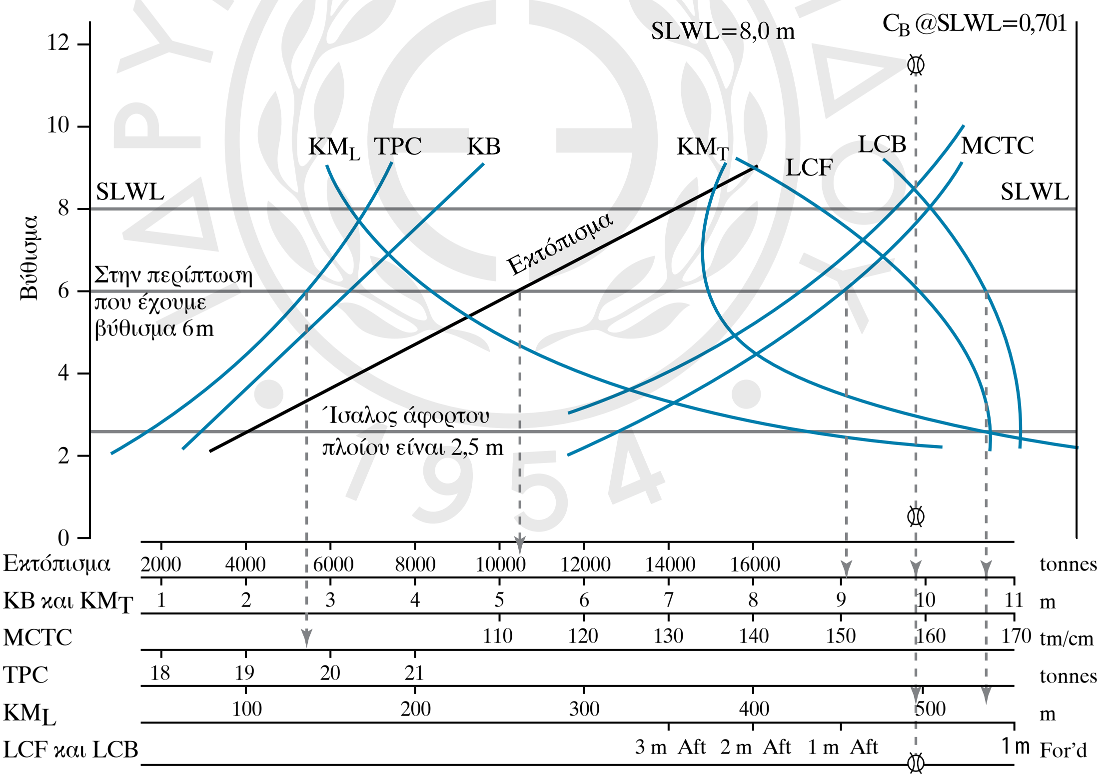
2.4 Μελέτη γραφημάτων δεδομένων πλοίου

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποια γραφήματα που χρησιμοποιούνται στη ναυπηγία, όπως υδροστατικές καμπύλες, καμπύλες ευστάθειας. Τα γραφήματα αυτά αποτελούν τη γεωμετρική ταυτότητα ενός πλοίου, και παρέχουν τα απαραίτητα στοιχεία για τον υπολογισμό ισορροπίας του στις διάφορες καταστάσεις φόρτωσης.

2.4.1 Υδροστατικό διάγραμμα πλοίου

Το υδροστατικό διάγραμμα ενός πλοίου αποτελείται από ένα σύνολο καμπυλών που μας δίνουν πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλοίου, συναρτήσει του μέσου βυθίσματος. Στο σχήμα 2.18 βλέπουμε ένα τυπικό υδροστατικό διάγραμμα πλοίου, όπου ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο βύθισμα, και ο οριζόντιος στα υδροστατικά στοιχεία του. Κάποια από τα μεγέθη που αναπαριστούν οι καμπύλες είναι:

1) Το εκτόπισμα Δ (Displacement).
2) Θέση κέντρου άντωσης KB.
3) Κατακόρυφη θέση διαμήκους μετακέντρου KML.
4) Τόνοι ανά εκατοστό βύθισης TPc.
5) Εγκάρσιο μετακεντρικό ύψος KMt.
6) Διαμήκες μετακεντρικό ύψος MTc.
7) Διαμήκης θέση κέντρου άντωσης LCB.



LCB Διάμηκης θέση κέντρου όγκου
LCF Διαμήκης θέση κέντρου πλευστότητας
KMT Εγκάρσια θέση μετακεντρικού ύψους
KML Διαμήκης θέση μετακεντρικού ύψους
aft Προς την πρύμνη (πρύμνηθεν)
MCT (MCTC) Ροπή για μεταβολή της διαγωγής κατά 1 cm
TPC Αυξηση του εκτοπίσματος σε τόνους για βύθιση κατά 1cm
KB Κατακόρυφη θέση κέντρου όγκου
SLWL Ίσαλος θερινής φόρτωσης
for Προς την πλώρη (πρώραθεν)

Σχ. 2.18
Υδροστατικές καμπύλες πλοίου

2.4.2 Καμπύλες ευστάθειας

Το κριτήριο ευστάθειας ενός πλοίου είναι η παραγόμενη ροπή $\Delta \cdot \boldsymbol{GZ}$, όπου Δ το εκτόπισμα και $\boldsymbol{GZ}$ ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς. Για κάθε πλοίο ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς, είναι συνάρτηση του εκτοπίσματος Δ, της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ και της θέσης του κέντρου βάρους KG.

$$GZ = f(\Delta, \varphi, \mathrm{KG})$$

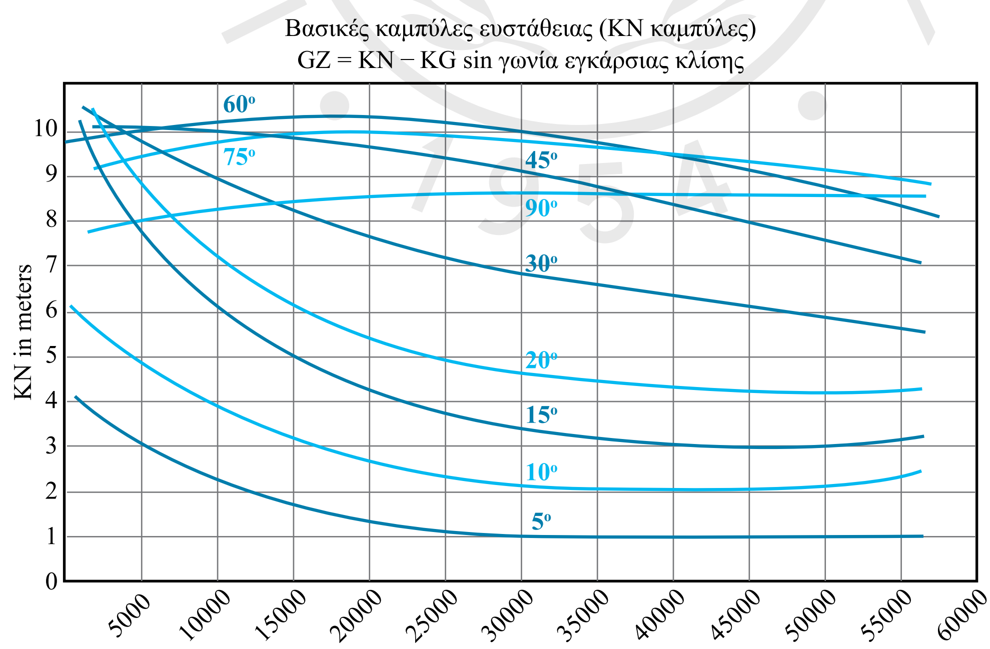
Επειδή το κέντρο βάρους θεωρείται σταθερό, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μοχλοβραχίονα επαναφοράς, για διάφορα εκτοπίσματα και για διάφορες γωνίες κλίσης. Αν μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του μοχλοβραχίονα για ένα συγκεκριμένο εκτόπισμα και μια συγκεκριμένη κλίση, μπορεί να υπολογιστεί και η παραγόμενη ροπή, η οποία ή θα επαναφέρει το πλοίο στην αρχική θέση ή θα προκαλέσει ακόμη μεγαλύτερη κλίση και τελικά ανατροπή. Στη συνέχεια, θα δούμε δύο γραφήματα που παριστάνουν τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα συναρτήσει του εκτοπίσματος και της γωνίας κλίσης.

1) Παραμετρικές καμπύλες ευστάθειας πλοίου (γραφική απεικόνιση του GZ συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ)

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας είναι το εκτόπισμα *Δ* και ο κατακόρυφος άξονας είναι ο μοχλοβραχίονας *GZ*. Το γράφημα σχεδιάζεται για μια συγκεκριμένη τιμή του *KG* – θέση κέντρου βάρους.

Έστω ότι το πλοίο έχει συγκεκριμένο εκτόπισμα. Για να βρούμε μέσω του γραφήματος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί το εκτόπισμα αυτό. Η κάθετη τέμνει σε ένα σημείο κάθε καμπύλη που αντιστοιχεί σε κάθε γωνία κλίσης. Η τεταγμένη των σημείων αυτών είναι η τιμή του μοχλοβραχίονα για τη συγκεκριμένη γωνία.

Στο σχήμα 2.19 ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το εκτόπισμα Δ σε t και ο κατακόρυφος τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς, αν θεωρήσουμε θέση κέντρου βάρους *KG*=0 m, ο οποίος για τη θέση αυτή (KG=0) συμβολίζεται ***KN***. Για να βρουμε την τιμή του μοχλοβρα-



Σχ. 2.19

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m, *συναρτήσει του εκτοπίσματος Δ σε* t.
Για τη χάραξη των καμπυλών θεωρήθηκε θέση κέντρου βάρους KG=0 m

χίονα επαναφοράς *GZ*, για συγκεκριμένη τιμή του *KG*, βρίσκουμε από το γράφημα την τιμή του *KN* (για *KG*=0), και υπολογίζουμε τον μοχλοβραχίονα επαναφοράς *GZ* αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$GZ = KN - KG \cdot ημφ$$

όπου: $φ$ η γωνία εγκάρσιας κλίσης.

Παράδειγμα 2.3

Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι 30.000 t και *KG* =10 m, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

Λύση

Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την τιμή του εκτοπίσματος 30.000 και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Η κάθετος τέμνει κάθε καμπύλη σε ένα σημείο. Από το σημείο αυτό φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του *KN* για την αντίστοιχη γωνία.

α) Για $φ=5^o$: KN = 1 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 1 - 10 \cdot ημ5^o = 1 - 10 \cdot 0{,}087 = 0{,}13$

β) Για $φ=10^o$: KN = 2,1 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 2{,}1 - 10 \cdot ημ10^o =$
$= 2{,}1 - 10 \cdot 0{,}174 = 0{,}36$

γ) Για $φ=15^o$: KN = 3,45 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 3{,}45 - 10 \cdot ημ15^o =$
$= 3{,}45 - 10 \cdot 0{,}259 = 0{,}86$

δ) Για $φ=20^o$: KN = 4,65 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 4{,}65 - 10 \cdot ημ20^o =$
$= 4{,}65 - 10 \cdot 0{,}342 = 1{,}23$

ε) Για $φ=30^o$: KN = 6,85 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 6{,}85 - 10 \cdot ημ30^o =$
$= 6{,}85 - 10 \cdot 0{,}5 = = 1{,}85$

στ) Για $φ=45^o$: KN = 9,1 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 9{,}1 - 10 \cdot ημ45^o =$
$= 9{,}1 - 10 \cdot 0{,}707 = = 2{,}03$

ζ) Για $φ=60^o$: KN = 10 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 10 - 10 \cdot ημ60^o =$
$= 10 - 10 \cdot 0{,}866 = 1{,}34$

η) Για $φ=75^o$: KN = 9,8 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 9{,}8 - 10 \cdot ημ75^o =$
$= 9{,}8 - 10 \cdot 0{,}966 = 0{,}14$

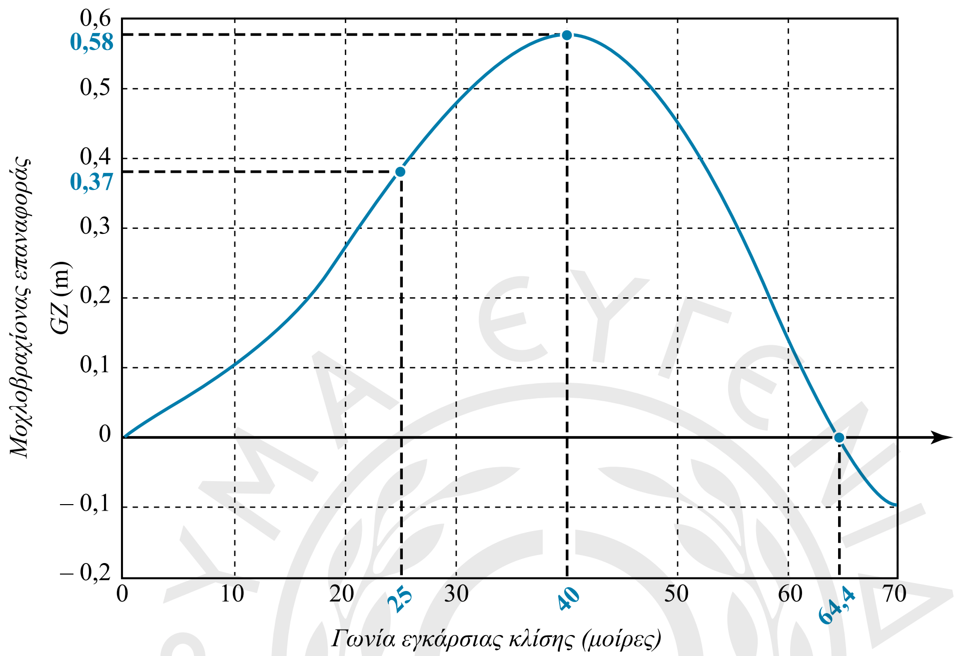
θ) Για $φ=90^o$: KN = 8,6 m και $GZ = KN - KG \cdot ημφ = 8{,}6 - 10 \cdot ημ90^o =$
$= 8{,}6 - 10 \cdot 1 = -1{,}4$

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται και στον παρακάτω πίνακα:

$φ$	*KN*	ημ$φ$	*GZ*
5^o	1	0,087	0,13
10^o	2,1	0,174	0,36
15^o	3,45	0,259	0,86
20^o	4,65	0,342	1,23
30^o	6,85	0,5	1,85
45^o	9,1	0,707	2,03
60^o	10	0,866	1,34
75^o	9,8	0,966	0,14
90^o	8,6	1	–1,4

2) Καμπύλη στατικής ευστάθειας

Η καμπύλη στατικής ευστάθειας περιγράφει γραφικά τη μεταβολή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς ως συνάρτηση της γωνίας εγκάρσιας κλίσης φ (σχ. 2.20). Η αναπαράσταση αφορά σε συγκεκριμένη κατάσταση φόρτωσης, δηλαδή συγκεκριμένο εκτόπισμα και θέση κέντρου βάρους.



Σχ. 2.20

Μοχλοβραχίονας επαναφοράς συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης

Παράδειγμα 2.4

Με βάση το σχήμα 2.20 να βρεθούν:

α) Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^{o}$.

β) Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο GZ και η μέγιστη τιμή του GZ.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας, όπου: ο GZ έχει θετική τιμή.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου: ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.

Λύση

α) Βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα την γωνία $\varphi = 25^{o}$ και φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Από το σημείο που τέμνει η κάθετος την καμπύλη, φέρνουμε κάθετη προς τον κατακόρυφο άξονα. Η τιμή που βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα είναι η τιμή του GZ. Άρα $GZ = 0{,}37$ m.

β) Ο μέγιστος μοχλοβραχίονας εμφανίζεται εκεί που η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο. Από το ψηλότερο σημείο φέρνουμε κάθετη στο οριζόντιο άξονα, και βρίσκουμε ότι η γωνία που μεγιστοποιείται ο GZ είναι $\varphi = 40^{o}$. Στη συνέχεια φέρνουμε κάθετη στον κατακόρυφο άξονα και βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του μοχλοβραχίονα επαναφοράς είναι $GZ = 0{,}58$ m.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας φτάνει μέχρι το σημείο που η καμπύλη τέμνει τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή από 0^{o} έως $64{,}4^{o}$. Για κλίση μεγαλύτερη από $64{,}4^{\circ}$, έχουμε αρνητική ευστάθεια, δηλαδη μη επαναφορά στην αρχική θέση και ανατροπή του πλοίου.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας είναι η τιμή που τέμνει η καμπύλη τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή φ=$64{,}4^{o}$.

2.5 Γραφική επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Στο κεφάλαιο 1 είδαμε την έννοια της γραμμικής εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta y} = \gamma$. Όπως αναφέρθηκε, η γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή. Επίσης ασχοληθήκαμε με την επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Η λύση (x,y) του συστήματος επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Κατά συνέπεια, εάν σχεδιάσουμε την κάθε ευθεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, το σημείο με συντεταγμένες την λύση του συστήματος θα πρέπει να βρίσκεται πάνω και στις δύο ευθείες εφόσον επαληθεύει τις εξισώσεις τους, και άρα είναι το σημείο τομής τους. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Παράδειγμα 2.5

Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

Λύση

Γράφουμε κάθε μία απ' τις εξισώσεις στην μορφή $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}$:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad 2x - 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Κατασκευάζουμε για κάθε μια ευθεία τον πίνακα τιμών της. Για να σχεδιαστεί μια ευθεία, αρκούν 2 σημεία:

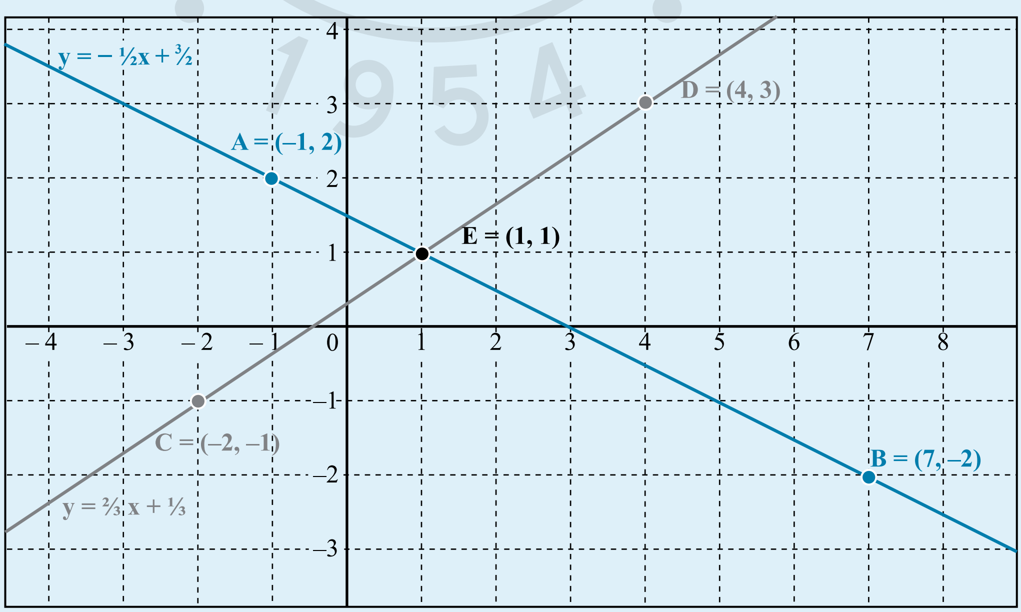
$\varepsilon_1: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

x	–1	7
y	2	–2

$\varepsilon_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

x	–2	4
y	–1	3

Κατασκευάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος. Άρα η λύση είναι $(x,y)=(1,1)$ (σχ. 2.21).



Σχ. 2.21

Ασκήσεις

1. Να δοθεί γράφημα y=f(x) για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	*y*
200	30
500	62
760	82
850	70
1100	60

2. Να δοθεί γράφημα y=f(x) όπου x: εκτόπισμα σε και y βύθισμα σε m για τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Εκτόπισμα x	*Βύθισμα* y (*m*)
21.800	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

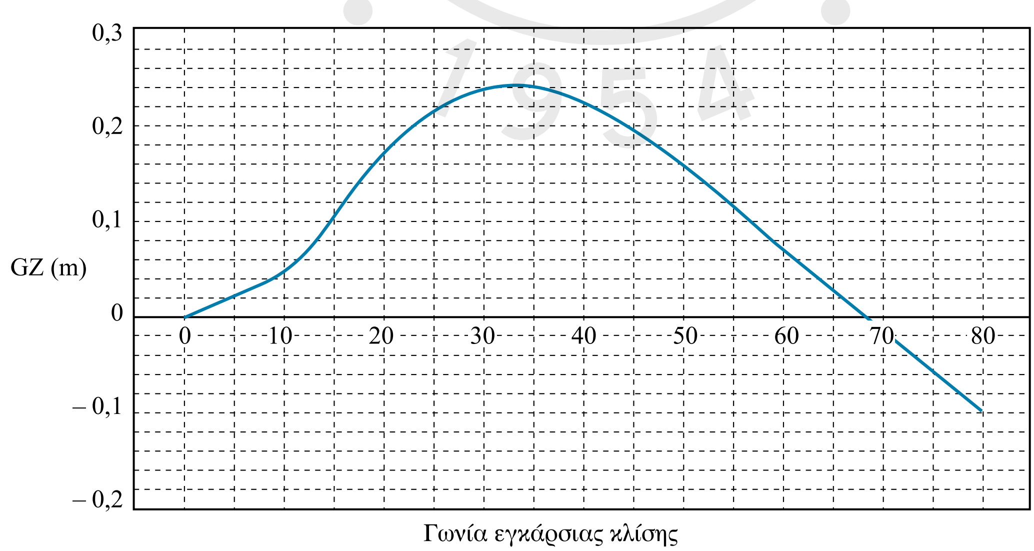
3. Στο σχήμα 2.22 φαίνεται η καμπύλη στατικής ευστάθειας ενός πλοίου Να βρεθούν:

α) Ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για κλίση $\varphi = 25^{o}$.

β) Η γωνία για την οποία μεγιστοποιείται ο *GZ* και η μέγιστη τιμή του *GZ*.

γ) Η περιοχή θετικής ευστάθειας.

δ) Η γωνία μηδενικής ευστάθειας, όπου ο GZ αποκτά μηδενική τιμή.



Σχ. 2.22

4. Να υπολογιστεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς όταν το εκτόπισμα του πλοίου είναι

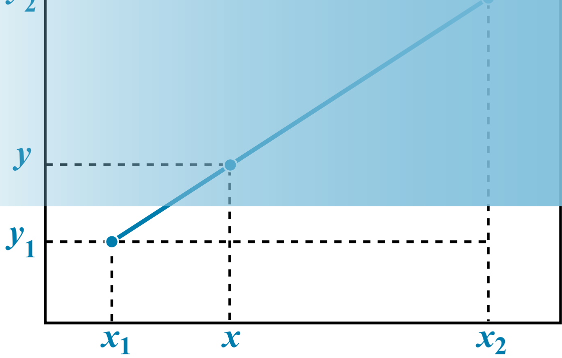
25.000 και KG $=11\,m$, για διάφορες γωνίες εγκάρσιας κλίσης, χρησιμοποιώντας το γράφημα του σχήματος 2.19

5. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:

α) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 4x+y=-5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ x-5y=-9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ 2x-3y=18 \end{cases}$

6. Να γίνει η γραφική επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

α) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=4x-3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y=x(x-3) \\ y=-x^2+5x-24 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y=x \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases}$



κεφάλαιο 3

Αναλογία, μεταβολή και παρεμβολή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι έννοιες αναλογία, ανάλογα ποσά, κλίμακες, αντιστρόφως ανάλογα ποσά και γραμμική παρεμβολή, δίνοντας έμφαση σε εφαρμογές τους σε προβλήματα σχετικά με την Ναυτιλία.

3.1 Αναλογίες

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, λέγεται το πηλίκο των μέτρων τους.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$$

Για να συγκρίνουμε δύο μεγέθη σχηματίζουμε τον λόγο-κλάσμα, που έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παράδειγμα 3.1

Από τους 112 πρωτοετείς της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού οι 84 είναι σπουδαστές και οι 28 σπουδάστριες. Ο λόγος σπουδαστών-σπουδαστριών είναι:

$$\frac{\textit{Αριθμός σπουδαστών}}{\textit{Αριθμός σπουδαστριών}} = \frac{84}{28} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα ο λόγος αριθμός σπουδαστών προς αριθμός σπουδαστριών είναι 3:1 = 3. Δηλαδή, οι άντρες σπουδαστές είναι τριπλάσιοι από τις γυναίκες.

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων. Δηλαδή, η παρακάτω ισότητα είναι μια αναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Στην αναλογία αυτή, οι όροι β και γ ονομάζονται ***μέσοι*** όροι, ενώ οι α και δ ονομάζονται ***άκροι*** όροι.

Ιδιότητες αναλογιών:

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

5) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$

6) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\varkappa}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \varkappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda} = \frac{\alpha}{\beta}$

Παράδειγμα 3.2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+4}{3} = \frac{6-x}{7}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την $1^{η}$ ιδιότητα αναλογιών:

$$\frac{x+4}{3} = \frac{6-x}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot (x+4) = 3 \cdot (6-x) \Leftrightarrow 7x + 28 = 18 - 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x + 3x = 18 - 28 \Leftrightarrow 10x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{10} \Leftrightarrow x = -1$$

3.2 Κλίμακες

Κλίμακα ονομάζουμε τον λόγο της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου.

$$\boldsymbol{κλίμακα = \frac{απόσταση\ στο\ σχέδιο}{πραγματική\ απόσταση}}$$

Η κλίμακα χρησιμοποιείται κυρίως στην κατασκευή χαρτών. Για παράδειγμα, όταν σε έναν χάρτη η κλίμακα είναι 1:1.000.000, αυτό σημαίνει ότι απόσταση 1cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 1.000.000 cm ή 10.000 m ή 10 km.

Όταν η κλίμακα είναι μικρότερη του 1, όπως συμβαίνει πάντα στους χάρτες τότε έχουμε σμίκρυνση. Όταν η κλίμακα είναι μεγαλύτερη του 1, τότε έχουμε μεγέθυνση.

Πρόβλημα 3.1

Η απόσταση δύο πόλεων σε χάρτη κλίμακας 1:10.000.000 είναι 3,8 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων;

Λύση

Έστω x η πραγματική απόσταση. Αφού η κλίμακα είναι 1:10.000.000, ο λόγος της απόστασης στον χάρτη προς την πραγματική απόσταση θα πρέπει να είναι ίσος με 1/10.000.000. Άρα:

$$\frac{3{,}8}{x} = \frac{1}{10.000.000} \Leftrightarrow x \cdot 1 = 3{,}8 \cdot 10.000.000 \Leftrightarrow x = 38.000.000$$

Άρα η πραγματική απόσταση είναι:

$x = 38.000.000$ cm $= (38.000.000:100)$ m $= 380.000$ m $= (380.000:1000)$ km $= 380$ km.

Πρόβλημα 3.2

Ένας σπουδαστής, θέλει να σχεδιάσει την κάτοψη ενός πλοίου ολικού μήκους 262 m. Πόσο πρέπει να κάνει το μήκος του πλοίου στο σχέδιο αν η κλίμακα είναι 1:400;

Λύση

Έστω x το μήκος στο σχέδιο. Τότε:

$$\frac{x}{262} = \frac{1}{400} \Leftrightarrow 400 \cdot x = 262 \Leftrightarrow x = \frac{262}{400} \Leftrightarrow x = 0{,}655$$

Άρα 0,655 m ή 65,5 cm

3.3 Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται ***ανάλογα*** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον παρακάτω πίνακα (πίν. 3.1) φαίνεται το βάρος του λαδιού που περιέχει μια δεξαμενή πλοίου και το ύψος στάθμης του λαδιού στον καταμετρικό σωλήνα.

Πίνακας 3.1

Βάρος λαδιού σε MT	21,36	42,72	53,4	64,08	74,76	85,44
Ύψος στάθμης σε m	1	2	2,5	3	3,5	4

Προφανώς, όσο αυξάνεται το ύψος στον καταμετρικό σωλήνα, τόσο αυξάνεται και η ποσότητα λαδιού στην δεξαμενή και άρα και το βάρος του. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών τους βρίσκουμε ότι τα δύο μεγέθη είναι ανάλογα, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{21{,}36}{1} = \frac{42{,}72}{2} = \frac{53{,}4}{2{,}5} = \frac{64{,}08}{3} = \frac{74{,}76}{3{,}5} = \frac{85{,}44}{4} = 21{,}36$$

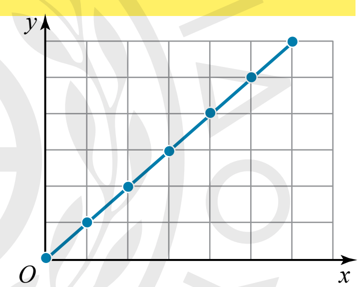
Βλέπουμε ότι όλοι οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Γενικά ισχύει:

Αν δύο μεγέθη x και y είναι ανάλογα τότε ο λόγος των τιμών του ενός προς τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \text{ή} \quad y = \alpha \cdot x$$

Το πηλίκο α ονομάζεται ***συντελεστής αναλογίας***.

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.1) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) δυο ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ***ευθεία που διέρχεται από την αρχή O (0,0) των αξόνων***.



Σχ. 3.1

Πρόβλημα 3.3

Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 2 h και 15 min διανύει 54 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 90 ν.μ.;

Λύση

$$2\,h\ 15\,min = 2\,h + \left(\frac{15}{60}\right) h = 2{,}25\,h$$

Εφόσον η ταχύτητα του πλοίου είναι σταθερή, η απόσταση που διανύει το πλοίο και ο χρόνος είναι μεγέθη ανάλογα. Επομένως οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι μεταξύ τους. Οπότε:

$$\frac{54}{2{,}25} = \frac{90}{x} \Leftrightarrow 54 \cdot x = 2{,}25 \cdot 90 \Leftrightarrow 54 \cdot x = 202{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{202{,}5}{54} \Leftrightarrow x = 3{,}75\ \text{h}$$

$$3{,}75\ \text{h} = 3\ \text{h} + 0{,}75\ \text{h} = 3\ \text{h}\ (0{,}75 \cdot 60)\ \text{min} = 3\ \text{h}\ 45\ \text{min}$$

Πρόβλημα 3.4

Μια ορθογωνική δεξαμενή πλοίου ύψους 5m περιέχει πετρέλαιο βάρους 91,2 MT και το ύψος της στάθμης του πετρελαίου φτάνει στα 3,8 m. Πόσο είναι το βάρος του πετρελαίου που μπορούμε να προσθέσουμε, ώστε η δεξαμενή να είναι πλήρης;

Λύση

Εφόσον η δεξαμενή είναι ορθογωνική, το βάρος του πετρελαίου και το ύψος της στάθμης είναι μεγέθη ανάλογα. Έστω x το συνολικό βάρος πετρελαίου που χωράει στη δεξαμενή. Επομένως:

$$\frac{91,2}{3,8} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow 91,2 \cdot 5 = 3,8 \cdot x \Leftrightarrow 456 = 3,8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{456}{3,8} \Leftrightarrow x = 120 \text{ MT}$$

Άρα χωράει ακόμα 120 – 91,2 = 28,8 *MT*.

3.4 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά λέγονται ***αντιστρόφως ανάλογα*** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Στον πίνακα 3.2 παρουσιάζεται η ταχύτητα ενός πλοίου και ο χρόνος που διάνυσε την απόσταση από το λιμάνι του Πειραιά στο λιμάνι Χανίων.

Πίνακας 3.2

Ταχύτητα σε knots	15	20	25	30
Χρόνος σε h	10	7,5	6	5

Προφανώς όταν διπλασιάζεται η ταχύτητα του πλοίου μειώνεται στο μισό ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το πλοίο μια συγκεκριμένη απόσταση. Επομένως, τα μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα. Αν υπολογίσουμε τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών, έχουμε:

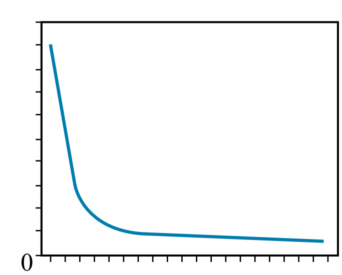
$$15 \cdot 10 = 150, \quad 20 \cdot 7,5 = 150, \quad 25 \cdot 6 = 150, \quad 30 \cdot 5 = 150$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα. Γενικά ισχύει:

Αν δύο ποσά *x* και *y* είναι ***αντιστρόφως ανάλογα***, τότε το ***γινόμενο*** των αντίστοιχων τιμών τους είναι ***σταθερό***. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{y \cdot x = a} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$$

Εάν σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (σχ. 3.2) παραστήσουμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (*x*, *y*) δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μιά ***καμπύλη***, η οποία είναι ***υπερβολή***.



Σχ. 3.2

Πρόβλημα 3.5

Ένα πλοίο ξεκινάει απ' το λιμάνι της Ραφήνας, κινείται με ταχύτητα 14 knots και φτάνει στο λιμάνι της Σαντορίνης μετά από 8 ώρες και 30 λεπτά. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του πλοίου για να πραγματοποιήσει την ίδια διαδρομή σε 7 ώρες;

Λύση

8 ώρες 30 λεπτά = 8,5 ώρες

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x η ζητούμενη ταχύτητα του πλοίου έχουμε:

$$7 \cdot x = 8{,}5 \cdot 14 \Leftrightarrow 7 \cdot x = 119 \Leftrightarrow x = \frac{119}{7} \Leftrightarrow x = 17 \text{ knots}$$

Πρόβλημα 3.6

Το γεμάτο αμπάρι ενός πλοίου αδειάζει σε 30 h όταν δουλεύουν 8 εργάτες. Σε πόσες ώρες θα αδειάσουν το ίδιο αμπάρι 12 εργάτες;

Λύση

Ο αριθμός εργατών και οι ώρες εργασίας, ώστε να ολοκληρωθεί ένα έργο είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα. Επομένως αν x είναι οι ζητούμενες ώρες:

$$12 \cdot x = 8 \cdot 30 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{12} \Leftrightarrow x = 10 \text{ h}$$

Πρόβλημα 3.7

Ένα κρουαζιερόπλοιο αναχωρεί από το λιμάνι της Πάρου στις 17:10 και κινούμενο με σταθερή ταχύτητα 15 knots φτάνει στο λιμάνι της Σύρου στις 18:45. Τι ώρα θα έφτανε στο λιμάνι της Σύρου εάν έπλεε με ταχύτητα 18 knots;

Λύση

Η ώρα 17:10 = 17 h 10 min και 18:45 = 18 h 45 min

$$\begin{array}{r} 18 \text{ h } 45 \text{ min} \\ -\ 17 \text{ h } 10 \text{ min} \\ \hline 1 \text{ h } 35 \text{ min} \end{array}$$

Επομένως, η διάρκεια της μετάβασης είναι:

$$1 \text{ h } 35 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{35}{60} \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}583 \text{ h} = 1{,}583 \text{ h}$$

Η ταχύτητα του πλοίου και ο χρόνος που διανύεται μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Επομένως, αν x ο χρόνος για να φτάσει στο λιμάνι της Σύρου:

$$1{,}583 \cdot 15 = x \cdot 18 \Leftrightarrow 23{,}745 = 18 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{23{,}745}{18} \Leftrightarrow x = 1{,}319 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} 1{,}319 \text{ h} &= 1 \text{ h} + 0{,}319 \text{ h} = 1 \text{ h } (0{,}319 \cdot 60) \text{ min} = 1 \text{ h } 19{,}14 \text{ min} = 1 \text{ h } (19 + 0{,}14) \text{ min} = \\ &= 1 \text{ h } 19 \text{ min } (0{,}14 \cdot 60) \text{ s} = 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8{,}4 \text{ s} \end{aligned}$$

Στρογγυλοποιώντας τα s στη μονάδα: 1 *h* 19 min 8 s. Άρα:

$$\begin{array}{r} 17 \text{ h } 10 \text{ min } 0 \text{ s} \\ +\ 1 \text{ h } 19 \text{ min } 8 \text{ s} \\ \hline 18 \text{ h } 29 \text{ min } 8 \text{ s} \end{array}$$

Άρα άφιξη στο λιμάνι της Σύρου στις 18:29:08.

3.5 Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής

Πολλές φορές σε πρακτικές εφαρμογές είναι γνωστές οι αντίστοιχες τιμές (x_i, y_i) δύο μεγεθών x, y, χωρίς να είναι γνωστή η συνάρτηση που συνδέει τα δύο μεγέθη. Έχουμε δηλαδή έναν πίνακα τιμών, με κάποιες αντίστοιχες τιμές του x (ανεξάρτητη μεταβλητή) και του y (εξαρτημένη μεταβλητή). Τι γίνεται όμως αν χρειαζόμαστε την τιμή του μεγέθους y για κάποια τιμή του x που δεν υπάρχει στον πίνακα;

Η διαδικασία κατά την οποία, γνωρίζοντας τις τιμές y_1, y_2, ..., y_k της εξαρτημένης μεταβλητής y, που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές x_1, x_2, ..., x_k της ανεξάρτητης μεταβλητής x, *προσεγγίζουμε* τις τιμές της y για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται ***ενδιάμεσα*** στις δεδομένες τιμές x_1, x_2, ..., x_k ονομάζεται ***παρεμβολή***.

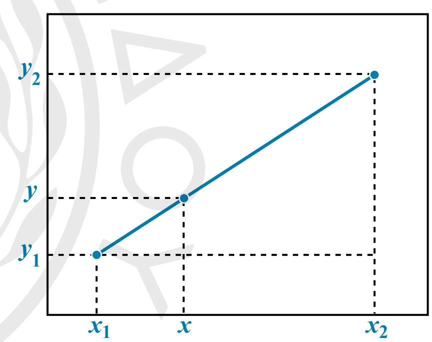
Η διαδικασία αυτή λέγεται παρεμβολή γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές, ανάμεσα στις υπάρχουσες.

Όταν έχουμε 2 σημεία στο επίπεδο, ο πιο απλός τρόπος να τα ενώσουμε είναι με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ενώνοντας όλα τα διαδοχικά σημεία, σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή, η οποία προσεγγίζει την άγνωστη καμπύλη που συνδέει όλα τα σημεία. Θεωρώντας ότι δύο γνωστά σημεία έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) η ***γραμμική παρεμβολή*** βασίζεται στην παραδοχή ότι τα σημεία αυτά ενώνονται με μία ευθεία (σχ. 3.3). ΄Εστω ένα τυχαίο σημείο (x, y όπου x) μεταξύ των x_1 και x_2. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημείο (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Επειδή τα σημεία (x_1, y_1) (x, y) και (x_2, y_2) είναι συνευθειακά, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3, προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x, y) είναι πάλι λ:

$$\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$



Σχ. 3.3

Άρα:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

΄Η από την ιδιότητα των αναλογιών:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς y παίρνουμε την παρακάτω σχέση της ***γραμμικής παρεμβολής***:

$$\boxed{y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)} \qquad (2)$$

Αντίστροφη παρεμβολή ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία, με γνωστές τις τιμές $y_1, y_2, ..., y_k$ της εξαρτημένης μεταβλητής y, που αντιστοιχούν σε τιμές $x_1, x_2, ..., x_k$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x, προσεγγίζουμε τις τιμές της x για τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y που βρίσκονται ***ενδιάμεσα*** στις δεδομένες τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς x παίρνουμε τον τύπο της αντίστροφης παρεμβολής:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot (y - y_1) \qquad (3)$$

3.6 Εφαρμογές της γραμμικής παρεμβολής στην Ναυτιλία

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία διαδικασία που χρησιμοποιείται συχνά στη Ναυτιλία, και ειδικότερα στην αντιμετώπιση προβλημάτων ευστάθειας. Στα συνηθισμένα προβλήματα ευστάθειας, γίνεται χρήση πινάκων όπως οι πίνακες υδροστατικών στοιχείων και οι πίνακες μοχλοβραχιόνων επαναφοράς. Συχνά, η τιμή που χρειαζόμαστε δεν υπάρχει στον πίνακα, αλλά είναι ενδιάμεση δύο τιμών του πίνακα. Τότε θα «προσεγγίσουμε» την τιμή με την διαδικασία της γραμμικής παρεμβολής.

Πρόβλημα 3.8

Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές (πίν. 3.3) για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι, κατά προσέγγιση, το βύθισμα που θα έχουμε εάν το εκτόπισμα είναι 27.100 ΜΤ;

Πίνακας 3.3*

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (ΜΤ)	*Βύθισμα (m)*
29.391	6,60
28.432	6,40
27.480	6,20
26.535	6,00
25.576	5,8

Λύση

Η τιμή 27.100 είναι ανάμεσα στις τιμές 26.535 και 27.480. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή, όπου θα θεωρήσουμε: $x_1 = 26.535$, $x_2 = 27.480$, $y_1 = 6$ και $y_2 = 6{,}2$, έχουμε:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-6}{6{,}2-6} = \frac{27.100-26.535}{27.480-26.535} = \frac{y-6}{0{,}2} = \frac{565}{945} \Leftrightarrow$$

$$945 \cdot (y-6) = 0{,}2 \cdot 565 \Leftrightarrow 945 \cdot y - 5.670 = 113 \Leftrightarrow 945 \cdot y = 5.783 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5.783}{945} \Leftrightarrow y = 6{,}12 \text{ m}$$

Πρόβλημα 3.9

Στον πίνακα 3.4 έχουμε τον ειδικό όγκο αερίου και πώς επηρεάζεται απ' την θερμοκρασία. Να βρεθεί ο ειδικός όγκος του αερίου για θερμοκρασία $T = 385^{o}$C.

Πίνακας 3.4

Θερμοκρασία (^{o}C)	*Ειδικός όγκος (m^3/kgr)*
300	0,05138
350	0,05842
400	0,06477

Λύση

Η τιμή 385 βρίσκεται ανάμεσα στις 350 και 400. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 350$, $x_2 = 400$, $y_1 = 0{,}05842$ και $y_2 = 0{,}06477$. ΄Εχουμε:

* *Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλινιάτη, Β΄ έκδοση, ΄Ιδρυμα Ευγενίδου, 2016*

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-0{,}05842}{0{,}06477-0{,}05842}=\frac{385-350}{400-350} \Leftrightarrow \frac{y-0{,}05842}{0{,}00635}=\frac{35}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50\,(y-0{,}05842)=0{,}22225 \Leftrightarrow 50y-2{,}921=0{,}22225 \Leftrightarrow 50y=3{,}14325 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3{,}14325}{50}=0{,}062865\ \mathrm{m^3/kgr}$$

Πρόβλημα 3.10

Ο πίνακας 3.5 δίνει τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) ενός πλοίου για θέση του κέντρου βάρους του KG = 10,67 m. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για το πλοίο σε γωνία 30°, όταν το εκτόπισμα του είναι 33.000 MT.

Πίνακας 3.5*
Μοχλοβραχίονες επαναφοράς (GZ) πλοίου Α

Εκτόπισμα (MT)	*Βύθισμα (m)*	*Μοχλοβραχίονας επαναφοράς (GZ) σε m για KG = 10,67 στις αντίστοιχες γωνίες*						
		0°	*15°*	*30°*	*45°*	*60°*	*75°*	*90°*
12.000	2,85	0,000	3,03	3,36	2,48	1,40	–0,04	–1,79
16.000	3,74	0,000	2,15	2,87	2,45	1,55	–0,02	–1,80
20.000	4,61	0,000	1,54	2,47	2,38	1,54	–0,05	–1,81
24.000	5,47	0,000	1,10	2,14	2,28	1,40	–0,11	–1,81
28.000	6,31	0,000	0,82	1,87	2,11	1,21	–0,22	–1,82
32.000	7,15	0,000	0,62	1,64	1,90	1,00	–0,36	–1,82
36.000	7,98	0,000	0,50	1,45	1,66	0,88	–0,49	–1,84
40.000	8,80	0,000	0,43	1,27	1,39	0,56	–0,63	–1,86
44.000	9,61	0,000	0,39	1,08	1,11	0,33	–0,75	–1,87
48.000	10,42	0,000	0,38	0,90	0,81	0,10	–0,88	–1,88
52.000	11,21	0,000	0,39	0,70	0,49	–0,14	–1,00	–1,90
56.000	11,99	0,000	0,40	0,50	0,18	–0,38	–1,10	–1,91

Λύση

Η τιμή 33.000 βρίσκεται ανάμεσα στις 32.000 και 36.000. Άρα θα κάνουμε γραμμική παρεμβολή με x_1=32.000, x_2 = 36.000, y_1=1,64 *και* y_2=1,45 *για γωνία* 30°. Έχουμε

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-1{,}64}{1{,}45-1{,}64}=\frac{33.000-32.000}{36.000-32.000} \Leftrightarrow \frac{y-1{,}64}{-0{,}019}=\frac{1.000}{4.000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1{,}64}{-0{,}19}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(y-1{,}64)=-0{,}19 \Leftrightarrow 4y-6{,}56=-0{,}19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y=6{,}56-0{,}19 \Leftrightarrow 4y=6{,}37 \Leftrightarrow y=\frac{6{,}37}{4}=1{,}593$$

Άρα GZ = 1,593 m

* *Πηγή: «Ευστάθεια – Κοπώσεις, Ι. Κολλινιάτη, Β΄ έκδοση, Ίδρυμα Ευγενίδου, 2016*

Πρόβλημα 3.11

Στον πίνακα 3.5 έχουμε τις τιμές του εκτοπίσματος και του βυθίσματος ενός πλοίου. Για βύθισμα 6 m να υπολογιστεί το εκτόπισμα.

Λύση

Έστω x το εκτόπισμα και y το βύθισμα. Η τιμή $y = 6$ m βρίσκεται μεταξύ των τιμών 5,47 και 6,31. Θα κάνουμε αντίστροφη γραμμική παρεμβολή με $x_1 = 24.000$, $x_2 = 28.000$, $y_1 = 5,47$ και $y_2 = 6,31$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{6-5,47}{6,31-5,47} = \frac{x-24.000}{28.000-24.000} \Leftrightarrow \frac{0,53}{0,84} = \frac{x-24.000}{4.000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,84(x-24.000) = 2.120 \Leftrightarrow 0,84x - 20.160 = 2120 \Leftrightarrow 0,84x = 20.160 + 2.120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,84x = 22.280 \Leftrightarrow x = \frac{22.280}{0,84} \Leftrightarrow x = 26.523,81 \text{ MT}$$

Ασκήσεις

1. Η κάτοψη ενός πλοίου έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 1:250. Ποιο είναι το πραγματικό μήκος του πλοίου αν το μήκος του στο σχέδιο είναι 0,8 m;

2. Η απόσταση Αθήνα – Βόλος είναι 168,3 km. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.000.000;

3. Η απόσταση Ρόδος – Ρέθυμνο είναι 358 ν.μ. Πόση θα είναι η απόσταση αυτή σε χάρτη κλίμακας 1:1.500.000; (Δίνεται ότι 1 ναυτικό μίλι=1852 m).

4. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κλίμακα	*Απόσταση στον χάρτη*	*Πραγματική απόσταση*
1:100.000		8 km
1:2.000.000	2,6 cm	
1:500.000	47 cm	
	18 cm	36 km

5. Σε έναν πίνακα υδροστατικών στοιχείων ενός φορτηγού πλοίου, έχουμε τις παρακάτω τιμές για το εκτόπισμα και το βύθισμα. Ποιο είναι το βύθισμα που θα έχουμε αν το εκτόπισμα είναι 21.220 *MT*;

Εκτόπισμα σε θαλασσινό νερό (MT)	*Βύθισμα (m)*
21.827	5,00
20.892	4,80
19.951	4,60
19.023	4,40
18.192	4,20
16.268	4,00

6. Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε 3 h και 45 min διανύει 75 ν.μ.. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει 110 ν.μ.;

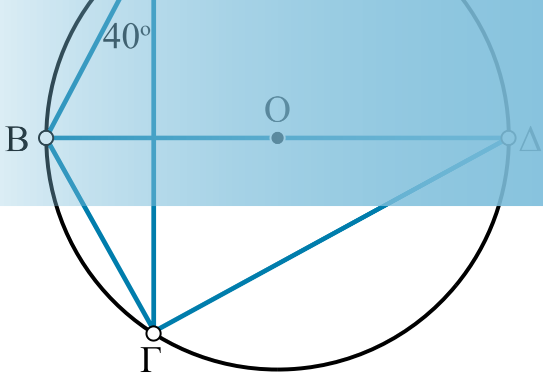
7. Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α στις 14:20 και φτάνει στο λιμάνι Β στις 19:46, πλέοντας με σταθερή ταχύτητα 15 knots. Ποια θα έπρεπε να είναι η ταχύτητα πλεύσης, ώστε το πλοίο να φτάσει στο λιμάνι Β νωρίτερα, στις 19:00;

8. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας επαναφοράς για πλοίο Α, σε γωνία 60^o, όταν το εκτόπισμά του είναι 47.000 ΜΤ, αν ο πίνακας με τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς είναι ο πίνακας 3.5.

9. Στον πίνακα 3.6 έχουμε τους μοχλοβραχίονες επαναφοράς ΚΝ για κέντρο βάρους KG=0, σε σχέση με το βύθισμα και τη γωνία κλίσης. Να βρεθεί ο μοχλοβραχίονας GZ, όταν το κέντρο βάρους είναι KG = 8 m, για βύθισμα 11,15 m και γωνία φ = 60^o. Δίνεται ότι: GZ = KN – KG · ημφ

Πίνακας 3.6

Βύθισμα σε (m)	***Μοχλοβραχίονας επαναφοράς KN σε m για KG = 0, για διάφορες γωνίες κλίσης***								
	5º	***10º***	***12º***	***20º***	***30º***	***40º***	***50º***	***60º***	***75º***
10.00	1.218	2.448	2.943	4.958	7.500	9.369	10.610	11.210	11.169
10.20	1.213	2.438	2.931	4.937	7.442	9.309	10.560	11.166	11.144
10.40	1.209	2.429	2.920	4.919	7.383	9.250	10.509	11.120	11.118
10.60	1.205	2.421	2.911	4.902	7.323	9.192	10.457	11.074	11.092
10.80	1.201	2.414	2.903	4.887	7.264	9.134	10.404	11.027	11.066
11.00	1.199	2.408	2.895	4.874	7.204	9.077	10.349	10.980	11.040
11.20	1.196	2.403	2.889	4.863	7.145	9.019	10.293	10.933	11.014
11.40	1.194	2.399	2.884	4.854	7.087	8.961	10.236	10.885	10.988
11.60	1.193	2.396	2.880	4.846	7.030	8.901	10.177	10.837	10.961
11.80	1.191	2.393	2.877	4.838	6.976	8.840	10.117	10.788	10.935
12.00	1.190	2.391	2.875	4.829	6.924	8.778	10.056	10.739	10.909
12.20	1.190	2.390	2.873	4.818	6.875	8.714	9.994	10.689	10.883
12.40	1.190	2.390	2.872	4.804	6.828	8.650	9.930	10.639	10.856
12.60	1.190	2.390	2.872	4.787	6.782	8.586	9.866	10.587	10.830
12.80	1.190	2.390	2.873	4.768	6.738	8.521	9.801	10.535	10.803
13.00	1.191	2.392	2.874	4.746	6.696	8.456	9.735	10.482	10.776
13.20	1.192	2.393	2.876	4.722	6.655	8.390	9.668	10.428	10.749



κεφάλαιο 4

Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη επανάληψη βασικών ορισμών και θεωρημάτων της Γεωμετρίας, τους οποίους οι σπουδαστές έχουν διδαχθεί στο σχολείο. Στα περισσότερα θεωρήματα παραλείπεται η απόδειξη, καθώς ο σκοπός της επανάληψης είναι η σωστή εφαρμογή αυτών και όχι η θεωρητική τους προσέγγιση.

4.1 Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει με πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες όπως ***σημείο***, ***ευθεία*** και ***επίπεδο***, τις οποίες αντιλαμβανόμαστε από την εμπειρία μας και δεχόμαστε χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις.

΄Ενα σημείο στο επίπεδο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα. Για παράδειγμα σημείο Α.

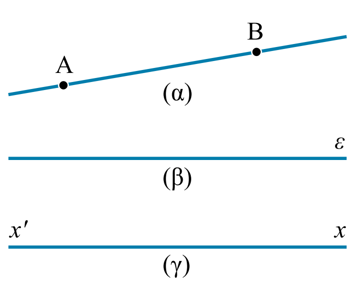
Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β ονομάζεται ***ευθεία ΑΒ*** [σχ. 4.1(α)]. Επίσης η ευθεία συμβολίζεται και με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα ***ευθεία ε*** [σχ. 4.1(β)] ή με δύο μικρά γράμματα, για παράδειγμα ***ευθεία x΄x*** [σχ. 4.1(γ)].

Θεωρούμε μια ευθεία *x΄x* και ένα σημείο Α πάνω στην ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Το σημείο Α χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε *Αx* και *Αx΄*. Το καθένα από αυτά το ονομάζουμε ***ημιευθεία*** με ***αρχή*** το σημείο Α. Η ευθεία *x΄x* ονομάζεται φορέας της ημιευθείας *Αx*. Δύο ημιευθείες που έχουν μόνο κοινό σημείο την κοινή αρχή τους και έχουν κοινό φορέα λέγονται ***αντικείμενες***. Για παράδειγμα, οι ημιευθείες *Αx* και *Αy* του σχήματος 4.3 είναι αντικείμενες, όπως είναι προφανώς και οι ημιευθείες *Αx* και *Αx΄* του σχήματος 4.2.

Θεωρούμε ευθεία ε και δύο διαφορετικά σημεία Α, Β πάνω σε αυτή. ***Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ*** ή ***ΒΑ*** (σχ. 4.4) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους. Τα σημεία Α και Β λέγονται ***άκρα*** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται ***φορέας του ευθύγραμμου τμήματος***.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***ίσα***, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

΄Ενα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται ***μονάδα μήκους***. ΄Ετσι, αν χρησιμοποιούμε ως μονάδα μήκους το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και αν για το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ ισχύει ΓΔ=λΑΒ, ο αριθμός λ λέγεται ***μήκος*** του ευθύγραμμου



Σχ. 4.1

Σχ. 4.2

Σχ. 4.3

Σχ. 4.4

τμήματος ΓΔ, αλλά και απόσταση των σημείων Γ και Δ. Στη πράξη, για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα μέτρησης. Αυτή η μονάδα είναι το ***μέτρο (m)*** και οι υποδιαιρέσεις της. (Οι μονάδες μέτρησης μήκους θα μελετηθούν διεξοδικά στο κεφ. 6.)

Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ συμβολίζεται (ΑΒ) ή πιο απλά ΑΒ. Δηλαδή με το σύμβολο **ΑΒ** εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, αλλά και το μήκος αυτού. Στο βιβλίο αυτό θα αναφερόμαστε στο μήκος του ΑΒ γράφοντας απλά ΑΒ.

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται το εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο ώστε ΑΜ=ΜΒ (σχ. 4.5).

Σχ. 4.5

– Είδη γωνιών

Θεωρούμε δύο ημιευθείες *Ox* και *Oy* με κοινή αρχή Ο. Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2. Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται ***γωνία*** (σχ. 4.6).

Η μικρότερη ονομάζεται ***κυρτή γωνία*** και η μεγαλύτερη ***μη κυρτή γωνία***.

Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας και οι ημιευθείες *Ox* και *Oy* ***πλευρές*** της γωνίας.

1) Συμβολισμός γωνίας

Η γωνία του σχήματος 4.7 μπορεί να συμβολιστεί με τους εξής τρόπους:

α) Γωνία $\hat{\omega}$

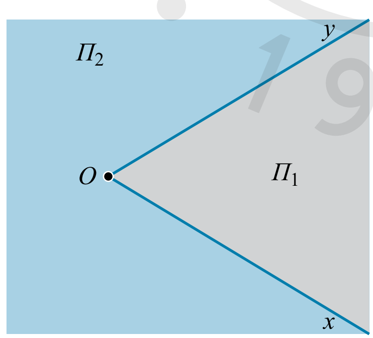
β) Γωνία $x\hat{O}y$

γ) Γωνία $A\hat{O}B$ (το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της γωνίας)

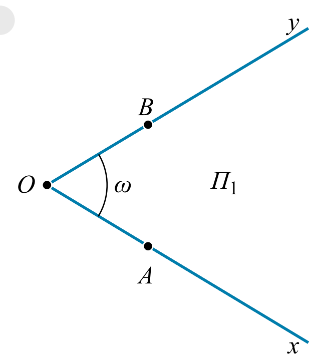
δ) Γωνία $\hat{O}$

Αν οι ημιευθείες *Ox* και *Oy* ταυτίζονται, η κυρτή γωνία λέγεται ***μηδενική γωνία*** [σχ. 4.8(α)] και η μη κυρτή ***πλήρης γωνία*** [σχ. 4.8(β)]. Αν οι ημιευθείες *Ox*, *Oy* είναι αντικείμενες, τότε κάθε μία από τις δύο γωνίες (κυρτή και μη κυρτή) λέγεται ***ευθεία γωνία*** [σχ. 4.8(γ)].

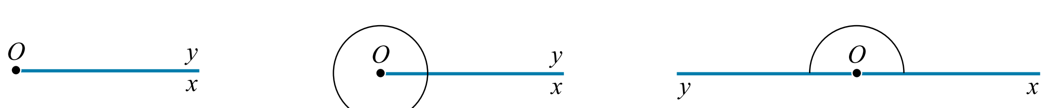
Σε κάθε γωνία αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που ονομάζεται ***μέτρο*** της γωνίας. Ως μο-



Σχ. 4.6



Σχ. 4.7



(α) (β) (γ)

Σχ. 4.8

(α) Μηδενική γωνία, (β) πλήρης γωνία και (γ) ευθεία γωνία

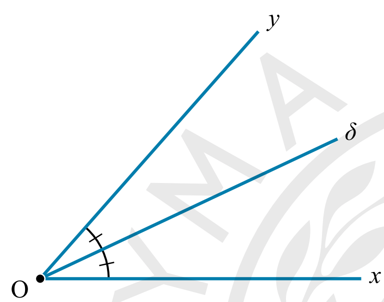
νάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε συνήθως τη ***μοίρα*** και τις υποδιαιρέσεις της, την οποία είδαμε και στο κεφάλαιο 1. Η πλήρης γωνία έχει μέτρο 360^o, η ευθεία γωνία 180^o και η μηδενική 0^o. Δύο γωνίες που έχουν ίσα μέτρα, λέγονται ***ίσες***.

2) Διχοτόμος γωνίας

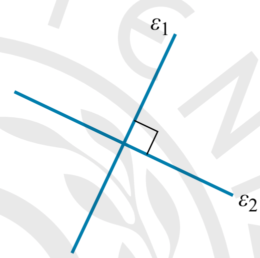
Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ. 4.9).

3) Είδη γωνιών

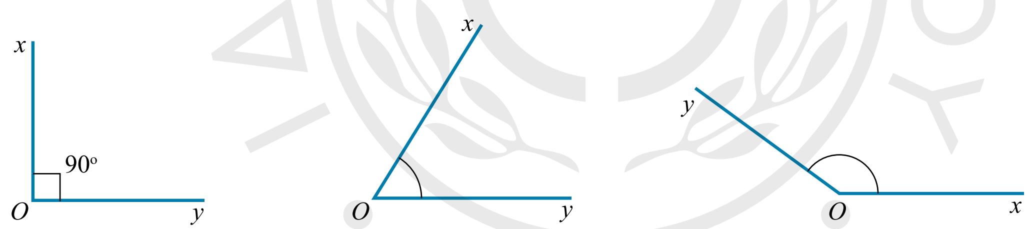
Η γωνία που έχει μέτρο 90^o ονομάζεται ***ορθή γωνία***. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ***ευθείες κάθετες*** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ. 4.10). Η ορθή γωνία συμβολίζεται $\llcorner$. Δηλαδή αν η γωνία $\hat{\omega}$ είναι ορθή γράφουμε $\hat{\omega} = 90^o$ ή $\hat{\omega} = \llcorner$ [σχ. 4.11(α)].



Σχ. 4.9



Σχ. 4.10



(α) (β) (γ)

Σχ. 4.11
Είδη γωνιών:
(α) Ορθή γωνία, (β) οξεία γωνία και (γ) αμβλεία γωνία

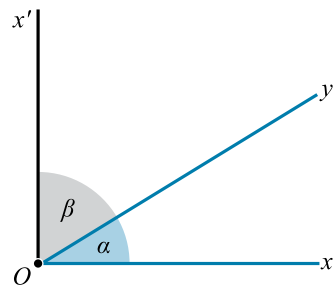
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***οξεία*** αν είναι μικρότερη από την ορθή γωνία (σχ. 4.11), δηλαδή έχει μέτρο μικρότερο από 90^o [σχ. 4.11(β)]. Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***αμβλεία*** αν είναι μεγαλύτερη από την ορθή γωνία [σχ. 4.11(γ)]. Τότε έχει μέτρο στο διάστημα $(90^o, 180^o)$.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται όλα τα είδη γωνιών που έχουμε δει μέχρι τώρα.

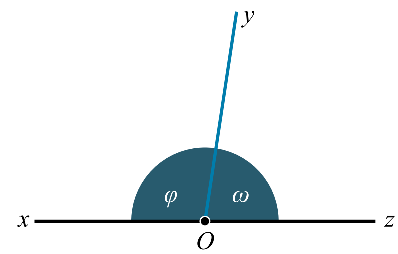
Πίνακας 4.1

Μηδενική	Οξεία	Ορθή	Αμβλεία	Ευθεία	ΜΗ ΚΥΡΤΗ	Πλήρης
$\hat{\omega} = 0^o$	$\hat{\omega} < 90^o$	$\hat{\omega} = 90^o$	$90^o < \hat{\omega} < 180^o$	$\hat{\omega} = 180^o$	$180^o < \hat{\omega} < 360^o$	$\hat{\omega} = 360^o$

Δύο γωνίες λέγονται ***συμπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα 90^o (μια ορθή γωνία). Για παράδειγμα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ του σχήματος 4.12 είναι συμπληρωματικές. Δύο γωνίες λέγονται ***παραπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα 180^o (δηλ. μια ευθεία γωνία). Στο σχήμα 4.13 οι $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματικές.



Σχ. 4.12



Σχ. 4.13

Δύο κυρτές γωνίες λέγονται ***κατά κορυφήν*** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης (σχ. 4.14)

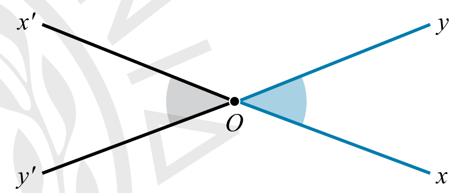
Θεώρημα 4.1: Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Δηλαδή στο σχήμα 4.14 είναι:

$$x\hat{O}y = x'\hat{O}y'$$

Αλλά και $x'\hat{O}y = x'\hat{O}y$

Πράγματι αυτό ισχύει εφόσον δύο κατά κορυφήν γωνίες είναι παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας.



Σχ. 4.14

Παράδειγμα 4.1

Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής της. Να υπολογιστεί η γωνία.

Λύση

Έστω $\hat{\omega}$ η ζητούμενη γωνία. Η παραπληρωματική της είναι: $180^o - \hat{\omega}$ και η συμπληρωματική της: $90^o - \hat{\omega}$. Άρα ισχύει:

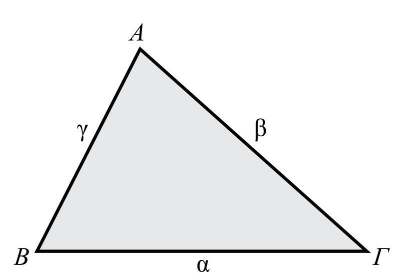
$$180^o - \hat{\omega} = 3 \cdot (90^o - \hat{\omega}) \Leftrightarrow 180^o - \hat{\omega} = 270^o - 3\hat{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{\omega} - \hat{\omega} = 270^o - 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\omega} = 45^o$$

4.2. Στοιχεία και είδη τριγώνων

1) Κύρια στοιχεία τριγώνου

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι 3 γωνίες του και οι 3 πλευρές του. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.15. Οι πλευρές του τριγώνου συμβολίζονται: ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ή για ευκολία α, β, γ. Οι γωνίες του συμβολίζονται: $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



Σχ. 4.15

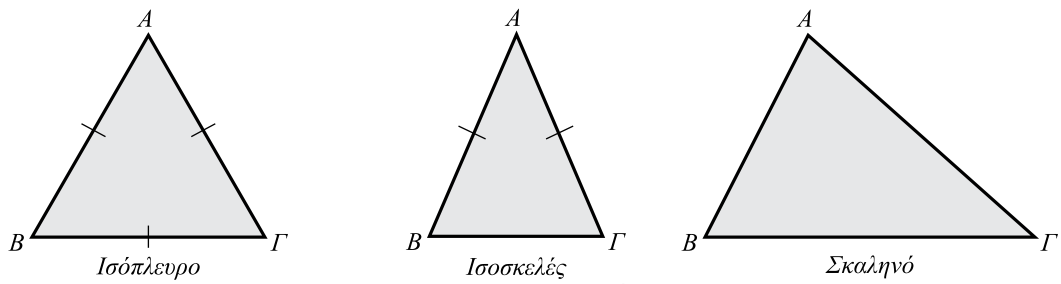
2) Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, διακρίνουμε 3 είδη τριγώνου (σχ. 4.16):

α) ***Ισόπλευρο***, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) ***Ισοσκελές***, όταν έχει 2 πλευρές ίσες. Η πλευρά που είναι άνιση με τις άλλες δύο, λέγεται ***βάση*** του ισοσκελούς τριγώνου.

γ) ***Σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.



Σχ. 4.16

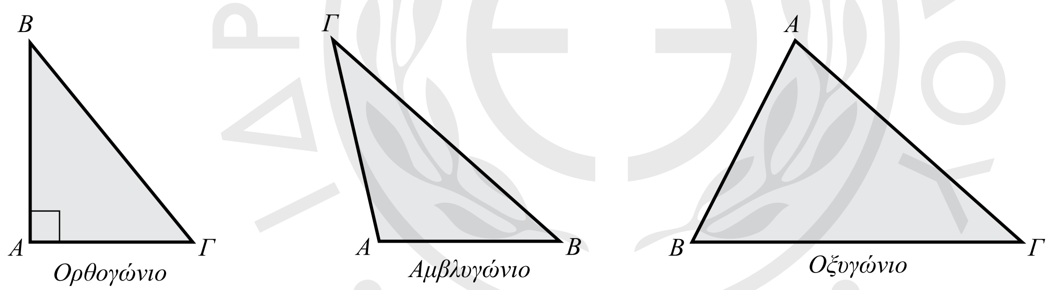
3) Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Ανάλογα με το είδος των γωνιών του τριγώνου διακρίνουμε τα εξής 3 είδη (σχ. 4.17):

α) ***Ορθογώνιο***, όταν έχει μια ορθή γωνία. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα***, ενώ οι άλλες δύο πλευρές λέγονται ***κάθετες πλευρές***.

β) ***Αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

γ) ***Οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

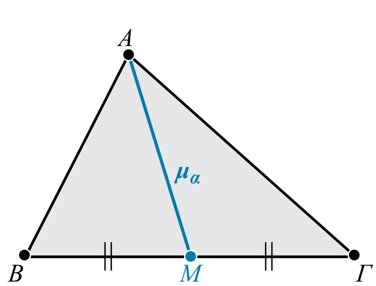


Σχ. 4.17

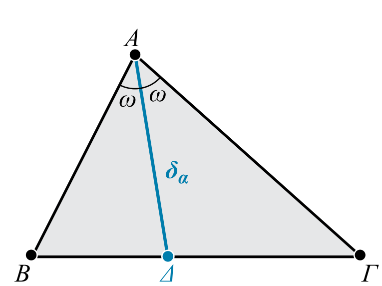
4) Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχήμα 4.18 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχήμα 4.19 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ εί-



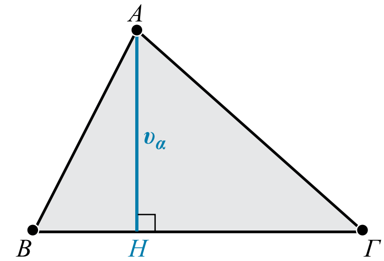
Σχ. 4.18



Σχ. 4.19

ναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\delta_\alpha}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.

Ύψος τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει μια κορυφή με την ευθεία της απέναντι πλευράς και είναι κάθετο προς αυτήν Στο σχήμα 4.20 του ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ είναι το ύψος που φέρεται από την κορυφή Α και συμβολίζεται με υ_α. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_β και υ_γ.



Σχ. 4.20

4.3 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία

Δύο διαφορετικές ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι τέμνονται ή δεν θα έχουν κανένα κοινό σημείο (σχ. 4.21).
Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες ευθείες***. Δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τις συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$.

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, και ευθεία δ που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα (σχ. 4.22). Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Οι τέσσερεις έχουν κορυφή το σημείο Α και οι άλλες τέσσερεις το σημείο Β. Για τις γωνίες αυτές, ανάλογα με τη θέση τους, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ονομασίες:

1) Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ λέγονται ***«εντός»*** και όλες οι άλλες***«εκτός»***.

2) Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας δ λέγονται ***«επί τα αυτά μέρη»***, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της δ λέγονται ***«εναλλάξ»***.

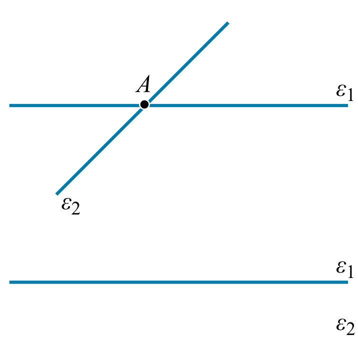
Με συνδυασμό των δύο χαρακτηρισμών, για κάθε ζευγάρι γωνιών (μία γωνία με κορυφή το Α και η άλλη με κορυφή το Β) προκύπτει μια ονομασία που δείχνει τις θέσεις τους σε σχέση με τις παράλληλες ευθείες, αλλά και σε σχέση με την τέμνουσα δ. Έτσι:

1) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_4$ είναι ***εντός εναλλάξ***.
2) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_3$ είναι ***εντός και επί τα αυτά***.
3) Οι γωνίες $\hat{A}_4$ και $\hat{B}_4$ είναι ***εντός εκτός και επί τα αυτά***.

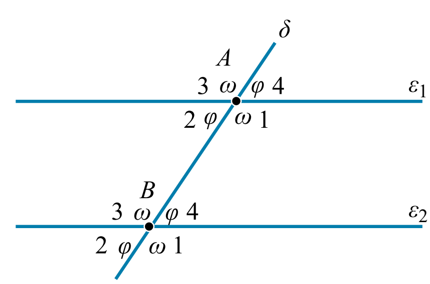
Από τις 8 γωνίες που σχηματίζονται οι 4 είναι οξείες και οι 4 αμβλείες. Αποδεικνύεται ότι όλες οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και όλες οι αμβλείες είναι επίσης ίσες. Μια οξεία γωνία και μία αμβλεία είναι παραπληρωματικές. Επομένως, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.2: Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:
1) τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,
2) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
3) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Θεώρημα 4.3: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.



Σχ. 4.21



Σχ. 4.22

Απόδειξη

Στο σχήμα 4.23 θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Από μία κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε:

$\hat{B} = B\hat{A}x = \omega$ ως εντός εναλλάξ των ΒΓ // xy που τέμνονται από την ΑΒ.

$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}y = \varphi$ ως εντός εναλλάξ των ΒΓ // xy που τέμνονται από την ΑΓ. Η $x\hat{A}y$ είναι ευθεία γωνία, άρα:

$$\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω πορίσματα:

Πόρισμα 4.1: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.24 ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^o - \hat{\Gamma} \qquad (1)$$

$$\hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 180^o - \hat{\Gamma} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\varphi}$, δηλαδή η εξωτερική γωνία $A\hat{\Gamma}x = \varphi$ ισούται με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών $\hat{A}$, $\hat{B}$.

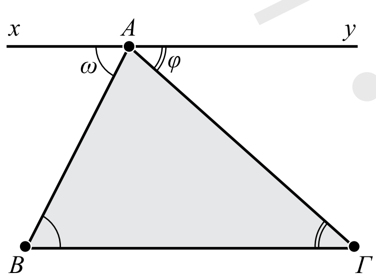
Πόρισμα 4.2: Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

Απόδειξη

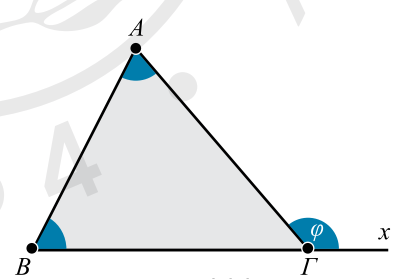
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$. Ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o.$$

Άρα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές.



Σχ. 4.23



Σχ. 4.24

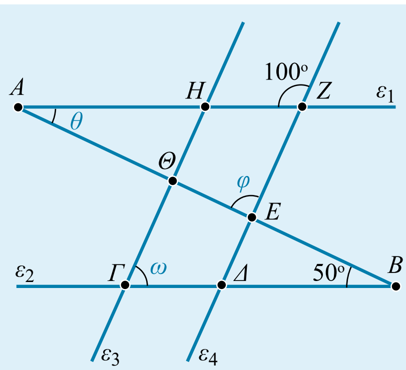
Παράδειγμα 4.2

Αν για τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 του σχήματος 4.25 ισχύει: ε_1 // ε_2 και. ε_3 // ε_4, να υπολογιστούν οι γωνίες θ, ω, φ.

Λύση

$\hat{\theta} = 50^o$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1 // ε_2 που τέμνονται από την ΑΒ.

$\Gamma\hat{\Delta}Z = 120^o$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά των ε_1 // ε_2 που τέμνονται από την ε_4.



Σχ. 4.25

$\hat{\omega}$ + Γ$\hat{\Delta}$Ζ = 180° ⇔ $\hat{\omega}$ + 120° = 180° ⇔ $\hat{\omega}$ = 60° ως εντός κι επί τα αυτά των ε_3 // ε_4 που τέμνονται από την ε_2.

Ε$\hat{Z}$Η + 120° = 180° ⇔ Ε$\hat{Z}$Η = 60°

Στο τρίγωνο ΑΕΖ: $\hat{\theta}$ + $\hat{\varphi}$ + Ε$\hat{Z}$Η = 180° ⇔ 50° + $\hat{\varphi}$ + 60° = 180° ⇔ $\hat{\varphi}$ = 70°

4.4 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

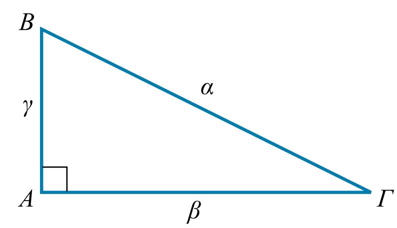
Θεώρημα 4.4: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Δηλαδή, στο τρίγωνο του σχήματος 4.26 έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \text{ ή}$$

$$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$



Σχ. 4.26

Πρόβλημα 4.1

Δύο πλοία ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο. Το 1° πλοίο πλέει με ταχύτητα 20 knots με κατεύθυνση προς Βορρά και το 2° πλοίο με ταχύτητα 16 knots με κατεύθυνση προς Δύση. Ποια θα είναι η απόσταση των δύο πλοίων μετά από 3 ώρες;

Λύση

Αν μετά από 3 ώρες το 1° πλοίο βρίσκεται στο σημείο Α και το 2° στο σημείο Β, τότε όπως φαίνεται στο σχήμα 4.27 το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο με Α$\hat{O}$Β = 90°

Τα μήκη των πλευρών ΟΑ και ΟΒ είναι:

ΟΑ = 20 · 3 = 60 ν.μ.

ΟΒ = 16 · 3 = 48 ν.μ.

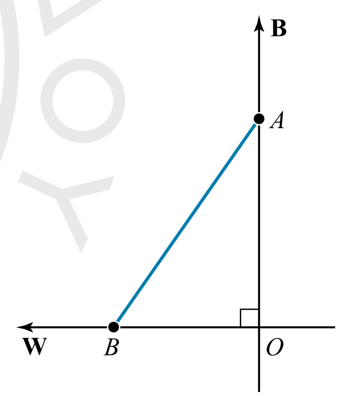
Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΟΒ έχουμε:

$ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 \Leftrightarrow$

$ΑΒ^2 = 60^2 + 48^2 \Leftrightarrow$

$ΑΒ^2 = 5904 \Leftrightarrow$

$ΑΒ = \sqrt{5904} = 76{,}837$ ν.μ.



Σχ. 4.27

Θεώρημα 4.5: (Αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος)

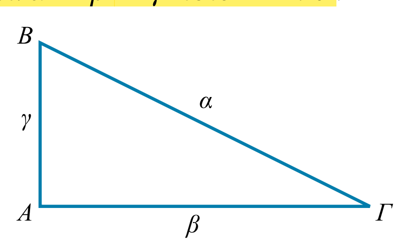
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Δηλαδή, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.28 ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A}$ = 90°.

Για παράδειγμα ένα τρίγωνο ΑΒΓ με α = 12, β = 13 και γ = 5 είναι ορθογώνιο, διότι:

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 &= 13^2 = 169 \\ \alpha^2 + \gamma^2 &= 12^2 + 5^2 = 169 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

Άρα $\hat{B}$ = 90°



Σχ. 4.28

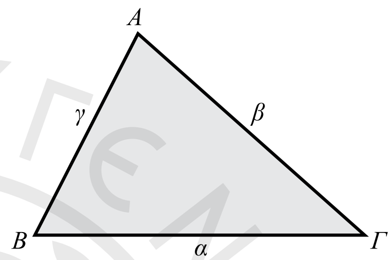
4.5 Ισότητα τριγώνων

Η γωνία ενός τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται ***περιεχόμενη γωνία*** των πλευρών αυτών. Έτσι, στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 4.29 η γωνία $\hat{A}$, λέγεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών β και γ. Οι γωνίες που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται ***προσκείμενες γωνίες*** της πλευράς αυτής. Δηλαδή οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ λέγονται ***προσκείμενες γωνίες*** στη πλευρά α.

Δύο τρίγωνα λέγονται ***ίσα*** όταν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός προς το άλλο ταυτίζονται. Συνεπώς:

Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, και αντιστρόφως, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Όμως, για να αποδειχθεί ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, δεν είναι απαραίτητο να αποδειχθεί ότι όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες. Υπάρχουν κάποιες προτάσεις – κανόνες με τις οποίες εξασφαλίζεται η ισότητα δύο τριγώνων με την απόδειξη ισότητας τριών μόνο κατάλληλων κύριων στοιχείων. Οι προτάσεις αυτές ονομάζονται ***κριτήρια ισότητας τριγώνων***.



Σχ. 4.29

– *1ο Κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)*

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.30 έχουν:

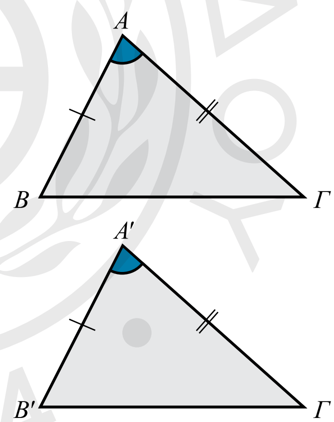
ΑΒ = Α΄Β΄

ΑΓ΄ = Α΄Γ΄

$\hat{A} = \hat{A}'$

Άρα είναι ίσα.

> *Σχόλιο:* Η συντομογραφία Π-Γ-Π σημαίνει: Πλευρά – Γωνία – Πλευρά.



Σχ. 4.30

– *2ο Κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)*

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

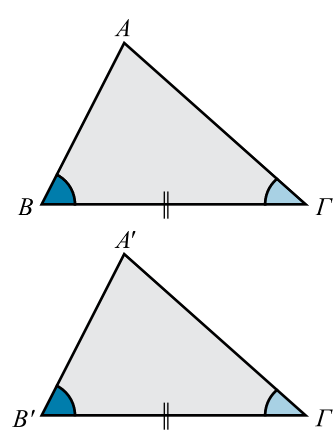
Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.31 έχουν:

ΒΓ = Β΄Γ΄

$\hat{B} = \hat{B}'$

$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Άρα είναι ίσα.

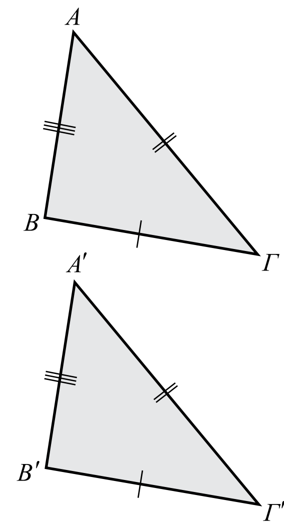


Σχ. 4.31

– *3ο Κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)*

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.32 έχουν:
ΒΓ = Β΄Γ΄
ΑΒ= Α΄Β΄
ΑΓ = Α΄Γ΄
Άρα είναι ίσα.



Σχ. 4.32

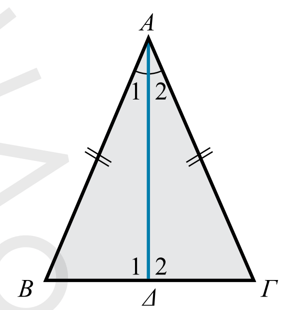
Θεώρημα 4.6: Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο:
1) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2) Η διχοτόμος προς τη βάση είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

1) ΄Εστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ. 4.33). Φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση
ΑΔ κοινή και
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$
Άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$΄. Δηλαδή οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι ίσες.
2) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν ΒΔ=ΔΓ. Επομένως η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου. Επίσης θα έχουν $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Ισχύει:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^{o} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^{o}$$

Επομένως το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.



Σχ. 4.33

Θεώρημα 4.7: Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο του σχήματος 4.33 και έστω οτι η ΑΔ είναι διάμεσος.
Τότε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση,
ΑΔ κοινή και
ΒΔ = ΔΓ επειδή ΑΔ είναι διάμεσος.
Άρα από κριτήριο Π-Π-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος. Επίσης, θα έχουν:
$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ Ισχύει:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^{o} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^{o}$$

Επομένως το ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου.

– Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση, την ορθή, τα προηγούμενα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων απλοποιούνται.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Κριτήριο Π-Π-Π).

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οποιαδήποτε πλευρά και μία οξεία γωνία ίση, τότε θα είναι ίσα. Πράγματι, επειδή είναι ορθογώνια θα έχουν μαζί με την ορθή 2 ίσες γωνίες. Οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o. Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Κριτήριο Γ-Π–Γ).

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε τα παρακάτω κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

1) δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή

2) μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Θεώρημα 4.8: Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Απόδειξη

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και έστω Oz η διχοτόμος της (σχ. 4.34).

Έστω Α τυχαίο σημείο της Oz. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα δείξουμε ότι:

ΑΒ = ΑΓ.

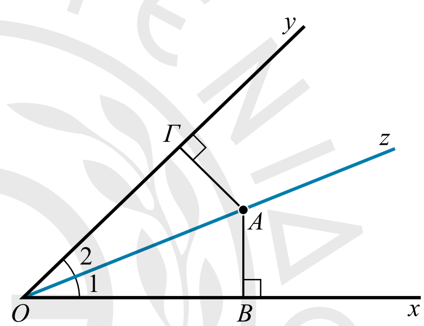
Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ έχουν:

$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o$ (ορθογώνια)

ΟΑ κοινή

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ αφού Oz διχοτόμος.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΑΒ=ΑΓ.

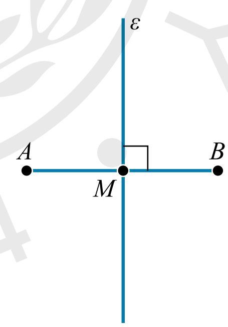


Σχ. 4.34

4.6 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται ***μεσοκάθετος*** του ΑΒ (σχ. 4.35).

Θεώρημα 4.9: Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



Σχ. 4.35

Απόδειξη

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο σημείο Μ (σχ. 4.36). Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ.

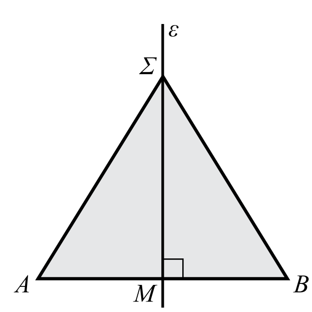
Τα τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ έχουν:

$\Sigma\hat{M}A = \Sigma\hat{M}B = 90^o$ (ορθογώνια)

ΣΜ κοινή και

ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΣΑ=ΣΒ



Σχ. 4.36

> ***Σχόλιο:*** Ισχύει και το αντίστροφο της Θεώρημα 4.9: Καθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι σημείο της μεσοκαθέτου του (προφανές, αφού σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο).