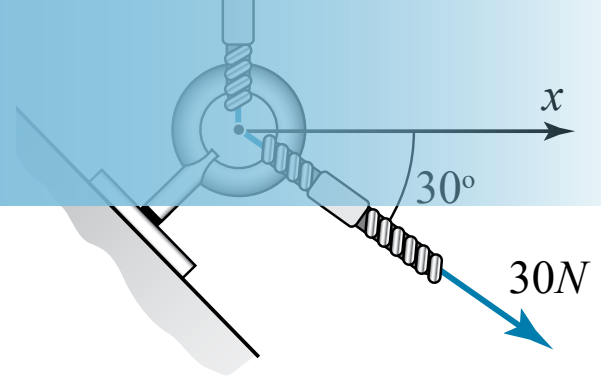


Διανύσματα



Στις θετικές επιστήμες, διακρίνουμε δύο είδη φυσικών μεγεθών. Υπάρχουν φυσικά μεγέθη που για να προσδιοριστούν πλήρως, αρκεί η γνώση της αριθμητικής τους τιμής και η μονάδα μέτρησής τους. Αυτά τα μεγέθη λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**. Τέτοια μεγέθη είναι για παράδειγμα ο χρόνος, η μάζα, ο όγκος, η θερμοκρασία κ.ά. Υπάρχουν όμως και τα φυσικά μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από την αριθμητική τους τιμή και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη. Διανυσματικά μεγέθη είναι η δύναμη, η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.ά. Τα διανυσματικά μεγέθη απεικονίζονται με τα διανύσματα, τα οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Τα διανύσματα έχουν σημαντικές εφαρμογές, κυρίως στη Φυσική, στη Μηχανική και στη Γεωμετρία.

7.1 Η έννοια του διανύσματος

Εφαρμοσμένο διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.

Ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα συμβολίζεται με δύο κεφαλαία γράμματα κάτω από ένα βέλος, όπου το πρώτο γράμμα είναι η αρχή του διανύσματος και το δεύτερο το πέρας. Το διάνυσμα του σχήματος 7.1 με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται ως εξής: $\vec{AB}$.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Το μηδενικό διάνυσμα συμβολίζεται ως εξής: $\vec{0}$.

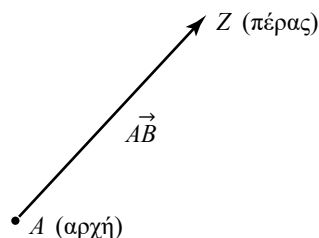
Ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει τα εξής στοιχεία:

1) **Μέτρο**, που είναι η απόσταση των άκρων του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.

Αν ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με 1, λέγεται **μοναδιαίο**.

2) **Διεύθυνση**, που είναι η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα A, B ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή (σχ. 7.2). Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται το $\vec{AB}$ λέγεται **φορέας του $\vec{AB}$** .

3) **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το A και πέρας το B , ή αρχή το B και πέρας το A .



Σχ. 7.1



Σχ. 7.2

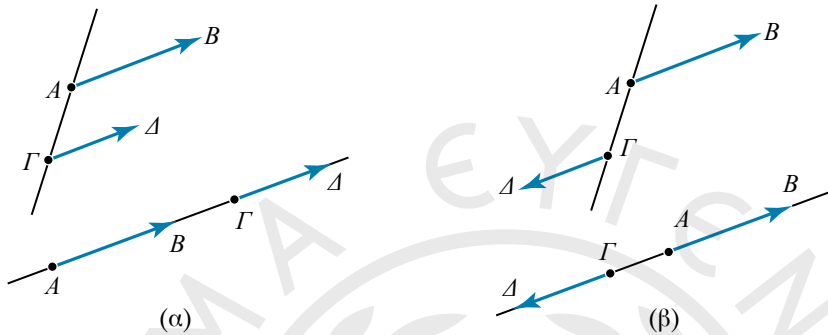
Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος.

Δύο μη μηδενικά εφαρμοσμένα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση, ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται:

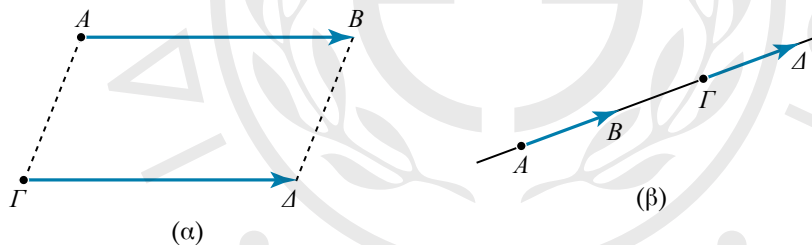
1) **Ομόροπα** αν είναι συγγραμμικά και έχουν ίδια φορά, δηλαδή έχουν ίδια κατεύθυνση [σχ. 7.3(α)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

2) **Αντίροπα** αν είναι συγγραμμικά και έχουν διαφορετική φορά [σχ. 7.3(β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \nwarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



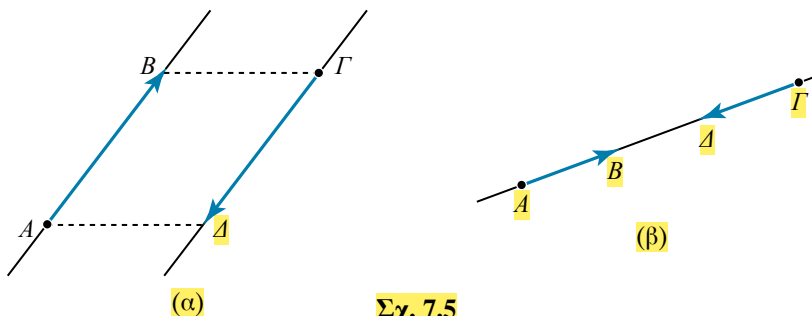
Σχ. 7.3

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα [σχ. 7.4(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 7.4

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά [σχ. 7.5(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 7.5

Παρατηρήσεις

1) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θα ισχύουν και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Αυτό συμβαίνει

διότι στο παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ (σχ. 7.4α) οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες, οπότε τα αντίστοιχα διανύσματα είναι παράλληλα και έχουν ίσα μέτρα.

2) Ισχύει ότι: $\vec{AB} = -\vec{BA}$

3) Ισχύει ότι: $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$

1) Ελεύθερο διάνυσμα

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, οποιαδήποτε δύο εφαρμοσμένα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα, είναι ίσα. Έτσι, όλα τα άπειρα διανύσματα που είναι ίσα, αλλά διαφέρουν στο σημείο εφαρμογής τους, αποτελούν μια κλάση διανυσμάτων. Το σύνολο των διανυσμάτων επομένως διαμερίζεται σε κλάσεις ίσων μεταξύ τους διανυσμάτων. Ονομάζουμε **ελεύθερο διάνυσμα** ή πιο απλά **διάνυσμα** την κλάση των άπειρων ίσων μεταξύ τους εφαρμοσμένων διανυσμάτων.

Ένα ελεύθερο διάνυσμα αντιπροσωπεύεται από οποιοδήποτε εφαρμοσμένο που ανήκει στην κλάση του, και συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα κάτω από ένα βέλος. Για παράδειγμα: $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$. Για να δηλώσουμε ότι ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a}$ αντιπροσωπεύεται από το εφαρμοσμένο διάνυσμα $\vec{AB}$ γράφουμε $\vec{a} = \vec{AB}$.

Στη Φυσική γίνεται συχνά χρήση του ελεύθερου διανύσματος. Για παράδειγμα η ταχύτητα ενός κινητού όταν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση καθορίζεται με ελεύθερο διάνυσμα.

2) Γωνία διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Ονομάζουμε **γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{\beta})$ ή πιο απλά θ , την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB (σχ. 7.6).

Ισχύει ότι:

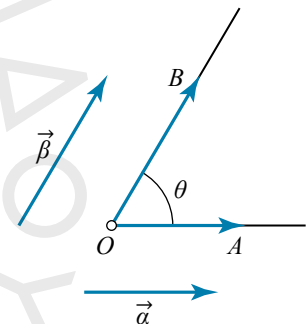
$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ (σε μοίρες)} \quad \text{ή} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ (σε rad)}.$$

Ειδικά:

Αν $\vec{a} \nearrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 0^\circ$

Αν $\vec{a} \nwarrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 180^\circ$

Αν $\theta = 90^\circ$, τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφονται ως εξής: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.



Σχ. 7.6

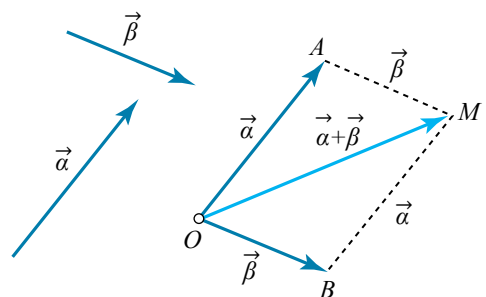
7.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

7.2.1 Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε **άθροισμα των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$** ένα νέο διάνυσμα, το οποίο συμβολίζεται με $\vec{a} + \vec{\beta}$, και το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί με τους εξής δύο τρόπους:

1) Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου

Επιλέγουμε δύο αντιπροσώπους για τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή O και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7. Η διαγώνιος $\vec{OM}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή

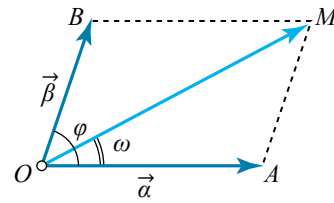


Σχ. 7.7

ισούται με $\vec{OA} + \vec{OB}$. Το άθροισμα $\vec{a} + \vec{b}$ είναι το ελεύθερο διάνυσμα που έχει το $\vec{OM}$ ως αντιπρόσωπο.

Μέτρο του $\vec{a} + \vec{b}$:

Το $|\vec{a} + \vec{b}|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM . Για τον υπολογισμό του (OM) εφαρμόζουμε Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο OAM (σχ. 7.8).



Σχ. 7.8

$$\begin{aligned}(OM)^2 &= (AM)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot (OA) \cdot (OB) \cdot \sin A \Leftrightarrow \\(OM)^2 &= (OA)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot (OA) \cdot (OB) \cdot \sin(180^\circ - \varphi) \Leftrightarrow \\(OM)^2 &= (OA)^2 + (OB)^2 + 2 \cdot (OA) \cdot (OB) \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

$$\text{Η } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi}$$

Διεύθυνση του $\vec{a} + \vec{b}$:

Εφαρμόζοντας τον Νόμο Ημιτόνων στο τρίγωνο OAM :

$$\frac{(OM)}{\eta\mu A} = \frac{(AM)}{\eta\mu \omega} \Leftrightarrow \frac{(OM)}{\eta\mu(180^\circ - \varphi)} = \frac{(OB)}{\eta\mu \omega} \Leftrightarrow \frac{|\vec{a} + \vec{b}|}{\eta\mu \varphi} = \frac{|\vec{b}|}{\eta\mu \omega} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \omega = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} \cdot \eta\mu \varphi$$

2) Με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων

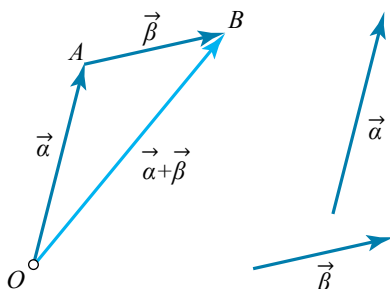
Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Το άθροισμά τους $\vec{a} + \vec{b}$ θα είναι το διάνυσμα που θα έχει αρχή την αρχή του $\vec{a}$ και πέρας το πέρας του $\vec{b}$ (σχ. 7.9).

Με τον δεύτερο τρόπο μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα.

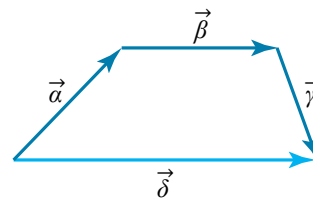
Το άθροισμα των $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου (σχ. 7.10).

Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)



Σχ. 7.9



Σχ. 7.10

- 2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- 3) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ (μηδενικό στοιχείο)
- 4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο)

– **Ειδικές περιπτώσεις στην πρόσθεση**

1) Άθροισμα κάθετων διανυσμάτων

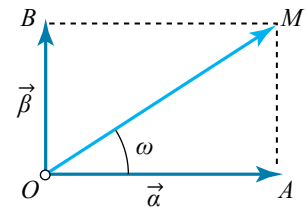
Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (σχ. 7.11), υπολογίζουμε το μέτρο του αθροίσματος με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAM :

$$(OM)^2 = (OA)^2 + (AM)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2}$$

Για τη διεύθυνση, στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM :

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AM)}{(OA)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$$

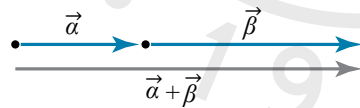


Σχ. 7.11

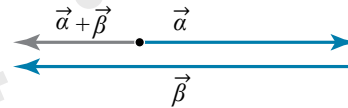
2) Άθροισμα συγγραμμικών διανυσμάτων:

Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ μόνο με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων:

- α) Το άθροισμα δύο **ομόρροπων** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.12) είναι ένα διάνυσμα:
 - Με διεύθυνση και φορά αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 - Με μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
- β) Το άθροισμα 2 **αντίρροπων** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.13) είναι ένα διάνυσμα:
 - Με διεύθυνση αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 - Με φορά τη φορά αυτού με το μεγαλύτερο μέτρο.
 - Με μέτρο την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$.



Σχ. 7.12



Σχ. 7.13

Εφαρμογή

Να βρεθεί η συνισταμένη $\vec{\Sigma F}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1 = 6N$ και $\vec{F}_2 = 8N$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ομόρροπες.
- β) $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίρροπες.
- γ) $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ κάθετες.
- δ) $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σχηματίζουν γωνία 50° .

Λύση

α) Μέτρο: $|\vec{\Sigma F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 6 + 8 = 14N$ και έχει διεύθυνση και φορά ίδια με τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

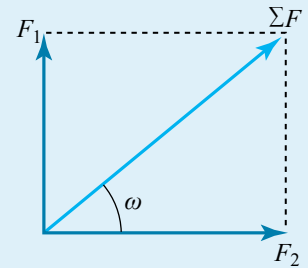
β) Μέτρο: $|\vec{\Sigma F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \|\vec{F}_1\| - \|\vec{F}_2\| = 8 - 6 = 2N$

Κατεύθυνση: της $\vec{F}_2$

γ) Όταν $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ (σχ. 7.14) για την συνισταμένη έχουμε:

Μέτρο: $|\vec{\Sigma F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10N$

Κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{6}{8} = 0,75$. Άρα $\omega = \varepsilon\varphi^{-1}0,75 = 36,86^\circ$



Σχ. 7.14

δ) Όταν οι $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ σχηματίζουν γωνία 50° (σχ. 7.15) για τη συνισταμένη του ισχύει:

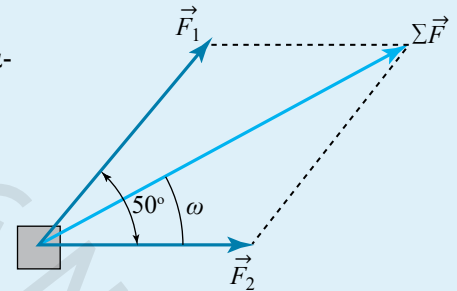
Μέτρο: $|\vec{\Sigma F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos\varphi} \Leftrightarrow$

$|\vec{\Sigma F}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 50^\circ} \Leftrightarrow$

$|\vec{\Sigma F}| = 12,716N$

Και για τη διεύθυνση: $\eta\mu\omega = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|} \cdot \eta\mu\varphi = \frac{6}{12,716} \eta\mu 50^\circ = 0,36146$

Άρα $\omega = \eta\mu^{-1}0,36146 = 21,18999^\circ$

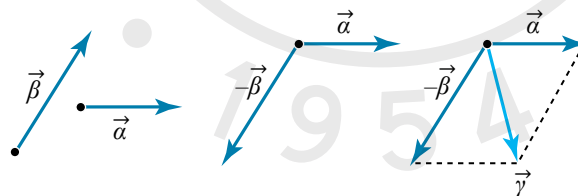


Σχ. 7.15

7.2.2 Αφαίρεση διανυσμάτων

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{a}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $-\vec{\beta}$ (σχ. 7.16), δηλαδή:

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$



Σχ. 7.16

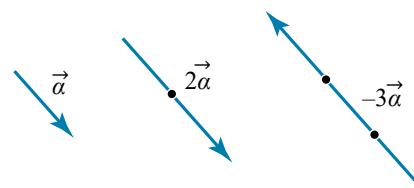
7.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του 0 και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- 1) Είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$, και αντίρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda < 0$ και
- 2) έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda\vec{a}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Για παράδειγμα το διάνυσμα $2\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{a}$ με διπλάσιο μέτρο του $\vec{a}$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{a}$ με τριπλάσιο μέτρο του $\vec{a}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.17.



Σχ. 7.17

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού επί διάνυσμα

- 1) $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$
- 2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- 3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- 4) $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
- 5) Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$.
- 6) Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 3\vec{a} - 4\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

7.4 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Έστω το διάνυσμα $\vec{a}$ στο επίπεδο Oxy . Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ στους άξονες x και y αντίστοιχα, ώστε το $\vec{a}$ να είναι άθροισμα των δύο διανυσμάτων (βλ. σχ. 7.18). Τα διανύσματα $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ ονομάζονται **διανυσματικές συνιστώσες** του $\vec{a}$. Δηλαδή ισχύει:

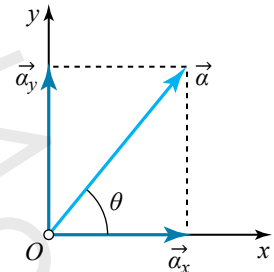
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Υπολογισμός των μέτρων των συνιστωσών:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{|\vec{a}_y|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\vec{a}_y| = |\vec{a}| \cdot \eta\mu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{|\vec{a}_x|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$



Σχ. 7.18

Άρα:

$$|\vec{a}_y| = |\vec{a}| \cdot \eta\mu\theta$$

$$|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$



Παράδειγμα 7.1

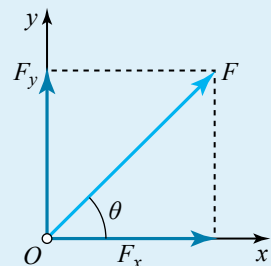
Το διάνυσμα $\vec{F}$ του σχήματος 7.19 έχει μέτρο 100 και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\theta = 50^\circ$. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες.

Λύση

Τα μέτρα των συνιστωσών $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ είναι:

$$|\vec{F}_y| = |\vec{F}| \cdot \eta\mu\theta = 100 \cdot \eta\mu 50^\circ = 100 \cdot 0,766 = 76,6$$

$$|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ = 100 \cdot 0,643 = 64,3$$



Σχ. 7.19

– Πρόσθεση περισσότερων από δύο διανυσμάτων με διαφορετική διεύθυνση

Για να προσθέσουμε μη συγγραμμικά διανύσματα, σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη δει, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της πρόσθεσης διανυσμάτων, δηλαδή να τα κάνουμε διαδοχικά και να ενώσουμε την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου. Μπορούμε όμως και να ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία, η οποία είναι πιο ακριβής.

1) Κατασκευάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$. Η επιλογή των αξόνων είναι αυθαίρετη. Γίνεται με στόχο όσο το δυνατό περισσότερα διανύσματα να συμπίπτουν με τους άξονες.

2) Αναλύουμε όσα διανύσματα είναι εκτός των αξόνων, σε κάθετες συνιστώσες πάνω στους άξονες.

3) Βρίσκουμε τις συνισταμένες των διανυσμάτων σε κάθε άξονα, $\vec{\sigma}_x$ και $\vec{\sigma}_y$.

4) Βρίσκουμε τη συνισταμένη $\vec{\sigma}_{ολ}$ των διανυσμάτων $\vec{\sigma}_x$ και $\vec{\sigma}_y$, εφαρμόζοντας τους τύπους για τη συνισταμένη δύο κάθετων διανυσμάτων. Δηλαδή:

$$|\vec{\sigma}_{ολ}| = \sqrt{|\vec{\sigma}_x|^2 + |\vec{\sigma}_y|^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{\sigma}_y|}{|\vec{\sigma}_x|}$$



Παράδειγμα 7.2

Να υπολογιστεί η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ του σχήματος 7.20, αν $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$ και $|\vec{c}| = 8$.

Λύση

Επιλέγουμε άξονες $x'x$ και $y'y$ τους φορείς των διανυσμάτων.

Αναλύουμε το $\vec{a}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ (σχ. 7.21).

$$|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cdot \sin\theta = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot 0,5 = 3$$

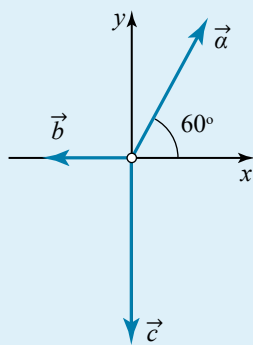
$$|\vec{a}_y| = |\vec{a}| \cdot \eta\mu\theta = 6 \cdot \eta\mu 60^\circ = 6 \cdot 0,866 = 5,196$$

Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $x'x$ έχει μέτρο: $|\vec{\sigma}_x| = |\vec{b}| - |\vec{a}_x| = 4 - 3 = 1$ και φορά τη φορά του $\vec{b}$.

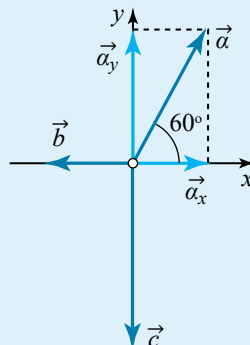
Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $y'y$ έχει μέτρο: $|\vec{\sigma}_y| = |\vec{c}| - |\vec{a}_y| = 8 - 5,196 = 2,804$ και φορά τη φορά του $\vec{c}$.

Η συνισταμένη των $\vec{\sigma}_x$ και $\vec{\sigma}_y$ (σχ. 7.22) έχει μέτρο:

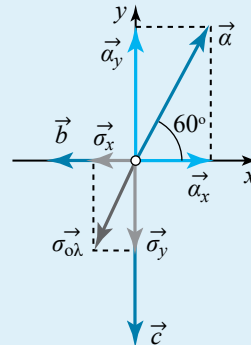
$$|\vec{\sigma}_{ολ}| = \sqrt{|\vec{\sigma}_x|^2 + |\vec{\sigma}_y|^2} = \sqrt{1^2 + 2,804^2} = 2,977$$



Σχ. 7.20



Σχ. 7.21



Σχ. 7.22

και διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\left| \frac{\vec{\sigma}_y}{\vec{\sigma}_x} \right|}{1} = \frac{2,804}{1} = 2,804$$

$$\text{Άρα } \hat{\omega} = \varepsilon\varphi^{-1} 2,804 = 70,372^\circ.$$

7.5 Εφαρμογές διανυσμάτων στην επίλυση προβλημάτων

Πριν την επίλυση προβλημάτων θα ορίσουμε κάποια σημαντικά μεγέθη της Φυσικής:

Έστω κινητό που κινείται σε κάποια τροχιά και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση Α, ενώ μετά από χρόνο Δt , δηλαδή τη χρονική στιγμή t_2 , βρίσκεται στη θέση Β (σχ. 7.23).

Μετατόπιση $\Delta \vec{r}$ ονομάζεται το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχική θέση Α ενός σώματος και πέρας την τελική θέση Β. Ισχύει:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Όπου $\vec{r}_2, \vec{r}_1$ τα διανύσματα θέσης του σώματος στην τελική και στην αρχική θέση αντίστοιχα.

Μέση διανυσματική ταχύτητα ορίζεται το φυσικό διανυσματικό μέγεθος:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Δηλαδή, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα που έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και φορά της μετατόπισης και μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο πραγματοποιήθηκε η μετατόπιση.

Μέση επιτάχυνση ενός κινητού ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta \vec{v}$ προς το χρονικό διάστημα Δt :

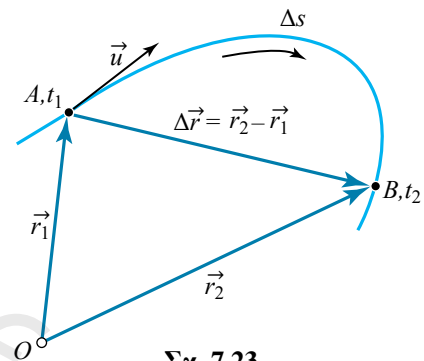
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Η διεύθυνση και η φορά της επιτάχυνσης συμπίπτουν με τη διεύθυνση και τη φορά της $\Delta \vec{v}$.

– Σύνθεση ταχυτήτων

Εάν ένα σώμα Α κινείται ως προς ένα σώμα Β με ταχύτητα $\vec{v}_A$ και το σώμα Β κινείται ως προς ένα σώμα Γ με ταχύτητα $\vec{v}_B$, αποδεικνύεται (από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας) ότι το σώμα Α κινείται ως προς το Γ με ταχύτητα $\vec{v}_A$:

$$\vec{v}_{A \Gamma} = \vec{v}_A + \vec{v}_B$$



Πρόβλημα 7.1

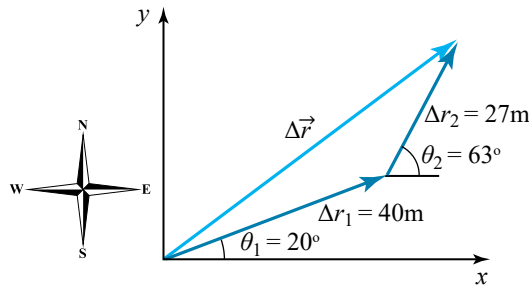
Πλοίο πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N 70^\circ E$ και διανύει απόσταση 40 m. Στη συνέχεια, αλλάζοντας πορεία, πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N 27^\circ E$ και διανύει απόσταση 27 m.

Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της μετατόπισης $\overrightarrow{\Delta r}$ και η γωνία που σχηματίζει με τον Βορρά.

Λύση

Σχεδιάζουμε τα διαδοχικά διανύσματα, παίρνοντας κλίμακα $1 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ m}$ (σχ. 7.24)

Ενώνουμε την αρχή του πρώτου με το πέρας του δεύτερου. Με τον χάρακα μετράμε το μήκος του Δr . Είναι $6,5 \text{ cm}$. Επομένως, σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε, το μέτρο της μετατόπισης είναι 65 m . Επίσης με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία που σχηματίζει το Δr με τον Βορρά και είναι 53° .



Σχ. 7.24

Πρόβλημα 7.2

Ένα πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι και πλέει 20 ν.μ. προς τον Βορρά. Στη συνέχεια κατευθύνεται 60° νοτιοανατολικά για 40 ν.μ. Βρείτε την τελική του μετατόπιση από το λιμάνι.

Λύση

Η τελική μετατόπιση είναι η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ του σχήματος 7.25.

Αναλύουμε το διάνυσμα $\vec{r}_2$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$$|\vec{r}_{2x}| = |\vec{r}_2| \cdot \sin\theta = 40 \cdot \sin 60^\circ = 20$$

$$|\vec{r}_{2y}| = |\vec{r}_2| \cdot \cos\theta = 40 \cdot \cos 60^\circ = 34,64$$

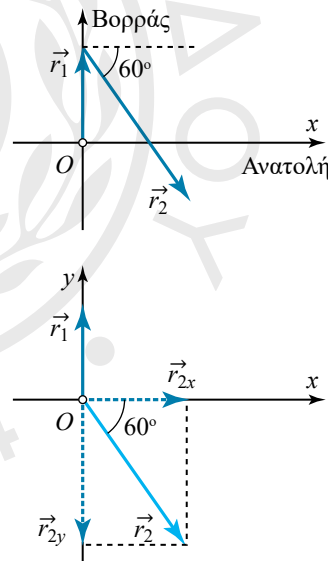
$$|\vec{r}_y| = |\vec{r}_{2y}| - |\vec{r}_1| = 34,64 - 20 = 14,64$$

Η συνισταμένη των $\vec{r}_{2x}$ και $\vec{r}_y$ έχει μέτρο:

$$|\vec{r}_{\text{ολ}}| = \sqrt{|\vec{r}_{2x}|^2 + |\vec{r}_y|^2} = \sqrt{20^2 + 14,64^2} = 24,79$$

Και η διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{r}_y|}{|\vec{r}_{2x}|} = \frac{14,64}{20} = 0,732$$



Σχ. 7.25

Πρόβλημα 7.3

Πλοίο κινείται με ταχύτητα $v_{\text{πλοίο/σπερμα}} = 14 \text{ knots}$ και πορεία 0° (προς Βορρά) και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $v_{\text{ρεύμα/σπερμα}} = 6 \text{ knots}$ και κατεύθυνση προς Δύση. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\vec{v}_{\text{πλοίο/σπερμα}} = \vec{v}_{\text{ρεύμα/σπερμα}} + \vec{v}_{\text{πλοίο/ρεύμα}}$$

ή

$$\vec{v}_{\text{πλοίο/ρεύμα}} = \vec{v}_{\text{πλοίο/σπερμα}} - \vec{v}_{\text{ρεύμα/σπερμα}}$$

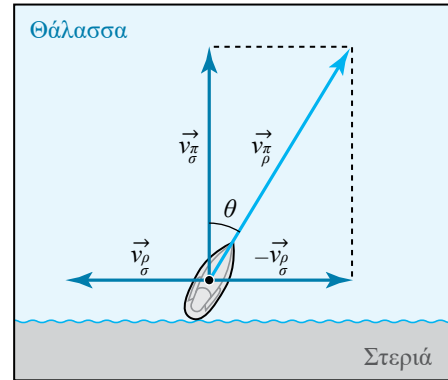
Η αντισταθμιστική ταχύτητα του πλοίου είναι το μέτρο του $\vec{v}_\sigma^\pi$ του σχήματος 7.26:

$$|\vec{v}_\sigma^\pi| = \sqrt{|\vec{v}_\sigma^\pi|^2 + |-\vec{v}_\sigma^e|^2} = \sqrt{14^2 + 6^2} = 15,23 \text{ knots}$$

Για τη γωνία από το ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|\vec{v}_\sigma^e|}{|\vec{v}_\sigma^\pi|} = \frac{6}{14} = 0,429.$$

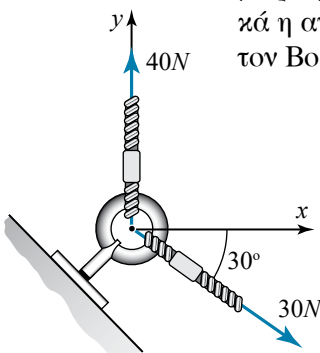
$$\text{Άρα } \theta = \varepsilon\varphi^{-1}0,429 = 23,22^\circ.$$



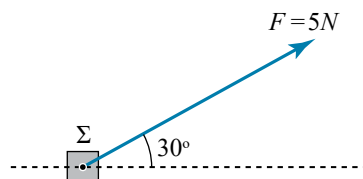
Σχ. 7.26

Ασκήσεις

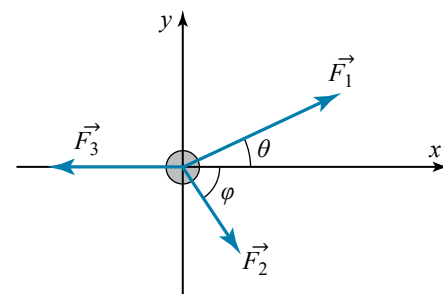
1. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων.
2. Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της συνισταμένης δύναμης του σχήματος 7.27 και η γωνία της με την οριζόντια διεύθυνση.
3. Σε ένα σώμα ασκούνται οι ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ και οι αντίρροπες με αυτές δυνάμεις $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι $|\vec{F}_1| = 5 \text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 7 \text{ N}$, $|\vec{F}_3| = 3 \text{ N}$ και $|\vec{F}_4| = 4 \text{ N}$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.
4. Ένα σώμα δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μέτρα $|\vec{F}_1| = 12 \text{ N}$ και $|\vec{F}_2| = 5 \text{ N}$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.
5. Στο σώμα Σ του σχήματος 7.28 ασκείται μια δύναμη με μέτρο $|\vec{F}_1| = 5 \text{ N}$ που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη.
6. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος 7.29, αν $|\vec{F}_1| = 10 \text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 5 \text{ N}$, $|\vec{F}_3| = 6 \text{ N}$, $\varphi = 60^\circ$ και $\theta = 30^\circ$.
7. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $v_{\text{πλοίο στεραι}} = 12 \text{ knots}$ και πορεία προς Βορρά και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $v_{\text{ρεύμα στεραι}} = 4 \text{ knots}$ και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).
8. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $v_{\text{πλοίο στεραι}} = 12 \text{ knots}$ και πορεία $N60^\circ E$ και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $v_{\text{ρεύμα στεραι}} = 10 \text{ knots}$ και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).



Σχ. 7.27



Σχ. 7.28



Σχ. 7.29

Σφαιρικά τρίγωνα

8.1 Σφαίρα

Σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο O . Το σημείο O είναι το κέντρο της σφαίρας και η σταθερή απόσταση R των σημείων από το O λέγεται **ακτίνα**. Η σφαίρα συμβολίζεται με (O, R) .

Έστω ότι μια ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (O, R) τέμνει την σφαίρα στα σημεία A και A' . Τα σημεία A και A' λέγονται **αντιδιαμετρικά σημεία**. Το ευθύγραμμο τμήμα AA' ονομάζεται **διάμετρος** της σφαίρας. Κάθε διάμετρος της σφαίρας έχει μήκος $2R$. Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ που ενώνει τα 2 σημεία B και Γ της σφαίρας ονομάζεται **χορδή** (σχ. 8.1).

8.1.1 Κύκλοι σφαίρας

Μέγιστος κύκλος σφαίρας ονομάζεται ένας κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Ένας μέγιστος κύκλος έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα την ακτίνα της σφαίρας (σχ. 8.2).

Μικρός κύκλος σφαίρας ονομάζεται κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της (σχ. 8.2).

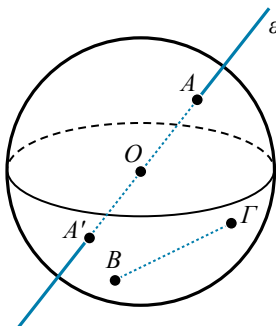
Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος (σχ. 8.3). Αν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, περνούν άπειροι μέγιστοι κύκλοι. Φανταστείτε τους δύο πόλους της υδρογείου από τους οποίους διέρχονται άπειροι μεσημβρινοί. Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται απ' αυτά.

Απόσταση δύο σημείων A και B πάνω στη σφαίρα ονομάζεται το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία. Η απόσταση αυτή είναι ίση με την επίκεντρη γωνία AOB (σχ. 8.3).

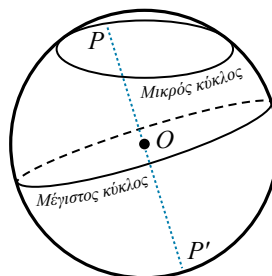
8.1.2 Άξονας και πόλοι κύκλου

Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετη στο επίπεδο ενός κύκλου ονομάζεται **άξονας του κύκλου**.

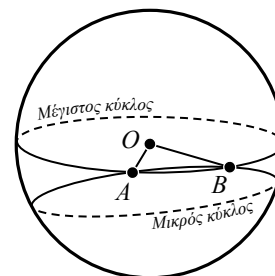
Τα σημεία που τέμνει ο άξονας ενός κύκλου την σφαίρα ονομάζονται **πόλοι** του κύκλου.



Σχ. 8.1



Σχ. 8.2



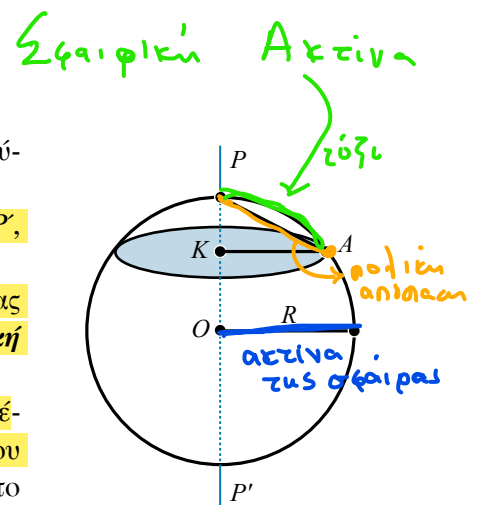
Σχ. 8.3

Έτσι, στο σχήμα 8.4 τα σημεία P και P' είναι πόλοι του κύκλου (K, KA) και η ευθεία PP' είναι ο άξονάς του.

Ο μέγιστος κύκλος που είναι κάθετος στη διάμετρο PP' , ονομάζεται **ισμερινός κύκλος** του σημείου P .

Η απόσταση κάθε σημείου ενός κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου ονομάζεται **πολική απόσταση** του κύκλου.

Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται **σφαιρική ακτίνα** του κύκλου. Στο σχήμα 8.4, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PA είναι η πολική απόσταση του κύκλου (K, KA) και το τόξο PA είναι η σφαιρική ακτίνα του.



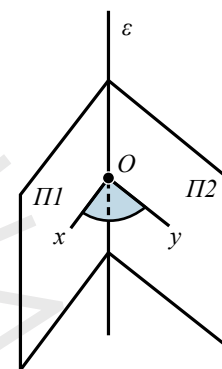
Σχ. 8.4

8.1.3 Γωνίες στον χώρο

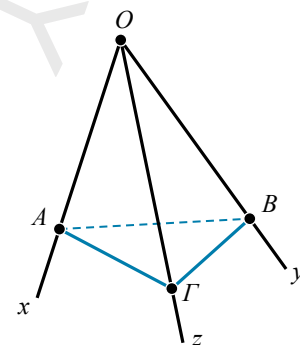
Διέδρη γωνία ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, Π_1 και Π_2 , που τέμνονται σε ευθεία ε , και τη συμβολίζουμε με $\varepsilon(\Pi_1, \Pi_2)$ (σχ. 8.5). Τα ημιεπίπεδα Π_1 και Π_2 λέγονται **έδρες** της διέδρης γωνίας και η κοινή ευθεία ε λέγεται **ακμή** της διέδρης γωνίας.

Ορίζουμε ως **μέτρο** της διέδρης γωνίας $\varepsilon(\Pi_1, \Pi_2)$ το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\hat{O}y$, όπου Ox , Oy οι ημιευθείες που περιέχονται στα επίπεδα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ακμή της διέδρης γωνίας στο σημείο O .

Τρίεδρη γωνία λέγεται το σχήμα που καθορίζεται από τρεις ημιευθείες Ox , Oy και Oz , με κοινή αρχή O , οι οποίες δεν είναι συνεπίπεδες. Το σημείο O λέγεται **κορυφή** της τρίεδρης γωνίας, και οι ημιευθείες Ox , Oy και Oz λέγονται **ακμές** της τρίεδρης γωνίας. Αν A , B και Γ είναι τρία σημεία στις ακμές της τρίεδρης γωνίας, οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}A$ λέγονται **έδρες**. Η τρίεδρη γωνία του σχήματος 8.6 συμβολίζεται με $O.AB\Gamma$.



Σχ. 8.5



Σχ. 8.6

8.1.4 Σφαιρική γωνία

Σφαιρική γωνία ονομάζεται το μέρος της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ δύο τεμνόμενων τόξων τα οποία ανήκουν σε μέγιστους κύκλους. Τα τόξα αυτά ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας, και το σημείο τομής τους ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας [σχ. 8.7(α)]. Η σφαιρική γωνία του σχήματος 8.7 έχει κορυφή το σημείο A και πλευρές τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$. Οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και στο αντιδιαμετρικό σημείο του A , το A' [σχ. 8.7(β)].

Ορίζουμε ως μέτρο της σφαιρικής γωνίας με κορυφή το σημείο A , το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\hat{A}y$, όπου Ax , Ay οι εφαπτομένες των πλευρών της γωνίας στην κορυφή A [σχ. 8.7(γ)].

Προφανώς, εξ ορισμού, όπου και να είναι οι θέσεις των σημείων B και Γ πάνω στους δύο μέγιστους κύκλους, οι αντίστοιχες σφαιρικές γωνίες που σχηματίζονται έχουν όλες το ίδιο μέτρο.

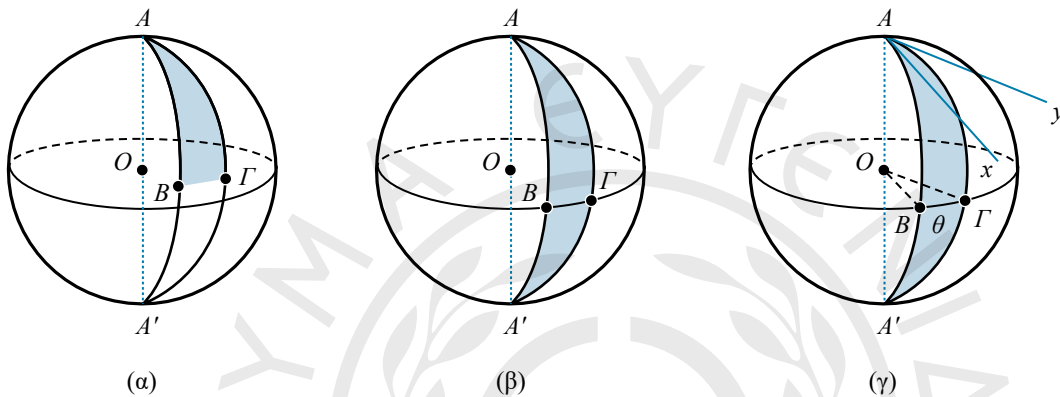
– Ιδιότητες σφαιρικής γωνίας

1) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο της διέδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν τα επίπεδα που περιέχουν τις πλευρές της. Στο σχήμα 8.7 η διέδρη γωνία έχει ακμή τη διάμετρο AA' και έδρες τα δύο ημιεπίπεδα που περιέχουν τα τόξα $\widehat{ABA'}$ και $\widehat{AB\Gamma'}$ αντίστοιχα.

2) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής, το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών της. Το μέτρο αυτού του τόξου είναι ίσο με την επίκεντρη γωνία του ισημερινού κύκλου, η οποία βαίνει σε αυτό [σχ. 8.7(γ)].

Επομένως ισχύει:

$$\widehat{xAy} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{BO\Gamma} = \theta$$



Σχ. 8.7

8.2 Σφαιρικό τρίγωνο

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων μικρότερων του ημικυκλίου, τα οποία δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Στο σχήμα 8.8 τρεις μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και σχηματίζεται το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία τομής A, B, Γ των μέγιστων κύκλων ονομάζονται **κορυφές του σφαιρικού τριγώνου**.

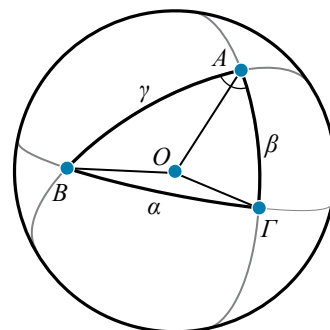
Αν ενώσουμε το κέντρο O της σφαίρας με τις κορυφές A, B, Γ , σχηματίζεται η τριέδρη γωνία $O.AB\Gamma$. Λέμε ότι στην τριέδρη αυτή γωνία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$.

– Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου

1) Τα τόξα των τριών μέγιστων κύκλων ονομάζονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου. Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου του σχήματος 8.8 είναι τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ και συμβολίζονται και με μικρά γράμματα γ, α, β αντίστοιχα. Κάθε πλευρά είναι τόξο μικρότερο του ημικυκλίου, δηλαδή είναι μικρότερη από 180° . Το μέτρο της πλευράς είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε αυτό. Δηλαδή:

$$\widehat{BO\Gamma} = \alpha \quad \widehat{AO\Gamma} = \beta \quad \widehat{AOB} = \gamma$$

2) Οι γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται **γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**, συμβολίζονται με A, B, Γ και έχουν το ίδιο μέτρο με τις διέδρες γωνίες A, B, Γ αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι γωνίες A, B και Γ του σφαιρικού τριγώνου είναι οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε



Σχ. 8.8

κορυφή του σφαιρικού τριγώνου. Θυμηθείτε το σχήμα 8.7(γ). Προφανώς κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° .

Οι 3 γωνίες και οι 3 πλευρές ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του σφαιρικού τριγώνου, και μετρούνται ή όλα σε μοίρες ή όλα σε rad. Το σφαιρικό τρίγωνο έχει πολλές εφαρμογές στη Ναυτιλία, με κυριότερες το τρίγωνο θέσης και το τρίγωνο ορθοδρομίας που θα δούμε παρακάτω. Οι Πλοίαρχοι στις εφαρμογές του σφαιρικού τριγώνου, δουλεύουν αποκλειστικά με μοίρες, γι' αυτό και σε όλα τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης των γωνιών και των πλευρών τη μοίρα και τις υποδιαιρέσεις της.

Παρατηρήσεις

1) Ένα οποιοδήποτε τρίγωνο στην επιφάνεια μιας σφαίρας δεν είναι απαραίτητα σφαιρικό τρίγωνο. Σύμφωνα με τον ορισμό, οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα μέγιστων κύκλων. Αν μια πλευρά του τριγώνου είναι τόξο μικρού κύκλου, τότε δεν πρόκειται για σφαιρικό τρίγωνο.

2) Δεν πρέπει να συγχέουμε το μέτρο της πλευράς με το μήκος της πλευράς. Στο σφαιρικό τρίγωνο, όταν ζητείται να υπολογιστεί μια πλευρά, υπολογίζουμε το μέτρο της σε μοίρες, δηλαδή το γωνιακό μέτρο του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου, και όχι το μήκος της (όπως κάνουμε στο επίπεδο τρίγωνο).

8.2.1 Βασικές ιδιότητες σφαιρικού τριγώνου

Ας θεωρήσουμε το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 8.8.

1) Κάθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° (αν είναι μετρομένη σε μοίρες).

2) Κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° (αν είναι μετρομένη σε μοίρες).

3) Αν α, β, γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ σε μοίρες, τότε:

$$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$$

4) Αν Α, Β, Γ οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, τότε σε μοίρες θα είναι:

$$180^\circ < A + B + \Gamma < 540^\circ$$

5) Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες. Συνεπώς, απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του και αντίστροφα.

6) Κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

7) Κάθε γωνία αυξημένη κατά 180° είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών. Δηλαδή:

$$A + 180^\circ > B + \Gamma \text{ (κυκλικά)}$$

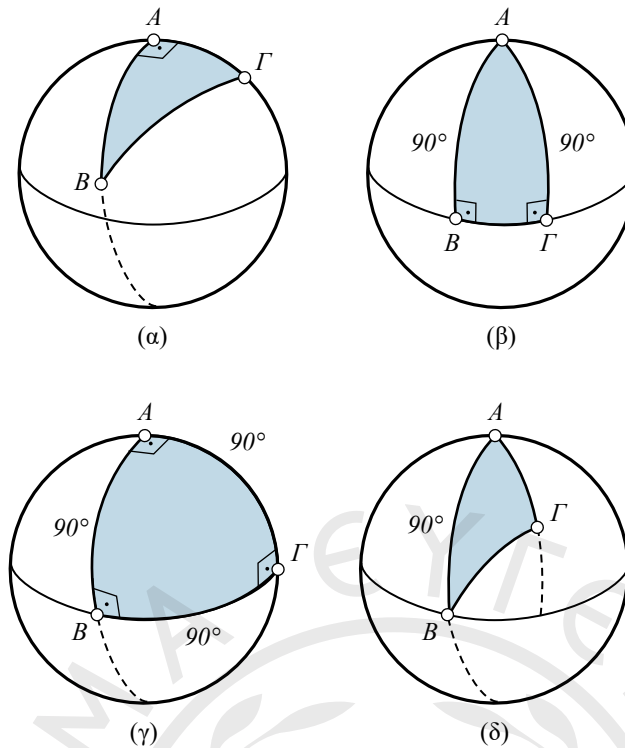
8) Δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι ίσες αν και μόνον αν οι απέναντι προς αυτές τις πλευρές γωνίες είναι ίσες.

8.2.2 Είδη σφαιρικών τριγώνων

Κάθε σφαιρικό τρίγωνο θα ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω κατηγορίες ανάλογα με το αν οι γωνίες ή οι πλευρές του έχουν μέτρο 90° ή αν είναι ίσες μεταξύ τους:

1) **Ορθογώνιο:** Αν μία γωνία του είναι ίση με 90° [σχ. 8.9(α)].

2) **Δισορθογώνιο:** Αν δύο γωνίες του είναι ίσες με 90° [σχ. 8.9(β)].



Σχ. 8.9

- 3) **Τρισορθογώνιο:** Αν και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 90° [σχ. 8.9(γ)].
- 4) **Ορθόπλευρο:** Αν μία πλευρά του έχει μέτρο 90° [σχ. 8.9(δ)].
- 5) **Δισορθόπλευρο:** Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(β)].
- 6) **Τρισορθόπλευρο:** Αν και οι τρεις πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(γ)].
- 7) **Ισοσκελές:** Αν δύο πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(β)].
- 8) **Ισόπλευρο:** Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(γ)].
- 9) **Σκαληνό:** Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
- 10) **Τυχαίο (ή κοινό):** Δεν έχει αναγκαστικά γωνία ή πλευρά ίση με 90° .

8.2.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα

Έστω τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες A, B, Γ και πλευρές a, b, γ . Στο $AB\Gamma$ αποδεικνύονται οι παρακάτω θεμελιώδεις σχέσεις:

1) Νόμος Συνημιτόνων για τις Πλευρές (Θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους)

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin b \cdot \sin \gamma + \eta\mu b \cdot \eta\mu \gamma \cdot \sin A \\ \sin b &= \sin a \cdot \sin \gamma + \eta\mu a \cdot \eta\mu \gamma \cdot \sin B \\ \sin \gamma &= \sin a \cdot \sin b + \eta\mu a \cdot \eta\mu b \cdot \sin \Gamma\end{aligned}$$

2) Νόμος Συνημιτόνων για τις Γωνίες (Πολικοί τύποι των θεμελιωδών σχέσεων)

$$\begin{aligned}\sin A &= -\sin B \cdot \sin \Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sin a \\ \sin B &= -\sin A \cdot \sin \Gamma + \eta\mu A \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sin b \\ \sin \Gamma &= -\sin A \cdot \sin B + \eta\mu A \cdot \eta\mu B \cdot \sin \gamma\end{aligned}$$

3) Νόμος Ημιτόνων (Θεμελιώδεις σχέσεις δευτέρου είδους)

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu a} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu b} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma}$$

4) Αναλογικοί τύποι Gauss – Delambre

$$\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{a}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2}} = \eta\mu \frac{a}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{a}{2} \cdot \frac{\eta\mu \frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2}} = \eta\mu \frac{a}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

5) Αναλογικοί τύποι του Napier

$$\varepsilon\varphi \frac{a}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \frac{\eta\mu \frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta-\gamma}{2}} = \varepsilon\varphi \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sigma\varphi \frac{B-\Gamma}{2} \cdot \frac{\eta\mu \frac{\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\beta+\gamma}{2}} = \sigma\varphi \frac{B+\Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

6) Τύποι των τεσσάρων στοιχείων

$$\begin{aligned}\sigma\varphi a \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B &= \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi A - \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi B \\ \sigma\varphi a \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma &= \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi A - \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma \\ \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A &= \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \cdot \sigma\varphi B - \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi A \\ \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma &= \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi B - \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma \\ \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu A &= \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi A \\ \sigma\varphi\gamma \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B &= \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi B\end{aligned}$$

7) Τύποι ημιπαρημιτόνων

α) Γωνιών:

$$\begin{aligned}\eta\mu\pi\rho A &= \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \eta\mu(\tau - \gamma) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \\ \eta\mu\pi\rho B &= \eta\mu(\tau - \alpha) \cdot \eta\mu(\tau - \gamma) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\gamma \\ \eta\mu\pi\rho\Gamma &= \eta\mu(\tau - \beta) \cdot \eta\mu(\tau - \alpha) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\alpha\end{aligned}$$

β) Πλευρών:

$$\begin{aligned}\eta\mu\pi\rho\alpha &= \eta\mu\pi\rho(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\pi\rho A \\ \eta\mu\pi\rho\beta &= \eta\mu\pi\rho(\gamma - \alpha) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\pi\rho B \\ \eta\mu\pi\rho\gamma &= \eta\mu\pi\rho(\alpha - \beta) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\pi\rho\Gamma\end{aligned}$$

όπου το $\eta\mu\pi\rho \omega$ είναι το **ημιπαρημιτόνο** του τόξου ω , το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$\eta\mu\pi\rho \omega = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{2} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

8.2.4 Πολικό τρίγωνο

Έστω σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ. 8.10). Κάθε πλευρά του ανήκει σε μέγιστο κύκλο, στον οποίο αντιστοιχούν δύο πόλοι. Αν A' είναι ο πόλος του μέγιστου κύκλου $B\Gamma$ που είναι πλησιέστερος στην κορυφή A του σφαιρικού τριγώνου, B' ο πόλος του μέγιστου κύκλου $A\Gamma$ που είναι πλησιέστερος στην κορυφή B και Γ' ο πόλος του μέγιστου κύκλου AB που είναι πλησιέστερος στην κορυφή Γ , το σφαιρικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ονομάζεται **πολικό τρίγωνο** του

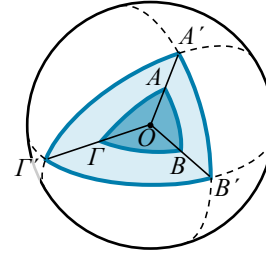
τρίγωνου $AB\Gamma$. Οι πλευρές του πολικού τριγώνου συμβολίζονται με α', β', γ' .

Αποδεικνύεται ότι αν $A' B' \Gamma'$ είναι το πολικό τρίγωνο του $AB\Gamma$, τότε και το $AB\Gamma$ είναι το πολικό τρίγωνο του $A' B' \Gamma'$.

Ιδιότητα: οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού τριγώνου και αντίστροφα:

$$A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^\circ$$

$$A' + \alpha = B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^\circ$$



Σχ. 8.10

8.3 Επίλυση ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν δέκα βασικοί τύποι, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, αν γνωρίζουμε δύο στοιχεία του πλην της ορθής γωνίας. Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$. Οι σχέσεις που ακολουθούν, προκύπτουν από τον Νόμο Συννημιτόνων για τις Πλευρές, τον Νόμο Συννημιτόνων για τις Γωνίες και τον Νόμο Ημιτόνων, της παραγράφου 8.2.3, αν θέσουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^\circ = 1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$:

- | | |
|---|--|
| 1) (α) $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$ | 1) (β) $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$ |
| 2) (α) $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$ | 2) (β) $\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi B$ |
| 3) (α) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$ | 3) (β) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma$ |
| 4) (α) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B$ | 4) (β) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha$ |
| 5) (α) $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma$ | 5) (β) $\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$ |

Ενδεικτικά, θα αποδείξουμε τις σχέσεις 1(α) και 1(β):

Στον Νόμο Ημιτόνων, θέτουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^\circ = 1$, οπότε έχουμε για την 1(α):

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \beta} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$$

Για την 1(β) στον Νόμο Συννημιτόνων για γωνίες θέτουμε $\sigma\upsilon\nu A = 0$ και $\eta\mu A = 1$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = -\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \Gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \gamma \quad (1)$$

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu B = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu \gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\eta\mu \gamma}{\sigma\upsilon\nu \gamma} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$$

8.3.1 Κανόνες Napier

Επειδή η απομνημόνευση των δέκα παραπάνω τύπων των ορθογώνιων σφαιρικών τριγώνων είναι δύσκολη, ο Napier επινόησε ένα μνημονικό τέχνασμα, με το οποίο μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε από αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς που μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση. Το τέχνασμα αυτό αποτελείται από δύο κανόνες, οι οποίοι ονομάζονται Κανόνες του Napier. Αρχικά, για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του Napier, πρέπει να σχηματίσουμε ένα «νέο» ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο θα προκύψει από το αρχικό, αν στη θέση της υποτεινουσας και των δύο γωνιών εκτός της ορθής, βάλουμε τα συμπληρωματικά τους στοιχεία.

Στην διάταξη του σχήματος 8.11 κάθε στοιχείο έχει δύο προσκείμενα και δύο αντικείμενα στοιχεία, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ορθή γωνία Α.

1) Για το στοιχείο $90^\circ - \Gamma$ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - \alpha$ και β και τα αντικείμενα τα $90^\circ - B$ και γ .

2) Για το στοιχείο γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα $90^\circ - B$ και β (αφού η γωνία Α δεν λαμβάνεται υπόψη) και τα αντικείμενα τα $90^\circ - \alpha$ και $90^\circ - \Gamma$.

1^{ος} κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του.

2^{ος} κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικείμενων στοιχείων του.

Για παράδειγμα για το στοιχείο β :

$$1^{\text{ος}} \text{ Νόμος: } \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$$

$$2^{\text{ος}} \text{ Νόμος: } \eta\mu\beta = \sigma\eta\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\eta\nu(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$$

Για παράδειγμα για το στοιχείο $90^\circ - B$:

$$1^{\text{ος}} \text{ Νόμος: } \eta\mu(90^\circ - B) = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \sigma\eta\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$$

$$2^{\text{ος}} \text{ Νόμος: } \eta\mu(90^\circ - B) = \sigma\eta\nu(90^\circ - \Gamma) \cdot \sigma\eta\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\eta\nu B = \eta\mu\Gamma \cdot \sigma\eta\nu\beta$$



Σχ. 8.11

8.3.2 Θεωρήματα τεταρτημορίων

Η γνώση των κανόνων Napier που μας δίνουν την δυνατότητα να παράξουμε τις 3 εξισώσεις με τα 3 άγνωστα στοιχεία του τριγώνου, δεν είναι αρκετή για να επιλύσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο. Στην επίλυση ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, συναντάμε δυσκολίες που δεν τις έχουμε στο επίπεδο ορθογώνιο. Να επισημανθεί ότι στο σφαιρικό ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα δεν είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά, και οι γωνίες που είναι διάφορες της ορθής δεν είναι απαραίτητως οξείες. Έτσι, αν από τους παραπάνω τύπους υπολογιστεί το ημίτονο ενός άγνωστου στοιχείου, π.χ. $\eta\mu B = 0,5$, υπάρχουν δύο πιθανές γωνίες από 0° έως 180° : $B = 30^\circ$ ή $B = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Τα παρακάτω θεωρήματα μας λύνουν το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ των δύο αυτών γωνιών.

1^ο Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε γωνία (εκτός της ορθής Α) και η απέναντί της πλευρά ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (δηλ. $B < 90^\circ \Leftrightarrow \beta < 90^\circ$ και $B > 90^\circ \Leftrightarrow \beta > 90^\circ$).

2^ο Θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, μια πλευρά που είναι απέναντι από οξεία γωνία είναι μικρότερη ή ίση της γωνίας, ενώ μια πλευρά που είναι απέναντι από αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη ή ίση της γωνίας.

3^ο Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ:

1) Αν η υποτείνουσα α έχει πέρασ στο 1^ο τεταρτημόριο (δηλ. $\alpha < 90^\circ$), τότε οι πλευρές β, γ έχουν πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο (και οι δύο στο 1^ο ή και οι δύο στο 2^ο) και αντίστροφα.

2) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρασ στο 2^ο τεταρτημόριο (δηλ. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$), τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

8.3.3 Μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο κυκλώνοντας τα γνωστά στοιχεία.

Βήμα 2^ο: Εφαρμόζουμε τους κανόνες Napier, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να πάρουμε 3 σχέσεις, οι οποίες να έχουν μόνο ένα άγνωστο στοιχείο. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχείο που υπολογίστηκε για τον υπολογισμό άλλου στοιχείου.

Βήμα 3^ο: Χρησιμοποιούμε τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων (όπου χρειάζεται).

Βήμα 4^ο: Γράφουμε τον τύπο ελέγχου: εφαρμόζουμε τον κανόνα Napier που συνδέει τα τρία άγνωστα στοιχεία.



Παράδειγμα 8.1

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, $\alpha = 75^\circ$ και $\beta = 46^\circ$.

Λύση

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, που στη θέση τής υποτείνουσας και των δυο γωνιών έχει τα συμπληρωματικά τους στοιχεία (σχ. 8.12).

Εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα Napier, έτσι ώστε η σχέση που θα προκύψει να περιλαμβάνει τα εξής 3 στοιχεία: το ζητούμενο και τα δύο αρχικά δεδομένα. Επομένως:

Υπολογισμός της Γ:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \Gamma) &= \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi 46^\circ}{\varepsilon\varphi 75^\circ} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{1,03553}{3,73205} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma &= 0,27747 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \sigma\upsilon\nu^{-1} 0,27747 = 73,89074$$

Υπολογισμός της Β:

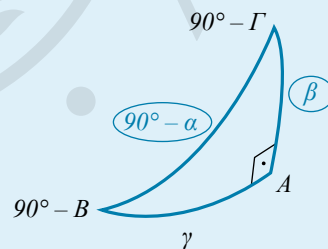
$$\begin{aligned} \eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \eta\mu 46^\circ &= \eta\mu 75^\circ \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\eta\mu 46^\circ}{\eta\mu 75^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{0,71934}{0,96593} = 0,74471 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \eta\mu^{-1} 0,74471 = 48,1342^\circ \text{ ή } \Gamma = 180^\circ - 48,1342^\circ = 131,8658^\circ$$

Έχουμε δύο πιθανές τιμές για την γωνία Β. Σύμφωνα με το 1^ο Θεώρημα τεταρτημορίων, επειδή $\beta = 46^\circ < 90^\circ$, θα πρέπει και $B < 90^\circ$. Άρα η τιμή $131,8658^\circ$ απορρίπτεται και επομένως $B = 48,1342^\circ$.

Υπολογισμός της γ:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \alpha) &= \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^\circ &= \sigma\upsilon\nu 46^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu 75^\circ}{\sigma\upsilon\nu 46^\circ} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{0,25882}{0,69466} = 0,37259 \end{aligned}$$



Σχ. 8.12

$$\text{Άρα } \gamma = \sin^{-1} 0,37259 = 68,12456^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Τύπος ελέγχου: } \eta\mu(90^\circ - \Gamma) &= \sin(90^\circ - B) \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \sin\Gamma = \eta\mu B \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 73,89074 &= \eta\mu 48,1342^\circ \cdot \sin 68,12456^\circ \Leftrightarrow 0,27747 = 0,74471 \cdot 0,37259 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.2

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, $\alpha = 62^\circ$ και $B = 125^\circ$.

Λύση

Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.13 έχουμε:

Υπολογισμός της γ :

$$\eta\mu(90^\circ - B) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \sin B = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow \sin 125^\circ = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi 62^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \sin 125^\circ \cdot \varepsilon\varphi 62^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = (-0,57358) \cdot 1,88073 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = -1,07875$$

$$\varepsilon\varphi^{-1} 1,07875 = 47,16952^\circ. \text{ Άρα } \gamma = 180^\circ - 47,16952^\circ = 132,83048^\circ$$

Υπολογισμός της β :

$$\eta\mu\beta = \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu 62^\circ \cdot \eta\mu 125^\circ \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0,88294 \cdot 0,81915 \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0,72326$$

$$\text{Άρα } \beta = \eta\mu^{-1} 0,72326 = 46,32429^\circ \text{ ή } \beta = 180^\circ - 46,32429^\circ = 133,67571^\circ$$

Σύμφωνα με το 1^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, επειδή $B = 125^\circ > 90^\circ$, θα πρέπει και $\beta > 90^\circ$. Άρα η λύση $\beta = 46,32429^\circ$ απορρίπτεται. Επομένως: $\beta = 133,67571^\circ$

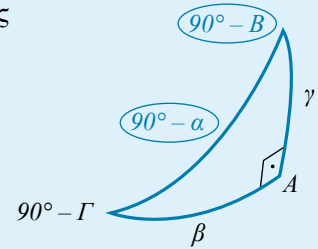
Υπολογισμός της Γ :

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \Leftrightarrow \sigma\eta\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{1}{\sigma\eta\alpha \cdot \varepsilon\varphi B} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{1}{0,46947 \cdot (-1,42815)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = -1,49148$$

$$\varepsilon\varphi^{-1} 1,49148 = 56,15914^\circ. \text{ Άρα } \Gamma = 180^\circ - 56,15914^\circ = 123,84086^\circ$$

$$\text{Τύπος ελέγχου: } \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow 0,72326 = \frac{-1,07875}{-1,49418} \text{ που ισχύει.}$$



Σχ. 8.13

Παρατήρηση

Μικρή απόκλιση στο 5^ο δεκαδικό ψηφίο δικαιολογείται λόγω των στρογγυλοποιήσεων που έχουν γίνει.



Παράδειγμα 8.3

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ και $\Gamma = 75^\circ$.

Λύση:

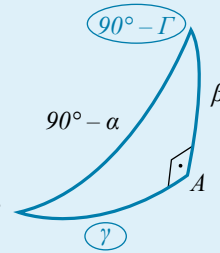
Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.14 έχουμε:

Υπολογισμός της β :

$$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \sigma\varphi\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\varepsilon\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{0,8391}{3,73205} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0,22484$$

$$\text{Άρα } \beta = \eta\mu^{-1} 0,22484 = 12,99347^\circ \text{ ή } \beta = 180^\circ - 12,99347^\circ = 167,00653^\circ$$



Σχ. 8.14

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι γωνία (Γ), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της B :

$$\eta\mu(90^\circ - \Gamma) = \sigma\eta\nu(90^\circ - B) \cdot \sigma\eta\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\eta\nu\Gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\eta\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\eta\nu 75^\circ = \eta\mu B \cdot \sigma\eta\nu 40^\circ \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\sigma\eta\nu 75^\circ}{\sigma\eta\nu 40^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{0,25882}{0,76604} = 0,33786$$

$$\text{Άρα } B = \eta\mu^{-1} 0,33786 = 19,74655^\circ \text{ ή } B = 180^\circ - 19,74655^\circ = 160,25345^\circ$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι πλευρά (β), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της α :

$$\eta\mu\gamma = \sigma\eta\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\eta\nu(90^\circ - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 40^\circ = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu 75^\circ \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{0,64279}{0,96593} = 0,66546$$

$$\text{Άρα } \alpha = \eta\mu^{-1} 0,66546 = 41,71763^\circ \text{ ή } \alpha = 180^\circ - 41,71763^\circ = 138,28237^\circ$$

Για να απορρίψουμε κάποια από τις δύο τιμές σύμφωνα με το 3^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, πρέπει να γνωρίζουμε αν οι πλευρές β , γ ανήκουν στο ίδιο ή σε διαφορετικά τεταρτημόρια. Επειδή για την β πλευρά έχουμε δύο πιθανές τιμές: $12,99347^\circ$ και $167,00653^\circ$, θα χρειαστεί να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 12,99347^\circ$. Τότε, από το 1^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, επειδή $\beta < 90^\circ$, θα είναι και $B < 90^\circ$ και άρα $B = 19,74655^\circ$. Στη συνέχεια, επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (είναι και οι δύο μικρότερες από 90°), σύμφωνα με το 3^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, η υποτείνουσα α θα είναι μικρότερη από 90° , άρα $\alpha = 41,71763^\circ$.

2^η περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 167,00653^\circ$, τότε σύμφωνα με το 1^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων θα είναι $B = 160,25345^\circ$. Για την υποτείνουσα α , σύμφωνα με το 3^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων, ισχύει ότι είναι μεγαλύτερη από 90° επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια ($\beta = 167,00653^\circ > 90^\circ$ και $\gamma = 40^\circ < 90^\circ$). Επομένως: $\alpha = 138,28237^\circ$.

Έτσι έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις:

1^η λύση: $\beta = 12,99347^\circ$, $B = 19,74655^\circ$ και $\alpha = 41,71763^\circ$.

2^η λύση: $\beta = 167,00653^\circ$, $B = 160,25345^\circ$ και $\alpha = 138,28237^\circ$.

Η επαλήθευση με τον τύπο ελέγχου είναι:

$$\eta\mu\beta = \sigma\eta\nu(90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\eta\nu(90^\circ - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$$

1^η λύση: $\eta\mu 12,99347^\circ = \eta\mu 41,71763^\circ \cdot \eta\mu 19,74655^\circ \Leftrightarrow 0,22484 = 0,66546 \cdot 0,33786$, που ισχύει.

2^η λύση: $\eta\mu 167,00653^\circ = \eta\mu 138,28237^\circ \cdot \eta\mu 160,25345^\circ \Leftrightarrow 0,22484 = 0,66546 \cdot 0,33786$, που ισχύει.

Παράδειγμα 8.4

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, $B = 48^\circ$ και $\Gamma = 155^\circ$.

Λύση

Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχ. 8.15.

Υπολογισμός της α :

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - B) \Leftrightarrow$$

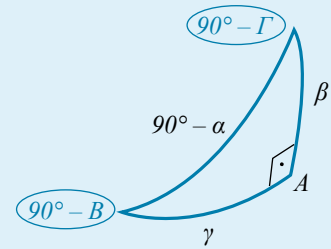
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi \Gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi B} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi 155^\circ} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 48^\circ} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{-0,46631} \cdot \frac{1}{1,11061} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -1,931$$

Αδύνατον, διότι για το συνημίτονο ισχύει: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 1$.

Άρα δεν υπάρχει σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^\circ$, $B = 48^\circ$ και $\Gamma = 155^\circ$.



Σχ. 8.15

8.4 Επίλυση ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, **ορθόπλευρο** ονομάζεται το **σφαιρικό τρίγωνο** που μία πλευρά του έχει μέτρο 90° . Το πολικό τρίγωνο ενός ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, διότι οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού του. Έτσι αν στο ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 90^\circ$, στο πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε: $A' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Επομένως για να επιλύσουμε ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να επιλύσουμε το πολικό του, που είναι ορθογώνιο.



Παράδειγμα 8.5

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\alpha = 90^\circ$, $B = 152^\circ$ και $\Gamma = 50^\circ$.

Λύση

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, για το οποίο ισχύει:

$$A' = 180^\circ - \alpha = 90^\circ, \quad \beta' = 180^\circ - B = 28^\circ \quad \text{και} \quad \gamma' = 180^\circ - \Gamma = 130^\circ$$

Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.16.

Υπολογισμός της α' :

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha') = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\upsilon\nu 28^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 130^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha' = 0,88295 \cdot (-0,64279) = -0,56755$$

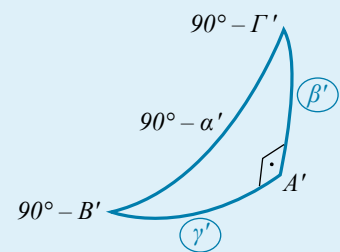
$$\alpha' = \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0,56755) = 124,57956^\circ$$

Υπολογισμός της B' :

$$\eta\mu\gamma' = \varepsilon\varphi(90^\circ - B') \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' = \sigma\varphi B' \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\gamma' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\varepsilon\varphi B'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\eta\mu\gamma'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{0,53171}{0,76604} = 0,6941$$

$$\text{Άρα } B' = \varepsilon\varphi^{-1} 0,6941 = 34,76451^\circ$$



Σχ. 8.16

Υπολογισμός της Γ' :

$$\eta\mu\beta' = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma') \cdot \varepsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \eta\mu\beta' = \sigma\varphi\Gamma' \cdot \varepsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\beta' = \frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\varepsilon\varphi\Gamma'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma' = \frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\eta\mu\beta'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma' = \frac{\varepsilon\varphi 130^\circ}{\eta\mu 28^\circ} = \frac{-1,19175}{0,46947} = -2,5385$$

$$\varepsilon\varphi^{-1} 2,5385 = 68,49886^\circ. \text{ Άρα } \Gamma' = 180^\circ - 68,49886^\circ = 111,50114^\circ$$

Τύπος ελέγχου:

$$\eta\mu(90^\circ - \alpha') = \varepsilon\varphi(90^\circ - \Gamma') \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - B') \Leftrightarrow \sigma\eta\nu\alpha' = \frac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma'} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi B'} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\eta\nu 124,57956^\circ = \frac{1}{\varepsilon\varphi 111,50114^\circ} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 34,76451^\circ} \Leftrightarrow$$

$$-0,56755 = \frac{1}{-2,5385} \cdot \frac{1}{0,6947} \Leftrightarrow -0,56755 = \frac{1}{-1,76197} \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως τα άγνωστα στοιχεία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$A = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 124,57956^\circ = 55,42044^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - B' = 180^\circ - 34,76451^\circ = 145,23549^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \Gamma' = 180^\circ - 111,50114^\circ = 68,49886^\circ$$

8.5 Επίλυση τυχαίου σφαιρικού τριγώνου

Η επίλυση σφαιρικού τριγώνου αφορά στην εύρεση τριών άγνωστων στοιχείων του τριγώνου, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε τις θεμελιώδεις σχέσεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 8.2.3. Υπάρχουν έξι διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το ποια είναι τα τρία γνωστά στοιχεία. Εκτός από τον τρόπο επίλυσης που θα δούμε σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν και άλλοι τρόποι. Ένας από τους τρόπους αυτούς είναι η **μέθοδος των ορθογωνίων τριγώνων**. Κατά τη μέθοδο αυτή, από μια κορυφή του τριγώνου φέρουμε μέγιστο κύκλο κάθετο προς την απέναντι πλευρά, οπότε το αρχικό τρίγωνο διαιρείται σε δύο ορθογώνια, καθένα από τα οποία επιλύεται με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο επίλυσης για κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας τους τύπους της παραγράφου 8.2.3.

1^η περίπτωση: Αν δίνονται **δύο πλευρές** και η **περιεχόμενη γωνία**, π.χ.: β, γ, A .

Αυτή η περίπτωση έχει τις περισσότερες εφαρμογές στη Ναυτιλία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε:

- 1) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε την πλευρά a και μετά
- 2) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε τις γωνίες B, Γ .



Παράδειγμα 8.6

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $A = 50^\circ, \beta = 65^\circ$ και $\gamma = 72^\circ$.

Λύση

Υπολογισμός της a στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.17:

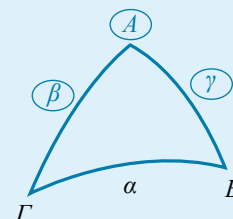
Από Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές έχουμε:

$$\sigma\eta\nu a = \sigma\eta\nu\beta \cdot \sigma\eta\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\eta\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\eta\nu a = \sigma\eta\nu 65^\circ \cdot \sigma\eta\nu 72^\circ + \eta\mu 65^\circ \cdot \eta\mu 72^\circ \cdot \sigma\eta\nu 50^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sigma\eta\nu a = 0,42262 \cdot 0,30902 + 0,90631 \cdot 0,95106 \cdot 0,64279 = 0,68465$$

$$\text{Άρα } a = \sigma\eta\nu^{-1} 0,685 = 46,764^\circ$$



Σχ. 8.17

Υπολογισμός της B : Εφαρμόζω Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές για τη β :

$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sin B \Leftrightarrow$$

$$\sin\beta - \sin\alpha \cdot \sin\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sin B \Leftrightarrow$$

$$\sin B = \frac{\sin\beta - \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sin 65^\circ - \sin 46,764^\circ \cdot \sin 72^\circ}{\eta\mu 46,764^\circ \cdot \eta\mu 72^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sin B = \frac{0,42262 - 0,685 \cdot 0,30902}{0,72854 \cdot 0,95106} \Leftrightarrow \sin B = \frac{0,21094}{0,69289} = 0,30443$$

$$B = \sin^{-1} 0,30443 = 72,27613^\circ$$

Υπολογισμός της Γ : Ομοίως, από Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, για την πλευρά γ :

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \sin\Gamma \Leftrightarrow \sin\Gamma = \frac{\sin 72^\circ - \sin 46,764^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\eta\mu 46,764^\circ \cdot \eta\mu 65^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sin\Gamma = \frac{0,30902 - 0,685 \cdot 0,42262}{0,72854 \cdot 0,90631} = \frac{0,01953}{0,66028} = 0,02958$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \sin^{-1} 0,02958 = 88,30494^\circ$$

2^η περίπτωση: Αν δίνονται οι **3 πλευρές** του, π.χ.: a, β, γ , τότε χρησιμοποιούμε τρεις φορές Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές.



Παράδειγμα 8.7

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 110^\circ, \beta = 76^\circ, \gamma = 70^\circ$.

Λύση

Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.18 είναι γνωστές οι τρεις πλευρές και αναζητούμε τις 3 γωνίες.

Υπολογισμός της γωνίας A :

Από τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, για την α :

$$\sin\alpha = \sin\beta \cdot \sin\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{\sin\alpha - \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin 110^\circ - \sin 76^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\eta\mu 76^\circ \cdot \eta\mu 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{-0,34202 - 0,24192 \cdot 0,34202}{0,9703 \cdot 0,93969} \sin A = \frac{-0,42476}{0,91178} = -0,46586$$

$$\sin^{-1} (-0,46586) = 117,76589^\circ$$

Υπολογισμός της γωνίας B : Από τον Νόμο Συνημιτόνων (ομοίως):

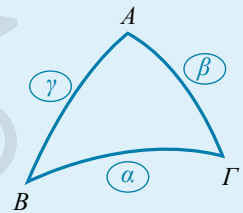
$$\sin B = \frac{\sin\beta - \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\gamma} \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sin 76^\circ - \sin 110^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\eta\mu 110^\circ \cdot \eta\mu 70^\circ} = 0,40644$$

$$\text{Άρα } B = \sin^{-1} 0,40644 = 66,0186^\circ$$

Υπολογισμός της γωνίας Γ :

$$\sin\Gamma = \frac{\sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} \Leftrightarrow \sin\Gamma = \frac{\sin 70^\circ - \sin 110^\circ \cdot \sin 76^\circ}{\eta\mu 110^\circ \cdot \eta\mu 76^\circ} = 0,46586$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \sin^{-1} 0,46586 = 62,23411^\circ$$



Σχ. 8.18

3^η περίπτωση: Αν δίνονται οι **3 γωνίες** του, π.χ.: A, B, Γ , τότε χρησιμοποιούμε τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες.



Παράδειγμα 8.8

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν δίνονται οι γωνίες του:
 $A = 106^\circ, B = 79^\circ, \Gamma = 62^\circ$.

Λύση

Υπολογισμός της a : Στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.19 εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για τη γωνία A :

$$\sin A = -\sin B \cdot \sin \Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sin a \Leftrightarrow$$

$$\sin a = \frac{\sin A + \sin B \cdot \sin \Gamma}{\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \sin a = \frac{\sin 106^\circ + \sin 79^\circ \cdot \sin 62^\circ}{\eta\mu 79^\circ \cdot \eta\mu 62^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sin a = \frac{-0,27564 + 0,19081 \cdot 0,46947}{0,72854 \cdot 0,90631} \Leftrightarrow \sin a = \frac{-0,18606}{0,86673} = -0,21467$$

$$\text{Άρα } a = \sin^{-1}(-0,21467) = 102,39617^\circ$$

Υπολογισμός της β : Ομοίως από Νόμο Συνημιτόνων για την B :

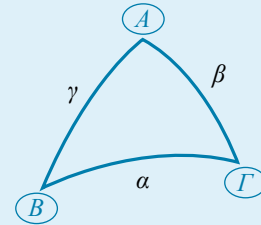
$$\sin \beta = \frac{\sin B + \sin A \cdot \sin \Gamma}{\eta\mu A \cdot \eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sin 79^\circ + \sin 106^\circ \cdot \sin 62^\circ}{\eta\mu 106^\circ \cdot \eta\mu 62^\circ} = 0,07235$$

$$\text{Άρα: } \beta = \sin^{-1} 0,07235 = 85,85103^\circ$$

Υπολογισμός της γ :

$$\sin \gamma = \frac{\sin \Gamma + \sin A \cdot \sin B}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{\sin 62^\circ + \sin 106^\circ \cdot \sin 79^\circ}{\eta\mu 106^\circ \cdot \eta\mu 79^\circ} = 0,44179$$

$$\text{Άρα } \gamma = \sin^{-1} 0,44179 = 63,78185^\circ$$



Σχ. 8.19

4^η περίπτωση: Αν δίνονται *μία πλευρά* και οι *δύο προσκείμενες γωνίες* του, π.χ.: a, B, Γ , τότε χρησιμοποιούμε:

- 1) Τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για να βρούμε την απέναντι γωνία A .
- 2) Τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για να βρούμε τις β, γ .



Παράδειγμα 8.9

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 71,94^\circ, B = 24,7^\circ$ και $\Gamma = 50,44^\circ$.

Λύση

Υπολογισμός της γωνίας A : Από τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.20 έχουμε:

$$\sin A = -\sin B \cdot \sin \Gamma + \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sin a \Leftrightarrow$$

$$\sin A = -\sin 24,7^\circ \cdot \sin 50,44^\circ + \eta\mu 24,7^\circ \cdot \eta\mu 50,44^\circ \cdot \sin 71,94^\circ$$

$$\sin A = -0,90851 \cdot 0,63689 + 0,41787 \cdot 0,77096 \cdot 0,31001 \Leftrightarrow$$

$$\sin A = -0,47875$$

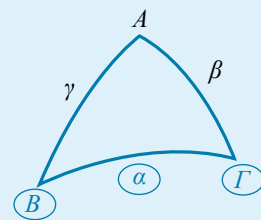
$$\text{Άρα } A = \sin^{-1}(-0,47875) = 118,60379^\circ$$

Υπολογισμός της πλευράς β : Από τον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες για τη Γ :

$$\sin \beta = -\sin A \cdot \sin \Gamma + \eta\mu A \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sin \beta \Leftrightarrow$$

$$\sin \beta = \frac{\sin B + \sin A \cdot \sin \Gamma}{\eta\mu A \cdot \eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{0,90851 - 0,47875 \cdot 0,63689}{0,87795 \cdot 0,77096} \Leftrightarrow$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,89176 = 26,90475^\circ$$



Σχ. 8.20

Για την πλευρά γ :

$$\sin \Gamma = -\sin A \cdot \sin B + \eta \mu A \cdot \eta \mu B \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \Gamma + \sin A \cdot \sin B}{\eta \mu A \cdot \eta \mu B} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{0,63689 - 0,47875 \cdot 0,90851}{0,87795 \cdot 0,41787} = 0,55044$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \gamma = \sin^{-1} 0,55044 = 56,6028^\circ$$

5^η περίπτωση: Αν δίνονται δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες, π.χ: α, γ, A , τότε χρησιμοποιούμε:

- 1) Νόμο Ημιτόνων για τη γωνία Γ .
- 2) Αναλογικούς τύπους Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.



Παράδειγμα 8.10

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $A = 30^\circ$, $\alpha = 40^\circ$ και $\gamma = 100^\circ$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ημιτόνων στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.21 για να βρούμε τη γωνία Γ :

$$\frac{\eta \mu A}{\eta \mu \alpha} = \frac{\eta \mu \Gamma}{\eta \mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta \mu 30^\circ}{\eta \mu 40^\circ} = \frac{\eta \mu \Gamma}{\eta \mu 100^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{0,5}{0,64279} = \frac{\eta \mu \Gamma}{0,98481} \Leftrightarrow \eta \mu \Gamma = \frac{0,5 \cdot 0,98481}{0,64279} = 0,76604$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \Gamma = \eta \mu^{-1} 0,76604 \simeq 50^\circ \text{ ή } \Gamma \simeq 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

Επειδή $\gamma > \alpha$, θα πρέπει να είναι και $\Gamma > A$, που ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις. Άρα δεκτές και οι δύο. Επομένως θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Συνεχίζουμε με Αναλογικούς Τύπους Napier:

1^η περίπτωση: Αν $\Gamma = 50^\circ$

$$\varepsilon \varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon \varphi \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A + \Gamma}{2}}{\sin \frac{A - \Gamma}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon \varphi \frac{40^\circ + 100^\circ}{2} \cdot \frac{\sin \frac{30^\circ + 50^\circ}{2}}{\sin \frac{30^\circ - 50^\circ}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon \varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon \varphi 70^\circ \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin(-10^\circ)} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \frac{\beta}{2} = 2,74748 \cdot \frac{0,76604}{0,98481} = 2,13714$$

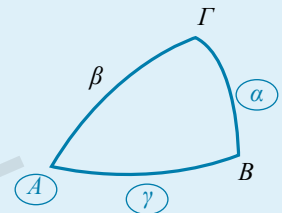
$$\acute{\alpha}\rho\alpha \frac{\beta}{2} = \varepsilon \varphi^{-1} 2,13714 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = 64,9244 \Leftrightarrow \beta = 129,8488$$

$$\varepsilon \varphi \frac{B}{2} = \sigma \varphi \frac{A + \Gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \frac{B}{2} = \sigma \varphi \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} \cdot \frac{\sin \frac{40^\circ - 100^\circ}{2}}{\sin \frac{40^\circ + 100^\circ}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon \varphi \frac{B}{2} = \sigma \varphi 40^\circ \cdot \frac{\sin(-30^\circ)}{\sin 70^\circ} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \frac{B}{2} = \frac{1}{\varepsilon \varphi 40^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon \varphi \frac{B}{2} = \frac{0,86602}{0,8391 \cdot 0,34202} = 3,01761$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \frac{B}{2} = \varepsilon \varphi^{-1} 3,01761 = 71,66542^\circ \Leftrightarrow B = 143,33084^\circ.$$



Σχ. 8.21

2^η περίπτωση: $\Gamma = 130^\circ$

$$\varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{A + \Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A - \Gamma}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 80^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-50^\circ)} = \dots = 0,74223$$

$$\frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi^{-1} 0,74223 = 36,58391^\circ \Leftrightarrow \beta = 73,16782^\circ$$

$$\kappa' \varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sigma\varphi \frac{A + \Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha + \gamma}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 80^\circ} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(-30^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} = 0,44648$$

$$\frac{B}{2} = \varepsilon\varphi^{-1} 0,44648 = 24,05960^\circ \Leftrightarrow B = 48,11920^\circ$$

Άρα 2 λύσεις: α) $\Gamma = 50^\circ$, $\beta = 129,8488^\circ$, $B = 143,33084^\circ$

β) $\Gamma = 130^\circ$, $\beta = 73,16782^\circ$, $B = 48,11920^\circ$

6^η περίπτωση: Αν δίνονται δύο γωνίες και μία από τις απέναντι πλευρές, π.χ.: α , A , Γ , τότε χρησιμοποιούμε:

- 1) Τον Νόμο Ημιτόνων για γωνίες για τον υπολογισμό της πλευράς γ .
- 2) Τους αναλογικούς τύπους Napier για τα άλλα δύο στοιχεία.



Παράδειγμα 8.11

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $A = 86^\circ$, $\alpha = 24^\circ$ και $\Gamma = 14^\circ$.

Λύση

Από τον Νόμο Ημιτόνων στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.22 έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu 86^\circ}{\eta\mu 24^\circ} = \frac{\eta\mu 14^\circ}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{0,99756}{0,40674} = \frac{0,24182}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu \gamma = 0,0986$$

Άρα $\gamma = \eta\mu^{-1} 0,0986 = 5,65856^\circ$ ή $\gamma = 180^\circ - 5,65856^\circ = 174,34144^\circ$

Η τιμή $174,34144^\circ$ απορρίπτεται διότι $\Gamma < A$, άρα και $\gamma < \alpha$. Άρα $\gamma = 5,65856^\circ$

Αναλογικοί τύποι Napier:

$$\varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{A + \Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A - \Gamma}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi \frac{24^\circ + 5,65856^\circ}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{86^\circ + 14^\circ}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{86^\circ - 14^\circ}{2}} \Leftrightarrow$$

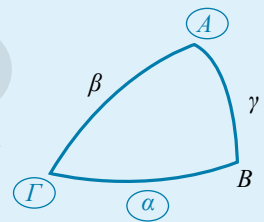
$$\varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi 14,784 \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu 36^\circ} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\beta}{2} = 0,26476 \cdot \frac{0,64279}{0,80902} = 0,21036$$

$$\text{Άρα } \frac{\beta}{2} = \varepsilon\varphi^{-1} 0,21036 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = 11,87953^\circ \Leftrightarrow \beta = 23,75906^\circ$$

$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sigma\varphi \frac{A + \Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha + \gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sigma\varphi 50^\circ \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 9,17072}{\sigma\upsilon\nu 14,82928^\circ} = \frac{1}{\varepsilon\varphi 50^\circ} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 9,17072}{\sigma\upsilon\nu 14,82928^\circ} = 0,85692$$

$$\text{Άρα } \frac{B}{2} = \varepsilon\varphi^{-1} 0,85692 \Leftrightarrow \frac{B}{2} = 40,59393^\circ \Leftrightarrow B = 81,18787^\circ$$



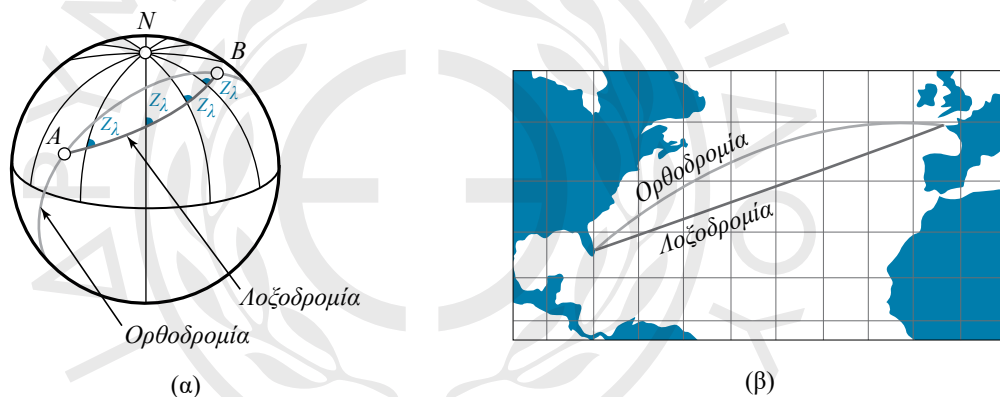
Σχ. 8.22

8.6 Εφαρμογές σφαιρικής τριγωνομετρίας στη Ναυτιλία και την Αστρονομία

Η σφαιρική τριγωνομετρία έχει εφαρμογές σε σημαντικά προβλήματα της Ναυτιλίας. Δύο πολύ σημαντικά σφαιρικά τρίγωνα είναι το τρίγωνο ορθοδρομίας και το τρίγωνο θέσης. Το **τρίγωνο ορθοδρομίας** είναι σφαιρικό τρίγωνο της γήινης σφαίρας, και η σημαντικότερη εφαρμογή του είναι ο υπολογισμός της απόστασης που διανύει ένα πλοίο που εκτελεί ορθοδρομία. Το **τρίγωνο θέσης** είναι σφαιρικό τρίγωνο της ουράνιας σφαίρας, με κορυφές το Ζενίθ (Ζ) του παρατηρητή, τον άνω ουράνιο πόλο (Π) και τη θέση ενός αστέρα (Σ). Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές του τριγώνου θέσης είναι ο προσδιορισμός των γεωγραφικών συντεταγμένων της θέσης ενός παρατηρητή.

8.6.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας

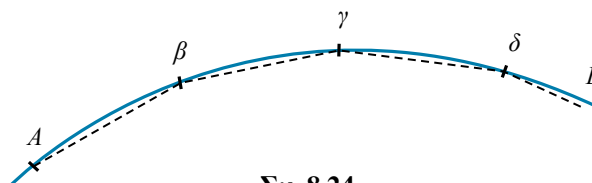
Στην Ναυτιλία, η πλεύση από ένα σημείο αναχώρησης Α προς ένα σημείο προορισμού Β μπορεί να γίνει είτε με λοξοδρομία, είτε με ορθοδρομία, είτε με συνδυασμό αυτών των δύο πλεύσεων (μεικτός ή σύνθετος πλους). Ήδη, στο κεφάλαιο 5, έχουμε μελετήσει την λοξοδρομική πλεύση. Είδαμε ότι κατά την λοξοδρομία, το πλοίο διατηρεί σταθερή πορεία, η οποία τέμνει τους μεσημβρινούς υπό την ίδια γωνία [σχ. 8.23(α)]. Επειδή όμως το πλοίο κινείται σε μικρό κύκλο (εκτός αν η λοξοδρομία είναι πάνω σε μεσημβρινό ή τον ισημερινό), δεν διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση.



Σχ. 8.23

(α) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στη σφαίρα
(β) Απεικόνιση λοξοδρομίας και ορθοδρομίας στον μερκατορικό χάρτη

Ορθοδρομία ή **ορθοδρομικό τόξο** ονομάζεται το μικρότερο από 180° τόξο μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο τόπους. Ανάμεσα σε δύο τόπους υπάρχουν άπειρα τόξα που τους συνδέουν. Το μικρότερο τόξο που τους ενώνει είναι το τόξο που ανήκει σε μέγιστο κύκλο, δηλαδή το ορθοδρομικό τόξο. Η πλεύση ενός πλοίου που κινείται πάνω σε μέγιστο κύκλο, ονομάζεται **ορθοδρομική πλεύση**. Δηλαδή, κατά την ορθοδρομική πλεύση, διανύεται η μικρότερη δυνατή απόσταση για να πάμε από έναν τόπο σε έναν άλλον. Το ορθοδρομικό τόξο τέμνει τους μεσημβρινούς υπό διαφορετική γωνία τον καθένα. Αυτό σημαίνει ότι για να κινείται ένα πλοίο πάνω σε ορθοδρομικό τόξο πρέπει να αλλάζει την πορεία του συνεχώς. Αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι ότι το πλοίο κινείται πάνω σε τεθλασμένη γραμμή (σχ. 8.24),



Σχ. 8.24

εγγεγραμμένη στο ορθοδρομικό τόξο, και όσο πιο πολλά είναι τα ευθύγραμμα τμήματα της τεθλασμένης τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η ορθοδρομία.

Στον πίνακα 8.1 συγκρίνονται τα δύο είδη πλεύσης.

Πίνακας 8.1

Λοξοδρομικούς πλους	Ορθοδρομικός πλούς
Πλεύση με σταθερή πορεία	Η πορεία μεταβάλλεται συνεχώς.
Δεν διανύεται η συντομότερη απόσταση.	Είναι η συντομότερη απόσταση πλεύσης.
Σπειροειδής καμπύλη που τέμνει όλους τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία.	Τόξο μέγιστου κύκλου που τέμνει τους μεσημβρινούς με διαφορετική γωνία.
Ο υπολογισμός της απόστασης γίνεται με το τρίγωνο πλεύσης , το οποίο είναι ορθογώνιο τρίγωνο της επίπεδης τριγωνομετρίας.	Ο υπολογισμός της απόστασης γίνεται με το τρίγωνο ορθοδρομίας , το οποίο είναι σφαιρικό τρίγωνο.

Παρατήρηση

Όταν η πλεύση είναι πάνω σε μεσημβρινό ή στον ισημερινό, η λοξοδρομία και η ορθοδρομία ταυτίζονται.

8.6.2 Υπολογισμός ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας

Ο υπολογισμός των στοιχείων του ορθοδρομικού πλου γίνεται με την επίλυση του τριγώνου ορθοδρομίας. **Τρίγωνο ορθοδρομίας ΑΠΒ** (σχ. 8.25) ονομάζεται το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές το σημείο αναχώρησης A , το σημείο άφιξης B και τον πόλο Π , που είναι πλησιέστερος στο σημείο αναχώρησης.

Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως στην ορθοδρομική πλεύση είναι ο υπολογισμός της απόστασης σε ν.μ. που διανύει το πλοίο, δηλαδή η **ορθοδρομική απόσταση**, αν είναι γνωστές οι γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου εκκίνησης $A(\varphi_A, \lambda_A)$ και του σημείου άφιξης $B(\varphi_B, \lambda_B)$. Είναι γνωστό ότι:

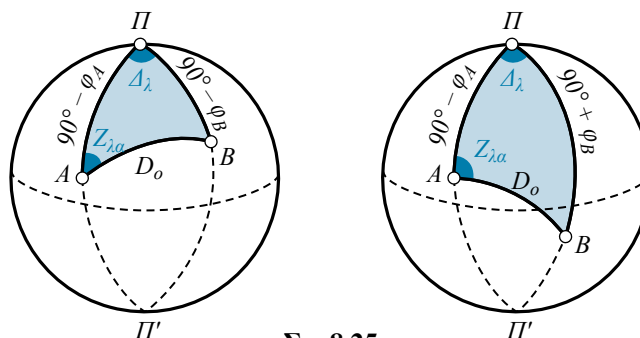
«1 πρώτο λεπτό τόξου μέγιστου κύκλου, έχει μήκος 1 ν.μ.»

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε την πλευρά $AB = D_o$, και να την μετατρέψουμε σε πρώτα λεπτά. Τα στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας είναι:

1) Οι πλευρές $ΠΑ$ και $ΠΒ$ του τριγώνου είναι τόξα των μεσημβρινών των τόπων A και B αντίστοιχα. Ισχύει:

$$ΠΑ = 90^\circ - \varphi_A$$

$$ΠΒ = \begin{cases} 90^\circ - \varphi_B & \text{αν } \varphi_A, \varphi_B \text{ ομώνυμα} \\ 90^\circ + \varphi_B & \text{αν } \varphi_A, \varphi_B \text{ ετερόνυμα} \end{cases}$$



Σχ. 8.25

2) Η γωνία $\widehat{APB}$ συμβολίζεται με $\Delta\lambda$ και ισούται με τη διαφορά μήκους των τόπων A και B .

$$\Delta\lambda = \begin{cases} |\lambda_A - \lambda_B|, & \text{αν } \lambda_A, \lambda_B \text{ ομώνυμα} \\ \lambda_A + \lambda_B & \text{αν } \lambda_A, \lambda_B \text{ ετερόνυμα} \end{cases}$$

3) Η πλευρά AB του τριγώνου, η οποία όπως αναφέραμε, υπολογισμένη σε ν.μ. δίνει την απόσταση D_o του ορθοδρομικού πλου από το A στο B .

4) Η γωνία A είναι η αρχική πλεύση, με την βοήθεια της οποίας υπολογίζεται η **αρχική ορθοδρομική πορεία** $Z_{\lambda\alpha}$.

Ο υπολογισμός της απόστασης D_o που διανύει ένα πλοίο εκτελώντας ορθοδρομία, καθώς και της αρχικής πορείας του, επιτυγχάνεται με την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου PAB , χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τρόπο επίλυσης που μάθαμε στην παράγραφο 8.5. Θα δούμε την επίλυση αυτή μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα.



Πρόβλημα 8.1

Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο $A(\varphi_A = 20^\circ 25' N, \lambda_A = 46^\circ 36' W)$ έως ένα σημείο $B(\varphi_B = 48^\circ 42' N, \lambda_B = 16^\circ 24' W)$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πορεία του πλοίου.

Λύση:

$$PA = 90^\circ - \varphi_A = 90^\circ - 20^\circ 25' = 90^\circ - 20,417^\circ = 69,583^\circ$$

$$PB = 90^\circ - \varphi_B = 90^\circ - 48^\circ 42' = 90^\circ - 48,7^\circ = 41,3^\circ$$

$$\Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_B| = 46^\circ 36' - 16^\circ 24' = 30^\circ 12' = 30,2^\circ$$

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές στο τρίγωνο PAB του σχήματος 8.26:

$$\sin D_o = \sin PA \cdot \sin PB + \eta\mu PA \cdot \eta\mu PB \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow$$

$$\sin D_o = \sin 69,583 \cdot \sin 41,3 + \eta\mu 69,583 \cdot \eta\mu 41,3^\circ \cdot \sin 30,2^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sin D_o = 0,349 \cdot 0,751 + 0,937 \cdot 0,66 \cdot 0,864 \Leftrightarrow \sin D_o = 0,796$$

$$\text{Άρα } D_o = \sin^{-1} 0,796 = 37,25^\circ$$

$$37,25^\circ = (37,25 \cdot 60)' = 2235'. \text{ Άρα } D_o = 2235 \text{ ν.μ.}$$

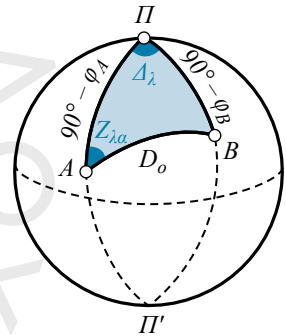
Για να υπολογίσουμε την αρχική ορθοδρομική πορεία $Z_{\lambda\alpha}$, εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για την απέναντι πλευρά της, PB (σχ. 8.26):

$$\sin PB = \sin D_o \cdot \sin PA + \eta\mu D_o \cdot \eta\mu PA \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{\sin PB - \sin D_o \cdot \sin PA}{\eta\mu D_o \cdot \eta\mu PA} \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{0,751 - 0,796 \cdot 0,349}{0,605 \cdot 0,937} = \frac{0,473}{0,567} = 0,834$$

$$\text{Άρα } Z_{\lambda\alpha} = A = \sin^{-1} 0,834 = 33,488^\circ$$



Σχ. 8.26

Πρόβλημα 8.2

Δίνονται οι συντεταγμένες λιμανιού εκκίνησης ενός πλοίου ($\varphi_A = 08^\circ 14' N, \lambda_A = 98^\circ 40' E$) και του λιμανιού άφιξης ($\varphi_B = 7^\circ 27' S, \lambda_B = 68^\circ 30' E$). Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση $D_o = \widehat{AB}$ και η αρχική πορεία.

Λύση

$$A\Pi = 90^\circ - \varphi_B = 90^\circ - 8^\circ 14' = 90^\circ - 8,233 = 81,767^\circ$$

$$\Pi B = 90^\circ + \varphi_B = 90^\circ + 7^\circ 27' = 90^\circ + 7,45 = 97,45^\circ$$

$$\Delta_\lambda = A\Pi B = |\lambda_A - \lambda_B| = 98^\circ 40' - 68^\circ 30' = 98,667 - 68,5 = 30,167^\circ$$

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές στο τρίγωνο $A\Pi B$ του σχήματος 8.27:

$$\sin D_o = \sin(A\Pi) \cdot \sin(\Pi B) + \eta\mu(A\Pi) \cdot \eta\mu(\Pi B) \cdot \sin \Delta_\lambda \Leftrightarrow$$

$$\sin D_o = \sin 81,767 \cdot \sin 97,45^\circ + \eta\mu 81,767^\circ \cdot \eta\mu 97,45^\circ \cdot \sin 30,167^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sin D_o = 0,143 \cdot (-0,13) + 0,99 \cdot 0,992 \cdot 0,865 = 0,8304$$

$$\text{Άρα } D_o = \cos^{-1} 0,8304 = 33,86^\circ$$

$$D_o = (33,86 \cdot 60)' = 2031,6' \text{ ή } D_o = 2031,6 \text{ ν.μ.}$$

Νόμος Συνημιτόνων για την πλευρά ΠB :

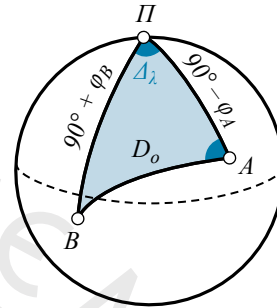
$$\sin \Pi B = \sin D_o \cdot \sin \Pi A + \eta\mu D_o \cdot \eta\mu \Pi A \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin \Pi B - \sin D_o \cdot \sin \Pi A}{\eta\mu D_o \cdot \eta\mu \Pi A} \Leftrightarrow$$

$$\sin Z_{\lambda\alpha} = \frac{0,13 - 0,8304 \cdot 0,143}{0,557 \cdot 0,99} \Leftrightarrow \sin A = \frac{-0,249}{0,551} = -0,452$$

$$A = \sin^{-1}(-0,452) = 116,872^\circ$$

$$\text{Άρα η αρχική πλευση είναι: } Z_{\lambda\alpha} = 360^\circ - 116,872^\circ = 243,128^\circ.$$



Σχ. 8.27

8.6.3 Τύποι υπολογισμού ορθοδρομικής απόστασης και αρχικής πορείας στη Ναυτιλία

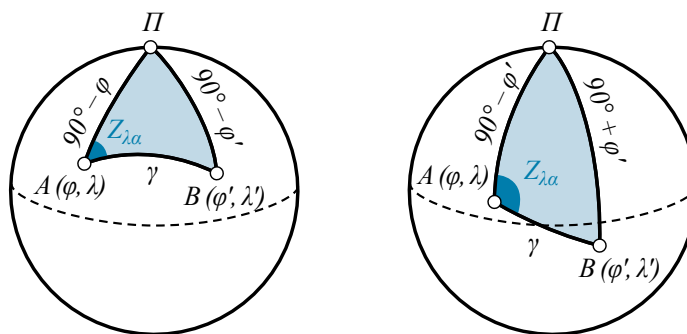
Οι Πλοίαρχοι στη Ναυτιλία υπολογίζουν την ορθοδρομική απόσταση γ μεταξύ ενός σημείου αναχώρησης $A(\varphi, \lambda)$ και ενός σημείου προορισμού $B(\varphi', \lambda')$ με άπευθείας αντικατάσταση στον τύπο:

$$\sin \gamma = \sin \varphi \cdot \sin \varphi' + \sin \Delta \lambda \pm \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \varphi'$$

όπου το «+» ισχύει όταν φ, φ' είναι ομώνυμα και «-» όταν φ, φ' είναι ετερόνυμα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο τύπος αυτός προκύπτει από τον Νόμο Συνημιτόνων.

- Απόδειξη του τύπου

Θεωρούμε το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠAB του σχήματος 8.28, όπου $A(\varphi, \lambda)$ και $B(\varphi', \lambda')$ τα σημεία αναχώρησης και άφιξης αντίστοιχα και Π ο πλησιέστερος πόλος στο A .



Περίπτωση I

Περίπτωση II

Σχ. 8.28

Για τις πλευρές $ΑΠ$ και $ΒΠ$ του τριγώνου ισχύει:

$$ΠΑ = 90^\circ - \varphi \text{ και } ΠΒ = \begin{cases} 90^\circ - \varphi', & \text{αν } \varphi, \varphi' \text{ ομώνυμα} \\ 90^\circ + \varphi', & \text{αν } \varphi, \varphi' \text{ ετερόνυμα} \end{cases}$$

Η γωνία $ΑΠΒ$ είναι ίση με τη διαφορά μήκους $\Delta\lambda$ των σημείων A και B .

Από Νόμο Συνημιτόνων στο $ΑΠΒ$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin AB &= \sin ΠΑ \cdot \sin ΠΒ + \eta\mu ΠΑ \cdot \eta\mu ΠΒ \cdot \sin ΑΠΒ \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \sin ΠΑ \cdot \sin ΠΒ + \eta\mu ΠΑ \cdot \eta\mu ΠΒ \cdot \sin \Delta\lambda \end{aligned}$$

Περίπτωση I: φ, φ' ομώνυμα

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin (90^\circ - \varphi) \cdot \sin (90^\circ - \varphi') + \eta\mu (90^\circ - \varphi) \cdot \eta\mu (90^\circ - \varphi') \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \varphi' + \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \cdot \sin \Delta\lambda + \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \varphi' \end{aligned}$$

Περίπτωση II: φ, φ' ετερόνυμα

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin (90^\circ - \varphi) \cdot \sin (90^\circ + \varphi') + \eta\mu (90^\circ - \varphi) \cdot \eta\mu (90^\circ + \varphi') \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \eta\mu \varphi \cdot \sin (90^\circ - (-\varphi')) + \sin \varphi \cdot \eta\mu (90^\circ - (-\varphi')) \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu (-\varphi') + \sin \varphi \cdot \sin (-\varphi') \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= -\eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \varphi' + \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \cdot \sin \Delta\lambda \Leftrightarrow \\ \sin \gamma &= \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \cdot \sin \Delta\lambda - \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \varphi' \end{aligned}$$

– Τύπος υπολογισμού αρχικής ορθοδρομικής πορείας

Στα παραδείγματα που έχουμε ήδη δει, υπολογίσαμε την αρχική πορεία εφαρμόζοντας στο τρίγωνο ορθοδρομίας Νόμο Συνημιτόνων για την απέναντι πλευρά της. Ας δούμε και έναν ακόμα τύπο υπολογισμού της αρχικής πορείας, ο οποίος αποδεικνύεται μέσω του Νόμου Ημιτόνων. Για την πλευρά από το σημείο A στο σημείο B του σχήματος 8.28 ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$\eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sin \varphi' \cdot \eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma}$$

Απόδειξη

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu ΠΒ} = \frac{\eta\mu Π}{\eta\mu ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu ΠΒ} = \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma}$$

Περίπτωση I: φ, φ' ομώνυμα

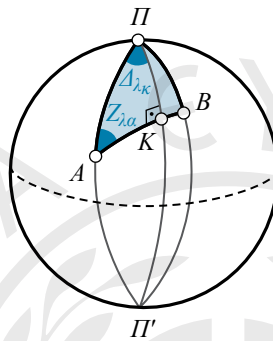
$$\frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu (90^\circ - \varphi')} = \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sin \varphi'} = \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sin \varphi' \cdot \eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma}$$

Περίπτωση II: φ, φ' ετερόνυμα

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu (90^\circ + \varphi')} &= \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\eta\mu (90^\circ - (-\varphi'))} = \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sin (-\varphi')} = \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \\ \frac{\eta\mu Z_{\lambda\alpha}}{\sin \varphi'} &= \frac{\eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu Z_{\lambda\alpha} = \frac{\sin \varphi' \cdot \eta\mu \Delta\lambda}{\eta\mu \gamma} \end{aligned}$$

8.6.4 Κορυφαίο σημείο ορθοδρομίας

Θεωρούμε το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠAB του σχήματος 8.29. Από τον πόλο Π φέρνουμε τον μεσημβρινό που είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο AB , και ο οποίος τέμνει το τόξο αυτό στο σημείο $K(\varphi_*, \lambda_*)$. Το σημείο τομής K λέγεται **κορυφαίο σημείο** (vertex) του ορθοδρομικού τόξου. Το σημείο K δεν ανήκει κατ' ανάγκη στο τόξο AB , αλλά μπορεί να βρίσκεται και στην προέκτασή αυτού. Σε κάθε περίπτωση, το σημείο K απέχει τη μικρότερη απόσταση από τον πόλο και άρα τη μεγαλύτερη από τον ισημερινό. Επομένως, έχει το μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος από όλα τα σημεία του ορθοδρομικού τόξου. Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του κορυφαίου σημείου είναι χρήσιμος στους ναυτικούς για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των ενδιάμεσων σημείων, ώστε να χαράξουν το ορθοδρομικό τόξο.



Σχ. 8.29

Επειδή το τόξο $\Pi K \Pi'$ είναι κάθετο στο τόξο AB , το σφαιρικό τρίγωνο ΠAK είναι ορθογώνιο. Στο ΠAK γνωρίζουμε την πλευρά ΠA (επειδή γνωρίζουμε το γεωγραφικό πλάτος του σημείου αναχώρησης) και την αρχική πορεία (γωνία A του τριγώνου). Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (φ_*, λ_*) , αρκεί στο ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠAK να βρούμε τη πλευρά ΠK και τη γωνία ΠAK , η οποία είναι η διαφορά μήκους $\Delta\lambda_*$ μεταξύ του σημείου αναχώρησης A και του κορυφαίου σημείου K . Δηλαδή ισχύει:

$$\varphi_* = 90^\circ - \Pi K$$

$$\lambda_* = \lambda_A - \Delta\lambda_* \quad \text{ή} \quad \lambda_* = \lambda_A + \Delta\lambda_*$$

Πρόβλημα 8.3

Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο $A(\varphi = 24^\circ N, \lambda = 73^\circ W)$ προς ένα σημείο B εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Αν η αρχική πορεία είναι $N 42^\circ 18' E$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου.

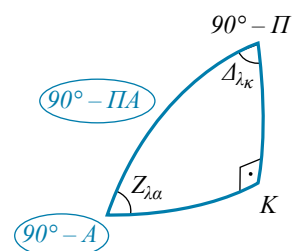
Λύση

Για την εύρεση του κορυφαίου σημείου $K(\varphi_*, \lambda_*)$ θα επιλύσουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠAK ($K = 90^\circ$) του σχήματος 8.29. Έχουμε:

$$\Pi A = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

$$A = 42^\circ 18' = 42,3^\circ$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου της παραγράφου 8.3, για να εφαρμόσουμε τους κανόνες Napier, θα σχηματίσουμε τη διάταξη του σχήματος 8.30.



Σχ. 8.30

Υπολογισμός της πλευράς PK :

$$\begin{aligned}\eta\mu PK &= \sigma\upsilon\nu(90^\circ - A) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - A\Pi) \Leftrightarrow \\ \eta\mu PK &= \eta\mu A \cdot \eta\mu A\Pi \Leftrightarrow \eta\mu PK = \eta\mu 42,3^\circ \cdot \eta\mu 66^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu PK = 0,67301 \cdot 0,91355 = 0,61483\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } PK = \eta\mu^{-1}0,61483 = 37,93957^\circ \text{ ή } PK = 180^\circ - 37,93957^\circ = 142,06043^\circ$$

Επειδή $A = 42,3^\circ < 90^\circ$, σύμφωνα με το 1^ο Θεώρημα Τεταρτημορίων είναι και $PK < 90^\circ$, άρα η λύση $142,06043$ απορρίπτεται.

Υπολογισμός της γωνίας $\Pi = \Delta\lambda$:

$$\begin{aligned}\eta\mu(90^\circ - A\Pi) &= \epsilon\varphi(90^\circ - \Pi) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - A) \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu A\Pi &= \sigma\varphi \Pi \cdot \sigma\varphi A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A\Pi = \frac{1}{\epsilon\varphi \Pi} \cdot \frac{1}{\epsilon\varphi A} \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 66^\circ &= \frac{1}{\epsilon\varphi \Pi} \cdot \frac{1}{\epsilon\varphi 42,3^\circ} \Leftrightarrow \\ \epsilon\varphi \Pi &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 66^\circ} \cdot \frac{1}{\epsilon\varphi 42,3^\circ} \Leftrightarrow \\ \epsilon\varphi \Pi &= \frac{1}{0,40674} \cdot \frac{1}{0,90993} = 2,70194\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Pi = \Delta\lambda = \epsilon\varphi^{-1}2,70194 = 69,69026^\circ$$

Η πλευρά AK δεν ζητείται, αλλά θα την υπολογίσουμε για να κάνουμε την επαλήθευση με τον τύπο ελέγχου.

Υπολογισμός της AK :

$$\begin{aligned}\eta\mu(90^\circ - A) &= \epsilon\varphi(90^\circ - A\Pi) \cdot \epsilon\varphi AK \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu A &= \frac{1}{\epsilon\varphi A\Pi} \cdot \epsilon\varphi AK \Leftrightarrow \epsilon\varphi AK = \sigma\upsilon\nu A \cdot \epsilon\varphi A\Pi \Leftrightarrow \\ \epsilon\varphi AK &= 0,73963 \cdot 2,24604 = 1,66124\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } AK = \epsilon\varphi^{-1}1,66124 = 58,95374^\circ.$$

Τύπος ελέγχου:

$$\begin{aligned}\eta\mu PK &= \epsilon\varphi(90^\circ - \Pi) \cdot \epsilon\varphi AK \Leftrightarrow \\ \eta\mu PK &= \frac{1}{\epsilon\varphi \Pi} \cdot \epsilon\varphi AK \Leftrightarrow \\ 0,61483 &= \frac{1,66124}{2,70194}, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \varphi_{\kappa} = 90^\circ - PK = 90^\circ - 37,93957^\circ = 52,06043^\circ N = 52^\circ 3' 38'' N$$

Επειδή το σημείο αναχώρησης είναι στο δυτικό ημισφαίριο και το πλοίο κινείται δυτικά, για το λ_{κ} ισχύει:

$$\lambda_{\kappa} = \lambda_A - \Delta\lambda_{\kappa} = 73^\circ - 69,69026^\circ = 3,30974^\circ = 3^\circ 18' 35'' W$$

$$\text{Άρα } K (52^\circ 3' 38'' N, 3^\circ 18' 35'' W)$$

8.6.5 Τύποι υπολογισμού συντεταγμένων κορυφαίου σημείου στη Ναυτιλία

Οι Πλοίαρχοι, για την εύρεση του στίγματος του κορυφαίου σημείου, εφαρμόζουν απευθείας τους παρακάτω τύπους:

1) Για το γεωγραφικό πλάτος φ_{κ} :

$$\text{συν}\varphi_{\kappa} = \text{συν}\varphi \cdot \eta\mu Z_{\lambda\alpha}$$

2) Για τη διαφορά μήκους σημείου αναχώρησης και κορυφαίου $\Delta_{\lambda\kappa}$:

$$\sigma\varphi\Delta_{\lambda\kappa} = \eta\mu\varphi \cdot \varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}$$

όπου $A(\varphi, \lambda)$ το σημείο αναχώρησης και $Z_{\lambda\alpha}$ η αρχική πορεία της ορθοδρομικής πλεύσης.

– Απόδειξη των τύπων

Θεωρούμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.31.

Για την πλευρά $ΑΠ$ ισχύει: $ΑΠ = 90^\circ - \varphi$

Για την πλευρά $ΠΚ$ ισχύει: $ΠΚ = 90 - \varphi_{\kappa}$

Για την εφαρμογή των Νόμων Napier χρησιμοποιούμε τη διάταξη του σχήματος 8.32.

Από τον 2° Νόμο του Napier έχουμε:

$$\eta\mu ΠΚ = \text{συν}(90^\circ - ΑΠ) \cdot \text{συν}(90^\circ - Α) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu ΠΚ = \eta\mu ΑΠ \cdot \eta\mu Α \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(90^\circ - \varphi_{\kappa}) = \eta\mu(90^\circ - \varphi) \cdot \eta\mu Α \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\varphi_{\kappa} = \text{συν}\varphi \cdot \eta\mu Z_{\lambda\alpha}$$

Από τον 1° Νόμο του Napier έχουμε:

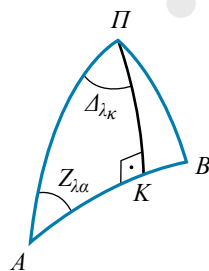
$$\eta\mu(90^\circ - ΑΠ) = \varepsilon\varphi(90^\circ - Α) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - Π) \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}ΑΠ = \sigma\varphi Α \cdot \sigma\varphi Π \Leftrightarrow$$

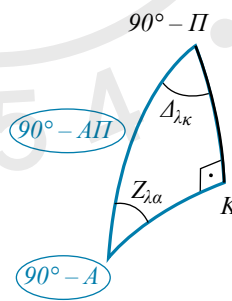
$$\text{συν}(90^\circ - \varphi) = \sigma\varphi Z_{\lambda\alpha} \cdot \sigma\varphi\Delta_{\lambda\kappa} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}} \cdot \sigma\varphi\Delta_{\lambda\kappa} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\varphi\Delta_{\lambda\kappa} = \eta\mu\varphi \cdot \varepsilon\varphi Z_{\lambda\alpha}$$



Σχ. 8.31



Σχ. 8.32

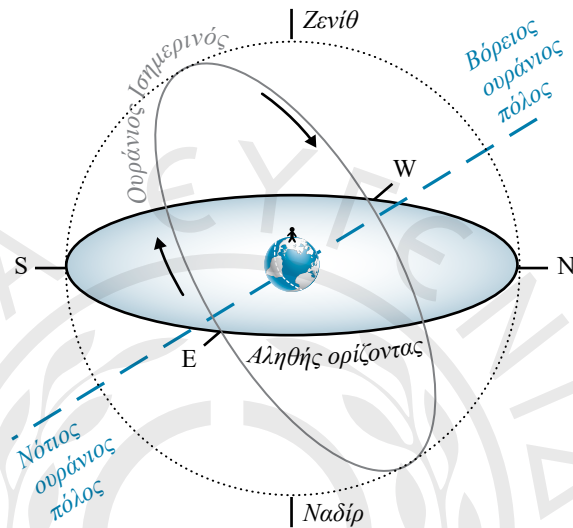
8.6.6 Στοιχεία ουράνιας σφαίρας

Ουράνια σφαίρα ονομάζουμε τη σφαίρα στην οποία βρίσκονται τα άστρα και η οποία έχει κέντρο το κέντρο της γης. Επειδή η ακτίνα της έχει «άπειρο» μήκος, η ακτίνα της γης θεωρείται αμελητέα σε σχέση με αυτήν, και έτσι οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της γης μπορεί να θεωρηθεί κέντρο της ουράνιας σφαίρας. Ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην επιφάνεια της γης βλέπει τα ουράνια σώματα να κινούνται από ανατολή προς δύση.

Κατακόρυφος ενός τόπου T της επιφάνειας της γης ονομάζεται η διεύθυνση της γήινης ακτίνας που διέρχεται από τον τόπο αυτόν. Η προέκταση της κατακορύφου ενός τόπου

προς τα επάνω «τέμνει» την ουράνια σφαίρα σε σημείο Z , που ονομάζεται **Ζενίθ** του τόπου, ενώ η προέκτασή της προς τα κάτω «τέμνει» την ουράνια σφαίρα σε σημείο N , που ονομάζεται **Ναδίρ** του τόπου (σχ. 8.33).

Κάθε επίπεδο κάθετο στον κατακόρυφο ονομάζεται **ορίζοντας**. Ο ορίζοντας που διέρχεται από το κέντρο της γης ονομάζεται **αληθής** ή **ουράνιος ορίζοντας**. Ο ορίζοντας, το επίπεδο του οποίου διέρχεται από τον οφθαλμό του παρατηρητή, ονομάζεται **φαινομενικός ορίζοντας**. Το επίπεδο που εφάπτεται στη γήινη επιφάνεια στο σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής (στίγμα) ονομάζεται **αισθητός ορίζοντας**.



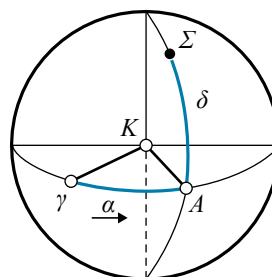
Σχ. 8.33

Άξονας του κόσμου ονομάζεται ο άξονας της γης αν προεκταθεί έως ότου να συναντήσει την ουράνια σφαίρα. Ο άξονας περιστροφής της Γης τέμνει την ουράνια σφαίρα σε δύο σημεία Π και Π' , που ονομάζονται **βόρειος (ουράνιος) πόλος** και **νότιος (ουράνιος) πόλος**.

Ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που είναι κάθετος στον άξονα $\Pi\Pi'$ ονομάζεται **ουράνιος ισημερινός** και το επίπεδό του συμπίπτει με το επίπεδο του γήινου ισημερινού.

Κάθε μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που διέρχεται από τους πόλους λέγεται **ουράνιος μεσημβρινός**. Ο μεσημβρινός που διέρχεται από έναν αστέρα λέγεται **ωριαίος** ή **ωρικός κύκλος** του αστέρα.

Κλίση δ ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η γωνιώδης απόστασή του από τον ουράνιο ισημερινό, δηλαδή το τόξο ΣA του ωρικού κύκλου που περιλαμβάνεται μεταξύ του αστεριού Σ και του ισημερινού (σχ. 8.34). Η συμπληρωματική γωνία $90^\circ - \delta$ ονομάζεται **πολική απόσταση** του αστέρα και μετριέται πάνω στον ωριαίο του αστέρα από τον βόρειο προς τον νότιο πόλο της ουράνιας σφαίρας.



Σχ. 8.34

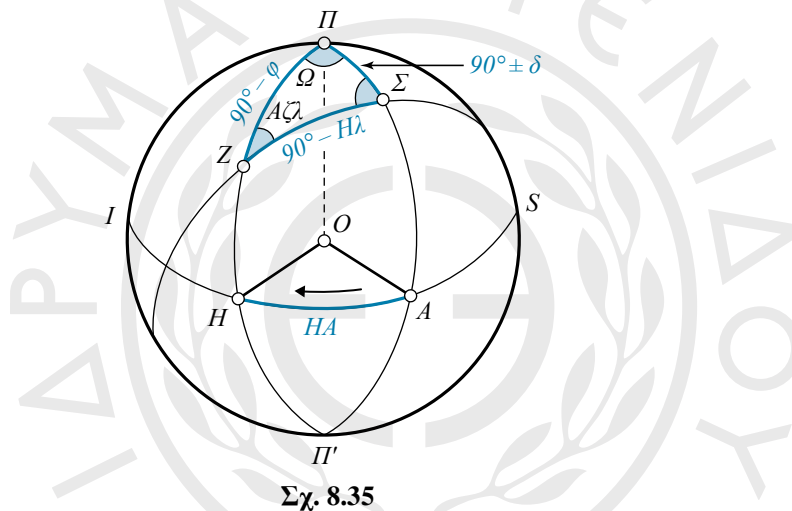
Ορθή αναφορά α ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η διέδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του με τον ωρικό του εαρινού σημείου γ , δηλαδή είναι το τόξο γA του ουράνιου ισημερινού (σχ. 8.34).

Ωρική ή ωριαία γωνία LHA ονομάζεται η διέδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του αστέρα με τον μεσημβρινό του τόπου του παρατηρητή. Το μέτρο της ισούται με το αντίστοιχο μέτρο του τόξου του ισημερινού. Μετρείται με αρχή τον μεσημβρινό προς τον ωρικό κύκλο, προς δυτικά, και κυμαίνεται από 0° έως 360° .

Ύψος ή αληθές ύψος H_λ ενός αστέρα ή ενός σημείου ονομάζεται η γωνιακή απόσταση από τον αληθή ορίζοντα του τόπου του παρατηρητή, δηλαδή το τόξο του κάθετου κύκλου του αστεριού, που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτού και του αληθή ορίζοντα. Μετρείται με αρχή τον ορίζοντα και κυμαίνεται από 0° έως 90° .

8.6.7 Τρίγωνο θέσης

Το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από το ζενίθ του παρατηρητή Z , τον βόρειο ουράνιο πόλο Π και τον αστέρα Σ (σχ. 8.35), ονομάζεται **τρίγωνο θέσης** του αστέρα.



Σχ. 8.35

– Κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσης

Τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσης είναι τα εξής:

1) Η πλευρά ΠZ λέγεται **πολοξενιθιακή απόσταση**, και μετρά την επί του μεσημβρινού απόσταση του τόπου από τον άνω πόλο. Ισχύει:

$$\Pi Z = 90^\circ - \varphi$$

2) Η πλευρά $\Pi \Sigma$ λέγεται **πολική απόσταση**, και μετράει την απόσταση του αστέρα πάνω στον ωρικό κύκλο από τον άνω πόλο. Για την $\Pi \Sigma$ ισχύει:

$$\Pi \Sigma = \begin{cases} 90^\circ - \delta, & \text{αν } \varphi, \delta \text{ ομώνυμα} \\ 90^\circ + \delta, & \text{αν } \varphi, \delta \text{ ετερόνυμα} \end{cases}$$

3) Η πλευρά $Z \Sigma$ λέγεται **ξενιθιακή απόσταση**, και μετρά την απόσταση του αστέρα Σ πάνω στον κάθετο κύκλο από το Ζενίθ. Ισχύει:

$$Z \Sigma = 90^\circ - H_\lambda$$

4) Η γωνία Z λέγεται **αζιμούθ του αστέρα A_λ** .

5) Η γωνία Σ λέγεται **γωνία θέσης του αστέρα**.

6) Η γωνία Ω με κορυφή τον πόλο Π και πλευρές τον μεσημβρινό του τόπου και τον ωρικό κύκλο του αστεριού, είναι η **ωρική γωνία LHA του αστέρα**.



Πρόβλημα 8.4

Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 40^\circ 48'N$. Η κλίση του ήλιου είναι $18^\circ 42'N$ και η $LHA = 100^\circ$. Να βρεθεί το ύψος του ήλιου και το αζιμούθ.

Λύση

$$PZ = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 40^\circ 48' = 90^\circ - 40,8^\circ = 49,2^\circ$$

$$P\Sigma = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 18^\circ 42' = 90^\circ - 18,7^\circ = 71,3^\circ$$

Στο σφαιρικό τρίγωνο $PZ\Sigma$ (σχ. 8.36) γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη τους γωνία. Άρα θα εφαρμόσουμε τον Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές, προκειμένου να βρούμε την πλευρά $Z\Sigma$.

$$\sin Z\Sigma = \sin PZ \cdot \sin P\Sigma + \cos PZ \cdot \cos P\Sigma \cdot \sin LHA \Leftrightarrow$$

$$\sin Z\Sigma = \sin 49,2^\circ \cdot \sin 71,3^\circ + \cos 49,2^\circ \cdot \cos 71,3^\circ \cdot \sin 100^\circ \Leftrightarrow \sin Z\Sigma = 0,08498$$

$$\text{Άρα } Z\Sigma = \sin^{-1} 0,08498 = 85,12513^\circ$$

$$Z\Sigma = 90^\circ - H_\lambda \Leftrightarrow 85,12513^\circ = 90^\circ - H_\lambda \Leftrightarrow H_\lambda = 4,87487^\circ \text{ είναι το ύψος του ήλιου.}$$

Για το αζιμούθ, πάλι από τον Νόμο των Συνημιτόνων για την πλευρά $P\Sigma$ έχουμε:

$$\sin P\Sigma = \sin PZ \cdot \sin Z\Sigma + \cos PZ \cdot \cos Z\Sigma \cdot \sin A_{\zeta\lambda} \Leftrightarrow$$

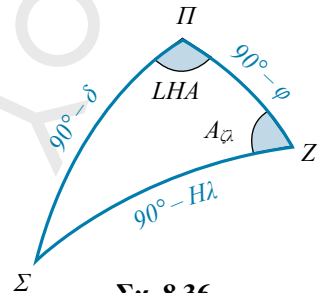
$$\sin A_{\zeta\lambda} = \frac{\sin P\Sigma - \sin PZ \cdot \sin Z\Sigma}{\cos PZ \cdot \cos Z\Sigma} \Leftrightarrow$$

$$\sin A_{\zeta\lambda} = \frac{\sin 71,3^\circ - \sin 49,2^\circ \cdot \sin 85,12513^\circ}{\cos 49,2^\circ \cdot \cos 85,12513^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\sin A_{\zeta\lambda} = 0,35145$$

$$A_{\zeta\lambda} = \sin^{-1} 0,35145 = 69,42397^\circ.$$

$$\text{Τελικά } A_{\zeta\lambda} = N 69,42397^\circ W.$$



Σχ. 8.36

Πρόβλημα 8.5

Να υπολογιστεί η ωρική γωνία LHA ενός αστέρα Σ , του οποίου η κλίση είναι $\delta = 23^\circ 48'N$, σε έναν τόπο πλάτους $\varphi = 48^\circ 18'N$, τη στιγμή που ο αστέρας διέρχεται από τον 1° κάθετο μετά την άνω μεσημβρινή διάβασή του.

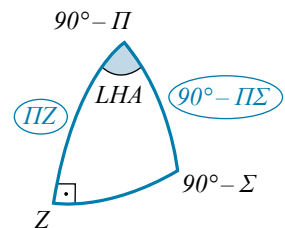
Λύση

Επειδή ο αστέρας βρίσκεται στον 1° κάθετο, το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσης είναι ορθογώνιο με $A_{\zeta\lambda} = 90^\circ$.

$$PZ = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 48^\circ 18' = 90^\circ - 48,3^\circ = 41,7^\circ$$

$$P\Sigma = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 23^\circ 48' = 90^\circ - 23,8^\circ = 66,2^\circ$$

Για την εφαρμογή του κανόνα Napier, σχηματίζουμε τη διάταξη του σχήματος 8.37.



Σχ. 8.37

Από τον 1^ο κανόνα του Napier έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \Pi) &= \varepsilon\varphi\Pi Z \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \Pi\Sigma) \Leftrightarrow \sigma\nu\nu\Pi = \varepsilon\varphi\Pi Z \cdot \sigma\varphi\Pi\Sigma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\nu\nu LHA &= \frac{\varepsilon\varphi\Pi Z}{\varepsilon\varphi\Pi\Sigma} \Leftrightarrow \sigma\nu\nu LHA = \frac{\varepsilon\varphi 41,7^\circ}{\varepsilon\varphi 66,2^\circ} = \frac{0,87543}{2,2673} = 0,38611 \end{aligned}$$

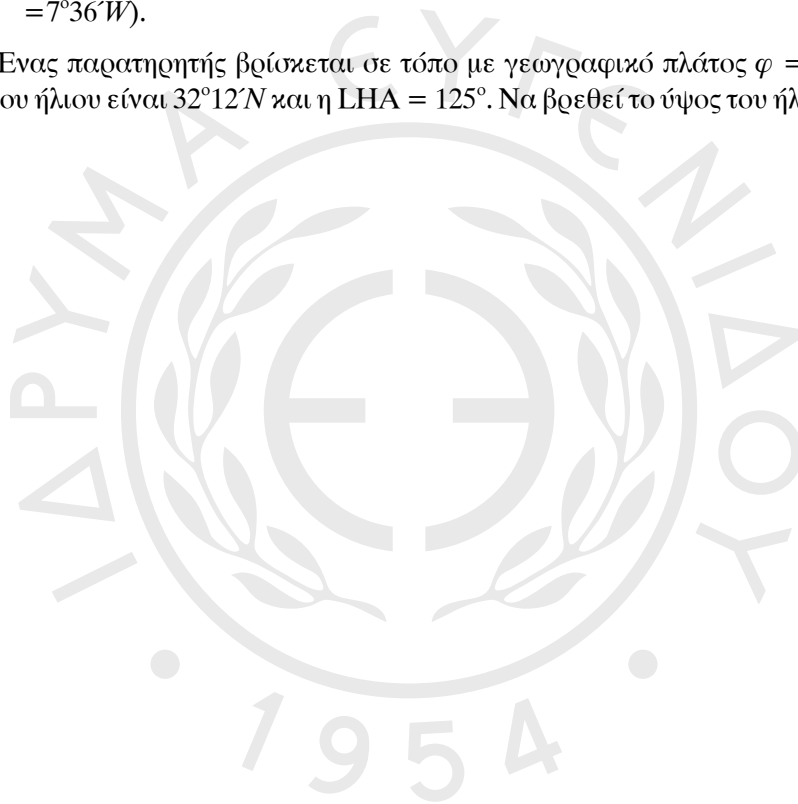
$$\text{Άρα } LHA = \sigma\nu\nu^{-1}0,38611 = 67,28733.$$

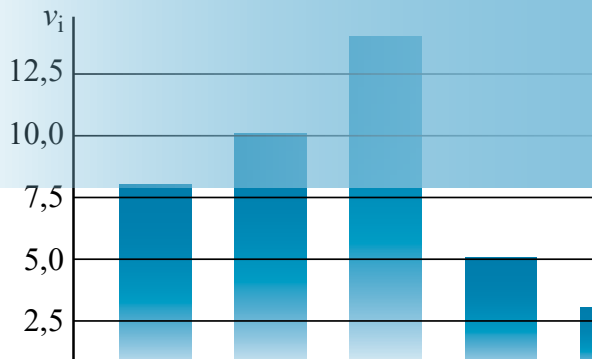
Ασκήσεις

- Δίνεται ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ με $E = 90^\circ$. Να συμπληρωθούν τα κενά:
 α) $\eta\mu\delta = \eta\mu_ \cdot \eta\mu_$
 β) $\eta\mu_ = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi_$
 γ) $\sigma\nu\nu_ = \sigma\nu\nu_ \cdot \eta\mu\Delta$
- Δίνεται ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ με $\Gamma = 90^\circ$. Να συμπληρωθούν τα κενά:
 α) $\eta\mu\varepsilon = \eta\mu_ \cdot \eta\mu_$
 β) $\sigma\nu\nu E = \varepsilon\varphi_ \cdot \sigma\varphi_$
 γ) $\sigma\nu\nu_ = \sigma\nu\nu_ \cdot \eta\mu E$
- Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\alpha = 108^\circ$ και $\beta = 46^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\Gamma = 65^\circ$ και $\beta = 30^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\beta = 110^\circ$ και $\gamma = 34^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\alpha = 105^\circ$ και $\Gamma = 74^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\beta = 54^\circ$ και $B = 82^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 90^\circ$, $B = 132^\circ$ και $\Gamma = 68^\circ$.
- Να επιλυθεί ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 90^\circ$, $B = 148^\circ$ και $\gamma = 115^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $A = 112^\circ$, $B = 84^\circ$ και $\Gamma = 53^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 87^\circ$, $\beta = 106^\circ$ και $\gamma = 66^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 72^\circ$, $B = 26^\circ$ και $\Gamma = 50^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 98^\circ 30'$, $\beta = 44^\circ 24'$ και $\Gamma = 50^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 44^\circ$ και $A = 32^\circ$.
- Να επιλυθεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $A = 76^\circ 30'$, $B = 24^\circ 24'$ και $\alpha = 30^\circ$.
- Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A με $\varphi_A = 38^\circ 24'N$, $\lambda_A = 143^\circ E$ έως ένα σημείο B με $\varphi_B = 58^\circ 42'N$, $\lambda_B = 171^\circ E$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική του απόσταση και η αρχική του πορεία.
- Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A με $\varphi_A = 44^\circ 54'N$, $\lambda_A = 10^\circ 16'W$ έως ένα σημείο B με $\varphi_B = 33^\circ 23'N$, $\lambda_B = 72^\circ 23'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί η ορθοδρομική του απόσταση.
- Ένα πλοίο ξεκινά από σημείο εκκίνησης με $A\varphi_A = 47^\circ 09'N$, $\lambda_A = 33^\circ 48'W$ και κατευθύνεται προς ένα σημείο άφιξης B με $\varphi_B = 21^\circ 46'N$, $\lambda_B = 70^\circ 21'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να βρεθούν η ορθοδρομική απόσταση AB και η αρχική ορθοδρομική του πορεία.
- Ένα πλοίο αναχωρεί από σημείο A με $\varphi_A = 32^\circ 42'N$, $\lambda_A = 140^\circ E$ εκτελώντας ορθοδρο-

μικό πλου με αρχική πλευύση $60^{\circ}30'$. Να βρεθεί το στίγμα του κορυφαίου σημείου της ορθοδρομίας.

- 20.** Ένα πλοίο πλέει από ένα σημείο A με $\varphi_A = 43^{\circ}42'N$, $\lambda_A = 56^{\circ}12'W$ έως ένα σημείο B με $\varphi_B = 39^{\circ}24'N$, $\lambda_B = 28^{\circ}42'W$ εκτελώντας ορθοδρομικό πλου. Να υπολογιστεί:
- Η ορθοδρομική του απόσταση.
 - Η αρχική του πλευύση.
 - Οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου.
- 21.** Να υπολογιστεί η ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των παρακάτω τόπων, καθώς και η αρχική πλευύση του πλοίου:
- Φιλιππίνες ($\varphi_A = 13^{\circ}N$, $\lambda_A = 126^{\circ}E$), Γιοκοχάμα ($\varphi_A = 35^{\circ}26'N$, $\lambda_A = 139^{\circ}38'E$).
 - Γιβραλτάρ ($\varphi_A = 35^{\circ}57'N$, $\lambda_A = 5^{\circ}36'W$), Νέα Υόρκη ($\varphi_B = 40^{\circ}30'N$, $\lambda_B = 74^{\circ}06'E$).
 - Πουέρτο Ρίκο ($\varphi_A = 18^{\circ}45'N$, $\lambda_A = 66^{\circ}12'E$), Καζαμπλάνκα ($\varphi_B = 33^{\circ}37'12''N$, $\lambda_B = 7^{\circ}36'W$).
- 22.** Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 26^{\circ}48'N$. Η κλίση του ήλιου είναι $32^{\circ}12'N$ και η $LHA = 125^{\circ}$. Να βρεθεί το ύψος του ήλιου και το αζιμούθ.





Η ανάλυση στατιστικών ερευνών είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας στις περισσότερες επιστήμες. Η Στατιστική έχει βοηθήσει στην ανάπτυξη των Φυσικών επιστημών (όπως Φυσική, Χημεία, Αστρονομία), της Ιατρικής, των Οικονομικών Επιστημών, αλλά και των Τεχνολογικών (όπως Μηχανολογία, Ναυπηγική). Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- 1) Τον σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.
- 2) Τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους, και
- 3) την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Έχουμε δηλαδή 3 κλάδους στη Στατιστική: Τον *Σχεδιασμό Πειραμάτων*, την *Περιγραφική Στατιστική* που ασχολείται με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και την *Επαγωγική Στατιστική* που έχει ως αντικείμενο την εξαγωγή συμπερασμάτων και την γενίκευση των αποτελεσμάτων σε ολόκληρους πληθυσμούς από συγκεκριμένα δεδομένα που λαμβάνονται από ένα μικρό υποσύνολο αυτών.

10.1 Βασικές έννοιες

Σε μια στατιστική έρευνα μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων στο οποίο αναφέρονται οι παρατηρήσεις μας ονομάζεται **πληθυσμός**. Τα στοιχεία του πληθυσμού ονομάζονται **μονάδες ή άτομα** του πληθυσμού. Η συγκέντρωση δεδομένων από όλες τις μονάδες του πληθυσμού λέγεται **απογραφή**. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας έρευνας αποτελεί η ανά 10ετία απογραφή του πληθυσμού της χώρας μας που διενεργείται από τη Στατιστική Υπηρεσία. Στις περισσότερες έρευνες όμως η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη και σε κάποιες περιπτώσεις αδύνατη. Δύσκολη, κυρίως για οικονομικούς λόγους, αφού ο χρόνος και το κόστος της έρευνας αυξάνεται, καθώς αυξάνονται οι μονάδες του πληθυσμού. Επίσης, αν για παράδειγμα κάποια προϊόντα πρέπει να εξεταστούν για την αντοχή τους που συνίσταται στην εκτίμηση σημείου κάμψης ή του σημείου πέραν του οποίου αστοχούν, μελέτη όλου του πληθυσμού θα σήμαινε καταστροφή του συνόλου της παραγωγής. Στις παραπάνω περιπτώσεις είναι προτιμότερο να μελετήσουμε ένα μέρος – υποσύνολο του πληθυσμού, τα συμπεράσματα από το οποίο μπορούν να γενικευτούν για το σύνολο του πληθυσμού. Το υποσύνολο αυτό του πληθυσμού, ονομάζεται **δείγμα**. Βέβαια, αυτό που πρέπει να προσέξει ένας ερευνητής είναι η επιλογή του κατάλληλου δείγματος, ώστε να είναι «αντιπροσωπευτικό». Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό όταν διαθέτει την ίδια κατανομή χαρακτηριστικών με τον πληθυσμό από τον οποίο προήλθε, ώστε να είναι σωστή η γενίκευση των συμπερασμάτων της έρευνας σε όλον τον πληθυσμό. Για την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος μεγάλο ρόλο παίζει το μέγεθος, καθώς και ο τρόπος επιλογής του. Οι μέθοδοι επιλογής ενός δείγματος, είναι αντικείμενο του κλάδου της Στατιστικής που ονομάζεται **δειγματοληψία**.

Αναφέραμε ήδη, ότι τα άτομα του πληθυσμού εξετάζονται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε έναν πληθυσμό, ονομάζεται **στατιστική μεταβλητή**. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**. Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε στις εξής κατηγορίες (σχ. 10.1):

Είδη μεταβλητών



Σχ. 10.1

1) Σε **ποιοτικές**, των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι για παράδειγμα: το φύλο (άνδρας - γυναίκα) και η οικογενειακή κατάσταση. Διακρίνουμε δύο είδη ανάλογα με το αν υπάρχει η έννοια της διάταξης στις τιμές των μεταβλητών ή όχι. Αν οι τιμές μπορούν να διαταχθούν μιλάμε για **διατάξιμες ποιοτικές μεταβλητές**. Διατάξιμες ποιοτικές μεταβλητές είναι για παράδειγμα το επίπεδο εκπαίδευσης (με τιμές δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο, πανεπιστήμιο), η βαθμίδα των πλοίαρχων (Πλοίαρχος Α΄, Πλοίαρχος Β΄, Πλοίαρχος Γ΄ κ.λπ.). Διαφορετικά, μιλάμε για **μη διατάξιμες ποιοτικές μεταβλητές**, όπως η οικογενειακή κατάσταση ή το χρώμα αυτοκινήτου.

2) Σε **ποσοτικές**, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί. Για παράδειγμα το βάρος του μαθητή, ο αριθμός επιβατών δρομολογίου, η θερμοκρασία πόλεων. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές μεταβλητές και σε συνεχείς. **Διακριτές ποσοτικές μεταβλητές** λέγονται αυτές που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές, συνήθως ακέραιες. Για παράδειγμα ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας. **Συνεχείς** λέγονται οι **ποσοτικές μεταβλητές** που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α , β). Τέτοια είναι για παράδειγμα το ύψος, το μηνιαίο εισόδημα.

10.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

Σκοπός της Περιγραφικής Στατιστικής είναι η παρουσίαση των δεδομένων που καταγράψαμε. Αυτή γίνεται με χρήση:

- 1) Στατιστικών πινάκων.
- 2) Γραφικών παραστάσεων.
- 3) Στατιστικών μέτρων (μέτρα θέσης και διασποράς).

10.2.1 Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

Ένας απλός τρόπος να παρουσιάσουμε τα στοιχεία που συλλέξαμε είναι οι στατιστικοί πίνακες. Τοποθετούμε, δηλαδή, τα στοιχεία μας σε μια ορθογώνια διάταξη, βάζοντας μία τάξη η οποία διευκολύνει την ανάλυσή τους.

Κάθε πίνακας συνήθως περιέχει:

1) **Τίτλο**. Όπου βρίσκεται πάνω από τον πίνακα και δηλώνει το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαστε. Καλό θα είναι να είναι σαφής και σύντομος.

2) **Κύριο σώμα**. Είναι η ορθογώνια διάταξη που περιέχει σε γραμμές και στήλες τα στατιστικά δεδομένα.

3) **Πηγή**. Κάτω από κάθε πίνακα αναγράφεται η πηγή λήψης του στατιστικού υλικού, έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να ανατρέχει σε αυτήν, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Το πλήθος όλων των παρατηρήσεων του δείγματος ονομάζεται **μέγεθος n** του δείγματος.

Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , δείγματος μεγέθους n , ο φυσικός αριθμός n_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα ονομάζεται (**απόλυτη**) **συχνότητα της x_i** . Προφανώς το άθροισμα όλων των απόλυτων συχνοτήτων ισούται με το

μέγεθος του δείγματος, δηλαδή ισχύει:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^k v_i = n$$

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος του δείγματος n , προκύπτει η **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i . Δηλαδή:

$$f_i = \frac{v_i}{n} \quad i = 1, \dots, k$$

Για την σχετική συχνότητα ισχύουν:

$$1) 0 \leq f_i \leq 1$$

$$2) \sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

Οι ποσότητες x_i , v_i , f_i μπορούν να συγκεντρωθούν σε έναν πίνακα, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων**.

Έστω μία διατάξιμη ποιοτική ή διακριτή ποσοτική μεταβλητή που μπορεί να λάβει τις διακεκριμένες τιμές $\{x_1, \dots, x_k\}$ σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συγκεκριμένης τιμής x_i της μεταβλητής, ονομάζεται **αθροιστική συχνότητα** N_i της x_i . Προφανώς ισχύει:

$$N_i = \sum_{j=1}^i v_j = v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συγκεκριμένης τιμής της μεταβλητής, ονομάζεται **σχετική αθροιστική συχνότητα** F_i της x_i .

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

Για την σχετική αθροιστική συχνότητα ισχύουν:

$$1) 0 \leq F_i \leq 1 \text{ για κάθε } i = 1, \dots, k.$$

$$2) F_i = \frac{N_i}{n}$$

Η αθροιστική συχνότητα και η σχετική αθροιστική συχνότητα ορίζονται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές ή για διατάξιμες ποιοτικές.



Παράδειγμα 10.1

Ρωτήθηκαν 40 πρωτοετείς σπουδαστές της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού, σε τι είδους πλοίο θα επιθυμούσαν να ταξιδέψουν και πόσα μαθήματα οφείλουν για επανεξέταση. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 10.1.

α) Να κατασκευαστεί για κάθε μία από τις δύο μεταβλητές πίνακας κατανομής συχνοτήτων, δηλαδή πίνακας που να περιέχει τις συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες.

β) Με τη βοήθεια του πίνακα να απαντηθούν τα ερωτήματα:

- i) Τι ποσοστό σπουδαστών οφείλει 1 μάθημα;
- ii) Πόσοι σπουδαστές οφείλουν το πολύ 3 μαθήματα;
- iii) Τι ποσοστό σπουδαστών οφείλει το πολύ 3 μαθήματα;

Πίνακας 10.1
Στοιχεία σπουδαστών Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού

Σπουδαστής	Κατηγορία πλοίου	Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων	Σπουδαστής	Κατηγορία πλοίου	Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων
1	Δεξαμενόπλοιο	1	21	Containership	0
2	LNG	5	22	Δεξαμενόπλοιο	1
3	Δεξαμενόπλοιο	0	23	Bulk Carrier	5
4	LNG	1	24	LNG	10
5	Containership	1	25	LNG	1
6	Δεξαμενόπλοιο	0	26	Containership	2
7	Δεξαμενόπλοιο	2	27	Bulk Carrier	1
8	LNG	1	28	LNG	1
9	Containership	0	29	Containership	2
10	Bulk Carrier	1	30	LNG	3
11	LNG	5	31	Επιβατικό	5
12	LNG	10	32	Δεξαμενόπλοιο	2
13	Επιβατικό	0	33	LNG	1
14	Bulk Carrier	2	34	Containership	2
15	LNG	1	35	LNG	1
16	Δεξαμενόπλοιο	2	36	Containership	5
17	Containership	1	37	Δεξαμενόπλοιο	3
18	Δεξαμενόπλοιο	3	38	LNG	1
19	LNG	2	39	Bulk Carrier	0
20	Επιβατικό	3	40	Δεξαμενόπλοιο	1

Λύση

α) Πίνακας 10.2 και 10.3

Πίνακας 10.2
Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων

Τιμές x_i		Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	f_i %	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα F_i	F_i %
x_1	0	6	0,15	15,0	6	0,15	15
x_2	1	15	0,375	37,5	21	0,525	52,5
x_3	2	8	0,2	20,0	29	0,725	72,5
x_4	3	4	0,1	10,0	33	0,825	82,5
x_5	5	5	0,125	12,5	38	0,95	95
x_6	10	2	0,05	5,0	40	1	100
	ΣΥΝΟΛΟ	40	1	100,0			

Ενδεικτικά θα περιγράψουμε πώς υπολογίστηκαν τα μεγέθη που αναφέρονται στην τιμή $x_4 = 3$:

Η συχνότητα ν_4 δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή $x_4 = 3$ στο δείγμα. Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα «3» στον πίνακα 10.1, οπότε βρίσκουμε $\nu_4 = 4$.

Για τη σχετική συχνότητα σύμφωνα με τον τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{n}$, αρκεί να διαιρέσουμε τη συχνότητα με το μέγεθος του δείγματος: $f_4 = \frac{\nu_4}{n} = \frac{4}{40} = 0,1$

Για την αθροιστική συχνότητα N_4 ισχύει: $N_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 6 + 15 + 8 + 4 = 33$.

Ενώ η σχετική αθροιστική συχνότητα είναι το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων μέχρι την f_4 . Δηλαδή

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,15 + 0,375 + 0,3 + 0,1 = 0,825.$$

Πίνακας 10.3
Κατηγορία πλοίου

	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	f_i %
Containership	8	0,2	20
Δεξαμενόπλοιο	10	0,25	25
LNG	14	0,35	35
Bulk Carrier	5	0,12	12
Επιβατικό	3	0,075	7,5
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	100,0

β) i) f_1 % = 37,5%

ii) $N_4 = 33$

iii) F_4 % = 82,5%

Παρατήρηση

Επειδή η μεταβλητή Κατηγορία Πλοίου είναι ποιοτική, δεν βάλαμε στον πίνακα τα μεγέθη αθροιστική συχνότητα N_i και σχετική αθροιστική συχνότητα F_i , διότι δεν ορίζονται για ποιοτικές μη διατάξιμες μεταβλητές.

Παράδειγμα 10.2

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας (πίν. 10.4):

Πίνακας 10.4

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
1				0,04
2	18			
3				0,5
4	10	0,2		
5	5			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

Λύση

Ξεκινάμε υπολογίζοντας το μέγεθος n του δείγματος. Για την τιμή x_4 , γνωρίζουμε τη συχνότητα της $v_4 = 10$ και τη σχετική συχνότητα $f_4 = 0,2$. Επομένως από τη σχέση $f_4 = \frac{v_4}{n}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το n .

$$f_4 = \frac{v_4}{n} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{10}{n} \Leftrightarrow n = \frac{10}{0,2} \Leftrightarrow n = 50$$

Για την $x_1 = 1$ (1^η γραμμή) ισχύει: $f_1 = F_1 = 0,04$.

Από τη σχέση $f_1 = \frac{v_1}{n}$ μπορεί να υπολογιστεί η συχνότητα v_1 , αφού τα f_1 και n είναι γνωστά:

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Leftrightarrow 0,04 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 0,04 \cdot 50 = 2$$

$$N_1 = v_1 = 2$$

Για την $x_2 = 2$ (2^η γραμμή) ισχύει:

$$f_2 = \frac{v_2}{n} = \frac{18}{50} = 0,36.$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 2 + 18 = 20$$

και

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,04 + 0,36 = 0,4$$

Για την $x_3 = 3$ (3^η γραμμή) έχουμε:

$$F_3 = F_2 + f_3 \Leftrightarrow 0,5 = 0,4 + f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,1$$

Οπότε:

$$f_3 = \frac{v_3}{n} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 0,1 \cdot 50 = 5$$

και

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 18 + 5 = 25$$

Για την $x_4 = 4$ (4^η γραμμή):

$$N_4 = N_3 + v_4 = 25 + 10 = 35$$

και

$$F_4 = F_3 + f_4 = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

Για την $x_5 = 5$ (5^η γραμμή):

$$f_5 = \frac{v_5}{n} = \frac{5}{50} = 0,1$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 35 + 5 = 40 \quad \text{και} \quad F_5 = F_4 + f_5 = 0,7 + 0,1 = 0,8$$

Η συχνότητα της x_5 υπολογίζεται ως εξής:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = n \Leftrightarrow 40 + v_6 = 50 \Leftrightarrow v_6 = 10$$

Οπότε εύκολα υπολογίζεται όλη η γραμμή του πίνακα:

$$f_6 = \frac{v_6}{n} = \frac{10}{50} = 0,2, \quad N_6 = N_5 + v_6 = 40 + 10 = 50 \quad \text{και} \quad F_6 = F_5 + f_6 = 0,8 + 0,2 = 1.$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,04	2	0,04
2	18	0,36	20	0,4
3	5	0,1	25	0,5
4	10	0,2	35	0,7
5	5	0,1	40	0,8
6	10	0,2	50	1
ΣΥΝΟΛΟ	50	1		

– Πίνακες συνάφειας

Οι πίνακες που κατασκευάσαμε μέχρι τώρα, παρουσίαζαν δεδομένα για μία μόνο μεταβλητή, είτε ποσοτική (αριθμός μαθημάτων) είτε ποιοτική (κατηγορία πλοίου). Πολλές φορές, μας ενδιαφέρει η σύγκριση δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Όταν οι υπό μελέτη μεταβλητές είναι δύο, τότε μας ενδιαφέρει η ύπαρξη σχέσης μεταξύ τους. Μια πρώτη εικόνα για την ύπαρξη σχέσης μεταξύ **δύο ποιοτικών** μεταβλητών δίνει ο **πίνακας συνάφειας** ή αλλιώς **πίνακας διπλής εισόδου**. Ο πίνακας συνάφειας στις γραμμές του περιέχει τις τιμές της μιας ποιοτικής μεταβλητής και στις στήλες του τις τιμές της άλλης, ενώ στο εσωτερικό του, κάθε κελί περιέχει τις συχνότητες (ή σχετικές συχνότητες) εμφάνισης ταυτόχρονα των τιμών των δύο μεταβλητών που αντιστοιχούν σε αυτό το κελί. Ο πίνακας συνάφειας 10.5 δείχνει τη σχέση των ποιοτικών μεταβλητών φύλο και κάπνισμα.

Πίνακας 10.5

Πίνακας συνάφειας συχνοτήτων φύλου – καπνίσματος

		Καπνιστής			Σύνολο
		Καπνιστής	Περιστασιακός καπνιστής	Μη καπνιστής	
Φύλο	Άνδρες	56	4	28	88
	Γυναίκες	52	16	44	112
ΣΥΝΟΛΟ		108	20	72	200

Μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση φύλου – καπνίσματος αν ο πίνακας συνάφειας περιέχει τα ποσοστά – σχετικές συχνότητες αντί τις συχνότητες. Ο αντίστοιχος πίνακας συνάφειας του πίνακα 10.5 με ποσοστά είναι ο πίνακας 10.6.

Πίνακας 10.6

Πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων φύλου – καπνίσματος

		Καπνιστής			Σύνολο
		Καπνιστής	Περιστασιακός καπνιστής	Μη καπνιστής	
Φύλο	Άνδρες	28%	2%	14%	44%
	Γυναίκες	26%	8%	22%	56%
ΣΥΝΟΛΟ		54%	10%	36%	100%

10.2.2 Ομαδοποίηση δεδομένων

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μεγάλο δημιουργούνται δυσχέρειες στη συλλογή πληροφοριών. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της, αλλά συμβαίνει και στην περίπτωση διακριτών μεταβλητών. Αν για παράδειγμα ρωτήσουμε το μηνιαίο εισόδημα 30 επιβατών, ενδεχομένως να έχουμε 30 διαφορετικές μεταξύ τους απαντήσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων που έχουμε δει μέχρι τώρα δεν θα μας παρείχε καμία σημαντική πληροφορία, αφού όλες οι τιμές θα είχαν συχνότητα 1. Σε περιπτώσεις όπως κι αυτή θα πρέπει να ομαδοποιηθούν τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων (διαστημάτων), που ονομάζονται και **κλάσεις**, έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων**.

Είναι φανερό ότι μικρό πλήθος κλάσεων σημαίνει και μεγάλη απώλεια πληροφορίας από τα αρχικά (πρωτογενή) δεδομένα. Μεγάλο πλήθος (άνω των είκοσι) κλάσεων δεν συνηθίζεται γιατί έχει δυσκολία στους υπολογισμούς. Η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης ονομάζεται **πλάτος της κλάσης**. Όσον αφορά στο πλάτος των κλάσεων θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι το ίδιο σε όλες τις κλάσεις. Τις περισσότερες φορές όμως είναι πιο χρήσιμο να έχουμε ίδιο πλάτος, αφού έτσι υπολογίζονται μέτρα θέσης και διασποράς με μεγαλύτερη ευκολία.

Το ημίαθροισμα των δυο άκρων μιας κλάσης μας δίνει την **κεντρική τιμή** η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μέτρων θέσεως και διασποράς που θα δούμε πιο κάτω. Η κεντρική τιμή της i κλάσης συμβολίζεται x_i . Οι κλάσεις που θα ασχοληθούμε θα έχουν τη μορφή $[,)$. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη διαδικασία κατασκευής κλάσεων **ίσου πλάτους**.

Κατά τη διαδικασία της ομαδοποίησης δεδομένων ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Επιλέγουμε το πλήθος των κλάσεων, στις οποίες θα ενταχθούν τα δεδομένα. Το πλήθος αυτό ορίζεται συνήθως αυθαίρετα από τον ερευνητή, σύμφωνα με την πείρα του και την κατά περίπτωση εικόνα της κατανομής των παρατηρήσεων. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ενδεικτικά ο πίνακας 10.7.

2) Βρίσκουμε το εύρος (τη διαφορά μεταξύ μεγαλύτερης x_{max} και μικρότερης x_{min} παρατήρησης)

$$R = x_{max} - x_{min}$$

3) Διαιρούμε το R με το πλήθος των κλάσεων που επιθυμούμε να έχουμε και βρίσκουμε το πλάτος c κάθε κλάσης.

$$c = \frac{R}{k}$$

Εαν χρειαστεί να στρογγυλοποιήσουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης σε ακέραιο, η στρογγυλοποίηση πρέπει να γίνεται **μόνο προς τα πάνω**.

4) Εντάσσουμε κάθε παρατήρηση στην κλάση που ανήκει (συχνότητες των κλάσεων).

Πίνακας 10.7

Μέγεθος δείγματος n	Αριθμός κλάσεων k
< 20	5
20 – 50	6
50 – 100	7
100 – 200	8
200 – 500	9
> 500	10



Παράδειγμα 10.3

Στον πίνακα 10.8 φαίνεται ο χρόνος παραμονής σε λεπτά στο λιμάνι της Σαντορίνης 40 επιβατικών πλοίων. Να κατασκευαστεί πίνακας με 6 κλάσεις που περιέχει τις $\nu_i, f_i \%, N_i, F_i \%$.

Πίνακας 10.8
Χρόνος παραμονής στο λιμάνι σε λεπτά

11	17	30	32	16	27	25	39
12	23	29	33	19	26	23	37
15	25	29	36	20	25	26	35
17	22	27	38	18	28	29	33
18	25	24	40	21	30	31	32

Λύση

Το εύρος των παρατηρήσεων είναι: $40 - 11 = 29$. Το πλάτος των κλάσεων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$c = \frac{R}{k} = \frac{29}{6} = 4,83 \approx 5$$

(στρογγυλοποιούμε προς τα επάνω). Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων που θα προκύψει είναι (πίν. 10.9):

Πίνακας 10.9
Ομαδοποιημένοι χρόνοι από τα πρωτογενή δεδομένα του πίνακα 10.8

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές	Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Σχετική συχνότητα ποσοστό	Αθροιστι- κή συχνό- τητα	Αθροιστική Σχετική συχνότητα	Αθρ. Σχετ. συχν. ποσοστό
[,)	x_i	v_i	$f_i = \frac{v_i}{n}$	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
[11, 16)	13,5	3	0,075	7,5	3	0,075	7,5
[16, 21)	18,5	7	0,175	17,5	10	0,25	25
[21, 26)	23,5	9	0,225	22,5	19	0,475	47,5
[26, 31)	28,5	10	0,25	25	29	0,725	72,5
[31, 36)	33,5	6	0,15	15	35	0,875	87,5
[36, 41)	38,5	5	0,125	12,5	40	1	100

10.2.3 Γραφικές παραστάσεις

Σε πολλές περιπτώσεις η γραφική παρουσίαση της κατανομής συχνοτήτων παρέχει περιεκτικά αλλά με σαφήνεια όλες τις δυνατές πληροφορίες σχετικά με την κατανομή. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε. Κάποιοι από αυτούς είναι τα πέντε διαγράμματα που θα εξετάσουμε ευθύς αμέσως:

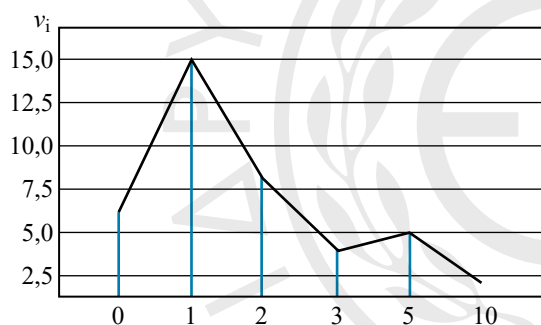
1) Διάγραμμα συχνοτήτων

Το **διάγραμμα συχνοτήτων** είναι ένας τύπος γραφικής παράστασης που χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Σε κάθε τιμή (υποθέτουμε ότι οι τιμές είναι ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά) υψώνουμε μια κάθετη γραμμή με μήκος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i , οπότε έχουμε **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) , σχηματίζεται μια τεθλασμένη γραμμή, το

πολύγωνο συχνοτήτων ή το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, η οποία μας δίνει μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής. Για παράδειγμα στο σχήμα 10.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων για την μεταβλητή «αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων» του παραδείγματος 10.1.

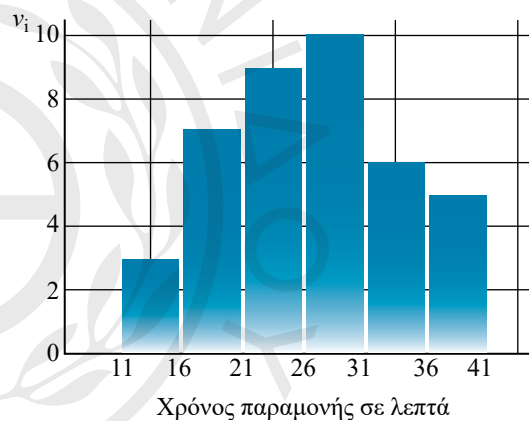
2) Ιστόγραμμα

Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα συχνοτήτων**. Στον οριζόντιο άξονα αναγράφεται η μεταβλητή καθώς και τα όρια των κλάσεων. Αποτελείται από διαδοχικά ορθογώνια, καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**. Στην περίπτωση που ένα ιστόγραμμα έχει κλάσεις ίσου πλάτους, θεωρούμε το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, οπότε το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Το ιστόγραμμα του σχήματος 10.3 είναι για τη μεταβλητή «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.



Σχ. 10.2

Διάγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων για τη μεταβλητή «Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων»



Σχ. 10.3

Ιστόγραμμα συχνοτήτων για τη μεταβλητή «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι σε λεπτά»

3) Πίτα συχνοτήτων ή κυκλικό διάγραμμα

Η **πίτα συχνοτήτων** χρησιμοποιείται και για ποσοτικές (διακριτές ή συνεχείς ομαδοποιημένες) και για ποιοτικές μεταβλητές. Το διάγραμμα είναι μία πίτα και κάθε κομμάτι της είναι ανάλογο της συχνότητας της κλάσης (αν πρόκειται για συνεχή ομαδοποιημένη μεταβλητή) ή της συχνότητας της τιμής της μεταβλητής (αν πρόκειται για ποσοτική κατηγορική ή ποιοτική μεταβλητή).

Αν συμβολίσουμε με a_i το μέτρο του κυκλικού τομέα σε μοίρες που αντιστοιχεί στην τιμή x_i ή στην i κλάση, αν πρόκειται για συνεχή ποσοτική μεταβλητή, τότε το μέτρο a_i υπολογίζεται από τον τύπο:

$$a_i = \frac{\nu_i}{n} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ$$



Παράδειγμα 10.4

Να κατασκευαστούν τα κυκλικά διαγράμματα των μεταβλητών:

- α) «Κατηγορία πλοίου» του παραδείγματος 10.1 και
 β) «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.

Λύση

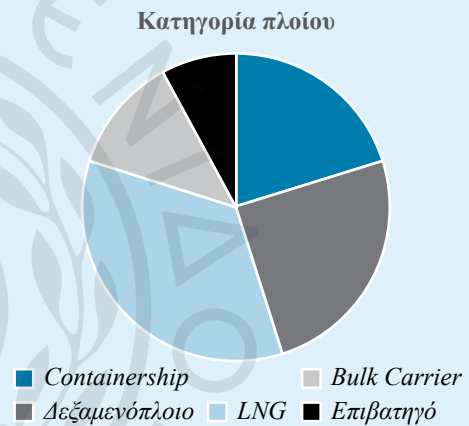
α) Η τελευταία στήλη του πίνακα 10.10 περιέχει τον υπολογισμό των γωνιών του κυκλικού διαγράμματος

β) Στην τελευταία στήλη του πίνακα 10.11 υπολογίζονται οι γωνίες για το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής».

Στο σχήμα 10.4 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Κατηγορία πλοίου» και στο σχήμα 10.5 αποτυπώνεται το κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι».

Πίνακας 10.10

	v_i	f_i	$a_i = \frac{v_i}{n} \cdot 360^\circ$
Containership	8	0,2	$\frac{8}{40} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
Δεξαμενόπλοιο	10	0,25	$\frac{10}{40} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
LNG	14	0,35	$\frac{14}{40} \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Bulk Carrier	5	0,12	$\frac{5}{40} \cdot 360^\circ = 45^\circ$
Επιβατικό	3	0,075	$\frac{3}{40} \cdot 360^\circ = 27^\circ$
ΣΥΝΟΛΟ	40	1	360°



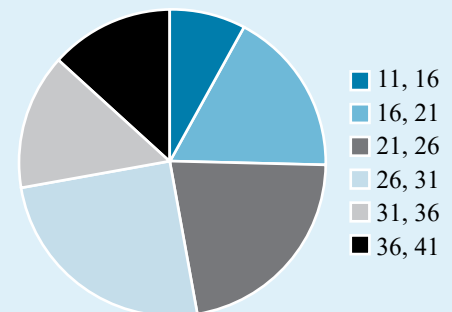
Σχ. 10.4

Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής
 «Κατηγορία πλοίου»

Πίνακας 10.11

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές	Συχν.	Σχετική Συχνότητα	Σχετική συχνότητα ποσοστό
[,)	x_i	v_i	$f_i = \frac{v_i}{n}$	$a_i = \frac{360}{n} \cdot v_i = 360f_i$
[11, 16)	13,5	3	0,075	$0,075 \cdot 360^\circ = 27^\circ$
[16, 21)	18,5	7	0,175	$0,175 \cdot 360^\circ = 63^\circ$
[21, 26)	23,5	9	0,225	$0,225 \cdot 360^\circ = 81^\circ$
[26, 31)	28,5	10	0,25	$0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$
[31, 36)	33,5	6	0,15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$
[36, 41)	38,5	5	0,125	$0,125 \cdot 360^\circ = 45^\circ$

Χρόνος παραμονής στο λιμάνι
 σε λεπτά

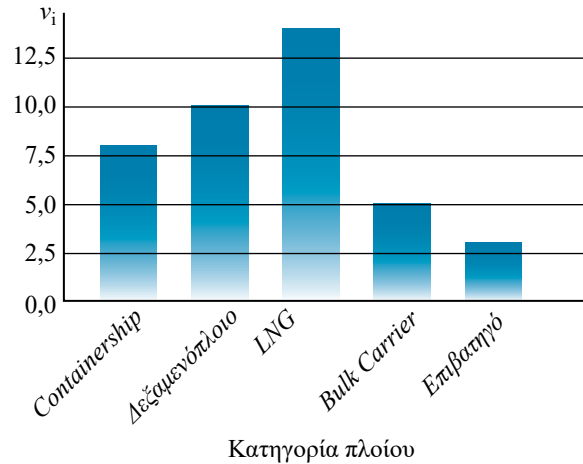


Σχ. 10.5

Κυκλικό διάγραμμα της μεταβλητής
 «Χρόνος παραμονής στο λιμάνι»

4) Ραβδόγραμμα

Το ραβδόγραμμα μοιάζει πολύ με το ιστόγραμμα. Οι συχνότητες των τιμών της μεταβλητής παρουσιάζονται και εδώ με ορθογώνια. Η διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται για ποιοτικές μεταβλητές. Για ποιοτικές μεταβλητές (οι τιμές αναγράφονται στον οριζόντιο άξονα) δεν παίζει ρόλο η σειρά των τιμών ούτε το πλάτος των ραβδών. Το ραβδόγραμμα του σχήματος 10.6 είναι για τη μεταβλητή «Κατηγορία πλοίου» του παραδείγματος 10.1.



Σχ. 10.6

Ραβδόγραμμα της μεταβλητής
«Κατηγορία πλοίου»

10.3 Μέτρα θέσης και διασποράς

Εκτός από τους στατιστικούς πίνακες και τα γραφήματα υπάρχουν και αριθμητικά μέτρα με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε ένα δείγμα. Δεδομένου ότι αυτά τα αριθμητικά μέτρα παρέχουν πληροφορίες είτε για τη θέση κάποιας τιμής είτε για τη διασπορά των τιμών, τα χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες: στα **μέτρα θέσης** και στα **μέτρα διασποράς**. Οι σχετικοί τύποι υπολογισμού των στατιστικών μέτρων διαφοροποιούνται ανάλογα με το αν αναφερόμαστε σε πρωτογενή ή σε ταξινομημένα σε κλάσεις δεδομένα. Σε κάθε περίπτωση, παρουσιάζονται και οι δύο τεχνικές (πρώτα η περίπτωση των πρωτογενών και ακολούθως η περίπτωση των ομαδοποιημένων δεδομένων).

10.3.1 Μέτρα θέσης

Τα μέτρα θέσης είναι αριθμητικά μεγέθη, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα. Τα κυριότερα μέτρα θέσης είναι:

1) Η μέση τιμή

Η **μέση τιμή**, $\bar{x}$, αποτελεί το χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

– Περιπτώσεις ταξινομημένων ή ομαδοποιημένων δεδομένων

Αν οι τιμές (ή οι κεντρικές τιμές στην περίπτωση των κλάσεων) $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$, η μέση τιμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_k \cdot v_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i}{n}$$

– Σταθμικός μέσος

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί της μέσης τιμής χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_n$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)** $w_1, w_2, \dots, w_n$, τότε ο **σταθμικός μέσος** βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

2) Η διάμεσος

Η **διάμεσος** δ , ενός δείγματος είναι η τιμή που χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις του τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες απ' αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Για τον υπολογισμό της διαμέσου δουλεύουμε ως εξής:

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

α) Αν το n είναι περιττός αριθμός, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.

β) Αν το n είναι άρτιος αριθμός τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.



Παράδειγμα 10.5

Να βρεθεί η διάμεσος των δειγμάτων:

α) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6

β) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 9

Λύση

α) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός ($n=9$) η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή δηλαδή η 5^η: $\delta = x_5 = 4$.

β) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7, 9

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($n=10$) η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων τιμών, δηλαδή:

$$\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Παρατηρούμε ότι η διάμεσος στην περίπτωση (β) είναι αριθμός που δεν ανήκει στο δείγμα 2.

Παρατηρήσεις:

α) Η διάμεσος μπορεί να έχει τιμή που να μην ανήκει στο δείγμα, όπως για παράδειγμα στο δείγμα (β).

β) Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από παρατηρήσεις οι οποίες βρίσκονται πολύ μακριά από τον κύριο όγκο των δεδομένων. Το αντίθετο συμβαίνει με την μέση τιμή. Έτσι, για την

περιγραφή παρατηρήσεων που εμφανίζουν ακραίες τιμές προτιμάται ως μέτρο θέσης η διάμεσος από τη μέση τιμή, η οποία επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές.

Πράγματι, τα δείγματα A: 2, 3, 4, 7, 9 και B: 2, 3, 4, 7, 99 έχουν την ίδια διάμεσο $\delta = x_3 = 4$ ενώ η μέση τιμή τους διαφέρει πολύ:

$$x_A = \frac{2+3+4+7+9}{5} = 5 \quad \text{και} \quad x_B = \frac{2+3+4+7+99}{5} = 23$$

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Η διάμεσος ομαδοποιημένων δεδομένων προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων, από τον τύπο:

$$\delta = a_i + \frac{c}{v_i} = \left(\frac{n}{2} - N_{i-1} \right)$$

όπου:

a_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει η διάμεσος,

c είναι το πλάτος της κλάσης i ,

v_i είναι η συχνότητα της κλάσης i ,

N_{i-1} είναι η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης κλάσης από την i και

n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων (μέγεθος του δείγματος).

3) Η επικρατούσα τιμή

Η **επικρατούσα τιμή ή κορυφή M_o** , ορίζεται ως η παρατήρηση που εμφανίζεται πιο πολλές φορές, δηλαδή η παρατήρηση με την μεγαλύτερη συχνότητα.

Για παράδειγμα η επικρατούσα τιμή του δείγματος 1, 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 7, 9 είναι $M_o = 6$.

Η επικρατούσα τιμή μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, ενώ τα άλλα μέτρα που είδαμε ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα. Έτσι για παράδειγμα, η επικρατούσα τιμή του δείγματος «Κατηγορία πλοίου» που είδαμε στο παράδειγμα 10.1 είναι η τιμή LNG.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων:

Η επικρατούσα τιμή ομαδοποιημένων δεδομένων προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων, από τον τύπο:

$$M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

όπου:

a_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συχνότητα,

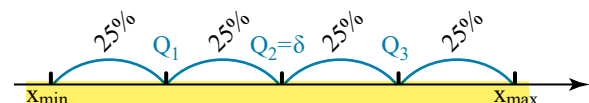
c είναι το πλάτος της κλάσης i ,

το Δ_1 υπολογίζεται αν από τη μεγαλύτερη συχνότητα αφαιρέσουμε την συχνότητα της προηγούμενης κλάσης, δηλαδή: $\Delta_1 = v_i - v_{i-1}$ και

το Δ_2 υπολογίζεται αν από τη μεγαλύτερη συχνότητα αφαιρέσουμε την συχνότητα της επόμενης κλάσης: $\Delta_2 = v_i - v_{i+1}$.

4) Τα τεταρτημόρια

δ) Τα **τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3** διαιρούν το διατεταγμένο δείγμα σε τέσσερα ίσα μέρη (σχ. 10.7). Το Q_2



Σχ. 10.7

ονομάζεται **2^ο τεταρτημόριο** και ταυτίζεται με τη διάμεσο. Το Q_1 ονομάζεται **1^ο τεταρτημόριο** και είναι η τιμή εκείνη που το ποσοστό των τιμών του δείγματος που είναι μικρότερες από αυτήν είναι το πολύ 25%. Το Q_3 ονομάζεται **3^ο τεταρτημόριο** και είναι η τιμή εκείνη που το πολύ 75% των τιμών του δείγματος είναι μικρότερες από αυτήν.

Για τον υπολογισμό των τεταρτημορίων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον πιο απλό. Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Υπολογίζουμε τη διάμεσο του δείγματος η οποία είναι συγχρόνως και το 2^ο τεταρτημόριο. Για τα Q_1, Q_3 :

1) Αν το πλήθος των τιμών είναι άρτιο χωρίζουμε το δείγμα σε δύο δείγματα ίδιου μεγέθους. Η διάμεσος του πρώτου τμήματος (με τις μικρότερες τιμές) είναι το Q_1 . Η διάμεσος του 2ου τμήματος είναι το Q_3 .

2) Αν το πλήθος των τιμών είναι περιττό, τότε έχουμε δύο επιλογές. Να χωρίσουμε το δείγμα σε δύο μέρη αφού αφαιρέσουμε τη μεσαία τιμή. Να χωρίσουμε το δείγμα σε δύο δείγματα, περιλαμβάνοντας τη μεσαία τιμή και στα δύο δείγματα.



Παράδειγμα 10.6

Να υπολογιστούν τα τεταρτημόρια των δειγμάτων:

α) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6

β) 6, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 9

Λύση

α) Η διάμεσος και άρα το 2^ο τεταρτημόριο έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 10.4: $Q_1 = d = 4$.

Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 1 1 2 2 4 6 6 6 7

Είναι $n = 9$ (περιττός). Εξαιρούμε τη μεσαία τιμή (το 4) και χωρίζουμε το υπόλοιπο δείγμα σε δύο δείγματα των τεσσάρων τιμών το καθένα.

Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1 1 2 2. Άρα: $Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5$.

Το Q_3 είναι η διάμεσος του 6 6 6 7. Άρα $Q_3 = \frac{6+6}{2} = 6$.

β) Η διάμεσος και άρα το 2^ο τεταρτημόριο έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 10.4: $Q_2 = d = 5$.

Χωρίζουμε το διατεταγμένο δείγμα σε δύο δείγματα των 5 παρατηρήσεων:

1, 1, 2, 2, 4 6, 6, 6, 7, 9

Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1, 1, 2, 2, 4. Άρα $Q_1 = 2$.

Το Q_3 είναι η διάμεσος του 6, 6, 6, 7, 9. Άρα $Q_3 = 6$.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Το πρώτο τεταρτημόριο σε ομαδοποιημένα δεδομένα προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων από τον τύπο:

$$Q_1 = a_i + \frac{c}{v_i} \left(\frac{n}{4} - N_{i-1} \right)$$

όπου:

a_i είναι κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει το πρώτο τεταρτημόριο,

c είναι το πλάτος της κλάσης i ,

v_i είναι η συχνότητα της κλάσης i ,

N_{i-1} είναι η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης από την i κλάσης και

n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων (μέγεθος του δείγματος).

Το 3^ο τεταρτημόριο Q_3 διαιρεί τα δείγματα σε δύο μέρη, έτσι ώστε, όταν οι παρατηρήσεις είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, το μέρος με τις μικρότερες παρατηρήσεις να αντιστοιχεί στο 75% των παρατηρήσεων.

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Το τρίτο τεταρτημόριο σε ομαδοποιημένα δεδομένα προκύπτει από τον πίνακα συχνοτήτων από τον τύπο:

$$Q_3 = \alpha_i + \frac{c}{v_i} \left(\frac{3n}{4} - N_{i-1} \right)$$

Τα στοιχεία του τύπου είναι ίδια με αυτά του Q_1 .

10.3.2 Μέτρα διασποράς

Από δύο τμήματα β εξαμήνου της ΑΕΝ επιλέξαμε τυχαία 10 σπουδαστές από το κάθε ένα και καταγράψαμε τον βαθμό εξετάσεων στα Μαθηματικά. Οι βαθμοί από κάθε τμήμα ήταν:

A: 6, 6, 5, 6, 7, 7, 5, 6, 7, 5

B: 5, 2, 9, 10, 0, 3, 4, 10, 7

Τα δύο δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή: $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 6$ και την ίδια διάμεσο: $\delta_A = \delta_B = 6$.

Έχοντας ως μοναδικές πληροφορίες τις τιμές της μέσης τιμής και της διαμέσου, προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα δύο τμήματα παρουσιάζουν την ίδια εικόνα σχετικά με την επίδοση των σπουδαστών. Κοιτάζοντας όμως αναλυτικά τις βαθμολογίες του κάθε τμήματος, διαπιστώνουμε ότι στο Α τμήμα όλοι οι σπουδαστές είχαν μέτρια επίδοση (βαθμοί 5, 6 και 7), ενώ στο Β τμήμα είχαμε πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές βαθμολογίες. Βλέπουμε λοιπόν ότι εκτός από τα μέτρα θέσης υπάρχει ανάγκη και άλλων μέτρων που να δείχνουν τη «διασπορά» των τιμών γύρω από το κέντρο τους.

Μέτρα διασποράς ονομάζονται τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μίας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα κυριότερα μέτρα διασποράς είναι:

1) Εύρος R

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το εύρος R , που ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση, δηλαδή:

$$R = \text{Μεγαλύτερη τιμή} - \text{Μικρότερη τιμή}$$

Το εύρος εκφράζει το μήκος του διαστήματος που εκτείνονται όλες οι τιμές του δείγματος. Προφανώς, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του, τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά του δείγματος.

Το εύρος σε καθένα από τα δύο δείγματα βαθμολογιών είναι:

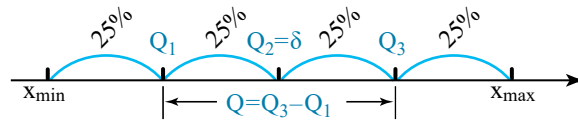
$$R_A = 7 - 5 = 2 \quad \text{και} \quad R_B = 10 - 0 = 10$$

2) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 απ' το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 , δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι το μήκος του διαστήματος στο οποίο περιέχεται το 50% των «μεσαίων» τιμών (σχ. 10.8). Επομένως, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών και άρα τόσο μικρότερη η διασπορά τους;



Σχ. 10.8

3) Διακύμανση s^2

Έστω ότι η μεταβλητή X λαμβάνει τις τιμές $x_1, \dots, x_n$ σε δείγμα μεγέθους n . Η διακύμανση συμβολίζεται $Var(X)$ ή s^2 , και ορίζεται ως:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

όπου: $\bar{x}$ η μέση τιμή.

Ο τύπος αυτός μετά από πράξεις γίνεται:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\}$$

– Περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων

Αν οι τιμές (ή οι κεντρικές τιμές στην περίπτωση των κλάσεων) $x_1, x_2, \dots, x_k$ μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$, τότε για τη διακύμανση ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

και

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i \right)^2}{n} \right)$$

4) Τυπική απόκλιση

Η διακύμανση εκφράζεται σε μονάδες που αντιστοιχούν στο τετράγωνο των αρχικών μονάδων. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε kg, η διακύμανση εκφράζεται σε kg^2 . Η ανάγκη για ένα μέτρο διασποράς που να εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις αρχικές, ούτως ώστε να μπορεί να συνεκτιμάται σε συνδυασμό και με τη μέση τιμή, οδήγησε στην χρησιμοποίηση της τετραγωνικής ρίζας της διακύμανσης, η οποία ονομάζεται **τυπική απόκλιση**:

$$s = \sqrt{s^2}$$

10.3.3 Συντελεστής μεταβλητότητας

Ο συντελεστής μεταβλητότητας που θα δούμε στη συνέχεια αποτελεί ένα σχετικό μέτρο διασποράς. Η ανάγκη για την εισαγωγή ενός σχετικού μέτρου διασποράς γίνεται αντιληπτή με το επόμενο παράδειγμα: Ρωτήθηκαν οι ταξιδιώτες ενός κρουαζιερόπλοιου τι μισθούς παίρνουν. Οι μηνιαίοι μισθοί τους σε € είναι: 10.100, 10.050, 9.900, 10.000, 9.950. Επίσης ρωτήθηκαν για τον μισθό τους οι επιβάτες ενός πλοίου της γραμμής Πειραιάς – Ηράκλειο, οπότε οι απαντήσεις ήταν: 1.100, 1.050, 990, 1.000, 950. Παρατηρούμε ότι και τα δύο δείγματα έχουν ίδια μέτρα διασποράς (π.χ. τυπική απόκλιση, εύρος κ.λπ.). Παρόλα αυτά, αν κάποιος από τους επιβάτες του κρουαζιερόπλοιου υποστεί μείωση μισθού 1000 € τότε αυτό θα έχει γι' αυτόν πολύ μικρότερες συνέπειες από ό,τι θα είχε η ίδια μείωση σε επιβάτη του 2^{ου} πλοίου.

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η ανάγκη να οριστεί ένα καινούργιο μέτρο το οποίο δεν θα αντικατοπτρίζει μόνο τη διασπορά των δεδομένων, αλλά και τις επιπτώσεις που έχει αυτή η διασπορά στην πειραματική μονάδα. Το μέτρο αυτό συμβολίζεται με CV , ονομάζεται **συντελεστής μεταβλητότητας** και δίνεται από τον λόγο της τυπικής απόκλισης προς την μέση τιμή. Δηλαδή:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό (%) και εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του CV τόσο μεγαλύτερη ομοιογένεια θεωρείται ότι έχει το δείγμα. Γενικά, δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι **ομοιογενές** εάν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.



Παράδειγμα 10.7

Στο παρακάτω δείγμα να βρεθούν όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς και να εξεταστεί ως προς την ομοιογένεια:

3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 7, 8

Λύση

$$\text{Μέση τιμή: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{52}{13} = 4$$

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8

Διάμεσος: Το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός (13) άρα η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή δηλαδή: $\delta = x_7 = 4$

Επικρατούσα τιμή: $M_0 = 1$

1ο τεταρτημόριο: Εξαιρούμε την μεσαία – 7^η τιμή ($x_7=4$). Το Q_1 είναι η διάμεσος του δείγματος

0, 1, 1, 1, 2, 3

$$\text{Άρα: } Q_1 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

$$Q_2 = \delta = 4$$

3ο τεταρτημόριο: Είναι η διάμεσος του 5, 6, 6, 7, 8, 8. Άρα $Q_3 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{6 + 7}{2} = 6,5$
Εύρος: $R = 8 - 0 = 8$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 6,5 - 1 = 5,5$

Διακύμανση:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2}{12} = \\ &= \frac{(0-4)^2 + (1-4)^2 \cdot 3 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 \cdot 2 + (7-4)^2 + (8-4)^2 \cdot 2}{12} = \\ &= \frac{98}{12} = 8,17 \end{aligned}$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{8,17} = 2,86$

Συντελεστής μεταβλητότητας: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2,86}{4} = 0,715$ ή 71,5%. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Παράδειγμα 10.8

Να υπολογιστούν όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς για το δείγμα της μεταβλητής «Αριθμός οφειλόμενων μαθημάτων» του παραδείγματος 10.1.

Λύση

Επειδή οι τιμές της μεταβλητής έχουν συχνότητες, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i}{n}$$

Για να γίνουν εύκολα οι πράξεις, στον πίνακα συχνοτήτων (πίν. 10.2), προσθέτουμε μια ακόμα στήλη (πίν. 10.12) στην οποία υπολογίζουμε τα γινόμενα $x_i \cdot v_i$:

Πίνακας 10.12

		v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
x_i	0	6	0,15	6	0,15	0	0
	1	15	0,375	21	0,525	15	15
	2	8	0,2	29	0,725	16	32
	3	4	0,1	33	0,825	12	36
	5	5	0,125	38	0,95	25	125
	10	2	0,05	40	1	20	200
	ΣΥΝΟΛΟ	40	1			88	408

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i}{n} = \frac{88}{40} = 2,2$$

Διάμεσος: Επειδή το μέγεθος είναι άρτιος αριθμός ($n = 40$), η διάμεσος είναι το ημί-θροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, της 20^{ης} και της 21^{ης}. Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι $x_{20} = 1$ και $x_{21} = 1$.

Άρα
$$\delta = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

Τεταρτημόρια: Το Q_2 ταυτίζεται με τη διάμεσο άρα $Q_2 = 1$.

Χωρίζουμε το δείγμα σε δύο ίσα τμήματα των 20 παρατηρήσεων. Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1^{ου} τμήματος, δηλαδή

$$Q_1 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

και το Q_3 του 2^{ου} τμήματος: $Q_3 = \frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$.

Η **επικρατούσα τιμή** είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα $M_o = 1$.

Εύρος: $R = 10 - 0 = 10$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q = Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$

Διακύμανση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right\}$$

Συμπληρώνουμε στον πίνακα 10.12 μία επιπλέον στήλη με τα γινόμενα: $x_i^2 v_i$.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right\} = \frac{1}{39} \left\{ 408 - \frac{88^2}{40} \right\} = 5,497$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{5,497} = 2,345$

Παράδειγμα 10.9

Η μηνιαία χρήση ενός συγκεκριμένου δρομολογίου πλοίου από 20 επιβάτες ήταν:

2	2	7	3	1	2	3	5	2	2
2	5	1	3	2	1	1	2	1	3

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

β) Να βρεθεί η διάμεσος, η μέση τιμή, τα τεταρτημόρια, η επικρατούσα τιμή και η τυπική απόκλιση.

γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Λύση

α) Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων του δείγματος είναι ο πίνακας 10.13.

Πίνακας 10.13

	v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
1	5	0,25	5	0,25	5	5
2	8	0,4	13	0,65	16	32
3	4	0,2	17	0,85	12	36
5	2	0,1	19	0,95	10	50
7	1	0,05	20	1	7	49
ΣΥΝΟΛΟ	20	1			50	172

$$\beta) \delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i}{n} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ δρομ.}$$

Χωρίζουμε το δείγμα σε δύο ίσα τμήματα των δέκα παρατηρήσεων. Το Q_1 είναι η διάμεσος του 1^{ου} τμήματος, δηλαδή $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$ και το Q_3 του 2^{ου} τμήματος: $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$.

$$\text{Διακύμανση: } s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right\} = \frac{1}{19} \left\{ 172 - \frac{50^2}{20} \right\} = 2,474$$

Άρα τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{2,474} = 1,573$ δρομ.

$$\gamma) \text{ Συντελεστής μεταβλητότητας: } CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1,573}{2,5} = 0,629 \text{ ή } 62,9\% \text{ ή } 62,9\%. \text{ Επομέ-}$$

νως $CV > 10\%$, άρα το δείγμα είναι μη ομοιογενές.

Παράδειγμα 10.10

Να βρεθούν τα κυριότερα μέτρα θέσης και διασποράς για τα ομαδοποιημένα δεδομένα της μεταβλητής «χρόνος παραμονής στο λιμάνι» του παραδείγματος 10.3.

Λύση**Πίνακας 10.14**

Κλάσεις [,)	x_i	x_i^2	v_i	$v_i x_i$	$v_i x_i^2$
[11, 16)	13,5	182,25	3	40,5	546,75
[16, 21)	18,5	342,25	7	129,5	2395,75
[21, 26)	23,5	552,25	9	211,5	4970,25
[26, 31)	28,5	812,25	10	285	8122,5
[31, 36)	33,5	1122,25	6	201	6733,5
[36, 41)	38,5	1482,25	5	192,5	7411,25
	156	4493,5		1060	30180

Εφαρμόζοντας τον τύπο της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i}{n} = \frac{1.060}{40} = 26,5 \text{ λεπτά}$$

$$\text{Η διάμεσος θα βρεθεί από τον τύπο: } \delta = a_i + \frac{c}{v_i} = \left(\frac{n}{2} - N_{i-1} \right)$$

Παρατηρούμε ότι η διάμεσος ανήκει στην κλάση [26, 31) άρα $a_i = 26$ (το κατώτερο όριο της κλάσης που ανήκει η διάμεσος). Ακόμα το πλάτος της κλάσης i , όπως και όλων των κλάσεων είναι 5, η συχνότητα της κλάσης v_i είναι ίση με 10, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 40$ και η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης από την i κλάσης είναι ίση με 19. Επομένως έχουμε:

$$\delta = 26 + \frac{5}{10} = \left(\frac{40}{2} - 19 \right) \Leftrightarrow \delta = 26,5 \text{ λεπτά}$$

$$\text{Η επικρατούσα τιμή θα βρεθεί από τον τύπο } M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

όπου: a_i είναι το κατώτερο όριο της κλάσης που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συχνότητα δηλαδή στην [26, 31). Επομένως $a_i = 26$ και όπως και πριν $c = 5$. Ακόμα $\Delta_1 = 10 - 9 = 1$ και $\Delta_2 = 10 - 6 = 4$. Επομένως

$$M_0 = a_i + \frac{c \cdot \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \Leftrightarrow M_0 = 26 + \frac{5 \cdot 1}{4 + 1} \Leftrightarrow M_0 = 26 \text{ λεπτά}$$

Το 1^ο τεταρτημόριο θα είναι η 10^η τιμή. Επομένως η κλάση που περιέχει το Q_1 είναι η 2^η. Άρα:

$$Q_1 = a_i + \frac{c}{v_i} \left(\frac{n}{4} - N_{i-1} \right) = 16 + \frac{5}{7} \left(\frac{40}{4} - 3 \right) = 21 \text{ λεπτά}$$

Το 3^ο τεταρτημόριο βρίσκεται στην 5^η κλάση (η 30^η παρατήρηση) άρα:

$$Q_3 = a_i + \frac{c}{v_i} \left(\frac{3n}{4} - N_{i-1} \right) = 31 + \frac{5}{6} \left(\frac{120}{4} - 29 \right) = 31,83 \text{ λεπτά}$$

Μέτρα διασποράς: Η μεγαλύτερη κεντρική τιμή είναι το 38,5 και η μικρότερη το 13,5 οπότε το εύρος είναι 25.

$$\text{Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: } Q = Q_3 - Q_1 = 31,83 - 21 = 10,83$$

Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot x_i \right)^2}{n} \right) \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{39} \cdot \left(30.180 - \frac{(1.060)^2}{40} \right) \Leftrightarrow s^2 = 53,59 \text{ λεπτά}^2$$

$$\text{Τυπική απόκλιση: } s = \sqrt{53,59} = 7,32 \text{ λεπτά}$$

10.4 Γραμμική συσχέτιση

Στα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα στη Στατιστική, ασχοληθήκαμε κάθε φορά με μία μόνο μεταβλητή. Ενδεχομένως να μας ενδιαφέρει όμως η ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων μεταβλητών, για να προσδιορίσουμε με ποιον τρόπο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Έχουμε ήδη μιλήσει στους πίνακες συνάφειας (σελ. 175) για σχέση δύο ποιοτικών μεταβλητών. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

1) Το βάρος ενός παιδιού σχετίζεται με την ηλικία του, εφόσον όσο μεγαλώνει αυξάνεται το βάρος του.

2) Ο μισθός ενός υπαλλήλου σχετίζεται με τα χρόνια προϋπηρεσίας, αφού όσο πιο πολλά έτη εργάζεται τόσο αυξάνεται ο μισθός του.

3) Ο μισθός ενός υπαλλήλου δεν σχετίζεται με το βάρος του.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση ύπαρξης (γραμμικής) σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών μεταξύ τους.

10.4.1 Διάγραμμα διασποράς

Στην περίπτωση δύο συνεχών ποσοτικών μεταβλητών X , Y , οι τιμές για κάθε μονάδα του δείγματος μπορούν να παρασταθούν σαν σημεία στο επίπεδο. Η γραφική παράσταση των σημείων σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων ονομάζεται **διάγραμμα διασποράς** (scatterplot) των μεταβλητών X και Y . Από το διάγραμμα διασποράς μπορούμε να εντοπίσουμε την ύπαρξη συσχέτισης που ενδεχομένως να υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών που εξετάζουμε. Ο βαθμός συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από ευθεία γραμμή δίνει τον βαθμό συσχέτισής τους. Όσο πιο συσχετισμένα είναι τα δεδομένα τόσο καλύτερη προσέγγιση ευθείας γραμμής έχουμε. Η κλίση της ευθείας δείχνει το πώς επηρεάζει η μία μεταβλητή την άλλη.

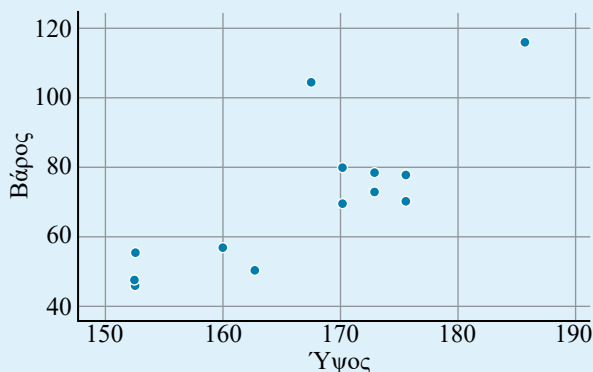


Παράδειγμα 10.11

Στον πίνακα 10.15 οι μεταβλητές X και Y παριστάνουν το ύψος και βάρος αντίστοιχα 12 ενηλίκων ανθρώπων.

Το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών X , Y δίνεται στο σχήμα 10.9.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς «τείνουν» προς μια ευθεία με θετική κλίση. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Όταν αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής X (ύψος) αυξάνεται και της Y (βάρος).



Σχ. 10.9
Διάγραμμα
διασποράς
Ύψους – Βάρους

Πίνακας 10.15

Ύψος (X)	Βάρος (Y)
175	70
185	116
152	55
160	56
168	104
170	69
152	47
152	45
175	77
173	73
163	50
170	79

10.4.2 Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

Πέραν του διαγράμματος διασποράς, που η αξιολόγησή του εμπεριέχει και έναν βαθμό υποκειμενικότητας, θέλουμε ένα πιο αντικειμενικό κριτήριο για την ύπαρξη γραμμικής σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών. Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή τον βαθμό συγγέντευσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από μία ευθεία είναι ο λεγόμενος **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης**. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης, r , υπολογίζεται από τον τύπο:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}}$$

όπου: $\bar{x}, \bar{y}$ οι μέσες τιμές των δειγμάτων των δύο μεταβλητών X, Y .

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Επιπλέον ισχύει πάντοτε ότι:

$$-1 \leq r \leq 1$$

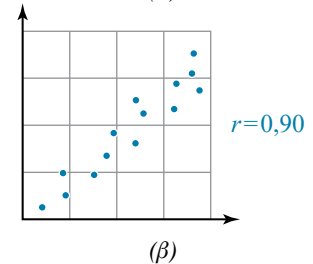
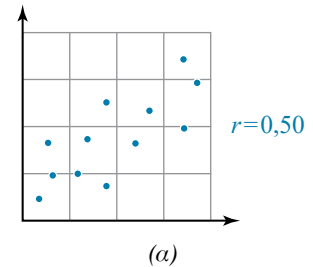
Όσο η τιμή του r πλησιάζει την τιμή $+1$ (ή -1) τόσο ισχυρότερη είναι η γραμμική συσχέτιση, ενώ όσο πιο κοντά είναι στο 0 τόσο πιο αδύναμη η γραμμική συσχέτιση. Πιο αναλυτικά:

1) Αν $0 < r < +1$, τότε οι X, Y είναι **θετικά γραμμικά συσχετισμένες**. Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι τιμή του r τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική συσχέτιση. Στο σχήμα 10.10 βλέπουμε δυο διαγράμματα διασποράς θετικής γραμμικής συσχέτισης όπου στην περίπτωση $r = 0,90$ η γραμμική συσχέτιση είναι πιο ισχυρή απ' ό,τι στη περίπτωση $r = 0,50$.

2) Αν $-1 < r < 0$ τότε οι X, Y είναι **αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες** (σχ. 10.8). Αυτό σημαίνει ότι, όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της Y τείνουν να μειώνονται. Όσο πιο κοντά στο -1 είναι τιμή του r τόσο πιο ισχυρή είναι η αρνητική γραμμική συσχέτιση. Στο σχήμα 10.11 στην περίπτωση του $r = -0,90$ η αρνητική γραμμική συσχέτιση είναι πιο ισχυρή από ό,τι στην περίπτωση $r = -0,50$.

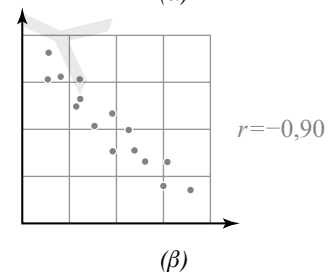
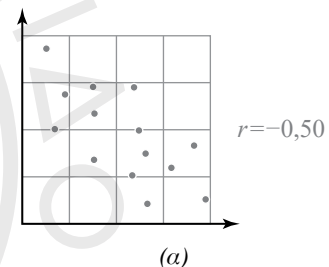
3) Αν $r = 1$, τότε έχουμε **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση (σχ. 10.12).

4) Αν $r = -1$, τότε έχουμε **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση (σχ. 10.13).



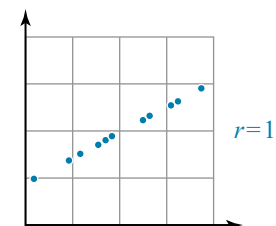
Σχ. 10.10

(α) Θετική γραμμική συσχέτιση και (β) ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση



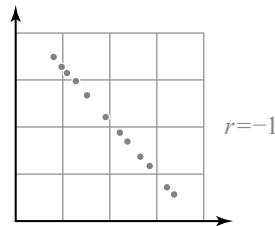
Σχ. 10.11β

(α) Αρνητική γραμμική συσχέτιση και (β) ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση



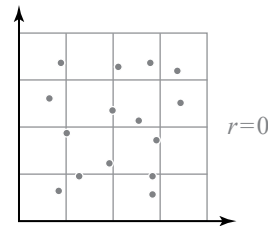
Σχ. 10.12

Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση



Σχ. 10.13

Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση



Σχ. 10.14

Γραμμικά ασυσχέτιστες

5) Αν $r = 0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Οι μεταβλητές δηλαδή X, Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες (σχ. 10.14).



Παράδειγμα 10.12

Να υπολογιστεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών X : ύψος και Y : βάρος του πίνακα 10.15.

Λύση

Για τον υπολογισμό του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μας διευκολύνει η κατασκευή του πίνακα 10.16.

Πίνακας 10.16

Ύψος (x_i)	Βάρος (y_i)	$x_i y_i$		
175	70	12.250	30.625	4.900
185	116	21.469	34.225	13.456
152	55	8.360	23.104	3.025
160	56	8.960	25.600	3.136
168	104	17.472	28.224	10.816
170	69	11.730	28.900	4.761
152	47	7.144	23.104	2.209
152	45	6.840	23.104	2.025
175	77	13.475	30.625	5.929
173	73	12.629	29.929	5.329
163	50	8.150	26.569	2.500
170	79	13.430	28.900	6.241
$\sum x_i = 1.995$	$\sum y_i = 841$	$\sum x_i y_i = 141.909$	$\sum x_i^2 = 332.909$	$\sum y_i^2 = 64.327$

Οι μέσες τιμές $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{12} = \frac{1.995}{12} = 166,25 \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{12} = \frac{841}{12} = 70,083$$

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}} \\
 &= \frac{141.909 - 12 \cdot 166,25 \cdot 70,083}{\sqrt{(332.909 - 12 \cdot 166,25^2) \cdot (64.327 - 12 \cdot 70,083^2)}} = \\
 &= \frac{2.093,415}{\sqrt{6.681.818,76}} = \frac{2.093,415}{2584,92} = 0,80985
 \end{aligned}$$

Επομένως οι μεταβλητές X, Y έχουν ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση.

10.5 Απλή γραμμική παλινδρόμηση

Αφού διαπιστωθεί η γραμμική συσχέτιση, που δείχνει τον βαθμό που οι παρατηρήσεις δύο μεταβλητών X, Y περιγράφονται από ευθεία γραμμή, το ζητούμενο είναι η εύρεση της εξίσωσης αυτής της ευθείας. Η διαδικασία εύρεσης της ζητούμενης ευθείας ονομάζεται **ανάλυση απλής γραμμικής παλινδρόμησης**. Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μίας από αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται ως **ανάλυση παλινδρόμησης**. Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση έχουμε μια μεταβλητή Y και μια μόνο μεταβλητή X μέσω της οποίας υπολογίζονται οι τιμές της Y και η εξίσωση (παλινδρόμησης) που τις συνδέει είναι εξίσωση ευθείας. Η μεταβλητή Y έχει τον ρόλο της **εξαρτημένης μεταβλητής** και η X της **ανεξάρτητης**.

Ο σκοπός μας λοιπόν είναι η εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που προσαρμόζεται όσο το δυνατό καλύτερα στα σημεία των δεδομένων. Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση μιας ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$y = \alpha + \beta x$$

Επομένως, θέλουμε να υπολογίσουμε ή καλύτερα να «εκτιμήσουμε» τους συντελεστές α και β . Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β είναι η «**μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**». Η μέθοδος ονομάζεται έτσι, διότι ο προσδιορισμός των παραμέτρων α και β γίνεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία $y = \alpha + \beta x$. Δηλαδή το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta + \alpha \cdot x_i)^2$$

να γίνεται ελάχιστο, όπου με $\hat{y}_i$ συμβολίζουμε τις εκτιμώμενες τιμές της μεταβλητής Y όπως προκύπτουν από την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $\hat{y}_i = \beta + \alpha \cdot x_i$. Η διαφορά πραγματικής τιμής y_i και προβλεπόμενης τιμής $\hat{y}_i$ είναι το **σφάλμα**

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

για το συγκεκριμένο σημείο.

Οι τιμές των παραμέτρων α και β που ελαχιστοποιούν το παραπάνω άθροισμα τετραγώνων καλούνται **εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων**, συμβολίζονται $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ και αποδεικνύεται ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{\beta}$$

$$\text{όπου } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ και } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

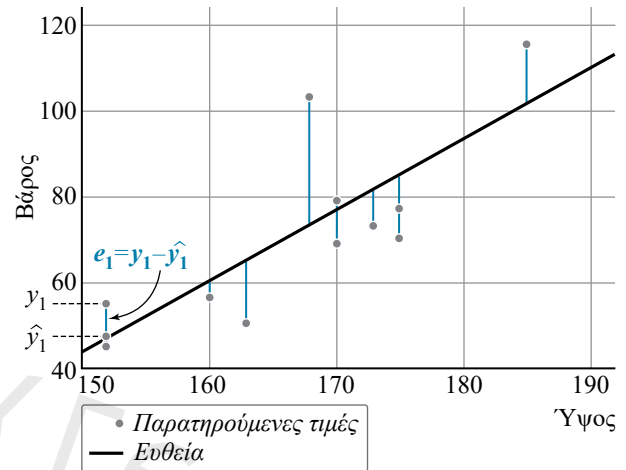
οι μέσες τιμές των X, Y .

Η ευθεία

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x$$

καλείται **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** της Y (πάνω) στη X .

Στο σχήμα 10.15 βλέπουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα του πίνακα 10.15.



Σχ. 10.15

– **Ερμηνεία των συντελεστών $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$:**

α) Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα y' , δηλαδή την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x = 0$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x$ εκφράζει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X μεταβληθεί κατά μια μονάδα.



Παράδειγμα 10.13

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του παραδείγματος 10.11.

β) Να δοθεί η ερμηνεία των συντελεστών της ευθείας.

γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο βάρος ενός ατόμου ύψους 178 cm.

δ) Να υπολογιστούν τα σφάλματα εκτιμώμενης-πραγματικής τιμής της Y , για κάθε σημείο του πίνακα.

Λύση

α) Στον πίνακα 10.17 έχουν υπολογιστεί τα αθροίσματα:

$$\sum x_i y_i = 141.909 \text{ και } \sum x_i^2 = 332.909$$

Επίσης έχουμε υπολογίσει: $\bar{x} = 166,25$ και $\bar{y} = 70,083$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{141909 - 12 \cdot 166,25 \cdot 70,083}{332909 - 12 \cdot 166,25^2} = \frac{2093,415}{1240,25} = 1,688$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{\beta} = 70,083 - 166,25 \cdot 1,688 = -210,547$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $\hat{y} = 1,688x - 210,547$

Πίνακας 10.17

Ύψος (x_i)	Βάρος (y_i)	$x_i y_i$	x_i^2	Εκτιμώμενες τιμές $\hat{y}_i$	Σφάλμα $e_i = y_i - \hat{y}_i$
175	70	12.250	30625	84,853	-14,853
185	116	21.469	34225	101,585	14,415
152	55	8.360	23104	46,142	8,858
160	56	8.960	25600	59,583	-3,583
168	104	17.472	28224	73,024	30,976
170	69	11.730	28900	76,384	-7,384
152	47	7.144	23104	46,142	,858
152	45	6.840	23104	46,142	-1,142
175	77	13.475	30625	84,784	-7,784
173	73	12.629	29929	81,424	-8,424
163	50	8.150	26569	64,623	-14,623
170	79	13.430	28900	76,384	2,616
$\sum x_i = 1.995$	$\sum y_i = 841$	$\sum x_i y_i = 141.909$	$\sum x_i^2 = 332.909$		

β) Ο συντελεστής $\hat{a}$ δίνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ανεξάρτητη X έχει τιμή 0. Προφανώς στη συγκεκριμένη περίπτωση η ερμηνεία δεν είναι ρεαλιστική αφού δεν γίνεται το ύψος να έχει τιμή 0. Η τιμή $\hat{\beta} = 1,688$ δείχνει ότι όταν το ύψος αυξάνεται κατά 1 cm το βάρος αυξάνεται κατά 1,688 kg.

γ) Για $x = 178$ στην εξίσωση της ευθείας έχουμε:

$$\hat{y} = 1,688x - 210,547 = 1,688 \cdot 178 - 210,547 = 89,917 \text{ kg}$$

δ) Για το ζεύγος τιμών $(x_1, y_1) = (175, 70)$ η εκτιμώμενη τιμή από την εξίσωση $\hat{y} = 1,688x - 210,547$ είναι $\hat{y} = 84,853$ το σφάλμα $e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 70 - 84,853 = -14,853$.

Ομοίως υπολογίζονται τα σφάλματα για τα υπόλοιπα σημεία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 10.17.

Ασκήσεις

1. Μία μελέτη περιλαμβάνει 150 επιβάτες ενός πλοίου. Στην μελέτη, καταγράφονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά. Να αναφερθεί το είδος της κάθε μεταβλητής (ποιοτική διατάξιμη, ποιοτική μη διατάξιμη, ποσοτική διακριτή, ποσοτική συνεχής).

α) Φύλο επιβάτη.

β) Κατηγορία θέσης (οικονομική, αριθμημένα καθίσματα, διακεκριμένη).

γ) Αριθμός τέκνων του επιβάτη.

δ) Βάρος του επιβάτη σε kg.

ε) Οικογενειακή κατάσταση επιβάτη.

στ) Μορφωτικό επίπεδο επιβάτη.

ζ) Εισόδημα του επιβάτη σε €.

2. Παρακάτω βλέπετε τον αριθμό μαθημάτων που πέρασαν στην τελευταία εξεταστική 20 σπουδαστές της ΑΕΝ.

7	5	7	1	1	1	5	5	5	2
5	5	4	5	4	4	5	4	1	4

- α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.
 β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος, η επικρατούσα τιμή, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η τυπική απόκλιση.
 γ) Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα.
3. Η μηνιαία χρήση ενός συγκεκριμένου δρομολογίου πλοίου από 20 επιβάτες ήταν:

1	2	1	10	1	2	3	6	2	2
10	6	1	6	2	2	1	2	2	3

- α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.
 β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος, η επικρατούσα τιμή και η τυπική απόκλιση.
 γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.
4. Οι ημέρες απουσίας 20 σπουδαστών της ΑΕΝ τον μήνα Ιούνιο, ήταν:

7	4	0	1	1	1	2	4	0	2
2	1	0	0	2	0	4	2	7	0

- α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα.
 β) Να βρεθεί, η διάμεσος η μέση τιμή, το 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο.
 γ) Να εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.
5. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες κατανομών.

α)

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	3	0,03		
2			15	
3			25	
4				0,65
5	10			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

β)

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1				
2	4	0,2	6	
3				0,6
4		0,25		
5	2			
6				
ΣΥΝΟΛΟ				

6. Οι 50 εργαζόμενοι μιας ναυτιλιακής εταιρείας έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

21 43 50 25 55 30 28 40 31 51 30 48 36 43 38 33 27 39 41 43 38 27 27 40 35

18 47 52 34 47 32 27 41 35 54 32 22 46 52 29 32 34 34 42 36 35 28 57 56 20

- α) Να ομαδοποιηθούν τα δεδομένα σε 6 κλάσεις.
 β) Να βρεθεί η μέση και η διάμεση ηλικία.
 γ) Να κατασκευαστεί ιστόγραμμα συχνοτήτων.
7. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος προϋπηρεσίας (σε έτη) 160 υπαλλήλων μίας ναυτιλιακής εταιρείας.

Απουσίες	Άτομα
[7,11)	24
[11,15)	40
[15,19)	48
[19,23)	32
[23,27)	16

- α) Να βρεθούν:
 – Ο μέσος αριθμός ετών προϋπηρεσίας.
 – Η τυπική απόκλιση του δείγματος.
 β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
8. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις επιδόσεις 10 σπουδαστών στα μαθήματα Μαθηματικά και Ναυτιλία I.

Μαθηματικά (X)	7	6,5	9	3,5	5	8	6,5	7	10	4
Ναυτιλία (Y)	5	6	7,5	5	3	9	7	5	8,5	6

- α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της Y πάνω στη X.
 β) Τι βαθμό αναμένουμε να έχει ένας σπουδαστής στη Ναυτιλία I, αν στα Μαθηματικά έχει βαθμό 7,5;
9. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. Στη συνέχεια να εκτιμήσετε την τιμή της μεταβλητής Y για $X=19$

X	10,5	9	13	15	18	16	17	11	14
Y	60	75	58	39	90	74	56	85	63

10. Να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα της άσκησης 8 και να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα.
11. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 6 μητέρων (X) και των παιδιών τους (Y):

X	85	95	100	110	110	120
Y	90	85	110	110	120	115

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς
 β) Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης.