ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Δυνάμεις

Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται πολλές φορές με τον εαυτό του, η παράσταση μπορεί, για λόγους συντομίας, να γραφεί με τη μορφή *δύναμης*.

Δηλ.

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha\cdot\alpha}_{(\nu\text{- φορές})} = \alpha^{\nu}$$

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** και ο αριθμός ν **εκθέτης**.
Στην πιο απλή περίπτωση οι αριθμοί α και ν είναι ακέραιοι ή ρητοί.

Παραδείγματα

$2^2 = 2\cdot2 = 4$

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$

$4^4 = 4\cdot4\cdot4\cdot4 = 64$

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

Στη Φυσική χρησιμοποιούνται πολύ συχνά οι δυνάμεις του 10 (δηλ. α= 10),
π.χ. $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, κλπ.

Ειδικές περιπτώσεις

(I) Για κάθε αριθμό α ισχύουν οι ιδιότητες:

$\alpha^0 = 1$ και $\alpha^1 = \alpha$

(II) Για κάθε αριθμούς α και ν (ν>0) ισχύει η ιδιότητα:

$$\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}}$$

π.χ.

$4^{-1} = 1/4 = 0{,}25$

$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8 = 0{,}125$

Πράξεις δυνάμεων με την ίδια βάση

(I) Πολλαπλασιασμός

Κατά τον πολλαπλασιασμό δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων με την ίδια βάση, κρατάμε την κοινή βάση και *προσθέτουμε αλγεβρικά* τους εκθέτες.

Χαράλαμπος Ι. Ζώης, Καθηγητής Εφαρμογών Α.Ε.Ν. Ηπείρου hariszois@gmail.com

Δηλ.

$$\boxed{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}}$$

π.χ.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

$2^3 \cdot 2^{-4} = 2^{3+(-4)} = 2^{3-4} = 2^{-1} = 1/2 = 0,5$

$2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

$2^{-3} \cdot 2^{-4} = 2^{-3+(-4)} = 2^{-3-4} = 2^{-7} = 1/2^7 = 1/128$

$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-2} = 2^{3+4+(-2)} = 2^{3+4-2} = 2^5 = 32$

Τα παραπάνω **ΔΕΝ** εφαρμόζονται αν η βάση των δυνάμεων στους όρους του γινομένου είναι διαφορετική.

(II) Διαίρεση
Κατά τη διαίρεση δύο δυνάμεων με την ίδια βάση, κρατάμε την κοινή βάση και *<u>αφαιρούμε αλγεβρικά</u>* τους εκθέτες.
Δηλ.

$$\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}}$$

π.χ.

$2^3 : 2^4 = 2^{3-(+4)} = 2^{3-4} = 2^{-1} = 1/2 = 0,5$

$2^3 : 2^{-4} = 2^{3-(-4)} = 2^{3+4} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

$2^{-4} : 2^3 = 2^{-4-(+3)} = 2^{-4-3} = 2^{-7} = 1/2^7 = 1/128$

$2^{-3} : 2^{-4} = 2^{-3-(-4)} = 2^{-3+4} = 2^1 = 2$

Τα παραπάνω **ΔΕΝ** εφαρμόζονται αν η βάση των δύο δυνάμεων είναι διαφορετική.

(III) Ύψωση δύναμης σε δύναμη
Κατά την ύψωση μίας δύναμης σε δύναμη, κρατάμε τη βάση και *<u>πολλαπλασιάζουμε αλγεβρικά</u>* τους εκθέτες.
Δηλ.

$$\boxed{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}}$$

π.χ.

$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

$(2^{-2})^3 = 2^{(-2) \cdot 3} = 2^{-6} = 1/2^6 = 1/64 = 0,015625$

$(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = 1/2^6 = 1/64 = 0,015625$

$(2^{-2})^{-3} = 2^{(-2) \cdot (-3)} = 2^6 = 64$

(IV) Ύψωση γινομένου ή κλάσματος σε δύναμη

Κατά την ύψωση ενός γινομένου ή ενός κλάσματος σε μία δύναμη, υψώνουμε *ξεχωριστά* κάθε όρο του γινομένου ή του κλάσματος στην κοινή δύναμη.

Δηλ.

$\boxed{(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}}$ και $\boxed{(\alpha:\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}:\beta^{\nu}}$

π.χ.

$(2\cdot3)^2 = 2^2\cdot3^2 = 4\cdot9 = 36$

$[2\cdot(-3)]^2 = 2^2\cdot(-3)^2 = 4\cdot9 = 36$

$(2:3)^2 = 2^2:3^2 = 4:9 = 0{,}444$

$[2:(-3)]^3 = 2^3:(-3)^3 = 8:(-27) = -0{,}296$

Τα παραπάνω **ΔΕΝ** ισχύουν για την ύψωση αθροίσματος ή αφαίρεσης σε δύναμη (*βλ. τις γνωστές ταυτότητες της Άλγεβρας*).

(V) Απαλοιφή ενός εκθέτη

Για να ‘‘απαλείψουμε’’ έναν εκθέτη (δηλ. για να γίνει ίσος με 1), υψώνουμε και τα δύο μέλη της παράστασης σε δύναμη που έχει εκθέτη τον αντίστροφο του αρχικού.

π.χ.

Για να υπολογίζω το α στην παράσταση α^4 πρέπει να το υψώσω στη δύναμη ¼, διότι $(\alpha^4)^{1/4}=\alpha$

Για να υπολογίζω το α στην παράσταση $\alpha^{4/3}$ πρέπει να το υψώσω στη δύναμη ¾, διότι $(\alpha^{4/3})^{3/4}=\alpha^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\alpha$

Πράξεις με δυνάμεις

Όταν μία παράσταση έχει γινόμενα ή πηλίκα που περιλαμβάνουν δυνάμεις και αριθμητικούς παράγοντες, εκτελούμε τις πράξεις χωριστά για τους αριθμούς και χωριστά για τις δυνάμεις, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ιδιότητες.

Αν, όμως, οι υπολογισμοί περιλαμβάνουν προσθέσεις ή αφαιρέσεις, εφαρμόζουμε, όπου γίνεται, την επιμεριστική ιδιότητα.

π.χ.

$(5\times10^2)\cdot(3\times10^{-3}) = (5\times3)\times(10^2\times10^{-3}) = 15\times10^{-1} = 15\times0{,}1 = 1{,}5$

$(6\times10^{-2}):(5\times10^{-4}) = (6:5)\times(10^{-2}\times10^{-4}) = 1{,}2\times10^{-2-(-4)} = 1{,}2\times10^{-2+4} = 1{,}2\times10^{2} = 120$

$5\alpha^4\cdot(3\alpha^2+\alpha^{-1}) = 5\cdot3\cdot\alpha^4\cdot\alpha^2+5\cdot\alpha^4\cdot\alpha^{-1} = 15\cdot\alpha^6+5\cdot\alpha^3$

$-5\alpha^4\cdot(3\alpha^{-2}-2\beta^3) = -5\cdot3\cdot\alpha^4\cdot\alpha^{-2}+(-5)\cdot(-2)\cdot\alpha^4\cdot\beta^3 = -15\cdot\alpha^2+10\cdot\alpha^4\cdot\beta^3$

Τετραγωνική ρίζα αριθμού

Τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού ονομάζουμε εκείνο τον αριθμό που εάν τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του δίνει τον αρχικό αριθμό.

Δηλ.

$$\boxed{\sqrt{x} = a \Leftrightarrow a^2 = x}$$

π.χ.

$\sqrt{25} = \pm 5$, διότι $5^2 = (-5)^2 = 25$

Κυβική ρίζα αριθμού

Κυβική ρίζα ενός αριθμού ονομάζουμε εκείνο τον αριθμό που εάν υψωθεί στην τρίτη δύναμη δίνει τον αρχικό αριθμό.

Δηλ.

$$\boxed{\sqrt[3]{x} = a \Leftrightarrow a^3 = x}$$

π.χ.

$\sqrt[3]{64} = 4$, διότι $4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$

$\sqrt[3]{-64} = -4$, διότι $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$

<u>Σημείωση</u>

Τόσο η τετραγωνική, όσο και η κυβική ρίζα ενός αριθμού μπορούν να γραφούν με τη μορφή δύναμης σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

Γενικά ισχύει:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{x} = x^{1/\nu}}$$