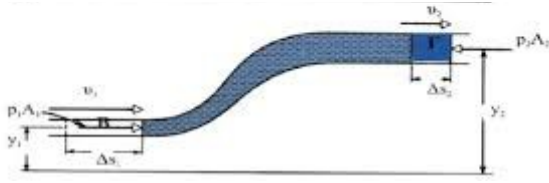


Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ BERNOULLI

Η θεωρητική απόδειξη του νόμου του Bernoulli.



Ένα ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ ρέει σε μόνιμη στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα μεταβλητής διατομής με φορά ταχύτητας προς τα δεξιά, όπως

στο διπλανό σχήμα.

Θεωρούμε μια κατακόρυφη διατομή του σωλήνα με εμβαδόν διατομής A_1 και η στατική πίεση που ασκείται σε αυτή είναι P_1 . Έτσι στην επιφάνεια αυτή ενεργεί κάθετα μια οριζόντια δύναμη $F_1 = P_1 \cdot A_1$ **(1)**.

Η δύναμη F_1 θα έχει σαν αποτέλεσμα την μετακίνηση ενός στοιχειώδη όγκου ρευστού

$$\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1 \quad \text{(2)} \quad \text{και την παραγωγή έργου} \quad \Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 .$$

Το έργο αυτό λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις **(1)** και **(2)** είναι ίσο με:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 \Rightarrow \boxed{\Delta W_1 = P_1 \cdot \Delta V_1} \quad \text{(3)}.$$

Ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$ στη θέση Β του σωλήνα έχει στοιχειώδη μάζα $\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta V_1$, η οποία βρίσκεται σε ύψος y_1 από ένα οριζόντιο επίπεδο αναφοράς

και η δυναμική ενέργεια της είναι $E_{\delta\text{yn.1}} = \Delta m_1 \cdot g \cdot y_1 \Rightarrow \boxed{E_{\delta\text{yn.1}} = \rho \cdot \Delta V_1 \cdot g \cdot y_1} \quad \text{(4)}.$

Επίσης θεωρούμε μια κατακόρυφη διατομή του σωλήνα με μεγαλύτερο εμβαδόν διατομής A_2 και η στατική πίεση που ασκείται σε αυτή είναι P_2 . Στην επιφάνεια όμως αυτή ενεργεί κάθετα μια οριζόντια δύναμη $F_2 = P_2 \cdot A_2$ **(5)** με αντίθετη φορά από την δύναμη F_1 .

Η δύναμη F_2 θα μετακινήσει προς την αντίθετη κατεύθυνση μια στοιχειώδη ποσότητα ρευστού $\Delta V_2 = A_2 \cdot \Delta x_2$ **(6)** με την ταυτόχρονη κατανάλωση έργου $\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2$ το οποίο έργο από τις σχέσεις **(5)** και **(6)** είναι ίσο με:

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = P_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 \Rightarrow \boxed{\Delta W_2 = P_2 \cdot \Delta V_2} \quad \text{(7)}.$$

Ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού στη θέση Γ του σωλήνα έχει στοιχειώδη μάζα που $\Delta m_2 = \rho \cdot \Delta V_2$, η οποία βρίσκεται σε ύψος y_2 από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς και η

δυναμική ενέργεια της είναι $E_{\delta\text{yn.2}} = \Delta m_2 \cdot g \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{E_{\delta\text{yn.2}} = \rho \cdot \Delta V_2 \cdot g \cdot y_2} \quad \text{(8)}.$

Επίσης, εάν η ταχύτητα της στοιχειώδης μάζας του ρευστού $\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta V_1$ είναι U_1 , η

$$\text{κινητική της ενέργεια είναι: } K_1 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m_1 \cdot U_1^2 \Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V_1 \cdot U_1^2} \quad (9).$$

Ομοίως για την κινητική ενέργεια της στοιχειώδης μάζας $\Delta m_2 = \rho \cdot \Delta V_2$ του ρευστού της

$$\text{οποίας η ταχύτητα είναι } U_2 \text{ έχουμε: } K_2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m_2 \cdot U_2^2 \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V_2 \cdot U_2^2} \quad (10).$$

Από την **αρχή διατήρησης της ενέργειας** έχουμε:

$$\Delta W_1 + E_{\delta\text{υν.1}} + K_1 = \Delta W_2 + E_{\delta\text{υν.2}} + K_2, \text{ η οποία από τις σχέσεις (3),(4),(7),(8),(9) και (10)}$$

γίνεται:

$$P_1 \cdot \Delta V_1 + \rho \cdot \Delta V_1 \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V_1 \cdot U_1^2 = P_2 \cdot \Delta V_2 + \rho \cdot \Delta V_2 \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V_2 \cdot U_2^2 \quad (11).$$

Θεωρούμε ότι οι δύο στοιχειώδη όγκοι ρευστού είναι ίσοι $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$, οπότε η σχέση (11) γίνεται:

$$P_1 \cdot \Delta V + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot U_1^2 = P_2 \cdot \Delta V + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot U_2^2, \text{ όπου απαλείφοντας}$$

τον στοιχειώδη όγκο ΔV έχουμε την εξίσωση του Bernoulli:

$$\boxed{P_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_2^2}$$

Νόμος του Bernoulli: Το άθροισμα της πίεσης P (στατική πίεση), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2$ (δυναμική πίεση) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\rho \cdot g \cdot y$ (υψομετρική πίεση) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

$$\text{Μαθηματική Εξίσωση: } \boxed{P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2}$$

Στην περίπτωση που ο σωλήνας είναι **οριζόντιος**, τότε $y_1 = y_2 = y$ η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή:

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_2^2 \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_2^2 \Rightarrow$$

Μαθηματική Εξίσωση :

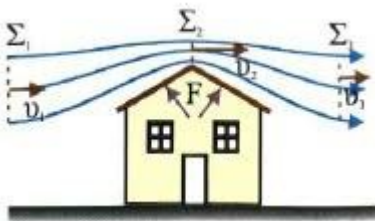
$$P + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{σταθερό}$$

Συμπέρασμα:

Σε **οριζόντιο** σωλήνα που ρέει ιδανικό ρευστό σε στρωτή ροή στη διατομή του με το **μικρότερο εμβαδόν** (περιοχή όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές), η ταχύτητα του ρευστού σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας έχει τη μεγαλύτερη τιμή, οπότε λόγω της τελευταίας σχέσης (**Νόμος του Bernoulli**) η πίεση του ρευστού έχει την **μικρότερη** τιμή.

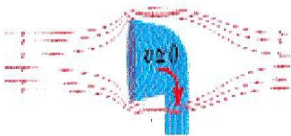
Εφαρμογές του νόμου του Bernoulli:

- **Η απομάκρυνση της στέγης του σπιτιού όταν πνέει δυνατός άνεμος.**



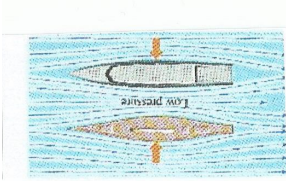
Όταν δυνατός άνεμος περνά πάνω από την στέγη ενός σπιτιού, η πυκνότητα των ρευματικών γραμμών του αέρα στην θέση Σ_2 είναι μεγάλη (μικραίνει το εμβαδόν της διατομής της φλέβας του αέρα). Έτσι σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, η ταχύτητα U_2 του αέρα στην θέση αυτή είναι μεγαλύτερη από τις ταχύτητες U_1 , U_3 στις αντίστοιχες γειτονικές θέσεις Σ_1 και Σ_3 . Άρα, η πίεση P_2 στη θέση Σ_2 σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli θα είναι μικρότερη από τις πιέσεις που εφαρμόζονται σε θέσεις πριν και μετά της κορυφής της στέγης. Επομένως στην κορυφή της στέγης ασκείται μικρότερη δύναμη σε σχέση με άλλες θέσεις. Αποτέλεσμα αυτού να διαταράσσεται η ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στην στέγη και να ανυψώνεται η στέγη.

- **Ανεμοδόχος πλοίου.**



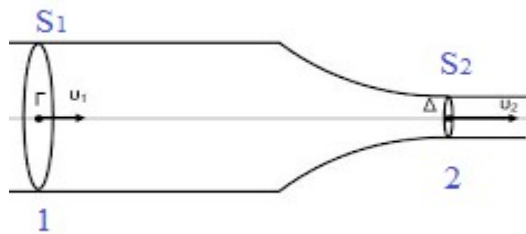
Στην ανεμοδόχο καθώς κινείται το πλοίο έχουμε αραιώση των ρευματικών γραμμών του αέρα, οπότε από το νόμο της συνέχειας είναι πολλή μικρή η ταχύτητα του αέρα. Αποτέλεσμα αυτού σύμφωνα με το νόμο Bernoulli να δημιουργείται υπερπίεση και να εισέρχεται ο αέρας στο εσωτερικό του πλοίου.

➤ Η παράλληλη κίνηση των πλοίων σε μικρή μεταξύ τους απόσταση.



Τα πλοία όταν κινούνται παράλληλα σε μικρή μεταξύ τους απόσταση, στο μεταξύ τους χώρο λόγω της στένωσης από το νόμο της συνέχειας δημιουργείται μεγάλη ταχύτητα στο νερό. Έτσι από το νόμο του Bernoulli θα είναι μικρή η πίεση που θα επικρατεί στο χώρο αυτό. Η πίεση όμως στον εξωτερικό χώρο είναι μεγαλύτερη άρα και οι δυνάμεις από το νερό που ασκούνται στα πλοία στο χώρο αυτό είναι μεγαλύτερες, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ρεύμα που τα σπρώχνει ώστε να πλησιάσουν πιο πολύ με μεγάλη πιθανότητα να συγκρουστούν.

Παράδειγμα



Μέσα σε οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα όπως αυτός του διπλανού σχήματος ρέει υγρό πυκνότητας ρ . Στο σημείο Γ της διατομής του σωλήνα με το μεγαλύτερο εμβαδόν S_1 η ταχύτητα είναι U_1 .

Εάν ο λόγος των εμβαδών $\frac{S_1}{S_2}$ δύο διαφορετικών διατομών του σωλήνα είναι τρία, να υπολογιστεί η διαφορά των αντίστοιχων πιέσεων μεταξύ αυτών των διατομών.

Λύση

| Γνωστά Μεγέθη | Άγνωστα Μεγέθη |
|--------------------------------------|-----------------|
| ρ , U_1 , $\frac{S_1}{S_2}=3$ | $P_1 - P_2 = ?$ |

Από την εξίσωση της συνέχειας, έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot U_1, \text{ αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το λόγο } \frac{S_1}{S_2}, \text{ έχουμε } \boxed{U_2 = 3U_1} \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια την εξίσωση Bernoulli στα σημεία Γ και Δ που είναι στην ίδια οριζόντια ρευματική γραμμή, οπότε:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot U_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (U_2^2 - U_1^2) .$$

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστούμε την ταχύτητα U_2 και έχουμε:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (3U_1)^2 - U_1^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (9U_1^2 - U_1^2) \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot 8U_1^2 .$$

Άρα, η διαφορά πιέσεων είναι ίση με: $P_1 - P_2 = 4\rho U_1^2$.

Ερωτήσεις σωστού-λάθους.

1. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές για την δυναμική πίεση σε σωλήνα που ρέει ιδανικό ρευστό;

A. $\frac{1}{2} m U^2$.

B. $\frac{1}{2} \rho U$.

Γ. $\frac{1}{2} \rho U^2$.

Δ. $\rho g y$.

Ε. $\frac{E_{KIN}}{\Delta V}$.

2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές για την δυναμική πίεση σε ένα σημείο του σωλήνα που ρέει ιδανικό ρευστό;

A. Η δυναμική πίεση εκφράζει την δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.

B. Η δυναμική πίεση είναι ανάλογη με το ύψος h του σημείου από μια στάθμη αναφοράς .

Γ. Η δυναμική πίεση εκφράζει την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου .

Δ. Η δυναμική πίεση εκφράζει την πίεση όταν το ρευστό είναι ακίνητο.

Ε. Η δυναμική πίεση είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας U του ρευστού.

3. Σε δύο σημεία μιας ρευματικής γραμμής οριζόντιου σωλήνα που ρέει ιδανικό ρευστό, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

A. Το άθροισμα της στατικής πίεσης και της υψομετρικής έχει σε αυτά την ίδια τιμή.

B. Η διαφορά των στατικών πιέσεων των δύο αυτών σημείων είναι ίση με την αντίστοιχη διαφορά των δυναμικών τους πιέσεων.

Γ. Το άθροισμα της στατικής και της δυναμικής πίεσης είναι σε αυτά σταθερό.

Δ. Στα σημεία αυτά επικρατεί η ίδια υψομετρική πίεση.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Ένα ιδανικό ρευστό ρέει σε οριζόντιο σωλήνα του οποίου το εμβαδόν διατομής αυξάνεται στην κατεύθυνση ροής του ρευστού. Στην κατεύθυνση αυτή η πίεση του ρευστού :
- A. αυξάνεται.
 - B. παραμένει σταθερή.
 - Γ. μειώνεται.
2. Η εξίσωση του Bernoulli εφαρμόζεται μεταξύ δύο σημείων μιας ρευματικής γραμμής ενός :
- A. πραγματικού ρευστού.
 - B. ιδανικού ρευστού.
 - Γ. ιδανικού ρευστού σε τυρβώδη ροή.
3. Σε σωλήνα που ρέει ιδανικό υγρό το άθροισμα της στατικής πίεσης, της δυναμικής και της υψομετρικής σε διαφορετικά σημεία μιας ρευματικής γραμμής έχει:
- A. διαφορετική τιμή.
 - B. σταθερή τιμή.
 - Γ. μηδενική τιμή.
4. Σε σωλήνα που ρέει ιδανικό υγρό η υψομετρική πίεση σε ένα σημείο μιας ρευματικής γραμμής είναι:
- A. η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.
 - B. η στατική πίεση.
 - Γ. η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.
5. Ο νόμος του Bernoulli προκύπτει:
- A. από την αρχή του Pascal.
 - B. από την αρχή διατήρησης της ενέργειας .
 - Γ. από την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων.