



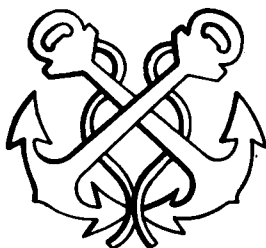
ΑΝΩΤΕΡΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

Τόμος Πρώτος

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Α. ΠΕΡΡΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΔΣΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
Α.Δ.Σ.Ε.Ν.
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ο Ευγένιος Ευγενίδης, ιδρυτής και χορηγός του «Ιδρύματος Ευγενίδου», προείδε ενωρίτατα και σχημάτισε τη βαθιά πεποίθηση ότι αναγκαίο παράγοντα για την πρόοδο του έθνους αποτελεί η άρτια κατάρτιση των τεχνικών μας σε συνδυασμό προς την ηθική τους αγωγή.

Την πεποίθησή του αυτή την μετέτρεψε σε γενναία πράξη ευεργεσίας, όταν κληροδότησε σεβαστό ποσό για τη σύσταση Ιδρύματος, που θα είχε ως σκοπό να συμβάλλει στην τεχνική εκπαίδευση των νέων της Ελλάδας.

Έτσι, τον Φεβρουάριο του 1956 συνεστήθη το «Ίδρυμα Ευγενίδου», του οποίου την διοίκηση ανέλαβε η αδελφή του Μαρ. Σίμου, σύμφωνα με την επιθυμία του διαθέτη. Από τη στιγμή εκείνη άρχισαν πραγματοποιούμενοι οι σκοποί που οραματίστηκε ο Ευγένιος Ευγενίδης και συγχρόνως η εκπλήρωση μιας από τις βασικότερες ανάγκες του εθνικού μας βίου. Το έργο του Ιδρύματος συνέχισε από το 1981 μέχρι το 2000 ο Νικόλαος Βερνίκος-Ευγενίδης· έκτοτε συνεχίζει αυτό ο κ. Λεωνίδας Δημητριάδης-Ευγενίδης.

Κατά την κλιμάκωση των σκοπών του, το Ίδρυμα προέταξε την έκδοση τεχνικών βιβλίων τόσο για λόγους θεωρητικούς όσο και πρακτικούς. Διεπιστώθη πράγματι ότι αποτελεί πρωταρχική ανάγκη ο εφοδιασμός των μαθητών με σειρές από βιβλία, τα οποία θα έθεταν ορθά θεμέλια στην παιδεία τους και θα αποτελούσαν συγχρόνως πολύτιμη βιβλιοθήκη για κάθε τεχνικό.

Ειδικότερα, όσον αφορά στα εκπαιδευτικά βιβλία των σπουδαστών των Δημοσίων Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, το Ίδρυμα ανέλαβε τότε την έκδοσή τους σε πλήρη και στενή συνεργασία με τη Διεύθυνση Ναυτικής Εκπαίδευσης του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, υπό την εποπτεία του οποίου υπάγονται οι Σχολές αυτές. Η ανάθεση στο Ίδρυμα έγινε με την υπ' αριθ. 61288/5031, της 9ης Αυγούστου 1966, απόφαση του Υπουργείου Εμπορικής Ναυτιλίας, οπότε και συνεκροτήθη και η αρμόδια Επιτροπή Εκδόσεων.

Αποτέλεσμα της συνεργασίας αυτής ήταν η έκδοση της Σειράς Βιβλιοθήκη του Ναυτικού, όπου εξεδόθησαν: α) Για τους μαθητές των Μέσων Ναυτικών Σχολών 30 τόμοι βιβλίων (1967 - 1979). β) Για τις ΑΔΣΕΝ (Ανώτερες Δημοσίες Σχολές Εμπορικού Ναυτικού) 54 τόμοι (1981 - 2001).

Κύριος σκοπός των εκδόσεων αυτών, των οποίων το περιεχόμενο είναι

σύμφωνα με τα εκάστοτε ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα του ΥΕΝ, ήταν η παροχή προς τους σπουδαστές των Ναυτικών Σχολών ΑΔΣΕΝ και Ναυτικών Λυκείων των αναγκαίων τότε εκπαιδευτικών κειμένων, τα οποία αντιστοιχούν προς τα μαθήματα που διδάσκονται στις Σχολές αυτές.

Επίσης ελήφθη ιδιαίτερη πρόνοια, ώστε τα βιβλία αυτά να είναι γενικότερα χρήσιμα για όλους τους αξιωματικούς του Εμπορικού Ναυτικού, που ασκούν το επάγγελμα ή εξελίσσονται στην ιεραρχία του κλάδου τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επέρχεται μεταβολή στη στάθμη του περιεχομένου τους.

Με την υπ. αρ. 1168Β /14.6.99 υπουργική απόφαση το Υπουργείο Εμπορικής Ναυτιλίας ανέθεσε στο Ίδρυμα Ευγενίδου την συγγραφή και έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων των Ναυτικών Ακαδημιών ήδη η επιτροπή εκδόσεων του Ιδρύματος, στην οποία μετέχει, όπως πάντα, και ο διευθυντής Ναυτικής Εκπαιδύσεως του ΥΕΝ, προεκήρυξε συμφώνως προς απόφαση του ΥΕΝ την συγγραφή 15 βιβλίων προς κάλυψη επείγουσών αναγκών των σπουδαστών βάσει των ισχυόντων αναλυτικών προγραμμάτων. Τα βιβλία αυτά έχουν συγγραφεί ήδη και ευρίσκονται στο στάδιο της εκδόσεως.

Οι συγγραφείς και η Επιτροπή Εκδόσεων του Ιδρύματος εξακολουθούν να καταβάλλουν κάθε προσπάθεια, ώστε τα βιβλία να είναι επιστημονικώς άρτια αλλά και προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τις δυνατότητες των σπουδαστών. Γι' αυτό έχουν προσεγμένη γλωσσική διατύπωση των κειμένων τους και η διαπραγμάτευση των θεμάτων είναι ανάλογη προς τη στάθμη της εκπαίδευσής, για την οποία προορίζονται.

Με την προσφορά στους καθηγητές, στους σπουδαστές της ναυτικής μας εκπαίδευσής και σε όλους τους αξιωματικούς του Ε.Ν. των εκδόσεών του, το Ίδρυμα συμβάλλει στην πραγματοποίηση του σκοπού του ιδρυτή του Ευγενίου Ευγενίδου.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Αλέξανδρος Σταυρόπουλος, ομ. καθηγητής Α.Β.Σ. Πειραιώς, Πρόεδρος.

Ιωάννης Τεγόπουλος, ομ. καθηγητής ΕΜΠ.

Ιωάννης Τζαβάρας, αντιναύαρχος Α.Σ. (Ε.Α.).

Δημήτριος Βασιλάκης, πλοίαρχος Α.Σ., Διευθ. Ναυτ. Εκπ. έ.Ε.Ν.

Σύμβουλος επί των εκδόσεων του Ιδρύματος **Κων. Μανάφης**,

καθηγ. Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών.

Γραμματέας της Επιτροπής, **Γεώργιος Ανδρεάκος**.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ Ι

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΑΝΔΡΕΑ ΠΕΡΡΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΔΣΕΝ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΑΘΗΝΑ
2006



Α΄ ΕΚΔΟΣΗ 1989

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ 1993



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος «Ηλεκτροτεχνία» που διδάσκεται στο πρώτο έτος των Σχολών Ραδιοηλεγεραφικών και Μηχανικών των ΑΔΣΕΝ.

Ο τόμος αυτός περιλαμβάνει το στατικό ηλεκτρισμό, τα ρεύματα μονής φοράς (συνεχή) και το μαγνητικό πεδίο.

Κατά τη συγγραφή χρησιμοποιήθηκαν με σχολαστικότητα μόνον οι μονάδες που ανήκουν στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.), το οποίο έχει γίνει αποδεκτό σε παγκόσμια κλίμακα.

Η φορά του ρεύματος που χρησιμοποιείται είναι η συμβατική, επειδή αυτή έχει καθιερωθεί στο μεγαλύτερο μέρος της ελληνικής και ξένης βιβλιογραφίας.

Για την καλύτερη εμπέδωση των γνώσεων των σπουδαστών, έχουν περιληφθεί στο βιβλίο λυμένα παραδείγματα κατά υποδειγματικό τρόπο. Επίσης στο τέλος του τόμου υπάρχει σε παράρτημα συλλογή ασκήσεων με τις απαντήσεις τους για να μπορεί ο σπουδαστής να ελέγξει την ορθότητα της λύσεως.

Για την κατανόηση του βιβλίου προσοιούνται ορισμένες γνώσεις Φυσικής και Μαθηματικών. Ιδιαίτερα είναι απαραίτητα στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού, στοιχεία Μιγαδικού Λογισμού, καθώς και στοιχεία Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Απαιτείται επίσης η γνώση των οριζουσών και ειδικότερα η επίλυση συστήματος με τον κανόνα του Cramer.

Θα ήθελα από αυτή τη θέση και για άλλη μια φορά να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Σ. Σιμόπουλο για τη σημαντική συμβολή του στην πληρέστερη συγγραφή του βιβλίου.

Ελπίζω ότι οι μεν σπουδαστές θα βρουν σ' αυτό το βιβλίο τα στοιχεία εκείνα που θα τους κάνουν να αγαπήσουν την Ηλεκτροτεχνία, να καταλάβουν τη βαθύτερη σημασία των εννοιών και των νόμων της και την πλατύτερη χρησιμότητα της εφαρμογής τους. Ελπίζω επίσης ότι οι συνάδελφοι θα αποκτήσουν χρήσιμο βοήθημα για το έργο τους.

Κάθε παρατήρηση που θα συμβάλει στη βελτίωση του κειμένου θα ληφθεί υπόψη κατά τη μελλοντική επανέκδοσή του.

Ο συγγραφέας

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ
ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB

1.1 Γενικά.

Είναι σε όλους γνωστές οι ποικίλες μορφές υπό τις οποίες η ηλεκτρική ενέργεια μπορεί να καλύπτει βιοτικές ανάγκες του σημερινού ανθρώπου. Έτσι περιττεύει να τονισθεί η ανάγκη της διερευνήσεως της φύσεως των ηλεκτρικών φαινομένων καθώς και της σπουδής των σχετικών νόμων, με των οποίων τη βοήθεια καθίσταται δυνατή η κατανόηση των εφαρμογών του ηλεκτρισμού.

Ιστορικά, η πρώτη διαπίστωση υπάρξεως ηλεκτρισμού έγινε πριν το 600 π.Χ. από το Θαλή το Μιλήσιο που παρατήρησε ότι, όταν το *ήλεκτρο* (κεχριμπάρι) τρίβεται με ξηρό ύφασμα, αποκτά την ιδιότητα να έλκει μικρά κομμάτια από ορισμένα υλικά (π.χ. χαρτί). Ο Άγγλος γιατρός W. Gilbert, το 1600, περιέγραψε πρώτος τα απλούστερα από τα ηλεκτρικά φαινόμενα. Ο ίδιος ερευνητής ονόμασε την ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ ορισμένων σωμάτων (ήλεκτρο, εβονίτης, γυαλί, διαμάντια κλπ) με άλλα (χαρτί, ίνες μαλλιού κλπ), όταν αυτά τρίβονται, «*vis electrica*» (ηλεκτρική δύναμη). Από τότε καθιερώθηκε ο όρος *ηλεκτρισμός*. Τα σώματα που αποκτούν τις πιο πάνω ελκτικές ιδιότητες λέμε ότι είναι «ηλεκτρικώς φορτισμένα» ή αλλιώς ότι φέρουν *ηλεκτρικά φορτία*. Το φαινόμενο κατά το οποίο σε ορισμένα σώματα αναπτύσσονται ηλεκτρικά φορτία ονομάζεται *ηλέκτριση*.

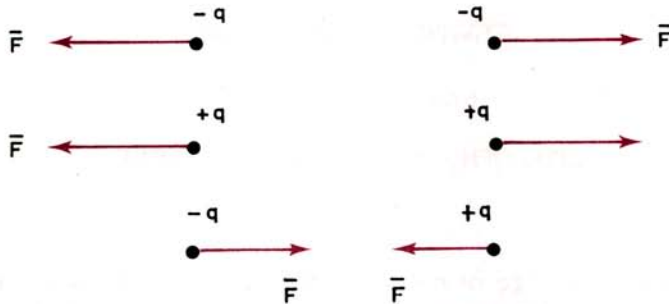
Πειραματικά έχει διαπιστωθεί ότι κατά την ηλέκτριση των σωμάτων μπορεί να αναπτυχθούν δυο ειδών ηλεκτρικά φορτία:

- Τα *αρνητικά* ηλεκτρικά φορτία, τα οποία εμφανίζονται κατά την ηλέκτριση ήλεκτρου ή εβονίτη από μάλλινο ύφασμα. Τα φορτία αυτά συμβολίζονται με το σύμβολο \ominus .
- Τα *θετικά* ηλεκτρικά φορτία, τα οποία εμφανίζονται κατά την ηλέκτριση γυαλιού από μεταξωτό ύφασμα. Τα φορτία αυτά συμβολίζονται με το σύμβολο \oplus .

Αρκετά νωρίς είχε διαπιστωθεί ότι μεταξύ των ηλεκτρικά φορτισμένων σωμάτων αναπτύσσονται

- *Ελκτικές δυνάμεις*, αν τα δυο σώματα είναι *ετερόνυμα* φορτισμένα, δηλαδή αν το ένα φέρει θετικά και το άλλο αρνητικά ηλεκτρικά φορτία.

- **Απωστικές δυνάμεις**, αν τα δυο σώματα είναι ομώνυμα φορτισμένα, δηλαδή αν και τα δυο φέρουν είτε θετικά, είτε αρνητικά φορτία (σχ. 1.1). Τέλος, έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι κατά την ηλεκτρίση των διαφόρων σωμάτων, τα αναπτυσσόμενα ηλεκτρικά φορτία είναι δυνατόν:
 - Είτε να παραμένουν για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα στην περιοχή, όπου αρχικά εμφανίστηκαν,
 - είτε να κατανέμονται ταχύτατα σε όλη τη μάζα του ηλεκτριζόμενου σώματος.



Σχ. 1.1.

Δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων.

Το τι ακριβώς συμβαίνει, εξαρτάται αποκλειστικά από το είδος του ηλεκτριζόμενου σώματος: έτσι:

- **Κακοί αγωγοί** ή **μονωτές** ονομάστηκαν τα σώματα, τα οποία δεν επιτρέπουν την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα από τη μάζα τους (ρητίνες, πλαστικά, γυαλί, ξύλο).
- **Καλοί αγωγοί** ή απλά **αγωγοί** ονομάστηκαν τα σώματα, τα οποία επιτρέπουν την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα από τη μάζα τους (μέταλλα, νερό κλπ.).

Όλα τα παραπάνω φαινόμενα, που πειραματικά παρατηρήθηκαν πριν από πάρα πολλά χρόνια, έχουν σήμερα ερμηνευθεί τελείως από σύγχρονες θεωρίες, όπως την **ηλεκτρονική θεωρία**. Στοιχεία από τη θεωρία αυτή, που θεωρούνται απαραίτητα για την κατανόηση των φαινομένων του ηλεκτρισμού και την επιστημονική θεμελίωση των αντιστοίχων εννοιών, θα αναπτύξουμε στις παραγράφους που ακολουθούν.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των θεμάτων αυτών, ας αναφέρομε ότι τα φαινόμενα των ηλεκτρικών αλληλεπιδράσεων που παρατηρούνται μεταξύ των διαφόρων σωμάτων, μπορεί να διακριθούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Φαινόμενα κατά τα οποία τα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται σε **ηρεμία**.
- Φαινόμενα κατά τα οποία τα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται σε **κίνηση**.

Και στις δυο αυτές περιπτώσεις δεν υπάρχει καμία διαφορά ως προς τη φύση των φορτίων και ως προς τις σχετικές με αυτά έννοιες. Λόγοι διδακτικής σκοπιμότητας έχουν επιβάλλει, ώστε τα φαινόμενα αυτά να μελετώνται στις εξής δυο διακεκριμένες ενότητες:

- **Στατικός ηλεκτρισμός:** Μελετά τα φαινόμενα που παρατηρούνται όταν τα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται σε ηρεμία.
- **Δυναμικός ηλεκτρισμός:** Σπουδάζει τα φαινόμενα που παρατηρούνται όταν τα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται σε κίνηση (π.χ. όλα τα φαινόμενα τα σχετικά με τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος).

Στο πρώτο μέρος του βιβλίου θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα φαινόμενα του στατικού ηλεκτρισμού. Σε όλο το υπόλοιπο τμήμα του θα μας απασχολήσουν φαινόμενα που εντάσσονται στο αντικείμενο του δυναμικού ηλεκτρισμού.

Κλείνοντας τη σύντομη αυτή εισαγωγική παράγραφο, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε ότι στο βιβλίο αυτό, για όλα τα εμπλεκόμενα φυσικά μεγέθη, θα χρησιμοποιήσουμε ως μονάδες μετρήσεως εκείνες του **Διεθνούς Συστήματος Μονάδων**. Έτσι, όλες οι σχέσεις που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια, θα θεωρείται ότι ισχύουν για μεγέθη εκφραζόμενα με μονάδες του συστήματος αυτού. Στην παράγραφο 1.9 υπενθυμίζονται με συντομία τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες τους στο σύστημα αυτό.

1.2 Σύσταση της ύλης.

Γνωρίζουμε ότι τα διάφορα σώματα συγκροτούνται από την **ύλη**, της οποίας κύρια χαρακτηριστικά είναι η **μάζα**, το **βάρος** και ο **όγκος**.

Χωρίζοντας συνέχεια την ύλη φθάνουμε σε πολύ μικρά τεμάχια, τα οποία δεν μπορούν να χωριστούν περισσότερο ούτε με φυσικά ούτε με μηχανικά μέσα (π.χ. άλεσμα, κόψιμο, έλξη, σφυρηλάτηση, τριβή κλπ). Τα σωματία αυτά, που διατηρούν όλες τις ιδιότητες του σώματος από το οποίο προέρχονται, ονομάζονται **μόρια**.

Τα μόρια μπορούμε να τα χωρίσουμε σε μικρότερα σωματία με χημικά μέσα. Τα σωματία αυτά ονομάζονται **άτομα**.

Τα άτομα συγκροτούνται από μικρότερα σωματίδια, τα οποία ονομάζονται **υποατομικά**. Τα κυριότερα από αυτά είναι:

α) **Το ηλεκτρόνιο:** Σωματίδιο φορτισμένο με το ελάχιστο αρνητικό φορτίο ($-e$), το οποίο μπορεί να υπάρχει ελεύθερο στη φύση. Στο ηλεκτρόνιο αποδίδεται μάζα ίση προς $9,108 \cdot 10^{-31}$ kg.

β) **Το πρωτόνιο:** Σωματίδιο φορτισμένο με θετικό φορτίο ίσον απόλυτα προς το φορτίο του ηλεκτρονίου. Έχει μάζα 1836 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου, δηλαδή $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

γ) **Το νετρόνιο:** Σωματίδιο που δεν έχει ηλεκτρικό φορτίο. Η μάζα του είναι περίπου ίση με τη μάζα του πρωτονίου.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, μικρότερο ηλεκτρικό φορτίο από εκείνο του ηλεκτρονίου δεν απαντάται στη φύση. Όπως μάλιστα θα γνωρίσουμε στη συνέχεια, κάθε ηλεκτρικό φορτίο – θετικό ή αρνητικό – έχει μέγεθος που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μεγέθους του φορτίου του ηλεκτρονίου. Για το λόγο αυτό το φορτίο του ηλεκτρονίου ονομάζεται **θεμελιώδες** ή **στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο**. Από μετρήσεις έχει βρεθεί ότι το μέγεθός του είναι:

$e = 1,6019 \cdot 10^{-19}$ C, όπου C = 1 Coulomb, μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων.

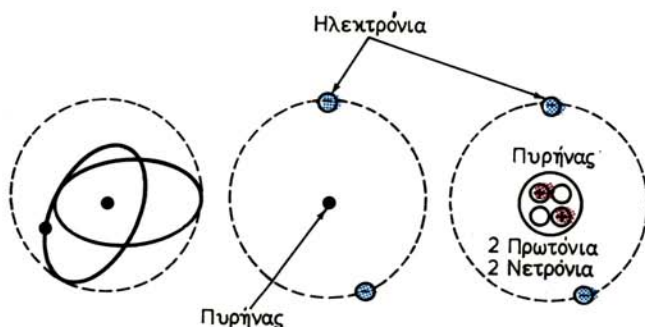
1.3 Δομή του ατόμου – Ιόντα.

Σύμφωνα με τις κλασικές αντιλήψεις, το άτομο κάθε στοιχείου θεωρείται σφαιρικό, έχει δε διάμετρο της τάξεως των 10^{-10} m. Στο κέντρο του βρίσκεται ο **πυρήνας**, ο οποίος αποτελείται από πρωτόνια και νετρόνια. Η διάμετρος του πυρήνα είναι της τάξεως των 10^{-15} m. Γύρω από τον πυρήνα, και σε μεγάλες σχετικά αποστάσεις, περιστρέφονται σε ελλειπτικές ή κυκλικές τροχιές τα ηλεκτρόνια του ατόμου.

Κάθε ένα ηλεκτρόνιο, ενός ατόμου, διαγράφει γύρω από τον πυρήνα ιδιαίτερη τροχιά καθώς βρίσκεται υπό την επίδραση των ελκτικών δυνάμεων εξαιτίας του θετικά φορτισμένου πυρήνα.

Έτσι, το άτομο μοιάζει με το ηλιακό μας σύστημα σε μικρογραφία. Τα περιφερειακά ηλεκτρόνια κάθε ατόμου διατάσσονται σε έναν από τους επτά **φλοιούς** ή **ηλεκτρονικές στιβάδες**. Η σύγχρονη ηλεκτρονική θεωρία προβλέπει ακριβώς το πλήθος των ηλεκτρονίων που μπορεί να ανήκει σ' ένα φλοιό και την κατανομή των ηλεκτρονίων κάθε ατόμου στους φλοιούς του.

Στο σχήμα 1.3 παριστάνεται η συγκρότηση του ατόμου του στοιχείου «ήλιον» (He) του οποίου ο πυρήνας αποτελείται από δυο πρωτόνια και δυο νετρόνια, ενώ γύρω του περιστρέφονται δυο ηλεκτρόνια στον ίδιο φλοιό.



Σχ. 1.3.

Συγκρότηση του ατόμου του ηλίου.

Τα συστατικά του πυρήνα, πρωτόνια και νετρόνια, καλούνται αδιακρίτως **νουκλεόνια**. Το πλήθος «A» των νουκλεονίων ενός πυρήνα ονομάζεται **μαζικός αριθμός** του πυρήνα, είναι δε ίσος:

$$A = Z + N \quad (1.1)$$

όπου: Z το πλήθος των πρωτονίων και

N το πλήθος των νετρονίων του πυρήνα.

Οι αριθμοί Z και N ονομάζονται **ατομικός αριθμός** και **νετρονικός αριθμός** αντίστοιχα.

Κανονικά, σε κάθε άτομο ο αριθμός των ηλεκτρονίων που περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων (Z). Επειδή το φορτίο

του πρωτονίου είναι κατά μέτρον ίσο με το φορτίο του ηλεκτρονίου και κατά το πρόσσημό του αντίθετο, συμπεραίνουμε ότι κάθε άτομο εμφανίζεται στον έξω κόσμο ως **ηλεκτρικά ουδέτερο**.

Αν μπορέσουμε με έναν οποιοδήποτε τρόπο (π.χ. κρούση του ατόμου με σωματίδιο που κινείται με μεγάλη ταχύτητα) να αφαιρέσουμε από ένα άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια, τότε το άτομο εμφανίζεται ως θετικά φορτισμένο και ονομάζεται **θετικό ιόν**. Για να ιονισθεί ένα ουδέτερο άτομο, απαιτείται ορισμένο έργο, το οποίο ονομάζεται **έργο ιονισμού**. Είναι προφανές ότι το αίτιο που προκαλεί τον ιονισμό πρέπει να έχει ενέργεια τουλάχιστον ίση με το έργο ιονισμού.

Όταν, αντίθετα, ένα άτομο προσλαμβάνει ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια πάλι καταστρέφεται η ισορροπία των ηλεκτρικών του φορτίων, οπότε εμφανίζεται αρνητικά φορτισμένο. Το άτομο αυτό ονομάζεται **αρνητικό ιόν**.

Γενικά, με τον όρο **ιόντα** αναφερόμαστε σε άτομα ή και μόρια των οποίων η ισορροπία των ηλεκτρικών φορτίων έχει διαταραχθεί. Έτσι, τα ιόντα χαρακτηρίζονται είτε από περίσσεια είτε από έλλειμμα ηλεκτρονίων.

1.4 Φύση του ηλεκτρισμού.

Στις προηγούμενες παραγράφους γνωρίσαμε μερικές από τις ιδιότητες των ηλεκτρικών φορτίων. Στην παράγραφο αυτή θα ολοκληρώσουμε τις σχετικές με τα ηλεκτρικά φορτία ιδιότητες, προκειμένου, παράλληλα με την ανάπτυξη μερικών ακόμη εννοιών, να έχουμε μια πληρέστερη αντίληψη σχετικά με τη φύση του ηλεκτρισμού.

α) Το ηλεκτρικό φορτίο απαντάται στη φύση σε **δύο διακεκριμένες καταστάσεις**:

- Ως αρνητικό (ηλεκτρόνιο).
- Ως θετικό (έλλειψη ηλεκτρονίων ή περίσσεια πρωτονίων).

β) Το μέγεθος κάθε ηλεκτρικού φορτίου που απαντάται στη φύση, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μεγέθους του ηλεκτρικού φορτίου του ηλεκτρονίου (e), έτσι, για κάθε ποσότητα (q) ηλεκτρικού φορτίου μπορούμε να γράψουμε:

$$q = n \cdot e \quad (1.2)$$

όπου n ακέραιος – θετικός ή αρνητικός – αριθμός.

Η πιο πάνω φυσική κατάσταση ονομάζεται «κβάντωση» του ηλεκτρικού φορτίου, οπότε λέμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι **κβαντωμένο**.

γ) Μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων αναπτύσσονται **δυνάμεις**. Οι δυνάμεις αυτές είναι ελκτικές, αν τα φορτία είναι ετερόνυμα, και απωστικές, αν είναι ομώνυμα.

δ) Ηλεκτρικά φορτία **αναπτύσσονται** στα διάφορα υλικά σώματα κάτω από κατάλληλες συνθήκες (π.χ. τριβή εβονίτου με μάλλινο ύφασμα).

ε) Ηλεκτρικά φορτία που αναπτύχθηκαν – με κάποιο τρόπο – σ' ένα υλικό σώμα **διατηρούνται**, εφόσον το σώμα παραμένει «ηλεκτρικά» απομονωμένο από τον υπόλοιπο κόσμο. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί την **αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου**, σύμφωνα με την οποία:

Σε απομονωμένο ηλεκτρικά σύστημα σωμάτων, δηλαδή σύστημα στο οποίο δεν μπορούν να έρθουν ούτε να απομακρυνθούν ηλεκτρικά φορτία, το

συνολικό φορτίο παραμένει σταθερό.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το σύστημα των σωμάτων A και B του σχήματος 1.4, που φέρουν ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα.

Ας φέρομε σε επαφή τα σώματα A και B. Αν υποθεθεί ότι μετακινηθούν n ηλεκτρόνια από το σώμα A στο σώμα B, το φορτίο του A θα γίνει:

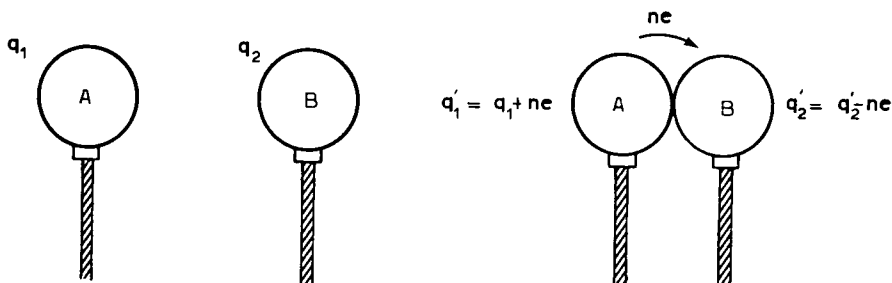
$$q_1' = q_1 + ne$$

και του B:

$$q_2' = q_2 - ne$$

Το συνολικό φορτίο στο σύστημα των δυο σωμάτων θα είναι:

$$q_1' + q_2' = (q_1 + ne) + (q_2 - ne) = q_1 + q_2 = \text{σταθ.}$$



Σχ. 1.4.

Σχηματική παράσταση της αρχής διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να εξηγήσουμε ως εξής την εμφάνιση ηλεκτρικών φορτίων σ' ένα σώμα ύστερα από τριβή: Με την τριβή των δυο διαφορετικών σωμάτων αποχωρίζονται ηλεκτρόνια από το ένα σώμα και πηγαίνουν στο άλλο, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν στο ένα σώμα θετικά ιόντα και στο άλλο αρνητικά. Έτσι, όταν αποχωρισθούν τα δυο σώματα, το ένα εμφανίζεται με θετικό φορτίο και το άλλο με αρνητικό.

Η ανάπτυξη θετικών ή αρνητικών ιόντων σ' ένα σώμα εξαρτάται αποκλειστικά από τη φύση του σώματος.

Μπορούμε ήδη να ανακεφαλαιώσουμε λέγοντας ότι φαινόμενα **ηλεκτρισμού** εμφανίζονται, όταν καταφέρομε να διαχωρίσουμε – με οποιονδήποτε τρόπο – ετερόνυμα ηλεκτρικά φορτία, υπερνικώντας τις ελκτικές δυνάμεις που τα κρατούν ενωμένα. Κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργείται σ' ένα σώμα έλλειμμα ηλεκτρονίων και ταυτόχρονα, σε ένα άλλο, πλεόνασμα.

1.5 Αγωγοί και μονωτές.

Μια πρώτη εισαγωγή των εννοιών του αγωγού και του μονωτή, έχει ήδη γίνει στην παράγραφο 1.1. Στην παράγραφο που ακολουθεί, αφού υπενθυμίσουμε τον

ορισμό των πολύ σημαντικών αυτών εννοιών, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε σχετικά με αυτές φυσικά φαινόμενα, στηριζόμενοι και σε στοιχεία της ηλεκτρονικής θεωρίας που προαναφέραμε.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, εάν φορτίσουμε με τριβή το ένα άκρο γυάλινης ράβδου, θα παρατηρήσουμε ότι τα ηλεκτρικά φορτία που εμφανίζονται στη ράβδο, εντοπίζονται στην περιοχή όπου έγινε η τριβή.

Αν όμως φορτίσουμε με τριβή μια μεταλλική ράβδο, θα παρατηρήσουμε ότι τα φορτία δεν παραμένουν στην περιοχή της τριβής, αλλά μετακινούνται και κατανέμονται σε όλη την επιφάνεια της ράβδου.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις διακρίνομε τα διάφορα σώματα σε αγωγούς και μονωτές:

Αγωγοί ονομάζονται τα σώματα που επιτρέπουν στα ηλεκτρικά φορτία να μετακινούνται μέσα στη μάζα τους.

Αγωγοί είναι τα μέταλλα, τα διαλύματα των ηλεκτρολυτών, ο άνθρακας κλπ. Οι αγωγοί που χρησιμοποιούνται περισσότερο στην ηλεκτροτεχνία είναι τα μεταλλικά σύρματα.

Μονωτές ή **διηλεκτρικά** ονομάζονται τα σώματα που δεν επιτρέπουν τη μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα στη μάζα τους.

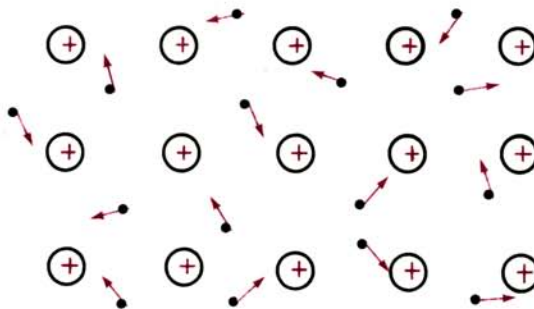
Μονωτές είναι το γυαλί, ο εβονίτης, το λάστιχο, τα υφάσματα, ο αέρας, η μίκα κλπ.

Την ιδιότητα που έχουν οι αγωγοί να επιτρέπουν τη μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων στη μάζα τους, την ονομάζομε **ηλεκτρική αγωγιμότητα** ή απλά **αγωγιμότητα**.

Τα ηλεκτρόνια, που περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα του ατόμου των μετάλλων, δεν συνδέονται όλα στερεά με το συγκρότημα του ατόμου, αλλά ένα τουλάχιστον ηλεκτρόνιο, που θεωρείται ότι ανήκει στην ονομαζόμενη «εξωτερική στιβάδα», συνδέεται χαλαρά και για το λόγο αυτό ονομάζεται **ελεύθερο ηλεκτρόνιο** ή **ηλεκτρόνιο σθένους**.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων οφείλεται στην άτακτη κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων μέσα στη μάζα τους (σχ. 1.5).

Αν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι πάρα πολλά, τότε λέμε ότι αποτελούν **ηλεκτρονιακό νέφος**. Εάν, με κάποιο τρόπο, καταφέρομε ώστε η κίνηση του νέφους των ελευθέρων ηλεκτρονίων να είναι «προσανατολισμένη», τότε



Σχ. 1.5.

Άτακτη κίνηση ελευθέρων ηλεκτρονίων μέσα στο μέταλλο.

έχομε ροή **ηλεκτρικού ρεύματος** διά του μεταλλικού αγωγού.

Όπως έχομε αναφέρει και τα διαλύματα των ηλεκτρολυτών θεωρούνται αγωγοί, η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα όμως οφείλεται σε ιόντα που κάτω από ορισμένες συνθήκες δημιουργούνται μέσα στο διάλυμα του ηλεκτρολύτη. Τα ιόντα αυτά μπορούν να κινούνται ελεύθερα στη μάζα του διαλύματος. Έτσι το διάλυμα παρουσιάζει αγωγιμότητα.

Γενικά, για να θεωρείται ένα σώμα αγωγός, πρέπει στη μάζα του να υπάρχει μεγάλος αριθμός ηλεκτρικών φορτίων, τα οποία μπορούν να κινούνται ελεύθερα μέσα σ' αυτήν. Οι μονωτές δεν παρουσιάζουν αγωγιμότητα επειδή στη μάζα τους δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια ή επειδή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι πολύ λίγα.

Στον πίνακα 1.5.1 δίνεται κατά προσέγγιση το πλήθος των ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά cm^3 ορισμένων αγωγών και ορισμένων μονωτών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5.1.
Πλήθος ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά cm^3 .

Αγωγοί	Άργυρος 10^{23}	Χαλκός $9,8 \cdot 10^{22}$	Αλουμίνιο $6 \cdot 10^{22}$	Σίδηρος $13 \cdot 10^{21}$
Μονωτές	Λάστιχο 0,2	Παραφίνη 16	Γυαλί $85 \cdot 10^3$	Μίκα 0,9

Εκτός από τους αγωγούς και τους μονωτές υπάρχει και μια ενδιάμεση κατηγορία υλικών, **οι ημιαγωγοί**. Οι ημιαγωγοί κάτω από ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρονται ως αγωγοί, ενώ κάτω από άλλες ως μονωτές.

Ημιαγωγοί είναι το πυρίτιο, το γερμάνιο, το γάλλιο κλπ.

1.6 Ηλέκτριση των σωμάτων.

Όπως έχομε αναφέρει, ηλέκτριση ενός σώματος είναι η διαδικασία δημιουργίας ηλεκτρικών φορτίων στο σώμα αυτό. Η ηλέκτριση μπορεί να επιτευχθεί κατ' αρχήν με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

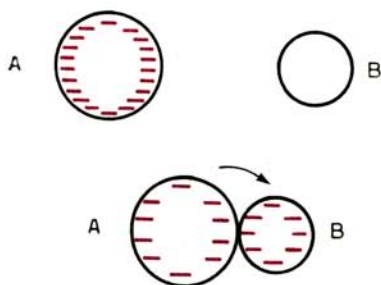
α) Ηλέκτριση με τριβή.

Όταν προστίθουμε δυο σώματα κατασκευασμένα από διαφορετικό υλικό, τότε τα σώματα έρχονται σε πολύ στενή επαφή μεταξύ τους. Εύκολα μπορούμε τότε να διαπιστώσομε ότι τα δυο σώματα αποκτούν ίσα κατά μέγεθος και αντίθετα κατά πρόσημο ηλεκτρικά φορτία. Αυτό συμβαίνει γιατί ηλεκτρόνια μετακινούνται από το ένα σώμα προς το άλλο, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται το ένα σώμα θετικά και το άλλο αρνητικά φορτισμένο.

β) Ηλέκτριση με επαφή.

Έστω ότι έχομε έναν αγωγό Α, αρνητικά φορτισμένο, και έναν άλλο αφόρτιστο ή ουδέτερο αγωγό Β (σχ. 1.6α).

Αν οι δυο αγωγοί έρθουν σε επαφή, ηλεκτρόνια από τον αρνητικά φορτισμένο αγωγό (Α) μετακινούνται προς τον αφόρτιστο (Β). Ο αγωγός Α χάνει έτσι ένα μέρος του φορτίου του, ενώ ο αγωγός Β φορτίζεται με αρνητικό φορτίο.



Σχ. 1.6α.

Φόρτιση αγωγού με επαφή.

γ) Ηλέκτριση με επαγωγή ή επίδραση.

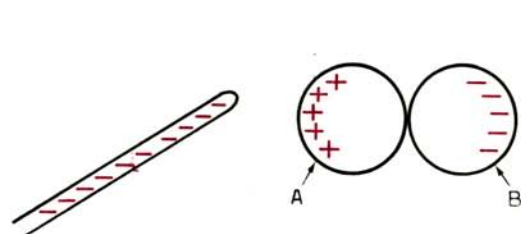
Έστω ότι έχουμε δυο αφόρτιστες μεταλλικές σφαίρες, A και B, σε επαφή. Πλησιάζουμε τώρα στη σφαίρα A μια ράβδο αρνητικά φορτισμένη (σχ. 1.6β). Ενώ κρατούμε τη ράβδο κοντά στη σφαίρα A, διακόπτομε την επαφή των σφαιρών και στη συνέχεια απομακρύνουμε και τη ράβδο. Εάν ελέγξουμε τώρα τις δυο σφαίρες διαπιστώνουμε ότι η A είναι φορτισμένη θετικά, ενώ η B αρνητικά. Ο τρόπος αυτός της ηλεκτρίσεως ονομάζεται **ηλέκτριση με επαγωγή** ή **επίδραση**. Το φορτίο της ράβδου ονομάζεται **επάγον**, ενώ τα φορτία που εμφανίζονται στις δυο μεταλλικές σφαίρες **επαγόμενα**. Ας δούμε τώρα πώς πραγματοποιείται η ηλεκτρίση αυτή.

Κατά την προσέγγιση της φορτισμένης ράβδου προς την αγωγίμη σφαίρα A, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της απωθούνται και κινούνται προς την αγωγίμη σφαίρα B. Έτσι, ο αγωγός A έχει έλλειμμα ηλεκτρονίων, δηλαδή φορτίζεται θετικά, ενώ ο αγωγός B περίσσεια, δηλαδή φορτίζεται αρνητικά. Μετά την απομάκρυνση των αγωγών και της ράβδου, τα φορτία παραμένουν, όπως ακριβώς αναπτύχθηκαν.

Με επαγωγή όμως μπορεί να φορτισθεί και ένας μόνον αγωγός. Αν το επάγον φορτίο είναι π.χ. αρνητικό, τότε στον αγωγό επάγονται θετικά φορτία, στην περιοχή όπου πλησιάζει η ράβδος που επάγει τα φορτία και αντίστοιχα αρνητικά φορτία στην αντίθετη περιοχή. Στην περίπτωση όμως αυτή τα επαγόμενα φορτία εξαφανίζονται, όταν απομακρύνουμε τη φορτισμένη ράβδο. Ωστόσο μπορούμε να φορτίσουμε μόνιμα έναν αγωγό αν τον προσγειώσουμε.

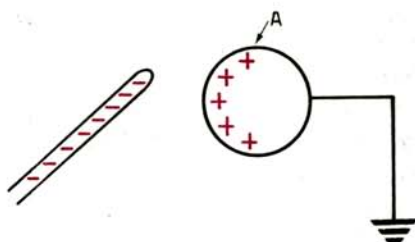
Προσγείωση ενός αγωγού ονομάζουμε τη σύνδεσή του στη γη με ένα σύρμα που παρουσιάζει μεγάλη αγωγιμότητα.

Αν πλησιάσουμε σ' ένα προσγειωμένο αγωγό A μια αρνητικά φορτισμένη ράβδο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού απωθούνται και κινούνται μέσα από το σύρμα προς τη γη (σχ. 1.6γ).



Σχ. 1.6β.

Ηλέκτριση αγωγών με επαγωγή.



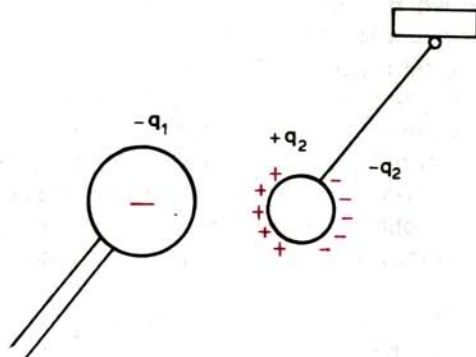
Σχ. 1.6γ.

Ηλέκτριση προσγειωμένου αγωγού με επαγωγή.

Έτσι ο αγωγός φορτίζεται με θετικό φορτίο που παραμένει σ' αυτόν αν διακόψουμε την προσγγείωση πριν απομακρύνουμε τη φορτισμένη ράβδο.

Εύκολα τώρα μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί το αφόρτιστο σφαιρίδιο του σχήματος 1.6δ, που κρέμεται από ένα μονωμένο νήμα, έλκεται από τη φορτισμένη σφαίρα.

Το σφαιρίδιο φορτίζεται με επαγωγή με ίσα κατά μέγεθος και αντίθετα κατά πρόσημο φορτία $+q_2$ και $-q_2$. Οι αποστάσεις των δυο αυτών φορτίων από τη φορτισμένη σφαίρα είναι διαφορετικές, με αποτέλεσμα η δύναμη, με την οποία έλκεται το φορτίο $+q_2$, να είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που απωθεί το φορτίο $-q_2$.



Σχ. 1.6δ.

Το φορτίο $-q_1$ ηλεκτρίζει με επαγωγή το σφαιρίδιο και έπειτα το έλκει.

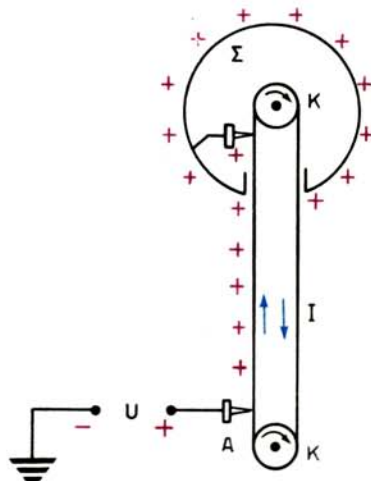
1.7 Ηλεκτροστατικές μηχανές.

Οι ηλεκτροστατικές μηχανές είναι γεννήτριες ηλεκτρικών φορτίων, των οποίων η λειτουργία στηρίζεται στην ηλεκτρίση με τριβή ή με επαγωγή. Χρησιμοποιούνται κυρίως για πειραματικές επιδείξεις και ερευνητικούς σκοπούς, γιατί τα ηλεκτρικά φορτία, τα οποία παρέχουν, δεν είναι εύκολα εκμεταλλεύσιμα.

Οι παλαιότερες ηλεκτροστατικές μηχανές (μηχανή Wimshurst, μηχανή του Ramsdem κλπ) τείνουν να αντικατασταθούν σήμερα από τη γεννήτρια **Van de Graaf** την οποία και θα περιγράψουμε.

Στη γεννήτρια αυτή ένας ιμάντας από ελαστικό Ι κινείται γύρω από δυο τροχαλίες Κ, Λ, από τις οποίες η Λ βρίσκεται στο εσωτερικό κοίλης μεταλλικής σφαίρας Σ με μεγάλες διαστάσεις (σχ. 1.7).

Στην κάτω άκρη του ο ιμάντας διέρχεται μπροστά από μια ακίδα (Α), η οποία έχει συνδεθεί με το θετικό πόλο πηγής συνεχούς τάσεως μερικών χιλιάδων Volt (π.χ. 20 kV). Ο αρνητικός πόλος της πηγής είναι προσγγειωμένος. Εξαιτίας του ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται γύρω από την ακίδα, ο αέρας ιονίζεται και τα αρνητικά ιόντα (και τα ηλεκτρόνια) έλκονται προς την ακίδα, ενώ τα θετικά ιόντα διοχετεύονται στον ιμάντα και μεταφέρονται προς τα επάνω. Εκεί «συλλέγονται» από δεύτερη ακίδα (Β) που βρίσκεται μέσα στη



Σχ. 1.7.

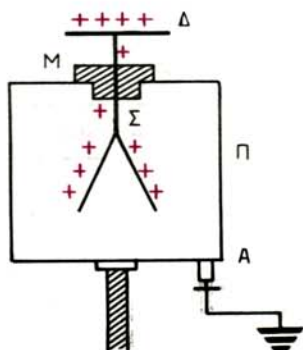
Σχηματική παράσταση ηλεκτροστατικής γεννήτριας Van de Graaf.

σφαίρα (Σ), οπότε, το φορτίο κατανέμεται στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας. Η δεύτερη αυτή ακίδα φορτίζεται με επαγωγή αρνητικά, ενώ η σφαίρα θετικά.

Θεωρητικά το θετικό φορτίο που παράγεται στη σφαίρα Σ , μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο. Η μεγάλη όμως αύξησή του μπορεί να προκαλέσει σπινθήρες με τα γειτονικά αντικείμενα, οπότε η σφαίρα εκφορτίζεται.

1.8 Το ηλεκτροσκόπιο.

Για τη μελέτη ορισμένων ηλεκτρικών φαινομένων χρησιμοποιείται από πολύ παλιά ένα απλό όργανο, το οποίο ονομάζεται ηλεκτροσκόπιο. Το ηλεκτροσκόπιο αποτελείται από μεταλλικό περίβλημα (Π) (σχ. 1.8), στου οποίου το εσωτερικό είναι τοποθετημένο ένα μεταλλικό στέλεχος (Σ), κατάλληλα μονωμένο από το μεταλλικό περίβλημα. Το στέλεχος (Σ) στο κάτω άκρο του φέρει δυο ελαφρά μεταλλικά φύλλα, συνήθως από αργίλιο ή άργυρο, τα οποία,



Σχ. 1.8.

Ηλεκτροσκόπιο με κινητά φύλλα.

εφόσον επάνω στο στέλεχος δεν έχουν αποθεθεί ηλεκτρικά φορτία, εφάπτονται μεταξύ τους. Στο επάνω άκρο του το στέλεχος (Σ) καταλήγει σε δίσκο (Δ) ή σε μικρή μεταλλική σφαίρα. Ο ακροδέκτης (A) του περιβλήματος προσγειώνεται. Όταν ο δίσκος φορτιστεί (π.χ. θετικά), είτε με επαφή είτε με επίδραση, τότε το στέλεχος και τα φύλλα φορτίζονται με ομώνυμα φορτία, οπότε τα φύλλα απωθούνται και σχηματίζουν γωνία, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερο είναι το φορτίο.

Έτσι, με το ηλεκτροσκόπιο μπορούμε να ελέγχομε – κατ' αρχήν – την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων, αλλά και να συγκρίνομε και ποσοτικά τα διάφορα φορτία μεταξύ τους, παρατηρώντας την απόκλιση των δυο φύλλων του. Πολλές φορές τα ηλεκτροσκόπια είναι βαθμονομημένα, είτε σε μονάδες ηλεκτρικού φορτίου, είτε συνηθέστερα σε μονάδες «ηλεκτρικού δυναμικού» (βλ. παράγρ. 2.4) που αποτελεί ηλεκτρικό μέγεθος ανάλογο του φορτίου. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτροσκόπιο ονομάζεται **ηλεκτρόμετρο**.

1.9 Συστήματα μονάδων.

Μετά τις εισαγωγικές γνώσεις σχετικά με τη φύση του ηλεκτρισμού μπορούμε ήδη να προχωρήσομε στην εισαγωγή των σχετικών φυσικών μεγεθών και να παρουσιάσομε επίσης τις ποσοτικές σχέσεις που τα συνδέουν. Για να συμβεί όμως αυτό, είναι απαραίτητο να επιλεγεί ένα κατάλληλο σύστημα μονάδων, με το οποίο:

- Καθορίζονται τα **θεμελιώδη** φυσικά μεγέθη, με τα οποία ορίζονται όλα τα **παράγωγα** φυσικά μεγέθη του ηλεκτρισμού που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.
- Καθορίζονται οι **μονάδες μετρήσεως** των θεμελιωδών μεγεθών, με τις οποίες ορίζονται οι μονάδες μετρήσεως των παραγώγων μεγεθών.

Ως σύστημα μονάδων, στο βιβλίο αυτό, χρησιμοποιούμε το Διεθνές Σύστημα Μονάδων που θεσπίστηκε το έτος 1972, και χρησιμοποιείται σήμερα σχεδόν αποκλειστικά. Τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη κατά το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (Système International d' Unités, S.I.), οι μονάδες μετρήσεώς τους και τα σύμβολά τους δίνονται στον πίνακα 1.9.1. Στον πίνακα 1.9.2 αναγράφονται προθέματα των μονάδων μετρήσεως για την επέκτασή τους κατά πολλαπλάσια δυνάμεων του δέκα. Ως παράδειγμα ας αναφέρομε ότι γράφομε 1 km αντί 1000 m ή 1 mA αντί 10^{-3} A κλπ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.9.1
Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη και μονάδες τους κατά το S.I.

Μέγεθος	Μονάδα μετρήσεως	Σύμβολο μονάδας
Μήκος	Μέτρο	m
Μάζα	Χιλιόγραμμα	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Ampere	A
Θερμοκρασία	Kelvin	K
Φωτεινή ένταση	Candela	cd

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.9.2.

Προθέματα μονάδων για την κατά πολλαπλάσια δυνάμεων του 10 επέκτασή τους*.

Πρόθεμα	Σύμβολο	Αξία
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Με τη βοήθεια των εξισώσεων ορισμού των διαφόρων μεγεθών του ηλεκτρισμού, θα προκύπτουν – κάθε φορά – οι αντίστοιχες μονάδες μετρήσεως. Αναφέρουμε π.χ. ότι το μέγεθος «ηλεκτρικό φορτίο» (Q) συνδέεται με την «ένταση συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος» (I) που διαρρέει αγωγό εντός «χρόνου» (Δt) με τη σχέση:

$$Q = I \cdot \Delta t$$

Έτσι, προκύπτει η μονάδα ηλεκτρικού φορτίου στο S.I.:

Μονάδα ηλεκτρικού φορτίου: $1 \text{ A} \cdot \text{s}$

Στην πιο πάνω μονάδα (A . s) έχει δοθεί η ονομασία «Coulomb». Έτσι έχουμε:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

Στα κεφάλαια που ακολουθούν, θα μας δοθεί η ευκαιρία να ορίσουμε τις μονάδες και αρκετών άλλων παραγώγων μεγεθών, σε συνάρτηση με τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών. Σε αρκετές περιπτώσεις θα γνωρίσουμε και τα «ονόματα» που έχουν δοθεί, για λόγους ευκολίας, στις παράγωγες μονάδες μέσα στα πλαίσια του S.I. Χαρακτηριστική τέτοια περίπτωση είναι η μονάδα μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου (Coulomb), που μόλις αναφέραμε.

Ας αναφέρουμε – για λόγους ιστορικούς και μόνο – ότι το πρώτο σύστημα μονάδων που χρησιμοποιήθηκε για τον Ηλεκτρισμό ήταν το **Ηλεκτροστατικό Σύστημα Μονάδων** (ΗΣΜ) που αποτελούσε επέκταση του συστήματος C.G.S. της Μηχανικής, με την προσθήκη – ως θεμελιώδους – του μεγέθους «ηλεκτρικό φορτίο», με μονάδα μετρήσεως:

* Κατά το S.I. συνιστώνται μόνον τα προθέματα με αξία 10^{3n} όπου n ακέραιος, θετικός ή αρνητικός αριθμός.

1 ΗΣΜ - φορτίου (ηλεκτροστατική μονάδα φορτίου)

Αυτή οριζόταν ως το σημειακό φορτίο, το οποίο ευρισκόμενο σε απόσταση 1 cm από ίσο σημειακό επίσης φορτίο και μέσα σε κενό, ασκεί σ' αυτό δύναμη ίση προς μία δύννη.

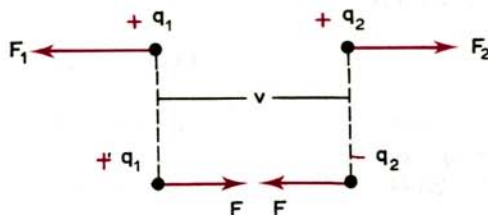
Ας σημειωθεί ότι μεταξύ της μονάδας αυτής και της αντίστοιχης του συστήματος S.I., ισχύει η σχέση:

$$1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι το Διεθνές Σύστημα Μονάδων αποτελεί εξέλιξη του παλαιότερου «Ορθολογισμένου Συστήματος MKSA-Giorgi», το οποίο έχει ως θεμελιώδεις μονάδες της Μηχανικής και του Ηλεκτρισμού τις ίδιες με το S.I.

1.10 Νόμος του Coulomb.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων ασκούνται δυνάμεις ελκτικές ή απωστικές, αν τα φορτία είναι ετερόνυμα ή ομώνυμα αντίστοιχα. Εάν τα σώματα επάνω στα οποία έχουν αναπτυχθεί τα ηλεκτρικά φορτία έχουν πάρα πολύ μικρές διαστάσεις σε σχέση με τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο βρίσκονται, π.χ. σε σχέση με τη μεταξύ τους απόσταση, τότε τα σώματα, και κατ' επέκταση τα ηλεκτρικά φορτία, εννοούνται ως «σημειακά». Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να υπολογισθεί η ασκούμενη δύναμη, με τη βοήθεια του θεμελιώδους νόμου του στατικού ηλεκτρισμού, του **νόμου του Coulomb** (σχ. 1.10), σύμφωνα με τον οποίο:



Σχ. 1.10.

Δυνάμεις μεταξύ σημειακών φορτίων (δυνάμεις Coulomb).

Η δύναμη που εξασκείται μεταξύ δυο σημειακών φορτίων, ελκτική ή απωστική, αν τα φορτία είναι ετερόνυμα ή ομώνυμα αντίστοιχα, έχει ως διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα δυο σημειακά φορτία, μέτρο δε ανάλογο προς το γινόμενο των δυο φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της αποστάσεώς τους, δηλαδή:

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (1.3)$$

όπου: F το μέτρο της ασκούμενης δυνάμεως,
 q_1, q_2 οι ποσότητες των δυο ηλεκτρικών σημειακών φορτίων,
 r η απόσταση των δυο φορτίων και
 k σταθερά αναλογίας.

Η **σταθερά αναλογίας** k εξαρτάται από δυο παράγοντες:

- Το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται, και
- το είδος του μονωτικού μέσου, στου οποίου το χώρο βρίσκονται τα δυο φορτία.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$k = \frac{k_0}{\epsilon} \quad (1.4)$$

και

$$F = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (1.5)$$

όπου: k_0 σταθερά που εξαρτάται από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται, και

ϵ αδιάστατη σταθερά, που εξαρτάται από τις ιδιότητες του μονωτικού μέσου, στου οποίου το χώρο βρίσκονται τα σημειακά φορτία και ονομάζεται **σχετική διηλεκτρική σταθερά** του μέσου.

Πριν προχωρήσουμε, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων ασκούνται είτε αυτά βρίσκονται μέσα σε κάποιο αγωγίμο μέσο, είτε σε μονωτικό. Για να διατηρείται όμως η φύση του φαινομένου, θα πρέπει το μέσο να είναι οπωσδήποτε μονωτικό. Αν ήταν αγωγίμο, τότε τα φορτία, κάτω από την επίδραση των δυνάμεων, θα αποκτούσαν κίνηση και η κατάσταση δεν θα ήταν στατική. Με τέτοιες μη στατικές (δυναμικές) καταστάσεις θα ασχοληθούμε στο Β' μέρος του βιβλίου. Στο πρώτο μέρος, όπου πραγματευόμαστε τα θέματα του στατικού ηλεκτρισμού, περιοριζόμαστε στην περίπτωση που το υλικό μέσο που διαχωρίζει τα φορτία είναι μονωτικό, οπότε αυτά εξαναγκάζονται να παραμένουν στις θέσεις όπου βρίσκονται, μολονότι σε κάθε ένα από αυτά ασκούνται δυνάμεις. Ιδιότητα λοιπόν των μονωτικών υλικών είναι ότι επιτρέπουν τη μετάδοση των ηλεκτρικών δυνάμεων μέσα από τη μάζα τους. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **διηλεκτρικότητα**.

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου είναι εξ' ορισμού ίση με τη μονάδα. Κατά προσέγγιση λαμβάνεται ίση με τη μονάδα και η σχετική διηλεκτρική σταθερά του αέρα ($\epsilon = 1$). Οι τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς των άλλων μονωτικών μέσων είναι μεγαλύτερες από τη μονάδα. Π.χ. για το νερό είναι $\epsilon = 81$, για το λάδι $\epsilon = 2$, για το θερνίκι $\epsilon = 4,8$ κλπ. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση (1.5) τόσο για το κενό όσο και για ένα άλλο μέσο που έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ , θα έχουμε:

$$F_0 = \frac{k_0}{1} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.6)$$

και

$$F = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.7)$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις (1.6) και (1.7) προκύπτει:

$$\frac{F_0}{F} = \epsilon \rightarrow F = \frac{F_0}{\epsilon} \quad (1.8)$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνομε ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά

ενός μονωτικού μέσου δείχνει πόσες φορές είναι μικρότερη η δύναμη που εξασκείται μεταξύ δυο φορτίων στο μέσο, από τη δύναμη που εξασκείται μεταξύ των δυο ίδιων φορτίων, όταν αυτά βρίσκονται στην ίδια απόσταση στο κενό.

Στο σύστημα S.I. η σταθερά k_0 παίρνει τη μορφή:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.9)$$

όπου ϵ_0 σταθερά, η οποία ονομάζεται **διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου**.

Η τιμή της προκύπτει πειραματικά ως εξής:

Δυο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_1 = q_2 = 1 \text{ C}$ τοποθετούνται στο κενό σε απόσταση $r = 1 \text{ m}$. Η δύναμη που εξασκείται μεταξύ τους βρίσκεται από μετρήσεις ότι είναι:

$$F = 8,9875 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Αν τις παραπάνω τιμές τις αντικαταστήσουμε στη σχέση (1.5) παίρνομε:

$$k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

οπότε από τη (1.9) προκύπτει:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

Επομένως ο **νόμος του Coulomb** στο σύστημα S.I. γράφεται:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.10)$$

όπου: F το μέτρο της ασκούμενης δύναμης (N),

q_1, q_2 οι ποσότητες των δυο ηλεκτρικών σημειακών φορτίων (C),

r η απόσταση των δυο φορτίων (m),

ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$) και

ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου, όπου βρίσκονται τα φορτία (αδιάστατος αριθμός).

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή πρέπει να αναφέρομε ότι ο νόμος του Coulomb δεν ισχύει για αποστάσεις $r < 10^{15} \text{ m}$, όπως π.χ. στην περιοχή του μικρόκοσμου των ατόμων. Μεταξύ νουκλεονίων του πυρήνα π.χ. ασκούνται απεναντίας ισχυρότατες ελκτικές πυρηνικές δυνάμεις, ανεξάρτητα από το φορτίο των σωματιδίων.

Παράδειγμα 1.10.1.

Να εξηγηθεί γιατί τα ιόντα Νατρίου (Na^+) και τα ιόντα χλωρίου (Cl^-), που

αποτελούν τον κρύσταλλο του χλωριούχου νατρίου (NaCl) αποχωρίζονται όταν ρίξουμε τον κρύσταλλο στο νερό. Δίνονται: $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 81$ και $\epsilon_{\text{αερ}} = 1$.

Λύση.

Η ηλεκτροστατική έλξη ανάμεσα στα ιόντα νατρίου ($q_1 = +e$) και τα ιόντα χλωρίου ($q_2 = -e$), όταν ο κρύσταλλος βρίσκεται στον αέρα, είναι κατά τη σχέση (1.5):

$$F_o = \frac{k_o}{\epsilon_{\text{αερ}}} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_o \frac{e^2}{r^2} \quad (1)$$

Όταν ρίξουμε τον κρύσταλλο στο νερό, η δύναμη που εξασκείται ανάμεσα στα ιόντα είναι:

$$F = \frac{k_o}{\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}} \frac{e^2}{r^2} = \frac{k_o}{81} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{F_o}{F} = 81 \rightarrow F = \frac{F_o}{81}$$

δηλαδή στο νερό η ηλεκτροστατική έλξη γίνεται 81 φορές μικρότερη με αποτέλεσμα τα ιόντα να αποχωρίζονται και ο κρύσταλλος να διαλύεται.

Παράδειγμα 1.10.2.

Δυο όμοια σφαιρίδια που βρίσκονται στο κενό έχουν φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ και $q_2 = -6 \mu\text{C}$. Αφού έρθουν σε επαφή απομακρύνονται σε απόσταση 2 cm. Ποια δύναμη εξασκείται ανάμεσά τους;

Λύση.

Ας είναι q_1' , q_2' τα φορτία των σφαιριδίων, μετά την επαφή τους. Σύμφωνα με την αρχή της διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου έχουμε:

$$q_{\text{ολ}} = q_1 + q_2 = q_1' + q_2' = 2 - 6 = -4 \mu\text{C}$$

Επειδή τα σφαιρίδια είναι όμοια, μετά την επαφή τους αποκτούν και τα δυο ίσα και ομώνυμα φορτία:

$$q_1' = q_2' = -2 \mu\text{C}$$

Έτσι θα εξασκηθεί μεταξύ τους απωστική δύναμη. Σε απόσταση $r = 2 \text{ cm}$ η δύναμη θα είναι, κατά τη σχέση (1.5):

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 90 \text{ N}$$

Παράδειγμα 1.10.3.

Η απόσταση r μεταξύ ενός ηλεκτρονίου και ενός πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι περίπου $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

α) Να υπολογιστούν και να συγκριθούν οι δυνάμεις Coulomb F_C με τις δυνάμεις βαρύτητας F_N που εξασκούνται μεταξύ των δυο σωματιδίων. Δίνονται: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, μάζα πρωτονίου $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, μάζα ηλεκτρονίου $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, σταθερά παγκόσμιας έλξεως $k = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ και $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

β) Να υπολογιστεί η συχνότητα του ηλεκτρονίου αν δεχθούμε ότι περιφέρεται ομαλά σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, ο οποίος αποτελείται από ένα πρωτόνιο.

Λύση.

$$\text{α) } F_C = k_0 \frac{e^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \rightarrow$$

$$F_C = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_N = k \frac{m_p m_e}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2}$$

$$\rightarrow F_N = 3,7 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

$$\text{Άρα } \frac{F_C}{F_N} \approx 2 \cdot 10^{39}$$

Επομένως η νευτώνεια δύναμη μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

β) Η δύναμη Coulomb $F_C = k_0 \frac{e^2}{r^2}$ η οποία εξασκείται από το πρωτόνιο στο ηλεκτρόνιο είναι κεντρομόλος (αφού η F_N θεωρείται αμελητέα), δηλαδή:

$$F_C = F_k \rightarrow k_0 \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r = 4m_e \pi^2 \nu^2 r$$

$$\text{Άρα } \nu = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{k_0 \frac{e^2}{m_e}}$$

Αν θέσουμε $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ και $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ βρίσκουμε $\nu \approx 6,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

2.1 Η έννοια του πεδίου.

Πεδίο ονομάζεται ο χώρος όπου, σε κάθε σημείο του ένα χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος έχει μια ορισμένη τιμή. Όταν το φυσικό μέγεθος είναι ανυσματικό, το πεδίο ονομάζεται **ανυσματικό**, ενώ όταν είναι μονόμετρο, το πεδίο ονομάζεται **βαθμωτό**.

Ο χώρος π.χ. ενός δωματίου είναι ένα πεδίο θερμοκρασιών (βαθμωτό). Σε κάθε σημείο του χώρου η θερμοκρασία (μονόμετρο μέγεθος) έχει μια ορισμένη τιμή. Ο χώρος επίσης όπου ρέει ένα υγρό είναι ένα πεδίο ταχυτήτων (ανυσματικό). Σε κάθε σημείο του η ταχύτητα ροής (ανυσματικό μέγεθος) έχει μια ορισμένη τιμή.

Ένα ανυσματικό πεδίο χαρακτηρίζεται ως **πεδίο δυνάμεων** εάν, όταν φέρομε μέσα σ' αυτό κατάλληλο υπόθεμα, ασκούνται σ' αυτό δυνάμεις. Πεδίο δυνάμεων είναι π.χ. το γνωστό πεδίο βαρύτητας, για το οποίο κατάλληλο υπόθεμα είναι η μάζα.

Εάν μέσα σ' ένα πεδίο δυνάμεων μετακινηθεί το υπόθεμα κατά το δρόμο Δs , θα παραχθεί έργο ΔA , ίσον προς:

$$\Delta A = (\bar{F} \cdot \bar{\Delta s}) \quad (2.1)$$

όπου \bar{F} η δύναμη την οποία δέχεται το υπόθεμα κατά το δρόμο.

Ανάλογα με το αν το έργο αυτό εξαρτάται ή όχι από τη μορφή της τροχιάς επάνω στην οποία έγινε η μετακίνηση, τα πεδία υποδιαιρούνται σε **στροβιλιά** και **αστρόβιλα**.

Ένα πεδίο δυνάμεων ονομάζεται **αστρόβιλο**, όταν το έργο, που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη μεταφορά του υποθέματος από ένα σημείο A σε άλλο σημείο B, είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που διαγράφει το υπόθεμα και εξαρτάται μόνο από τις θέσεις των σημείων A και B. Είναι φανερό ότι, όταν το υπόθεμα διαγράφει μια κλειστή τροχιά σ' ένα αστρόβιλο πεδίο, τότε το συνολικό έργο είναι ίσο με μηδέν. Το πεδίο της βαρύτητας καθώς και το ηλεκτροστατικό πεδίο που θα γνωρίσομε στην επόμενη παράγραφο, είναι αστρόβιλα πεδία.

Ένα πεδίο δυνάμεων ονομάζεται **στροβιλιά**, όταν το έργο, που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη μεταφορά του υποθέματος από ένα σημείο A σε άλλο σημείο B, εξαρτάται από την τροχιά που διαγράφει το υπόθεμα. Είναι φανερό ότι, σ' ένα στροβιλιά πεδίο, το συνολικό έργο σε μία κλειστή τροχιά είναι

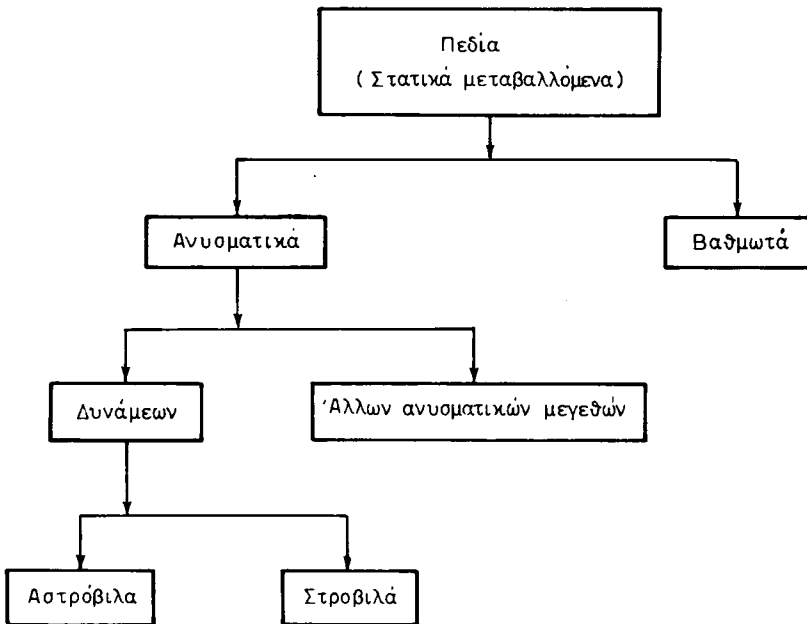
διάφορο του μηδενός.

Παράδειγμα στροβιλού πεδίου είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο που θα γνωρίσουμε σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου αυτού.

Ανάλογα με τη χρονική εξέλιξη των τιμών του χαρακτηριστικού φυσικού μεγέθους ενός πεδίου, τα πεδία διακρίνονται στις εξής δυο κατηγορίες:

- **Στατικά:** Ονομάζονται τα πεδία, των οποίων οι τιμές του χαρακτηριστικού φυσικού μεγέθους διατηρούνται χρονικά σταθερές.
- **Μεταβαλλόμενα:** Ονομάζονται τα πεδία, των οποίων οι τιμές του χαρακτηριστικού φυσικού μεγέθους μεταβάλλονται χρονικά.

Στο διάγραμμα του σχήματος 2.1, παρουσιάζεται η διάκριση των πεδίων σε κατηγορίες, με βάση τις ιδιότητές τους που εξετάσαμε πιο πάνω.



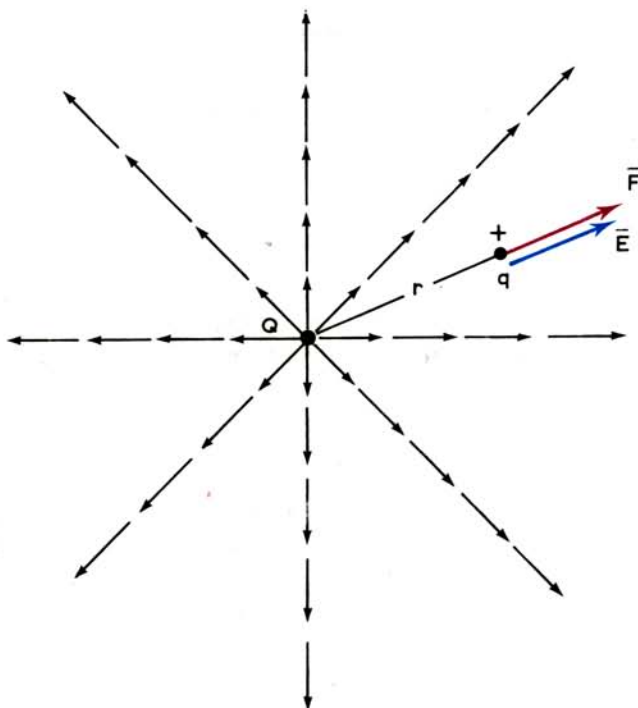
Σχ. 2.1.

Διάκριση των πεδίων σε κατηγορίες.

2.2 Ηλεκτρικό πεδίο – Ένταση ηλεκτρικού πεδίου.

Ας υποθέσουμε ότι στο χώρο ενός διηλεκτρικού έχομε φέρει ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q (σχ. 2.2a). Αν κατόπιν φέρομε στον ίδιο χώρο ένα δεύτερο, πολύ μικρό σημειακό φορτίο q , τότε διαπιστώνομε ότι στο δεύτερο αυτό φορτίο ασκούνται εξαιτίας του πρώτου δυνάμεις Coulomb.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το φορτίο Q δημιουργεί γύρω του πεδίο ηλεκτρικών δυνάμεων, το οποίο ονομάζεται **ηλεκτροστατικό πεδίο**. Η ύπαρξη του πεδίου αυτού διαπιστώνεται αν προσάγομε ως υπόθεμα ένα πολύ μικρό **δοκιμαστικό** φορτίο q , ώστε να μη μεταβάλλει η παρουσία του τη μορφή του



Σχ. 2.2α.

Παράσταση ηλεκτροστατικού πεδίου σημειακού φορτίου.

πεδίου του ηλεκτρικού φορτίου Q . Είναι φανερό ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι στατικό, γι' αυτό ονομάζεται «μόνιμο ηλεκτρικό πεδίο» ή απλά **ηλεκτρικό πεδίο**. Επί πλέον, αποδεικνύεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Έτσι μπορούμε να ανακεφαλιώσουμε:

Ηλεκτρικό πεδίο είναι ο χώρος, μέσα στον οποίο αν φέρομε ως υπόθεμα ένα ηλεκτρικό φορτίο, θα ασκηθεί σ' αυτό δύναμη (δύναμη Coulomb). Το ηλεκτρικό πεδίο είναι **αστρόβιλο**.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σ' ένα οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο φέρομε **θετικό** δοκιμαστικό φορτίο ($+q$). Αν είναι \vec{F} το διάνυσμα της δύναμης Coulomb, η οποία εξασκείται επί του δοκιμαστικού φορτίου - υποθέματος, τότε ορίζομε ως **ένταση ηλεκτρικού πεδίου** το ανυσματικό μέγεθος:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

(2.2)

Όπως φαίνεται, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι διάνυσμα που έχει ως διεύθυνση και φορά, τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης που εξασκείται σε θετικό δοκιμαστικό φορτίο (υπόθεμα).

Η μονάδα εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου, στο σύστημα S.I. είναι το:

Όπως θα γνωρίσουμε σε επόμενη παράγραφο η μονάδα αυτή είναι ισοδύναμη με τη μονάδα του S.I.:

$$1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από το σημειακό φορτίο Q , του σχήματος 2.2α, τότε από τις σχέσεις (1.10) και (2.2), προκύπτει ότι η ένταση του **ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου** Q , έχει μέτρο:

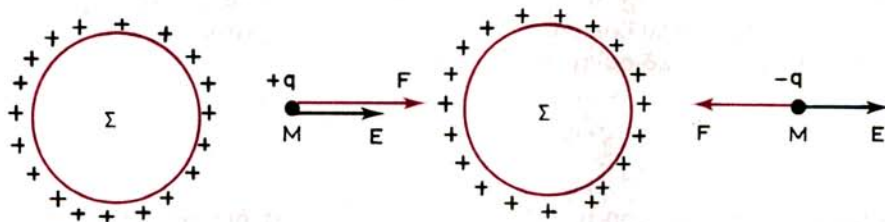
$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.3)$$

Από τη σχέση (2.3) φαίνεται ότι το μέτρο της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου σημειακού ηλεκτρικού φορτίου (Q) είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του φορτίου του υποθέματος και εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του φορτίου (Q) στο οποίο οφείλεται η ύπαρξη του πεδίου και από την απόσταση (r) της θέσεως όπου μετράται η ένταση από το σημείο όπου βρίσκεται το σημειακό φορτίο (Q).

Γενικά και στην περίπτωση του οποιουδήποτε ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται σε διάσπαρτα στο χώρο ηλεκτρικά φορτία, αποδεικνύεται ότι η ένταση του πεδίου είναι μέγεθος που εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και τις θέσεις των φορτίων που δημιουργούν το πεδίο, καθώς και από τη θέση **του πεδίου στην οποία μετράται η ένταση**. Είναι, δηλαδή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, χαρακτηριστικό μέγεθος του πεδίου που μεταβάλλεται εν γένει, σε κάθε σημείο του. Έτσι μπορούμε να πούμε, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι:

Ηλεκτροστατικό ή ηλεκτρικό-πεδίο ονομάζουμε το χώρο, σε κάθε σημείο του οποίου ένα φυσικό μέγεθος που ονομάζεται **ένταση**, λαμβάνει μια ορισμένη τιμή.

Ας αναφέρομε, ως παράδειγμα, μια ακόμη περίπτωση ενός ηλεκτρικού πεδίου: Στο σχήμα 2.2β φαίνεται το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η σφαίρα



Σχ. 2.2β.

Ηλεκτροστατικό πεδίο φορτισμένης σφαίρας.
α) Υπόθεμα $q > 0$. β) Υπόθεμα $q < 0$.

Σ , φορτισμένη με θετικό φορτίο. Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα σημείο M του ηλεκτρικού αυτού πεδίου τοποθετείται ένα σημειακό φορτίο q .

Όπως έχουμε πει, το φορτίο πρέπει να είναι σημειακό ή δοκιμαστικό, ώστε να μη μεταβάλλει η παρουσία του τη μορφή του πεδίου. Η δύναμη \vec{F} που ασκείται στο σημειακό φορτίο q θα είναι:

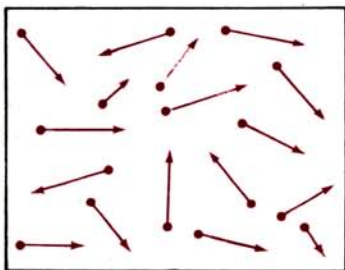
$$\vec{F} = \vec{E}q$$

Είναι φανερό ότι αν $q \geq 0$ τότε δύναμη και ένταση είναι ανύσματα παράλληλα και ομόρροπα ($\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{E}$), ενώ αν $q \leq 0$ τότε δύναμη και ένταση είναι ανύσματα παράλληλα και αντίρροπα ($\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{E}$).

2.3 Δυναμικές γραμμές – Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

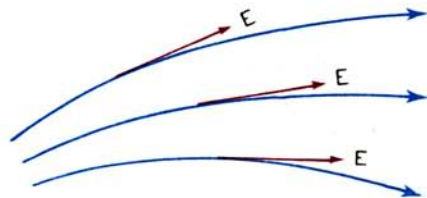
Το ηλεκτρικό πεδίο είναι απόλυτα καθορισμένο, όταν σε κάθε σημείο του χώρου του γνωρίζουμε την έντασή του \vec{E} . Αν επιχειρούσαμε να απεικονίσουμε τα ανύσματα της εντάσεως σε κάθε σημείο του χώρου ενός ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται π.χ. στο σχήμα 2.3α, θα είχαμε ένα μεγάλο αριθμό ανυσμάτων και η παραστατική εικόνα δεν θα ήταν καθόλου εποπτική.

Γι' αυτό, προκειμένου να έχουμε μια παραστατική απεικόνιση των ιδιοτήτων ενός ηλεκτρικού πεδίου, σχεδιάζουμε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3β.



Σχ. 2.3α.

Ανύσματα της εντάσεως ενός ηλεκτρικού πεδίου.

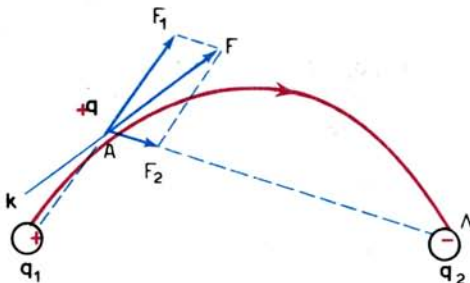


Σχ. 2.3β.

Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές.

Ως ηλεκτρική δυναμική γραμμή ορίζεται η γραμμή σε κάθε σημείο της οποίας η εφαπτομένη της έχει τη διεύθυνση της εντάσεως του πεδίου στο υπόψη σημείο. Επί της δυναμικής γραμμής σημειώνεται με βέλος και η φορά του διανύσματος της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου. Τέλος οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται έτσι, ώστε να μας δίνουν, κατά το δυνατόν, και το μέτρο της εντάσεως του πεδίου. Όπου οι δυναμικές γραμμές είναι **πυκνότερες**, εκεί και το πεδίο είναι **ισχυρότερο** και όπου είναι **αραιότερες** εκεί και το πεδίο είναι **ασθενέστερο**.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη φυσική σημασία της δυναμικής γραμμής,



Σχ. 2.3γ.

Μια δυναμική γραμμή του πεδίου δυο σημειακών φορτίων.

θεωρούμε δυο σημειακά φορτία $+q_1$ και $-q_2$ που συγκροτούν ένα ηλεκτρικό πεδίο και ένα τρίτο δοκιμαστικό φορτίο $+q$ στο σημείο A (σχ. 2.3γ).

Στο φορτίο $+q$ θα εξασκηθεί η συνισταμένη \vec{F} των δυνάμεων \vec{F}_1 και \vec{F}_2 (δυνάμεις Coulomb) με αποτέλεσμα το φορτίο, αν μπορούσε να κινηθεί, να διέγραφε στο χώρο την καμπύλη γραμμή ΚΑΛ. Αυτήν ακριβώς τη γραμμή την ονομάζουμε ηλεκτρική δυναμική γραμμή.

Η φορά των δυναμικών γραμμών, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, συμπίπτει με τη φορά της δυνάμεως που εξασκείται σε σημειακό θετικό φορτίο, που βρίσκεται σ' ένα σημείο της δυναμικής γραμμής. Επομένως **οι δυναμικές γραμμές έχουν φορά από τα θετικά φορτία στα αρνητικά.**

Προκειμένου να χαράξουμε τις δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτροστατικού πεδίου, πρέπει να έχουμε υπόψη τις εξής δυο ιδιότητές τους:

α) Οι δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου ξεκινούν πάντοτε από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζονται ως **ανοικτές** γραμμές.

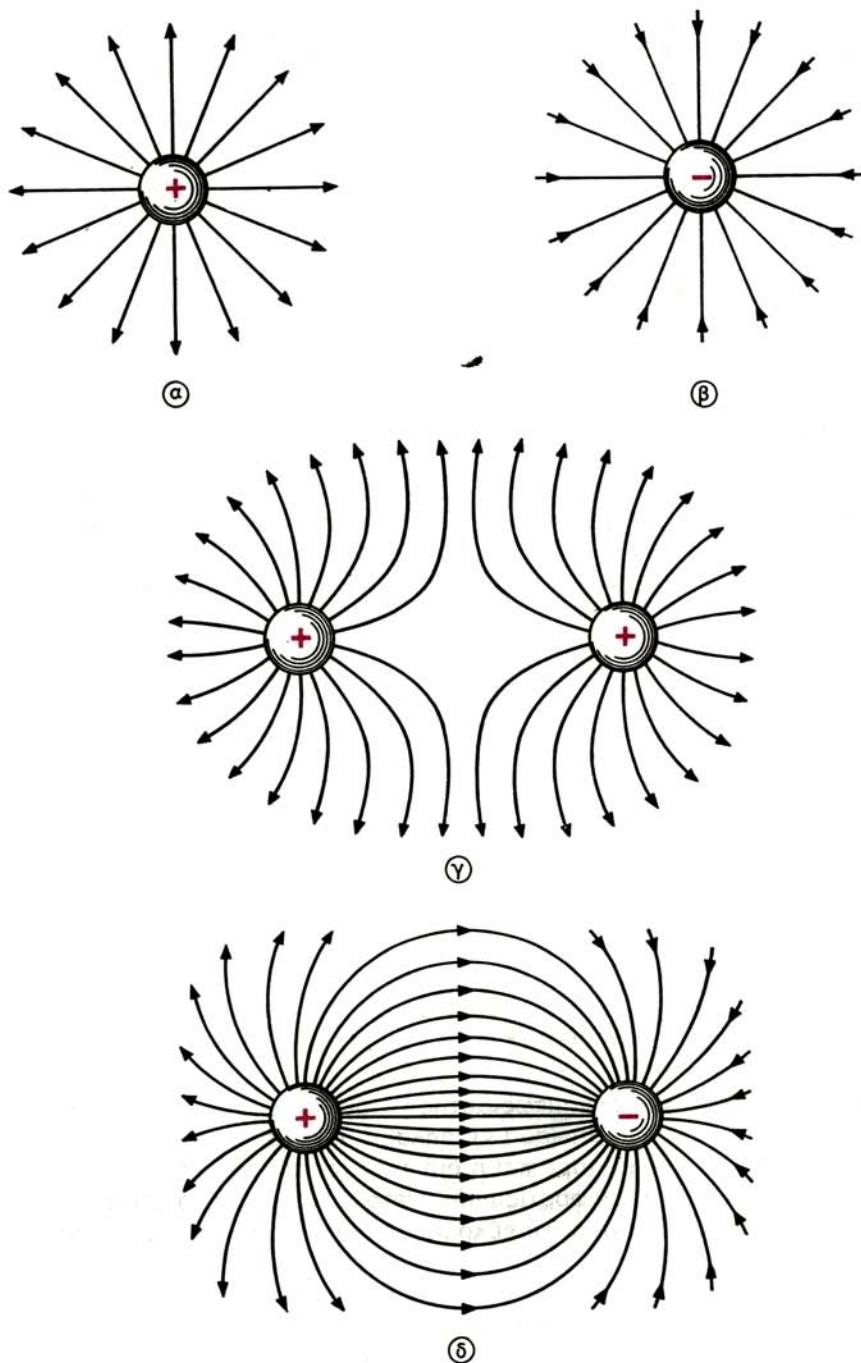
β) Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου **δεν τέμνονται**. Αυτό συμβαίνει επειδή σε κάθε σημείο του πεδίου η ένταση έχει καθορισμένη διεύθυνση και επομένως από κάθε σημείο του πεδίου περνά μια μόνο δυναμική γραμμή.

Στο σχήμα 2.3δ απεικονίζονται δυναμικές γραμμές διαφόρων ηλεκτρικών πεδίων.

Αν σ' ένα ηλεκτροστατικό πεδίο η ένταση \vec{E} είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του, δηλαδή έχει το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση και φορά, το ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται **ομογενές** ή **ομοιόμορφο**. Διαφορετικά ονομάζεται **ανομοιογενές** ή **ανομοιόμορφο**.

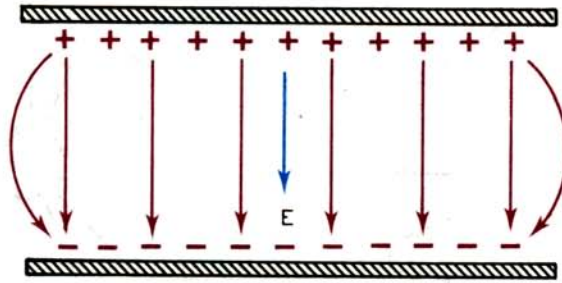
Το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παριστάνομε με δυναμικές γραμμές που είναι παράλληλες (και ομόρροπες) και ισαπέχουν.

Ένα ομογενές πεδίο δημιουργείται στο χώρο μεταξύ δυο παραλλήλων επιπέδων πλακών, που είναι τοποθετημένες ακριβώς η μία απέναντι στην άλλη και είναι φορτισμένες με ίσα, κατά μέτρον, αλλά ετερόνυμα φορτία (σχ. 2.3ε). Ας σημειώσουμε ότι κοντά στην άκρη των δυο πλακών οι δυναμικές γραμμές κρτώνουν, επειδή εκεί το πεδίο παύει να είναι ομογενές.



Σχ. 2.35.

Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές πεδίων: α) Θετικού σημειακού φορτίου. β) Αρνητικού σημειακού φορτίου. γ) Δυο ομώνυμων σημειακών φορτίων. δ) Δυο ετερώνυμων σημειακών φορτίων.



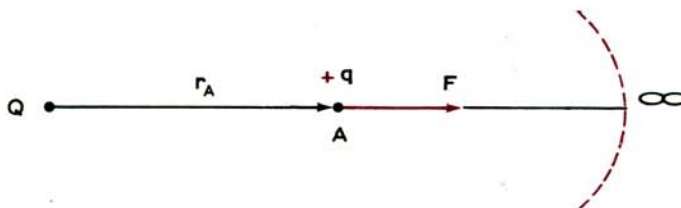
Σχ. 2.3ε.
Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

2.4 Δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου – Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

Έστω ότι σ' ένα σημείο A του ηλεκτρικού πεδίου, που δημιουργείται γύρω από το σημειακό φορτίο Q, φέρομε το δοκιμαστικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο + q (σχ. 2.4α).

Η δύναμη F που εξασκείται στο φορτίο + q είναι κατά τη σχέση (1.5):

$$F = \frac{k_0}{\epsilon} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \quad (2.4)$$



Σχ. 2.4α.
Πεδίο σημειακού ηλεκτρικού φορτίου.

Υπό την επίδραση της δύναμews αυτής το φορτίο q μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο A μέχρι το άπειρο (∞), δηλαδή μέχρι την περιοχή του χώρου, όπου η ένταση του πεδίου (άρα και η δύναμη) τείνει προς το μηδέν. Κατά τη μετακίνηση όμως αυτήν του φορτίου παράγεται έργο, το οποίο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπολογίζεται πολύ εύκολα, με βάση τις εξισώσεις της Μηχανικής.

Γενικά έργο παράγεται κατά τη μετακίνηση του δοκιμαστικού φορτίου μέσα σε οποιοδήποτε ηλεκτροστατικό πεδίο. Για να μπορούμε να αναφερόμαστε και να υπολογίζομε εύκολα το έργο αυτό, μας διευκολύνει η εισαγωγή ενός νέου μεγέθους, του απόλυτου δυναμικού ενός ηλεκτρικού πεδίου:

Απόλυτο δυναμικό σημείου A ενός ηλεκτρικού πεδίου ονομάζομε το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση δοκιμαστικού ηλεκτρικού φορτίου q, από το

σημείο A μέχρι το άπειρο, διά του φορτίου q.

Έτσι συμβολίζουμε για το απόλυτο δυναμικό $U_{A\infty}$ ενός σημείου A, ενός ηλεκτροστατικού πεδίου:

$$U_{A\infty} = \frac{W_{A\infty}}{q} \quad (2.5)$$

όπου: $W_{A\infty}$ το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A μέχρι το άπειρο (J) και q το δοκιμαστικό φορτίο που μετακινείται (C).

Όπως φαίνεται, το απόλυτο δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου είναι μέγεθος μονόμετρο, έχει δε μονάδα μετρήσεως στο S.I:

Μονάδα ηλεκτρικού δυναμικού: $1 \frac{J}{C}$

Η πιο πάνω μονάδα έχει ονομασθεί και **Volt**. Έτσι συμβολίζουμε:

$$1V = 1 \frac{J}{C} = 1 \frac{N \cdot m}{C}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε στο άπειρο ένα μικρό δοκιμαστικό φορτίο q, το οποίο επιθυμούμε να φέρομε και να τοποθετήσουμε σε σημείο A ενός ηλεκτροστατικού πεδίου. Για να το επιτύχουμε θα πρέπει να υπερνικήσουμε τις δυνάμεις Coulomb που ασκούνται στο δοκιμαστικό φορτίο από τα ηλεκτρικά φορτία που συγκροτούν το πεδίο. Άρα για να επιτευχθεί η μετακίνηση αυτή απαιτείται η κατανάλωση ενέργειας, η οποία αποταμιεύεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**. Αυτή αριθμητικά είναι ίση με το έργο που καταναλώνεται για να συγκροτηθεί ένα ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή είναι ίση με το έργο που καταναλώνεται για τη μεταφορά των φορτίων του πεδίου σε συγκεκριμένες θέσεις. Γι' αυτό δίδεται και ο παρακάτω ορισμός:

Απόλυτο δυναμικό σημείου A ενός ηλεκτρικού πεδίου ονομάζουμε το πηλίκον της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας, την οποία διαθέτει το ηλεκτρικό αυτό πεδίο και που οφείλεται σε ένα φορτίο q που βρίσκεται στο σημείο A, διά του ηλεκτρικού αυτού φορτίου:

$$U_{A\infty} = \frac{W_{\text{ΗΛ}}}{q} \quad (2.6)$$

Μπορούμε όμως να συμφωνήσουμε να υπολογίζουμε αντί για το απόλυτο δυναμικό σημείου A ενός ηλεκτρικού πεδίου, το δυναμικό του ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο αναφοράς K. Έτσι ορίζουμε ως:

Δυναμικό ή ηλεκτρικό δυναμικό σημείου A ενός ηλεκτρικού πεδίου ως προς **σημείο αναφοράς K**, την ενέργεια η οποία παράγεται – ή καταναλίσκεται – από τις δυνάμεις του πεδίου, κατά τη μετακίνηση δοκιμαστικού φορτίου q από το σημείο A στο K, ανά μονάδα ηλεκτρικού φορτίου. Συμβολίζουμε δε:

$$U_{AK} = \frac{W_{AK}}{q} \quad (2.7)$$

Στη συνέχεια του βιβλίου αυτού, για λόγους απλουστεύσεως της γραφής, θα σημειώνομε τα δυναμικά των σημείων των ηλεκτρικών πεδίων, ως προς το σημείο αναφοράς Κ, χωρίς να χρησιμοποιούμε το δείκτη Κ, τον οποίο όμως θα εννοούμε, δηλαδή θα γράφομε U_A , εννοώντας U_{AK} .

Στην ηλεκτροτεχνία, για λόγους πρακτικούς, λαμβάνεται ως σημείο αναφοράς η γη. Έτσι, αναφέρομε συνήθως τα δυναμικά των σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου **ως προς τη γη**, η οποία εξ' ορισμού έχει δυναμικό ίσο με μηδέν. Το ίδιο δυναμικό με τη γη έχει και κάθε αγωγός που συνδέεται με τη γη. Για το λόγο αυτό ονομάζεται και **προσγειωμένος**.

2.4.1 Δυναμικό πεδίου ενός σημειακού φορτίου.

Ας επανέλθομε τώρα στο ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο (σχ. 2.4α), για να υπολογίσουμε το απόλυτο δυναμικό σ' ένα σημείο (Α), του πεδίου αυτού. Έχομε ήδη γράψει τη σχέση (2.4) για τη δύναμη που δέχεται δοκιμαστικό φορτίο στο υπόψη σημείο. Το στοιχειώδες έργο (dW) που παράγεται κατά τη στοιχειώδη – κατά dr – μετατόπιση του φορτίου q, είναι:

$$dW = F \cdot dr = \frac{k_o}{\epsilon} \frac{Qq}{r^2} dr \quad (2.8)$$

Αν το φορτίο q μετακινηθεί μέχρι το άπειρο, τότε το έργο που παράγεται μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας την πιο πάνω σχέση (2.8) από το σημείο Α μέχρι το άπειρο, δηλαδή:

$$\begin{aligned} W_{A\infty} &= \int_A^{\infty} dW = \int_A^{\infty} \frac{k_o}{\epsilon} \frac{Qq}{r^2} dr = \frac{k_o}{\epsilon} Qq \int_A^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{k_o}{\epsilon} Qq \left[-\frac{1}{r} \right]_A^{\infty} = \frac{k_o}{\epsilon} \frac{Q \cdot q}{r_A} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Από τις σχέσεις (2.5) και (2.9) προκύπτει το **απόλυτο δυναμικό** στο σημείο Α ως:

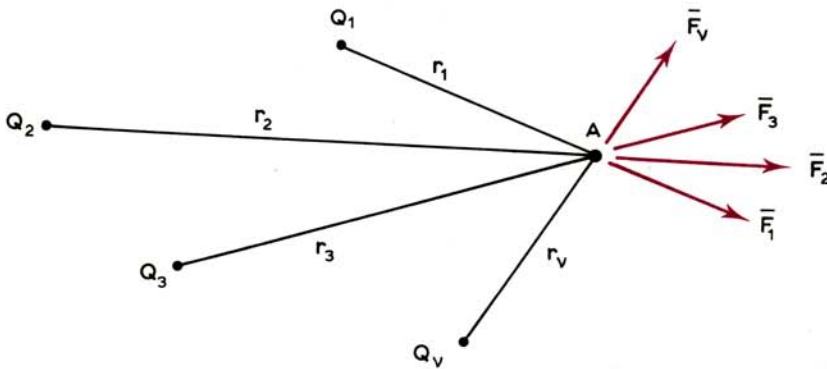
$$U_{A\infty} = \frac{k_o}{\epsilon} \frac{Q}{r_A} \quad (2.10)$$

Από τη σχέση (2.10) προκύπτει ότι: Το απόλυτο δυναμικό ενός σημειακού φορτίου σ' ένα σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ανεξάρτητο από το δοκιμαστικό φορτίο και εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του φορτίου που δημιουργεί το πεδίο και από τη θέση στην οποία το μετρούμε.

2.4.2 Δυναμικό ενός ηλεκτροστατικού πεδίου – Αρχή της επαλληλίας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο οφείλεται σε πλήθος σημειακών φορτίων $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_v$. Στην περίπτωση αυτή στο σημείο A του πεδίου όπου βρίσκεται δοκιμαστικό φορτίο (q) ασκούνται « v » δυνάμεις Coulomb, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_v$ (σχ. 2.48). Έτσι το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση του δοκιμαστικού φορτίου (q) από το σημείο A μέχρι το άπειρο θα είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων που απαιτούνται χωριστά για τη μετακίνηση του ίδιου φορτίου (q) στο πεδίο του καθένα από τα σημειακά φορτία $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_v$. Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (2.9), μπορούμε να γράψουμε:

$$W_{A\infty} = \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_1 \cdot q}{r_1} + \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_2 \cdot q}{r_2} + \dots + \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_v \cdot q}{r_v} \quad (2.11)$$



Σχ. 2.48.

Πεδίο διάσπαρτων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων.

Με συνδυασμό των (2.11) και (2.5) προκύπτει ότι το απόλυτο δυναμικό του πεδίου θα είναι:

$$\begin{aligned} U_{A\infty} &= \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_1}{r_1} + \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{Q_v}{r_v} = \\ &= U_{1A\infty} + U_{2A\infty} + \dots + U_{vA\infty} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Άμεσο συμπέρασμα που προκύπτει από τη σχέση (2.12) είναι ότι:

Το δυναμικό ενός σημείου A του ηλεκτροστατικού πεδίου, το οποίο οφείλεται στην παρουσία « v » σημειακών φορτίων ($Q_1, Q_2 \dots Q_v$), είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών που δημιουργεί στο σημείο A κάθε ένα από τα σημειακά φορτία.

Το συμπέρασμα αυτό εκφράζει την **αρχή της επαλληλίας** των ηλεκτρικών δυναμικών.

2.5 Διαφορά δυναμικού ή τάση.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (2.9) ή γενικότερα από τη σχέση (2.11), το έργο που παράγεται – ή καταναλώνεται – κατά τη μετακίνηση φορτίου q από ένα σημείο A ηλεκτρικού πεδίου σε ένα άλλο σημείο, όπου η ενέργεια του πεδίου είναι μηδέν (π.χ. το άπειρο), είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που διαγράφει το φορτίο. Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο είναι **αστρόβιλο**. Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό των αστροβίλων πεδίων (παράγρ. 2.1), όταν το ηλεκτρικό φορτίο διαγράφει κλειστή διαδρομή μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο, το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται είναι ίσο με μηδέν (σχ. 2.5α):

$$W_{AA} = q(U_A - U_A) = 0 \quad (2.13)$$

Θεωρούμε τώρα δυο σημεία A και B ενός ηλεκτρικού πεδίου με αντίστοιχα απόλυτα δυναμικά $U_{A\infty}$ και $U_{B\infty}$ (σχ. 2.5β).

$$\text{Θα είναι:} \quad U_{A\infty} = \frac{W_{A\infty}}{q} \text{ και } U_{B\infty} = \frac{W_{B\infty}}{q} \quad (2.14)$$

$$\text{Άρα:} \quad U_{A\infty} - U_{B\infty} = \frac{1}{q}(W_{A\infty} - W_{B\infty})$$

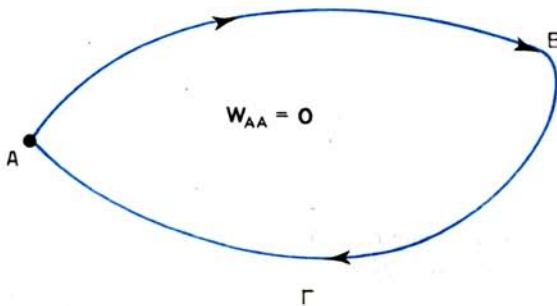
Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο θα έχουμε:

$$W_{A\infty} = W_{AB} + W_{B\infty} \Rightarrow W_{AB} = W_{A\infty} - W_{B\infty}$$

οπότε η (2.14) γίνεται:

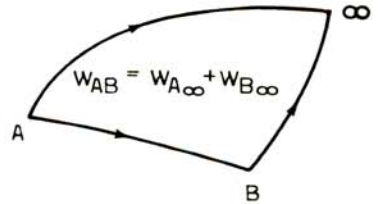
$$U_{AB} = U_{A\infty} - U_{B\infty} = \frac{W_{AB}}{q} \quad (2.15)$$

Η διαφορά $U_{AB} = U_{A\infty} - U_{B\infty}$ των απολύτων δυναμικών των σημείων A και B ονομάζεται διαφορά δυναμικού ή τάση. Βέβαια είναι πολύ εύκολο να δείξουμε



Σχ. 2.5α.

Έργο παραγόμενο εν κλειστή διαδρομή ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.



Σχ. 2.5β.

Παραγόμενο έργο στη διαδρομή AB, κατά την κίνηση φορτίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

ότι σχέση ανάλογη προς τη (2.15) ισχύει και για τα δυναμικά των σημείων A και B, ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς K. Δηλαδή γενικότερα ισχύει:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \frac{W_{AB}}{q} \quad (2.16)$$

Από τη σχέση (2.16) προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Ονομάζουμε διαφορά δυναμικού ή τάση μεταξύ δυο σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου το πηλίκον του έργου, που παράγεται ή καταναλώνεται για τη μεταφορά ενός δοκιμαστικού φορτίου q από το ένα σημείο στο άλλο, διά του φορτίου q .

Είναι φανερό ότι η μονάδα της διαφοράς δυναμικού (τάσεως) είναι η ίδια με τη μονάδα του δυναμικού που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή το Volt:

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Έτσι μπορούμε ανακεφαλαιώνοντας να πούμε ότι μεταξύ δυο σημείων A και B ενός ηλεκτροστατικού πεδίου υφίσταται διαφορά δυναμικού (τάση) 1 Volt, αν, μεταφέροντας φορτίο 1 Coulomb από το A στο B, παράγεται έργο ίσο με 1 Joule.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.16), δηλαδή:

$$W_{AB} = q (U_A - U_B) = q \cdot U_{AB} \quad (2.17)$$

μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής συμπεράσματα σε σχέση με το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται από το πεδίο, ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς δυναμικού $U_{AB} =$:

- α) $q > 0, U_A > U_B \Rightarrow W_{AB} > 0$ Το πεδίο παράγει έργο
- β) $q < 0, U_A < U_B \Rightarrow W_{AB} > 0$ Το πεδίο παράγει έργο
- γ) $q > 0, U_A < U_B \Rightarrow W_{AB} < 0$ Το πεδίο καταναλώνει έργο
- δ) $q < 0, U_A > U_B \Rightarrow W_{AB} < 0$ Το πεδίο καταναλώνει έργο

Τέλος, η σχέση (2.17) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το έργο (ηλεκτρική ενέργεια) που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη μεταφορά φορτίου μεταξύ δυο σημείων, τα οποία παρουσιάζουν γνωστή διαφορά δυναμικού. Επίσης από την ίδια σχέση (2.17) ορίζεται μια νέα μονάδα έργου που ονομάζεται **ηλεκτρονιοβόλτ** (1e V):

1e V είναι το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη μετακίνηση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ δυο σημείων, τα οποία παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού 1 V, δηλαδή:

$$1e \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

2.6 Σχέση μεταξύ τάσεως και εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου.

Ας υποθέσουμε ότι θετικό δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο q , κινείται σε διαδρομή AB μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 2.6α). Το στοιχειώδες έργο (dW) που παράγεται ή καταναλώνεται σε κάθε στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$, με αρχή το σημείο M της διαδρομής από το A στο B , θα είναι, σύμφωνα με το γνωστό ορισμό της Μηχανικής:

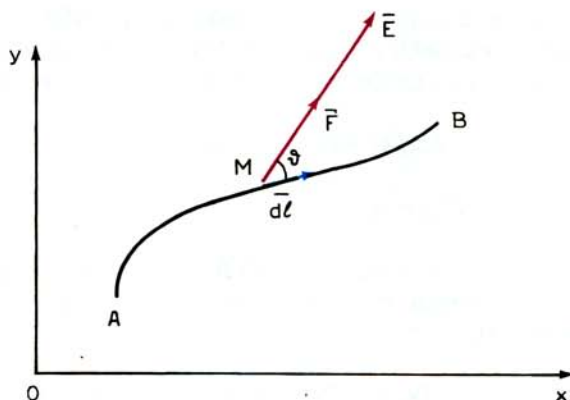
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cos\theta dl \quad (2.18)$$

όπου: \vec{F} η δύναμη που δέχεται το δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο q στο σημείο M και

θ η γωνία των ανυσμάτων \vec{F} και $d\vec{l}$.

Αντικαθιστούμε τώρα στη σχέση (2.18) τη δύναμη \vec{F} με την ένταση του πεδίου \vec{E} στο σημείο M , η οποία δίνεται από την εξίσωση (2.2):

$$dW = q\vec{E}d\vec{l} = q E \cos\theta dl \quad (2.19)$$



Σχ. 2.6α.

Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

Το συνολικό έργο που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη διαδρομή από το A στο B προκύπτει με ολοκλήρωση της (2.19), ως:

$$W_{AB} = \int_A^B dW = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = q \int_A^B E \cos\theta dl \quad (2.20)$$

Όμως το έργο από το A στο B μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού (τάσεως), σύμφωνα με τη σχέση (2.16):

$$W_{AB} = qU_{AB} = q(U_A - U_B) \quad (2.21)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.20) και (2.21) έχουμε:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E \cos\theta dl \quad (2.22)$$

Η σχέση (2.22) είναι πολύ σημαντική, γιατί συνδέει την τάση που υπάρχει μεταξύ δυο σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου, με την ένταση του πεδίου αυτού. Αλλά ας δούμε πώς μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση (2.22), κάνοντας ένα απλό ενεργειακό ισολογισμό:

Η ολική ενέργεια ($W_{ολ}$), η οποία περιέχεται μέσα σε ένα πεδιακό χώρο, όπου κινείται ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο q , σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας είναι σταθερή:

$$W_{ολ} = W_{κιν} + W_{δυν} = \text{σταθ.} \quad (2.23)$$

όπου: $W_{κιν}$ η κινητική ενέργεια του ηλεκτρικού φορτίου και
 $W_{δυν}$ η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του πεδίου.

Αν διαφορίσουμε την εξίσωση (2.23) λαμβάνουμε:

$$dW_{ολ} = dW_{κιν} + dW_{δυν} = 0 \quad (2.24)$$

ή

$$dW_{κιν} = -dW_{δυν} \quad (2.25)$$

Από τη σχέση (2.25) προκύπτει ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας ($dW_{κιν} > 0$) **ενός ηλεκτρικού φορτίου**, λόγω της κινήσεως φορτίου q , γίνεται σε βάρος της δυναμικής ενέργειας του πεδίου, η οποία **μειούται** ($dW_{δυν} < 0$).

Η στοιχειώδης κινητική ενέργεια του ηλεκτρικού φορτίου q , κατά την κίνησή του κατά στοιχειώδη απόσταση $d\vec{l}$, δίνεται από τη σχέση:

$$dW_{κιν} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.26)$$

Η στοιχειώδης δυναμική ενέργεια, την οποία **καταναλώνουν** οι πεδιακές δυνάμεις για να πραγματοποιηθεί αυτή η κίνηση, δίνεται από τη σχέση:

$$dW_{δυν} = qdU \quad (2.27)$$

όπου dU η μεταβολή του δυναμικού του πεδίου κατά την κίνηση του ηλεκτρικού φορτίου κατά $d\vec{l}$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.26) και (2.27) λαμβάνουμε:

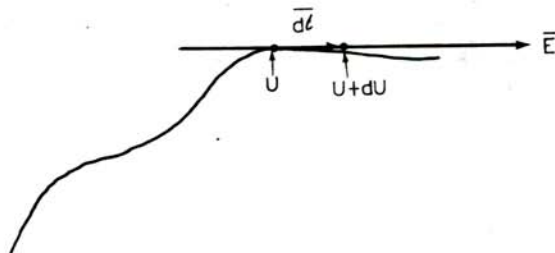
$$q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -qdU$$

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.28)$$

Από τη σχέση (2.28), με ολοκλήρωση της στοιχειώδους μεταβολής του δυναμικού (dU), προκύπτει η τάση U_{AB} και πάλι από τη σχέση (2.22). Αλλά ας δούμε ποια είναι η φυσική σημασία του προσήμου στη σχέση (2.28).

Αν το δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο κινείται μέσα στο πεδίο κατά τη

διεύθυνση και τη φορά του ανύσματος \vec{E} (σχ. 2.66), τότε προκύπτει στοιχειώδης μεταβολή του δυναμικού $dU < 0$. Αν δηλαδή το δυναμικό του πεδίου στην αρχή του ανύσματος $d\vec{l}$ είναι U , ενώ στο τέλος του $U + dU$, τότε το δυναμικό στο τέλος είναι μικρότερο από το δυναμικό της αρχής. Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται από θέσεις υψηλότερου προς θέσεις χαμηλότερου δυναμικού. Αυτό ακριβώς υποδηλώνει το πρόσημο «-» στη σχέση (2.28).



Σχ. 2.66.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται προς θέσεις με χαμηλότερο δυναμικό.

Αν το θετικό δοκιμαστικό φορτίο κινείται παράλληλα προς τις δυναμικές γραμμές (\vec{E} , $d\vec{l}$ παράλληλα και ομόρροπα, $\theta = 0$), τότε από τη σχέση (2.28) προκύπτει:

$$dU = E dl$$

ή

$$E = \frac{dU}{dl} \quad (2.29)$$

Από τη σχέση (2.29) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει ίσο με την ανά μονάδα μεταβολή του δυναμικού, επί μιας δυναμικής γραμμής, ή όπως λέμε με τη **βαθμίδα του δυναμικού**. Ας σημειωθεί επίσης ότι από τη σχέση (2.29) δικαιολογείται και ο ορισμός της μονάδας εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου:

$$1 \frac{V}{m} = 1 \frac{N}{C}, \text{ την οποία διατυπώσαμε στην παράγραφο 2.2.}$$

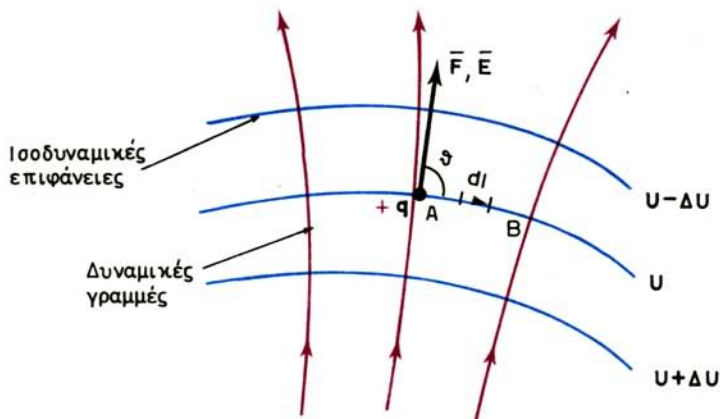
2.7 Ισοδυναμικές επιφάνειες.

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να το απεικονίσουμε όχι μόνο με τις δυναμικές γραμμές, αλλά και με τις **ισοδυναμικές επιφάνειες** (σχ. 2.7α).

Ονομάζουμε **ισοδυναμική επιφάνεια** ενός ηλεκτρικού πεδίου την επιφάνεια στην οποία το δυναμικό έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της.

Έτσι, για δυο σημεία A και B, που βρίσκονται επάνω σε μία ισοδυναμική επιφάνεια, θα ισχύει:

$$W_{AB} = q(U_A - U_B) = 0 \quad (2.30)$$



Σχ. 2.7α.

Οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Δηλαδή, όταν φορτίο q μετακινείται επάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια, το έργο που παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν.

Έτσι, αν θεωρήσουμε στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$ διαδρομής AB επάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια, τότε από τη σχέση (2.21) παίρνομε:

$$dU = E \cos\theta \, dl = 0$$

Επειδή όμως η ένταση του πεδίου $E \neq 0$, και βεβαίως εξ ορισμού $dl \neq 0$, θα πρέπει για να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση να ισχύει:

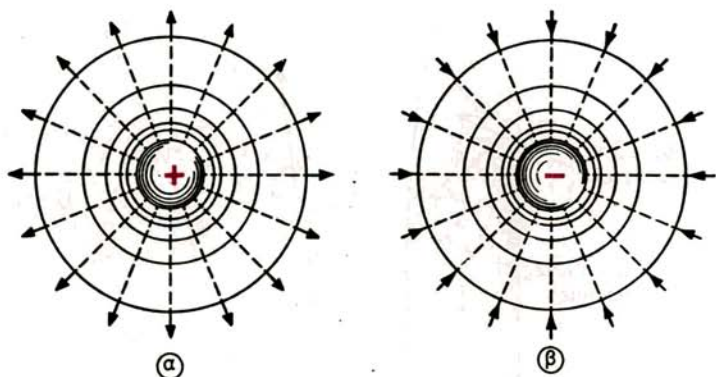
$$\begin{aligned} \text{ή} \quad & \cos\theta = 0 \\ & \theta = 90^\circ \end{aligned} \quad (2.31)$$

Από τη σχέση (2.31) προκύπτει ότι η δύναμη (και επομένως και η ένταση) σε κάθε σημείο του πεδίου θα είναι κάθετη στην ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο αυτό, δηλαδή **οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.**

Το σχήμα 2.7β (α,β) δείχνει την κατανομή των ισοδυναμικών επιφανειών γύρω από θετικό και γύρω από αρνητικό σημειακό φορτίο.

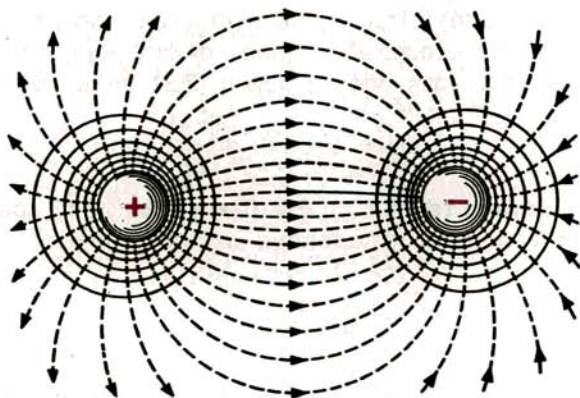
Το σχήμα 2.7γ δείχνει τις ισοδυναμικές επιφάνειες γύρω από το πεδίο δυο ετερωνύμων σημειακών φορτίων και το σχήμα 2.7δ τις ισοδυναμικές επιφάνειες του πεδίου μεταξύ δυο φορτισμένων παραλλήλων πλακών.

Με όσα έχομε αναπτύξει μέχρι τώρα καταλήγομε στο συμπέρασμα ότι η γνώση της εντάσεως σε κάθε σημείο ενός ηλεκτρικού πεδίου καθορίζει πλήρως το πεδίο και επιτρέπει τον υπολογισμό των διαφορών δυναμικού μεταξύ των σημείων του. Επί πλέον, η απεικόνιση των δυναμικών γραμμών και των ισοδυναμικών επιφανειών του πεδίου δίνει αμέσως μία εικόνα της συμπεριφοράς του πεδίου. Οι **ιδιότητες των δυναμικών γραμμών** και των **ισοδυναμικών επιφανειών**, τις οποίες ανακεφαλαιώνομε στη συνέχεια, επιτρέπουν το γρήγορο και ορθό σχεδιασμό τους:



Σχ. 2.76.

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες γύρω από: α) Θετικό και β) αρνητικό σημειακό φορτίο.



Σχ. 2.7γ.

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες πεδίου δυο ετερονύμων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων.

1) Το άνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου εφάπτεται σε κάθε σημείο μιας δυναμικής γραμμής.

2) Η τάση μεταξύ δυο σημείων μιας ισοδυναμικής επιφάνειας είναι μηδέν.

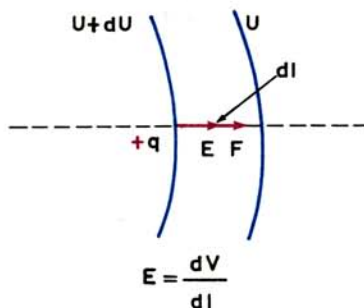
3) Σε κάθε σημείο ενός ηλεκτροστατικού πεδίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες προς τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

4) Όπως προκύπτει από τη σχέση (2.29), η απόσταση μεταξύ δυο ισοδυναμικών επιφανειών (σχ. 2.7ε) είναι τόσο μικρότερη, όσο η ένταση του πεδίου είναι μεγαλύτερη, δηλαδή οι ισοδυναμικές επιφάνειες θα είναι πολύ κοντά στις περιοχές, όπου η ένταση του πεδίου είναι μεγάλη και θα απέχουν περισσότερο εκεί όπου η ένταση είναι μικρή. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα 2.7στ, το οποίο παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ μιας ακίδας και μιας επίπεδης επιφάνειας.



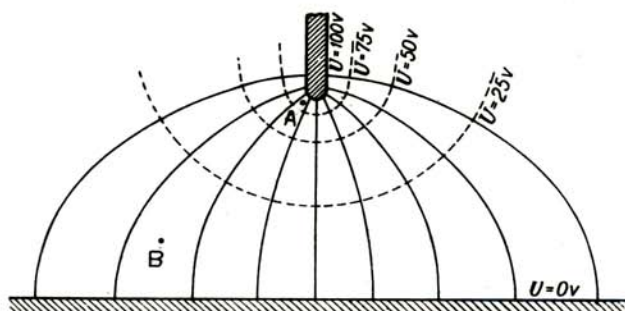
Σχ. 2.7δ.

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες πεδίου δυο φορτισμένων παραλλήλων πλακών.



Σχ. 2.7ε.

Δυο ισοδυναμικές επιφάνειες.



Σχ. 2.7στ.

Στο σημείο A, όπου το πεδίο έχει μεγάλη ένταση, η απόσταση των ισοδυναμικών επιφανειών είναι μικρή, ενώ στο σημείο B, όπου το πεδίο είναι ασθενές, είναι μεγάλη.

5) Η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου κατευθύνεται από θέσεις υψηλότερου προς θέσεις χαμηλότερου δυναμικού. Αυτό προκύπτει και από την εξίσωση (2.22):

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

αν η ολοκλήρωση γίνεται κατά τη φορά του ανύσματος \vec{E} .

2.8 Μορφές ηλεκτρικών πεδίων.

Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις ηλεκτρικών πεδίων:

2.8.1 Πεδίο Coulomb (ανομοιογενές πεδίο).

Πεδίο Coulomb ονομάζεται το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται γύρω από ένα σημειακό φορτίο Q (σχ. 2.8α).



Σχ. 2.8α.

Καθορισμός του ανύσματος της εντάσεως σε πεδίο Coulomb.

Αν σε ένα σημείο A του πεδίου φέρομε ένα δοκιμαστικό φορτίο q , θα εξασκηθεί σ' αυτό δύναμη ίση με [σχέση (1.5)]:

$$F = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Η ένταση του πεδίου στο σημείο A θα είναι:

$$E = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (2.32)$$

Από τη σχέση (2.32) προκύπτει ότι η ένταση είναι συνάρτηση της αποστάσεως από το φορτίο Q . Επομένως σε κάθε σημείο του πεδίου η ένταση είναι γενικά διαφορετική και το πεδίο θα είναι ανομοιογενές.

Το άνυσμα της εντάσεως καθορίζεται από τη σχέση (2.32), αν γραφεί με την ανυσματική μορφή:

$$\vec{E} = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (2.33)$$

Από τη σχέση (2.33) προκύπτει ότι η ένταση έχει την ίδια διεύθυνση με το άνυσμα \vec{r} .

Η φορά της εντάσεως θα είναι ομόρροπη με το άνυσμα \vec{r} , αν $Q > 0$ και αντίρροπη, αν $Q < 0$.

Οι δυναμικές γραμμές στο πεδίο Coulomb έχουν σχεδιασθεί στο σχήμα 2.35. Αν το ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται στην παρουσία πολλών σημειακών φορτίων Q_1, Q_2, \dots, Q_n , τότε η έντασή του σε ένα σημείο A βρίσκεται αν συνθέσουμε όλες τις εντάσεις $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$, τις οποίες κάθε φορτίο δημιουργεί στο σημείο A , δηλαδή:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (2.34)$$

Το δυναμικό στο σημείο A του πεδίου ενός σημειακού φορτίου, όπως έχουμε αποδείξει, παρέχεται από τη σχέση:

$$U_A = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r} \quad (2.35)$$

Από τη σχέση (2.35) συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό σ' ένα σημείο του πεδίου μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το πρόσημο του φορτίου Q. Επίσης παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία που απέχουν την ίδια απόσταση από το φορτίο Q, θα έχουν και το ίδιο δυναμικό, επομένως θα ανήκουν στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια.

Άρα οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο πεδίο Coulomb είναι σφαιρικές με κέντρο το φορτίο Q (σχ. 2.76).

2.8.2 Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Όταν σε κάθε σημείο ενός ηλεκτρικού πεδίου η ένταση \vec{E} είναι σταθερή ως διάνυσμα, δηλαδή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, τότε το πεδίο ονομάζεται ομογενές. **Ομογενές** είναι το πεδίο που δημιουργείται μεταξύ δυο παραλλήλων επιπέδων πλακών, όπως γνωρίσαμε στην παράγραφο 2.3.

Στο ομογενές πεδίο οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι παράλληλα επίπεδα (σχ. 2.7δ).

Θεωρούμε δυο σημεία A και B σ' ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και έστω ότι ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο q μετακινείται από το A στο B (σχ. 2.86).

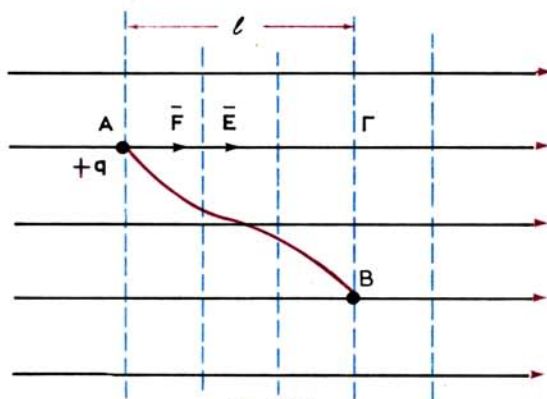
Το παραγόμενο από το πεδίο έργο είναι:

$$W_{AB} = q(U_A - U_B) \quad (2.36)$$

Είναι όμως: $W_{AB} = F \cdot l = E \cdot q \cdot l \quad (2.37)$

όπου l η προβολή της διαδρομής AB στη διεύθυνση της δυνάμεως.

Από τις (2.36) και (2.37) προκύπτουν οι σχέσεις:



Σχ. 2.86.

Δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

$$E = \frac{U_A - U_B}{l} \quad (2.38)$$

και

$$U_A - U_B = E \cdot l \quad (2.39)$$

Από τη σχέση (2.39) προκύπτει ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων ομογενούς πεδίου είναι ανάλογη με την απόσταση των ισοδυναμικών επιφανειών που διέρχονται από τα δυο σημεία. Το σχήμα 2.8γ παριστάνει τη μεταβολή του δυναμικού U σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση με την απόσταση των ισοδυναμικών επιφανειών.

Στην ίδια σχέση (2.38) μπορούμε να καταλήξουμε και εάν εφαρμόσουμε τη γενικότερη σχέση που συνδέει την τάση και την ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου (2.22):

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E \cos\theta \, dl$$

Στην προκειμένη περίπτωση όμως ισχύει $U_B = U_\Gamma$, άρα:

$$U_{AB} = U_{A\Gamma} = \int_A^\Gamma E \cos\theta \, dl$$

Σε όλη τη διαδρομή όμως από το A στο Γ κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής τα ανύσματα \vec{E} και $d\vec{l}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα, άρα $\theta = 0$, οπότε:

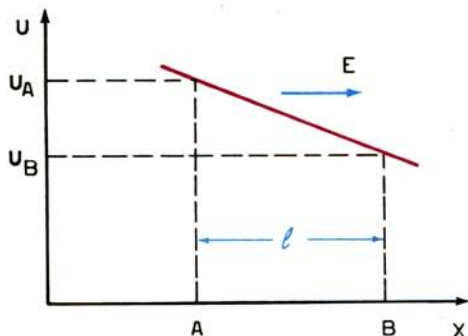
$$U_{AB} = \int_A^\Gamma E \, dl$$

Επί πλέον η ένταση \vec{E} είναι σταθερή σ' όλες τις θέσεις του πεδίου, άρα και κατά τη διαδρομή από A σε Γ. Άρα:

$$U_{AB} = E \int_A^\Gamma dl = E \cdot l \quad \text{ή} \quad U_{AB} = U_A - U_B = E \cdot l$$

2.8.3 Το πεδίο του ηλεκτρικού διπόλου.

Ηλεκτρικό δίπολο ονομάζεται ένα σύστημα δυο ίσων και ετερονύμων ηλεκτρικών σημειακών φορτίων που απέχουν μικρή απόσταση l . Είναι φανερό ότι αν τα δυο φορτία ήταν σε επαφή, τότε θα αλληλοεξουδετερώνονταν, οπότε



Σχ. 2.8γ.
Μεταβολή του δυναμικού ενός ομογενούς πεδίου σε σχέση με την απόσταση.

δεν θα υπήρχε ηλεκτρικό φορτίο. Όμως αν απέχουν έστω και μικρή απόσταση, δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

Το δυναμικό σ' ένα σημείο P του πεδίου (σχ. 2.8δ) υπολογίζεται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας (σχέση 2.12), ως:

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r_1} - \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r_2} = \frac{k_0 Q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.40)$$

Αν το σημείο P απέχει αρκετά από τα φορτία, σε σχέση με τη μεταξύ τους απόσταση l , τότε προσεγγιστικά μπορεί να ληφθεί:

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos\theta \quad \text{και} \quad r_2 = r + \frac{l}{2} \cos\theta$$

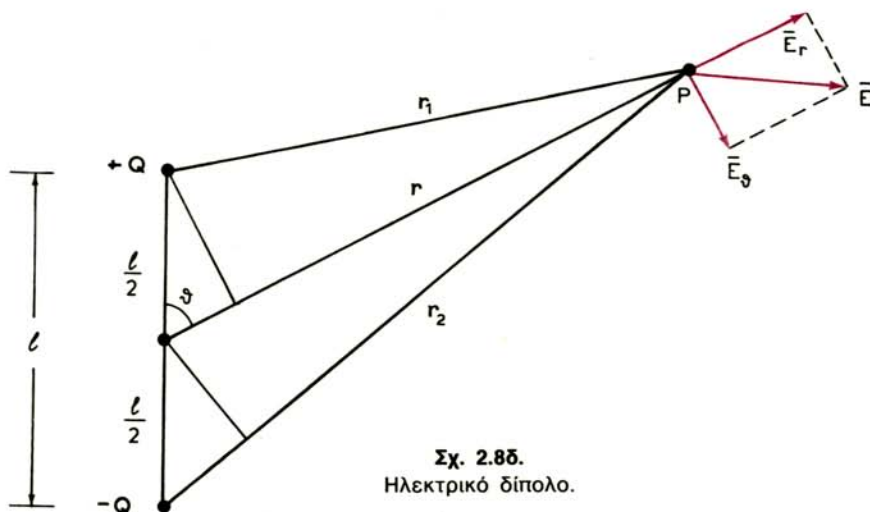
οπότε το δυναμικό στο σημείο P δίνεται από τη:

$$U_P = \frac{k_0 Q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{l}{2} \cos\theta} \right) = \frac{Qk_0}{\epsilon} \frac{l \cos\theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2\theta} \quad (2.41)$$

Επειδή υποθέτουμε ότι το σημείο P απέχει πάρα πολύ από το δίπολο, μπορεί επί πλέον να ληφθεί $r \gg l$ και $r^2 \gg \frac{l^2}{4} \cos^2\theta$, και η πιο πάνω σχέ-

ση γίνεται:

$$U_P = \frac{k_0 Q l \cos\theta}{\epsilon r^2} \quad (2.42)$$



Σχ. 2.8δ.
Ηλεκτρικό δίπολο.

Το γινόμενο $Q \cdot l$ ονομάζεται **διπολική ροπή**.

Ο υπολογισμός της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P γίνεται, αν διατυπωθεί και λυθεί – σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων – σχέση ανάλογη προς τη (2.28), που συνδέει την ένταση και το δυναμικό μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Επειδή όμως η ανάπτυξη αυτή δεν περιέχεται στο σκοπό του βιβλίου αυτού, θα παρουσιάσουμε μόνο τα συμπεράσματά της, που είναι πάρα πολύ χρήσιμα. Έτσι, το διάνυσμα της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο σημείο P δίνεται συναρτήσει των δυο συνιστωσών του:

– Της \vec{E}_r , κατά την ακτίνα r , με μέτρο:

$$E_r = \frac{-2k_0 Q l \cos\theta}{\epsilon r^3} \quad (2.43)$$

– Της \vec{E}_θ , καθέτου προς την \vec{E}_r όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8δ, με μέτρο:

$$E_\theta = \frac{k_0 Q \cdot l \cdot \eta \mu\theta}{\epsilon r^3} \quad (2.44)$$

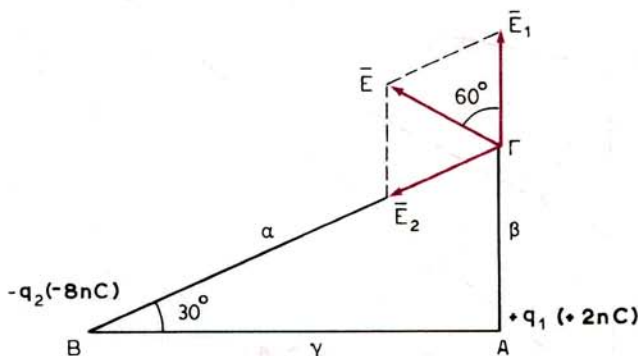
Εξυπακούεται ότι και οι σχέσεις (2.43) και (2.44) ισχύουν για αποστάσεις $r \gg l$.

Παράδειγμα 2.8.1.

Στις κορυφές A και B ορθογωνίου τριγώνου ABΓ (σχ. 2.8ε) υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 2\text{nC}$ και $q_2 = -8\text{nC}$. Να υπολογισθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το δυναμικό στην κορυφή Γ, αν το τρίγωνο βρίσκεται στον αέρα ($\epsilon = 1$). Δίνονται: $AG = \beta = 10\sqrt{3}\text{ cm}$, $AB = \gamma = 30\text{ cm}$ και $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

Το φορτίο q_1 δημιουργεί στο σημείο Γ ένταση \vec{E}_1 που έχει μέτρο (σχέση 2.32):

$$E_1 = k_0 \frac{q_1}{\beta^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(10\sqrt{3} \cdot 10^{-2})^2} = 600 \text{ N/C}$$



Σχ. 2.8ε.

Το φορτίο q_2 δημιουργεί στο σημείο Γ ένταση \vec{E}_2 με μέτρο:

$$E_2 = k_0 \frac{q}{r^2} = k_0 \frac{q}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-9}}{(10\sqrt{3} \cdot 10^{-2})^2 + (30 \cdot 10^{-2})^2} = 600 \text{ N/C}$$

Επομένως η ένταση \vec{E} στο σημείο Γ θα είναι: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\text{Είναι: } \widehat{\epsilon\phi B} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{10\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$$

Άρα η γωνία που σχηματίζουν τα ανύσματα \vec{E}_1 και \vec{E}_2 είναι 120° και επομένως η E θα σχηματίζει γωνία 60° με την \vec{E}_1 . Το μέτρο της θα είναι:

$$E = E_1 = E_2 = 600 \text{ N/C}$$

Το δυναμικό στο σημείο Γ θα είναι (σχέση 2.12):

$$\begin{aligned} U_\Gamma &= k_0 \frac{q_1}{\beta} + k_0 \frac{q_2}{\alpha} = \\ &= k_0 \left(\frac{q_1}{\beta} + \frac{q_2}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \right) \Rightarrow U_\Gamma = -60\sqrt{3} \simeq -104 \text{ V} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.8.2.

Να προσδιορισθεί το δυναμικό σε απόσταση $r = 5 \cdot 10^{-14}$ από πυρήνα P που έχει 80 πρωτόνια. Να υπολογισθεί επίσης στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

Ο πυρήνας φέρει θετικό φορτίο ίσο με:

$$Q = Ze = 80 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Αν θεωρήσουμε τον πυρήνα ως σημειακό φορτίο, τότε το δυναμικό του θα δίνεται από τη (2.35):

$$U(r) = k_0 \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{80 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-14}} \simeq 23 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου σε απόσταση r από τον πυρήνα είναι (σχέση 2.27):

$$W_{\Delta\gamma\text{N}} = U(r) (-e) = 23 \cdot 10^5 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}) = -36,8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Παράδειγμα 2.8.3.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο επιπέδων παραλλήλων μεταλλικών πλακών φορτισμένων με ετερόνυμα φορτία είναι $U = 100 \text{ V}$. Η απόστασή τους είναι $0,1 \text{ m}$. Ζητούνται:

α) Η ένταση του πεδίου μεταξύ των πλακών.

β) Το δυναμικό των ισοδυναμικών επιφανειών, που απέχουν η μία από την άλλη απόσταση 1 cm, όταν η θετικά φορτισμένη πλάκα είναι προσγειωμένη.

γ) Να υπολογισθεί το έργο μεταβάσεως καθώς και το έργο επιστροφής ενός ηλεκτρονίου ($e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) μεταξύ των ισοδυναμικών επιφανειών $U_{30} = -30 \text{ V}$ και $U_{80} = -80 \text{ V}$ καθώς επίσης και το συνολικό έργο μεταβάσεως και επιστροφής.

α) Από τη σχέση (2.38) λαμβάνομε:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{100}{0,1} = 1000 \text{ V/m}$$

β) Επειδή το πεδίο είναι ομογενές ($E = \text{σταθ.}$) θα ισχύει:

$$\frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{U}{l} = E \implies \Delta U = E \cdot \Delta l = 1000 \cdot 10^{-2} = 10 \text{ V}$$

Το σχήμα 2.8στ δείχνει τις ισοδυναμικές επιφάνειες που απέχουν κατά $\Delta l = 1 \text{ cm}$.

γ) Από τη σχέση (2.36) έχουμε:

$$W_{\alpha\beta} = -e (U_{\alpha} - U_{\beta}) = -1,6 \cdot 10^{-19} [-30 - (-80)] = -8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$W_{\beta\gamma} = -e (U_{\beta} - U_{\gamma}) = -1,6 \cdot 10^{-19} [-80 - (-30)] = 8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Άρα

$$W_{\alpha\lambda} = W_{\alpha\beta} + W_{\beta\gamma} = W_{\alpha\beta} + W_{\beta\alpha} = 0$$

Παράδειγμα 2.8.4.

Να υπολογισθεί το έργο που απαιτείται για να τοποθετήσουμε τα τρία ηλεκτρικά φορτία του σχήματος 2.8ζ στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά $a = 0,1 \text{ m}$ που βρίσκεται στον άπειρο κενό χώρο.

Δίνεται $q = 10^{-7} \text{ C}$ και $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

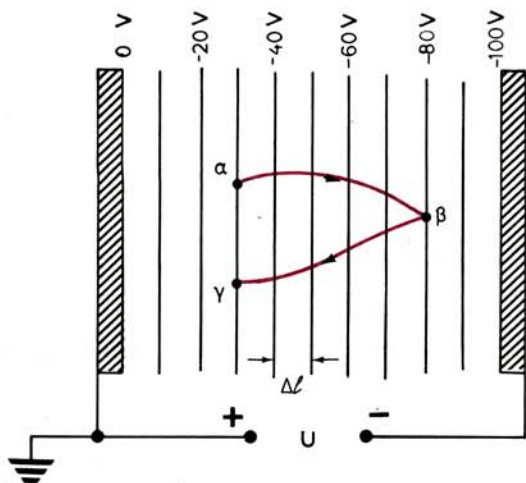
Πρώτα τοποθετούμε το φορτίο $-4q$ στο σημείο Α. Για την τοποθέτηση αυτή δεν καταναλίσκεται έργο. Μετά φέρνομε το φορτίο $+q$ στο σημείο Β. Το έργο που απαιτείται είναι:

$$W_B = qU_B = qk_0 \frac{-4q}{a} = -k_0 \frac{4q^2}{a}$$

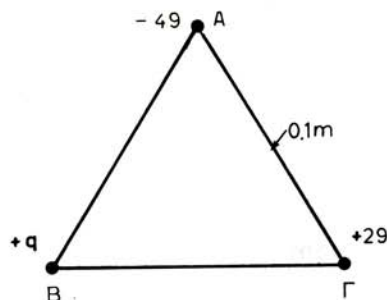
Στη συνέχεια τοποθετούμε στο σημείο Γ το φορτίο $+2q$. Το απαιτούμενο έργο είναι:

$$W_{\Gamma} = k_0 \frac{q \cdot 2q}{a} - k_0 \frac{4q \cdot 2q}{a} = 2k_0 \frac{q^2}{a} - 8k_0 \frac{q^2}{a}$$

Επομένως το συνολικό έργο θα είναι:



Σχ. 2.8στ.



Σχ. 2.8ζ.

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ολ}} &= W_B + W_\Gamma = -4k_0 \frac{q^2}{a} + 2k_0 \frac{q^2}{a} - 8k_0 \frac{q^2}{a} = \\
 &= -10k_0 \frac{q^2}{a} = -10 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-14}}{10^{-1}} \rightarrow \\
 W_{\text{ολ}} &= -9 \cdot 10^{-3} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Το έργο που υπολογίσαμε μας παρέχει και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.

Η αρνητική τιμή της δυναμικής ενέργειας σημαίνει ότι, για να διασπάσουμε το σύστημα των φορτίων αυτών, απαιτείται έργο ίσο με $9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

Παράδειγμα 2.8.5.

Μια σφαίρα μεταλλική είναι φορτισμένη με φορτίο $Q = 16 \text{ mC}$. Μια δεύτερη μεταλλική σφαίρα βρίσκεται σε απόσταση r από την πρώτη και είναι φορτισμένη με φορτίο $q = -16 \text{ nC}$. Όταν η δεύτερη σφαίρα βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την πρώτη, λέμε ότι η δυναμική της ενέργεια είναι μηδέν. Να κατασκευασθεί η καμπύλη μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, όταν η δεύτερη σφαίρα πλησιάζει την πρώτη. ($k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$).

Θεωρούμε τα φορτία των δυο σφαιρών ως σημειακά. Τότε είναι:

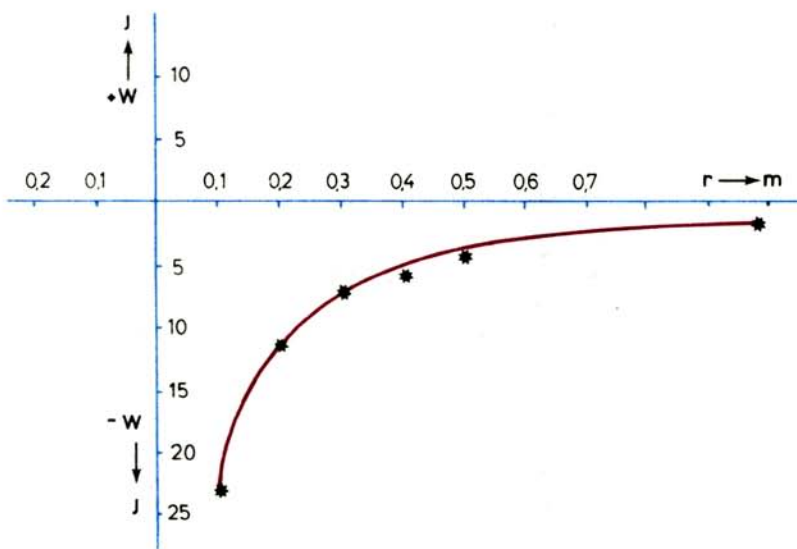
$$\begin{aligned}
 U(r) &= k_0 \frac{Q}{r} \quad \text{και} \\
 W_{\Delta\text{YN}} &= qU(r) = k_0 \frac{Qq}{r} = \frac{-9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-9}}{r} \Rightarrow \\
 W_{\Delta\text{YN}} &= -2,3 \cdot \frac{1}{r} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Με βάση τη σχέση (1) συνθέτομε τον πίνακα 2.8.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.8.1

r (m)	W (J)
1	-2,3
0,5	-4,6
0,4	-5,75
0,3	-7,4
0,2	-11,5
0,1	-2,3

Το σχήμα 2.8η παριστάνει την καμπύλη μεταβολής της δυναμικής ενέργειας συναρτήσει της αποστάσεως r .



Σχ. 2.8η.

2.9 Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Ας θεωρήσουμε το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ δυο ετερόνυμα φορτισμένων μεταλλικών πλακών A και B. Η τάση μεταξύ των πλακών είναι $U = U_A - U_B$. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι το κινούμενο φορτίο είναι ηλεκτρόνιο (ή λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων) που έχει μάζα ηρεμίας $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg και φορτίο $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Διακρίνομε δυο περιπτώσεις:

α) Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο, που βρίσκεται σε ηρεμία σε κάποια θέση μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Η δύναμη \vec{F} που δέχεται το ηλεκτρόνιο (σχ. 2.9α) θα έχει μέτρο, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2) και (2.38):

$$F = qE = e \frac{U}{l} \quad (2.45)$$

Η διεύθυνση της δύναμης \vec{F} θα είναι παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές, δηλαδή κάθετη προς τα επίπεδα των πλακών και η φορά της από την αρνητικά προς τη θετικά φορτισμένη πλάκα. Η δύναμη αυτή παραμένει σταθερή σ' όλες τις θέσεις μέσα στο ομογενές πεδίο· άρα, σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής, το ηλεκτρόνιο θα διαγράψει **ευθύγραμμη ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση** με επιτάχυνση:

$$\gamma = \frac{F}{m_0} = \frac{e}{m_0} \frac{U}{l} \quad (2.46)$$

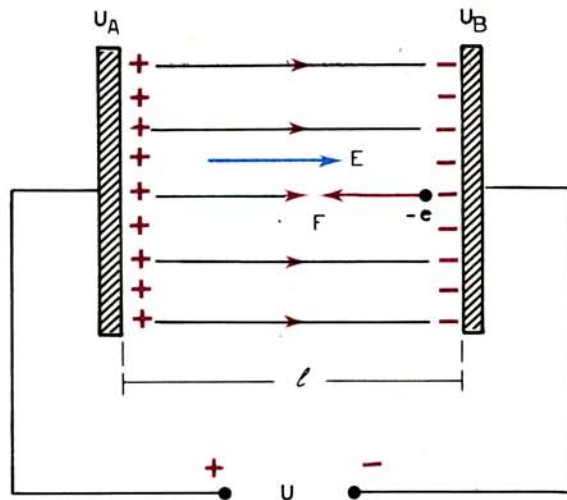
Αν το ηλεκτρόνιο αναχωρήσει από την αρνητική πλάκα για να φθάσει στη θετική, τότε η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας θα είναι:

$$\Delta W_{\text{KIN}} = \frac{1}{2} m_0 u^2 - \frac{1}{2} m_0 u_0^2$$

όπου: u_0 η αρχική του ταχύτητα ($u_0 = 0$) και
 u η τελική του ταχύτητα.

Έτσι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο τέλος της διαδρομής του θα είναι:

$$W_{\text{KIN}} = \frac{1}{2} m_0 u^2 \quad (2.47)$$



Σχ. 2.9α.

Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο χωρίς αρχική ταχύτητα (τροχιά παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές).

Η παραπάνω κινητική ενέργεια θα είναι ίση με το έργο που παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο:

$$W_{\delta uv} = e.U \quad (2.48)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (2.47) και (2.48) υπολογίζουμε την ταχύτητα u , που θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο στο τέλος της διαδρομής του:

$$\frac{1}{2} m_0 u^2 = eU \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \quad (2.49)$$

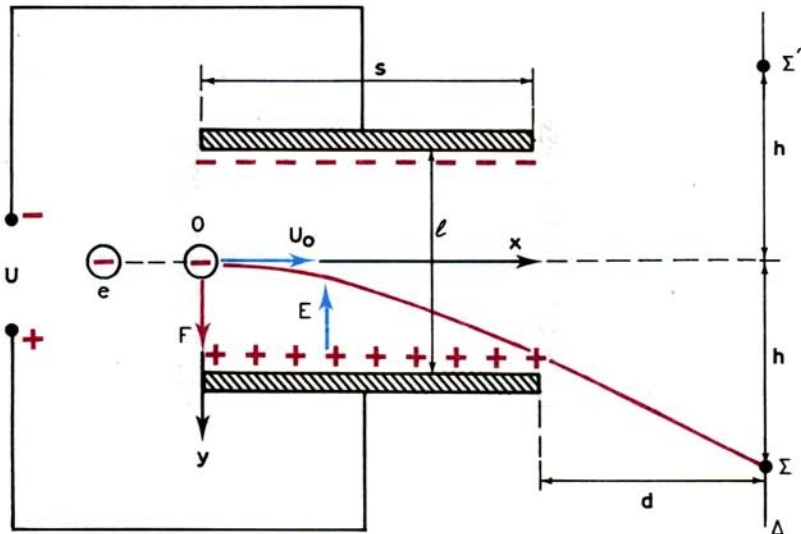
Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα δεν εξαρτάται από το μήκος l της διαδρομής.

θ) Κίνηση με αρχική ταχύτητα κάθετη προς τις δυναμικές γραμμές (σχ. 2.96).

Ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα u_0 εισέρχεται κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Θα μελετήσουμε την κίνησή του με τη βοήθεια ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $(x - y)$, με αρχή το σημείο 0 της εισόδου του ηλεκτρονίου μέσα στο πεδίο (σχ. 2.96).

Άξονας x : Κατά τον άξονα x δεν εξασκείται στο ηλεκτρόνιο δύναμη και επομένως η κίνησή του θα είναι ευθύγραμμη ομαλή. Το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t θα είναι:

$$x = u_0 \cdot t \quad (2.50)$$



Σχ. 2.96.

Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με αρχική ταχύτητα κάθετη προς τις δυναμικές γραμμές (τροχιά παραβολική).

Άξονας y: Κατά τον άξονα y η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι ομαλά επιταχυνόμενη, όπως δείξαμε παραπάνω, με επιτάχυνση:

$$y = \frac{eU}{m_0 I}$$

Άρα το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t θα είναι:

$$y = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \frac{eU}{m_0 I} t^2 \quad (2.51)$$

Από τις σχέσεις (2.50) και (2.51) προκύπτει:

$$y = \frac{Ue}{2m_0 I u_0^2} \cdot x^2 = kx^2 \quad (2.52)$$

Δηλαδή το ηλεκτρόνιο εκτελεί μέσα στο πεδίο **παραβολική τροχιά**.

Το ηλεκτρόνιο (ή η δέσμη των ηλεκτρονίων) μετά την έξοδό του από το πεδίο θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά. Αν σε απόσταση d από τις πλάκες υπάρχει φθορίζον διάφραγμα Δ, τότε επάνω σ' αυτό θα σχηματισθεί μια φωτεινή κηλίδα (σημείο Σ). Αν αλλάξει η πολικότητα της τάσεως, η κηλίδα θα σχηματισθεί σε συμμετρικό σημείο Σ'. Αν η τάση που εφαρμόζεται στις πλάκες αλλάζει συνεχώς πολικότητα (εναλλασσόμενη), τότε το ηλεκτρόνιο θα διαγράφει την ευθεία γραμμή ΣΣ' (εφαρμογή στο σωλήνα Braun).

Παράδειγμα 2.9.1.

Να υπολογισθεί η ταχύτητα με την οποία ηλεκτρόνιο, που ξεκινά από την αρνητικά φορτισμένη πλάκα του σχήματος 2.9α, προσκρούει στη θετική στις εξής περιπτώσεις:

- Η μάζα του ηλεκτρονίου θεωρείται σταθερή.
- Λαμβάνεται υπόψη η σχετιστική αύξηση της μάζας.

$$\text{Δίνονται: } U = 120 \text{ kV, } m_0 = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C και } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- Η ταχύτητα u υπολογίζεται από τη σχέση:

$$u = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

Με αντικατάσταση ($U = 120 \cdot 10^3 \text{ V}$) βρίσκουμε ότι: $u = 2,055 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

β) Σε ταχύτητες $u > 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ περίπου η μάζα εξαρτάται από την ταχύτητα και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1)$$

όπου $c = 3 \cdot 10^8$ m/s η ταχύτητα διαδόσεως του φωτός.

Για τη μάζα του κινούμενου ηλεκτρονίου θα έχουμε:

$$m = m_0 + \Delta m \quad (2)$$

όπου Δm η αύξηση της μάζας του ηλεκτρονίου, εξαιτίας της ταχύτητάς του, η οποία παρέχεται από τη σχέση:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \implies \Delta m = \frac{E}{c^2} \quad (3)$$

$$\text{Είναι όμως } E = E_{\text{KIN}} = W = eU \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$m = m_0 + \frac{eU}{c^2} \quad (5)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (5) τις τιμές των m_0 , e , U και c βρίσκουμε ότι

$$m = 11,244 \text{ kg}$$

οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^2} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) τις τιμές των m , m_0 και c βρίσκουμε ότι:

$$u = 1,759 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Παράδειγμα 2.9.2.

Δέσμη φορτισμένων σωματιδίων μάζας m και φορτίου q επιταχύνεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο από τάση $U_E = 2 \text{ kV}$ και με την ταχύτητα που αποκτά εισέρχεται στη συνέχεια μέσα σε άλλο ηλεκτρικό πεδίο, που δημιουργούν δυο παράλληλες πλάκες, κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές. Μεταξύ των πλακών που απέχουν κατά $l = 2 \text{ cm}$ και έχουν μήκος $s = 6 \text{ cm}$ επικρατεί τάση $U_\pi = 500 \text{ V}$. Να δειχθεί ότι η απόκλιση h των σωματιδίων κατά την έξοδό τους από τις πλάκες είναι ανεξάρτητη από τα μεγέθη m και q (δηλαδή από τη φύση των σωματιδίων) και να βρεθεί η τιμή της (σχ. 2.9θ).

Η ταχύτητα u_0 με την οποία εισέρχεται η δέσμη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών, υπολογίζεται από σχέση ανάλογη προς την (2.49):

$$u_0 = \sqrt{\frac{2qU_E}{m}} \quad (1)$$

Εξάλλου για την κίνηση του ηλεκτρονίου μέσα στις πλάκες, με αρχική

ταχύτητα u_0 , κάθετη προς τις δυναμικές γραμμές, από σχέση ανάλογο της (2.52) έχουμε:

$$y = \frac{U_{\Pi} q}{2 m / u_0^2} \cdot x^2 \quad (2)$$

Αν θέσουμε στην (2) $x = s$ και $y = h$ παίρνουμε:

$$h = \frac{U_{\Pi} q s^2}{2 m / u_0^2} \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει:

$$h = \frac{U_{\Pi} s^2}{4 I U_E} \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) βλέπουμε ότι η απόκλιση είναι ανεξάρτητη από τα μεγέθη m και q και αν θέσουμε στην (4) $U_{\Pi} = 500 \text{ V}$, $U_E = 2000 \text{ V}$, $I = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ και $s = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ βρίσκουμε $h = 11,3 \text{ mm}$.

2.10 Ηλεκτρική ροή.

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 2.10α).

Ονομάζουμε **στοιχειώδη ηλεκτρική ροή** ($d\psi$), που διέρχεται από την επιφάνεια dS , το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων \vec{E} και \vec{dS} :

$$d\psi = (\vec{E} \cdot \vec{dS}) \quad (2.53)$$

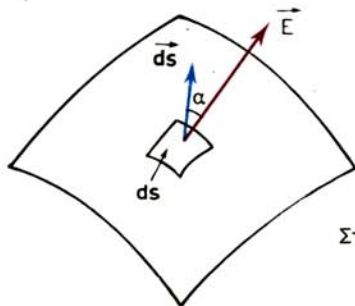
Το άνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας \vec{dS} είναι κάθετο στην επιφάνεια dS και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η ηλεκτρική ροή είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μέτρο:

$$d\psi = E \cdot dS \cdot \cos \alpha \quad (2.54)$$

όπου α η γωνία που σχηματίζουν τα ανύσματα \vec{E} και \vec{dS} .

Η ηλεκτρική ροή ψ , που διέρχεται από επιφάνεια S , βρίσκεται αν αθροίσουμε όλες τις στοιχειώδεις ροές $d\psi$ που διέρχονται από τις αντίστοιχες στοιχειώδεις



Σχ. 2.10α.

Στοιχειώδης επιφάνεια μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

επιφάνειες dS της επιφάνειας S , δηλαδή αν ολοκληρώσουμε κατάλληλα την εξίσωση (2.54) επάνω στην επιφάνεια S .

$$\Psi = \int_S E \cos \alpha \, dS \quad (2.55)$$

Ολοκληρώματα όμως όπως αυτό, που εκτείνονται επάνω σε επιφάνεια (επιφανειακά ολοκληρώματα), δεν είναι εύκολο να επιλυθούν' άλλωστε η επίλυσή τους ξεφεύγει από το σκοπό του βιβλίου. Αυτό όμως μπορεί να γίνει σε ορισμένες πολύ απλές περιπτώσεις ηλεκτρικών πεδίων, όπως π.χ. εκείνη του **ομογενούς** ηλεκτρικού πεδίου, για το οποίο ισχύει $\vec{E} = \text{σταθ}$. Αν μάλιστα θέλουμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια της οποίας το άνωσμα σχηματίζει γωνία α με το άνωσμα της εντάσεως (σχ. 2.108), οπότε $\cos \alpha = \text{σταθ}$, τότε από την (2.55) λαμβάνομε:

$$\Psi = E \cos \alpha \int_S dS = E S \cos \alpha \quad (2.56)$$

Αν, επιπλέον, η επιφάνεια διά της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή είναι **κάθετη** προς τις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, τότε ισχύει:

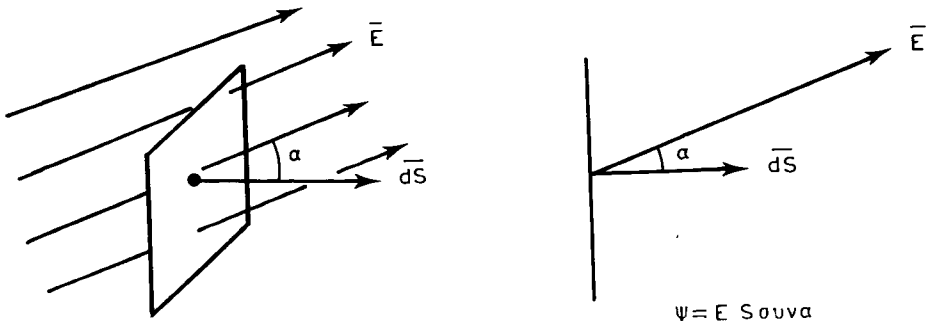
$$\cos \alpha = 1, \text{ δηλαδή } \alpha = 0^\circ \text{ οπότε } \Psi = E S$$

Επειδή η ένταση E είναι μέγεθος ανάλογο προς τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από τη μονάδα της επιφάνειας, συμπεραίνομε ότι **η ηλεκτρική ροή είναι μέγεθος ανάλογο προς το συνολικό αριθμό των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από όλη την επιφάνεια S .**

Στην περίπτωση κλειστής επιφάνειας η ηλεκτρική ροή υπολογίζεται από το παρακάτω επιφανειακό ολοκλήρωμα, που εκτείνεται σ' ολόκληρη την κλειστή επιφάνεια:

$$\Psi = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{S}) \quad (2.57)$$

Μονάδα ηλεκτρικής ροής. Όπως προκύπτει από τη σχέση ορισμού (2.53) η μονάδα ηλεκτρικής ροής στο σύστημα S.I. είναι το 1 V.m.



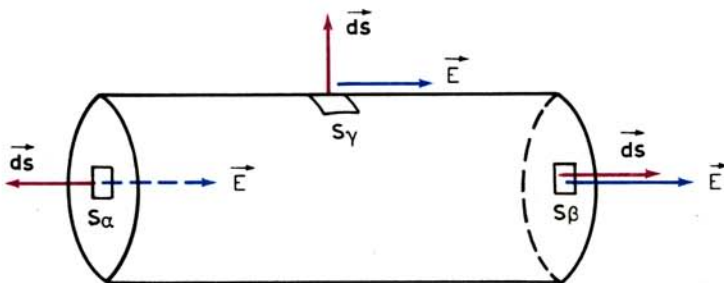
Σχ. 2.108.

Ηλεκτρική ροή σε ομογενές πεδίο.

Παράδειγμα 2.10.1.

Να υπολογισθεί η ροή Ψ που διέρχεται από την επιφάνεια του κυλίνδρου του σχήματος 2.10γ, που έχει ακτίνα R και βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ένταση \vec{E} , παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου.

Θεωρούμε ολόκληρη την επιφάνεια του κυλίνδρου χωρισμένη σε στοιχειώδη τμήματα εμβαδού dS . Τα αντίστοιχα ανύσματα $d\vec{S}$ είναι κάθετα σε καθένα από αυτά και προσανατολισμένα προς τα έξω.



Σχ. 2.10γ.

Χωρίζουμε την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου σε τρία μέρη, δηλαδή στις δυο βάσεις S_α και S_β και στην παράπλευρη επιφάνεια S_γ .

Σύμφωνα με τη σχέση (2.57) θα έχουμε:

$$\Psi = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_\alpha} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_\beta} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

Είναι:
$$\int_{S_\alpha} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_\alpha} E dS \cos 180^\circ = -E \int_{S_\alpha} dS = -E S_\alpha = -\pi R^2 E$$

$$\int_{S_\beta} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_\beta} E dS \cos 0^\circ = E \int_{S_\beta} dS = E S_\beta = \pi R^2 E$$

$$\text{και } \int_{S_\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_\gamma} E dS \cos 90^\circ = 0$$

Άρα

$$\Psi = -\pi R^2 E + \pi R^2 E = 0$$

2.11 Νόμος της ηλεκτρικής ροής ή θεώρημα του Gauss.

Θεωρούμε σημειακό θετικό φορτίο q (σχ. 2.11α). Σε απόσταση r από το φορτίο η ένταση του πεδίου είναι σύμφωνα με τη σχέση (2.32):

$$E = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.11α, τα ανύσματα \vec{E} και $d\vec{S}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα ($\alpha = 0$), άρα η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια της σφαίρας (κλειστή επιφάνεια), θα είναι, σύμφωνα με τη σχέση (2.57):

$$\Psi = \oint (\vec{E} d\vec{S}) = \oint E \sigma_{\text{ουα}} dS = E \oint dS = E \cdot S = 4\pi r^2 E$$

Αντικαθιστώντας την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε:

$$\Psi = 4\pi r^2 \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q}{r^2} = \frac{k_0}{\epsilon} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$$

δηλαδή

$$\Psi = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0} \quad (2.58)$$

Από τη σχέση (2.58) βλέπουμε ότι η ροή που περνάει από μια σφαίρα, στις οποίας το κέντρο βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο, εξαρτάται μόνο από το φορτίο και από το είδος του διηλεκτρικού που το περιβάλλει και είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της σφαίρας. Έτσι, αν θεωρήσουμε και μια άλλη σφαίρα, με κέντρο πάλι το σημειακό φορτίο και από αυτή θα διέρχεται η ίδια ηλεκτρική ροή. Βέβαια, η ίδια ηλεκτρική ροή θα πρέπει να διέρχεται και από οποιαδήποτε άλλη κλειστή επιφάνεια που περικλείει το φορτίο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.116.

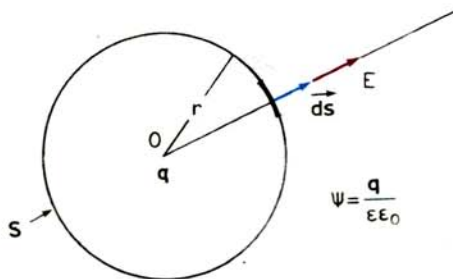
Η σχέση (2.58) καθώς και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτήν, αποτελούν πορίσματα ενός γενικότερου νόμου του ηλεκτρισμού, του νόμου της ηλεκτρικής ροής, ή όπως συχνά αναφέρεται του **θεωρήματος Gauss**, σύμφωνα με τον οποίο:

Η ηλεκτρική ροή που περνάει από μια **κλειστή επιφάνεια** είναι μέγεθος ανάλογο του αλγεβρικού αθροίσματος των ηλεκτρικών φορτίων, τα οποία βρίσκονται **μέσα** στην επιφάνεια.

Μαθηματική έκφραση του νόμου του Gauss αποτελεί και η εξίσωση:

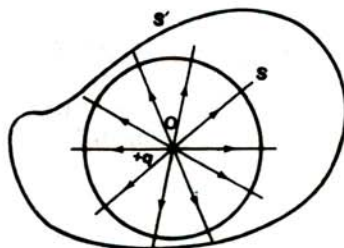
$$\Psi = \oint (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{\sum Qi}{\epsilon \epsilon_0} \quad (2.59)$$

της οποίας η απόδειξη δεν περιλαμβάνεται στους σκοπούς του βιβλίου αυτού.



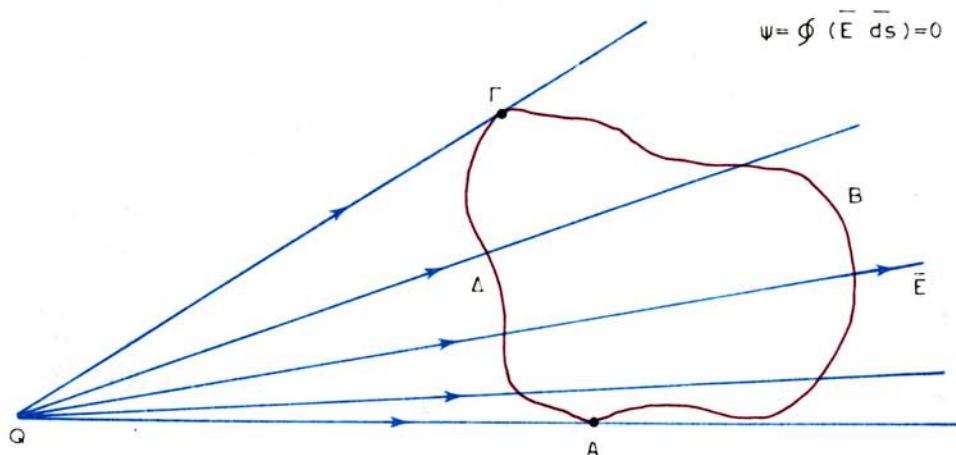
Σχ. 2.11α.

Ηλεκτρική ροή από την επιφάνεια σφαίρας.



Σχ. 2.116.

Από τις δυο επιφάνειες S και S' διέρχεται ο ίδιος αριθμός δυναμικών γραμμών που οφείλονται στο πεδίο του φορτίου q.



Σχ. 2.11γ.

Ηλεκτρικό φορτίο στο εξωτερικό κλειστής επιφάνειας.

Εάν ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται έξω από μια κλειστή επιφάνεια (σχ. 2.11γ), τότε και πάλι ισχύει το θεώρημα του Gauss. Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει:

$$\Psi = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι η συνολική ροή από την επιφάνεια είναι μηδέν. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.11γ ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που εισέρχονται στην επιφάνεια (τμήμα ΓΔΑ) ισούται με τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια (τμήμα ΑΒΓ), εφόσον θεωρήσαμε ότι μέσα στην κλειστή επιφάνεια δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε ότι ο νόμος του Coulomb και το θεώρημα του Gauss είναι δυο ισοδύναμες προτάσεις της ηλεκτροστατικής, με την έννοια ότι μπορούν να επιλύουν τα ίδια προβλήματα. Σε πολλές περιπτώσεις η επίλυση ενός προβλήματος με το θεώρημα του Gauss είναι απλούστερη.

2.12 Αγωγή μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 1.5, ως **αγωγή** ορίζονται τα σώματα, τα οποία επιτρέπουν την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα από τη μάζα τους. Σχετικά με τη συμπεριφορά των αγωγίων σωμάτων μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύουν οι εξής προτάσεις:

α) Στο **εσωτερικό συμπαγούς ή κοίλου αγωγού δεν μπορεί να παραμείνει κανένα φορτίο**, αντίθετα, κατά την ηλεκτρίσή του, τα φορτία κατανέμονται στην εξωτερική τους επιφάνεια.

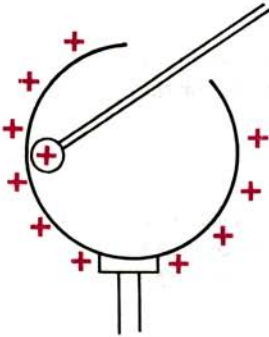
Αν στο εσωτερικό κοίλου αγωγού φέρομε ηλεκτρικά φορτία, αυτά απωθούνται μεταξύ τους, εξέρχονται και κατανέμονται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού (σχ. 2.12α).

Στην εξωτερική επιφάνεια των αγωγών δεν κατανέμονται μόνο τα φορτία που

φέρουμε σ' αυτούς, αλλά και όσα αναπτύσσονται με επίδραση.

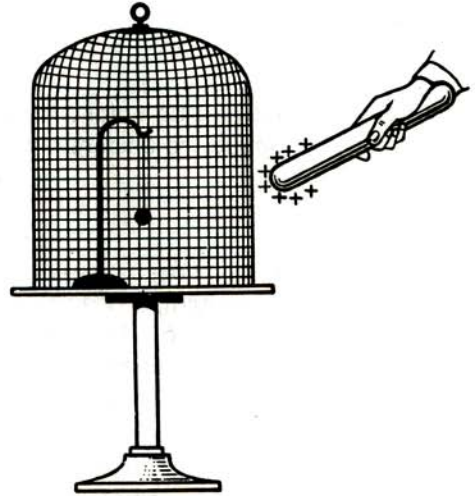
β) **Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό φορτισμένου αγωγού είναι ίση με μηδέν.** Αν υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο θα υπήρχαν και δυναμικές γραμμές, των οποίων το ένα άκρο τους θα έπρεπε να βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού, όπου έχουν κατανεμηθεί τα ηλεκτρικά φορτία και το άλλο άκρο τους θα έπρεπε να καταλήγει σε ετερόνυμα φορτία στο εσωτερικό του αγωγού. Αυτό όμως βρίσκεται σε αντίθεση με την πρώτη πρόταση. Την ιδιότητα αυτή εκμεταλλευόμαστε για να προφυλάξουμε χώρους από ανεπιθύμητα εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία (ηλεκτροστατική θωράκιση). Αυτό γίνεται αν περιβάλλομε το χώρο (σχ. 2.12β) με μεταλλικό πλέγμα (κλωβός Faraday).

Για να αποδείξομε την πρόταση αυτή πειραματικά, βάζομε μέσα στον κλωβό ένα ηλεκτρικό εκκρεμές και πλησιάζομε φορτισμένη ράβδο. Θα παρατηρήσομε ότι το εκκρεμές δεν παρουσιάζει καμιά απόκλιση.



Σχ. 2.12α.

Τα φορτία κατανέμονται στην εξωτερική επιφάνεια του κοίλου αγωγού.



Σχ. 2.12β.

Κλωβός Faraday.

γ) **Εάν αρχικά αφόρτιστος αγωγός εισαχθεί σε ηλεκτρικό πεδίο, εμφανίζονται στην επιφάνειά του θετικά και αρνητικά φορτία που κατανέμονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργούν στο εσωτερικό του πεδίο που αντισταθμίζει το εξωτερικό πεδίο.**

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την πρόταση αυτή σκεφτόμαστε ως εξής:

Στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού εξασκείται δύναμη $\vec{F} = e \vec{E}_1$ (σχ. 2.12γ) που θα έχει ως αποτέλεσμα τη μετακίνηση των ηλεκτρονίων. Έτσι το ένα άκρο του αγωγού εμφανίζεται θετικά φορτισμένο και το άλλο άκρο του αρνητικά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ηλεκτροστατική επίδραση** ή **επαγωγή**.

Ηλεκτροστατική επαγωγή ονομάζεται η εμφάνιση ίσων και ετεροώνυμων ηλεκτρικών φορτίων στα άκρα αγωγού που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

Με τη μετακίνηση των ηλεκτρονίων από το αριστερό άκρο του αγωγού στο δεξιό δημιουργείται μέσα στον αγωγό ένα δεύτερο ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 2.12δ).

Η φορά της εντάσεως \vec{E}_2 του νέου πεδίου θα είναι αντίρροπη από τη φορά την \vec{E}_1 (οι δυναμικές γραμμές θα αρχίζουν από τα θετικά και θα καταλήγουν στα αρνητικά φορτία) και το μέτρο της θα αυξάνεται συνεχώς, αφού συνέχεια θα μετακινούνται ηλεκτρόνια από το αριστερό άκρο του αγωγού στο δεξιό. Θα έρθει όμως στιγμή κατά την οποία το μέτρο της εντάσεως \vec{E}_2 θα γίνει ίσο με το μέτρο της εντάσεως \vec{E}_1 οπότε και θα σταματήσει η μετακίνηση των ηλεκτρονίων, αφού η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού θα γίνει μηδέν ($E = 0$).

δ) Όλα τα σημεία της μάζας ενός αγώγιμου σώματος έχουν το ίδιο δυναμικό.

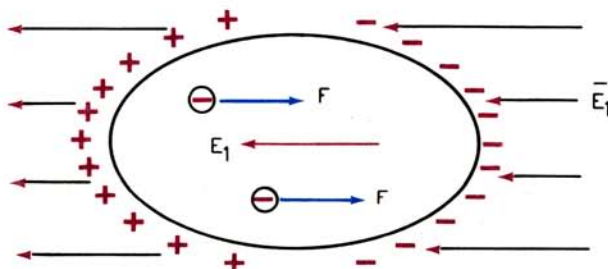
Αυτή η πρόταση αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια της σχέσεως (2.22) και της προτάσεως (β). Πράγματι, για δυο σημεία A, B του αγώγιμου σώματος ισχύει:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

διότι κατά την πρόταση (β) $\vec{E} = 0$

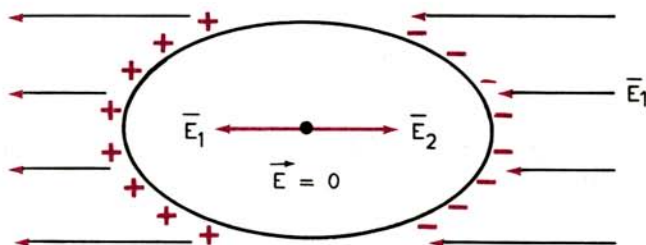
Άρα $U_A = U_B = \text{σταθερά}$

Συμπεραίνουμε ακόμη ότι η **επιφάνεια του αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια**.



Σχ. 2.12γ.

Αρχικά αφόρτιστος αγωγός μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.



Σχ. 2.12δ.

Η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό αγωγού είναι μηδέν.

ε) Το άνωσμα της εντάσεως του πεδίου που σχηματίζεται γύρω από αγωγό, είναι κάθετο στην εξωτερική του επιφάνεια.

Αυτή η πρόταση αποδεικνύεται αμέσως, αν λάβουμε υπόψη ότι η εξωτερική επιφάνεια του αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Όπως ήδη έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 2.7 οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

2.13 Πυκνότητα φορτίου – Φαινόμενο Corona.

Ας θεωρήσουμε γύρω από ένα σημείο A της επιφάνειας φορτισμένου αγωγού στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού dS. Αν dq είναι το στοιχειώδες φορτίο που έχει κατανομηθεί στην επιφάνεια αυτή, ονομάζουμε **επιφανειακή πυκνότητα φορτίου το πηλίον:**

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (2.60)$$

Στην περίπτωση που η κατανομή του φορτίου επάνω στον αγωγό είναι ομοιόμορφη, τότε η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή και μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma = \frac{q}{S} \quad (2.61)$$

Μονάδα της επιφανειακής πυκνότητας είναι το 1 C/m².

Ανάλογα ορίζεται και η **γραμμική πυκνότητα** του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\mu = \frac{dq}{dl} \quad (2.62)$$

όπου dq το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο που κατανομηθεί σε στοιχειώδες μήκος dl του αγωγού.

Μονάδα της γραμμικής πυκνότητας είναι το 1 C/m.

Τέλος, στην περίπτωση που ένα φορτίο είναι κατανομημένο σ' ένα όγκο, τότε ορίζεται η **χωρική πυκνότητα** του ηλεκτρικού φορτίου, ως:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (2.63)$$

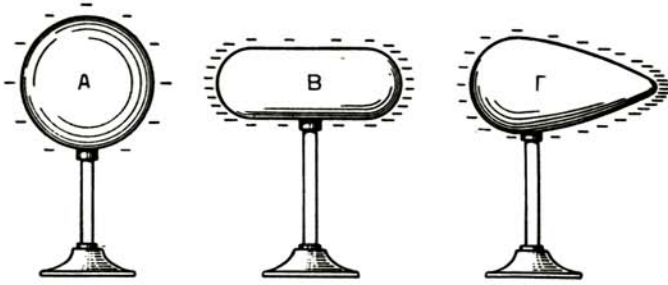
όπου dq το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο που κατανομηθεί σε στοιχειώδη όγκο dV του αγωγού.

Μονάδα της χωρικής πυκνότητας φορτίου είναι το 1 C/m³.

Πειραματικές παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι η κατανομή του φορτίου, άρα και η επιφανειακή πυκνότητα ενός αγωγού εξαρτάται από τη μορφή του (σχ. 2.13α).

Έτσι, στο σφαιρικό αγωγό A η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και η επιφανειακή πυκνότητα σ είναι ίδια σε όλα τα σημεία της επιφάνειάς του.

Στον αγωγό B η επιφανειακή πυκνότητα είναι μεγαλύτερη στα άκρα του, ενώ



Σχ. 2.13α.

Η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου εξαρτάται από το σχήμα του αγωγού.

στο μέσο του είναι μικρή. Στον αγωγό Γ, ο οποίος παρουσιάζει οξύ άκρο, η επιφανειακή πυκνότητα έχει μέγιστη τιμή στο οξύ αυτό άκρο.

Ιδιαίτερα στις ακίδες, η επιφανειακή πυκνότητα παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή, γιατί το άκρο της ακίδας αποτελεί περιοχή μέγιστης καμπυλότητας. Αν μάλιστα κοντά στην ακίδα φορτισμένου αγωγού πλησιάσουμε φλόγα (σχ. 2.13β), παρατηρούμε ότι δημιουργείται φύσημα που μπορεί να τη σθήσει. Αυτό συμβαίνει διότι η συγκέντρωση του φορτίου στην ακίδα είναι πολύ μεγάλη, με αποτέλεσμα το φορτίο να εγκαταλείπει την ακίδα.

Αν q είναι το συνολικό φορτίο σφαίρας ακτίνας r τότε η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

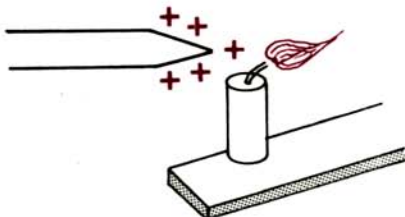
Όμως από το θεώρημα του Gauss έχουμε:

$$\Psi = \frac{q}{\epsilon \cdot \epsilon_0} = ES$$

Συνδυάζοντας τις δυο πιο πάνω σχέσεις λαμβάνομε για ένα **σφαιρικό αγωγό**:

$$\sigma = \epsilon \epsilon_0 E \quad (2.64)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι σχέση αντίστοιχη προς την (2.64) ισχύει και για την περίπτωση αγωγού οποιουδήποτε σχήματος. Στην περίπτωση αυτή η επιφανειακή πυκνότητα μεταβάλλεται στα διάφορα σημεία της επιφάνειας του αγωγού, οπότε η σχέση (2.64) έχει τοπική ισχύ.



Σχ. 2.13β.

Φύσημα λόγω μεγάλης πυκνότητας φορτίου.

Η διαφυγή ηλεκτρικών φορτίων από την επιφάνεια αγωγού προς τον αέρα εξαρτάται κυρίως από την τιμή της επιφανειακής του πυκνότητας. Αν δηλαδή η επιφανειακή πυκνότητα του αγωγού έχει τιμή μεγαλύτερη από κάποια κρίσιμη ($\sigma_{κρ}$), δηλαδή αν

$$\sigma > \sigma_{κρ} \quad (2.65)$$

τότε είναι βέβαιο ότι θα προκληθεί διαρροή ηλεκτρικών φορτίων στον ελεύθερο χώρο. Για τον αέρα έχει βρεθεί πειραματικά ότι:

$$\sigma_{κρ} = 2,65 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

Η αντίστοιχη τιμή της εντάσεως προκύπτει από τη σχέση (2.64) ως:

$$E_{κρ} = \frac{\sigma_{κρ}}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{2,65 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

Συνήθως διαρροή ηλεκτρικών φορτίων (θύσσανοι) είναι ορατοί επάνω στους πυργίσκους των καλωδίων υψηλής τάσεως. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φαινόμενο Corona** και είναι μερική περίπτωση της εκκενώσεως Townsend που περιγράφεται σε επόμενο κεφάλαιο. Το φαινόμενο Corona προκαλεί ανωμαλίες στους εναέριους αγωγούς υψηλής τάσεως, εξαιτίας της διαρροής φορτίων στις περιπτώσεις κρύου καιρού, οπότε σχηματίζονται στα καλώδια παγοκρύσταλλοι και οι σπινθηρισμοί γίνονται ορατοί από μεγάλες αποστάσεις.

Παράδειγμα 2.13.1.

Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο A, που απέχει από λεπτό ευθύγραμμο σύρμα πολύ μεγάλου μήκους απόσταση r . Δίνεται η γραμμική πυκνότητα φορτίου μ του αγωγού, ο οποίος βρίσκεται μέσα στον αέρα ($\epsilon = 1$). Να σχεδιασθεί επίσης η καμπύλη:

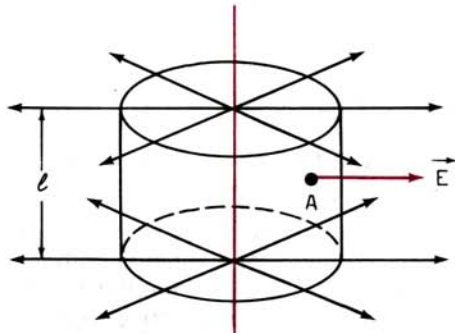
$$E = f(r) \quad \text{αν} \quad \mu = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}$$

Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, που δημιουργεί το σύρμα, είναι κάθετες στο σύρμα και κατευθύνονται προς όλες τις διευθύνσεις (σχ. 2.13γ).

Για να βρούμε την ένταση του πεδίου σ' ένα σημείο A, που απέχει από το σύρμα απόσταση r , θεωρούμε ένα κύλινδρο που έχει ύψος l , ακτίνα r και άξονα το σύρμα. Το σημείο A θα βρίσκεται στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Αν το μήκος l του σύρματος φέρει φορτίο q , η ροή του φορτίου θα είναι κατά τη σχέση (2.59):

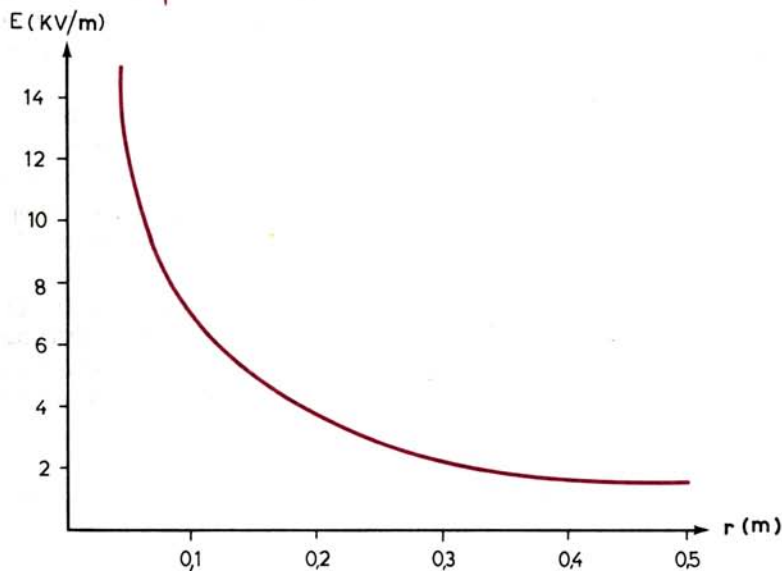
$$\psi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Η ροή αυτή θα περνά από την επιφάνεια του κυλίνδρου. Επειδή έχουμε συμμετρία η ένταση είναι σταθερή σε κάθε σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας.



Σχ. 2.13γ.

Ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε φορτισμένο ευθύγραμμο αγωγό.



Σχ. 2.13δ.

Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσεως της απόστασεως από φορτισμένο ευθύγραμμο σύρμα.

Επομένως, όπως δείξαμε και στο παράδειγμα 2.10.1, θα έχουμε:

$$\Psi = ES = E \cdot 2\pi r l \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 \pi r l} = k_0 \frac{2\mu}{r} = f(r) \quad (3)$$

Για $r_1 = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ η (3) δίνει:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-2}} = 14,4 \text{ kV/m}$$

Για $r_2 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m} \rightarrow E_2 = 7,2 \text{ kV/m}$

Για $r_3 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \rightarrow E_3 = 3,6 \text{ kV/m}$

Για $r_4 = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m} \rightarrow E_4 = 1,44 \text{ kV/m}$

Η καμπύλη $E = f(r)$ παρουσιάζεται στο σχήμα 2.13δ.

2.14 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου σφαιρικού αγωγού.

Ας θεωρήσουμε σφαιρικό αγωγό με ακτίνα R (σχ. 2.14α) που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο Q . Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.12:

- Το φορτίο είναι κατανομημένο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού.
- Η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού ($r < R$) είναι ίση με μηδέν.
- Όλα τα σημεία της μάζας του αγωγού έχουν το ίδιο δυναμικό [$V (r \leq R) = \text{σταθερό}$], που είναι ίσο με το δυναμικό της επιφάνειας του αγωγού.

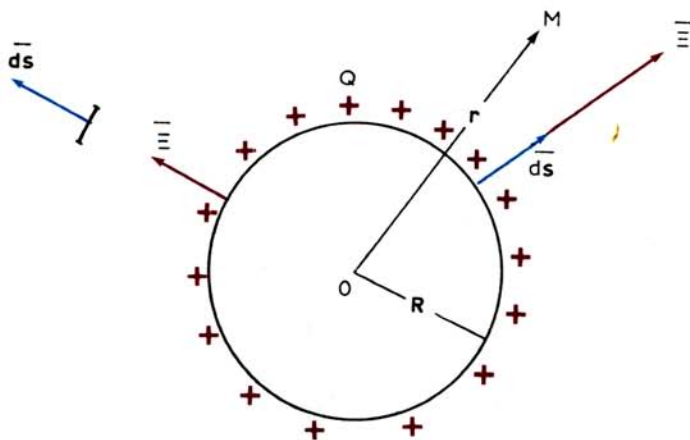
Θα προσπαθήσουμε, με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα, να υπολογίσουμε την ένταση και το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός αυτός.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έξω από τον αγωγό, σε ένα σημείο M που απέχει απόσταση $r > R$ από το κέντρο της σφαίρας μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss, σχέση (2.59), αν λάβουμε υπόψη τα εξής:

- Το θεώρημα Gauss θα εφαρμοσθεί για μια νοητή σφαιρική επιφάνεια, ομόκεντρη με το σφαιρικό αγωγό που περνά από το σημείο M , έχει δηλαδή ακτίνα r .
- Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές αναχωρούν από την ισοδυναμική επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού κάθετα. Άρα το άνωσμα της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου είναι συγγραμμικό με το άνωσμα της επιφάνειας τόσο της αγωγίσιμης σφαίρας, όσο και της σφαιρικής επιφάνειας διά του σημείου M .
- Λόγω της συμμετρικής κατανομής του ηλεκτρικού φορτίου επάνω στη σφαίρα θα υπάρχει συμμετρία και στο άνωσμα της εντάσεως. Δηλαδή, σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας διά του σημείου M , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει την ίδια τιμή.

Μετά από την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε να γράψουμε:

$$\oint (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0} \quad r \geq R \quad (2.65)$$



Σχ. 2.14α.

Ηλεκτρικό πεδίο γύρω από φορτισμένη αγωγήμη σφαίρα.

όπου ϵ η διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού εντός του οποίου βρίσκεται η σφαίρα.

Η εξίσωση (2.65) δίνει στη συνέχεια:

$$\oint E \, dS = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} \quad \text{ή} \quad E \oint dS = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} \quad \text{ή} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}$$

ή τέλος:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad r \geq R \quad (2.66)$$

Έτσι καταλήγουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E = f(r) = \begin{cases} \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r^2} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.66) με τη (2.3), διαπιστώνουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού, είναι ακριβώς όμοια με το πεδίο που θα δημιουργούσε σημειακό φορτίο Q , αν ήταν στο κέντρο του σφαιρικού αγωγού. Μετά την παρατήρηση αυτή μπορούμε να γράψουμε αμέσως την εξίσωση που δίνει το δυναμικό στο εξωτερικό της αγωγίμης σφαίρας, που θα είναι ίδιο με εκείνο του πεδίου του σημειακού φορτίου (σχέση 2.10):

$$U(r) = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r} \quad (r \geq R) \quad (2.67)$$

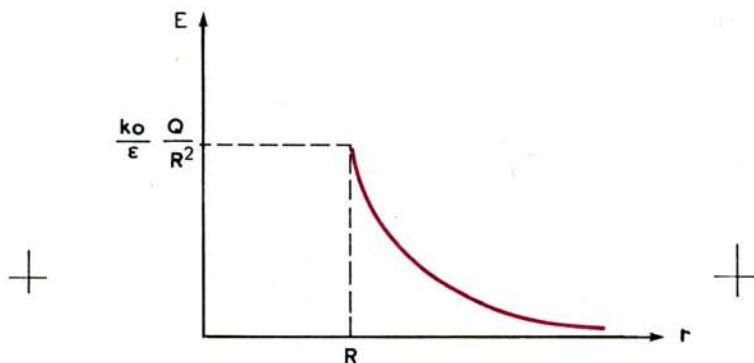
Μετά από την παρατήρηση, που έχουμε κάνει πιο πάνω, σχετικά με το δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας, μπορούμε αμέσως να γράψουμε ότι το σταθερό δυναμικό στην επιφάνεια και στο εσωτερικό της σφαίρας, δίνεται από τη σχέση:

$$U(r) = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{R} \quad r \leq R \quad (2.68)$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου, παρέχεται από τη συνάρτηση:

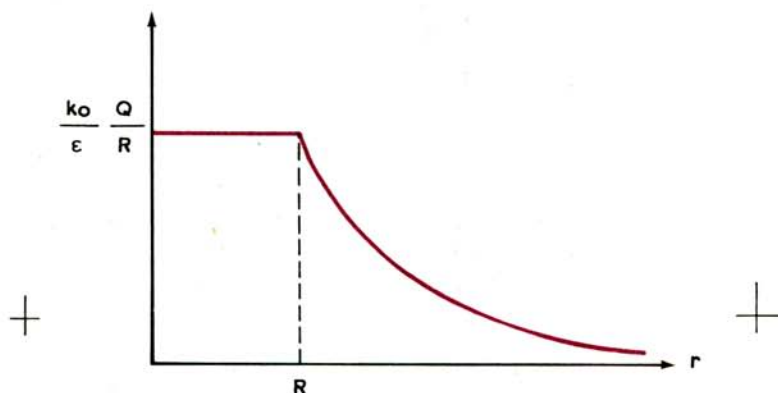
$$U = f(r) = \begin{cases} \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{r} & r \geq R \\ \frac{k_0}{\epsilon} \frac{Q}{R} & r \leq R \end{cases}$$

Η μεταβολή της εντάσεως και του δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας φαίνεται στα σχήματα 2.14β και 2.14γ.



Σχ. 2.14β.

Μεταβολή της έντασης σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο σφαιρικού αγωγού.



Σχ. 2.14γ.

Μεταβολή του δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο σφαιρικού αγωγού.

Παράδειγμα 2.14.1.

Αν ο αέρας χάνει τις διηλεκτρικές του ιδιότητες, όταν η ένταση ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη από την τιμή $E_0 = 3 \text{ MV/m}$, ποιο δυναμικό πρέπει να αποκτήσουν δυο μεταλλικές σφαίρες που έχουν ακτίνες $r_1 = 10 \text{ cm}$ και $r_2 = 1 \text{ mm}$ για να αρχίσει διαρροή φορτίων προς τον αέρα ($\epsilon = 1$);

Από τις σχέσεις (2.66) και (2.67) έχουμε ότι στην επιφάνεια της σφαίρας:

$$U = k_0 \frac{Q}{R} \quad \text{και} \quad E = k_0 \frac{Q}{R^2} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{U}{E} = R \rightarrow U = ER \quad (1)$$

Για να αρχίσει διαρροή φορτίων θα πρέπει:

$$E \geq E_0 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$U \geq E_0 R$$

Επομένως για την πρώτη σφαίρα η διαρροή φορτίων θα αρχίσει όταν αποκτήσει δυναμικό $U_1 = E_0 R_1 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-1} \text{ V} = 300 \text{ kV}$

Αντίστοιχα η δεύτερη σφαίρα θα πρέπει να αποκτήσει δυναμικό

$$U_2 = E_0 R_2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 3 \text{ kV}$$

Παράδειγμα 2.14.2.

Από στρόφιγγα που βρίσκεται σε δυναμικό U_0 τρέχει νερό με τη μορφή σφαιρικών σταγόνων που έχουν ακτίνα r . Οι σταγόνες του νερού πέφτουν μέσα από μια μικρή οπή σ' ένα κοίλο σφαιρικό αγωγό ακτίνας R . Να υπολογισθεί το δυναμικό του σφαιρικού αγωγού, όταν γεμίσει με νερό.

Το δυναμικό του σφαιρικού αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση (2.67):

$$U = k_0 \frac{q}{R} \quad (1)$$

όπου q το φορτίο του όταν γεμίσει με νερό.

Το φορτίο q_0 κάθε σφαιρικής σταγόνας είναι:

$$U_0 = k_0 \frac{q_0}{r} \rightarrow q_0 = \frac{U_0 \cdot r}{k_0} \quad (2)$$

Αν έπεσαν n σταγόνες νερού τότε:

$$q = nq_0 \quad (3)$$

Για να υπολογίσουμε το n εξισώνουμε τους όγκους των n σταγόνων και του σφαιρικού αγωγού. Θα είναι:

$$n \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow n = \frac{R^3}{r^3} \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$U = k_0 \frac{R^3}{R \cdot r^3} \cdot U_0 \cdot r \rightarrow U = k_0 \cdot U_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΠΥΚΝΩΤΕΣ

3.1 Χωρητικότητα αγωγού.

Θεωρούμε ένα μονωμένο αγωγό μέσα στον άπειρο κενό χώρο. Φορτίζουμε τον αγωγό διαδοχικά με ηλεκτρικά φορτία q_1, q_2, \dots, q_n και μ' ένα ηλεκτρόμετρο μετράμε τις αντίστοιχες τιμές των δυναμικών του αγωγού U_1, U_2, \dots, U_n . Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{q_1}{U_1} = \frac{q_2}{U_2} = \dots = \frac{q_n}{U_n} \quad (3.1)$$

δηλαδή το πηλίκον του φορτίου του αγωγού διά του δυναμικού του είναι σταθερό. Το σταθερό αυτό πηλίκον ονομάζουμε **χωρητικότητα** του αγωγού και το συμβολίζουμε με C , δηλαδή:

$$C = \frac{q}{U} \quad (3.2)$$

Η χωρητικότητα ενός μονωμένου αγωγού εξαρτάται από το σχήμα και τις διαστάσεις του. Όταν ένας αγωγός βρίσκεται σε περιοχή όπου υπάρχουν και άλλα σώματα, αγωγοί ή μονωτές, τότε ο λόγος q/U , δηλαδή η χωρητικότητά του, δεν εξαρτάται μόνο από το σχήμα και τις διαστάσεις του αλλά και από το σχήμα, τις διαστάσεις και τη θέση των γύρω σωμάτων. Αν τα γειτονικά σώματα είναι **αγωγοί**, τότε προκαλείται μέσα σ' αυτά μια ανακατανομή των ελευθέρων ηλεκτρικών τους φορτίων. Έτσι δημιουργείται ένα ηλεκτρικό πεδίο από επαλληλία, με αποτέλεσμα να αλλάζει το δυναμικό του αγωγού. Αν τα γειτονικά σώματα είναι **μονωτές (διηλεκτρικά)** τότε, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, παράγεται ηλεκτρικό πεδίο από την πόλωση του διηλεκτρικού, το οποίο συντίθεται με το ηλεκτρικό πεδίο του αγωγού, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται το δυναμικό του.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η παρουσία άλλων σωμάτων κοντά σ' ένα αγωγό μεταβάλλει το δυναμικό του, άρα και τη χωρητικότητά του. Πάντως, σε κάθε περίπτωση η χωρητικότητα του αγωγού ορίζεται από τη σχέση (3.2) και εξαρτάται:

- Από το σχήμα και τις διαστάσεις του αγωγού.
- Από τις θέσεις, το σχήμα και τις διαστάσεις των σωμάτων που τον περιβάλλουν.

- Από τη φύση των σωμάτων που τον περιβάλλουν (μονωτές ή αγωγοί).
 Η μονάδα μετρήσεως της χωρητικότητας στο σύστημα S.I. είναι το 1 C/V.
 Η μονάδα όμως έχει ονομασθεί **Farad**, έτσι συμβολίζουμε:

$$1F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{C \cdot C}{J} = 1 \frac{C^2}{N \cdot m}$$

Μετά την εισαγωγή της μονάδας της χωρητικότητας (F), μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του άπειρου κενού χώρου (ϵ_0), που δώσαμε στην παράγραφο 1.10, μπορεί να ισχύσει και ως:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} = 8,85 \frac{pF}{m}$$

3.1.1 Χωρητικότητα μονωμένου σφαιρικού αγωγού.

Το δυναμικό φορτισμένου σφαιρικού αγωγού, που βρίσκεται μέσα σε άπειρο χώρο ενός ομογενούς διηλεκτρικού μέσου, παρέχεται, όπως γνωρίζουμε, από τη σχέση:

$$U = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q}{R}$$

όπου q το φορτίο του και R η ακτίνα του.

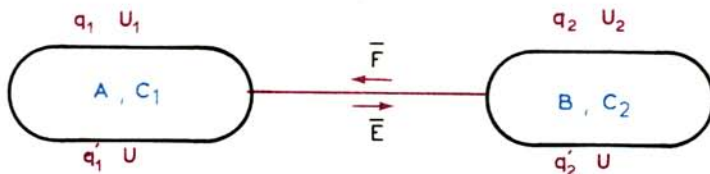
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\frac{q}{U} = \frac{\epsilon}{k_0} R \rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3.3)$$

Η σχέση (3.3) δίνει τη χωρητικότητα σφαιρικού αγωγού σε συνάρτηση με την ακτίνα του καθώς και το είδος του διηλεκτρικού που τον περιβάλλει.

3.1.2 Αγωγή σύνδεση δυο φορτισμένων αγωγών.

Ας υποθέσουμε ότι δυο αγωγοί, A και B, με χωρητικότητα C_1 και C_2 και φορτισμένοι με φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα, συνδέονται αγωγή. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το δυναμικό του συστήματος των δυο αγωγών μετά τη σύνδεσή τους (σχ. 3.1).



Σχ. 3.1.

Αγωγή σύνδεση δυο αγωγών.

Το δυναμικό του καθένα αγωγού πριν από τη σύνδεσή τους, παρέχεται από τη σχέση (3.2), δηλαδή:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{q_2}{C_2} \quad (3.4)$$

Όταν συνδέσουμε τους αγωγούς με σύρμα θα δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως \vec{E} που θα έχει φορά από τον αγωγό με το υψηλότερο δυναμικό προς τον αγωγό με το χαμηλότερο. Η δύναμη που θα εξασκηθεί στα ελεύθερα ηλεκτρόνια των αγωγών θα είναι αντίρροπη της \vec{E} και επομένως τα ηλεκτρόνια θα κινηθούν υπό την επίδραση δυνάμεως \vec{F} . Η κίνηση θα σταματήσει όταν τα δυναμικά των αγωγών A και B γίνουν ίσα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το κοινό δυναμικό U, αν πάρουμε υπόψη ότι το συνολικό φορτίο του πριν και μετά από τη σύνδεσή τους παραμένει σταθερό (αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου), δηλαδή:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \quad (3.5)$$

όπου q_1' , q_2' τα φορτία των δυο αγωγών μετά τη σύνδεσή τους.

Αν υποθεθεί ότι οι δυο αγωγοί συνδέονται αγωγίμα έτσι, ώστε να μη μεταβληθεί η χωρητικότητά τους μετά τη σύνδεση, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$q_1' = C_1 U \quad \text{και} \quad q_2' = C_2 U \quad (3.6)$$

Από τις σχέσεις (3.4), (3.5) και (3.6) λαμβάνουμε:

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \quad (3.7)$$

Η σχέση (3.7) επιτρέπει τον υπολογισμό του κοινού δυναμικού μετά την αγωγήμη σύνδεση των δυο φορτισμένων αγωγών.

Παράδειγμα 3.1.1.

Δυο αγωγοί A και B έχουν φορτία $q_1 = 30 \mu\text{C}$ και $q_2 = 5 \mu\text{C}$ και χωρητικότητες $C_1 = 0,3 \mu\text{F}$ και $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$. Να υπολογισθεί το κοινό δυναμικό U που θα αποκτήσουν όταν συνδεθούν με σύρμα καθώς και τα φορτία τους q_1 και q_2 μετά τη σύνδεση.

Από τη σχέση (3.7) λαμβάνουμε:

$$U = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{35}{0,4} \frac{\mu\text{C}}{\mu\text{F}} = 87,5 \text{ V}$$

οπότε $q_1' = C_1 U = 0,3 \cdot 87,5 \mu\text{C} = 26,25 \mu\text{C}$

και $q_2' = C_2 U = 0,1 \cdot 87,5 \mu\text{C} = 8,75 \mu\text{C}$

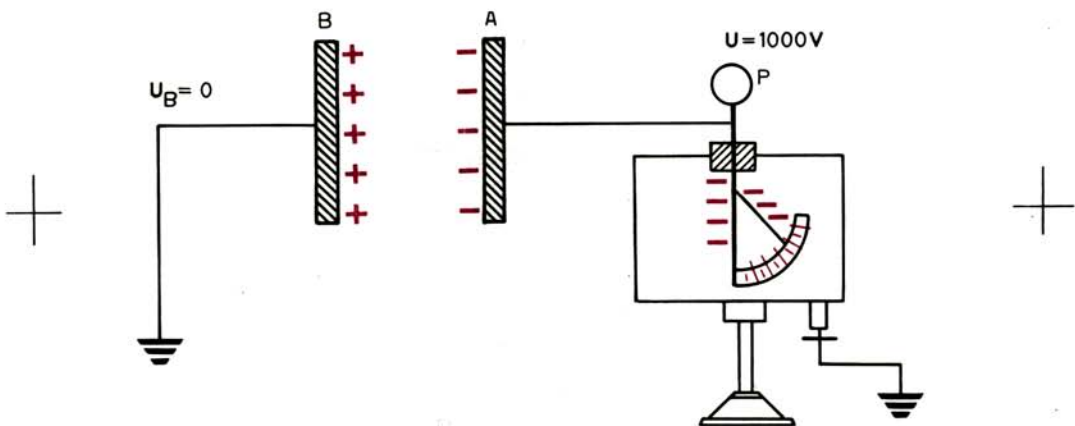
3.2 Πυκνωτές.

Ας θεωρήσουμε επίπεδη μεταλλική πλάκα A που είναι μονωμένη και φορτισμένη με φορτίο $-q$ (σχ. 3.2α).

Συνδέουμε την πλάκα με ηλεκτρόμετρο και μετράμε το δυναμικό της U_A . Πλησιάζουμε στην πλάκα A μια άλλη όμοια πλάκα B που είναι προσγειωμένη. Παρατηρούμε με το ηλεκτρόμετρο ότι η παρουσία της πλάκας B προκαλεί ελάττωση του δυναμικού της A, που σημαίνει ότι η χωρητικότητα της A ($C = q/U$) αυξήθηκε. Άρα **η χωρητικότητα φορτισμένου αγωγού αυξάνεται αν πλησιάσουμε στον αγωγό άλλον προσγειωμένο αγωγό**. Η πλάκα B ηλεκτρίζεται με επαγωγή και στην εσωτερική της επιφάνεια αναπτύσσεται θετικό φορτίο, ενώ το αρνητικό φορτίο που αναπτύσσεται στην εξωτερική της επιφάνεια διαφεύγει προς τη γη. Το θετικό όμως φορτίο της πλάκας B έλκει αρνητικό φορτίο, δηλαδή ηλεκτρόνια από το φύλλο του ηλεκτροσκοπίου προς το μέρος της πλάκας A, με αποτέλεσμα η απόκλιση του φύλλου να ελαττώνεται. Πάντως, το αλγεβρικό άθροισμα του φορτίου των δυο πλακών έχει τιμή μηδέν. Το σύστημα των δυο αγωγίμων πλακών, του οποίου τις ιδιότητες εξετάσαμε πιο πάνω, ονομάζεται «πυκνωτής». Γενικά, κάθε σύστημα δυο μονωμένων αγωγών που είναι φορτισμένοι με ίσα ετερόνυμα φορτία ονομάζεται **πυκνωτής**. Οι δυο αγωγοί ονομάζονται **οπλισμοί** του πυκνωτή. Το μονωτικό υλικό που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών (αέρας, χαρτί, γυαλί, μίκα, παραφινέλαιο κλπ) αποτελεί το **διηλεκτρικό** του πυκνωτή.

Ο πυκνωτής αποτελεί εξάρτημα χρήσιμο για τη συγκρότηση διαφόρων ηλεκτρικών ή ηλεκτρονικών συσκευών ή κυκλωμάτων. Στα σχέδια των κυκλωμάτων αυτών ο πυκνωτής συμβολίζεται με δυο ευθείες παράλληλες γραμμές, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2β. Στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου αυτού θα εξετάσουμε διάφορους τύπους πυκνωτών από θεωρητικής πλευράς.

Σε παραγράφους του επόμενου κεφαλαίου θα εξετάσουμε και ορισμένα κατασκευαστικά θέματα σχετικά με τους πυκνωτές, καθώς και τύπους πυκνωτών που κατασκευάζονται στην πράξη.



Σχ. 3.2α.

Συγκρότηση πυκνωτή.



Σχ. 3.26.

Συμβολισμός πυκνωτή σε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Αν ένας οπλισμός ενός πυκνωτή φορτισθεί με φορτίο $+q$, τότε ο άλλος φορτίζεται με επαγωγή με ίσο αλλά ετερόνυμο φορτίο $-q$, έτσι ώστε το αλγεβρικό άθροισμα του φορτίου των οπλισμών του πυκνωτή να είναι ίσο με μηδέν. Κατά τη μελέτη των διαφόρων θεμάτων που αναφέρονται στους πυκνωτές, θα ονομάζουμε φορτίο πυκνωτή την απόλυτη τιμή του φορτίου του ενός οπλισμού.

Χωρητικότητα πυκνωτή ονομάζεται το πηλίκον του φορτίου q του πυκνωτή διά της τάσεως U που επικρατεί μεταξύ των οπλισμών του:

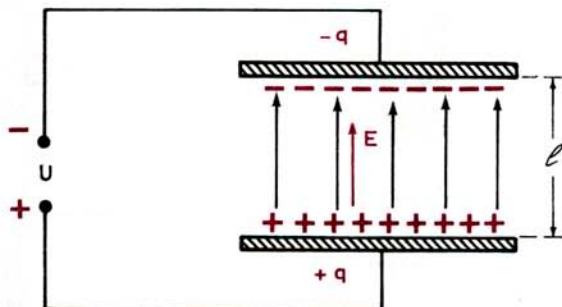
$$C = \frac{q}{U} \quad (3.8)$$

Με βάση τη σχέση (3.8) θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα πυκνωτών διαφόρων γεωμετριών.

3.2.1 Επίπεδος πυκνωτής.

Ο επίπεδος πυκνωτής (σχ. 3.2γ) αποτελείται από δυο επίπεδους και παράλληλους οπλισμούς που τοποθετούνται ο ένας ακριβώς απέναντι από τον άλλο.

Το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε οπλισμού είναι S και η απόσταση των δυο οπλισμών είναι l . Αν μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή εφαρμόσουμε τάση U (π.χ. αν συνδέσουμε τους οπλισμούς με τους πόλους μιας ηλεκτρικής πηγής), ο ένας οπλισμός θα φορτισθεί με φορτίο $+q$ και ο άλλος με $-q$. Τα ηλεκτρικά φορτία των δυο οπλισμών έλκονται μεταξύ τους και κατανέμονται στις εσωτερικές επιφάνειες των οπλισμών. Δημιουργείται έτσι μεταξύ των οπλισμών ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ένταση που δίνεται από τη σχέση (2.38):



Σχ. 3.2γ.

Επίπεδος πυκνωτής.

$$E = \frac{U}{l} \quad (3.9)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια επιφάνεια εμβαδού S , τοποθετημένη μέσα στο ομογενές πεδίο των οπλισμών, κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές, δηλαδή παράλληλη προς τους οπλισμούς του πυκνωτή. Η ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή, παρέχεται από τη σχέση (2.56) για $\alpha = 0^\circ$, δηλαδή:

$$\Psi = E \cdot S \quad (3.10)$$

Η ίδια ηλεκτρική ροή μπορεί να υπολογισθεί από το θεώρημα του Gauss, δοθέντος ότι οφείλεται στο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο κάθε οπλισμού, ως:

$$\Psi = \frac{q}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \quad (3.11)$$

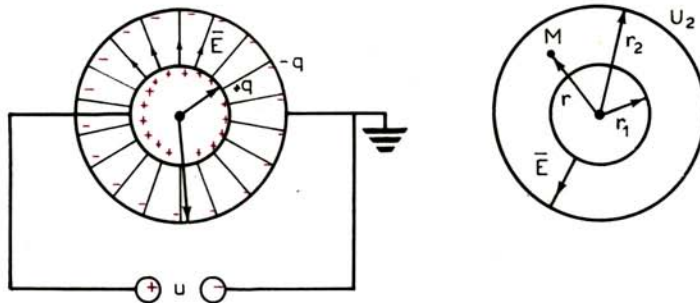
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2), (3.9), (3.10) και (3.11) λαμβάνομε τη χωρητικότητα του επιπέδου πυκνωτή, ως:

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} \quad (3.12)$$

3.2.2 Σφαιρικός πυκνωτής.

Ο σφαιρικός πυκνωτής (σχ. 3.2δ) συγκροτείται από δυο ομόκεντρες μεταλλικές σφαίρες, μεταξύ των οποίων υπάρχει κατάλληλο διηλεκτρικό. Οι δυο σφαίρες αποτελούν τους οπλισμούς του πυκνωτή. Ο εξωτερικός οπλισμός είναι συνήθως προσγειωμένος ($U_2 = 0$).

Ας δούμε τώρα πώς θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή, με ακτίνα εσωτερικού οπλισμού r_1 και εξωτερικού r_2 (σχ. 3.2δ), ο οποίος είναι φορτισμένος με φορτίο q . Υποθέτομε ότι με θετικό φορτίο $+q$ είναι φορτισμένος ο εσωτερικός οπλισμός, ενώ με το εξ' επαγωγής αρνητικό



Σχ. 3.2δ.
Σφαιρικός πυκνωτής.

φορτίο $-q$ είναι φορτισμένος ο εξωτερικός, αν και αυτό δεν επηρεάζει καθόλου τον υπολογισμό της χωρητικότητας που θα επιχειρήσουμε.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss, στο χώρο μεταξύ των δυο οπλισμών, όπως **ακριβώς** κάναμε στην παράγραφο 2.14, για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός φορτισμένου σφαιρικού αγωγού, τότε βρίσκομε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημείου M , με ακτίνα r ($r_1 \leq r \leq r_2$), ίση με:

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \quad (r_1 \leq r \leq r_2) \quad (3.13)$$

Το άνυσμα της εντάσεως θα έχει ακτινική διεύθυνση με φορά από τον εσωτερικό προς τον εξωτερικό οπλισμό.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο οπλισμών, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.22), για μια διαδρομή, μεταξύ των δυο οπλισμών, επί μιας ακτίνας, όπου τα ανύσματα $d\vec{r}$ και \vec{E} είναι συγγραμμικά και ομόρροπα ($\theta = 0$):

$$\begin{aligned} U &= U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Έτσι, υπολογίζουμε τη χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή από τη σχέση ορισμού της:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}}$$

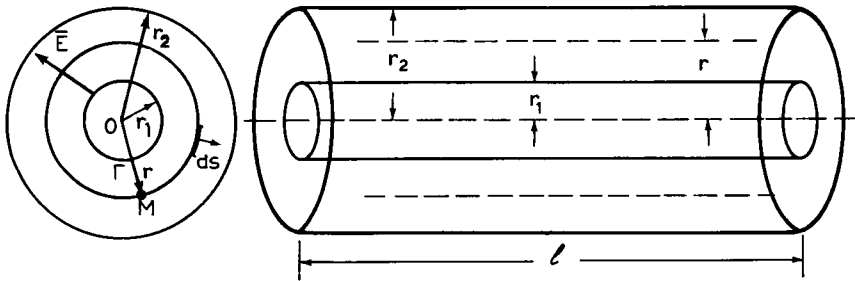
ή $C = 4\pi \epsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (3.15)$

όπου: C η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή (F),
 r_1 η ακτίνα του εσωτερικού οπλισμού (m),
 r_2 η ακτίνα του εξωτερικού οπλισμού (m),
 ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μεταξύ των οπλισμών μονωτικού, και
 ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).

3.2.3 Κυλινδρικός πυκνωτής.

Ο **κυλινδρικός πυκνωτής** (σχ. 3.2ε) συγκροτείται από δυο ομοαξονικά κυλινδρικά αγωγίμα κελύφη, με ακτίνες r_1 και r_2 , μεταξύ των οποίων υπάρχει κατάλληλο διηλεκτρικό. Τα δυο αυτά κυλινδρικά κελύφη, μήκους l , αποτελούν τους οπλισμούς του πυκνωτή.

Η χωρητικότητα ενός κυλινδρικού πυκνωτή υπολογίζεται με τρόπο ανάλογο



Σχ. 3.2ε.
Κυλινδρικός πυκνωτής.

προς τον υπολογισμό για το σφαιρικό πυκνωτή που μόλις εξετάσαμε. Στην περίπτωση όμως του κυλινδρικού πυκνωτή είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε μια παραδοχή:

Θα θεωρήσουμε ότι τα δυο κυλινδρικά κελύφη έχουν άπειρο μήκος, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δυο αγωγών παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία. Η παραδοχή που κάνουμε καλύπτει και την περίπτωση κυλινδρικών πυκνωτών πεπερασμένου μήκους l , αρκεί το μήκος αυτό να είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα r_2 του πυκνωτή.

Έστω q το ανά μονάδα μήκους του πυκνωτή φορτίο του (C/m). Για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο M του χώρου μεταξύ των δυο οπλισμών, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Gauss σε μια νοητή κυλινδρική επιφάνεια μήκους l , η οποία είναι ομοαξονική με τις κυλινδρικές επιφάνειες των δυο οπλισμών:

$$\Psi = \frac{q \cdot l}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \quad (3.16)$$

Επειδή το πεδίο έχει ακτινική συμμετρία, τα ανύσματα \vec{E} και \vec{dS} , της νοητής κυλινδρικής επιφάνειας, θα είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, άρα για την ηλεκτρική ροή Ψ που διαπερνά την υπόψη επιφάνεια, θα έχουμε:

$$\Psi = E \cdot S$$

όπου S το εμβαδόν της παράπλευρης νοητής κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας r , μήκους l :

$$S = 2\pi r l$$

$$\text{Άρα} \quad \Psi = E \cdot 2\pi r l \quad (3.17)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (3.16) και (3.17), λαμβάνουμε το μέτρο της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο M:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r_1 \leq r \leq r_2) \quad (3.18)$$

όπου q η γραμμική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου του πυκνωτή (C/m).

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο οπλισμών, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.22), για μια διαδρομή μεταξύ των δυο οπλισμών, επί μιας ακτίνας, όπου τα ανύσματα $d\vec{r}$ και \vec{E} είναι συγγραμμικά και ομόρροπα ($\theta = 0$):

$$\begin{aligned} U &= U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Έτσι, υπολογίζουμε τη χωρητικότητα ενός κυλινδρικού πυκνωτή μήκους l , από τη σχέση ορισμού της:

$$C = \frac{q \cdot l}{U}$$

και τη σχέση (3.19), δηλαδή:

$$C = 2\pi \epsilon \epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (3.20)$$

όπου:

- C η χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή (F),
- l το μήκος του πυκνωτή (m),
- r_1, r_2 οι ακτίνες του εσωτερικού και εξωτερικού οπλισμού αντίστοιχα (m),
- ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μεταξύ των οπλισμών μονωτικού και
- ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ως κυλινδρικός πυκνωτής συμπεριφέρεται και ένα **ομοαξονικό** ή **συγκεντρικό καλώδιο** που αποτελείται από ένα κεντρικό αγωγό και ένα δεύτερο συγκεντρικό αγωγό που τον περιβάλλει. Άρα, η σχέση (3.20) μπορεί να χρησιμοποιείται προκειμένου να υπολογίζεται η χωρητικότητα ενός ομοαξονικού καλωδίου. Επίσης, προκειμένου να υπολογισθεί η **χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους** του καλωδίου (C_l) μπορεί να χρησιμοποιείται η σχέση:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{F/m}) \quad (3.21)$$

3.3 Χωρητικότητα γραμμών αγωγών.

Μεγάλο ενδιαφέρον, για τις εφαρμογές της Ηλεκτροτεχνίας, κυρίως στο πεδίο της μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας καθώς και στο πεδίο της ενσύρματης τηλεπικοινωνίας, παρουσιάζει η γνώση της χωρητικότητας γραμμών, αποτελούμενων από ορισμένο πλήθος αγωγών.

Τη σημασία της γνώσεως αυτής θα αντιληφθούμε στο κεφάλαιο για τα εναλλασσόμενα ρεύματα, όπου θα γνωρίσουμε τις απώλειες ισχύος λόγω των υπόψη χωρητικοτήτων.

Οι χωρητικότητες των γραμμών αυτών υπολογίζονται με ανάλογη μέθοδο με αυτήν που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για μερικές απλές περιπτώσεις πυκνωτών. Όμως, τα αναπτυσσόμενα στις περιπτώσεις των γραμμών ηλεκτρικά πεδία δεν μπορούν να υπολογισθούν το ίδιο εύκολα. Γι' αυτό στην παράγραφο αυτή θα αρκεσθούμε να αναφέρουμε μόνο τα αποτελέσματα των σχετικών υπολογισμών, σε δυο απλές περιπτώσεις γραμμών αγωγών.

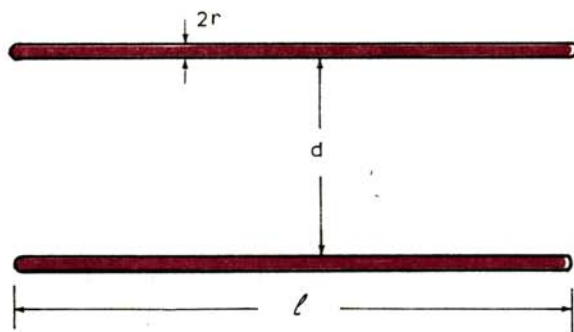
3.3.1 Χωρητικότητα γραμμής δυο παραλλήλων αγωγών.

Θα δώσουμε τη χωρητικότητα μιας γραμμής μεταφοράς που αποτελείται από δυο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς πολύ μεγάλου μήκους. Οι αγωγοί έχουν την ίδια ακτίνα r , απέχουν απόσταση d , βρίσκονται δε υπό διαφορά δυναμικού U , μέσα σε κάποιο άπειρο διηλεκτρικό χώρο (π.χ. τον αέρα) (σχ. 3.3α).

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους (C_l) της γραμμής αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \left[\frac{d}{2r} + \sqrt{\frac{d^2}{4r^2} - 1} \right]} \quad (3.22)$$

όπου: C_l η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής (F/m),
 C η ολική χωρητικότητα της γραμμής (F),



Σχ. 3.3α.
Γραμμή δυο αγωγών.

- l το μήκος της γραμμής (m),
- d η απόσταση των αγωγών (m),
- r η ακτίνα των αγωγών (m),
- ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκεται η γραμμή και
- ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).

Αν οι δυο αγωγοί είναι αρκετά απομακρυσμένοι, δηλαδή αν θεωρηθεί ότι η απόσταση d των αγωγών είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα τους, δηλαδή $d \gg r$, τότε μπορεί προσεγγιστικά να ληφθεί:

$$\sqrt{\frac{d^2}{4r^2} - 1} \approx \frac{d}{2r}$$

οπότε η σχέση (3.22) γίνεται:

$$C_l = \frac{C}{l} \approx \frac{\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}} \quad (3.23)$$

και παρέχει τη χωρητικότητα μιας διπλής γραμμής μεταφοράς που βρίσκεται στον άπειρο χώρο ενός διηλεκτρικού.

3.3.2 Χωρητικότητα ως προς γη γραμμής ενός αγωγού.

Θα δώσουμε τη χωρητικότητα της γραμμής, που αποτελείται από ένα κυλινδρικό αγωγό ακτίνας r , ο οποίος βρίσκεται σε ένα διηλεκτρικό χώρο (π.χ. τον αέρα) σε ύψος h από το έδαφος (σχ. 3.36). Υποθέτουμε ότι ο αγωγός βρίσκεται σε τάση U ως προς τη γη, η οποία θεωρείται ως αγωγός επιστροφής.

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους (C_l) της γραμμής αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \left[\frac{h}{r} + \sqrt{\frac{h^2}{r^2} - 1} \right]} \quad (3.24)$$

όπου: C_l η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής (F/m),

C η ολική χωρητικότητα της γραμμής (F),

l το μήκος της γραμμής (m),

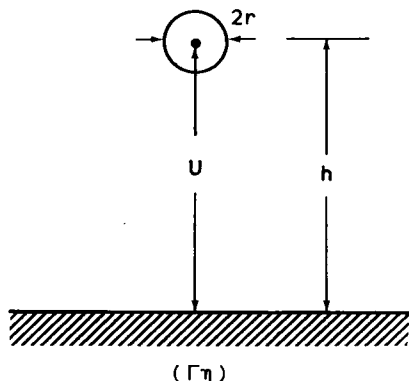
h το ύψος της γραμμής από το έδαφος (m),

r η ακτίνα των αγωγών της γραμμής (m),

ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκεται η γραμμή (στον αέρα $\epsilon \approx 1$) και

ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).

Αν θεωρηθεί ότι η γραμμή βρίσκεται σε μεγάλο ύψος από το έδαφος σε σχέση με την ακτίνα των αγωγών της, δηλαδή $h \gg r$, τότε μπορεί προσεγγιστικά να ληφθεί:



Σχ. 3.36.

Γραμμή ενός αγωγού (επιστροφή μέσω γης).

$$\sqrt{\frac{h^2}{r^2} - 1} \approx \frac{h}{r}$$

οπότε η σχέση (3.24) γίνεται:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}} \quad (3.25)$$

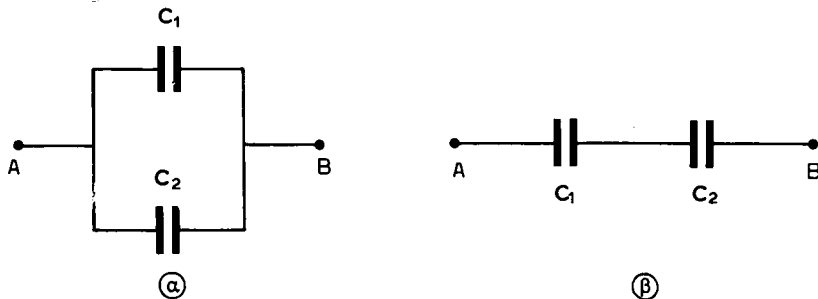
και παρέχει τη χωρητικότητα μιας απλής εναέριας γραμμής μεταφοράς.

3.4 Συνδεσμολογία πυκνωτών.

Θα μελετήσουμε τώρα τρόπους με τους οποίους είναι δυνατό να συνδέομε ηλεκτρικά μεταξύ τους πυκνωτές και θα υπολογίσουμε την ολική ή ισοδύναμη χωρητικότητα μιας τέτοιας συνδεσμολογίας.

Διακρίνουμε γενικά δυο τρόπους ηλεκτρικής συνδέσεως δυο πυκνωτών:

α) **Παράλληλη σύνδεση**, η οποία επιτυγχάνεται όταν ο ένας οπλισμός καθενός πυκνωτή συνδέεται σ' ένα κοινό κόμβο Α, ενώ ο άλλος οπλισμός σ' ένα άλλο κοινό κόμβο Β [σχ. 3.4α(α)]. Μεταξύ των κόμβων Α και Β επιβάλλεται τάση U.



Σχ. 3.4α.

Συνδεσμολογία δυο πυκνωτών. α) Παράλληλη. β) Σε σειρά.

β) **Σύνδεση σε σειρά**, η οποία επιτυγχάνεται όταν ο δεύτερος οπλισμός του ενός πυκνωτή συνδέεται με τον πρώτο οπλισμό του δεύτερου πυκνωτή έτσι, ώστε ο πρώτος οπλισμός του πρώτου πυκνωτή και ο δεύτερος του δεύτερου να μένουν τελικά ελεύθεροι [σχ. 3.4α(β)], αποτελώντας τους κόμβους A και B, μεταξύ των οποίων επιβάλλεται τάση U.

Εξυπακούεται ότι με την ίδια λογική μπορούμε να συνδέσουμε μεταξύ τους και περισσότερους από δυο πυκνωτές, είτε παράλληλα, είτε σε σειρά. Επίσης μπορούμε να συγκροτούμε και κυκλώματα, όπου ορισμένοι πυκνωτές συνδέονται παράλληλα, ενώ άλλοι σε σειρά, πραγματοποιώντας έτσι **μικτές συνδέσεις**.

Σε κάθε περίπτωση συνδεσμολογίας πυκνωτών, ονομάζουμε **ισοδύναμη χωρητικότητα** της συνδεσμολογίας, τη χωρητικότητα που πρέπει να έχει ένας νοητός πυκνωτής, ο οποίος, αν φορτισθεί με την ίδια τάση, με την οποία φορτίζεται η συνδεσμολογία, θα αποταμιεύσει το ίδιο φορτίο με τη συνδεσμολογία.

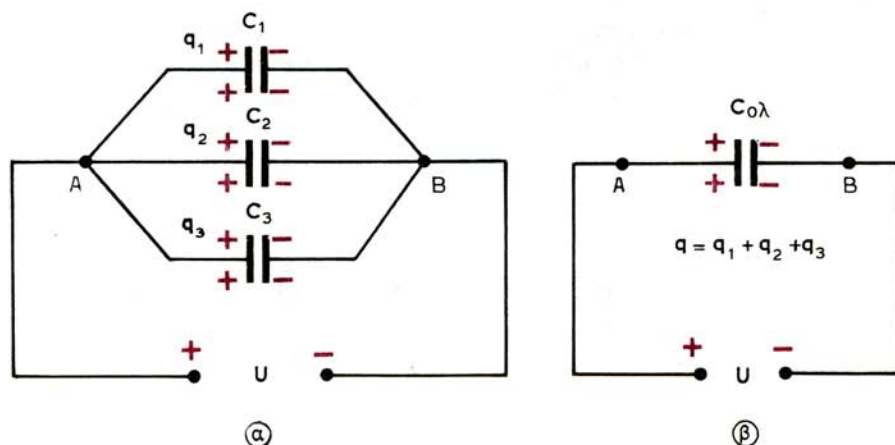
Στις παραγράφους που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε τις σχέσεις, με τις οποίες υπολογίζεται η ισοδύναμη χωρητικότητα τόσο της παράλληλης συνδέσεως όσο και της συνδέσεως σε σειρά. Τέλος, θα δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα υπολογισμού της ισοδύναμης χωρητικότητας μιας μικτής συνδέσεως.

3.4.1 Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών.

Το σχήμα 3.4β δείχνει μια παράλληλη σύνδεση τριών πυκνωτών με χωρητικότητες C_1 , C_2 και C_3 . Συνδέουμε τους οπλισμούς κάθε πυκνωτή με δυο κοινά σημεία A και B, στα οποία εφαρμόζουμε τάση U. Στους οπλισμούς κάθε πυκνωτή θα επικρατεί η ίδια τάση $U = U_A - U_B$.

Τα ηλεκτρικά φορτία των πυκνωτών μετά τη φόρτισή τους είναι:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U \quad \text{και} \quad q_3 = C_3 U$$



Σχ. 3.4β.

α) Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών. β) Ισοδύναμη χωρητικότητα.

Ονομάζουμε $C_{ολ}$ την ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος. Αν στους οπλισμούς του πυκνωτή χωρητικότητας $C_{ολ}$ εφαρμοστεί η ίδια τάση U (σχ. 3.46) ο πυκνωτής θα φορτισθεί με φορτίο q , για το οποίο, σύμφωνα με όσα ήδη έχουμε πει, θα ισχύει:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \quad (3.26)$$

και
$$q = C_{ολ}U \quad (3.27)$$

Αλλά, για καθένα από τα φορτία q_1 , q_2 , q_3 ισχύει:

$$q_1 = C_1U \quad q_2 = C_2U \quad \text{και} \quad q_3 = C_3U$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (3.26) και (3.27) λαμβάνουμε:

$$C_{ολ}U = q_1 + q_2 + q_3 = C_1U + C_2U + C_3U$$

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (3.28)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα ενός πλήθους « n » πυκνωτών, που συνδέονται παράλληλα, δίνεται από τη σχέση:

$$C_{ολ} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (3.29)$$

Αν οι πυκνωτές είναι όμοιοι η (3.29) γίνεται:

$$C_{ολ} = nC \quad (3.30)$$

όπου C η χωρητικότητα καθενός πυκνωτή.

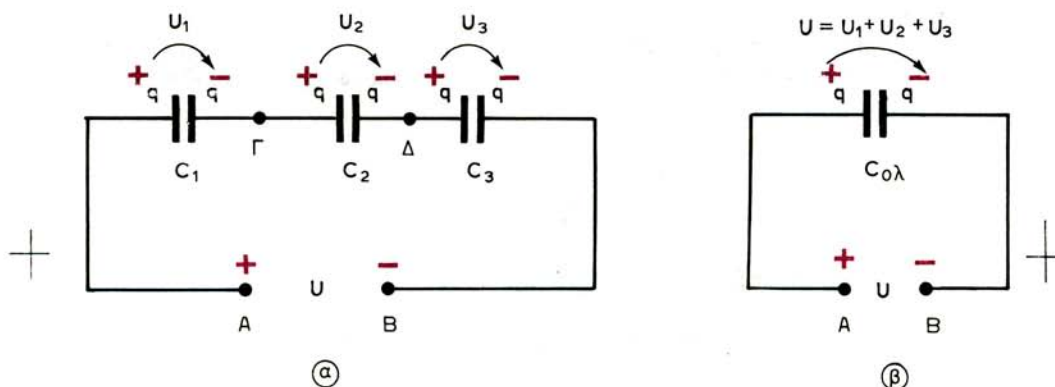
Τα χαρακτηριστικά λοιπόν μιας παράλληλης συνδεσμολογίας πυκνωτών είναι:

- 1) Στους οπλισμούς κάθε πυκνωτή επικρατεί η ίδια τάση.
- 2) Το φορτίο του πυκνωτή ισοδύναμης χωρητικότητας είναι ίσο με το άθροισμα των φορτίων των πυκνωτών της συνδεσμολογίας.
- 3) Η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι ίση με το άθροισμα των χωρητικοτήτων των πυκνωτών της συνδεσμολογίας.

3.4.2 Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά.

Το σχήμα 3.4γ(α) δείχνει μια σύνδεση τριών πυκνωτών σε σειρά, με χωρητικότητα C_1 , C_2 και C_3 .

Αν στα άκρα της συνδεσμολογίας εφαρμόσουμε τάση U , τότε κάθε πυκνωτής φορτίζεται με το ίδιο φορτίο q . Στην αρχή φορτίζονται οι εξωτερικοί οπλισμοί των δυο πυκνωτών (C_1 , C_3) με αντίθετα φορτία ($+q$ και $-q$). Μετά φορτίζονται επαγωγικά οι υπόλοιποι οπλισμοί των πυκνωτών της συνδεσμολογίας, ώστε



Σχ. 3.4γ.

α) Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά. β) Ισοδύναμη χωρητικότητα.

τελικά όλοι οι πυκνωτές να έχουν το ίδιο φορτίο q . Ονομάζουμε $C_{ολ}$ την ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος. Αν στους οπλισμούς του πυκνωτή χωρητικότητας $C_{ολ}$ εφαρμοσθεί η ίδια τάση U [σχ. 3.4γ(β)] ο πυκνωτής θα φορτισθεί με το ίδιο φορτίο q , με το οποίο έχει φορτισθεί κάθε πυκνωτής της συνδεσμολογίας.

Η τάση $U = U_A - U_B$ στους ακροδέκτες A και B της συνδεσμολογίας θα ισούται:

$$U = (U_A - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_\Delta) + (U_\Delta - U_B) = U_1 + U_2 + U_3 \quad (3.31)$$

όπου U_1, U_2, U_3 η τάση στα άκρα καθενός πυκνωτή.

Αλλά για κάθε μια χωρητικότητα C_1, C_2, C_3 καθώς και για την ισοδύναμη $C_{ολ}$, θα ισχύει:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2}, U_3 = \frac{q}{C_3}, U = \frac{q}{C_{ολ}}$$

οπότε η (3.31) γράφεται:

$$\frac{q}{C_{ολ}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (3.32)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα ενός πλήθους « n » πυκνωτών, που συνδέονται σε σειρά, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (3.33)$$

Αν οι πυκνωτές είναι όμοιοι η (3.33) γίνεται:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{n}{C} \rightarrow C_{ολ} = \frac{C}{n} \quad (3.34)$$

- Τα χαρακτηριστικά λοιπόν μιας συνδεσμολογίας πυκνωτών σε σειρά είναι:
- 1) Κάθε πυκνωτής φορτίζεται με το ίδιο φορτίο.
 - 2) Η τάση στα άκρα της συνδεσμολογίας είναι ίση με το άθροισμα των τάσεων μεταξύ των οπλισμών κάθε πυκνωτή.
 - 3) Το αντίστροφο της ισοδύναμης χωρητικότητας είναι ίσο με το άθροισμα των αντιστρόφων των χωρητικοτήτων των πυκνωτών.

3.4.3 Μικτή σύνδεση πυκνωτών.

Χαρακτηριστική περίπτωση τέτοιας συνδεσμολογίας φαίνεται στο σχήμα 3.4δ(α).

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά, άρα η ολική χωρητικότητά τους $C_{1,2}$ θα είναι:

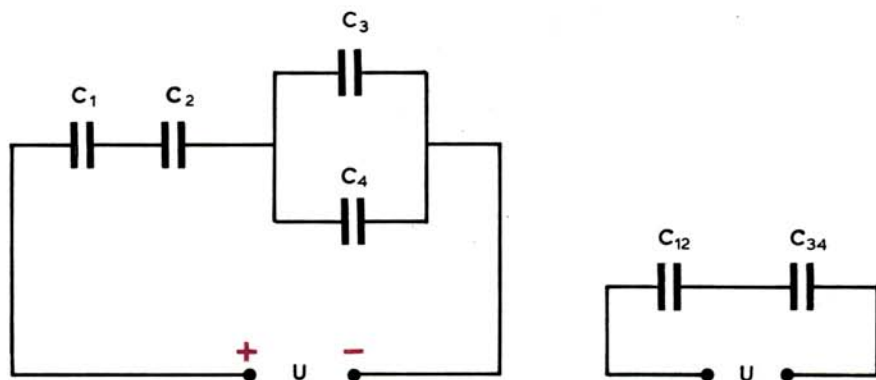
$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Οι πυκνωτές C_3 και C_4 συνδέονται παράλληλα, άρα η ολική χωρητικότητά τους θα είναι:

$$C_{3,4} = C_3 + C_4$$

Οι πυκνωτές $C_{1,2}$ και $C_{3,4}$ συνδέονται με σειρά, άρα η ισοδύναμη χωρητικότητά τους θα είναι:

$$C_{ολ} = \frac{C_{1,2} C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (C_3 + C_4)}{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 + C_4} \quad (3.35)$$

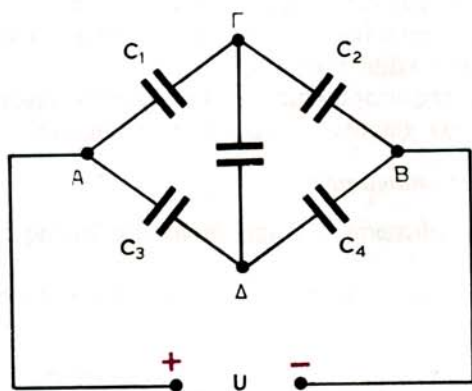


Σχ. 3.4δ.

α) Μικτή συνδεσμολογία πυκνωτών. β) Ισοδύναμη συνδεσμολογία.

Παράδειγμα 3.4.1.

Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να συνδέει τις χωρητικότητες C_1, C_2, C_3, C_4 των πυκνωτών του σχήματος 3.4ε, ώστε ο πυκνωτής χωρητικότητας C_5 να μη φορτίζεται.



Σχ. 3.4ε.

Εφόσον ο πυκνωτής C_5 δεν φορτίζεται, θα πρέπει να ισχύει:

$$q_5 = 0 \rightarrow U_\Gamma - U_\Delta = 0 \rightarrow U_\Gamma = U_\Delta \quad (1)$$

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά.

$$\text{Άρα } C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \text{ οπότε } q_1 = q_2 = C_{1,2} U \quad (2)$$

Επίσης οι πυκνωτές C_3 και C_4 συνδέονται σε σειρά.

$$\text{Άρα } C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}, \text{ οπότε } q_3 = q_4 = C_{3,4} U \quad (3)$$

Είναι $U_A - U_\Gamma = U_A - U_\Delta$ (εξαιτίας της 1)

$$\text{Άρα } \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3} \quad (4)$$

$$\text{Επίσης } U_\Gamma - U_B = U_\Delta - U_B \rightarrow \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_4}{C_4} \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει η ζητούμενη σχέση:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4} \quad (6)$$

Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο, δηλαδή αν ισχύει η (6) τότε $U_{\Gamma} = U_{\Delta}$:

$$U_{\Gamma} - U_{\Delta} = (U_A - U_{\Delta}) - (U_A - U_{\Gamma}) = \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} \text{ ή εξαιτίας των (2) και (3):}$$

$$U_{\Gamma} - U_{\Delta} = \frac{C_4 U}{C_3 + C_4} - \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}$$

$$\rightarrow U_{\Gamma} - U_{\Delta} = \frac{(C_1 C_4 - C_2 C_3) U}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} = 0$$

γιατί ο αριθμητής σύμφωνα με την (6) είναι μηδέν.

Άρα

$$U_{\Gamma} = U_{\Delta}$$

Παράδειγμα 3.4.2.

Πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10 \text{ nF}$ και συνδέεται με πηγή τάσεως U . Μετά από λίγο διακόπτεται η τροφοδοσία και ο πυκνωτής συνδέεται παράλληλα με αφόρτιστο πυκνωτή, οπότε η τάση του ελαττώνεται στα $5/8$ της αρχικής. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα C_x του δεύτερου πυκνωτή.

Όταν οι πυκνωτές συνδεθούν παράλληλα, το φορτίο

$$q = CU \quad (1)$$

του πρώτου πυκνωτή κατανέμεται και στους δυο πυκνωτές.

Αν q' είναι το νέο φορτίο του πρώτου πυκνωτή και q_x το φορτίο του δεύτερου πυκνωτή, τότε

$$q = q' + q_x \quad (2)$$

Μετά από τη σύνδεση οι πυκνωτές αποκτούν την ίδια τάση

$$U' = \frac{5}{8}U \quad (3)$$

οπότε:

$$q' = CU' \quad (4)$$

και

$$q_x = C_x U' \quad (5)$$

Από τις (2), (4) και (5) προκύπτει:

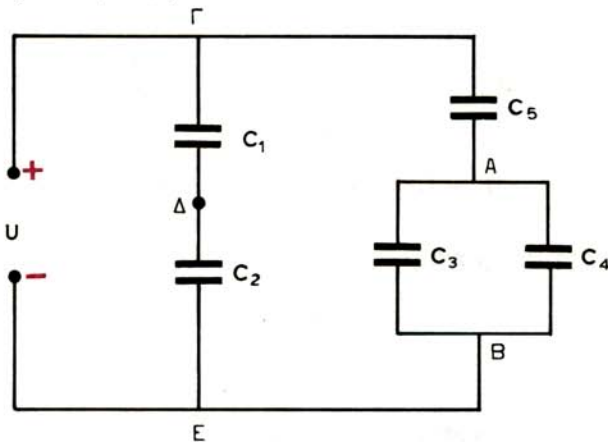
$$q' + q_x = (C + C_x) U' \rightarrow q = (C + C_x) U' \quad (6)$$

Η (6) εξαιτίας των (1) και (3) γράφεται:

$$CU = \frac{5}{8}(C + C_x) U \rightarrow C_x = \frac{3}{5}C = 6 \text{ nF}$$

Παράδειγμα 3.4.3.

Δίνεται η συνδεσμολογία πυκνωτών που φαίνεται στο σχήμα 3.4στ, όπου $C_5 = 10 \mu\text{F}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 5 \mu\text{F}$ και $U_{\Gamma\Delta} = 10 \text{ V}$. Να υπολογισθεί το φορτίο κάθε πυκνωτή καθώς και η τάση U .



Σχ. 3.4στ.

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά. Άρα:

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2,5 \mu\text{F}$$

Οι πυκνωτές C_3 και C_4 συνδέονται παράλληλα. Άρα:

$$C_{3,4} = C_3 + C_4 = 10 \mu\text{F}$$

Οι χωρητικότητες $C_{3,4}$ και C_5 συνδέονται σε σειρά:

$$C_{3,4,5} = \frac{C_{3,4} C_5}{C_{3,4} + C_5} = 5 \mu\text{F}$$

$$q_1 = q_2 = C_1 U_{\Gamma\Delta} = 50 \mu\text{C}$$

οπότε:

$$U_{\Delta E} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{50}{5} \frac{\mu\text{C}}{\mu\text{F}} = 10 \text{ V}$$

Άρα:

$$U = U_{\Gamma\Delta} + U_{\Delta E} = 20 \text{ V}$$

Η τάση U εφαρμόζεται στα άκρα της χωρητικότητας $C_{3,4,5}$. Θα είναι:

$$q_{3,4,5} = C_{3,4,5} U \rightarrow q_{3,4,5} = 5 \cdot 20 \mu\text{F} \cdot \text{V} = 100 \mu\text{C},$$

οπότε και

$$q_5 = q_{3,4,5} = 100 \mu\text{C}$$

Είναι

$$U_{\Gamma A} = \frac{q_5}{C_5} = \frac{100}{10} \frac{\mu\text{C}}{\mu\text{F}} = 10 \text{ V}$$

Αλλά

$$U = U_{\Gamma A} + U_{AB} \rightarrow U_{AB} = U - U_{\Gamma A} = 10 \text{ V}$$

οπότε

$$q_3 = C_3 U_{AB} = 10 \cdot 5 = 50 \mu\text{C}$$

και

$$q_4 = C_4 U_{AB} = 10 \cdot 5 = 50 \mu\text{C}$$

Παράδειγμα 3.4.4.

Φύλλο αλουμινίου με ασήμαντο πάχος εισάγεται μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή, παράλληλα στους οπλισμούς και στη μέση της αποστάσεώς τους (σχ. 3.4ζ). Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα στη χωρητικότητα του πυκνωτή, αν το φύλλο: α) Είναι ηλεκτρικά μονωμένο. β) Συνδέεται αγωγίμα με τον ένα από τους οπλισμούς του πυκνωτή (σχ. 3.4η) με αγωγό αμελητέας χωρητικότητας;

α) Ο πυκνωτής με την είσοδο του μεταλλικού φύλλου ανάμεσα στους οπλισμούς του ισοδυναμεί με σύστημα δυο πυκνωτών, που συνδέονται σε σειρά και έχουν χωρητικότητες:

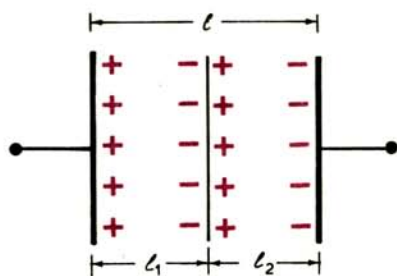
$$C_1 = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{l_1} \quad \text{και} \quad C_2 = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{l_2}$$

Η αρχική χωρητικότητα είναι:

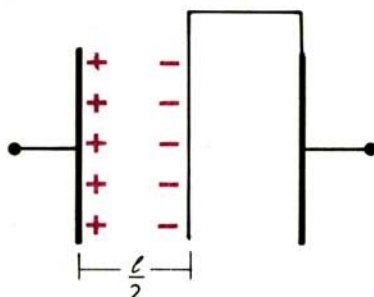
$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{l} \quad (1)$$

Η χωρητικότητα μετά την εισαγωγή του φύλλου αλουμινίου:

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{l_1 + l_2} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{l} \quad (2)$$



Σχ. 3.4ζ.



Σχ. 3.4η.

+

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (1) και (2)

$$C = C_{1,2}$$

δηλαδή η χωρητικότητα παραμένει η ίδια μετά την εισαγωγή του φύλλου και μάλιστα σε όποια θέση και αν το τοποθετήσουμε.

β) Στην περίπτωση αυτή η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ελαττώνεται από l σε $l/2$.

Άρα:

$$C' = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{l}{2}} = 2 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{l} = 2C$$

δηλαδή η χωρητικότητα διπλασιάζεται.

3.5 Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή.

Η φόρτιση ενός πυκνωτή συνίσταται θεωρητικά στη μεταφορά ελευθέρων ηλεκτρονίων από τον ένα οπλισμό στον άλλο. Η εργασία αυτή απαιτεί κατανάλωση ενέργειας.

Στην πράξη η φόρτιση του πυκνωτή γίνεται με την παροχή φορτίων από ηλεκτρική πηγή συνεχούς τάσεως και η ενέργεια παρέχεται από την ίδια την πηγή.

Η αύξηση των φορτίων των οπλισμών του πυκνωτή έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της τάσεως μεταξύ των οπλισμών του και κατά συνέπεια την αύξηση της εντάσεως του ηλεκτρικού του πεδίου. Η ενέργεια λοιπόν που παρέχουμε σ' ένα πυκνωτή για να τον φορτίσουμε, αποθηκεύεται ως ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των δυο οπλισμών. Ο πυκνωτής λοιπόν μπορεί να χαρακτηριστεί και σαν μια αποθήκη ενέργειας. Η αποθήκευση της ενέργειας πραγματοποιείται κατά τη φάση φορτίσεως του πυκνωτή. Αντίστροφα, κατά τη φάση της εκφορτίσεως του πυκνωτή, η αποθηκευμένη σ' αυτόν ενέργεια παρέχεται στο περιβάλλον του, ενώ ταυτόχρονα καταστρέφεται το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του. Θα πρέπει βέβαια να πούμε ότι η φόρτιση – ή η εκφόρτιση – ενός πυκνωτή δεν γίνεται ακαριαία, αλλά απαιτεί κάποιο χρονικό διάστημα. Μέσα στο διάστημα αυτό προσδίδεται φορτίο στον πυκνωτή και η τάση του από την τιμή 0 που είχε πριν από τη φόρτιση, φθάνει στην τιμή U . Σε όλη τη διάρκεια της φορτίσεως και σε τυχούσα χρονική στιγμή οι τιμές του φορτίου q και της τάσεως u συνδέονται με τη γνωστή σχέση:

$$q = Cu$$

όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Για την αύξηση του φορτίου του πυκνωτή κατά dq , καταναλίσκεται από το εξωτερικό σύστημα, που φορτίζει τον πυκνωτή, έργο, το οποίο, σύμφωνα με τη σχέση ορισμού (2.5), είναι ίσο με:

$$dW = u \cdot dq = \frac{q}{C} dq \quad (3.36)$$

Εξυπακούεται ότι κατά το ίδιο ποσό αυξάνεται και η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Είναι φανερό ότι η ενέργεια, η οποία αποθηκεύεται στον πυκνωτή, μετά την ολοκλήρωση της φορτίσεως του παρέχεται από ολοκλήρωση της σχέσεως (3.36), για τιμές του φορτίου q από 0 μέχρι Q , δηλαδή:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (3.37)$$

Εξυπακούεται ότι επειδή ισχύει:

$$Q = CU$$

ισοδύναμες προς τη σχέση (3.37) είναι και οι σχέσεις:

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (3.38)$$

και

$$W = \frac{1}{2} QU \quad (3.39)$$

Και οι τρεις αυτές σχέσεις (3.37), (3.38) και (3.39) παρέχουν την ενέργεια ενός φορτισμένου πυκνωτή.

3.6 Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου.

Μας έχει ήδη – σε αρκετές περιπτώσεις – δοθεί η ευκαιρία να αναπτύξουμε τους λόγους, για τους οποίους σε ένα ηλεκτρικό πεδίο εγκλείεται ενέργεια. Μάλιστα, σε ορισμένες απλές περιπτώσεις ηλεκτρικών πεδίων, όπως π.χ. στην περίπτωση του πεδίου ενός σημειακού ηλεκτρικού φορτίου (παράγρ. 2.4.1), είδαμε πώς υπολογίζεται η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου. Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε σχέσεις που επιτρέπουν τον υπολογισμό της ενέργειας ενός οποιουδήποτε ηλεκτρικού πεδίου.

Πριν όμως προχωρήσουμε, σκόπιμο είναι να εισάγουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, την **πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας** (w_H), η οποία ισούται με την ηλεκτρική ενέργεια (W_H) ανά μονάδα όγκου του χώρου στον οποίο αναπτύσσεται το πεδίο.

Εξυπακούεται ότι η πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας έχει, στο S.I., ως μονάδα μετρήσεως το 1 J/m^3 .

Ας δούμε τώρα πώς θα υπολογίσουμε την πυκνότητα ενέργειας σε μια απλή περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου, το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο, όπως γνωρίζουμε, αναπτύσσεται μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή:

Η ενέργεια του πεδίου, στην περίπτωση αυτή, θα δίνεται από τη σχέση (3.38):

$$W_H = \frac{1}{2} CU^2$$

όπου, η χωρητικότητα του πυκνωτή θα ισούται [σχέση (3.12)] με:

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l}$$

Συνδυάζοντας τις δυο αυτές σχέσεις, λαμβάνομε:

$$W_H = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} U^2$$

Αλλά στο ομογενές πεδίο ισχύει:

$$E = \frac{U}{l}$$

οπότε η ενέργεια γίνεται:

$$W_H = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} (El)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 SE^2 l \quad (3.40)$$

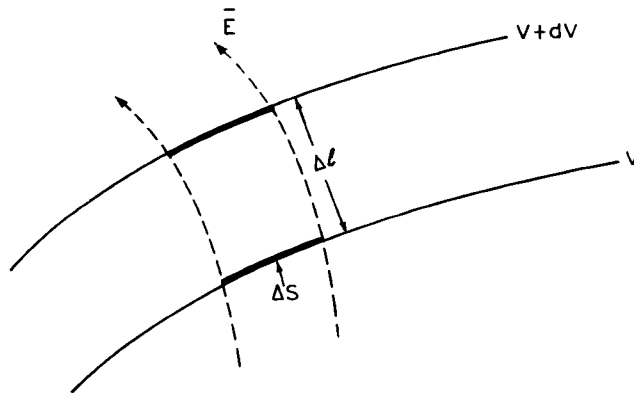
Ο όγκος του πεδίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι

$$V = S \cdot l$$

Άρα η πυκνότητα ενέργειας του ομογενούς πεδίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$w_H = \frac{W_H}{V} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 \quad (3.41)$$

Είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι η ίδια σχέση (3.41) ισχύει και στην περίπτωση **οποιοδήποτε** ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρούμε π.χ. ένα μικρό πρίσμα μεταξύ δυο ισοδυναμών επιφανειών V και $V + dV$ (σχ. 3.6α) με βάση ΔS και ύψος Δl , τόσο μικρό ώστε να θεωρήσουμε πρακτικά αμετάβλητα μέσα σ' αυτό τα



Σχ. 3.6α.

Στοιχειώδες πρίσμα μεταξύ δυο ισοδυναμικών επιφανειών ηλεκτρικού πεδίου.

διάφορα πεδιακά μεγέθη. Τότε συγκροτείται ένας πολύ μικρός πυκνωτής παραλλήλων οπλισμών με οπλισμούς επιφάνειας ΔS επί των δυο ισοδυναμικών επιφανειών, ενέργειας ΔW_H και όγκου $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$. Η πυκνότητα ενέργειας $w_H = \frac{\Delta W_H}{\Delta V}$ του στοιχειώδους αυτού πυκνωτή επίπεδου οπλισμών δίδεται

και πάλι από τη σχέση (3.41).

Άρα, η πυκνότητα ενέργειας ενός οποιουδήποτε ηλεκτρικού πεδίου που βρίσκεται σε ομοιογενές διηλεκτρικό μέσο, δίνεται από τη σχέση:

$$w_H = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 \quad (3.42)$$

3.6.1 Ελκτική δύναμη μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή.

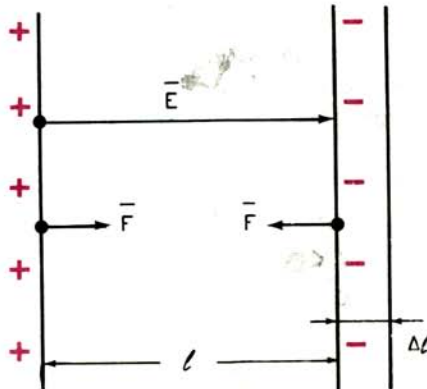
Είναι φανερό ότι μεταξύ των οπλισμών ενός φορτισμένου πυκνωτή ασκούνται ελκτικές δυνάμεις, εξαιτίας των ετερωνύμων ηλεκτρικών φορτίων που βρίσκονται επάνω τους. Ενδιαφέρον έχει να υπολογίσουμε τις δυνάμεις αυτές σε μια απλή περίπτωση, όπως π.χ. εκείνη του πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς.

Αν υποθεθεί ότι θέλουμε να απομακρύνουμε τον ένα οπλισμό κατά απόσταση Δl , θα πρέπει να δαπανήσουμε μηχανικό έργο:

$$\Delta W_\mu = F \cdot \Delta l$$

Αντίστοιχα θα αυξηθεί η ηλεκτρική ενέργεια του πεδίου (σχ. 3.66), εφόσον θα αυξηθεί η απόσταση μεταξύ των οπλισμών κατά Δl , κατά ποσότητα:

$$\Delta W_H = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 S E^2 \Delta l$$



Σχ. 3.66.

Δυνάμεις επάνω στους οπλισμούς επίπεδου πυκνωτή.

Εξισώνοντας τις δυο πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$F \Delta l = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 S E^2 \Delta l$$

ή

$$F = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 S \quad (3.43)$$

Παράδειγμα 3.6.1.

Ένας πυκνωτής με διηλεκτρικό αέρα ($\epsilon = 1$) αποτελείται από δυο επίπεδες κυκλικές πλάκες ακτίνας $r = 30$ cm. Αν η απόσταση των πλακών είναι $l = 5$ mm και η τάση μεταξύ τους $U = 5$ kV ζητούνται: α) Η χωρητικότητα του πυκνωτή. β) Η ενέργειά του. γ) Η δύναμη με την οποία έλκονται οι πλάκες. δ) Η πυκνότητα ενέργειας.

$$\alpha) \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{l} = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{l} \quad (1)$$

Είναι $r = 30 \cdot 10^{-2}$ m, $l = 5 \cdot 10^{-3}$ m οπότε η (1) δίνει $C = 0,5 \cdot 10^{-9}$ F = 0,5 nF

$$\beta) \quad W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^6 = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

γ) Από τις σχέσεις (3.40) και (3.43) προκύπτει ότι:

$$\frac{W}{F} = l \rightarrow F = \frac{W}{l} = \frac{6,25 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 1,25 \text{ N}$$

$$\delta) \quad w_H = \frac{W_H}{S l} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{1,25}{3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 4,42 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Παράδειγμα 3.6.2.

Να αποδειχθεί ότι, αν ένας φορτισμένος πυκνωτής συνδεθεί παράλληλα με έναν άλλο, αρχικά αφόρτιστο, η ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος μετά τη σύνδεση είναι μικρότερη από την ενέργεια που είχε αρχικά ο φορτισμένος πυκνωτής.

Αν C_1, C_2 οι χωρητικότητες των πυκνωτών, q_1 το φορτίο του ενός πριν από τη σύνδεση και q'_1, q'_2 τα φορτία καθενός μετά τη σύνδεση, τότε η κοινή τάση U που αποκτούν οι πυκνωτές μετά τη σύνδεση θα είναι:

$$U = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q'_1 + q'_2}{C_1 + C_2} = \frac{q_1 + 0}{C_1 + C_2} \rightarrow U = \frac{q_1}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

Πριν από τη σύνδεση η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} \quad (2)$$

Μετά τη σύνδεση η ενέργεια του συστήματος γίνεται:

$$W' = \frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U^2 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$$W' = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \frac{q_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \rightarrow W' = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1 + C_2}$$

Είναι:

$$\frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1 + C_2} < \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} \text{ δηλαδή } W' < W$$

Αυτό συμβαίνει γιατί ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται κατά τη σύνδεση σε θερμότητα (με σπινθηρισμούς). Ένα άλλο μέρος επίσης χάνεται στο περιβάλλον σαν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία «επιβραδύνσεως» των φορτίων που μετακινούνται από το φορτισμένο πυκνωτή στον αφόρτιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

4.1 Γενικά.

Στα κεφάλαια που έχουν προηγηθεί μελετήσαμε τα σχετικά με την ανάπτυξη των ηλεκτροστατικών πεδίων και γνωρίσαμε τρόπους, με τους οποίους υπολογίζονται τα πεδίακά μεγέθη (ένταση, δυναμικό). Έτσι, μας δόθηκε αρκετές φορές η ευκαιρία να αναπτύξουμε τους λόγους, για τους οποίους τα ηλεκτρικά πεδία αναπτύσσονται μέσα σε χώρους ειδικής κατηγορίας σωμάτων – τους **μονωτές** ή τα **διηλεκτρικά** – τα οποία δεν επιτρέπουν την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα από τη μάζα τους, αλλ' όμως επιτρέπουν τη μετάδοση των ηλεκτρικών δυνάμεων. Άλλωστε για το λόγο αυτό οι μονωτές ονομάστηκαν και διηλεκτρικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των διηλεκτρικών, μερικές από τις οποίες έχουμε ήδη εισάγει και θα αναφέρομε τρόπους με τους οποίους, χρησιμοποιώντας διηλεκτρικά, μπορούμε να βελτιώσουμε τη συμπεριφορά των πυκνωτών, αποθηκεύοντας σ' αυτούς μεγαλύτερη ενέργεια.

4.2 Διηλεκτρική σταθερά.

Από την παράγραφο 1.10, όπου αναπτύξαμε το νόμο του Coulomb, γνωρίσαμε την κυριότερη χαρακτηριστική ιδιότητα ενός μονωτή, τη **σχετική διηλεκτρική σταθερά**. Μάλιστα, όπως φάνηκε και από τη σχέση 1.5, όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά ενός μονωτικού, τόσο μικρότερη είναι η δύναμη που ασκείται σε φορτία που βρίσκονται στο χώρο του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Τη φυσική σημασία της έννοιας **διηλεκτρική σταθερά** μπορούμε να δώσουμε με τη βοήθεια της χωρητικότητας ενός πυκνωτή, την οποία ορίσαμε στην παράγραφο 3.3. Στην παράγραφο εκείνη υπολογίσαμε τη χωρητικότητα διαφόρων τύπων πυκνωτών, π.χ. του πυκνωτή επιπέδων οπλισμών:

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l}$$

Του σφαιρικού πυκνωτή:

$$C = 4\pi \epsilon \epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

ή του κυλινδρικού πυκνωτή:

$$C = 2\pi \epsilon \epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Όπως φαίνεται και στις τρεις πιο πάνω περιπτώσεις, αλλά ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση πυκνωτή, μεταξύ των οπλισμών του οποίου υπάρχει ομοιόμορφα τοποθετημένο ένα ομογενές μονωτικό, η χωρητικότητα του είναι μέγεθος **ευθέως ανάλογο** της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς του μέσου. Δηλαδή, η χωρητικότητα C ενός πυκνωτή, μεταξύ των οπλισμών του οποίου υπάρχει ομογενές διηλεκτρικό μέσο, συνδέεται με τη χωρητικότητα C_0 του ίδιου πυκνωτή, αν μεταξύ των οπλισμών του υπάρχει κενός χώρος, με τη σχέση:

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon \quad (4.1)$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η σχετική διηλεκτρική σταθερά του κενού χώρου είναι εξ ορισμού ίση με τη μονάδα, όπως έχουμε πει και στην παράγραφο 1.10. Κατά προσέγγιση ίση προς τη μονάδα είναι και η σχετική διηλεκτρική σταθερά του αέρα.

Από τη σχέση (4.1) προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ενός μονωτή:

Σχετική διηλεκτρική σταθερά ενός ομογενούς διηλεκτρικού ονομάζεται το πηλίκον της χωρητικότητας ενός πυκνωτή, που έχει μεταξύ των οπλισμών του το διηλεκτρικό, προς τη χωρητικότητα του ίδιου πυκνωτή, που έχει διηλεκτρικό το κενό (ή κατά προσέγγιση τον αέρα).

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά, για ορισμένη θερμοκρασία, εξαρτάται μόνο από το διηλεκτρικό και είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση φορτίσεως και τα γεωμετρικά στοιχεία του πυκνωτή.

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά των μονωτών είναι εξ ορισμού μεγαλύτερη από τη μονάδα, οπότε από τη σχέση (4.1) προκύπτει ότι:

$$\frac{C}{C_0} > 1 \rightarrow C > C_0 \quad \text{δηλαδή:}$$

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή αυξάνεται όταν μεταξύ των οπλισμών του τοποθετήσουμε διηλεκτρικό.

Στον πίνακα 4.2.1 αναγράφεται η σχετική διηλεκτρική σταθερά διαφόρων μονωτικών, η οποία, όπως ήδη γνωρίζουμε, είναι καθαρός αριθμός.

Το γινόμενο της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ενός μονωτικού επί τη διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου (ϵ_0), ονομάζεται διηλεκτρική σταθερά (ϵ^) του μονωτικού, δηλαδή:*

$$\epsilon^* = \epsilon \epsilon_0 \quad (4.2)$$

Όπως φαίνεται η μονάδα μετρήσεως της διηλεκτρικής σταθεράς ενός μέσου είναι το 1 F/m.

Τα διηλεκτρικά, των οποίων η διηλεκτρική σταθερά έχει την ίδια τιμή σε όλη την έκταση του χώρου τον οποίο καταλαμβάνουν, ονομάζονται **ομογενή** διηλεκτρικά. Αντίθετα, μη ομογενή ονομάζονται τα διηλεκτρικά, των οποίων η διηλεκτρική σταθερά είναι συνάρτηση της θέσεως στην οποία αυτή μετράται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.1.
Χαρακτηριστικά μονωτικών υλικών.

Διηλεκτρικό	Σχετική διηλεκτρική σταθερά	Διηλεκτρική αντοχή (MV/m)
Αέρας	1	3
Άσφαλτος	2,5-3	10 ⁻⁵
Βακελίτης	4,5-7,5	4-30
Βερνίκι	4,8	50-80
Γυαλί	5-7	5-8
Εβονίτης	2-3	30
Ήλεκτρο	2,9	75
Ίζολαντίνη	6	12,6
Καουτσούκ	2,5-5	8-10
Μίκα	4,5-7,5	50-220
Μικαλέξ	6,3	16
Παραφίνη	2,1-2,5	23-45
Πορσελάνη	5,5-7	13
Χαλαζίας	3,5-4,5	8
Χαρτί	2-2,5	40

Παράδειγμα 4.2.1.

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει ως διηλεκτρικό τον αέρα ($\epsilon_a = 1$). Κάθε πλάκα του πυκνωτή έχει επιφάνεια $S = a\beta$. Η μια διάσταση της πλάκας είναι $\beta = 0,1$ m (σχ. 4.2) και η απόσταση μεταξύ των πλακών $l = 3$ mm. Ένα μέρος του πυκνωτή βυθίζεται μέσα σε λάδι ($\epsilon_\lambda = 4,5$). Να βρεθεί πόσο πρέπει να βυθιστεί ο πυκνωτής (απόσταση x στο σχήμα), ώστε η χωρητικότητά του να γίνει τρεις φορές μεγαλύτερη από την αρχική.

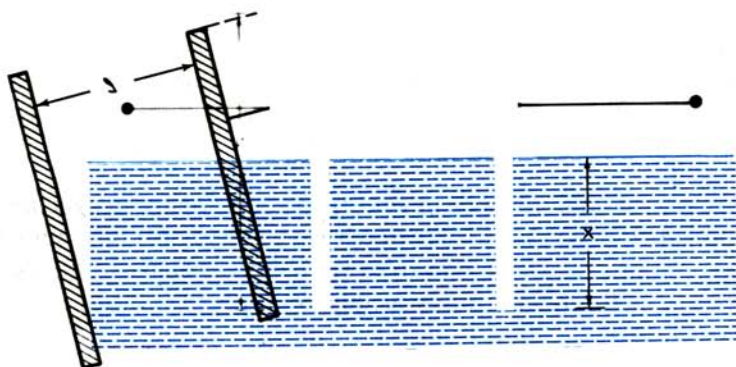
Η αρχική πυκνότητα του πυκνωτή είναι:

$$C_0 = \epsilon_a \epsilon_0 \frac{S}{l} = \epsilon_0 \frac{a \cdot \beta}{l} \quad (1)$$

Μετά τη βύθιση του πυκνωτή στο λάδι κατά μήκος x , ένα τμήμα των οπλισμών του μήκους x , συμπεριφέρεται ως επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό το λάδι, ενώ ένα άλλο τμήμα μήκους $(\beta-x)$ συμπεριφέρεται ως επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό τον αέρα. Οι οπλισμοί και των δυο αυτών νοητών οπλισμών βρίσκονται υπό την αυτή τάση, άρα μπορεί να θεωρηθεί ότι οι πυκνωτές αυτοί συνδέονται παράλληλα. Επομένως, όταν ο πυκνωτής βυθισθεί στο λάδι κατά x , μπορεί να θεωρηθεί σαν σύστημα δυο πυκνωτών που συνδέονται παράλληλα.

Άρα:

$$C = C_0' + C_x \quad (2)$$



Σχ. 4.2.

όπου C'_o η χωρητικότητα του πυκνωτή με διηλεκτρικό τον αέρα και C_x η χωρητικότητα του πυκνωτή με διηλεκτρικό το λάδι.

$$\text{Είναι:} \quad C'_o = \epsilon_o \frac{(\beta-x)a}{l} \quad (3)$$

$$\text{και} \quad C_x = \epsilon_\lambda \cdot \epsilon_o \frac{x.a}{l} \quad (4)$$

Από τις (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$C = \frac{\epsilon_o a}{l} (\beta - x + \epsilon_\lambda x) \quad (5)$$

και θα πρέπει:

$$C = 3 C_o \quad (6)$$

Από τις (1), (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{\epsilon_o \cdot a}{l} (\beta - x + \epsilon_\lambda x) = 3 \epsilon_o \frac{a \cdot \beta}{l} \rightarrow$$

$$\beta - x + \epsilon_\lambda x = 3\beta \rightarrow x = \frac{2\beta}{\epsilon_\lambda - 1} = \frac{0,2}{3,5} \text{ m} = 5,715 \text{ cm}$$

4.3 Διηλεκτρική αντοχή.

Μια άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα των μονωτικών υλικών, την οποία έχουμε ήδη γνωρίσει στην παράγραφο 2.13, είναι η διηλεκτρική αντοχή.

Διηλεκτρική αντοχή ενός διηλεκτρικού ονομάζουμε τη μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που μπορεί να αντέξει το διηλεκτρικό χωρίς να διασπασθεί.

Επειδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός πυκνωτή καθορίζεται από την τάση του πυκνωτή (σχέση 2.22) συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόζο-

με σ' ένα πυκνωτή μια οσοδήποτε μεγάλη τάση. Συγκεκριμένα, η μέγιστη τάση λειτουργίας ενός πυκνωτή πρέπει να είναι μικρότερη από εκείνη που αντιστοιχεί σε ένταση ηλεκτρικού πεδίου με τιμή ίση με τη διηλεκτρική αντοχή του μονωτικού του πυκνωτή. Η μέγιστη τάση λειτουργίας ενός πυκνωτή πρέπει πάντοτε να γράφεται δίπλα από την ένδειξη της χωρητικότητας του πυκνωτή, π.χ. 10 $\mu\text{F}/500 \text{ V}$.

Ένας πυκνωτής για να αντέχει σε μεγαλύτερη τάση πρέπει να έχει παχύτερο μονωτικό, άρα για την ίδια χωρητικότητα μεγαλύτερες διαστάσεις και κόστος.

Ο πίνακας 4.2.1 παρέχει, εκτός από τη σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ , και τη διηλεκτρική αντοχή (σε MV/m) μερικών διηλεκτρικών.

Παράδειγμα 4.3.1.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε επίπεδο πυκνωτή χρησιμοποιούμε μονωτικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = 2$ και διηλεκτρική αντοχή $E_{\mu\epsilon\gamma} = 4000 \text{ MV/m}$. Ο πυκνωτής πρέπει να έχει χωρητικότητα $C = 0,2 \mu\text{F}$ και μέγιστη τάση $U_{\mu\epsilon\gamma} = 4,5 \text{ kV}$. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του εμβαδού κάθε οπλισμού; ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

Για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να ισχύει:

$$E \leq E_{\mu\epsilon\gamma} \rightarrow \frac{U_{\mu\epsilon\gamma}}{l} \leq E_{\mu\epsilon\gamma} \rightarrow l \geq \frac{U_{\mu\epsilon\gamma}}{E_{\mu\epsilon\gamma}} \quad (1)$$

$$\text{Είναι:} \quad C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} \rightarrow l = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{C} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\epsilon \epsilon_0 S}{C} \geq \frac{U_{\mu\epsilon\gamma}}{E_{\mu\epsilon\gamma}} \rightarrow S \geq \frac{C \cdot U_{\mu\epsilon\gamma}}{\epsilon \cdot \epsilon_0 E_{\mu\epsilon\gamma}} \quad \text{οπότε } S_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{C \cdot U_{\mu\epsilon\gamma}}{\epsilon \cdot \epsilon_0 E_{\mu\epsilon\gamma}} \quad (3)$$

$$\text{Είναι:} \quad C = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}, \quad U_{\mu\epsilon\gamma} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ V}, \quad E_{\mu\epsilon\gamma} = 4 \cdot 10^9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε ότι $S_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = 127 \text{ cm}^2$.

4.4 Διηλεκτρική μετατόπιση.

Για επίπεδο πυκνωτή γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$C = \epsilon \cdot \epsilon_0 \frac{S}{l}, \quad E = \frac{U}{l} \quad \text{και} \quad q = C U$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$q = \epsilon \cdot \epsilon_0 S E \quad (4)$$

Επομένως η **επιφανειακή πυκνότητα** φορτίου θα είναι:

$$\sigma = \frac{q}{S} \quad \text{ή} \quad \sigma = \epsilon \cdot \epsilon_0 E \quad (4.3)$$

Η σχέση (4.3) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή των φορτίων στην επιφάνεια του οπλισμού ενός πυκνωτή, όταν γνωρίζουμε την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από αυτόν και αντίστροφα.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η σχέση (4.3) ισχύει γενικότερα και για κάθε σημείο της επιφάνειας ενός αγωγίμου σώματος που βρίσκεται μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό θα γίνει με τρόπο ανάλογο εκείνων που χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο 3.6, για να υπολογίσουμε την ενέργεια που εγκλείεται σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο. Πριν προχωρήσουμε, ας υπενθυμίσουμε ότι στην παράγραφο 2.12 εξετάσαμε τη συμπεριφορά των αγωγίμων σωμάτων μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο. Επαναλαμβάνουμε τα κυριότερα συμπεράσματα, που είναι χρήσιμα και για την παρούσα ανάπτυξη:

α) Κατά την ηλεκτρίση των αγωγίμων σωμάτων τα ηλεκτρικά φορτία κατανέμονται στην εξωτερική τους επιφάνεια.

β) Η επιφάνεια ενός αγωγίμου σώματος είναι ισοδυναμική.

γ) Οι δυναμικές γραμμές πέφτουν κάθετα στην επιφάνεια ενός αγωγίμου σώματος.

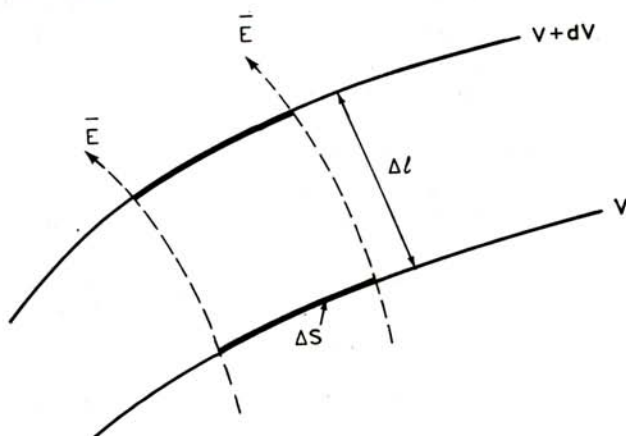
Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔS ενός αγωγού, μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Η επιφάνεια αυτή θα είναι ισοδυναμική ενός δυναμικού V . Θεωρούμε επίσης μια πολύ κοντινή σ' αυτήν ισοδυναμική επιφάνεια, δυναμικού $V+dV$ (σχ. 4.4).

Έτσι δημιουργείται ένας νοητός στοιχειώδης επίπεδος πυκνωτής, με οπλισμούς επιφάνειας ΔS , που απέχουν απόσταση Δl και βρίσκονται υπό τάση dV . Για τον πυκνωτή αυτόν ισχύει η σχέση (4.3).

Άρα καταλήγουμε στο ότι τα ηλεκτρικά φορτία, που αναπτύσσονται σ' ένα σημείο της επιφάνειας ενός αγωγίμου σώματος μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, συνδέονται με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό, με τη σχέση:

$$\sigma = \epsilon_0 \epsilon E \quad (4.4)$$

όπου: σ η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου (C/m^2),



Σχ. 4.4.

Στοιχειώδες πρίσμα μεταξύ δυο ισοδυναμικών επιφανειών ηλεκτρικού πεδίου.

E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (V/m),
 ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου και
 ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του άπειρου κενού χώρου ($8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).

Ονομάζουμε **διηλεκτρική μετατόπιση** ή ηλεκτρική διέγερση ενός ηλεκτρικού πεδίου, το διάνυσμα:

$$\bar{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \bar{E} \quad (4.5)$$

Μετά την εισαγωγή του μεγέθους της διηλεκτρικής μετατοπίσως, είναι φανερό ότι η σχέση (4.4) μπορεί να γραφεί:

$$\sigma = D \quad (4.6)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι μονάδα της διηλεκτρικής μετατοπίσεως στο σύστημα S.I. είναι το 1 C/m^2 .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διηλεκτρική μετατόπιση ορίζεται από τη σχέση (4.5) για μια ορισμένη – αρκετά μεγάλη – κατηγορία διηλεκτρικών, τα οποία ονομάζονται **ισότροπα**.

Όμως υπάρχει και μια άλλη κατηγορία διηλεκτρικών, για τα οποία δεν ισχύει η σχέση (4.5), εξαιτίας των διηλεκτρικών ιδιοτήτων τους. Στα διηλεκτρικά αυτά, τα οποία ονομάζονται **ανισότροπα**, τα διανύσματα \bar{E} και \bar{D} δεν είναι συγγραμμικά και η διηλεκτρική τους σταθερά δεν αποδίδεται από ένα μόνο αριθμό.

Τέτοια ανισότροπα διηλεκτρικά, όπως π.χ. είναι οι κρύσταλλοι, δεν θα μας απασχολήσουν περισσότερο στο βιβλίο αυτό.

4.5 Οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών.

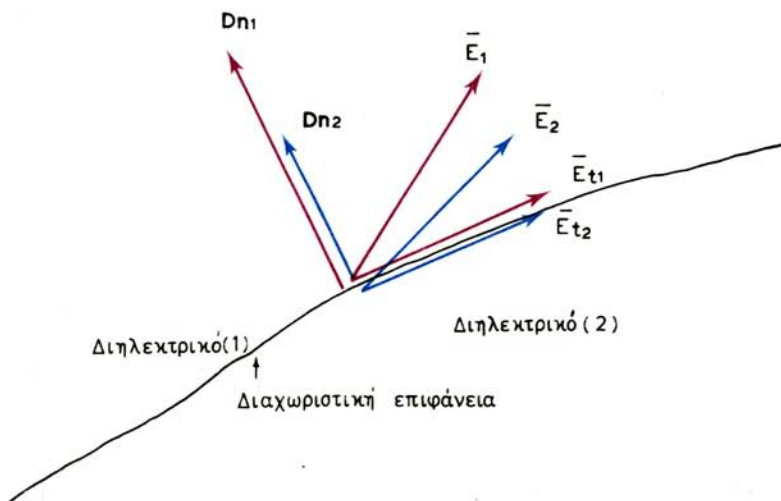
Έχουμε ήδη αναπτύξει μεθόδους με τις οποίες μπορεί να υπολογισθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (E) και κατ' ακολουθίαν η διηλεκτρική μετατόπιση (D) μέσα σε ομογενή και ισότροπα διηλεκτρικά. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη μεταβολή των πεδριακών αυτών μεγεθών (E , D) ακριβώς στη διαχωριστική επιφάνεια δυο ομογενών και ισοτρόπων διηλεκτρικών. Τη συμπεριφορά των ανυσματικών αυτών μεγεθών θα μελετήσουμε με τη βοήθεια των δυο συνιστωσών τους:

- Της **εφαπτομενικής** κατά τη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσας της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου (E_t) και
- της **κάθετης** επάνω στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατοπίσεως (D_n).

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα χαρακτηρίζουμε με το δείκτη (1) τα μεγέθη που αναφέρονται στο ένα διηλεκτρικό και με το δείκτη (2) τα μεγέθη που αναφέρονται στο άλλο (σχ. 4.5α).

4.5.1 Συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου.

Έχουμε ήδη αναπτύξει (παράγρ. 2.5) ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο,



Σχ. 4.5α.

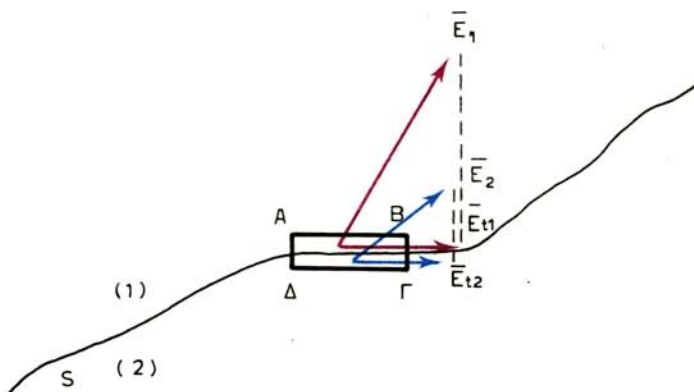
Οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών.

δηλαδή το συνολικό έργο που παράγεται και καταναλίσκεται σε μια **κλειστή** διαδρομή του είναι ίσο με μηδέν. Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση (2.22), για μια κλειστή διαδρομή μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο γράφουμε:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (4.7)$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα την εξίσωση (4.7), που εκφράζει το νόμο του αστροβίλου του ηλεκτρικού πεδίου, στην κλειστή διαδρομή του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔΑ (σχ. 4.5β), το οποίο κατασκευάζεται στη διαχωριστική επιφάνεια δυο ομογενών και ισότροπων διηλεκτρικών, ως εξής:

Θεωρούμε στοιχειώδες ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο διηλεκτρικό μέσο (1), παράλληλο και πάρα πολύ κοντά προς τη διαχωριστική επιφάνεια S. Αυτό είναι τόσο μικρό σε μήκος, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί η ένταση του ηλεκτρικού



Σχ. 4.5β.

Η συνέχεια της επαπτομενικής συνιστώσας της εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου στη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών.

πεδίου E_1 σταθερή κατά το τμήμα αυτό. Θεωρούμε επίσης το συμμετρικό του AB , ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια S , μέσα στο διηλεκτρικό μέσο (2), δηλαδή το στοιχειώδες τμήμα $\Gamma\Delta$. Η ένταση E_2 του ηλεκτρικού πεδίου στο διηλεκτρικό μέσο (2) μπορεί επίσης να ληφθεί σταθερή κατά το στοιχειώδες τμήμα $\Gamma\Delta$.

Εφαρμόζομε πλέον το νόμο του αστροβίλου στην κλειστή διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_\Gamma^\Delta \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_\Delta^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.8)$$

Επειδή τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ έχουν ληφθεί πάρα πολύ κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια, τα μήκη των τμημάτων ($B\Gamma$) και (ΔA) είναι πρακτικά αμελητέα, οπότε τα επ' αυτών ολοκληρώματα της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου έχουν τιμή μηδέν. Εξάλλου, επειδή η ένταση των ηλεκτρικών πεδίων και στα δυο διηλεκτρικά, κατά τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$, είναι σταθερή, η σχέση (4.8) γίνεται:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{AB} - \vec{E}_2 \cdot \vec{\Gamma\Delta} = 0 \quad (4.9)$$

Ας θεωρήσομε τώρα τις συνιστώσες των E_1 , E_2 , τις παράλληλες προς τη διαχωριστική επιφάνεια, ή όπως ονομάζονται, τις **εφαπτομενικές συνιστώσες** της εντάσεως των ηλεκτρικών πεδίων, στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο διηλεκτρικών E_{1t} , E_{2t} . Οι συνιστώσες αυτές θα είναι παράλληλες προς τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ εκ κατασκευής. Άρα η σχέση (4.9) γίνεται:

$$E_{1t}(AB) + E_{2t}(\Gamma\Delta) = 0$$

Επειδή δε έχει ληφθεί (AB) = ($\Gamma\Delta$), θα έχουμε και:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.10)$$

Η παραπάνω σχέση (4.10) εκφράζει τη συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάβαση της διαχωριστικής επιφάνειας δυο διηλεκτρικών μέσων και αποτελεί την πρώτη από τις δυο οριακές συνθήκες τις οποίες αναζητούμε.

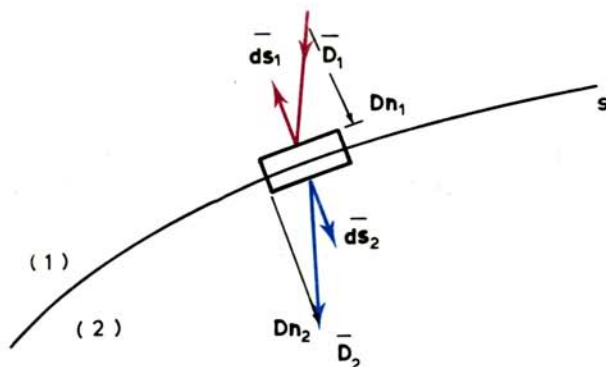
4.5.2 Μεταβολή της κάθετης συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατοπίσεως.

Θεωρούμε τώρα μικρό πρίσμα, που να περιέχει στοιχειώδες τμήμα της διαχωριστικής επιφάνειας S δυο διηλεκτρικών, εμβαδού dS , έτσι ώστε το πρίσμα να εκτείνεται στους χώρους και των δυο διηλεκτρικών. Οι άνω και κάτω βάσεις του πρίσματος λαμβάνονται παράλληλες προς τη διαχωριστική επιφάνεια ενώ το ύψος του λαμβάνεται αμελητέο. Έτσι, αν είναι dS_1 , dS_2 τα ανύσματα των δυο βάσεων του πρίσματος, θα έχουμε (σχ. 4.5γ):

$$d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 \quad (4.11)$$

$$\text{και} \quad dS_1 = dS_2 = dS \quad (4.12)$$

Υποθέτομε επίσης ότι επί της διαχωριστικής επιφάνειας των δυο διηλεκτρι-



Σχ. 4.5γ.

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss σε στοιχειώδες πρίσμα επί της διαχωριστικής επιφάνειας δυο διηλεκτρικών.

κών θα βρίσκονται – εν γένει – ηλεκτρικά φορτία, επιφανειακής πυκνότητας σ .

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του Gauss (σχέση 2.59) για την κλειστή επιφάνεια του παραπάνω πρίσματος:

$$\Psi = \oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon \epsilon_0} \quad (4.13)$$

Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος, θα είναι αμελητέα, επειδή εκ κατασκευής αμελητέο έχει ληφθεί το ύψος του. Εξάλλου τα ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται μέσα στο πρίσμα θα είναι, όπως υποθέσαμε:

$$\sum Q_i = \sigma dS$$

Τέλος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στις βάσεις του πρίσματος, στοιχειώδους εμβαδού dS , δεν μεταβάλλεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Μετά από αυτά, η εξίσωση (4.13) γίνεται:

$$\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 + \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = \frac{\sigma dS}{\epsilon \epsilon_0}$$

Αν επιπλέον ληφθεί υπόψη η σχέση ορισμού της διηλεκτρικής μετατοπίσως (4.5), καθώς και η σχέση (4.11), η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$-\bar{D}_1 \cdot d\bar{S}_2 + \bar{D}_2 \cdot d\bar{S}_2 = \sigma dS \quad (4.14)$$

Θεωρούμε τώρα τις κάθετες επάνω στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσες της διηλεκτρικής μετατοπίσως D_{n1} , D_{n2} , οι οποίες είναι παράλληλες και ομόρροπες προς το διάνυσμα $d\bar{S}_2$. Έτσι η σχέση (4.14) γίνεται:

$$-D_{n1} dS_2 + D_{n2} dS_2 = \sigma dS$$

και λόγω της (4.12)

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma \quad (4.15)$$

Η παραπάνω σχέση (4.15) εκφράζει ότι η κάθετη συνιστώσα της διηλεκτρικής μετατοπίσεως κατά τη διάβαση της διαχωριστικής επιφάνειας δυο διηλεκτρικών μέσων μεταβάλλεται ασυνεχώς, εάν στην επιφάνεια έχουν τοποθετηθεί ηλεκτρικά φορτία. Εάν η διαχωριστική επιφάνεια είναι ελεύθερη από φορτία, τότε η σχέση (4.15) γίνεται:

$$D_{n_1} = D_{n_2} \quad (4.16)$$

και εκφράζει τη συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατοπίσεως στην ελεύθερη από ηλεκτρικά φορτία διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών.

Η σχέση (4.15) αποτελεί τη δεύτερη από τις δυο οριακές συνθήκες, τις οποίες αναζητούμε.

4.5.3 Διάθλαση των δυναμικών γραμμών.

Με βάση τις δυο οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών, θα μελετήσουμε τώρα πώς μεταβάλλεται η διεύθυνση των δυναμικών γραμμών στη διαχωριστική επιφάνεια, όταν αυτή είναι **ελεύθερη** από ηλεκτρικά φορτία.

Ας είναι α_1 και α_2 οι γωνίες προσπτώσεως των δυναμικών γραμμών, στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο διηλεκτρικών (σχ. 4.5δ). Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (4.10) και (4.16) λαμβάνομε:

$$\frac{E_{t_1}}{D_{n_1}} = \frac{E_{t_2}}{D_{n_2}} \quad (4.17)$$

Επειδή ισχύει:

$$E_{t_1} = E_1 \eta \mu \alpha_1, \quad E_{t_2} = E_2 \eta \mu \alpha_2$$

$$D_{n_1} = D_1 \sigma \nu \alpha_1, \quad D_{n_2} = D_2 \sigma \nu \alpha_2$$

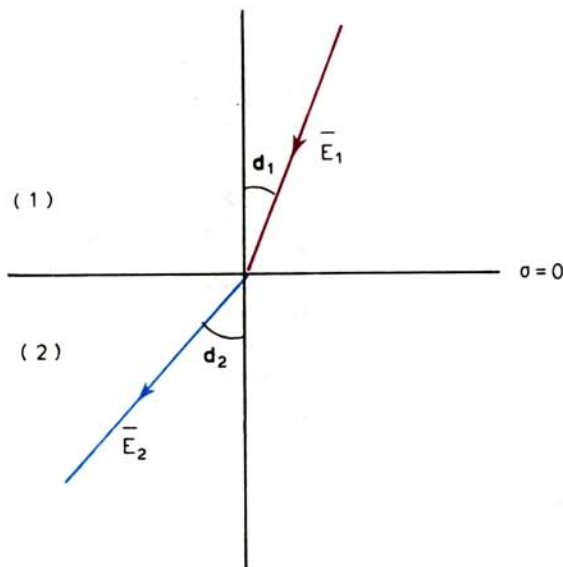
η σχέση (4.17) γίνεται:

$$\frac{E_1 \eta \mu \alpha_1}{D_1 \sigma \nu \alpha_1} = \frac{E_2 \eta \mu \alpha_2}{D_2 \sigma \nu \alpha_2}$$

Και λόγω της σχέσεως ορισμού (4.5) της διηλεκτρικής μετατοπίσεως:

$$\frac{\epsilon \varphi \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon \varphi \alpha_2}{\epsilon_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\epsilon \varphi \alpha_1}{\epsilon \varphi \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (4.18)$$

Η σχέση (4.18) εκφράζει τη διάθλαση των δυναμικών γραμμών κατά τη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών, όταν αυτή είναι ελεύθερη από ηλεκτρικά φορτία.



Σχ. 4.55.

Διάθλαση των δυναμικών γραμμών.

Είναι φανερό ότι αν οι δυναμικές γραμμές προσπίπτουν κάθετα ($\alpha_1 = 0$), τότε κατά τη διάθασή τους δεν διαθλώνται ($\alpha_2 = 0$). Εφαρμογή του τελευταίου συμπεράσματος είναι και η εξής: Αν μέσα σε ομογενές πεδίο, που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή, τοποθετήσουμε μία ή περισσότερες πλάκες διηλεκτρικού (σχ. 4.5ε), παράλληλα προς τους οπλισμούς του πυκνωτή, τότε το πεδίο εξακολουθεί, στα διάφορα τμήματα του πυκνωτή, να παραμένει ομογενές. Αυτό συμβαίνει επειδή οι δυναμικές γραμμές πέφτουν κάθετα στις διαχωριστικές επιφάνειες των διηλεκτρικών και κατά συνέπεια δεν διαθλώνται. Για τον ίδιο λόγο δεν μεταβάλλεται και η τιμή ανύσματος της διηλεκτρικής μετατοπίσεως στα διάφορα τμήματα του πυκνωτή, εφόσον οι διαχωριστικές επιφάνειες είναι ελεύθερες από φορτία, η πρόσπτωση γίνεται κάθετα και ισχύει η σχέση (4.16).

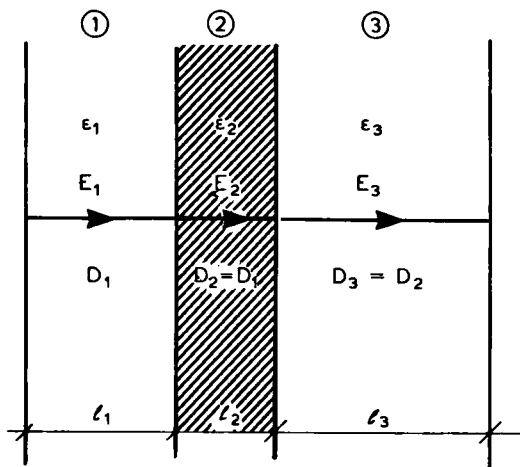
Δηλαδή στην περίπτωση του πυκνωτή του σχήματος 4.5ε, ο οποίος αρχικά αποτελείτο από διηλεκτρικό (ϵ_1), μετά την εισαγωγή πλάκας διηλεκτρικού (ϵ_2) παράλληλα προς τους οπλισμούς, θα έχουμε:

$$D_1 = D_2 \text{ και } D_3 = D_2 \text{ οπότε } D_1 = D_2 = D_3 = D$$

και συνεπώς:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} \quad \text{και} \quad E_3 = \frac{D}{\epsilon_1} = E_1$$

Όπως εύκολα διαπιστώνεται, ο πυκνωτής που σχηματίστηκε τελικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκροτείται από τρεις επίπεδους πυκνωτές, με πάχη l_1 , l_2 , l_3 , οι οποίοι συνδέονται σε **σειρά**. Αλλά στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε διεξοδικά σε επόμενη παράγραφο, όπου και θα δώσουμε σχετικά παραδείγματα.



Σχ. 4.5ε.

Εισαγωγή μιας πλάκας διηλεκτρικού στο ομοιογενές πεδίο των οπλισμών ενός επίπεδου πυκνωτή.

Παράδειγμα 4.5.1.

Μεταξύ των οπλισμών ενός επίπεδου πυκνωτή εφαρμόζεται τάση $U = 470 \text{ V}$. Η κάθε επιφάνεια του οπλισμού του είναι 800 cm^2 και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του 2 mm . Να βρεθούν:

α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

β) Το φορτίο του πυκνωτή ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

Μετά τη φόρτιση απομακρύνουμε την πηγή φορτίσεως από τον πυκνωτή και τοποθετούμε μεταξύ των οπλισμών του μια μονωτική πλάκα πάχους $l_2 = 1,6 \text{ mm}$ με σχετική διηλεκτρική σταθερά 18. Να βρεθεί η τάση μεταξύ των οπλισμών (σχ. 4.5στ).

$$\text{α) } E = \frac{U}{l} = \frac{470}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 235 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

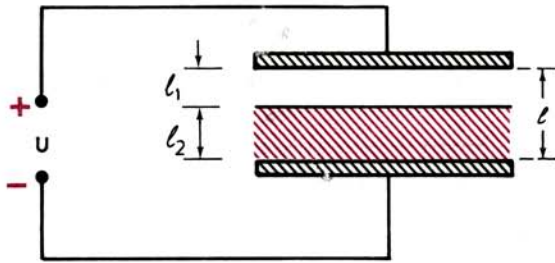
$$\text{β) } q = UC_0 = U\epsilon_0 \frac{S}{l} = 470 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{800 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} \text{C} \rightarrow q = 166,37 \text{ nC}$$

Με την τοποθέτηση της μονωτικής πλάκας το σύστημα ισοδυναμεί με δυο πυκνωτές που συνδέονται σε σειρά. Επομένως η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

όπου:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{l_1} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{800 \cdot 10^{-4}}{0,4 \cdot 10^{-3}} \text{F} = 1,7692 \text{ nF}$$



Σχ. 4.5στ.

και

$$C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{l_2} = 18 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{800 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-3}} \text{ F} = 7,9617 \text{ nF}$$

Με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε:

$$C = 1,447 \text{ nF}$$

Το ηλεκτρικό φορτίο q παραμένει το ίδιο:

$$q = U' \cdot C \rightarrow U' = \frac{q}{C} = \frac{166,37 \text{ nC}}{1,447 \text{ nF}} \approx 115 \text{ V}$$

4.6 Ηλεκτρικό δίπολο – Ηλεκτρική ροπή.

Όπως ήδη στην παράγραφο 2.8.3 έχουμε αναφέρει, **ηλεκτρικό δίπολο** ονομάζεται ένα σύστημα δυο ίσων αλλά ετερονύμων φορτίων $+q$ και $-q$ που απέχουν μικρή απόσταση l (σχ. 4.6α).

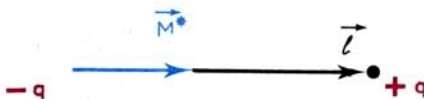
Κάθε ηλεκτρικό δίπολο χαρακτηρίζεται από την **ηλεκτρική ή διπολική ροπή του**.

Ηλεκτρική ροπή διπόλου \vec{M}^* ονομάζεται το ανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και φορά του ανύσματος \vec{l} και μέτρο το γινόμενο του φορτίου q επί την απόσταση l .

$$\vec{M}^* = q \cdot \vec{l} \quad (4.19)$$

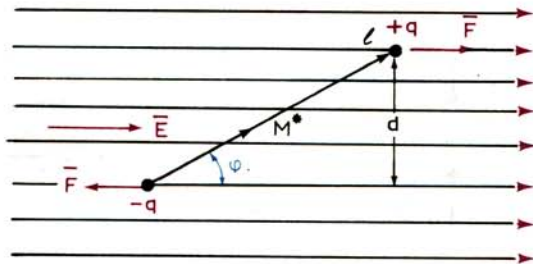
Το άνυσμα \vec{l} έχει κατά σύμβαση φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο.

Στην παράγραφο 2.8.3 είδαμε πώς υπολογίζεται το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δημιουργεί το ηλεκτρικό δίπολο. Αν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σ' ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ένταση E πολύ μεγαλύτερη από την ένταση του



Σχ. 4.6α.

Ροπή ηλεκτρικού διπόλου.



Σχ. 4.66.

Ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

δικού του ηλεκτρικού πεδίου (σχ. 4.66), τότε σε κάθε φορτίο του διπόλου ασκείται δύναμη:

$$F = E \cdot q \quad (4.20)$$

Οι δυο δυνάμεις που ασκούνται στα φορτία συνιστούν ένα ζεύγος δυνάμεων του οποίου η μηχανική ροπή M είναι:

$$M = F \cdot d = F \cdot l \cdot \eta\mu\phi \quad (4.21)$$

όπου ϕ η γωνία των ανυσμάτων \vec{E} και \vec{l} .

Από τις σχέσεις (4.19), (4.20) και (4.21) προκύπτει:

$$M = M^* E \eta\mu\phi \quad (4.22)$$

ή ανυσματικά:

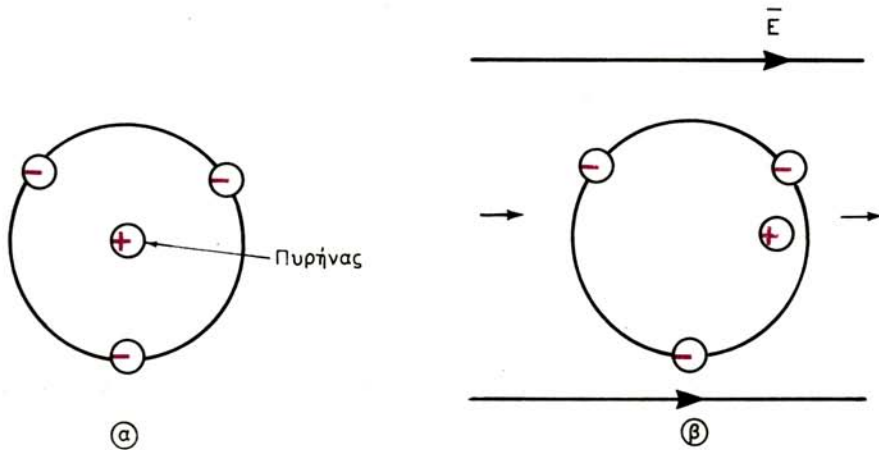
$$\vec{M} = [\vec{M}^* \cdot \vec{E}] \quad (4.23)$$

Η μηχανική αυτή ροπή τείνει να καταστήσει την ηλεκτρική ροπή του διπόλου παράλληλη προς τη διεύθυνση του πεδίου.

4.7 Ηλεκτρική ροπή ατόμων και μορίων των διηλεκτρικών.

Στην παράγραφο 1.5, όπου εξετάσαμε τις ιδιότητες των αγωγών και των μονωτών, αναφέραμε ότι σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στους αγωγούς, στους μονωτές τα ηλεκτρόνια σθένους συνδέονται στερεά με το υπόλοιπο άτομο, ώστε να μην είναι δυνατή η κίνησή τους, όταν ο μονωτής βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

Τα ηλεκτρόνια των ατόμων ενός διηλεκτρικού που βρίσκεται έξω από ηλεκτρικό πεδίο, κινούνται συμμετρικά γύρω από το θετικά φορτισμένο πυρήνα, έτσι, το κέντρο βάρους των θετικών φορτίων (πυρήνας) συμπίπτει με το κέντρο βάρους των αρνητικών φορτίων (ηλεκτρονιακό νέφος), όπως παραστατικά φαίνεται στο σχήμα 4.7α (α).



Σχ. 4.7α.

α) Άτομο εκτός ηλεκτρικού πεδίου (μη πολωμένο). β) Άτομο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο (πολωμένο).

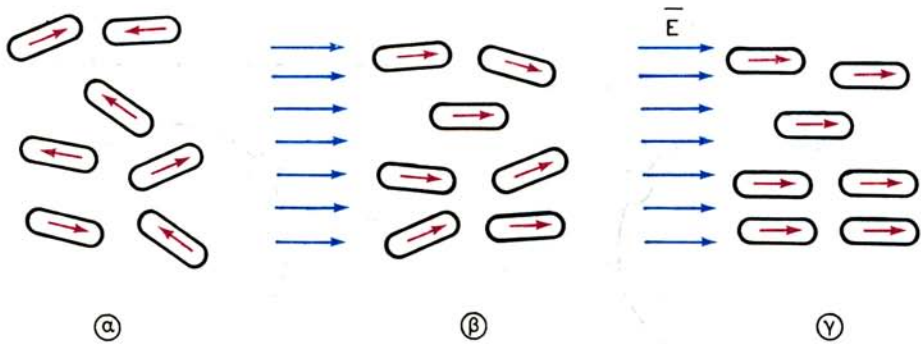
Εάν το διηλεκτρικό εισαχθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, τότε στα ηλεκτρόνια των ατόμων του ασκούνται οι πεδιακές δυνάμεις, οι οποίες μετατοπίζουν τις ως προς τον πυρήνα τροχιές τους. Δυνάμεις βέβαια εξασκούνται και στο θετικά φορτισμένο πυρήνα, αλλά λόγω της πολύ μεγαλύτερης του μάζας, η μετατόπισή του είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη μετατόπιση του ηλεκτρονιακού νέφους [σχ. 4.7α(β)]. Αποτέλεσμα αυτής της μετατόπισης είναι η απόκλιση του κέντρου βάρους των αρνητικών φορτίων από το κέντρο βάρους των θετικών φορτίων, οπότε πλέον το άτομο συμπεριφέρεται ως ηλεκτρικό δίπολο ή όπως λέμε είναι **πολωμένο**. Καταλήγομε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι, τα άτομα ενός διηλεκτρικού εκτός ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι πολωμένα, ενώ αντίθετα όταν βρεθούν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο υφίστανται πόλωση.

Αλλά ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν ένα διηλεκτρικό συγκροτείται από μόρια, όπως π.χ. όταν αποτελεί μία χημική ένωση (π.χ. HCl , H_2O , NH_3 , οργανικές ενώσεις κλπ). Τα μόρια των διηλεκτρικών διακρίνονται σε:

- **Πολικά** μόρια, με δομή τέτοια, ώστε να συμπεριφέρονται ως ηλεκτρικά δίπολα που αναπτύσσουν ηλεκτρική ροπή.
- **Μη πολικά** μόρια, με δομή τέτοια, ώστε να έχουν συμμετρική κατανομή των φορτίων τους και επομένως να μην αναπτύσσουν ηλεκτρική ροπή.

Πολικά είναι π.χ. τα μόρια του HCl , του H_2O και της NH_3 . Η πολικότητα π.χ. στο μόριο του νερού οφείλεται στο ότι τα κέντρα βάρους των δυο ατόμων υδρογόνου και το κέντρο βάρους του οξυγόνου δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Όταν ένα διηλεκτρικό με **πολικά μόρια** δεν βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, δεν παρουσιάζει μακροσκοπικά ηλεκτρική ροπή γιατί οι ηλεκτρικές ροπές των μορίων του έχουν τυχαίες διευθύνσεις και επομένως εξουδετερώνονται.



Σχ. 4.76.

Διηλεκτρικό με πολικά μόρια. α) Έξω από ηλεκτρικό πεδίο. β) Μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο με σχετικά μικρή ένταση. γ) Μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο με μεγαλύτερη ένταση.

νονται μεταξύ τους [σχ. 4.76(α)].

Αν όμως φέρομε το διηλεκτρικό μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, τότε οι ηλεκτρικές ροπές των μορίων του προσανατολίζονται, με αποτέλεσμα το διηλεκτρικό να εμφανίζει ηλεκτρική ροπή [σχ. 4.76(β)].

Όσο ισχυρότερο είναι το πεδίο E , τόσο μεγαλύτερος αριθμός διπόλων προσανατολίζεται κατά τη διεύθυνση του πεδίου [σχ. 4.76(γ)].

Μη πολικά είναι π.χ. τα μόρια των διηλεκτρικών που αποτελούνται από άτομα ενός μόνο χημικού στοιχείου (π.χ. H_2).

Όπως ήδη αναφέραμε, τα διηλεκτρικά με **μη πολικά** μόρια δεν αναπτύσσουν ηλεκτρική ροπή. Αυτό συμβαίνει επειδή το κέντρο βάρους των αρνητικών φορτίων τους συμπίπτει με το κέντρο βάρους των θετικών. Αν όμως φέρομε μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο ένα διηλεκτρικό με μη πολικά μόρια, τότε, υπό την επίδραση των δυνάμεων του πεδίου, τα θετικά φορτία μετατοπίζονται αντίθετα προς τα αρνητικά (ηλεκτρόνια). Στην περίπτωση αυτή τα μόρια παρουσιάζουν ηλεκτρική ροπή, όπως ακριβώς συμβαίνει με τα άτομα ενός διηλεκτρικού που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.

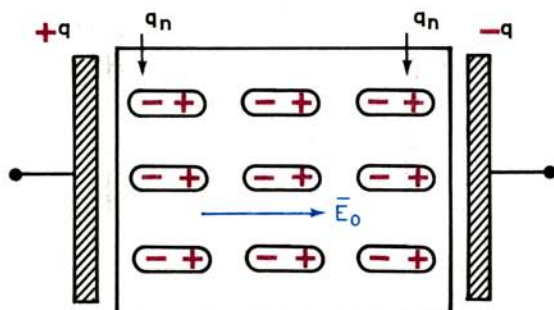
4.8 Διηλεκτρική πόλωση.

Όταν ένα διηλεκτρικό που αποτελείται είτε από πολικά είτε από μη πολικά μόρια, βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως \vec{E}_0 (σχ. 4.8α), τότε στο εσωτερικό του εμφανίζονται προσανατολισμένα ηλεκτρικά δίπολα.

Αν το διηλεκτρικό είναι ισότροπο, τότε τα δίπολα προσανατολίζονται έτσι, ώστε η ηλεκτρική τους ροπή να έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το άνυσμα \vec{E}_0 της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν επιπλέον το διηλεκτρικό είναι ομογενές, τότε τα ηλεκτρικά φορτία μέσα στο διηλεκτρικό εξουδετερώνονται αμοιβαία, γιατί το θετικό φορτίο κάθε διπόλου βρίσκεται πολύ κοντά στο αρνητικό φορτίο του γειτονικού του. Έτσι εμφανίζονται ίσα και ετερόνυμα φορτία στις εξωτερικές επιφάνειες του διηλεκτρικού. Τα φορτία αυτά ($\pm q_n$) ονομάζονται **φορτία πολώσεως** ή **δέσμια φορτία** σε αντίθεση με τα ηλεκτρικά φορτία που μπορούν ελεύθερα να μετακινούνται μέσα στους αγωγούς και ονομάζονται ελεύθερα φορτία.

Το φαινόμενο του προσανατολισμού των διπόλων μορίων ενός διηλεκτρικού, όταν βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, ονομάζεται **πόλωση του διηλεκτρικού**.



Σχ. 4.8α.
Πόλωση διηλεκτρικού.

Η πόλωση όμως υφίσταται και ως φυσικό μέγεθος που ορίζεται ως εξής:
Πόλωση P διηλεκτρικού ονομάζεται το πηλίκον της στοιχειώδους ηλεκτρικής ροπής dM^* ενός στοιχειώδους τμήματος του διηλεκτρικού, διά του όγκου του dV :

$$P = \frac{dM^*}{dV} \quad (4.24)$$

Επειδή η μονάδα της ηλεκτρικής ροπής ($M^* = q \cdot l$) είναι το $1 \text{ C} \cdot \text{m}$, η μονάδα της πολώσεως, στο σύστημα S.I. είναι το 1 C/m^2 , δηλαδή όμοια με τη μονάδα της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου.

Μέσα σε ένα «τέλειο» διηλεκτρικό υλικό (δηλαδή πλήρως μονωτικό, ομογενές και ισότροπο) το διάνυσμα της πολώσεως είναι παράλληλο και ομόρροπο προς την ένταση του πεδίου, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.25)$$

όπου: χ μια αδιάστατη σταθερά του υλικού που ονομάζεται **διηλεκτρική επιδεκτικότητα**.

Αποδεικνύεται ότι η πόλωση \vec{P} ενός διηλεκτρικού έχει μέτρο ίσο προς την επιφανειακή πυκνότητα των φορτίων πολώσεως. Αυτό μπορεί ναδειχθεί εύκολα στην περίπτωση μιας πλάκας διηλεκτρικού που βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (σχ. 4.8α). Θα ισχύει:

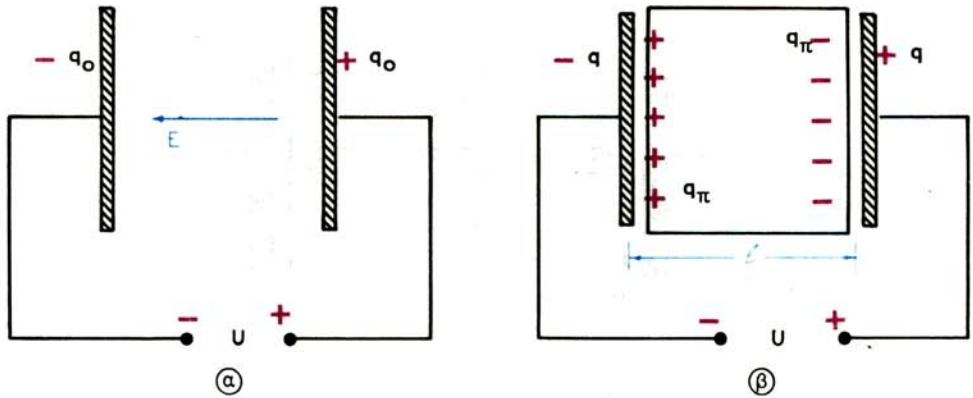
$$P = \frac{dM^*}{dV} = \frac{M^*}{V} = \frac{q_n \cdot l}{Sl} \rightarrow P = \frac{q_n}{S} \quad (4.26)$$

όπου: q_n τα φορτία πολώσεως,

S το εμβαδόν κάθε οπλισμού του πυκνωτή και

$V = S \cdot l$ ο όγκος του διηλεκτρικού που γεμίζει όλο το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον επίπεδο πυκνωτή του σχήματος 4.8β, στις εξής δυο περιπτώσεις:



Σχ. 4.86.

Επίπεδος πυκνωτής. α) Με διηλεκτρικό το κενό (αέρα). β) Με οποιοδήποτε διηλεκτρικό (ϵ_1).

α) Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του είναι κενός (ή κατά προσέγγιση αέρας) [σχ. 4.86(α)].

β) Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του πληρούται με ένα οποιοδήποτε διηλεκτρικό ($\epsilon > 1$) [σχ. 4.86(β)].

Φορτίζουμε τον πυκνωτή και στις δυο περιπτώσεις με την ίδια πηγή τάσεως U . Είναι φανερό ότι τα φορτία των οπλισμών του πυκνωτή θα είναι σε κάθε περίπτωση διαφορετικά, εφόσον αλλάζει η χωρητικότητά του. Έτσι αν είναι C_0 η χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό και C η χωρητικότητα με το διηλεκτρικό, τα φορτία του θα είναι:

$$\text{Φορτίο οπλισμού χωρίς διηλεκτρικό (κενό):} \quad q_0 = U \cdot C_0 \quad (4.27)$$

$$\text{Φορτίο οπλισμού με διηλεκτρικό } (\epsilon > 1): \quad q = U \cdot C \quad (4.28)$$

Με μία απλή μέτρηση, π.χ. με ένα βαλλιστικό γαλβανόμετρο, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μεταξύ των φορτίων των οπλισμών του πυκνωτή στις δυο παραπάνω περιπτώσεις και των φορτίων πολώσεως του διηλεκτρικού, ισχύει η σχέση:

$$q - q_0 = q_\pi \quad (4.29)$$

$$\text{ή} \quad q = q_0 + q_\pi$$

Όμως για το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή, από τις σχέσεις (3.10) και (3.11) έχουμε:

$$\Psi = E \cdot S \quad \text{και} \quad \Psi = \frac{q}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Εξισώνοντας τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνομε:

$$\epsilon\epsilon_0 E = \frac{q}{S} \quad (4.30)$$

$$\text{ή} \quad D = \frac{q}{S} \quad (4.31)$$

Είναι φανερό ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ($E = U/l$) εφόσον ο πυκνωτής τροφοδοτείται με την ίδια τάση και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις, θα παραμένει σταθερή. Δηλαδή, αντίστοιχα προς την (4.30) μπορούμε – για την περίπτωση που μεταξύ των οπλισμών υπάρχει κενός χώρος – να γράψομε:

$$\epsilon_0 E = \frac{q_0}{S} \quad (4.32)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις σχέσεις (4.26), (4.31) και (4.32) στην (4.29) οπότε λαμβάνομε:

$$D \cdot S = \epsilon_0 ES + PS \quad (4.33)$$

$$\text{ή} \quad D = \epsilon_0 E + P$$

και επειδή τα αντίστοιχα των ανύσματα (\bar{D} , \bar{E} , \bar{P}) είναι συγγραμμικά:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (4.34)$$

Η σχέση (4.34), η οποία συνδέει τα τρία χαρακτηριστικά ανυσματικά μεγέθη ενός ηλεκτρικού πεδίου εντός διηλεκτρικού, αποδείχθηκε για την περίπτωση του μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή ομογενούς πεδίου. Όμως πρέπει να σημειωθεί ότι ισχύει και για κάθε άλλο πεδίο που αναπτύσσεται μέσα σε ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό μέσο. Από τη σχέση (4.33) προκύπτει και η σχέση που συνδέει τις δυο αδιάστατες σταθερές ϵ και χ .

Πράγματι μπορούμε να γράψομε:

$$\epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E + \chi \epsilon_0 E$$

$$\text{ή} \quad \epsilon = 1 + \chi \quad (4.35)$$

Από τη σχέση (4.35) προκύπτει ότι η διηλεκτρική επιδεκτικότητα του άπειρου κενού χώρου – και κατά προσέγγιση του αέρα – έχει τιμή ίση με μηδέν.

4.8.1 Υπολογισμός των φορτίων πολώσεως.

Είναι πια αρκετά απλό να υπολογίσουμε τα φορτία πολώσεως, σε συνάρτηση

με το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή. Διαιρώντας κατά μέλη τις (4.30) και (4.32) λαμβάνομε:

$$\frac{q}{q_0} = \varepsilon \quad (4.36)$$

Εξάλλου σε συνδυασμό της (4.36) με τη σχέση (4.29), λαμβάνομε:

$$q_{\pi} = q - q_0 = q - \frac{q}{\varepsilon} = q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.37)$$

Δηλαδή $q_{\pi} = q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right)$

Από τη σχέση (4.37) μπορούμε να υπολογίζομε τα φορτία πολώσεως, σε συνάρτηση με τα φορτία του πυκνωτή που προκαλεί την πόλωση του διηλεκτρικού, καθώς και τη σχετική διηλεκτρική σταθερά του.

4.8.2 Το ηλεκτρικό πεδίο επίπεδου πυκνωτή με επάλληλες πλάκες διηλεκτρικού.

Εφαρμόζοντας τις γνώσεις που ήδη έχουμε, θα μελετήσομε τώρα πώς διαμορφώνονται τα διάφορα πεδία (D, E, P, U) μέσα στο ομογενές πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή, όταν το διηλεκτρικό του αποτελείται από επάλληλες πλάκες από διαφορετικά υλικά που τοποθετούνται παράλληλα προς τους οπλισμούς του πυκνωτή. Υπενθυμίζομε ότι – σε μικρότερη έκταση – το θέμα αυτό εξετάσαμε στην παράγραφο 4.5.3.

Ας θεωρήσομε, λοιπόν, τον επίπεδο πυκνωτή του σχήματος 4.8γ, του οποίου το διηλεκτρικό αποτελείται από τρεις πλάκες, με πάχη l_1, l_2, l_3 , με αντίστοιχες διηλεκτρικές σταθερές $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Υποθέτομε επίσης $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Εξυπακούεται ότι αυτό που θα αναπτύξομε ισχύει και στην περίπτωση που ο πυκνωτής συγκροτείται από οποιοδήποτε πλήθος πλακών διηλεκτρικού, με οποιαδήποτε σχέση διηλεκτρικών σταθερών.

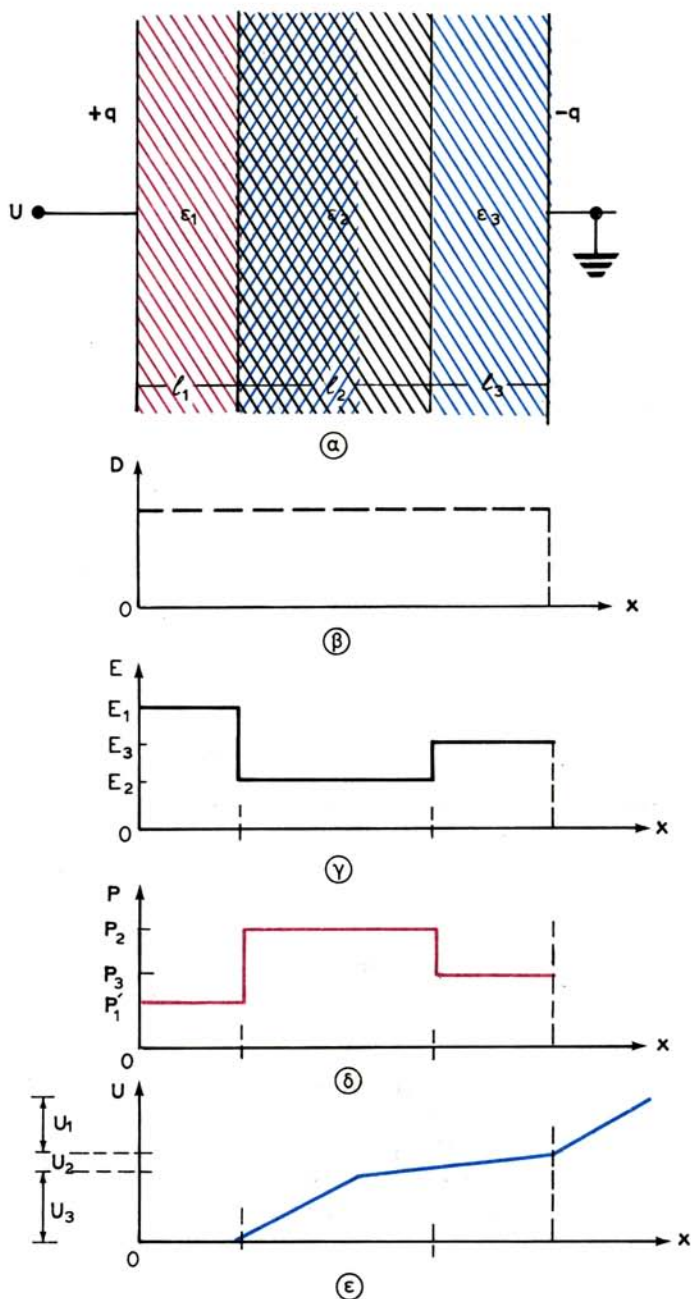
Έχομε ήδη, στην παράγραφο 4.5.3, αναπτύξει τους λόγους για τους οποίους οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές δεν διαθλώνται, αλλά προσπίπτουν κάθετα σ' όλες τις πλάκες του διηλεκτρικού. Επίσης, έχουμε δικαιολογήσει γιατί η διηλεκτρική μετατόπιση θα έχει τιμή σταθερή σ' όλες τις πλάκες του διηλεκτρικού [σχ. 4.8γ(β)], δηλαδή:

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = \frac{q}{S}$$

όπου: q το φορτίο του πυκνωτή και
 S η επιφάνεια των οπλισμών.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, κατά τη σχέση (4.5), θα έχει τις εξής τιμές, στις αντίστοιχες πλάκες του διηλεκτρικού:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} \quad E_3 = \frac{D}{\varepsilon_3}$$



Σχ. 4.8γ.

Το ηλεκτρικό πεδίο επιπέδου πυκνωτή με επάλληλες πλάκες διηλεκτρικού. α) Η συγκρότηση του πυκνωτή ($\epsilon_2 > \epsilon_3 > \epsilon_1$). β) Η διηλεκτρική μετατόπιση. γ) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. δ) Η πόλωση του διηλεκτρικού. ε) Το δυναμικό.

Η πόλωση του διηλεκτρικού, στις διάφορες πλάκες, δίνεται από τη σχέση (4.35). Για να παρακολουθήσουμε ευχερέστερα τη μεταβολή της, μετασχηματί-
ζουμε τη σχέση (4.35) ως εξής:

$$P = D - \varepsilon_0 E = D - \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = D \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

οπότε προκύπτουν οι τιμές της στις αντίστοιχες πλάκες:

$$P_1 = D \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \quad P_2 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \quad P_3 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_3}\right)$$

Τέλος εύκολα μπορεί να υπολογισθούν είτε τα απόλυτα δυναμικά των διαφόρων σημείων των διηλεκτρικών, είτε οι τάσεις υπό τις οποίες βρίσκεται κάθε πλάκα, από τις σχέσεις (για τις τάσεις):

$$U_1 = E_1 \cdot l_1 \quad U_2 = E_2 \cdot l_2 \quad U_3 = E_3 \cdot l_3$$

Τελειώνοντας, ας επαναλάβομε ότι ο υπόψη πυκνωτής ισοδυναμεί με σύστημα τριών επιπέδων πυκνωτών που συνδέονται σε σειρά.

4.8.3 Διηλεκτρική υστέρηση.

Θα περίμενε κανένας όταν το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο E εξαφανισθεί (π.χ. όταν ο πυκνωτής εκφορτισθεί), να εξαφανισθούν και τα φορτία πολώσεως. Ωστόσο παρατηρείται μια μικρή παραμένουσα πόλωση και μετά την εξαφάνιση του πεδίου που οφείλεται στις ελαστικές ιδιότητες του διηλεκτρικού. Έτσι, αν εκφορτίσουμε ακαριαία ένα πυκνωτή, θα παρατηρήσουμε ότι εξακολουθεί να παρουσιάζει μια μικρή τάση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διηλεκτρική υστέρηση**.

Στην παραμένουσα πόλωση οφείλονται οι διηλεκτρικές απώλειες, δηλαδή η θέρμανση των διηλεκτρικών, όταν βρεθούν μέσα σε εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Παράδειγμα 4.8.1.

Επίπεδος πυκνωτής έχει φορτιστεί με φορτίο q . Το διηλεκτρικό του αποτελείται από n πλακίδια με πάχος l_1, l_2, \dots, l_n και αντίστοιχες διηλεκτρικές σταθερές $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Να υπολογισθεί η χωρητικότητά του.

Το παράδειγμα αυτό αποτελεί γενίκευση του παραδείγματος 4.5. Όμως, εδώ θα το λύσουμε με δυο μεθόδους, ώστε να εμπεδώσουμε καλύτερα και τη θεωρία της παραγράφου 4.8.

Α' τρόπος λύσεως.

Σύμφωνα με τη σχέση (4.31) η διηλεκτρική μετατόπιση του πεδίου του πυκνωτή, θα είναι:

$$D = \frac{q}{S}$$

Εφόσον οι δυναμικές γραμμές προσπίπτουν κάθετα στις διάφορες διηλεκτρικές πλάκες, η διηλεκτρική μετατόπιση στις διάφορες πλάκες θα είναι σταθερά, δηλαδή:

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_n$$

δηλαδή:

$$D = \frac{q}{S} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 = \dots = \epsilon_0 \epsilon_n E_n$$

$$\text{Άρα} \quad E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1 S}, \quad E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_2 S}, \dots, \quad E_n = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_n S}$$

$$\text{Όμως: } U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = E_1 l_1 + E_2 l_2 + \dots + E_n l_n \rightarrow$$

$$U = \frac{q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{l_1}{\epsilon_1} + \frac{l_2}{\epsilon_2} + \dots + \frac{l_n}{\epsilon_n} \right) \quad \text{οπότε:}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{l_1}{\epsilon_1} + \frac{l_2}{\epsilon_2} + \dots + \frac{l_n}{\epsilon_n}} \quad \text{ή}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\sum_{k=1}^{k=n} l_k / \epsilon_k}$$

Β' τρόπος λύσεως.

Όπως δικαιολογήσαμε στην παράγραφο 4.5, το σύστημα ισοδυναμεί με n πυκνωτές που συνδέονται σε σειρά. Θα είναι:

$$*C_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{S}{l_1}, \quad C_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{S}{l_2}, \dots, \quad C_n = \epsilon_n \epsilon_0 \frac{S}{l_n}$$

$$\text{οπότε: } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \frac{l_1}{\epsilon_1 \epsilon_0 S} + \frac{l_2}{\epsilon_2 \epsilon_0 S} + \dots + \frac{l_n}{\epsilon_n \epsilon_0 S}$$

$$\rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{l_1}{\epsilon_1} + \frac{l_2}{\epsilon_2} + \dots + \frac{l_n}{\epsilon_n}}$$

Παράδειγμα 4.8.2.

Το διηλεκτρικό επίπεδο πυκνωτή αποτελείται από μια γυάλινη πλάκα ($l_1 = 1$ cm, $\epsilon_1 = 6$) και από αέρα ($l_2 = 0,5$ cm, $\epsilon_2 = 1$). Η διηλεκτρική αντοχή του γυαλιού είναι 10^7 V/m και του αέρα $3 \cdot 10^6$ V/m. Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή εφαρμόζεται τάση $U = 36$ kV. Ζητούνται:

α) Η ένταση του πεδίου και η διηλεκτρική μετατόπιση, όταν αφαιρεθεί η γυάλινη πλάκα. Να εξετασθεί αν ιονίζεται ο αέρας.

β) Η ένταση του πεδίου μέσα στο γυαλί και τον αέρα. Ιονίζεται ο αέρας στην περίπτωση αυτή και αν ναι τι θα συμβεί;

$$\text{α) } E = \frac{U}{l} = \frac{36000}{1,5 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 2,4 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Επειδή $2,4 \cdot 10^6 < 3 \cdot 10^6$ ο αέρας δεν ιονίζεται.

$$D = \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,4 \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{V} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} = 2,12 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\text{β) } D = \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 \rightarrow E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1$$

$$U = E_1 l_1 + E_2 l_2 = E_1 l_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 l_2 = E_1 \left(l_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} l_2 \right)$$

$$\text{Άρα } E_1 = \frac{U}{l_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} l_2} = \frac{36 \cdot 10^3}{(1 + 6 \cdot 0,5) 10^{-2}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} = 9 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{και } E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 = 6 \cdot 9 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 54 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{Είναι } E_1 = 9 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} < 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \text{και}$$

$$E_2 = 54 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} > 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Άρα ο αέρας ιονίζεται. Επομένως ολόκληρη η τάση U θα εφαρμοστεί στη γυάλινη πλάκα. Την τάση αυτή την αντέχει το γυαλί γιατί

$$E_1' = \frac{U}{l_1} = \frac{36 \cdot 10^3}{10^{-2}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 36 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} < 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

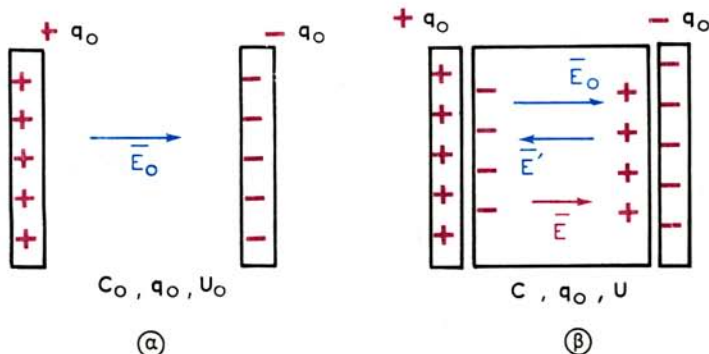
4.9 Ένταση ηλεκτρικού πεδίου μέσα σε διηλεκτρικό.

Θεωρούμε επίπεδο πυκνωτή που έχει φορτισθεί με τάση U_0 και έχει αποσυνδεθεί από την πηγή φορτίσεως [σχ. 4.9α(α)]. Το φορτίο του πυκνωτή είναι $q_0 = C_0 U_0$ και η ένταση του πεδίου $E_0 = U_0/l$.

Αν τοποθετήσουμε μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ένα διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ [σχ. 4.9α(β)], το φορτίο του πυκνωτή θα παραμείνει αμετάβλητο, ενώ η ένταση του πεδίου και η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή θα μεταβληθούν.

Η νέα τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή θα είναι:

$$U = \frac{q_0}{C} = \frac{q_0}{\epsilon C_0} \rightarrow U = \frac{U_0}{\epsilon}$$



Σχ. 4.9α.

Πεδίο μεταξύ των οπλισμών επιπέδου πυκνωτή. α) Εξωτερικό. β) Εσωτερικό (μέσα σε διηλεκτρικό).

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού θα είναι:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{U_0}{\epsilon l} \rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (4.38)$$

Δηλαδή, όταν στο εσωτερικό ενός πυκνωτή τοποθετήσουμε ένα διηλεκτρικό, η τάση και η ένταση ελαττώνεται στο $1/\epsilon$ της αρχικής τους τιμής. Η ελάττωση της εντάσεως του αρχικού πεδίου \vec{E}_0 οφείλεται στο πεδίο εντάσεως \vec{E}' , που δημιουργούν τα φορτία πολώσεως. Η ένταση \vec{E}' είναι αντίρροπη της \vec{E}_0 με αποτέλεσμα η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού να είναι:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}' \quad (4.39)$$

Από τις (4.38) και (4.39) προκύπτει:

$$E' = E_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \quad (4.40)$$

Σημείωση:

Στην περίπτωση που η εισαγωγή του διηλεκτρικού γίνεται με τον πυκνωτή συνδεδεμένο με πηγή τάσεως U_0 , η ένταση του πεδίου, όπως είδαμε στην παράγραφο 4.8, δεν μεταβάλλεται ($E = U_0/l = E_0$). Αυτό συμβαίνει επειδή η ελάττωση της εντάσεως από τα φορτία πολώσεως εξουδετερώνεται από την αύξηση του φορτίου του πυκνωτή.

Παράδειγμα 4.9.1.

Μεταξύ δυο οπλισμών επίπεδου πυκνωτή εισάγουμε διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς ϵ και πάχους ίσου με την απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Τι θα συμβεί με την ενέργεια του πυκνωτή όταν:

α) Ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος με την πηγή ($U_0 = \text{σταθ.}$).

β) Κατά την εισαγωγή του πλακιδίου η πηγή έχει αποσυνδεθεί από τον

πυκνωτή ($q_0 = \text{σταθ.}$).

$$\alpha) \quad W = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon C_0 U_0^2 = \varepsilon W_0$$

δηλαδή η ενέργεια του πυκνωτή μεγαλώνει κατά ε φορές. Κατά την εισαγωγή του διηλεκτρικού η πηγή παρέχει ενέργεια στον πυκνωτή.

$$\beta) \quad \text{Η νέα τάση είναι} \quad U = \frac{U_0}{\varepsilon}$$

$$\text{Άρα} \quad W = \frac{1}{2} q_0 U = \frac{1}{2} q_0 \frac{U_0}{\varepsilon} = \frac{W_0}{\varepsilon}$$

δηλαδή η ενέργεια ελαττώνεται κατά ε φορές. Η ελάττωση της ενέργειας του πυκνωτή οφείλεται στο ότι ένα μέρος της καταναλώνεται για την πόλωση των μορίων του διηλεκτρικού.

Παράδειγμα 4.9.2.

Η απόσταση των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή είναι l και το εμβαδόν κάθε οπλισμού S . Ο πυκνωτής έχει φορτισθεί με τάση U_0 . Βάζουμε μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή πλακίδιο πάχους d . Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή όταν:

α) Το πλακίδιο είναι μεταλλικό (σχ. 4.9β).

β) Το πλακίδιο είναι διηλεκτρικό σταθεράς ε (σχ. 4.9γ).

α) Στο εσωτερικό του μεταλλικού πλακιδίου η ένταση του πεδίου είναι μηδέν ($E = 0$). Έξω από το πλακίδιο η ένταση του πεδίου είναι όση ήταν και πριν από την εισαγωγή της πλάκας, δηλαδή: $E_0 = U_0/l$.

$$\text{Είναι} \quad U_{A\Gamma} = E_0 (A\Gamma), \quad U_{\Gamma\Delta} = 0 \quad \text{και} \quad U_{\Delta B} = E_0 (\Delta B)$$

$$\text{Άρα} \quad U = U_{AB} = U_{A\Gamma} + U_{\Gamma\Delta} + U_{\Delta B} = E_0 (l - d) \rightarrow$$

$$U = U_0 \frac{l - d}{l}$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι:

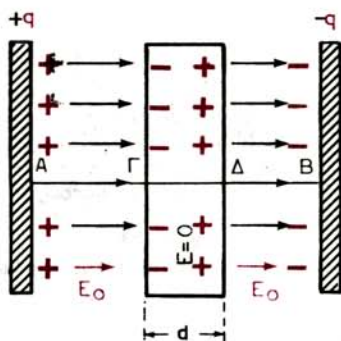
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot l}{U_0 (l - d)} = \frac{C_0 l}{l - d} \quad (1)$$

$$\text{όπου:} \quad C_0 = \frac{q}{U_0} = \varepsilon_0 \frac{S}{l} \quad (2)$$

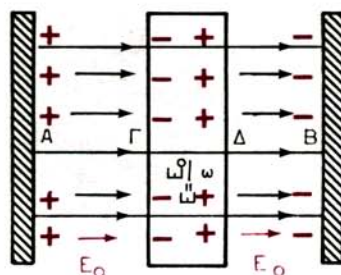
η χωρητικότητα του πυκνωτή πριν την εισαγωγή του πλακιδίου.

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{l - d} \quad (3)$$



Σχ. 4.96.



Σχ. 4.9γ.

β) Στο εσωτερικό του μονωτικού πλακιδίου η ένταση του πεδίου είναι $E = E_0/\epsilon$ ενώ έξω από το πλακίδιο είναι E_0 .

Είναι $U_{A\Gamma} = E_0 (A\Gamma)$, $U_{\Gamma\Delta} = \frac{E_0}{\epsilon} (\Gamma\Delta)$ και $U_{\Delta B} = E_0 (\Delta B)$

Άρα $U = U_{AB} = U_{A\Gamma} + U_{\Gamma\Delta} + U_{\Delta B} = E_0 (A\Gamma + \Delta B) + \frac{E_0}{\epsilon} d \rightarrow$

$$U = E_0 (l - d) + E_0 \frac{d}{\epsilon} \quad (4)$$

οπότε $C = \frac{q}{U} = \frac{q}{E_0 (l-d) + E_0 \frac{d}{\epsilon}} = \frac{q/l}{U_0 (l-d) + U_0 \frac{d}{\epsilon}} =$

$$= \frac{q}{U_0} \frac{l}{l-d + \frac{d}{\epsilon}} \rightarrow C = \frac{C_0 l}{l-d + \frac{d}{\epsilon}} \quad (5)$$

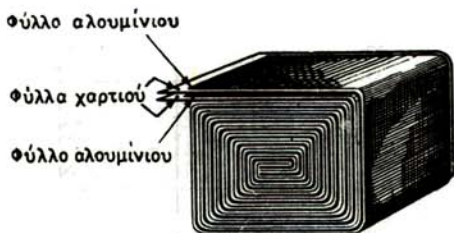
Από τις (2) και (5) προκύπτει:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{l-d + \frac{d}{\epsilon}} \quad (6)$$

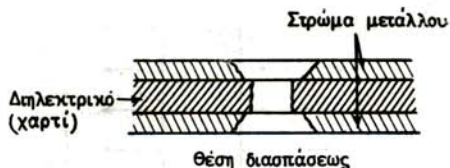
4.10 Τύποι και βιομηχανική κατασκευή των πυκνωτών.

4.10.1 Πυκνωτές χαρτιού.

Οι πυκνωτές χαρτιού κατασκευάζονται από λωρίδες μεταλλικών φύλλων από κασσίτερο ή αλουμίνιο που διαχωρίζονται από ταινίες χαρτιού, εμποτισμένου με παραφίνη, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10α. Το τύλιγμα συμπιέζεται συνήθως σε μορφή κύβου ή κυλίνδρου (για να έχουμε μικρό όγκο) και τοποθετείται σε μεταλλικό δοχείο που γεμίζεται με μονωτική μάζα. Έτσι αποφεύγεται η απορρόφηση υγρασίας που μειώνει τη μονωτική ικανότητα του χαρτιού.



Σχ. 4.10α.
Πυκνωτής χαρτιού.



Σχ. 4.10β.
Διάσπαση του διηλεκτρικού πυκνωτή μετάλλου - χαρτιού.

Παραλλαγή των πυκνωτών χαρτιού αποτελούν οι πυκνωτές μετάλλου - χαρτιού. Στους πυκνωτές αυτούς δημιουργείται με ειδική διαδικασία ένα πολύ λεπτό στρώμα μετάλλου (λεπτότερο από 0,1 μm) στις δυο επιφάνειες μιας λωρίδας μονωτικού χαρτιού. Η λωρίδα τυλίγεται και διαμορφώνεται σε κύβο (ή κύλινδρο), όπως στους πυκνωτές χαρτιού. Ενώ οι πυκνωτές χαρτιού καταστρέφονται, όταν διατρηθεί το διηλεκτρικό τους (γιατί βραχυκυκλώνονται οι οπλισμοί) ο πυκνωτής μετάλλου - χαρτιού αυτοθεραπεύεται μετά από διάσπαση (διάτρηση) του διηλεκτρικού του, γιατί ο δημιουργούμενος σπινθήρας καίει το μεταλλικό στρώμα περισσότερο από το χαρτί, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10β. Έτσι τα ηλεκτρόδια παύουν να βρίσκονται σε επαφή και το βραχυκύκλωμα σταματά.

4.10.2 Πυκνωτές μίκας (μαρμαρυγία).

Κατασκευάζονται όπως και οι πυκνωτές χαρτιού με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται ως διηλεκτρικό η μίκα. Το σύνολο δεν τυλίγεται σε ρολό (επειδή η μίκα είναι εύθραυστο υλικό), αλλά παίρνει τη μορφή ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (σχ. 4.10γ).

Επειδή η μίκα έχει μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά και αντοχή από το χαρτί, οι πυκνωτές μίκας αντέχουν σε μεγαλύτερη τάση λειτουργίας και παρουσιάζουν λιγότερες απώλειες.

Αν, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10γ, ο πυκνωτής κατασκευάζεται από ένα αριθμό μεταλλικών φύλλων «n», τότε το σύστημα συμπεριφέρεται όπως n-1 επίπεδοι πυκνωτές σε παράλληλη σύνδεση. Άρα η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1} \quad (4.41)$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{l} \quad (4.42)$$

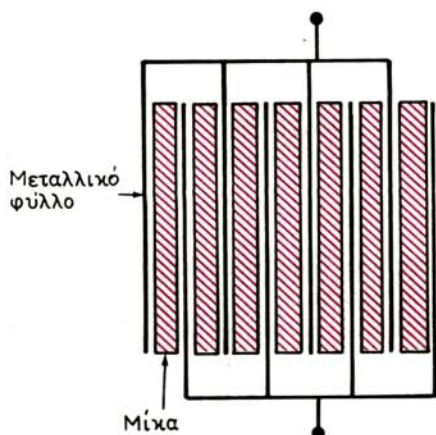
όπου: ϵ η διηλεκτρική σταθερά της μίκας,

l το πάχος του διηλεκτρικού φύλλου και

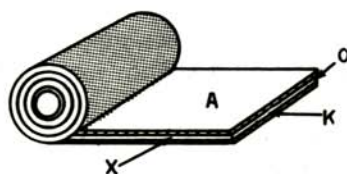
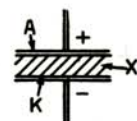
S το εμβαδό της μιας όψεως της επιφάνειας ενός διηλεκτρικού φύλλου.

Από τις (4.41) και (4.42) προκύπτει:

$$C = \frac{(n-1)\epsilon \epsilon_0 S}{l} \quad (4.43)$$



Σχ. 4.10γ.
Πυκνωτής μίκας.



Σχ. 4.10δ.
Κατασκευή πολωμένου ηλεκτρολυτικού πυκνωτή.

4.10.3 Κεραμικοί πυκνωτές.

Με κατάλληλη επεξεργασία ενώσεων του τιτανίου παίρνομε κεραμικά προϊόντα με πολύ μεγάλη σχετική διηλεκτρική σταθερά (100-1000), που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των κεραμικών πυκνωτών. Οι πυκνωτές αυτοί παρουσιάζουν μεγάλη χωρητικότητα με μικρές σχετικά διαστάσεις και μπορούν να λειτουργούν σε μεγάλες τάσεις.

4.10.4 Ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές.

Ο θετικός οπλισμός του ηλεκτρολυτικού πυκνωτή αποτελείται από ένα φύλλο αλουμινίου Α (σχ. 4.10δ).

Ο αρνητικός οπλισμός είναι ένα απορροφητικό χαρτί (X) διαποτισμένο από ένα κατάλληλο ηλεκτρολυτικό διάλυμα (βορικού οξέος ή αλάτων του αργιλίου ή υπεροξειδίου του νατρίου).

Το χαρτί τοποθετείται ανάμεσα στην άνοδο και σε ένα μεταλλικό φύλλο Κ, το οποίο συνδέεται με τον αρνητικό πόλο της πηγής. Τα τρία φύλλα τυλίγονται μαζί και ο ρολός τοποθετείται σε μεταλλικό δοχείο που συνδέεται με την κάθοδο.

Στη συνέχεια ο πυκνωτής συνδέεται με πηγή συνεχούς ρεύματος, οπότε το διάλυμα ηλεκτρολύεται και δημιουργείται στην άνοδο ένα λεπτό στρώμα Ο οξειδίου του αλουμινίου, που αποτελεί και το διηλεκτρικό του πυκνωτή.

Θα πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα ότι κατά τη σύνδεση του πυκνωτή με την πηγή **το ηλεκτρόδιο του αλουμινίου πρέπει πάντα να συνδέεται με το θετικό πόλο της πηγής**. Σε αντίθετη περίπτωση το διηλεκτρικό καταστρέφεται και ο πυκνωτής βραχυκυκλώνεται.

Γι' αυτό και ο πυκνωτής ονομάζεται **πολωμένος** πυκνωτής. Επειδή το πάχος του μονωτικού στρώματος είναι εξαιρετικά μικρό (0,01 - 0,1 μm), η χωρητικότητα των ηλεκτρολυτικών πυκνωτών είναι μεγάλη (0,5 - 6 μF ανά dm²) και μπορεί να φτάσει τα 2000 - 3000 μF αλλά η τάση λειτουργίας είναι σχετικά μικρή (μέχρι 600 V).

Στους μη πολωμένους πυκνωτές και το φύλλο Κ κατασκευάζεται από αλουμίνιο. Ανάλογα με την πολικότητα του πυκνωτή δημιουργείται το μονωτικό στρώμα του οξειδίου, είτε στο φύλλο Α είτε στο φύλλο Κ. Ο μη πολωμένος πυκνωτής αντιστοιχεί σε δυο πολωμένους πυκνωτές που έχουν συνδεθεί αντίθετα (σχ. 4.10ε).

4.10.5 Μεταβλητοί πυκνωτές.

Οι μεταβλητοί πυκνωτές έχουν συνήθως ως διηλεκτρικό τον αέρα και αποτελούνται από δυο ομάδες ημικυκλικών ελασμάτων (σχ. 4.10στ).

Η μία ομάδα είναι ακίνητη και αποτελεί τον ένα οπλισμό (Α). Η άλλη ομάδα είναι κινητή και αποτελεί το δεύτερο οπλισμό (Κ). Αν n είναι ο αριθμός των ελασμάτων (φύλλων), δημιουργούνται $n-1$ επίπεδοι πυκνωτές, που συνδέονται παράλληλα.

Όταν περιστρέφεται ο κινητός οπλισμός, τα φύλλα του εξέρχονται ή εισέρχονται μεταξύ των φύλλων του σταθερού οπλισμού με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η κοινή επιφάνεια των οπλισμών και επομένως και η χωρητικότητα του συστήματος.

Αν φ είναι η επίκεντρη γωνία του κοινού μέρους των δυο ελασμάτων [σχ. 4.10στ(β)] το εμβαδόν κάθε οπλισμού θα είναι:

$$S = \frac{\varphi \cdot R^2}{2} \quad (4.44)$$

Η ολική χωρητικότητα του συστήματος θα είναι:

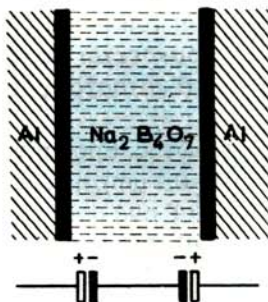
$$C = \frac{(n-1) \varepsilon_0 S}{l} \quad (4.45)$$

όπου l η απόσταση δυο διαδοχικών ελασμάτων.

Από τις (4.44) και (4.45) προκύπτει:

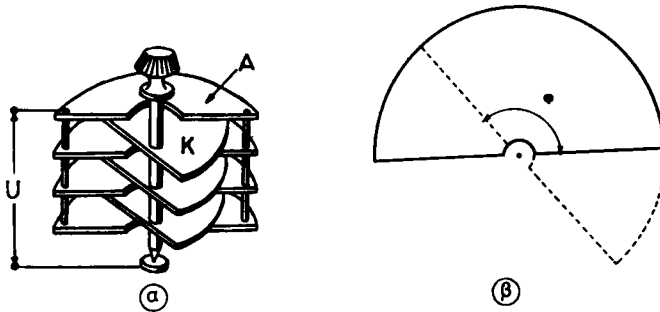
$$C = \frac{(n-1) \varepsilon_0 \varphi \cdot R^2}{2l} \quad (4.46)$$

Οι μεταβλητοί πυκνωτές χρησιμοποιούνται στους πομπούς, στα ραδιόφωνα και σε πολλές άλλες διατάξεις που απαιτούν ρύθμιση της χωρητικότητας. Η χωρητικότητα των διαφόρων τύπων πυκνωτών στην ηλεκτροτεχνία συμβολίζεται σχηματικά, όπως δείχνει το σχήμα 4.10ζ.



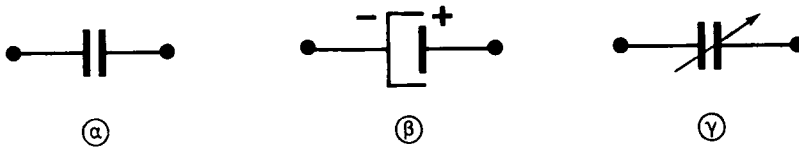
Σχ. 4.10ε.

Κατασκευή μη πολωμένου ηλεκτρολυτικού πυκνωτή.



Σχ. 4.10στ.

Μεταβλητός πυκνωτής με διηλεκτρικό αέρα. α) Τομή του πυκνωτή. β) Κοινή επιφάνεια των δυο οπλισμών (κάτοψη).



Σχ. 4.10ζ.

Συμβολισμοί χωρητικότητας. α) Κοινός πυκνωτής. β) Ηλεκτρολυτικός. γ) Μεταβλητός.

Παράδειγμα 4.10.1.

Ένας μεταβλητός πυκνωτής αέρα ($\epsilon = 1$) αποτελείται από $n = 7$ πλάκες. Να υπολογισθεί η τιμή της μέγιστης χωρητικότητας.

Δίνονται: $R = 4 \text{ cm}$, $l = 0,1 \text{ cm}$ και $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ m/F}$.

Αν θέσουμε στον τύπο (6) $\alpha = \pi$ και $\epsilon_0 = \frac{1}{4k_0\pi}$ παίρνουμε:

$$C_{\text{μεγ}} = \frac{(n-1) R^2}{8 k_0 l} = \frac{6,16 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}} \text{ F} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 10^{-10} \text{ F} \rightarrow C_{\text{μεγ}} = 133,3 \text{ pF}$$

Παράδειγμα 4.10.2.

Επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από πέντε παράλληλα φύλλα αλουμινίου που καθένα έχει εμβαδόν 100 cm^2 και τέσσερα φύλλα μίκας ($\epsilon = 6$) που καθένα έχει πάχος $0,5 \text{ mm}$. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή καθώς και η αποθηκευμένη σ' αυτόν ενέργεια, αν η τάση του είναι 900 V . ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

$$C = \frac{(n-1) \epsilon \epsilon_0 S}{l} = \frac{(5-1) 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 42,48 \cdot 10^{-10} \text{ F} \rightarrow C = 4,248 \text{ nF}$$

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} 42,48 \cdot 10^{-10} \cdot 81 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\rightarrow W = 17,20 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

4.11 Πιεζοηλεκτρισμός – Ηλεκτροσυστολή.

Η πόλωση ορισμένων διηλεκτρικών δεν προκαλείται μόνο με την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου, αλλά με άλλους τρόπους. Μια χαρακτηριστική περίπτωση είναι και η εξής:

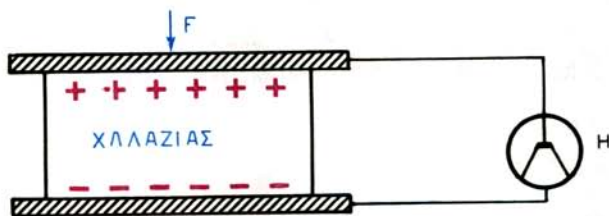
Παίρνουμε ένα πλακίδιο που πρέπει να έχει κοπεί από κρύσταλλο **χαλαζία** (ή τουρμαλίνη) κατά ορισμένες κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις και το τοποθετούμε μεταξύ δυο παράλληλων μεταλλικών πλακών (σχ. 4.11α).

Αν συνδέσουμε τις πλάκες με ηλεκτρόμετρο Η και συμπιέσουμε το πλακίδιο, θα παρατηρήσουμε ότι το ηλεκτρόμετρο αποκλίνει και δείχνει μια τάση. Αυτό σημαίνει ότι στις επιφάνειες του πλακιδίου εμφανίστηκαν ηλεκτρικά φορτία. Κατά τον εφελκυσμό του πλακιδίου τα φορτία που εμφανίζονται στις επιφάνειες έχουν αντίθετη πολικότητα. Άρα και η τάση είναι αντίθετη.

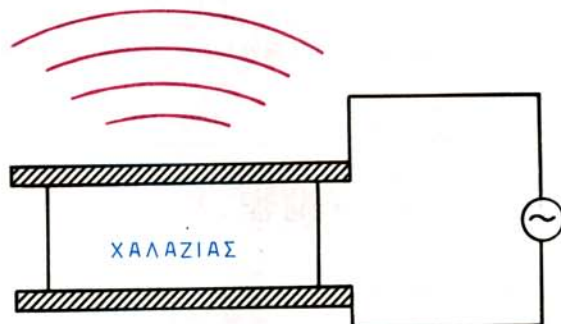
Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **πιεζοηλεκτρισμός** και χρησιμοποιείται για την κατασκευή ορισμένου τύπου μικροφώνων (κρυσταλλικά), για τη σταθεροποίηση της συχνότητας πομπών και δεκτών βραχέων και υπερβραχέων κυμάτων, για τη δημιουργία σπινθήρα σε αναπτήρες κλπ.

Η **ηλεκτροσυστολή** είναι φαινόμενο αντίστροφο του πιεζοηλεκτρισμού. Αν μεταξύ δυο παράλληλων μεταλλικών πλακών τοποθετήσουμε πλακίδιο χαλαζία (που παρουσιάζει το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού) και εφαρμόσουμε στις πλάκες συνεχή τάση, θα παρατηρήσουμε ότι το πάχος του πλακιδίου αυξάνεται ή ελαττώνεται (ανάλογα με την πολικότητα). Αν η τάση είναι εναλλασσόμενη (σχ. 4.11β), το πλακίδιο θα διαστέλλεται και θα συστέλλεται περιοδικά με το ρυθμό της συχνότητας της εναλλασσόμενης τάσεως. Το πλακίδιο δηλαδή θα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο στην περίπτωση του συντονι-



Σχ. 4.11α.
Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.



Σχ. 4.11β.
Φαινόμενο ηλεκτροσυστολής.

σμού, δηλαδή όταν η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του πλακιδίου. Ανάλογα με το πάχος δ του πλακιδίου, η ιδιοσυχνότητά του μπορεί να φθάσει μέχρι και την περιοχή των ραδιοφωνικών συχνοτήτων.

Τέτοια πλακίδια χαλαζία χρησιμοποιούνται για την παραγωγή και για τη σταθεροποίηση της συχνότητας πομπών ασυρμάτου.

4.12 Ηλεκτρικό πεδίο της γης. Αλεξικέραυνο.

Από πειραματικές μετρήσεις έχει αποδειχθεί ότι η γη περιβάλλεται από ηλεκτρικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κατακόρυφες με φορά από τα πάνω προς τα κάτω. Αυτό σημαίνει ότι στην ατμόσφαιρα υπάρχει περίσσεια θετικών φορτίων και στο έδαφος αρνητικών.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της γης δεν είναι σταθερή αλλά ελαττώνεται με το ύψος. Στην επιφάνεια της θάλασσας έχει τιμή $E = 130 \text{ V/m}$ και μηδενίζεται σε ύψος 15 km περίπου.

Η χωρητικότητα της γης είναι:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{R}{k_0} = \frac{6370 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^9} \text{ F} \rightarrow C = 708 \text{ } \mu\text{F}$$

όπου $R = 6370 \text{ km}$ η ακτίνα της γης.

Η επιφανειακή πυκνότητα σ θα είναι:

$$D = \sigma = \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 130 \text{ C/m}^2 \rightarrow D = \sigma = 1,15 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Επομένως το φορτίο της γης θα είναι:

$$\sigma = \frac{q}{S} \rightarrow q = \sigma \cdot 4\pi R^2 = 1,15 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 3,14 (6,37)^2 \cdot 10^{12} \rightarrow q = 5,86 \cdot 10^5 \text{ C}$$

Τέλος το «απόλυτο» δυναμικό της (ως προς τα πολύ μακρινά ουράνια σώματα) θα είναι:

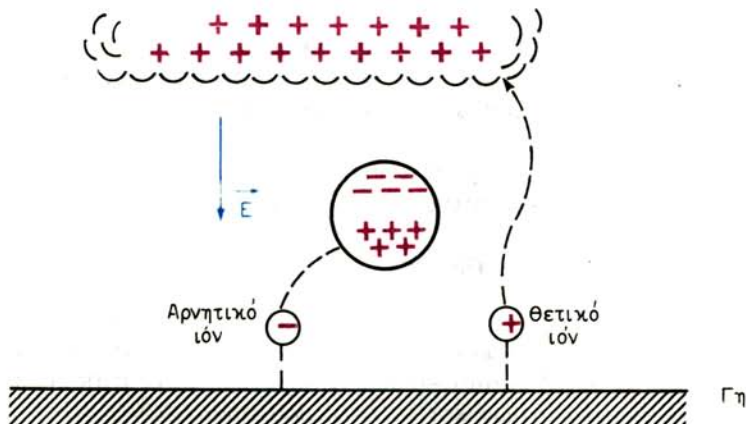
$$U = \frac{q}{C} = \frac{5,86 \cdot 10^5}{708 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C}}{\text{F}} \rightarrow U = 827,7 \text{ MV}$$

Επειδή η χωρητικότητα της γης είναι μεγάλη, το δυναμικό της θα παραμένει περίπου σταθερό, για οποιαδήποτε δυνατή προσφορά ή παραλαβή φορτίων από τη γη. Όταν λοιπόν ενώνουμε αγωγίμα ένα φορτισμένο αγωγό με τη γη, τότε το δυναμικό του σταθεροποιείται. Αυτό ακριβώς το νόημα έχει η προσγείωση αγωγού.

Μηχανισμός φορτίσεως των σταγόνων βροχής.

Κάθε σταγονίδιο νερού, που βρίσκεται στην ατμόσφαιρα, γίνεται ηλεκτρικό δίπολο εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου της γης (σχ. 4.12).

Τα σταγονίδια αυτά, όταν πέφτουν κατά τη βροχή (ή όταν αιωρούνται από ανερχόμενα ρεύματα αέρα), μπορεί να συναντήσουν ιόντα. Όταν το ιόν είναι αρνητικό, έλκεται προς το σταγονίδιο, ενώ όταν είναι θετικό, απωθείται. Έτσι τα σταγονίδια, που παίρνουν αρνητικά κατά προτίμηση φορτία, παρουσιάζονται



Σχ. 4.12.

Μηχανισμός φορτίσεως των σταγόνων της βροχής.

αρνητικά φορτισμένα και όταν φθάσουν στο έδαφος το φορτίζουν αρνητικά, ενώ στην ατμόσφαιρα παραμένουν ελεύθερα τα θετικά ιόντα.

Κεραυνός – Αλεξικέραυνο.

Τα νέφη αποτελούνται από φορτισμένα σταγονίδια νερού, τα οποία σε άλλες περιοχές είναι θετικά φορτισμένα και σε άλλες αρνητικά. Ηλεκτρικές εκκενώσεις μεταξύ περιοχών αντίθετου φορτίου αποτελούν τις **αστραπές**.

Τα φορτία που βρίσκονται σε περιοχές του νέφους στραμμένες προς τη γη, επάγουν ίσα και αντίθετα φορτία, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται μεταξύ νέφους και εδάφους ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο. Όταν η ένταση του πεδίου γίνει μεγαλύτερη από μια ορισμένη τιμή παράγεται **κεραυνός**.

Η τάση μεταξύ νέφους και γης, η αναγκαία για την πτώση του κεραυνού, κυμαίνεται μεταξύ 100 και 1000 MV, ενώ η ένταση του ρεύματος που διέρχεται από τη φωτεινή φλέβα είναι της τάξεως μεγέθους των 20.000 A.

Για την προστασία των κτιρίων από κεραυνό, τοποθετούμε στις στέγες τους αλεξικέραυνα τα οποία με μεταλλικές ταινίες που υπάρχουν κατά μήκος της εξωτερικής πλευράς των κτιρίων, συνδέονται με το υγρό έδαφος. Χάρη σ' αυτές το σπίτι περιβάλλεται, μπορούμε να πούμε, με ένα κλωβό Faraday.

Εκτός από τα αλεξικέραυνα τύπου κλωβού υπάρχουν και αλεξικέραυνα τύπου ακίδας. Η ακίδα συνδέεται αγωγίμα με τη γη. Η προσγείωση γίνεται με μεταλλικό σώμα μεγάλης επιφάνειας, π.χ. με χάλκινο φύλλο, που τοποθετείται βαθιά μέσα στη γη.

Όπως γνωρίζουμε στην περιοχή φορτισμένων ακίδων οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές συμπιέζονται πάρα πολύ και το πεδίο εκεί είναι πολύ ισχυρό. Το φορτίο ενός σύννεφου καταιγίδας παράγει με επαγωγή αντίθετα φορτία πάνω στην ακίδα του αλεξικεραυνού. Τα φορτία αυτά μεταβάλλουν τον αέρα σε αγωγό, προσφέροντας έτσι έναν ασφαλή δρόμο για τον κεραυνό προς τη γη.

Αν πέσει κεραυνός σε ένα απροστάτευτο σπίτι θα ακολουθήσει πορεία κατά μήκος καλών αγωγών, όπως το δίκτυο υδρεύσεως, φωταερίου, οι καπνοδόχοι, οι κεραιές κλπ. Γι' αυτό την ώρα της καταιγίδας πρέπει να αποφεύγουμε να βρισκόμαστε κοντά στις εγκαταστάσεις αυτές.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΣΥΝΕΧΕΣ ΡΕΥΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΟΗΜ – ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΑΓΩΓΟΥ

5.1 Ηλεκτρικό ρεύμα – Φορείς και φορά του ρεύματος.

Στο στατικό ηλεκτρισμό ασχοληθήκαμε με ηλεκτρικά φαινόμενα που οφείλονται σε ακίνητα ηλεκτρικά φορτία. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ηλεκτρικά φαινόμενα που οφείλονται σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία.

Στην παράγραφο 1.5 διατυπώσαμε αρκετές έννοιες και ορισμούς σχετικά με την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα σε αγωγούς. Πριν λοιπόν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη, ας υπενθυμίσουμε τα κυριότερα σημεία της σχετικής θεωρίας:

Ηλεκτρικό ρεύμα ονομάζεται η προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσα σε αγωγούς. Τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία ονομάζονται **φορείς** του ηλεκτρικού ρεύματος και είναι τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα. Συγκεκριμένα:

α) Αν το ρεύμα διέρχεται μέσα από **μεταλλικούς αγωγούς**, οι φορείς που κινούνται είναι τα **ελεύθερα ηλεκτρόνια**.

β) Αν το ρεύμα διέρχεται μέσα από **υγρά** (ηλεκτρολύτες), οι φορείς που κινούνται είναι **ιόντα** (θετικά ή αρνητικά).

γ) Αν το ρεύμα διέρχεται μέσα από **αέρια** (ηλεκτρική εκκένωση), οι φορείς είναι **ηλεκτρόνια** και **ιόντα**. Ας υπενθυμίσουμε εδώ ότι κάτω από συνηθισμένες καταστάσεις πίεσεως, θερμοκρασίας και υγρασίας ο ατμοσφαιρικός αέρας, και γενικά τα αέρια, αποτελούνται από ουδέτερα μόρια ή άτομα και επομένως, λόγω ελλείψεως ηλεκτρικών φορτίων δεν είναι καλοί αγωγοί του ηλεκτρισμού. Όμως, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, μπορεί να διασπασθεί το διηλεκτρικό των αερίων (παράγρ. 4.3), οπότε έχουμε ιονισμό των μορίων ή ατόμων τους, και συνεπώς ροή ηλεκτρικού ρεύματος.

Οι φορείς κινούνται αν δημιουργήσουμε, μέσα στο μέσο όπου βρίσκονται, ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως \vec{E} . Τότε σε κάθε φορέα που φέρει το φορτίο q , θα εξασκηθεί δύναμη $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$ με αποτέλεσμα να μετακινηθεί ο φορέας (κατά τη φορά της \vec{E} αν $q > 0$ και κατ' αντίθετη αν $q < 0$). Η κίνηση αυτή αποτελεί το ηλεκτρικό ρεύμα. Επειδή στους μεταλλικούς αγωγούς κινούνται μόνο ελεύθερα ηλεκτρόνια, η φορά του ρεύματος θα συμπίπτει με τη φορά της κινήσεως

των ηλεκτρονίων. Η φορά αυτή ονομάζεται **πραγματική** ή **ηλεκτρονική** φορά.

Αντί της ηλεκτρονικής φοράς συνηθίζεται να θεωρούμε σαν φορά του ρεύματος την αντίθετη της κινήσεως των ηλεκτρονίων, δηλαδή τη φορά της εντάσεως \vec{E} του πεδίου μέσα στον αγωγό. Η φορά αυτή ονομάζεται **συμβατική** φορά του ηλεκτρικού ρεύματος. Επειδή τα περισσότερα συγγράμματα, ελληνικά και ξένα, χρησιμοποιούν τη συμβατική φορά του ρεύματος, θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς αυτή τη φορά στο βιβλίο αυτό.

Μεγάλο μέρος της Ηλεκτροτεχνίας καταλαμβάνει η μελέτη των νόμων που διέπουν την κίνηση – τη ροή – των ηλεκτρικών φορτίων μέσα στους αγωγούς. Επίσης ενδιαφέρει η ανάπτυξη μεθόδων με των οποίων τη βοήθεια επιλύεται το βασικό πρόβλημα του προσδιορισμού των στοιχείων της υπόψη ροής, όταν είναι γνωστά τα αίτια, τα οποία την προκαλούν, καθώς και οι φυσικές ιδιότητες και η γεωμετρική μορφή των αγωγίμων σωμάτων, μέσω των οποίων διέρχεται το ηλεκτρικό ρεύμα. Στη γενική περίπτωση που οι αγωγοί έχουν οποιοδήποτε τρισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα, η επίλυση του προβλήματος αυτού παρουσιάζει συνήθως μαθηματικής φύσεως δυσχέρειες. Στις πρακτικές όμως εφαρμογές του ηλεκτρισμού, η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος γίνεται κατά κανόνα μέσω γραμμικών ή **συρματομόρφων** αγωγών, δηλαδή αγωγών των οποίων οι διαστάσεις της διατομής είναι αμελητέες συγκριτικά με τη διάσταση του μήκους τους. Στην περίπτωση αυτή η επίλυση του προβλήματος του προσδιορισμού των στοιχείων της ροής απλουστεύεται σημαντικά, γιατί η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος γίνεται κατά τον άξονα των αγωγών και συνεπώς η διεύθυνση του αναπτυσσόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι από πριν καθορισμένη. Με τέτοιους «γραμμικούς» αγωγούς θα ασχοληθούμε κυρίως στο βιβλίο αυτό.

5.2 Ηλεκτρικές πηγές – Ηλεκτρικά κυκλώματα.

Για την παραγωγή και την παροχή ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιούμε τις **πηγές ηλεκτρικού ρεύματος** που ονομάζονται και ηλεκτρικές πηγές. Για να μπορεί μια ηλεκτρική πηγή να προκαλεί και να συντηρεί την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό των αγωγών, θα πρέπει να δημιουργεί στα άκρα τους κατάλληλη διαφορά δυναμικού. Έτσι:

Ηλεκτρική πηγή ονομάζεται η συσκευή, η οποία δημιουργεί μεταξύ των δυο άκρων της διαφορά δυναμικού.

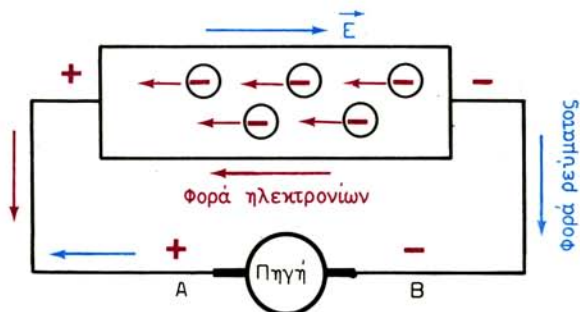
Τα άκρα αυτά Α και Β (σχ. 5.2α) ονομάζονται **πόλοι** της πηγής.

Αν συνδέσουμε τους πόλους της πηγής με ένα συρμάτινο αγωγό, τότε δημιουργείται μέσα σ' αυτόν ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , του οποίου η φορά είναι από τον πόλο που έχει το υψηλότερο δυναμικό (θετικός πόλος) προς τον πόλο που έχει το χαμηλότερο δυναμικό (αρνητικός πόλος).

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που υπάρχουν μέσα στο συρμάτινο αγωγό θα αρχίσουν να κινούνται, γιατί σ' αυτά εξασκείται δύναμη ($\vec{F} = \vec{E} \cdot e$).

Έτσι προκύπτει ηλεκτρικό ρεύμα του οποίου η συμβατική φορά είναι αντίθετη της φοράς κινήσεως των ηλεκτρονίων, δηλαδή πάντα από το θετικό πόλο της πηγής προς τον αρνητικό. Η συμβολική παράσταση των ηλεκτρικών πηγών φαίνεται στο σχήμα 5.2β.

Οι κυριότερες ηλεκτρικές πηγές που χρησιμοποιούνται σήμερα στην πράξη



Σχ. 5.2α.

Η ηλεκτρική πηγή δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο E , του οποίου η φορά συμπίπτει με τη συμβατική φορά του ρεύματος.



Σχ. 5.2β.

Συμβολική παράσταση ηλεκτρικής πηγής.

εντάσσονται σε μια από τις πιο κάτω κατηγορίες:

α) **Ηλεκτρικά στοιχεία:** Χρησιμοποιούνται για την τροφοδότηση μικρών φορητών ηλεκτρικών συσκευών (π.χ. φανάρια τσέπης, ραδιόφωνα τράνζιστορς, φωτογραφικές μηχανές, μικροί ηλεκτρονικοί υπολογιστές τσέπης κλπ).

β) **Ηλεκτρικοί συσσωρευτές:** Σ' αυτούς αποθηκεύουμε ηλεκτρική ενέργεια προκειμένου να τη χρησιμοποιήσουμε σε ευθετότερο τόπο και χρόνο (π.χ. μπαταρίες αυτοκινήτων, πλοίων κλπ).

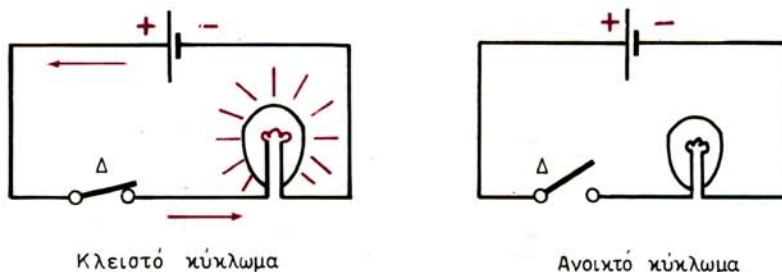
γ) **Ηλεκτρικές γεννήτριες:** Αποτελούν τις κυριότερες πηγές παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος. Πρόκειται για πολύπλοκα συστήματα μετατροπής μιας μορφής ενέργειας (π.χ. θερμικής, υδραυλικής κλπ) σε ηλεκτρική.

Τις ηλεκτρικές πηγές θα μελετήσουμε διεξοδικά στα κατάλληλα κεφάλαια.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει μεταξύ των πόλων της ηλεκτρικής πηγής συνδέουμε ένα – ή και περισσότερους αγωγούς – οι οποίοι σ' αυτή την περίπτωση διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα. Το σύνολο, που αποτελείται από την ηλεκτρική πηγή και τον αγωγό που συνδέει τους πόλους της, ονομάζεται **ηλεκτρικό κύκλωμα**.

Συνδέουμε π.χ. με αγωγούς τους πόλους μιας ηλεκτρικής πηγής με τους ακροδέκτες ηλεκτρικής λάμπας και παρεμβάλλουμε μεταξύ πηγής και λάμπας ένα διακόπτη (σχ. 5.2γ). Το σύστημα της πηγής, της λάμπας, του διακόπτη και των αγωγών συνδέσεως αποτελεί ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Αν δεν υπάρχει διακοπή σε κανένα σημείο του κυκλώματος, δηλαδή ο διακόπτης Δ είναι κλειστός, το κύκλωμα ονομάζεται **κλειστό** και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα (η λάμπα φωτοβολεί). Όταν ο διακόπτης Δ είναι ανοικτός, το κύκλωμα ονομάζεται **ανοικτό** και δεν διαρρέεται από ρεύμα (η λάμπα δεν φωτοβολεί).



Σχ. 5.2γ.
Ηλεκτρικό κύκλωμα.

5.3 Ένταση και πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος.

Θεωρούμε τυχούσα τομή S ενός γραμμικού αγωγού στα άκρα του οποίου έχουμε εφαρμόσει κάποια τάση (σχ. 5.3α).

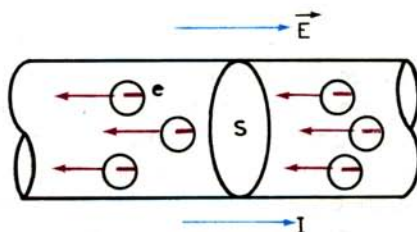
Σε χρόνο Δt θα διέρχεται από την τομή S ηλεκτρικό φορτίο Δq .

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, που διέρχεται από τυχούσα τομή του γραμμικού αγωγού την τυχούσα χρονική στιγμή t , είναι το όριο, στο οποίο τείνει ο λόγος της ποσότητας ηλεκτρικού φορτίου ΔQ που διέρχεται από τη διατομή από τη χρονική στιγμή t μέχρι τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, προς το χρονικό διάστημα Δt , όταν αυτό τείνει να γίνει οσοδήποτε μικρό, δηλαδή:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Μονάδα μετρήσεως της εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος, στο σύστημα S.I., είναι το 1 Ampere (A). Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 1.9, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι θεμελιώδες φυσικό μέγεθος του χρησιμοποιούμενου Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (S.I.). Ας σημειωθεί ότι το μέγεθος «ηλεκτρικό φορτίο» και η αντίστοιχη μονάδα μετρήσεώς του (1 Coulomb) ορίσθηκαν στην παράγραφο 1.9 ως παράγωγα της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος, με τη βοήθεια σχέσεως αντίστοιχης προς τη σχέση (5.1), δηλαδή:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$



Σχ. 5.3α.
Κίνηση ηλεκτρονίων μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο αγωγού.

Πολλαπλάσιο της μονάδας μετρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου (1 Coulomb), είναι το αμπερώριο:

$$1 \text{ Ah} = 1 \text{ A} \cdot 3.600\text{s} = 3.600 \text{ A.s} = 3.600 \text{ C}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι μονόμετρο μέγεθος και ο ορισμός της κατά τη σχέση (5.1) αφορά τη **στιγμιαία τιμή** της.

Επειδή σε κανένα σημείο του αγωγού δεν έχουμε συσσώρευση ή απώλεια (διαρροή) ηλεκτρικών φορτίων, συμπεραίνουμε ότι όσο φορτίο διέρχεται από μια τομή του αγωγού σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα Δt , το ίδιο φορτίο θα διέρχεται και από κάθε άλλη τομή κατά το ίδιο χρονικό διάστημα, δηλαδή η **ένταση του ρεύματος έχει την ίδια στιγμιαία τιμή σε όλο το μήκος του αγωγού**.

Μολονότι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι μονόμετρο μέγεθος, της αποδίδουμε ως «φορά» τη συμβατική φορά του ηλεκτρικού ρεύματος στο οποίο αντιστοιχεί. Έτσι, η συμβατική φορά του ηλεκτρικού ρεύματος, μέσα σ' ένα αγωγό, εξ ορισμού συμπίπτει με τη φορά εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στον αγωγό.

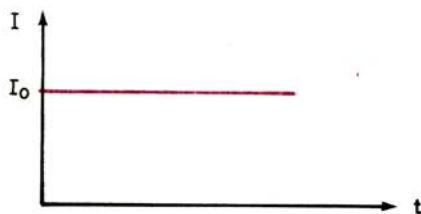
Τα ηλεκτρικά ρεύματα, των οποίων η φορά δεν μεταβάλλεται χρονικά, ονομάζονται ρεύματα **μονής φοράς** ή **συνεχή ρεύματα**. Αντίθετα, **εναλλασσόμενα** ονομάζονται τα ηλεκτρικά ρεύματα, των οποίων η φορά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ένα συνεχές ρεύμα μπορεί να είναι χρονικά **σταθερό** (σχ. 5.3β) ή **μεταβαλλόμενο** (σχ. 5.3γ). Αν το συνεχές ρεύμα είναι σταθερό, τότε η σχέση (5.1) ορισμού της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος γίνεται:

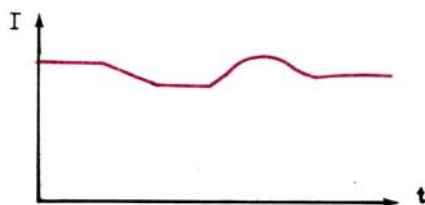
$$I = \frac{Q}{t} \quad (5.2)$$

Δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος ισούται προς το φορτίο που διέρχεται από τυχούσα διατομή του αγωγού, σε χρονικό διάστημα t , οσοδήποτε μεγάλο και αν είναι το χρονικό διάστημα.

Στο μεταβαλλόμενο συνεχές ρεύμα η ένταση μεταβάλλεται κατά μέτρο όχι όμως και κατά φορά. Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται **μέση ένταση του ρεύματος** το πηλίκον του φορτίου Δq , που διέρχεται από μια τομή του αγωγού



Σχ. 5.3β.
Σταθερό συνεχές ρεύμα (η ένταση μένει σταθερή).



Σχ. 5.3γ.
Μεταβαλλόμενο συνεχές ρεύμα.

σε χρόνο Δt , διά του χρόνου Δt , δηλαδή:

$$I_{\mu} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Στη συνέχεια του δεύτερου αυτού μέρους του βιβλίου, θα ασχοληθούμε πρακτικά αποκλειστικά με το σταθερό συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα, χωρίς να κάνουμε ιδιαίτερα σχετική αναφορά. Με το εναλλασσόμενο ρεύμα και τις εφαρμογές του θα ασχοληθούμε σε επόμενο μέρος του βιβλίου αυτού.

5.3.1 Πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος.

Πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε ένα αγωγό είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο προς το λόγο της στοιχειώδους εντάσεως του ρεύματος (dI) σ' ένα σημείο M ενός στοιχείου της διατομής του αγωγού (σχ. 5.3δ), προς το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας (dS) κάθετα προς την οποία ρέει το ηλεκτρικό ρεύμα, δηλαδή:

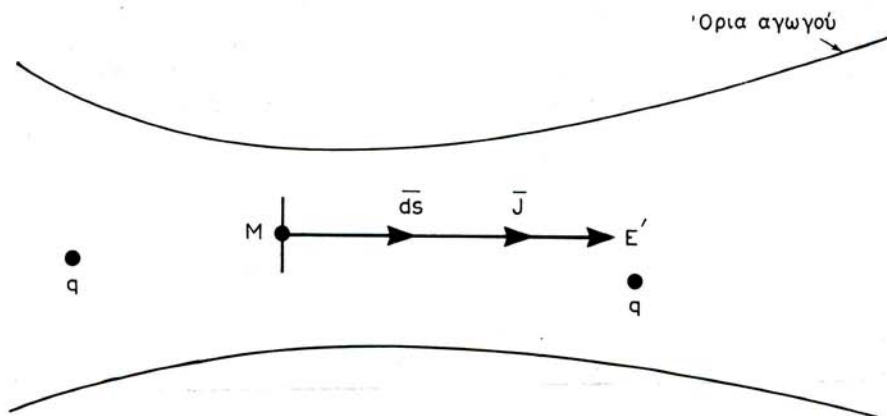
$$J = \frac{dI}{dS} \quad (5.3)$$

ομόρροπο προς το δίδανυσμα της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο M εντός του αγωγού.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (5.3) μονάδα μετρήσεως της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος στο S.I. είναι το 1 A/m^2 . Στην πράξη χρησιμοποιείται αρκετά και το 1 A/mm^2 .

Από τη σχέση (5.3) μπορεί να υπολογισθεί και η στοιχειώδης ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος από μια στοιχειώδη επιφάνεια, οπωσδήποτε προσανατολισμένη, μέσα σ' ένα αγωγό, ως το εσωτερικό γινόμενο:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.4)$$



Σχ. 5.3δ.

Το δίδανυσμα της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.4) στην επιφάνεια μιας διατομής ενός αγωγού, υπολογίζουμε τη συνολική ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διέρχεται κάποια στιγμή από την υπόψη διατομή του αγωγού, ως:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.5)$$

Εάν ο αγωγός είναι γραμμικός (συρματόμορφος), τότε το διάνυσμα της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο προς τη διατομή του και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι σε όλα τα σημεία της διατομής σταθερή, οπότε από τη σχέση (5.5) λαμβάνομε:

$$I = J \cdot S$$

ή (5.6)

$$J = \frac{I}{S}$$

5.4 Αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος.

Τα κυριότερα αποτελέσματα της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος είναι:

α) **Θερμικά αποτελέσματα.** Το ηλεκτρικό ρεύμα καθώς διέρχεται μέσα από τους αγωγούς τους θερμαίνει.

Το αποτέλεσμα αυτό εφαρμόζεται στις ηλεκτρικές θερμάστρες, στα ηλεκτρικά μαγειρεία, στους ηλεκτρικούς λαμπτήρες, στις τηκόμενες ασφάλειες κλπ.

β) **Χημικά αποτελέσματα.** Το ηλεκτρικό ρεύμα, διερχόμενο μέσα από ηλεκτρολυτικά διαλύματα, προκαλεί χημικές αποσυνθέσεις.

γ) **Μαγνητικά αποτελέσματα.** Το ηλεκτρικό ρεύμα, που διαρρέει έναν αγωγό, δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο.

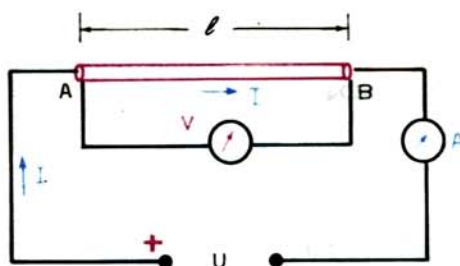
ε) **Μηχανικά αποτελέσματα.** Ρευματοφόρος αγωγός, που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, υφίσταται την επίδραση δυνάμεως (νόμος του Laplace). Στα μηχανικά αποτελέσματα του ρεύματος στηρίζεται η λειτουργία των ηλεκτρικών κινητήρων.

δ) **Φωτεινά αποτελέσματα.** Το ηλεκτρικό ρεύμα διερχόμενο μέσα από αραιωμένα αέρια τα διεγείρει σε φωτοβολία, όπως συμβαίνει στους σωλήνες φωτεινών διαφημίσεων, τους λαμπτήρες φθορισμού κλπ.

στ) **Βιολογικά αποτελέσματα.** Το ηλεκτρικό ρεύμα διερχόμενο μέσα από το σώμα μας αλλοιώνει τα κύτταρα και μπορεί να προκαλέσει τινάγματα, παράλυση, εγκαύματα ή και το θάνατο. Οι αλλοιώσεις αυτές είτε είναι χημικής φύσεως και οφείλονται στην ηλεκτρόλυση του αίματος, είτε είναι θερμικής φύσεως και προξενούν εγκαύματα.

5.5 Νόμος του Ohm – Αντίσταση αγωγού.

Θεωρούμε ένα συρματόμορφο αγωγό μήκους l και εφαρμόζουμε στα άκρα του τάση $U = U_A - U_B > 0$. Ο αγωγός τότε θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I που θα έχει φορά από το A στο B (σχ. 5.5α).



Σχ. 5.5α.

Κύκλωμα για την πειραματική απόδειξη του νόμου του Ohm.

Τα μεγέθη U και I μπορούμε να τα μετρήσουμε με ένα βολτόμετρο και ένα αμπερόμετρο. Αν κάνουμε περισσότερες μετρήσεις μεταβάλλοντας κάθε φορά την τάση U , τότε διαπιστώνουμε ότι:

Το πηλίκον της τάσεως που επικρατεί στα άκρα του συρματόμορφου αγωγού διά της εντάσεως του ρεύματος που τον διαρρέει είναι σταθερό, δηλαδή:

$$\frac{U}{I} = \text{σταθ} \quad (5.7)$$

Η πρόταση αυτή αποτελεί το **νόμο του Ohm*** για ένα συρματόμορφο (γραμμικό) αγωγό.

Η τιμή του πηλίκου U/I εξαρτάται από τη φύση του αγωγού, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του και τη θερμοκρασία του και ονομάζεται **ηλεκτρική αντίσταση R** του αγωγού. Άρα:

$$\frac{U}{I} = R \quad (5.8)$$

Μονάδα αντιστάσεως στο σύστημα S.I. είναι το **Ohm** (1Ω)

$$1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$$

Το 1Ω είναι η αντίσταση που έχει ένας αγωγός, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $1 A$, όταν στα άκρα του επικρατεί τάση $1 V$.

Από τη σχέση (5.8) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.9) \quad \text{και} \quad U = IR \quad (5.10)$$

*Georg Simon Ohm, Γερμανός φυσικός, 1787 - 1854.

Εάν η ηλεκτρική αντίσταση ενός αγωγού είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την τάση που επιβάλλεται στα άκρα του αγωγού ή της εντάσεως που τον διαρρέει, τότε ο αγωγός αυτός συμπεριφέρεται σύμφωνα με το νόμο του Ohm, δηλαδή για τον αγωγό αυτό ισχύει:

$$\frac{U}{I} = R = \text{σταθ.} \quad (5.11)$$

Έτσι, επισημαίνουμε ότι οι σχέσεις (5.8), (5.9) και (5.10) ισχύουν για κάθε αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, ενώ η σχέση (5.11) ισχύει μόνον για όσους αγωγούς συμπεριφέρονται σύμφωνα με το νόμο του Ohm.

Αν λάβουμε υπόψη ότι η αντίσταση R για τα μέταλλα σε καθαρή κατάσταση και σε ορισμένη θερμοκρασία είναι σταθερή, συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης θα είναι ευθεία γραμμή (σχ. 5.5β).

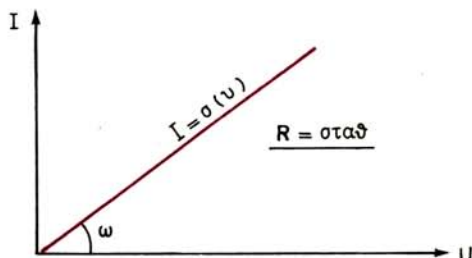
Η κλίση της ευθείας αυτής είναι ίση με το αντίστροφο της αντιστάσεως, δηλαδή:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{1}{R} \quad (5.12)$$

Στην ηλεκτροτεχνία κατασκευάζονται ειδικά στοιχεία από σύρμα και από άλλα υλικά που προβάλλουν αντίσταση στη διέλευση του ρεύματος και ονομάζονται **αντιστάτες**. Την αντίσταση ενός αντιστάτη εκφράζουμε πάλι με το πηλίκον U/I . Όμως ο νόμος του Ohm μεταξύ τάσεως και εντάσεως δεν ισχύει για όλους τους αντιστάτες, δηλαδή δεν προκύπτει σε όλους η ευθεία γραμμή του σχήματος 5.5β, αλλά μια καμπύλη π.χ. σαν την καμπύλη του σχήματος 5.5γ.

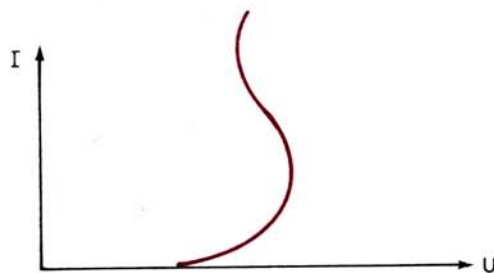
Στην περίπτωση αυτή η αντίσταση του αντιστάτη δεν είναι σταθερή σε όλα τα ζεύγη τιμών τάσεως-εντάσεως, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την τάση που εφαρμόζεται και με το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη.

Όταν η αντίσταση ενός αντιστάτη είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το ρεύμα που τον διαρρέει, ο αντιστάτης ονομάζεται **ωμικός**, ενώ όταν μεταβάλλεται με την ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει τότε ο αντιστάτης ονομάζεται **μη ωμικός**.



Σχ. 5.5β.

Γραφική παράσταση του νόμου του Ohm.



Σχ. 5.5γ.

Θερμίστορ (ημιαγωγός).

Η συμβολική παράσταση των ωμικών αντιστατών φαίνεται στο σχήμα 5.5δ. Αγωγοί που έχουν πολύ μικρή αντίσταση (πρακτικά αμελητέα) συμβολίζονται με μια ευθεία γραμμή.

5.5.1 Πτώση τάσεως σε ρευματοφόρο ωμικό αγωγό.

Θεωρούμε δυο σημεία A και B ρευματοφόρου ωμικού αγωγού και έστω ότι $U_A > U_B$ (σχ. 5.5ε).

Η συμβατική φορά του ρεύματος θα είναι από το A στο B. Θα έχουμε:

$$U_A - U_B = IR_{AB} \rightarrow U_B = U_A - IR_{AB} \quad (5.13)$$

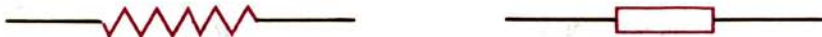
Από τη σχέση (5.13) συμπεραίνουμε ότι κατά μήκος ρευματοφόρου ωμικού αγωγού και κατά τη φορά του ρεύματος το δυναμικό μικραίνει κατά το γινόμενο IR_{AB} , το οποίο ονομάζεται **πτώση τάσεως**.

5.5.2 Ερμηνεία του νόμου του Ohm.

Θεωρούμε ένα μεταλλικό συρματομόρφο αγωγό που έχει μήκος l και εφαρμόζουμε στα άκρα του τάση U (σχ. 5.5στ).

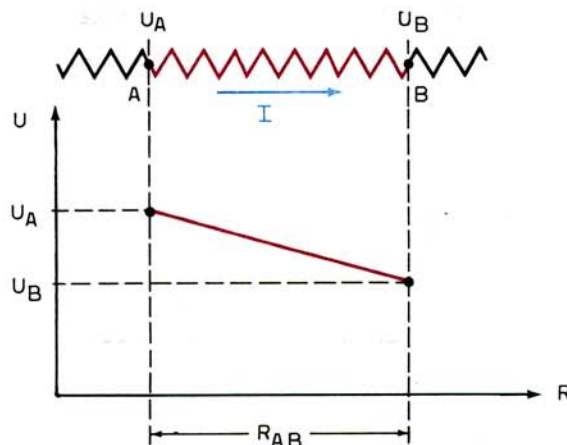
Επειδή ο αγωγός θεωρείται συρματομόρφος, λόγω της επιβολής στα άκρα του της τάσεως U , θα δημιουργηθεί μέσα σ' αυτόν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, εντάσεως:

$$E = \frac{U}{l}$$



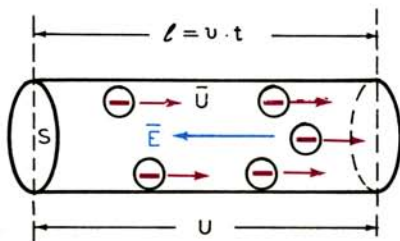
Σχ. 5.5δ.

Συμβολική παράσταση ωμικών αντιστατών.



Σχ. 5.5ε.

Μεταβολή του δυναμικού κατά μήκος ρευματοφόρου ωμικού αγωγού.



Σχ. 5.5στ.
Τμήμα μεταλλικού αγωγού.

Έτσι, σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο εντός του αγωγού εξασκείται δύναμη

$$F = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{l} = \text{σταθ.}$$

Αφού $F = \text{σταθ.}$, θα έπρεπε η ταχύτητα του ηλεκτρονίου συνεχώς να μεγαλώνει και το ίδιο βέβαια να συμβαίνει και με την ένταση του ρεύματος. Το πείραμα όμως δείχνει ότι αν η τάση στα άκρα αγωγού είναι σταθερή, παραμένει σταθερή και η ένταση του ρεύματος. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ηλεκτρόνια, κατά την κίνησή τους μέσα στους αγωγούς, συγκρούονται με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος, με αποτέλεσμα η κίνησή τους να μην είναι επιταχυνόμενη, αλλά να γίνεται με μια σταθερή ταχύτητα που ονομάζουμε **ορική ταχύτητα**. Η ορική ταχύτητα u παρέχεται από τη σχέση:

$$u = \tau \cdot E \quad (5.14)$$

Ο συντελεστής τ ονομάζεται **ευκινησία** του ηλεκτρονίου και εξαρτάται από το υλικό και τη θερμοκρασία του αγωγού.

Από τη διατομή επιφάνειας S του αγωγού διέρχονται σε χρονικό διάστημα δt τόσα ηλεκτρόνια « n » όσα περιέχονται σε κύλινδρο που έχει βάση S και ύψος $l = u \cdot \delta t$. Αν z είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου του αγωγού θα έχουμε:

$$n = z \cdot V = zSl = z \cdot S \cdot u \cdot \delta t \quad (5.15)$$

Το ολικό φορτίο q που διέρχεται σε χρονικό διάστημα δt από τη διατομή S θα είναι:

$$q = ne \quad (5.16)$$

οπότε η ένταση του ρεύματος θα είναι ίση με:

$$I = \frac{q}{\delta t} \quad (5.17)$$

Από τις σχέσεις (5.15), (5.16) και (5.17) προκύπτει:

$$I = z \cdot u e S \quad (5.18)$$

Επειδή $u = \tau E$ και $E = U/l$ η (5.18) γράφεται:

$$I = z e \frac{S}{l} \tau U \rightarrow \frac{U}{I} = \frac{1}{z e \tau} \frac{l}{S} \quad (5.19)$$

Εάν για έναν ορισμένο αγωγό μήκους l , διατομής S και ορισμένης θερμοκρασίας, το ανά μονάδα όγκου πλήθος ελευθέρων ηλεκτρονίων καθώς και η ευκινησία τους είναι σταθερά, τότε για τον αγωγό αυτό ισχύει:

$$\frac{l}{z e \tau S} = R = \text{σταθ.} \quad (5.20)$$

και συνεπώς
$$\frac{U}{I} = R = \text{σταθερά} \quad (5.21)$$

δηλαδή ο νόμος του Ohm.

5.5.3 Ειδική αντίσταση – Αγωγιμότητα και ειδική αγωγιμότητα αγωγού.

Αν στη σχέση (5.20) θέσομε:

$$\rho = \frac{1}{z e \tau} \quad (5.22)$$

προκύπτει
$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (5.23)$$

Ο συντελεστής ρ είναι σταθερός για ένα ωμικό αγωγό ορισμένης θερμοκρασίας και ονομάζεται **ειδική αντίσταση** του αγωγού. Η μονάδα της ειδικής αντιστάσεως στο σύστημα S.I. είναι το $1 \Omega \cdot m$. Εκτός από τη μονάδα αυτή στην πράξη χρησιμοποιείται το $1 \Omega \cdot cm$ και το $1 \Omega \cdot mm^2/m$.

Η ειδική αντίσταση των μετάλλων είναι πολύ μικρή, ενώ των μονωτών πολύ μεγάλη. Τέλος η ειδική αντίσταση των ημιαγωγών παίρνει ενδιάμεση τιμή, ανάλογα με την τάση τροφοδοσίας του ημιαγωγού.

Αγωγιμότητα ενός αγωγού ονομάζεται το αντίστροφο της αντιστάσεώς του, δηλαδή:

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.24)$$

Η μονάδα της αγωγιμότητας στο σύστημα S.I. είναι το $1 \Omega^{-1}$. Η μονάδα αυτή ονομάζεται και Siemens ($1 S$) ή mho.

Ειδική αγωγιμότητα ενός αγωγού ονομάζεται το αντίστροφο της ειδικής του αντιστάσεως

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad (5.25)$$

Η μονάδα της ειδικής αγωγιμότητας στο σύστημα SI είναι το $1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ αλλά στην πράξη χρησιμοποιείται και η μονάδα $1 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$.

5.5.4 Γενικότερη διατύπωση του νόμου του Ohm.

Μετά την εισαγωγή των μεγεθών «ειδική αντίσταση» - «ειδική αγωγιμότητα», μπορούμε να δώσουμε μια γενικότερη διατύπωση του νόμου του Ohm. Από τις σχέσεις (5.21) και (5.23) παίρνομε:

$$\frac{U}{l} = \rho \frac{I}{S} \quad \text{ή} \quad \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{S} \quad (5.26)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μέσα στο συρματόμορφο αγωγό δίνεται από την: $E = U/l$, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος συνδέεται με την πυκνότητα σύμφωνα με τη σχέση (5.6), η σχέση (5.26) γίνεται $E = \rho j$.

Αν τέλος λάβουμε υπόψη ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι διανύσματα ομόρροπα (παράγρ. 5.3.1), τότε γράφομε, σε διανυσματική μορφή, την πιο πάνω σχέση:

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (5.27)$$

ή την ισοδύναμή της:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (5.28)$$

Οι εκφράσεις (5.27) και (5.28) αποτελούν γενικότερες διατυπώσεις του νόμου του Ohm, και όπως τις αποδείξαμε ισχύουν στην περίπτωση συρματόμορφου αγωγού, που διαρρέεται από συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα, οπότε εντός του σχηματίζεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Όμως, η σχέση (5.28) έχει πολύ γενικότερη ισχύ και αποτελεί μια από τις πλέον θεμελιώδεις εξισώσεις της θεωρίας του ηλεκτρισμού*.

Έτσι μπορεί να χρησιμοποιείται στην περίπτωση της ροής ηλεκτρικού ρεύματος σε οποιοδήποτε αγωγό, μεταλλικό ή όχι, και ανεξάρτητα από τη μορφή του ηλεκτρικού πεδίου που αναπτύσσεται μέσα του.

Παράδειγμα 5.5.1. Υπολογισμός ορικής ταχύτητας.

Χάλκινο σύρμα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας $J = 20 \text{ A/mm}^2$. Να υπολογισθεί η ορική ταχύτητα των ηλεκτρονίων, αν γνωρίζομε ότι σε κάθε κυβικό μέτρο χαλκού υπάρχουν 10^{29} ελεύθερα ηλεκτρόνια ($e = 1,6 \cdot 10^{-29} \text{ C}$).

* Ας σημειωθεί – για χάρη πληρότητας – ότι σε αρκετά βιβλία θεωρητικής ηλεκτροτεχνίας η σχέση (5.28) γίνεται αρχικά δεκτική ως «αξίωμα» ή ως σχέση ορισμού της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος. Με βάση αυτή, καθώς και άλλες θεωρητικές εξισώσεις, θεμελιώνονται όλες οι υπόλοιπες σχέσεις της ηλεκτροτεχνίας, όπως π.χ. ο νόμος του Ohm.

Από τη σχέση (5.18) προκύπτει:

$$\frac{I}{S} = J = z \cdot u \cdot e \rightarrow u = \frac{J}{ze}$$

Είναι:

$$J = \frac{20}{10^{-6}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \text{ και } z = 10^{29} \text{ ηλεκτρόνια/m}^3$$

οπότε:

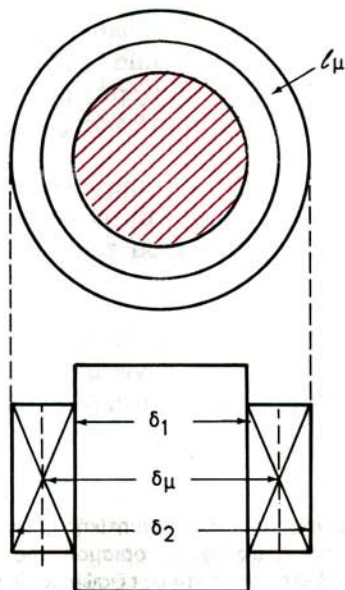
$$u = \left(\frac{2 \cdot 10^7}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \right) \cdot \frac{\text{A} \cdot \text{m}}{\text{C}} = \frac{2}{1,6 \cdot 10^3} \frac{\text{m}}{\text{S}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{S}}$$

Παράδειγμα 5.5.2. Υπολογισμός των στροφών τυλίγματος (πηνίου).

Το τύλιγμα ενός πηνίου αποτελείται από χάλκινο σύρμα που έχει τυλιχθεί σε σιδηροπυρήνα διαμέτρου $\delta_1 = 5 \text{ cm}$. Η εξωτερική διάμετρος του τυλίγματος είναι $\delta_2 = 9 \text{ cm}$ (σχ. 5.5ζ). Η διάμετρος του σύρματος είναι $d = 1,38 \text{ mm}$. Όταν η τάση στα άκρα του τυλίγματος είναι 6 V το ρεύμα που διαρρέει το τύλιγμα είναι 3 A . Ζητείται ο αριθμός στροφών n του τυλίγματος ($\rho_x = 0,018 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$).

Αν l_μ είναι το μέσο μήκος μιας στροφής του τυλίγματος, τότε το συνολικό μήκος του τυλίγματος θα είναι:

$$l = n \cdot l_\mu \quad (1)$$



Σχ. 5.5ζ.
Τύλιγμα πηνίου.

Χρησιμοποιούμε το μέσο μήκος μιας στροφής, επειδή οι στροφές προς το εσωτερικό του τυλίγματος έχουν μικρότερο μήκος από τις εξωτερικές στροφές.

Η μέση στροφή έχει διάμετρο:

$$\delta_{\mu} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \rightarrow l_{\mu} = \pi \delta_{\mu} = \frac{\pi}{2} (\delta_1 + \delta_2) \quad (2)$$

Είναι
$$R = \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{S} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$n = \frac{U \cdot S}{I \rho l_{\mu}} = \frac{U \pi d^2}{4 I \rho \pi \delta_{\mu}} \rightarrow n = \frac{U d^2}{2 I \rho (\delta_1 + \delta_2)} \quad (4)$$

Είναι $U = 6 \text{ V}$, $I = 3 \text{ A}$, $d = 1,38 \text{ mm}$, $\delta_1 + \delta_2 = 14 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

και $\rho = 0,018 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

Αντικαθιστώντας στην (4) βρίσκουμε ότι $n = 756$ στροφές.

5.6 Επίδραση της θερμοκρασίας στην αντίσταση αγωγού – Υπεραγωγιμότητα.

Η ειδική αντίσταση ενός υλικού μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Αν η ειδική αντίσταση ρ_a στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι γνωστή (π.χ. $\theta_a = 20^\circ\text{C}$) μπορούμε να προσδιορίσουμε την ειδική αντίσταση ρ_t σε μια οποιαδήποτε θερμοκρασία θ_t ($\theta_t > \theta_a$) με τη σχέση:

$$\rho_t = \rho_a [1 + \alpha (\theta_t - \theta_a)] \quad (5.29)$$

Ο συντελεστής α ονομάζεται **θερμικός συντελεστής αντιστάσεως** και είναι **θετικός** για τα μέταλλα και **αρνητικός** για τους ημιαγωγούς και τους ηλεκτρολύτες.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (5.29) ο συντελεστής α έχει διαστάσεις αντίστροφης θερμοκρασίας και η μονάδα μετρήσεώς του στο S.I. είναι το 1 K^{-1} που είναι ισοδύναμη με τη μονάδα $^\circ\text{C}^{-1}$.

Αν λάβουμε υπόψη τη σχέση (5.23) για την αντίσταση του αγωγού στις θερμοκρασίες θ_t και θ_a , δηλαδή:

$$R_t = \rho_t \frac{l}{S} \quad , \text{ και } \quad R_a = \rho_a \frac{l}{S}$$

η σχέση (5.29) γίνεται:

$$R_t = R_a [1 + \alpha (\theta_t - \theta_a)] \quad (5.30)$$

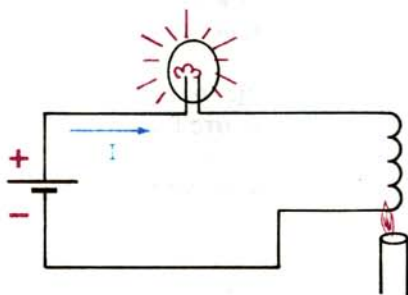
Η σχέση (5.30) ισχύει με την προϋπόθεση ότι κατά τη μεταβολή της θερμοκρασίας του αγωγού θεωρείται αμελητέα η μεταβολή του μήκους l και του εμβαδού της διατομής του S . Από τη σχέση (5.30) προκύπτει το συμπέρασμα ότι **η αντίσταση των μετάλλων αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία.**

Την αύξηση της αντιστάσεως των μετάλλων, όταν αυξάνεται η θερμοκρασία, μπορούμε να δείξουμε με το ακόλουθο πείραμα: Σε κύκλωμα που περιέχει ηλεκτρική πηγή και λαμπτήρα παρεμβάλλουμε μεταλλικό σύρμα που έχει τέτοια αντίσταση, ώστε ο λαμπτήρας να φωτοβολεί (σχ. 5.6α).

Αν θερμάνουμε το σύρμα θα παρατηρήσουμε ότι ελαττώνεται η φωτοβολία του λαμπτήρα (ελαττώνεται το ρεύμα I γιατί αυξάνεται η αντίσταση) και μπορεί να σβήσει τελείως. Αν σταματήσουμε τη θέρμανση, το σύρμα θα αρχίσει να ψύχεται και όταν αποκτήσει την αρχική θερμοκρασία, ο λαμπτήρας θα φωτοβολεί πάλι έντονα. Μερικά κράματα έχουν πρακτικά ασημαντο θερμικό συντελεστή αντιστάσεως και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή **προτύπων αντιστάσεων** (δηλ. αντιστάσεων που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις και η τιμή τους είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία). Τέτοια κράματα είναι η **κωνσταντίνη** (60% Cu, 40% Ni), η μαγγανίνη (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni), ο νεάργυρος (Cu, Zn, Ni) κλπ.

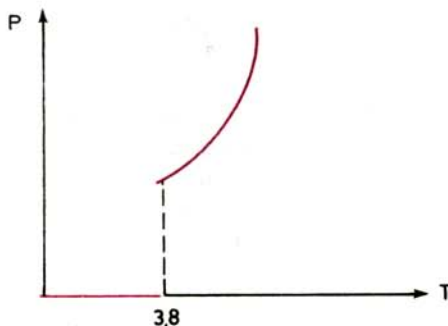
Σε ορισμένους αγωγούς η ειδική αντίσταση σε χαμηλές θερμοκρασίες μηδενίζεται και οι αγωγοί εμφανίζουν τότε πολύ μεγάλη αγωγιμότητα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **υπεραγωγιμότητα** και το παρουσιάζει ο μόλυβδος σε θερμοκρασία $7,2^\circ \text{K}$, ο ψευδάργυρος σε θερμοκρασία $3,8^\circ \text{K}$ (σχ. 5.6β), ο υδράργυρος (4°K) κλπ.

Το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας που παρουσιάζεται π.χ. στο στοιχείο νιόβιο στις πολύ χαμηλές θερμοκρασίες, μπορεί να πάψει να υπάρχει, αν το υλικό βρεθεί μέσα σε ισχυρότατο μαγνητικό πεδίο. Έτσι μπορούμε να έχουμε μια κατά βούληση κυκλοφορία ρεύματος από ένα αγωγό νιοβίου που εξαρτάται κάθε φορά από την τιμή της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου, μέσα στο οποίο



Σχ. 5.6α.

Πείραμα για τη διαπίστωση της μεταβολής της αντιστάσεως με τη θερμοκρασία.



Σχ. 5.6β.

Μεταβολή της ειδικής αντιστάσεως του Zn σε συνάρτηση με την απόλυτη θερμοκρασία του.

βρίσκεται. Η διάταξη αυτή ονομάζεται «κρύοτρο» και έχει χρησιμοποιηθεί σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές αντί διακοπών (Gates).

Ο πίνακας 5.6.1 παρέχει τις ειδικές αντιστάσεις και τους θερμικούς συντελεστές διαφόρων υλικών στη θερμοκρασία 20° C.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.6.1.

Υλικό	ρ $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	α $10^{-4} \alpha \text{ K}^{-1}$
Χαλκός	0,017	39
Άργυρος	0,016	38
Αλουμίνιο	0,028	39
Βολφράμιο	0,055	45
Σίδηρος	0,10 – 0,15	45
Μόλυβδος	0,21	42
Μαγγάνιη	0,43	0,4
Κοιισταντάνη	0,49	-0,03
Νικελίνη	0,43	-1,1
Χρωμονικελίνη	1,1	4
Ιισαμπελίνη	0,50	0,3
Άνθρακας	40	-5

Παράδειγμα 5.6.1.

Η αντίσταση των τυλιγμάτων μιας μηχανής μετρήθηκε σε θερμοκρασία περιβάλλοντος $\theta_a = 15^\circ\text{C}$ και βρέθηκε $R_a = 300 \Omega$. Ύστερα από λειτουργία της μηχανής για μια ώρα, οπότε η θερμοκρασία της σταθεροποιήθηκε, η αντίσταση των τυλιγμάτων μετρήθηκε πάλι και βρέθηκε $R_r = 360 \Omega$. Να υπολογισθεί η τελική θερμοκρασία θ_r των τυλιγμάτων ($\alpha_{cu} = 0,004 \text{ K}^{-1}$).

Αν λύσομε την εξίσωση (5.30) ως προς θ_r προκύπτει:

$$\theta_r = \theta_a + \frac{\frac{R_r}{R_a} - 1}{\alpha}$$

$$\theta_r = 15 + \frac{\frac{360}{300} - 1}{0,004} \rightarrow \theta_r = 65^\circ \text{C}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να βρούμε τη θερμοκρασία ενός τυλιγματος μετρώντας την αντίστασή του.

Παράδειγμα 5.6.2.

Να βρεθεί η ωμική αντίσταση μιας γραμμής μεταφοράς με δυο αγωγούς που είναι χάλκινοι, στις θερμοκρασίες $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ και $\theta_2 = 30^\circ\text{C}$. Το μήκος της γραμμής μεταφοράς είναι $l = 100 \text{ km}$ και η διατομή των αγωγών της $S = 120 \text{ mm}^2$. (Για το χαλκό $\rho_{20} = 0,0175 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ και $\alpha_{20} = 0,004 \text{ K}^{-1}$).

$$R_{20} = \rho_{20} \frac{2l}{S} \rightarrow R_{20} = 0,0175 \cdot \frac{2 \cdot 100000}{120} = 29,16 \ \Omega$$

$$R_{30} = R_{20} [1 + \alpha_{20} (\theta_2 - \theta_1)]$$

$$R_{30} = 29,16 (1 + 0,004 \cdot 10) = 30,32 \ \Omega$$

5.7 Ενέργεια και ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος.

Ας θεωρήσουμε τον αγωγό AB που έχει αντίσταση R στα άκρα της οποίας έχει εφαρμοσθεί τάση: $U = U_A - U_B > 0$ (σχ. 5.7).

Η συμβατική φορά του συνεχούς ρεύματος I, που διαρρέει τον αγωγό, είναι από το A στο B. Όπως ήδη έχουμε αναπτύξει, στην πραγματικότητα ηλεκτρόνια κινούνται από το B στο A. Η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου στο σημείο B είναι: $W_B = eU_B$ και στο A: $W_A = eU_A$.

Επειδή $U_A > U_B$ θα έχουμε: $eU_A < eU_B$ ($e < 0$), άρα $W_A < W_B$.

Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρόνιο κατά την κίνησή του από το B στο A, έχασε ένα μέρος της ενέργειάς του. Η ενέργεια αυτή αποδίδεται στην αντίσταση R και είναι:

$$W_o = W_B - W_A = (U_B - U_A)e$$

Όταν από την αντίσταση R περάσουν n ηλεκτρόνια, θα αποδώσουν ενέργεια:

$$W = (U_B - U_A) ne = (U_A - U_B) (-ne)$$

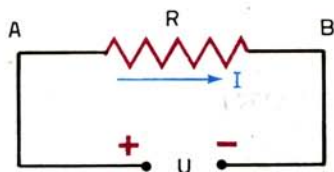
Αν θέσουμε $q = -ne$ και $U = U_A - U_B$ προκύπτει:

$$W = qU \quad (5.31)$$

Επειδή για το σταθερό συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα ισχύει (σχέση 5.2): $q = It$ η (5.31) γράφεται:

$$W = U.I.t \quad (5.32)$$

Η σχέση (5.32) δίνει την ηλεκτρική ενέργεια, η οποία «αποδίδεται» από τις ηλεκτρικές δυνάμεις κατά την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα από ένα αντιστάτη, επί χρονικό διάστημα t. Η ενέργεια αυτή «καταναλίσκεται» από τον



Σχ. 5.7.

αντιστάτη μετατρέπόμενη σε θερμική ενέργεια, εξ' αιτίας της οποίας αυξάνεται η θερμοκρασία του.

Από τη σχέση (5.32) προκύπτει αμέσως και η **ισχύς** του ηλεκτρικού ρεύματος, ως:

$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I \quad (5.33)$$

Αν ο αντιστάτης είναι ωμικός, τότε από το νόμο του Ohm ($U = I \cdot R$) παίρνομε για την **ενέργεια** του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$W = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t \quad (5.34)$$

και για την **ισχύ** του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (5.35)$$

Όλα τα μεγέθη στις πιο πάνω σχέσεις (5.31) έως (5.35) εκφράζονται με τις γνωστές μονάδες του S.I., δηλαδή:

- Ενέργεια (W) σε Joule (J)
- Ισχύς (P) σε Watt (W)
- Τάση (U) σε Volt (V)
- Ένταση (I) σε Ampere (A)
- Αντίσταση (R) σε Ohm (Ω)
- Χρόνος (t) σε Second (s)

Ας σημειωθεί ότι πολλαπλάσια της μονάδας ηλεκτρικής ενέργειας (J) είναι:

Το βαττώριο: $1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \cdot 3600\text{s} = 3600 \text{ Ws} = 3600 \text{ J}$

Το κιλοβαττώριο: $1\text{kWh} = 10^3 \text{ Wh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

Τέλος επισημαίνεται ότι οι σχέσεις (5.32) και (5.34) δίνουν απευθείας την ηλεκτρική ενέργεια σε W . h, αν ο χρόνος εκφρασθεί σε ώρες (h).

5.8 Χαρακτηριστικά μεγέθη των ηλεκτρικών πηγών.

Στις πολύ απλές περιπτώσεις κυκλωμάτων που έχουμε ως τώρα μελετήσει, θεωρήσαμε ως απαραίτητη προϋπόθεση για τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος σ' ένα κύκλωμα την ύπαρξη διαφοράς δυναμικού. Αυτό ήταν αρκετό για τους θεωρητικούς συλλογισμούς που αναπτύξαμε, στην πράξη όμως αυτή η διαφορά δυναμικού εξασφαλίζεται με την ύπαρξη μιας κατάλληλης ηλεκτρικής πηγής συνεχούς ρεύματος.

Κάθε ηλεκτρική πηγή συνεχούς ρεύματος χαρακτηρίζεται από τα εξής δυο χαρακτηριστικά της μεγέθη:

- Την ηλεκτρεγερτική της δύναμη (ΗΕΔ ή E), και
- την εσωτερική (ωμική) της αντίσταση (r).

Ας δούμε τώρα πώς ορίζονται τα δυο αυτά χαρακτηριστικά μεγέθη μιας πηγής.

Ως ΗΕΔ μιας πηγής ορίζεται η διαφορά δυναμικού στους πόλους της, όταν η πηγή δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Ως εσωτερική αντίσταση μιας πηγής ορίζεται η αντίσταση την οποία η ίδια η πηγή προβάλλει στη δίοδο του ηλεκτρικού ρεύματος.

Είναι φανερό, από τους δυο πιο πάνω ορισμούς, ότι αν βραχυκυκλώσουμε με αγωγό αμελητέας αντιστάσεως τους πόλους μιας πηγής, τότε η πηγή και ο αγωγός, με την οποία βραχυκυκλώνεται, διαρρέονται από ρεύμα εντάσεως:

$$I_{\text{βρ}} = \frac{E}{r} \quad (5.36)$$

που ονομάζεται **ένταση βραχυκυκλώσεως**.

Στο σχήμα 5.8α φαίνεται το ισοδύναμο κύκλωμα μιας πηγής με ανοικτούς τους πόλους της, εφόσον ο διακόπτης Δ είναι ανοικτός, με την οποία σκεφτόμαστε να τροφοδοτήσουμε μια εξωτερική αντίσταση (R). Επισημαίνονται στο σχήμα ο ρόλος της ΗΕΔ (E) και της εσωτερικής αντιστάσεως (r) της πηγής. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε θα ισχύει:

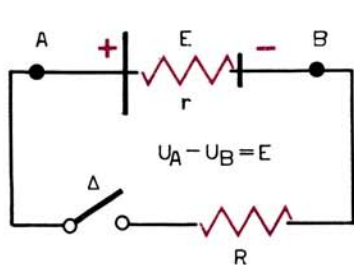
$$U_{AB} = U_A - U_B = HE\Delta = E \quad \text{όταν } I = 0 \quad (5.37)$$

Την ΗΕΔ μιας πηγής μπορούμε να μετρήσουμε αν συνδέσουμε μεταξύ των πόλων της ένα βολτόμετρο πολύ μεγάλης εσωτερικής αντιστάσεως, ώστε να εξασφαλίζουμε ότι η πηγή δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Την ένταση βραχυκυκλώσεως μιας πηγής θα μπορούσαμε να μετρήσουμε συνδέοντας μεταξύ των πόλων της πηγής ένα αμπερόμετρο αμελητέας εσωτερικής αντιστάσεως. Όμως η μέτρηση αυτή είναι πάρα **πολύ επικίνδυνη**, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή τόσο της πηγής όσο και του αμπερομέτρου, και πρέπει να αποφεύγεται. Αντ' αυτής, για τον προσδιορισμό της εσωτερικής αντιστάσεως μιας πηγής, μπορεί να ακολουθείται η μέθοδος που θα αναπτύξουμε στην επόμενη παράγραφο.

5.8.1 Ο νόμος του Ohm σε πλήρες κύκλωμα.

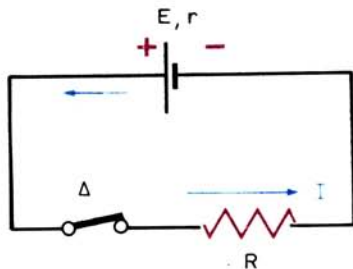
Θα επεκτείνουμε τώρα το νόμο του Ohm που αναπτύξαμε στην περίπτωση ενός ωμικού αντιστάτη, στην περίπτωση ενός πλήρους κυκλώματος που συγκροτείται από πηγή συνεχούς ρεύματος και εξωτερικό ωμικό αντιστάτη, όπως π.χ. συμβαίνει στο κύκλωμα του σχήματος 5.8β. Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ (σχ. 5.8β) η πηγή θα διαρρέεται από ρεύμα I και η τάση στους πόλους της $U_{AB} = U_A - U_B$, που ονομάζεται **πολική τάση**, θα είναι μικρότερη από την ΗΕΔ E, γιατί μέσα στην πηγή προκαλείται μια διαφορά δυναμικού Ir (πτώση τάσεως) που οφείλεται στη διέλευση του ρεύματος. Θα είναι δηλαδή:

$$U_{AB} = U_A - U_B = E - Ir \quad (5.38)$$



Σχ. 5.8α.

Ισοδύναμο κύκλωμα μιας ηλεκτρικής πηγής για την επισήμανση των χαρακτηριστικών μεγεθών της.



Σχ. 5.8β.

Πλήρες κύκλωμα πηγής και τροφοδοτούμενης εξωτερικής αντιστάσεως.

Από τη σχέση (5.38) προκύπτει πράγματι ότι όταν η πηγή δεν διαρρέεται από ρεύμα ($I = 0$) η πολική τάση είναι ίση με την ΗΕΔ της πηγής. [Το ίδιο ισχύει όταν η εσωτερική αντίσταση της πηγής (r) είναι αμελητέα]. Βεβαίως, την πολική τάση μπορούμε να υπολογίζουμε και με τη βοήθεια του νόμου του Ohm για την εξωτερική αντίσταση R , δηλαδή:

$$U_{AB} = U_A - U_B = IR \quad (5.39)$$

Από τις σχέσεις (5.38) και (5.39) προκύπτει:

$$E = IR + Ir \quad (5.40)$$

$$\rightarrow I = \frac{E}{R + r} \quad (5.41)$$

Με τη σχέση (5.41) που εκφράζει το νόμο του Ohm σε κλειστό κύκλωμα, μπορούμε να υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει κλειστό κύκλωμα.

Η σχέση (5.40) μας δείχνει ότι:

Η ΗΕΔ μιας πηγής είναι ίση με το άθροισμα των πτώσεων τάσεων στην εσωτερική αντίσταση της πηγής και στην εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος.

Αν σε σειρά προς την αντίσταση R του σχήματος 5.8β συνδέσουμε ένα αμπερόμετρο αμελητέας εσωτερικής αντιστάσεως, τότε, αν γνωρίζουμε με ακρίβεια την τιμή της αντιστάσεως R , μπορούμε, από τη σχέση (5.40), να υπολογίσουμε την εσωτερική αντίσταση της πηγής ως:

$$r = \frac{E}{I} - R \quad (5.42)$$

Επιλέγοντας «με προσοχή» την τιμή της αντιστάσεως R , μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τη μέτρηση χωρίς να κινδυνεύει από το ρεύμα εντάσεως I ούτε η πηγή, ούτε το αμπερόμετρο. Εάν γνωρίζουμε την ΗΕΔ (E) και την

εσωτερική αντίσταση (r) μιας πηγής, τότε υπολογίζουμε την ένταση βραχυκυκλώσεώς της από τη σχέση (5.36).

5.8.2 Ισχύς ηλεκτρικής πηγής.

Από τη σχέση (5.40) προκύπτει:

$$EI = I^2R + I^2r$$

Αλλά ο προσθετέος I^2R είναι η ισχύς που καταναλώνει η εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος και I^2r είναι η ισχύς που καταναλώνει η εσωτερική αντίσταση της πηγής. Επομένως η πηγή παρέχει συνολικά ισχύ:

$$P = EI \quad (5.43)$$

Η ενέργεια που παρέχει συνολικά η πηγή σε χρονικό διάστημα t θα είναι:

$$W = EIt \quad (5.44)$$

Παράδειγμα 5.8.1.

Όταν ο διακόπτης Δ είναι ανοικτός (σχ. 5.8γ) το βολτόμετρο δείχνει 2,6 V. Όταν είναι κλειστός, το βολτόμετρο δείχνει 1,4 V και το αμπερόμετρο 12 A. Ζητείται η ΗΕΔ και η εσωτερική αντίσταση της πηγής.

α) **Διακόπτης Δ ανοικτός.** Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για την ΗΕΔ θα είναι:

$$\text{Ένδειξη βολτομέτρου} = U_A - U_B = E = 2,6 \text{ V}$$

(Κανονικά $U_A - U_B = E - I' r$ όπου I' το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα ΑΓΔΒΑ:

$$I' = E/r + r_{\text{ΒΟΛΤ}}$$

Αλλά επειδή η $r_{\text{ΒΟΛΤ}}$ είναι πολύ μεγάλη το I' είναι ασήμαντο, γι' αυτό $U_A - U_B = E$).

$$\text{β) Διακόπτης } \Delta \text{ κλειστός. } U_A - U_B = E - Ir \rightarrow$$

$$r = \frac{E - U_{AB}}{I} = \frac{2,6 - 1,4}{12} = 0,1 \text{ } \Omega$$

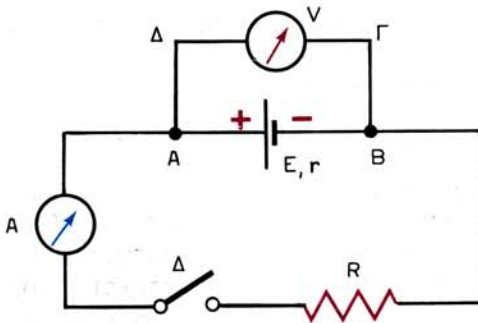
Παράδειγμα 5.8.2.

Σύρμα διατομής $S = 2 \text{ mm}^2$ συνδέεται με τους πόλους πηγής ΗΕΔ 6 V και εσωτ. αντιστάσεως 0,4 Ω (σχ. 5.8δ). Η τάση στα άκρα του είναι 5 V. Ζητούνται:

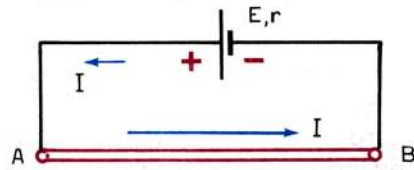
1) Το ρεύμα που το διαρρέει. 2) Το μήκος του l . 3) Η δαπάνη για την ωριαία λειτουργία, αν το 1 kWh κοστίζει 10 δρχ. ($\rho = 5 \cdot 10^{-7} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$).

$$1) U_{AB} = E - Ir \rightarrow I = \frac{E - U_{AB}}{r} = \frac{6 - 5}{0,4} = 2,5 \text{ A}$$

$$2) R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{5}{2,5} = 2 \text{ } \Omega \quad \text{οπότε}$$



Σχ. 5.8γ.



Σχ. 5.8δ.

$$R_{AB} = \rho \frac{l}{S} \rightarrow l = \frac{R_{AB} S}{\rho} = \frac{2 \cdot 2 \cdot (10^{-3})^2}{5 \cdot 10^{-7}} \frac{\Omega \cdot \text{m}^2}{\Omega \cdot \text{m}}$$

$$\rightarrow l = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-7}} \text{m} = 8 \text{m}$$

$$3) W = E \cdot I \cdot t = 6 \cdot 2,5 \cdot 1 \text{ Wh} = 0,015 \text{ kWh}$$

Δαπάνη: $0,015 \cdot 10 = 0,15$ δρχ.

5.9 Συνδεσμολογία αντιστάσεων.

Στις παραγράφους που προηγήθηκαν γνωρίσαμε ότι με τη βοήθεια του νόμου του Ohm μπορούμε να υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος σε πολύ απλά κυκλώματα. Στο κεφάλαιο 7 που ακολουθεί, θα αναπτύξουμε νόμους και θεωρήματα που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εντάσεων – δηλαδή την επίλυση – συνθετοτέρων ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Πολλές όμως φορές η επίλυση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος γίνεται πολύ εύκολα, αν μπορέσουμε να απλοποιήσουμε το κύκλωμα αντικαθιστώντας ομάδες αντιστάσεων από μια ισοδύναμη αντίσταση. Αυτό θα γνωρίσουμε στην παράγραφο αυτή.

Ονομάζουμε **ισοδύναμη (ή ολική) αντίσταση** μιας συνδεσμολογίας αντιστάσεων που βρίσκονται μεταξύ δυο σημείων κυκλώματος A και B, την αντίσταση εκείνη, η οποία, αν συνδεθεί στα σημεία A και B του κυκλώματος, θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα ίσο με το ολικό ρεύμα που διαρρέει τη συνδεσμολογία.

Σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε:

$$R_{ολ} = \frac{U_{AB}}{I_{ολ}} \quad (5.45)$$

όπου: U_{AB} η τάση στα άκρα της συνδεσμολογίας και
 $I_{ολ}$ η ολική ένταση του ρεύματος που τη διαρρέει.

Θα υπολογίσουμε τώρα την ισοδύναμη αντίσταση σε δυο χαρακτηριστικές

συνδεσμολογίες αντιστάσεων, σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό. Τέλος, θα υποδείξουμε τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βρούμε την ισοδύναμη αντίσταση μιας οποιαδήποτε συνδεσμολογίας αντιστάσεων.

5.9.1 Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά.

Δυο ή περισσότερες αντιστάσεις θεωρούνται συνδεδεμένες σε σειρά, αν κάθε μια από αυτές συνδέεται με το πέρασ της προηγούμενης της και την αρχή της επόμενης της (σχ. 5.9α). Αποτέλεσμα της συνδεσμολογίας αυτής είναι η ένταση του ρεύματος που εξέρχεται από μια αντίσταση να εισέρχεται στην αμέσως επόμενη της, άρα η ένταση είναι η ίδια για όλες τις αντιστάσεις.

Αν το σύνολο των αντιστάσεων τίθεται υπό τάση U_{AB} , τότε λόγω της εντάσεως I που διαρρέει την κάθε αντίσταση, οποιαδήποτε από τις αντιστάσεις, π.χ. η R_i , βρίσκεται υπό τάση:

$$U_i = I \cdot R_i$$

Ισχύει όμως:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \dots + U_i + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_i + \dots + IR_n$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ισοδύναμης αντίστασης (σχέση 5.45), θα έχουμε:

$$R_{ολ} = \frac{U_{AB}}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_n \quad (5.46)$$

ή

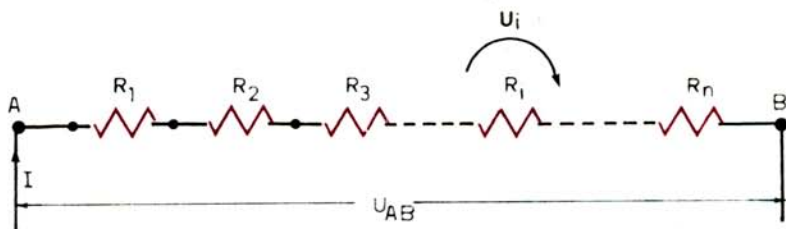
$$R_{ολ} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5.47)$$

Αν οι n αντιστάσεις είναι μεταξύ τους ίσες, δηλαδή:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_i = \dots = R_n$$

η σχέση (5.47) γίνεται:

$$R_{ολ} = nR \quad (5.48)$$



Σχ. 5.9α.

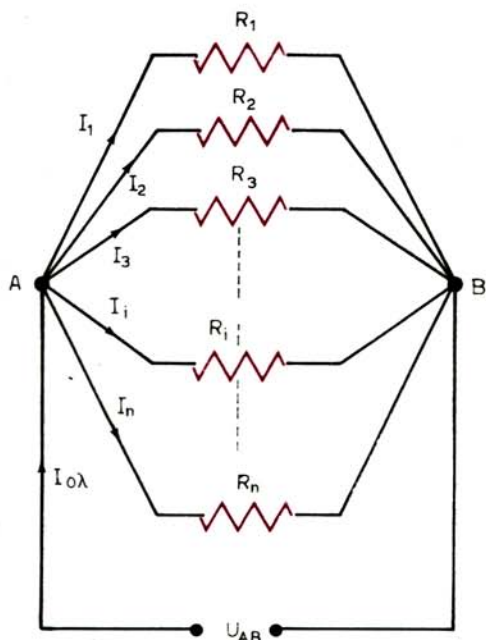
Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά.

5.9.2 Παράλληλη συνδεσμολογία αντιστάσεων.

Δυο ή περισσότερες αντιστάσεις θεωρούνται συνδεμένες παράλληλα, όταν το ένα άκρο όλων των αντιστάσεων συνδέεται σε ένα κοινό κόμβο Α, το δε άλλο σε έναν άλλο κοινό κόμβο Β (σχ. 5.96), με αποτέλεσμα όλες οι αντιστάσεις να βρίσκονται υπό την αυτή τάση.

Εάν είναι I_i η ένταση ρεύματος που διαρρέει την τυχούσα αντίσταση R_i , τότε θα ισχύει:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_i} \quad (5.49)$$



Σχ. 5.96.

Παράλληλη συνδεσμολογία αντιστάσεων.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στον κόμβο Α: Εκεί προσέρχεται ρεύμα εντάσεως $I_{ολ}$, ενώ αναχωρούν – για να τροφοδοτήσουν τις n αντιστάσεις – ρεύματα εντάσεως $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_n$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την αρχή της διατηρήσεως των ηλεκτρικών φορτίων και δοθέντος ότι στον κόμβο Α δεν υπάρχουν ούτε πηγές ούτε καταναλώσεις ηλεκτρικής ενέργειας, θα πρέπει το φορτίο το οποίο φθάνει στον κόμβο Α, σε κάποιο χρονικό διάστημα, να είναι ίσο με το φορτίο που αναχωρεί από τον κόμβο Α, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Ο συλλογισμός αυτός* μας επιτρέπει να γράψομε για την ένταση του

* Ο συλλογισμός αυτός, καθώς και η σχέση (5.50), αποτελούν τον πρώτο, από δυο θεμελιώδεις κανόνες για την επίλυση των ηλεκτρικών δικτύων: τους κανόνες του Kirchhoff. Με τους κανόνες αυτούς θα ασχοληθούμε διεξοδικά στο 7ο κεφάλαιο.

ρεύματος που φθάνει στον κόμβο A:

$$I_{o\lambda} = I_1 + I_2 + \dots + I_i + \dots + I_n = \sum_1^n I_i \quad (5.50)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.49) και (5.50) παίρνουμε:

$$I_{o\lambda} = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \dots + \frac{U_{AB}}{R_i} + \dots + \frac{U_{AB}}{R_n} = U_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

ή

$$I_{o\lambda} = U_{AB} \sum_1^n \frac{1}{R_i} \quad (5.51)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ισοδύναμης αντιστάσεως (σχέση 5.45), θα έχουμε:

$$I_{o\lambda} = \frac{U_{AB}}{R_{o\lambda}} \quad (5.52)$$

Από τις σχέσεις (5.51) και (5.52) παίρνουμε:

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (5.53)$$

ή

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (5.54)$$

Για τις αντίστοιχες αγωγιμότητες, με βάση τη σχέση (5.53) έχουμε:

$$G_{o\lambda} = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i \quad (5.55)$$

Αν $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ η (5.53) δίνει:

$$R_{o\lambda} = \frac{R}{n} \quad (5.56)$$

Ειδικά για δυο αντιστάσεις που είναι συνδεδεμένες παράλληλα (σχ. 5.9γ), θα έχουμε:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.57)$$

και εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η $R_{1,2}$ είναι μικρότερη από τη μικρότερη απ' αυτές.

Η διάταξη αυτή των δυο ή περισσότερων αντιστάσεων, που συνδέονται παράλληλα, ονομάζεται και **διαιρέτης ρεύματος**.

Όπως παρατηρούμε (σχ. 5.9γ) το ρεύμα I της πηγής διαιρείται σε δυο ρεύματα I_1 και I_2 . Τα ρεύματα αυτά υπολογίζονται ως εξής:

$$U_{AB} = U = I_1 R_1 = I R_{1,2} \quad (5.58)$$

και
$$U_{AB} = U = I_2 R_2 = I R_{1,2} \quad (5.59)$$

Από τις σχέσεις (5.57), (5.58) και (5.59) παίρνουμε:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.60) \quad \text{και} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (5.61)$$

Η λειτουργία του διαιρέτη ρεύματος για την ειδική αυτή περίπτωση δυο μόνο κλάδων παράλληλων αντιστάσεων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Το ρεύμα του κλάδου που εξετάζουμε είναι ανάλογο με την αντίσταση του άλλου κλάδου.

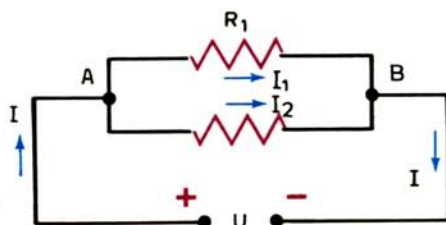
Αν θέλουμε να γενικεύσουμε για n παράλληλους κλάδους εισάγουμε τις αγωγιμότητες και εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$I_1 = I \frac{G_1}{G_{\text{ολ}}}, \quad I_2 = I \frac{G_2}{G_{\text{ολ}}}, \dots, \quad I_n = I \frac{G_n}{G_{\text{ολ}}} \quad (5.62)$$

Δηλαδή: Τα διακλαδιζόμενα ρεύματα σε διάφορες παράλληλες αντιστάσεις είναι ανάλογα με τις αντίστοιχες αγωγιμότητες.

5.9.3 Μικτή συνδεσμολογία.

Κάθε συνδεσμολογία αντιστάσεων που δεν εμπίπτει σε μια από τις δυο κατηγορίες που ήδη εξετάσαμε, θεωρείται ως «μικτή συνδεσμολογία». Κάθε μικτή συνδεσμολογία μπορεί να αναλυθεί σε ένα πλήθος επί μέρους συνδεσμολογιών σε σειρά και παράλληλες. Έτσι, δεν είναι δυνατό να δώσουμε σχέσεις για μικτές συνδεσμολογίες, θα τις αντιμετωπίσουμε όμως κατά περίπτω-



Σχ. 5.9γ.

Αντιστάσεις που έχουν συνδεθεί παράλληλα.

ση. Ας δούμε π.χ. πώς θα υπολογίσουμε την ολική αντίσταση στην περίπτωση της συνδεσμολογίας του σχήματος 5.9δ.

Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα. Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ συνδέεται σε σειρά με την R_3 . Επομένως:

$$R_{ολ} = R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

Παράδειγμα 5.9.1.

Δίνεται η συνδεσμολογία του σχήματος 5.9ε. Να υπολογισθεί η ισοδύναμη αντίσταση και τα ρεύματα που διαρρέουν τους διάφορους κλάδους.

Είναι:

$$U_A - U_\Gamma = \int R_{A\Gamma} = 0 \text{ (γιατί } R_{A\Gamma} = 0 \text{)}$$

Άρα:

$$U_A = U_\Gamma \quad (1)$$

Για τον ίδιο λόγο είναι:

$$U_B = U_\Delta \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$U_A - U_B = U_\Gamma - U_\Delta = U_\Gamma - U_B = U_A - U_\Delta = U$$

Δηλαδή οι αντιστάσεις συνδέονται παράλληλα γιατί στα άκρα τους επικρατεί η ίδια τάση U .

Αν R η κοινή τιμή των τριών αντιστάσεων θα είναι:

$$R_{1,2,3} = \frac{R}{3} = 1 \Omega \quad \text{και} \quad I = \frac{U}{R_{1,2,3}} = 9 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U}{R} = 3 \text{ A}$$

$$I' = I_2 + I_3 = 6 \text{ A}, \quad I_1 + I_2 = I'' = 6 \text{ A}$$

Παράδειγμα 5.9.2.

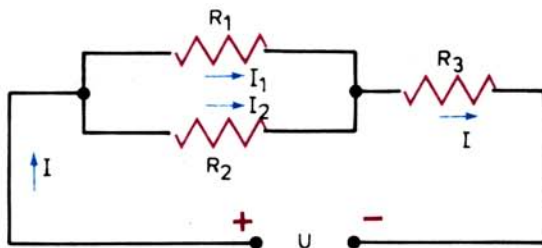
Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} της συνδεσμολογίας του σχήματος 5.9στ.

Οι αντιστάσεις R_1 και R_3 συνδέονται παράλληλα γιατί έχουν κοινά τα άκρα τους K και A . ($A \equiv \Gamma \equiv \Delta$ γιατί ο αγωγός $A\Gamma\Delta$ έχει αμελητέα αντίσταση). Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,3}$ είναι:

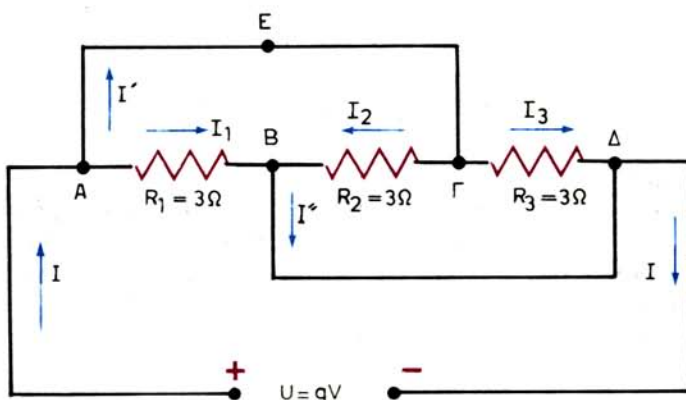
$$R_{1,3} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 2 \Omega$$

Οι αντιστάσεις $R_{1,3}$ και R_2 συνδέονται σε σειρά. Άρα:

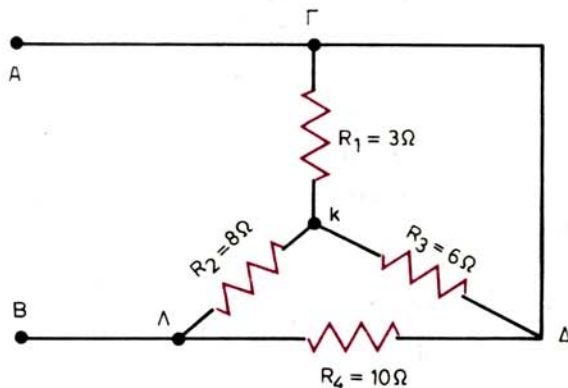
$$R_{1,3,2} = R_{1,3} + R_2 = 2 + 8 = 10 \Omega$$



Σχ. 5.9δ.
Μικτή συνδεσμολογία αντιστάσεων.



Σχ. 5.9ε.



Σχ. 5.9στ.

Οι αντιστάσεις $R_{1,3,2}$ και R_4 συνδέονται παράλληλα γιατί $(B \equiv A)$ έχουν κοινά τα άκρα τους A και B. Άρα:

$$R_{AB} = R_{1,3,2,4} = \frac{10}{2} = 5 \Omega$$

Παράδειγμα 5.9.3.

Να υπολογισθεί η αντίσταση R που πρέπει να συνδεθεί στα σημεία Γ και Δ της συνδεσμολογίας του σχήματος 5.9ζ, ώστε να ισχύει: $R_{AB} = R$.

Είναι:

$$R_{AB} = R_1 + R_{EZ} \quad (1)$$

$$R_{EZ} = \frac{R_2(R_3+R)}{R_2+R_3+R}, \quad R_{AB} = R, \quad R_3 = R_1$$

οπότε η (1) γίνεται:

$$R = R_1 + \frac{R_2(R_1+R)}{R_2+R_1+R} = \frac{R_1R_2+R_1^2+RR_1+R_1R_2+RR_2}{R_1+R+R_2}$$

$$\rightarrow RR_1+R^2+RR_2 = R_1R_2+R_1^2+RR_1+R_1R_2+RR_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow R^2 = R_1R_2+R_1^2+R_1R_2 \rightarrow R = \sqrt{R_1^2+2R_1R_2}$$

Παράδειγμα 5.9.4.

Στη συνδεσμολογία του σχήματος 5.9η όλοι οι αντιστάτες έχουν την ίδια αντίσταση $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$. Αν η ένδειξη του βολτομέτρου είναι 12 V και του αμπερομέτρου 5 A να βρεθεί η αντίσταση R των αντιστατών καθώς και το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντιστάτη.

Η ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας είναι:

$$R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{12}{5} = 2,4 \Omega$$

Είναι:
$$R_{1,2} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

$$R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_3 = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$$

$$R_{AB} = R_{1,2,3,4} = \frac{R_{1,2,3}R_4}{R_{1,2,3}+R_4} = \frac{3R^2/2}{3R/2+R} = \frac{3R}{5}$$

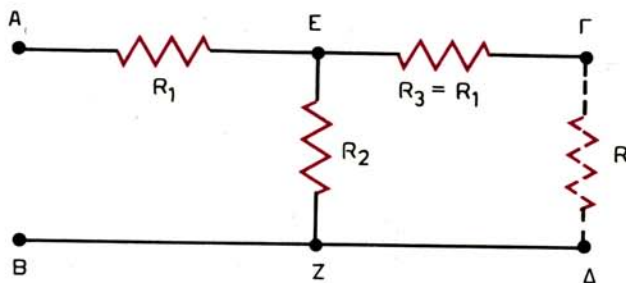
$$R_{AB} = \frac{3R}{5} = \frac{12}{5} \rightarrow R = 4 \Omega$$

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A} \text{ οπότε } I_3 = I - I_4 = 2 \text{ A}$$

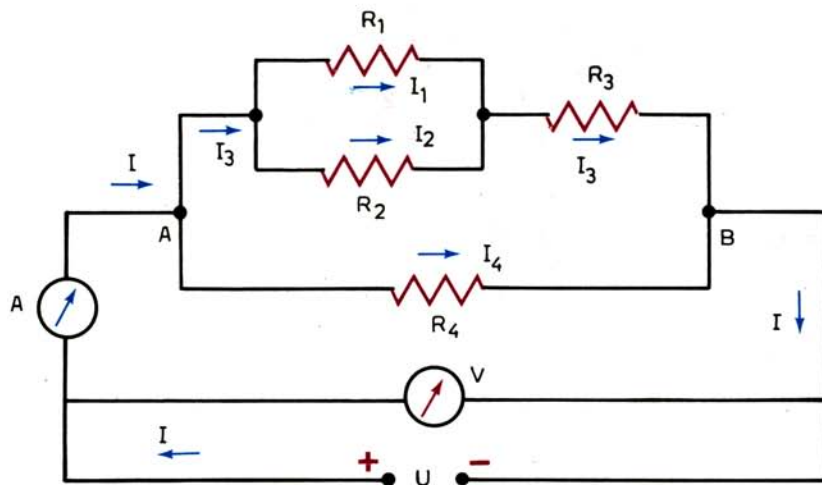
και $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$

Παράδειγμα 5.9.5.

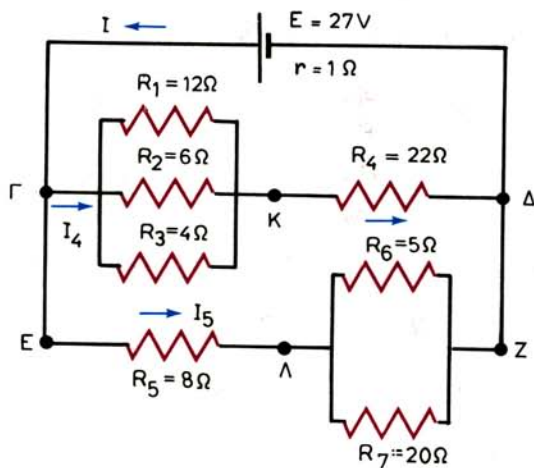
Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 5.9θ. Ζητούνται: 1) Η ισοδύναμη αντίσταση. 2) Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή. 3) Η ισχύς των αντιστατών R_1 και R_6 . 4) Η δαπάνη για τη δεκάωρη λειτουργία του κυκλώματος αν το 1 kWh κοστίζει 10 δρχ.



Σχ. 5.9ζ.



Σχ. 5.9η.



Σχ. 5.9θ.

$$1) \quad \frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \rightarrow R_{1,2,3} = 2 \Omega$$

$$R_{\Gamma\Delta} = R_{1,2,3} + R_4 = 24 \Omega$$

$$R_{6,7} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \Omega$$

$$R_{EZ} = R_5 + R_{6,7} = 12 \Omega$$

$$\text{Άρα} \quad R = \frac{R_{\Gamma\Delta} R_{EZ}}{R_{\Gamma\Delta} + R_{EZ}} = \frac{24 \cdot 12}{24 + 12} \rightarrow R = 8 \Omega$$

$$2) \quad I = \frac{E}{R + r} = \frac{27}{8 + 1} \rightarrow I = 3 \text{ A}$$

3) Η πολική τάση της πηγής είναι:

$$U = E - Ir = 27 - 3 \cdot 1 = 24 \text{ V}$$

$$\text{Άρα} \quad U_{\Gamma\Delta} = U_{EZ} = U = 24 \text{ V} \quad \text{οπότε}$$

$$I_{\Gamma\Delta} = I_4 = \frac{U_{\Gamma\Delta}}{R_{\Gamma\Delta}} = \frac{24}{24} = 1 \text{ A} \quad \text{και}$$

$$I_{EZ} = I_5 = \frac{U_{EZ}}{R_{EZ}} = \frac{24}{12} = 2 \text{ A}$$

$$U_{\Gamma\kappa} = I_4 R_{1,2,3} = 2 \text{ V}, \quad U_{\Lambda Z} = I_5 R_{6,7} = 8 \text{ V}$$

$$\text{Άρα} \quad P_{R_1} = \frac{U_{\Gamma\kappa}^2}{R_1} = \frac{4}{12} = 0,33 \text{ W}$$

$$\text{και} \quad P_{R_6} = \frac{U_{\Lambda Z}^2}{R_6} = \frac{64}{5} = 12,8 \text{ W}$$

4) Η ενέργεια που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα είναι:

$$W = EIt = 27 \cdot 3 \cdot 10 \text{ Wh} \rightarrow$$

$$W = 0,810 \text{ kWh}$$

Επομένως η δαπάνη θα είναι:

$$\text{Δαπάνη} = 0,810 \cdot 10 = 8,10 \text{ δρχ.}$$

5.10 Βιομηχανική κατασκευή αντιστάτων – Κώδικας χρωμάτων.

Η βιομηχανία κατασκευάζει αντιστάτες διαφόρων τύπων για ποικίλες χρήσεις.

Οι αντιστάτες σύρματος κατασκευάζονται από μεταλλικά κράματα με σχετικά μεγάλη ειδική αντίσταση, όπως π.χ. η χρωμονικελίνη (80% Ni, 20% Cr). Το σύρμα τυλίγεται πάνω σε σωλήνα από κατάλληλο μονωτικό υλικό. Η όλη κατασκευή προστατεύεται συχνά με επίστρωση εμαγιέ, βερνικιού ή άλλου μονωτικού υλικού.

Οι αντιστάτες άνθρακα κατασκευάζονται αν αναμίξομε σκόνη γραφίτη με ένα αδρανές υλικό, π.χ. τσιμέντο. Με το ημιαγωγό αυτό μίγμα γίνεται μια λεπτή επάλειψη σ' ένα μικρό μονωτικό σωλήνα από πορσελάνη, κεραμεικό ή άλλο υλικό. Το μίγμα προστατεύεται εξωτερικά με επάλειψη από εμαγιέ ή βερνίκι.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία ενός αντιστάτη είναι η **αντίστασή** του (σε Ohm) και η **μέγιστη ισχύς του** (σε Watt). Η μέγιστη ισχύς είναι η μεγαλύτερη ισχύς που μπορεί να αναπτυχθεί στον αντιστάτη χωρίς να προκαλέσει την καταστροφή του.

Η ισχύς των αντιστάτων σύρματος υπερβαίνει τα 1000 W και είναι ανάλογη με το φυσικό μέγεθος του αντιστάτη.

Η ισχύς των αντιστάτων άνθρακα φτάνει μέχρι τα 2 W. Σε ορισμένους τύπους αντιστάτων χρησιμοποιείται αντί για επίστρωση μίγματος γραφίτη μια λεπτή μεταλλική επίστρωση. Κατασκευάζονται επίσης αντιστάτες από νήμα άνθρακα τυλιγμένο σε κατάλληλο πυρήνα (ισχύος μέχρι 5 W και αντιστάσεως μέχρι 100 kΩ).

Η αντίσταση αναγράφεται στον αντιστάτη με ένα αριθμό ή συμβολικά με διάφορους χρωματισμούς. Ο κώδικας χρωμάτων είναι ο ακόλουθος:

Κώδικας χρωμάτων αντιστάτων

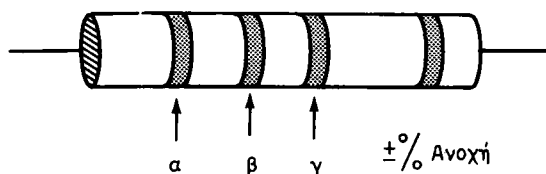
Μαύρο	0	Μπλε	6
Καφέ	1	Μωβ	7
Ερυθρό	2	Γκρι	8
Πορτοκαλί	3	Λευκό	9
Κίτρινο	4	Χρυσάφι	5%
Πράσινο	5	Ασημί	10%

Στους αντιστάτες άνθρακα (σχ. 5.10) τοποθετούνται συνήθως 4 λωρίδες από τα παραπάνω χρώματα. Τα χρώματα των τριών πρώτων λωρίδων δίνουν την αντίσταση (σε Ohm) και το χρώμα της τέταρτης δίνει την ανοχή (επί τοις εκατό) με την οποία δίνεται η τιμή της αντιστάσεως.

Τα δυο πρώτα χρώματα α,β δίνουν τα δυο πρώτα ψηφία της αντιστάσεως και το τρίτο γ δίνει τον αριθμό των μηδενικών που θα προσθέσομε στα δυο πρώτα ψηφία. Π.χ. αν $\gamma = 2$ η αντίσταση θα είναι:

$$a\beta 00 = a\beta \cdot 10^2 \Omega$$

Το τρίτο γράμμα γ μπορεί να αντιπροσωπεύει και αρνητικό εκθέτη της



Σχ. 5.10.

Αντιστάτης άνθρακα. Όσο πιο μεγάλη είναι η ισχύς που καταναλώνεται τόσο μεγαλύτερη κατασκευάζουμε την εξωτερική επιφάνεια των αντιστάτων, η οποία αποδίδει θερμότητα, ώστε η θερμοκρασία να παραμένει σε χαμηλά επίπεδα.

δυνάμεως του 10 στην περίπτωση που η αντίσταση είναι μικρότερη από 10 Ω. Αν το γ είναι χρυσαφί τότε $\gamma = 10^{-1}$ και αν είναι ασημί $\gamma = 10^{-2}$.

Τέλος αν το χρώμα της τέταρτης λωρίδας είναι χρυσαφί η ανοχή είναι $\pm 5\%$ και αν είναι ασημί $\pm 10\%$. Οι αντιστάτες άνθρακα χρησιμοποιούνται πολύ στις συσκευές ραδιοφωνικής λήψεως.

5.11 Ροοστάτες και ποτενσιόμετρα.

Ρυθμιστικές αντιστάσεις ονομάζουμε τις αντιστάσεις που η κατασκευή τους είναι τέτοια, ώστε να μπορούμε να μεταβάλλουμε την τιμή τους.

Οι ρυθμιστικές αντιστάσεις χρησιμοποιούνται για δυο κυρίως σκοπούς σ' ένα κύκλωμα:

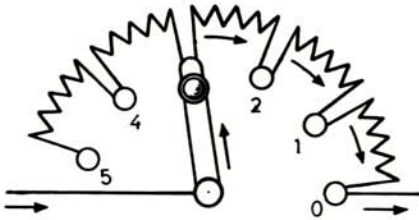
- Για να μπορούμε να μεταβάλλουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα κλάδο του κυκλώματος. Στην περίπτωση αυτή ονομάζονται **ροοστάτες**.
- Για να μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση στα άκρα ενός καταναλωτή. Στην περίπτωση αυτή ονομάζονται **ποτενσιόμετρα**.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι ρυθμιστικών αντιστάσεων. Το σχήμα 5.11α δείχνει έναν τύπο που χρησιμοποιείται πολύ στις ραδιοφωνικές συσκευές. Ο δρομέας περιστρέφεται γύρω από άξονα και ανάλογα με τη φορά περιστροφής αυξάνεται ή ελαττώνεται η αντίσταση.

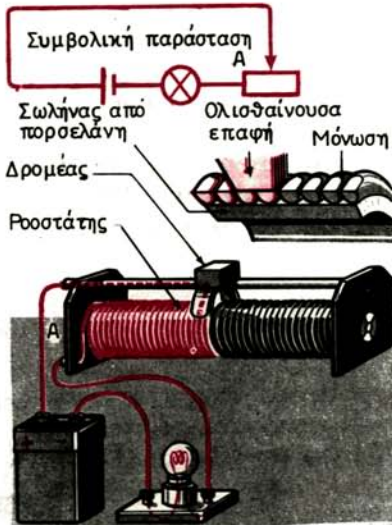
Το σχήμα 5.11β δείχνει ένα **ροοστάτη** με δρομέα, ενώ το σχήμα 5.11γ δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμά του. Από το σχήμα αυτό φαίνεται και η λειτουργία του ροοστάτη ως συσκευής ρυθμίσεως της εντάσεως.

Ο ροοστάτης με δρομέα κατασκευάζεται από σύρμα που τυλίγεται γύρω από μονωτικό σωλήνα. Οι ακροδέκτες Α και Β αποτελούν τα άκρα του τυλιγμένου σύρματος. Έχει επίσης ένα ακροδέκτη στο δρομέα Δ και ένα ακροδέκτη στο άκρο Γ του στελέχους που κινείται ο δρομέας. Όταν μετακινείται ο δρομέας Δ (σχ. 5.11γ) μεταβάλλεται η αντίσταση $R_{\Delta\Gamma}$ με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος I που διαρρέει το κύκλωμα. Όπως απλά προκύπτει η ένταση αυτή ισούται:

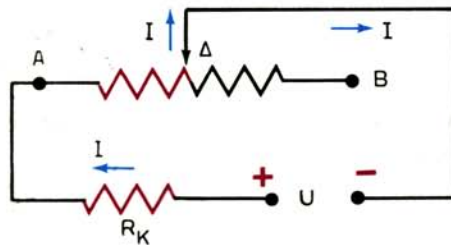
$$I = \frac{U}{R_K + R_{\Delta\Gamma}} \quad (5.63)$$



Σχ. 5.11α.
Ρυθμιστική αντίσταση με μεταγωγό διακόπτη.



Σχ. 5.11β.
Ροοστάτης με δρομέα.



Σχ. 5.11γ.
Κύκλωμα ροοστάτη.

όπου: $R_{A\Delta}$ η αντίσταση του τμήματος του ροοστάτη που διαρρέεται από ρεύμα και

R_K η υπόλοιπη - εκτός του ροοστάτη - αντίσταση του κυκλώματος.

Στο σχήμα 5.11δ φαίνεται το ισοδύναμο κύκλωμα ενός **ποτενσιομέτρου**. Από το σχήμα προκύπτει και η ερμηνεία της λειτουργίας του ως συσκευής ρύθμισης της τάσεως της αντιστάσεως - καταναλώσεως R_K .

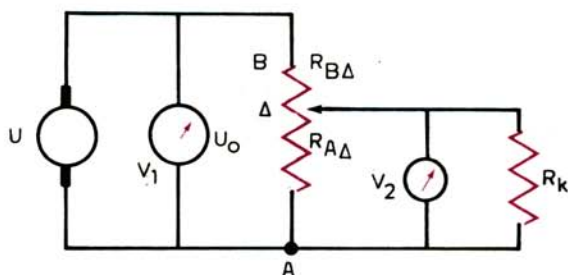
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.11δ, η κατανάλωση R_K τροφοδοτείται από τον ένα πόλο της πηγής τροφοδοσίας (U_0) και από την επαφή του κινητού δρομέα Δ του ποτενσιομέτρου.

Αν λοιπόν μετακινούμε το δρομέα θα μεταβάλλεται η $(A\Delta)$ με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται και η τάση $U_{A\Delta}$. Έτσι:

$$\text{Αν } (A\Delta) = 0 \rightarrow U_{A\Delta} = 0$$

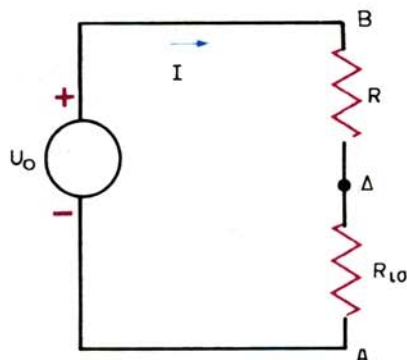
$$\text{Αν } (A\Delta) = (AB) \rightarrow U_{A\Delta} = U_0$$

Στις ενδιάμεσες θέσεις του δρομέα η τάση $U_K = U_{A\Delta}$, με την οποία



Σχ. 5.11δ.

Ισοδύναμο κύκλωμα ποτενσιομέτρου.



Σχ. 5.11ε.

Μετασχηματισμένο κύκλωμα ποτενσιομέτρου.

τροφοδοτείται ο καταναλωτής U_K , προκύπτει απλά, αν μετασχηματίσουμε το κύκλωμα του ποτενσιομέτρου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11ε. Εκεί η αντίσταση $R_{ισ}$ είναι η ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας παραλλήλων αντιστάσεων $R_{AΔ}$ και R_K , δηλαδή:

$$R_{ισ} = \frac{R_{AΔ} R_K}{R_K + R_{AΔ}} \quad (5.64)$$

Η ένταση I στο μετασχηματισμένο αυτό κύκλωμα, δίνεται από τις προφανείς σχέσεις:

$$I = \frac{U_0}{R_{ισ} + R_{BΔ}} \quad (5.65)$$

και

$$I = \frac{U_{AΔ}}{R_{ισ}} \quad (5.66)$$

Εξισώνοντας τις (5.65) και (5.66) παίρνουμε:

$$\frac{U_{AΔ}}{R_{ισ}} = \frac{U_0}{R_{ισ} + R_{BΔ}}$$

ή

$$\frac{U_K}{U_0} = \frac{R_{ισ}}{R_{ισ} + R_{BΔ}} \quad (5.67)$$

Αν είναι R_0 η ολική αντίσταση του ποτενσιομέτρου, δηλαδή

$$R_0 = R_{AΔ} + R_{BΔ}$$

τότε συνδυάζοντας τις (5.64) και (5.67) καταλήγουμε στην:

$$\frac{U_K}{U_0} = \frac{R_{AΔ} R_K}{R_K R_0 + R_{AΔ} R_0 - R_{AΔ}^2} \quad (5.68)$$

Από την (5.68) επαληθεύουμε ότι ισχύει:

Αν $(A\Delta) = 0$, δηλ. $R_{A\Delta} = 0$, $U_{A\Delta} = U_K = 0$

Αν $(A\Delta) = (AB)$, δηλ. $R_{A\Delta} = R_o$, $U_{A\Delta} = U_K = U_o$

Δηλαδή η $U_{A\Delta}$ μπορεί να μεταβάλλεται από 0 μέχρι U_o .

Στο σχήμα 5.11δ το βολτόμετρο V_1 μετρά την τάση της πηγής και το βολτόμετρο V_2 τη ρυθμιζόμενη με το ποτενσιόμετρο τάση που επικρατεί στα άκρα της αντιστάσεως R_K (U_K).

Παράδειγμα 5.11.1.

Διατίθεται πηγή $U_o = 220 \text{ V}$ και μεταβλητή αντίσταση $R_o = 100 \Omega$ χρησιμοποιούμενη ως ποτενσιόμετρο για την τροφοδότηση αντιστάσεως $R = 20 \Omega$. Ζητούνται:

α) Να διατυπωθεί η συνάρτηση της τάσεως τροφοδοτήσεως του καταναλωτή (U_K) σε συνάρτηση με το λόγο l/L , όπου l το μήκος του τμήματος της αντιστάσεως του ποτενσιομέτρου που συνδέεται παράλληλα προς τον καταναλωτή R , και L το συνολικό μήκος του.

β) Να βρεθεί η τιμή του μήκους l , ως ποσοστού του συνολικού μήκους του ποτενσιομέτρου, αν θέλουμε να τροφοδοτήσουμε τον καταναλωτή με τάση 99 V .

α) Από τη σχέση (5.68) παίρνουμε:

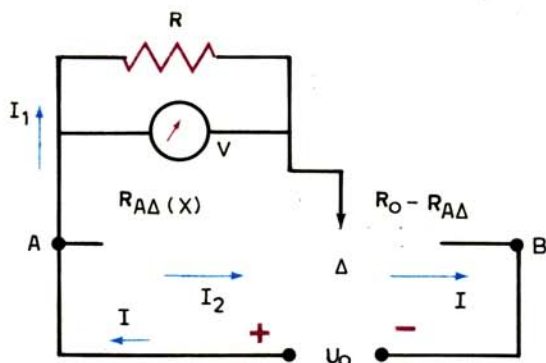
$$\frac{U_K}{U_o} = \frac{R_{A\Delta} R_K}{R_K R_o + R_{A\Delta} R_o - R_{A\Delta}^2} \quad (1)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, αν R_l είναι η αντίσταση του ποτενσιομέτρου, ανά μονάδα μήκους της, τότε θα έχουμε:

$$R_{A\Delta} = lR_l \text{ και } R_o = LR_l$$

οπότε

$$\frac{R_{A\Delta}}{R_o} = \frac{l}{L} = x \quad (2)$$



Σχ. 5.11στ.

Έτσι, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{U_K}{U_o} = \frac{\frac{R_{\Lambda\Delta} R_K}{R_o}}{\frac{R_K R_o}{R_o} + \frac{R_{\Lambda\Delta} R_o}{R_o} - \frac{R_{\Lambda\Delta}^2}{R_o^2}} = \frac{x R_K}{R_K + xR_o - x^2R_o} = \frac{xR_K}{R_K + xR_o(1-x)} \quad (3)$$

Με αριθμητική αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$U_K = 220 \frac{x \cdot 20}{20 + 100x(1-x)} = 220 \frac{x}{1 + 5x(1-x)} \quad (4)$$

β) Έχουμε $U_K = 100 \text{ V}$, άρα από τη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\frac{x}{1 + 5x(1-x)} = \frac{99}{220} = 0,45$$

ή την $2,25 x^2 - 1,25 x - 0,45 = 0$

Μοναδική θετική ρίζα της οποίας είναι η $x = 0,804$, άρα, $I = 0,804 \text{ L}$.

Αυτό σημαίνει ότι ο δρομέας θα πρέπει να έχει κινηθεί κατά το 80,4% του ολικού του μήκους, ώστε ο καταναλωτής να τροφοδοτείται με τάση 99 V.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΘΕΡΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ JOULE – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

6.1 Θερμικός νόμος του Joule.

Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 5.7, κατά τη διόδο ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από ένα αντιστάτη, αποδίδεται στον αντιστάτη ηλεκτρική ενέργεια, η οποία τελικά μετατρέπεται ολόκληρη σε θερμική ενέργεια (θερμότητα). Το φαινόμενο αυτό πειραματικά διαπιστώθηκε από τον Άγγλο φυσικό J.P. Joule*, και προς τιμήν του ονομάστηκε **φαινόμενο Joule**. Αντίστοιχα, η θερμότητα που εκλύεται ονομάζεται **θερμότητα Joule**.

Έτσι, σύμφωνα με το **νόμο του Joule** μπορούμε να γράψουμε ότι η θερμική ενέργεια Q που εκλύεται σ' ένα αντιστάτη, όταν αυτός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, θα είναι:

$$Q = W \quad (6.1)$$

όπου: W η ηλεκτρική ενέργεια που αποδίδεται στον αντιστάτη (J) και
 Q η θερμική ενέργεια που εκλύεται στον αντιστάτη (J).

Εάν ο αντιστάτης είναι ωμικός με αντίσταση R , τότε από τις σχέσεις (6.1) και (5.34) παίρνουμε:

$$Q = I^2 R t \quad (6.2)$$

Η σχέση αυτή δίνει τη θερμότητα που εκλύεται σ' ένα ωμικό αντιστάτη (R), όταν διαρρέεται επί χρονικό διάστημα t από ρεύμα εντάσεως I . Εξυπακούεται ότι η πιο πάνω σχέση (6.2) ισχύει μόνο αν οι μονάδες των διαφόρων μεγεθών διατυπωθούν με βάση το σύστημα S.I., δηλαδή:

Q : σε Joule (J), I : σε Ampere (A), R : σε Ohm (Ω), t : σε second (s).

Αν θέλουμε να εκφράσουμε τη θερμότητα Q σε θερμίδες (cal), τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$Q = \alpha W = 0,24 I^2 R t \quad (6.3)$$

όπου $\alpha = 0,24 \text{ cal/J}$ το **ηλεκτρικό ισοδύναμο της θερμότητας**.

*J.P. Joule, 1818-1889.

Ας υπενθυμίσουμε ότι μεταξύ των διαφόρων μονάδων ενέργειας υπάρχει η σχέση:

$$1\text{kWh} = 860 \text{ kcal} = 3600 \text{ kJ}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μονάδα 1 kcal έχει καταργηθεί ή τείνει να καταργηθεί σε όλες σχεδόν τις χώρες. Ακόμα ότι οι πίνακες των ειδικών θερμότητων των διαφόρων υλικών παρέχουν την ειδική θερμότητα c σε μονάδες $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$ και όχι σε $\text{kcal/kg} \cdot \text{K}$.

Η σχέση (6.3) διαπιστώθηκε πειραματικά από τον Joule, και αποτελεί μαθηματική έκφραση του ομώνυμου νόμου. Έτσι, σύμφωνα με το νόμο του Joule:

Η θερμότητα που εκλύεται σε ένα αντιστάτη είναι ανάλογη με την αντίσταση του αντιστάτη, ανάλογη με το χρόνο διελεύσεως του ρεύματος και ανάλογη με το τετράγωνο της εντάσεως του ρεύματος που τον διαρρέει.

Θα πρέπει να προσθέσουμε ότι ο νόμος του Joule δεν ισχύει μόνο για το συνεχές ρεύμα, αλλά για το οποιασδήποτε μορφής ρεύμα διαρρέει έναν αντιστάτη. Βέβαια, σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιείται κατάλληλη τιμή για την ένταση του ρεύματος, όπως π.χ. για τα εναλλασσόμενα ρεύματα όπου χρησιμοποιείται η **ενεργός τιμή της εντάσεως**, την οποία θα ορίσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

6.2 Βαθμός αποδόσεως.

Μια οποιαδήποτε συσκευή ή μηχανή που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση κάποιας εργασίας, αποτελεί κατά βάση μια διάταξη που μετατρέπει ενέργεια μιας μορφής σε ενέργεια άλλης μορφής. Οι ηλεκτρικοί κινητήρες π.χ. μετατρέπουν την ηλεκτρική ενέργεια που τους προσφέρεται σε μηχανικό έργο. Κατά τη μετατροπή όμως αυτή ένα μέρος από την ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. (Έχουμε βέβαια και άλλες απώλειες ενέργειας που θα γνωρίσουμε αργότερα). Άρα η μηχανική ενέργεια (ωφέλιμη) που παίρνουμε, θα είναι μικρότερη από την ηλεκτρική ενέργεια (προσφερόμενη) που προσφέρουμε.

Γενικά θα έχουμε:

Ενέργεια που προσφέρεται ($W_{\text{πρ}}$) = ωφέλ. ενέργεια ($W_{\omega\phi}$) + απώλειες.

Ισχύς που προσφέρεται ($P_{\text{πρ}}$) = ωφέλ. ισχύς ($P_{\omega\phi}$) + απώλειες.

Βαθμό αποδόσεως μιας συσκευής ή μιας μηχανής ή γενικά ενός συστήματος μετατροπής ενέργειας, ονομάζεται το ηλίκον

$$\eta = \frac{W_{\omega\phi}}{W_{\text{πρ}}} = \frac{P_{\omega\phi}}{P_{\text{πρ}}} \quad (6.4)$$

Ο βαθμός αποδόσεως είναι καθαρός αριθμός μικρότερος της μονάδας ($\eta < 1$) ή το πολύ ίσος με τη μονάδα ($\eta = 1$).

Εάν το βαθμό αποδόσεως μιας συσκευής τον εκφράσουμε επί τοις εκατό (%) τότε, ο αριθμός που προκύπτει ονομάζεται **απόδοση** της συσκευής.

Εάν δηλαδή, ο βαθμός αποδόσεως ενός κινητήρα είναι $\eta = 0,80$, τότε η απόδοση του κινητήρα λέμε ότι είναι 80%. Αυτή είναι και η λεπτή διαφορά μεταξύ βαθμού αποδόσεως και αποδόσεως.

Η περίπτωση $\eta = 1$ αντιστοιχεί σε συσκευή με αμελητέες απώλειες. Π.χ. μια σόμπα ηλεκτρική έχει $\eta = 1$ αφού η προσφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται ολόκληρη σε θερμότητα που είναι ενέργεια ωφέλιμη για τη θέρμανση του χώρου.

6.3 Θερμική ισορροπία αντιστάτη.

Γνωρίζουμε ότι το ποσό της θερμότητας Q που απαιτείται για να αυξηθεί η θερμοκρασία σώματος από τη θερμοκρασία θ_1 ($^{\circ}\text{C}$) στη θερμοκρασία θ_2 ($^{\circ}\text{C}$) παρέχεται από τη σχέση:

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = mc(T_2 - T_1) \quad (6.5)$$

όπου: Q η προσδιδόμενη θερμότητα (J),

m η μάζα του σώματος (kg),

c η ειδική θερμότητα του σώματος (ή ειδική θερμοχωρητικότητα) (J/kgK),

θ_1 η αρχική θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$) ή $T_1 = 273 + \theta_1$ (K) και

θ_2 η τελική θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$) ή $T_2 = 273 + \theta_2$ (K).

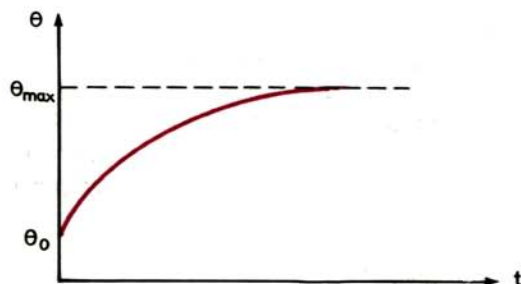
Είναι φανερό ότι, αν δεν υπήρχαν απώλειες προς το περιβάλλον, η θερμοκρασία του σώματος θα έπρεπε να αυξάνεται απεριόριστα, εφόσον προσφέρομε στο σώμα συνέχεια θερμότητα.

Αυτό πράγματι θα συνέβαινε, αν το σώμα ήταν **αδιαθατικά μονωμένο** από τον υπόλοιπο κόσμο. Τα σώματα όμως συνήθως συναλλάσσουν ποσά θερμότητας με το περιβάλλον τους, με ένα ή και περισσότερους από τους γνωστούς μηχανισμούς μεταδόσεως της θερμότητας [αγωγιμότητα, επαφή-μεταφορά (συναγωγή), ακτινοβολία]. Έτσι, αν το θερμαινόμενο σώμα συναλλάσσει ποσά θερμότητας με το περιβάλλον του, τότε, ενδεχομένως, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα είναι δυνατόν η θερμική ισχύς που του προσφέρεται από την πηγή θερμότητας να γίνει **ιση** με τη θερμότητα που μεταδίδεται προς το περιβάλλον του. Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία του σταθεροποιείται σε κάποια τιμή που ονομάζεται **θερμοκρασία θερμικής ισορροπίας**. Λέμε, στην περίπτωση αυτή, ότι το σώμα βρίσκεται σε **κατάσταση θερμικής ισορροπίας με το περιβάλλον του**.

Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει και σ' ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα, οπότε έχουμε μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα.

Εάν στα άκρα του αγωγού εφαρμοσθεί τάση τότε η θερμοκρασία του από κάποια αρχική τιμή θ_0 μπορεί να φθάσει μετά από κάποιο χρόνο στη θερμοκρασία ισορροπίας θ_{\max} , όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3. Η μέγιστη θερμοκρασία θ_{\max} εξαρτάται από τη θερμική του μόνωση και τις συνθήκες αερισμού και ψύξεως. Στόχος μας είναι να εξασφαλίζουμε επαρκή ψύξη στους θερμαινόμενους από ηλεκτρικό ρεύμα αγωγούς, ώστε η μέγιστη θερμοκρασία τους να περιορίζεται σε ασφαλή επίπεδα.

Αυτό επιτυγχάνεται με διάφορους τρόπους:



Σχ. 6.3.

Μεταβολή της θερμοκρασίας μεταλλικού σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

- Μπορούμε π.χ. να βυθίσουμε το θερμαινόμενο σώμα σε λάδι, ή να διοχετεύσουμε μέσα από αυτό, σωλήνες για την κυκλοφορία λαδιού ή νερού.
- Μπορούμε επίσης να το τοποθετήσουμε μέσα σε ρεύματα αέρα, π.χ. μπροστά σε ανεμιστήρες.
- Μπορούμε ακόμα να αυξήσουμε την επιφάνεια του σώματος με πτερύγια ή άλλες επιφάνειες ψύξεως κλπ.

Γενικά, αν θέλουμε ένα σώμα, στο οποίο προσφέρουμε συνέχεια θερμική ενέργεια, να εξαντλήσει τα όρια της μηχανικής του αντοχής (ιδιαίτερα αν αυτό δεν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σαν θερμαντικό) πρέπει με κάποιο τρόπο να απαγόμμε τη θερμότητά του.

Μια συνηθισμένη ωμική αντίσταση, π.χ. εφόσον δεν χρησιμοποιείται σαν αντίσταση πυρακτώσεως ή φωτισμού, μπορεί να αντέξει σε μεγαλύτερη ισχύ, αν η εξωτερική της επιφάνεια είναι αρκετά μεγάλη.

Από όσα αναφέρθηκαν έχει καταστεί φανερό ότι είναι αρκετά σημαντικό να γνωρίζουμε τη θερμοκρασία θερμικής ισορροπίας των διαφόρων αγωγών, κάτω από διάφορες συνθήκες ψύξεως. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η γνώση θερμοκρασιών θερμικής ισορροπίας με το περιβάλλον ($\theta_{\pi} = 20^{\circ}\text{C}$) των διαφόρων τύπων αντιστάσεων που κυκλοφορούν στο εμπόριο. Μερικές από τις τιμές αυτές παρουσιάζονται στον πίνακα 6.3.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3.1.

Συνήθειες θερμοκρασίες θερμικής ισορροπίας αντιστάσεων εμπορίου.

Είδος αντιστάσεως - συνθήκη ψύξεως	θ_{max} ($^{\circ}\text{C}$)
Ελεύθερες	200
Ελαίου	100
Ρεύματος αέρα	210
Ρεύματος ελαίου	115
Κεραμικές	185
Άνθρακα	110
Σύρματος	170
Με πυρίμαχο υλικό	300
Με περίβλημα εμαγιέ	500

Η εξίσωση που συνδέει την ηλεκτρική ισχύ που καταναλώνεται και τη θερμική ισχύ που απάγεται, σε **κατάσταση θερμικής ισορροπίας**, είναι:

$$P = \lambda \cdot S (\theta_{\max} - \theta_{\pi}) \quad (6.6)$$

όπου: P η ηλεκτρική ισχύς ($P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$, W),
 λ ο συντελεστής απαγωγής θερμότητας (W/m^2K),
 S η επιφάνεια απαγωγής θερμότητας (m^2),
 θ_{\max} η θερμοκρασία θερμικής ισορροπίας ($^{\circ}C$) και
 θ_{π} η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ($^{\circ}C$).

Ο πίνακας 6.3.2 παρέχει το συντελεστή απαγωγής θερμότητας (λ), για διάφορους τύπους αντιστάσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3.2.

Συντελεστής απαγωγής θερμότητας (λ) αντιστάσεων.

Είδος αντιστάσεως	λ (W/m^2K)
Άνθρακα	20 – 30
Σύρματος	30 – 50
Πολλών στρωμάτων	5 – 100
Χωνευτές	1.5 – 3

Παράδειγμα 6.3.1.

Ένας αντιστάτης άνθρακα έχει μήκος $l = 10$ mm, διάμετρο $d = 5$ mm και αντίσταση (σε $20^{\circ}C$) $R_{20} = 1$ M Ω . Αν $\theta_{\max} = 110^{\circ}C$ να βρεθεί η μέγιστη τάση που μπορεί να εφαρμοσθεί στα άκρα του χωρίς να καταστραφεί. Για τον άνθρακα $\alpha = -2 \cdot 10^4$ K $^{-1}$ και $\lambda = 21 \cdot 10^{-6}$ W/mm 2 K.

Από τη σχέση (6.6) έχουμε:

$$P = \lambda S (\theta_{\max} - \theta_{\pi}) = \lambda \cdot \pi d \cdot l (\theta_{\max} - \theta_{\pi}) \rightarrow 0$$

$$P = 21 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot (110 - 20) = 0,30$$
 W

Η αντίσταση στους $110^{\circ}C$ θα είναι:

$$R_{110} = R_{20} [1 + \alpha (\theta_{\max} - \theta_{\pi})] = 10^6 [1 - 2 \cdot 10^{-4} (110 - 20)]$$

$$\rightarrow R_{110} = 0,982 \cdot 10^6 \Omega$$

Επειδή έχουμε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, θα ισχύει:

$$P = \frac{U_{\max}^2}{R_{110}} \rightarrow U_{\max} = \sqrt{P \cdot R_{110}} = \sqrt{0,30 \cdot 0,982 \cdot 10^6} = 543$$
 V

δηλαδή

$$U_{\max} = 543$$
 V

Παράδειγμα 6.3.2.

Ηλεκτρικός θραστήρας ανυψώνει τη θερμοκρασία 5 kg νερού από $20^{\circ}C$ σε

100° C μέσα σε 10 min. Να υπολογισθεί η ισχύς του, αν η απόδοσή του είναι 80%

$$\left(\text{ειδική θερμότητα νερού } c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right).$$

Σύμφωνα με τη σχέση (6.5), η θερμότητα $Q_{\omega\phi}$ που απαιτείται για να βράσει το νερό είναι:

$$Q_{\omega\phi} = mc (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

Εξάλλου, σύμφωνα με τον ορισμό του βαθμού αποδόσεως του βραστήρα θα έχουμε:

$$\eta = \frac{W_{\omega\phi}}{W_{\pi\rho}} = \frac{Q_{\omega\phi}}{Q_{\pi\rho}} \rightarrow Q_{\pi\rho} = \frac{Q_{\omega\phi}}{\eta} \quad (2)$$

Άρα, η ισχύς του βραστήρα θα είναι:

$$P = \frac{Q_{\pi\rho}}{t} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$P = \frac{m \cdot c (\theta_2 - \theta_1)}{m \cdot t} = \frac{5 \cdot 4,2 \cdot 80}{0,8 \cdot 600} \frac{\text{kJ}}{\text{S}} \rightarrow P = 3,5 \text{ kW}$$

6.4 Εφαρμογές του νόμου του Joule.

α) Λαμπτήρες πυρακτώσεως.

Αποτελούνται από γυάλινο δοχείο που περιέχει αδρανές αέριο (αργό ή άζωτο) σε πολύ μικρή πίεση. Μέσα στο δοχείο βρίσκεται λεπτό νήμα από δύστηκτο μέταλλο, συνήθως βολφράμιο, του οποίου τα άκρα καταλήγουν σε δυο ακροδέκτες που βρίσκονται στη βάση του λαμπτήρα. Η βάση του λαμπτήρα προσαρμόζεται σε ειδική υποδοχή (ντουί) και με τη βοήθεια ενός διακόπτη συνδέεται με την τάση τροφοδοτήσεώς του.

Ως συνέπεια της θερμότητας που αναπτύσσεται, όταν το ρεύμα διέρχεται από το σύρμα, η θερμοκρασία του αυξάνεται και σταθεροποιείται σε μια ορισμένη τιμή. Η θερμοκρασία θερμικής ισορροπίας είναι περίπου 2700 °C. Στη θερμοκρασία αυτή το νήμα πυρακτώνεται και φωτοβολεί ισχυρά.

Το αδρανές αέριο περιορίζει την εξάχνωση του σύρματος και η λάμπα μπορεί να εργάζεται και σε υψηλότερη θερμοκρασία, αν στα άκρα του σύρματος εφαρμοσθεί μεγαλύτερη τάση από την κανονική χωρίς να ελαττώνεται σημαντικά η διάρκεια ζωής της λάμπας.

Κάθε λάμπα (αλλά και κάθε ηλεκτρική οικιακή συσκευή) φέρει δυο ενδείξεις. Η μία αντιστοιχεί στην κανονική τάση λειτουργίας της και η άλλη στην ονομαστική της ισχύ. Οι ενδείξεις π.χ. «220 V, 100 W» σημαίνουν ότι η λάμπα καταναλώνει ισχύ 100 W, όταν τροφοδοτείται με τάση 220 V. Από τις ενδείξεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε:

1) Το **κανονικό ρεύμα** λειτουργίας του λαμπτήρα:

$$I_k = \frac{P}{U} = \frac{100}{220} = 0,45 \text{ A}$$

2) **Την αντίσταση** του λαμπτήρα:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484 \ \Omega$$

3) **Την ηλεκτρική ενέργεια** που καταναλώνει ο λαμπτήρας σε 1 ώρα:

$$W = Pt = 100 \cdot 1 \text{ Wh} = 0,1 \text{ kWh}$$

β) Βραχυκύκλωμα – Ασφάλειες.

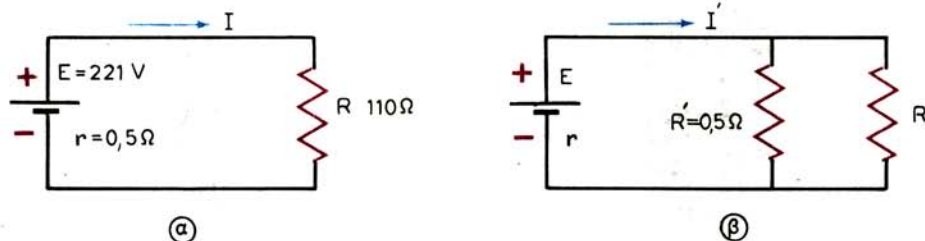
Όταν συνδέσουμε τους πόλους μιας πηγής με αγωγό αμελητέας αντιστάσεως, τότε λέμε ότι προκαλούμε **βραχυκύκλωμα**. Στην περίπτωση αυτή η ένταση του ρεύματος, που διαρρέει το κύκλωμα, γίνεται πολύ μεγάλη, οπότε και η θερμότητα Joule που αναπτύσσεται είναι πολύ μεγάλη, με ενδεχόμενο αποτέλεσμα να καταστραφούν οι μονώσεις των αγωγών και να προκληθούν δυσάρεστα αποτελέσματα. Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος 6.4α (α).

Αν οι πόλοι της πηγής έλθουν σε επαφή με αγωγό πολύ μικρής αντιστάσεως, π.χ. $R' = 0,5 \ \Omega$ [σχ. 6.4α(β)], τότε η νέα ένταση του ρεύματος ί θα είναι:

$$I' = \frac{E}{r + \frac{RR'}{R + R'}} = \frac{221}{0,5 + \frac{110 \cdot 0,5}{110 + 0,5}} \approx 221 \text{ A}$$

Η μεγάλη αυτή αύξηση του ρεύματος μπορεί να προκαλέσει σημαντικές βλάβες στο κύκλωμα ή ακόμη και πυρκαγιά.

Για να εμποδίζεται η υπέρμετρη αυτή αύξηση του ρεύματος που διαρρέει τα κυκλώματα, όταν προκαλούνται βραχυκυκλώματα, όλα τα κυκλώματα προστατεύονται με **ασφάλειες**.



Σχ. 6.4α.

Κύκλωμα πηγής-καταναλώσεως. α) Σε κανονική κατάσταση λειτουργίας. β) Με βραχυκυκλωμένη την πηγή.

Η **τηκόμενη ασφάλεια** (σχ. 6.46) αποτελείται από ένα σύρμα από κατάλληλο υλικό, τοποθετημένο μέσα σε άκαυστη θήκη από πορσελάνη. Όταν εξαιτίας βραχυκυκλώματος ή υπερφορτώσεως του δικτύου το ρεύμα γίνεται μεγαλύτερο από το κανονικό, το εύτηκτο σύρμα μικρής διατομής, που παρουσιάζει αντίσταση μεγαλύτερη από τους χάλκινους αγωγούς του δικτύου, τήκεται. Τότε το κύκλωμα ανοίγει και έτσι δεν καταστρέφεται το δίκτυο.

Η ασφάλεια υπολογίζεται συνήθως έτσι, ώστε να υποφέρει το κανονικό ρεύμα της καταναλώσεως, να τήκεται όμως μέσα σε 1 - 5 min όταν το ρεύμα υπερβεί κατά 15% την κανονική τιμή του. Για μεγαλύτερα ρεύματα η τήξη γίνεται γρηγορότερα.

Για μικρές εντάσεις ρεύματος χρησιμοποιούνται σύρματα ασφαλειών από μόλυβδο και κασίτερο, ενώ για μεγάλες εντάσεις χρησιμοποιούνται ο άργυρος και το αλουμίνιο.

Στις αυτόματες ασφάλειες (σχ. 6.4γ) μια αντίσταση θερμαίνει ένα διμεταλλικό έλασμα που λυγίζει και προκαλεί διακοπή του κυκλώματος. Η ασφάλεια μπορεί να λειτουργήσει πάλι, όταν πιέσουμε την κεφαλή του στελέχους, ώστε το στέλεχος να αγκιστρωθεί και να κλείσει το κύκλωμα.

Εκλογή της κατάλληλης ασφάλειας. Από τη συνολική ισχύ που καταναλώνουν οι καταναλωτές (όλες οι ηλεκτρικές συσκευές μιας οικιακής εγκατάστασης συνδέονται παράλληλα μεταξύ τους), όταν συνδεθούν με την τάση U του δικτύου, υπολογίζουμε το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα:

$$I = \frac{P_{ολ}}{U} \quad \text{όπου } P_{ολ} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

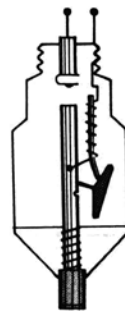
Αν π.χ. $P_{ολ} = 6300 \text{ W}$ και $U = 220 \text{ V}$ τότε το ρεύμα I θα είναι:

$$I = \frac{6300}{220} = 28,6 \text{ A}$$

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε ασφάλεια των 30 A. Οι ασφάλειες που κυκλοφορούν στο εμπόριο είναι των 2,5 A, 6 A, 10 A, 16 A, 25 A, 30 A, 35 A, 50 A, 63 A, 80 A, 125 A κλπ.



Σχ. 6.46.
Τηκόμενη ασφάλεια.



Σχ. 6.4γ.
Αυτόματη ασφάλεια.

Μια ασφάλεια επιλέγεται με τον ίδιο τρόπο και για το εναλλασσόμενο ρεύμα, εφόσον, όπως παρατηρήσαμε στην παράγραφο 6.1, ο νόμος του Joule ισχύει και για τα ρεύματα αυτά. Βέβαια, η ονομαστική τιμή των ασφαλειών που διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα αφορά στην ενεργό τιμή της εντάσεως, την οποία θα ορίσουμε στο κεφάλαιο για το εναλλασσόμενο ρεύμα.

Παράδειγμα 6.4.1.

Ραδιόφωνο ισχύος 480 W λειτουργεί με τάση 120 V. α) Να υπολογισθεί η προστατευτική αντίσταση που πρέπει να συνδέσουμε σε σειρά με το ραδιόφωνο, για να λειτουργήσει ασφαλώς με τάση τροφοδοσίας 220 V. β) Αν το σύρμα της αντιστάσεως είναι από χρωμονικελίνη ($\rho = 1 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$) να υπολογισθεί η διατομή και το μήκος της, αν η πυκνότητα ρεύματος δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 4 A/mm² (σχ. 6.4δ).

α) Ας είναι $U = 220 \text{ V}$ η διατιθέμενη πηγή τροφοδοσίας και $U_P = 120 \text{ V}$ η τάση στα άκρα του ραδιοφώνου (σχ. 6.4δ).

Το κανονικό ρεύμα λειτουργίας του ραδιοφώνου είναι:

$$I_K = \frac{P}{U_P} = \frac{480}{120} = 4 \text{ A}$$

και η αντίστασή του:

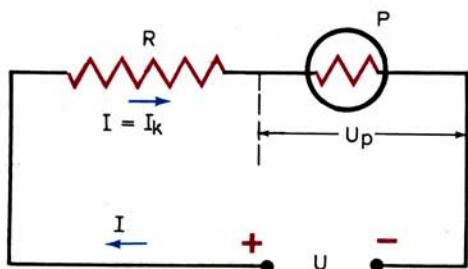
$$R_P = \frac{U_P^2}{P} = \frac{120^2}{480} \rightarrow R_P = 30 \Omega$$

Αν συνδέσουμε απευθείας το ραδιόφωνο με την τάση U το ρεύμα που το διαρρέει

$$I' = \frac{U}{R_P} = \frac{220}{30} = 7,33 \text{ A}$$

είναι πολύ μεγαλύτερο από το κανονικό ρεύμα. Γι' αυτό το λόγο συνδέουμε σε σειρά με το ραδιόφωνο μια προστατευτική αντίσταση R , έτσι ώστε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα να είναι το κανονικό ($I = I_K$).

$$\text{Θα είναι: } I = I_K = \frac{U}{R_P + R} \rightarrow R = \frac{U}{I_K} - R_P = \frac{220}{4} - 30 = 25 \Omega$$



Σχ. 6.4δ.

Με διαφορετικό τρόπο: Ο αντιστάτης πρέπει να δημιουργεί πτώση τάσεως $U_R = U - U_P = 100 \text{ V}$, άρα η αντίστασή του πρέπει να είναι:

$$R = \frac{U_R}{I_K} = \frac{100}{4} = 25 \ \Omega$$

και η ισχύς του: $P_R = I_K^2 R = 400 \text{ W}$

$$b) \quad J = \frac{I}{S} \rightarrow S = \frac{I}{J} = 1 \text{ mm}^2$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \rightarrow l = \frac{RS}{\rho} = \frac{25 \cdot 1}{1} = 25 \text{ m}$$

Παράδειγμα 6.4.2.

Ένα σύρμα από μόλυβδο έχει διάμετρο $d = 1$ και χρησιμοποιείται για σύρμα ασφάλειας σε μια ηλεκτρική εγκατάσταση. Ζητείται η μέγιστη τιμή του ρεύματος που μπορεί να περάσει από το σύρμα. Δίνονται: ειδική αντίσταση μολύβδου $\rho = 0,2 \ \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$, σημείο τήξεως $\theta_T = \theta_{\max} = 330 \text{ }^\circ\text{C}$ και $\lambda = 9,156 \cdot 10^{-6} \text{ W/mm}^2\text{K}$.

Από την εξίσωση (6.6) έχουμε:

$$I^2 R = \lambda S (\theta_{\max} - \theta_{\pi}) \rightarrow I = \sqrt{\frac{\lambda S (\theta_{\max} - \theta_{\pi})}{R}} \quad (1)$$

Αν l είναι το μήκος του σύρματος, η κυλινδρική επιφάνεια S θα είναι:

$$S = \pi d l \quad (2)$$

$$\text{Είναι} \quad R = \rho \frac{l}{\pi d^2/4} = \frac{4 \rho l}{\pi d^2} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$I = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda (\theta_{\max} - \theta_{\pi}) d^3}{\rho}}$$

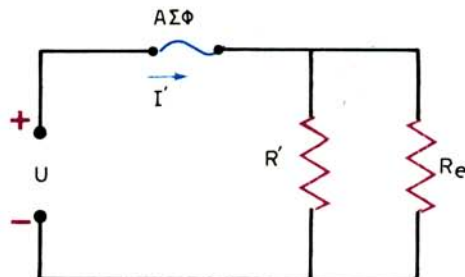
Έχουμε $\lambda = 9,156 \cdot 10^{-6} \text{ W/mm}^2\text{K} = 9,156 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\rho = 0,2 \ \Omega \text{ mm}^2/\text{m} = 0,2 (10^{-3})^2 \ \Omega \text{ m}^2/\text{m} = 0,2 \cdot 10^{-6} \ \Omega \text{ m}$, $\theta_{\max} - \theta_{\pi} = 330 - 20 = 310 \text{ }^\circ\text{C}$ και $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$.

Άρα:

$$I = \frac{3,14}{2} \sqrt{\frac{9,156 \cdot 310 \cdot (10^{-3})^3}{0,2 \cdot 10^{-6}}} = \frac{3,14}{2} \sqrt{14,192} = 5,918 \text{ A} \approx 6 \text{ A}$$

Παράδειγμα 6.4.3.

Στη διάρκεια της λειτουργίας θερμοσίφωνα ισχύος $4,4 \text{ kW}$ και τάσεως λειτουργίας 220 V , εξαιτίας φθοράς της μονώσεως των συρμάτων συνδέσεως δικτύου-ηλεκτρικής συσκευής, συνδέεται παράλληλα με τη συσκευή αντίστα-



Σχ. 6.4ε.

ση $R' = 5,5 \Omega$. Τι θα συμβεί αν η ασφάλεια του μετρητή της εγκαταστάσεως είναι 25 A (σχ. 6.4ε);

Η αντίσταση του θερμοσίφωνα είναι:

$$R_{\theta} = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{4400} = 11 \Omega$$

Το ρεύμα που τον διαρρέει:

$$I_k = \frac{P}{U} = \frac{4400}{220} = 20 \text{ A}$$

Μετά τη σύνδεση της R' με την R_{θ} η ισοδύναμη αντίσταση γίνεται

$$R = \frac{R_{\theta} R'}{R_{\theta} + R'} = \frac{11 \cdot 5,5}{11 + 5,5} = 3,66 \Omega$$

και η νέα ένταση του ρεύματος $I' = \frac{U}{R} = \frac{220}{3,66} = 60 \text{ A}$ ($I' > I_k$)

Άρα η ασφάλεια θα λιώσει.

6.5 Υπολογισμός των αγωγών σε πυκνότητα ρεύματος.

Το ηλεκτρικό ρεύμα θερμαίνει τον αγωγό τον οποίο διαρρέει και όσο η πυκνότητα ρεύματος ($J = I/S$) είναι μεγαλύτερη, τόσο η θερμοκρασία ισορροπίας θ_{\max} είναι υψηλότερη. Μεγαλύτερη πυκνότητα σημαίνει μεγαλύτερο ρεύμα σε μικρότερη διατομή. Μεγαλύτερο ρεύμα σημαίνει μεγαλύτερη θερμότητα Joule ($I^2 R t$), ενώ μικρότερη διατομή σημαίνει και μικρότερη επιφάνεια ακτινοβολίας της θερμότητας, με αποτέλεσμα η θερμική ισορροπία να επέρχεται σε υψηλότερη θερμοκρασία.

Στους αγωγούς συνδέσεως των καταναλώσεων δεν επιτρέπεται η θερμοκρασία να ανέρχεται πάνω από ένα ορισμένο όριο. Γι' αυτό δεν επιτρέπεται πυκνότητα ρεύματος μεγαλύτερη από ένα μέγιστο. Η επιτρεπόμενη πυκνότητα μειώνεται όσο αυξάνεται η διατομή. Μεγαλύτερη διατομή εξασφαλίζει χαμηλότερη θερμοκρασία, αλλά και μεγαλύτερο κόστος.

Στον πίνακα 6.5.1 δίνουμε, σύμφωνα με τους κανονισμούς της ΔΕΗ, απευθείας το επιτρεπόμενο ρεύμα για τις διάφορες διατομές μονωμένων χαλκίνων αγωγών. Για αγωγούς αλουμινίου τα ρεύματα μειώνονται κατά 20% περίπου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.5.1.

Μέγιστη επιτρεπόμενη ένταση ρεύματος για μονωμένους χάλκινους αγωγούς.

Διατομή (m/m ²)	Ρεύμα (A)	Διατομή (mm ²)	Ρεύμα (A)
0,75	9	70	200
1	11	95	240
1,5	14	120	280
2,5	20	150	325
4	25	185	380
6	31	240	450
10	43	300	525
16	75	400	640
25	100	500	760
35	125	625	880
50	160	800	1050

Οι κανονισμοί αυτοί της ΔΕΗ δεν ισχύουν μόνο για το συνεχές ρεύμα, αλλά και για την ενεργό τιμή του εναλλασσόμενου ρεύματος, που διαρρέει τον αγωγό, εφόσον, όπως παρατηρήσαμε στην παράγραφο 6.1, και στην περίπτωση αυτή ισχύει ο νόμος του Joule.

6.6 Υπολογισμός των αγωγών σε πώση τάσεως.

Ας θεωρήσουμε ότι η ηλεκτρική ενέργεια που παράγει μια γεννήτρια συνεχούς ρεύματος μεταφέρεται και διανέμεται με δισύρματη γραμμή μήκους l (σχ. 6.6).

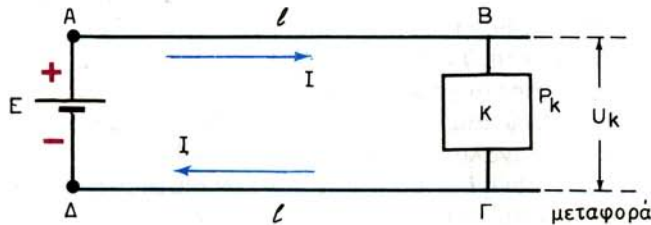
Όλοι οι καταναλωτές συνδέονται παράλληλα, έτσι ώστε να επικρατεί στα άκρα τους η ίδια τάση U_K . Ας συμβολίσουμε με P_K την ισχύ των καταναλωτών, E την ΗΕΔ της γεννήτριας και U_V την πτώση τάσεως στη γραμμή μεταφοράς.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.6 η πτώση τάσεως U_V , ισούται:

$$U_V = U_{AB} + U_{\Gamma\Delta} \quad (6.7)$$

Δηλαδή είναι ίση με το άθροισμα των πτώσεων τάσεως στους αγωγούς προσαγωγής και επιστροφής του ρεύματος προς τις καταναλώσεις.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη διατομή των αγωγών μεταφοράς, έτσι ώστε η πτώση τάσεως στη γραμμή μεταφοράς να μην είναι μεγαλύτερη από ένα



Σχ. 6.6.

Δισύρματη γραμμή μεταφοράς συνεχούς ρεύματος.

προκαθορισμένο ποσοστό πτώσεως, έστω $a\%$ της τάσεως U_K , δηλαδή:

$$U_Y \leq \frac{a}{100} U_K \quad (6.8)$$

Ας είναι $R_Y/2$ η αντίσταση του αγωγού προσαγωγής, μήκους $l = (AB)$. Ίση με αυτήν θα είναι και η αντίσταση του αγωγού επιστροφής, μήκους $l = (ΓΔ)$, εφόσον η δισύρματη γραμμή έχει τα ίδια χαρακτηριστικά. Έχουμε τότε:

$$U_Y = \frac{IR_Y}{2} + \frac{IR_Y}{2} = IR_Y \rightarrow \text{ή } U_Y = l \cdot \rho \frac{2I}{S} \quad (6.9)$$

Το ρεύμα I που διαρρέει τον καταναλωτή είναι:

$$I = \frac{P_K}{U_K} \quad (6.10)$$

Από τις (6.8), (6.9) και (6.10) προκύπτει:

$$S \geq \frac{200\rho P_K}{aU_K^2} \quad (6.11)$$

Επομένως η ελάχιστη διατομή θα είναι:

$$S = \frac{200\rho P_K}{aU_K^2} \quad (6.12)$$

όπου: P_K η ισχύς της καταναλώσεως (W),

U_K η τάση τροφοδοτήσεως των καταναλωτών (V),

l το μήκος της γραμμής (m),

ρ η ειδική αντίσταση των αγωγών της γραμμής ($\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$),

a το επιτρεπόμενο ποσοστό πτώσεως τάσεως στη γραμμή (%), και

S η διατομή της γραμμής (mm^2).

Από τη σχέση (6.8), στην περίπτωση της ισότητας, έχουμε:

$$U_Y \cdot I = \frac{a}{100} \cdot U_K \cdot I \rightarrow P_Y = \frac{a}{100} \cdot P_K \quad (6.13)$$

γιατί το γινόμενο $U_Y I$ είναι η ισχύς P_Y που καταναλώνεται στις γραμμές υπό μορφή απωλειών Joule και το $U_K I$ είναι η ωφέλιμη ισχύς P_K που παρέχεται στους καταναλωτές.

Ο συντελεστής αποδόσεως της γραμμής θα είναι:

$$\eta = \frac{P_{\omega\phi}}{P_{\pi\rho}} = \frac{P_K}{P_Y + P_K} = \frac{1}{1 + \frac{P_K}{P_Y}} \quad (6.14)$$

Από τις (6.13) και (6.14) προκύπτει:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{a}{100}} \quad (6.15)$$

Σημείωση:

Η πτώση τάσεως στη γραμμή δεν πρέπει να υπερβαίνει μια καθορισμένη τιμή για δυο λόγους:

α) Γιατί οι καταναλωτές κατασκευάζονται έτσι, ώστε να λειτουργούν κανονικά σε μια ορισμένη τάση, π.χ. 110 ή 220 V.

β) Γιατί μεγαλύτερο ποσοστό πτώσεως τάσεως σημαίνει μικρότερο βαθμό αποδόσεως της γραμμής (αντιοικονομική εκμετάλλευση).

Παράδειγμα 6.6.1.

Πρόκειται να τροφοδοτήσουμε μια κατανάλωση ισχύος $P_K = 20 \text{ kW}$ με δισύρματη γραμμή μήκους $l = 1 \text{ km}$. Αν η επιτρεπόμενη πτώση τάσεως στη γραμμή είναι $a = 5\%$ και η τάση της καταναλώσεως είναι 220 V ζητούνται: α) Η διατομή των χαλκίνων συρμάτων ($P_x = 0,018 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$). β) Ο βαθμός αποδόσεως της γραμμής. γ) Η πτώση τάσεως στη γραμμή. δ) Η τάση της γεννήτριας. ε) Η ισχύς της γεννήτριας. Να εξετασθεί πόση θα έπρεπε να ήταν η διατομή των συρμάτων αν δεκαπλασιαζόταν η τάση (σχ. 6.6).

α) Από τη σχέση (6.12) έχουμε:

$$S = \frac{200 \cdot 0,018 \cdot 1000 \cdot 20000}{5 \cdot 220^2} = 300 \text{ mm}^2$$

β) Από τη σχέση (6.15) έχουμε:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{5}{100}} = 0,95$$

$$\gamma) \quad U_r = \frac{a}{100} \cdot U_K = \frac{5}{100} \cdot 220 = 11 \text{ V}$$

$$\delta) \quad E = U_r + U_K = 220 + 11 = 231 \text{ V}$$

Δηλαδή, για να επικρατεί στα άκρα του καταναλωτή τάση 220 V και να έχουμε πτώση τάσεως στη γραμμή 5% της $U_K = 220 \text{ V}$, θα πρέπει η ΗΕΔ της γεννήτριας να είναι 231 V .

$$\epsilon) \quad P_G = P_r + P_K = \frac{5}{100} \cdot 20 + 20 = 21 \text{ kW}$$

Αν στη σχέση (6.12) θέσουμε $U_K = 2200 \text{ V}$, προκύπτει $S = 3 \text{ mm}^2$, δηλαδή αν δεκαπλασιασθεί η τάση U_K η διατομή θα πρέπει να γίνεται 100 φορές μικρότερη. Από τη σχέση (6.12) προκύπτει ότι η S είναι αντίστροφα ανάλογη του τετραγώνου της τάσεως U_K . Έτσι εξηγείται και ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε υψηλές τάσεις για τη μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας. Αλλά σχετικά με το θέμα αυτό θα επανέλθουμε σε επόμενο μέρος του βιβλίου αυτού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

7.1 Εισαγωγή – Ορισμοί.

Στην παράγραφο 5.2 γνωρίσαμε πώς συγκροτείται ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Στη συνέχεια του κεφαλαίου 5, και συγκεκριμένα στις παραγράφους 5.8 και 5.9, αναπτύξαμε απλές μεθόδους, με τις οποίες επιλύονται απλά ηλεκτρικά κυκλώματα. Στο κεφάλαιο αυτό καθώς και στο επόμενο, θα παρουσιάσουμε και θα εφαρμόσουμε κανόνες και θεωρήματα που επιτρέπουν την επίλυση συνθετοτέρων ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Πριν όμως προχωρήσουμε, είναι σκόπιμο να δώσουμε μερικούς ορισμούς, απαραίτητους για την ανάπτυξη που θα ακολουθήσει. Χάρη πληρότητας θα αρχίσουμε επαναλαμβάνοντας τον ορισμό του κυκλώματος.

Ένα **ηλεκτρικό κύκλωμα** ή απλά **κύκλωμα** συγκροτείται από μία ή περισσότερες πηγές ηλεκτρικού ρεύματος με σκοπό την τροφοδοσία με ηλεκτρική ισχύ καταναλωτών. Τα στοιχεία του κυκλώματος είναι οι πηγές, οι καταναλωτές (ηλεκτρικές αντιστάσεις, πυκνωτές κλπ.), οι αγωγοί συνδέσεως καθώς και οι διακόπτες, οι οποίοι ενδεχομένως παρεμβάλλονται. Η επίλυση ενός κυκλώματος συνίσταται στον υπολογισμό των εντάσεων του ρεύματος μέσα από τα στοιχεία του.

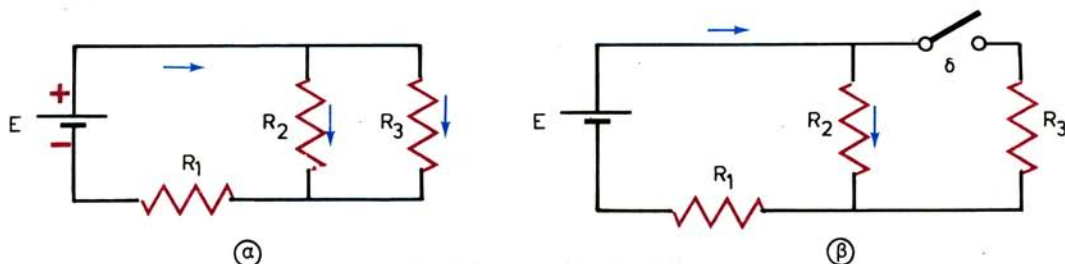
Η έννοια **ηλεκτρικό δίκτυο** ή απλά **δίκτυο** είναι εξ' ορισμού ταυτόσημη με την έννοια «κύκλωμα». Στην πράξη όμως χρησιμοποιούμε την έννοια «δίκτυο», υπονοώντας μεγάλα ή σύνθετα κυκλώματα, που καταλαμβάνουν ταυτόχρονα πολύ μεγάλο χώρο. Π.χ., ενώ αναφερόμαστε στο κύκλωμα μιας συσκευής τηλεοράσεως, αναφερόμαστε στο δίκτυο διανομής της ΔΕΗ σε μια πόλη.

Δικτύωμα ονομάζεται ένα δίκτυο από ορισμένα στοιχεία του οποίου, για κάποιο λόγο, δεν διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα. Στο σχήμα 7.1α(α) φαίνεται ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (δίκτυο), ενώ στο σχήμα 7.1α(β) ένα δικτύωμα.

Τα στοιχεία ενός δικτύου διακρίνονται σε δυο κατηγορίες, στα ενεργητικά και στα παθητικά.

Ενεργητικά στοιχεία δικτύου είναι οι πηγές του, οι οποίες παρέχουν την ισχύ τροφοδοσίας.

Παθητικά στοιχεία δικτύου είναι τα στοιχεία που καταναλίσκουν ενέργεια (αντιστάσεις, πυκνωτές κλπ.). Σε ορισμένες περιπτώσεις στα παθητικά στοιχεία μπορεί να αποθηκεύεται ενέργεια, η οποία παρέχεται για κατανάλωση στο δίκτυο σε ευθετότερο χρόνο. Τα παθητικά αυτά στοιχεία είναι οι πυκνωτές, που γνωρίσαμε στο 3ο κεφάλαιο και τα πηνία, τα οποία θα γνωρίσουμε σε επόμενο μέρος του βιβλίου αυτού.



Σχ. 7.1α.

α) Ηλεκτρικό κύκλωμα (δίκτυο). β) Ηλεκτρικό δικτύωμα (ο διακόπτης δ είναι ανοικτός).

Γραμμικό στοιχείο δικτύου ονομάζεται το στοιχείο ενός δικτύου, εάν η ένταση ρεύματος, η οποία το διαρρέει, είναι ανάλογη της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του.

Η δράση – δηλαδή η θέση για ορισμένο χρόνο σε λειτουργία – μιας ηλεκτρικής πηγής σ' ένα δίκτυο ονομάζεται **διέγερση** του δικτύου.

Λόγω της διεγέρσεως ενός δικτύου διέρχεται από τα στοιχεία του ηλεκτρικό ρεύμα ενώ ταυτόχρονα στα άκρα των στοιχείων αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού.

Απόκριση των στοιχείων ενός δικτύου, εξαιτίας της διεγέρσεώς του, ονομάζεται η ανάπτυξη τάσεων και εντάσεων στα στοιχεία του δικτύου.

Κλάδος δικτύου ονομάζεται ένα τμήμα του, που αποτελείται από πηγές και καταναλώσεις συνδεδεσολογημένες σε σειρά, η μία κατόπιν της άλλης, που διαρρέονται από ρεύμα της ίδιας εντάσεως.

Οι κλάδοι του δικτύου του σχήματος 7.1β, είναι:

ΑΒ, ΒΓΔ, ΔΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΑ, ΑΙ, ΙΒ, ΒΔ, ΙΚ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ.

Κόμβος δικτύου ονομάζεται ένα σημείο, στο οποίο συντρέχουν τα άκρα τριών ή περισσοτέρων κλάδων.

Οι κόμβοι του δικτύου του σχήματος 7.1β, είναι:

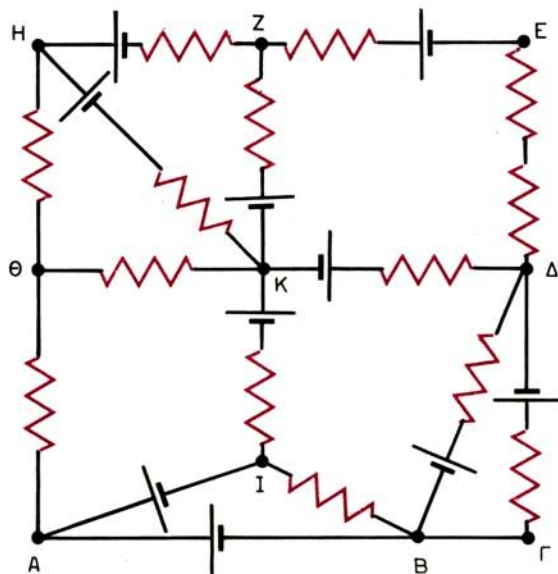
Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ.

Βρόχος δικτύου ονομάζεται οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή του, που αποτελείται από κλάδους, τους οποίους συναντάμε μια μόνο φορά, όταν ξεκινήσουμε από ένα σημείο του δικτύου και επιστρέψουμε στο ίδιο σημείο.

Μερικοί από τους βρόχους του δικτύου του σχήματος 7.1β, είναι:

ΑΒΓΔΚΙΑ, ΚΙΒΔΚ, ΗΚΖΗ, ΚΔΕΖΗΚ, ΑΒΓΔΕΖΗΘΑ.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στις παραγράφους του κεφαλαίου αυτού, θα αναπτύξουμε δυο απλούς κανόνες – τους κανόνες του Kirchhoff – οι οποίοι αποτελούν τη βάση επιλύσεως ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Θα αναφέρουμε επίσης δυο απλές μεθόδους επιλύσεως δικτύων – τη μέθοδο των βροχικών εντάσεων και τη μέθοδο των κομβικών τάσεων – των οποίων η διατύπωση οφείλεται άμεσα στους δυο νόμους του Kirchhoff. Θα μας απασχολήσει επίσης το θέμα της συνδεδεσολογίας των ηλεκτρικών πηγών. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μερικές αξιόλογες εφαρμογές κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος, όπως τα κυκλώματα των γεφυρών, τους καταμεριστές τάσεως καθώς και τα κυκλώματα φορτίσεως πυκνωτών.



Σχ. 7.16.
Ηλεκτρικό δίκτυο.

7.2 Κανόνες του Kirchhoff.

Η πρώτη – ιστορικά – προσπάθεια διατυπώσεως κανόνων για την επίλυση των ηλεκτρικών δικτύων προήλθε από το Γερμανό φυσικό Kirchhoff*. Οι δυο κανόνες που διατύπωσε, στηρίζονται στην αρχή διατηρήσεως των ηλεκτρικών φορτίων και στην αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Οι κανόνες αυτοί θεωρητικά – τουλάχιστον – επιτρέπουν την επίλυση κάθε ηλεκτρικού κυκλώματος.

1ος κανόνας Kirchhoff ή πρόταση των κόμβων.

Το άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων, που φθάνουν σ' ένα κόμβο ενός δικτύου, ισούται προς το άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που αναχωρούν από τον κόμβο αυτό.

Θεωρώντας – κατά σύμβαση – τις εντάσεις των ρευμάτων που φθάνουν σ' ένα κόμβο ως θετικές, ενώ εκείνες που αναχωρούν ως αρνητικές, τότε ο 1ος κανόνας του Kirchhoff διατυπώνεται αλγεβρικά, ως:

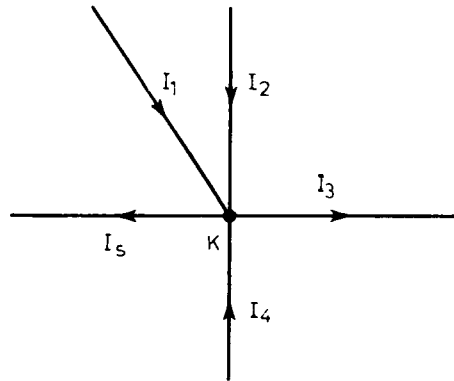
$$\sum_{v=1}^n I_v = 0$$

(7.1)

Απόδειξη.

Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως του ηλεκτρικού φορτίου και δοθέντος ότι στον κόμβο Κ του σχήματος 7.2α δεν υπάρχουν ούτε πηγές ούτε καταναλώσεις ηλεκτρικής ενέργειας, θα πρέπει το φορτίο που φθάνει στον

* G.R. Kirchhoff, 1824-1887.



Σχ. 7.2α.

Ρεύματα σε κόμβο δικτύου.

κόμβο Κ, σε κάποιο χρονικό διάστημα, να είναι ίσο με το φορτίο που αναχωρεί από τον κόμβο Κ κατά το ίδιο χρονικό διάστημα. Δηλαδή:

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5 \quad \text{ή} \quad I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Σύμφωνα με τη σύμβαση που αναφέραμε, σχετικά με το πρόσημο των εντάσεων, θα έχουμε:

$$\sum_{v=1}^5 I_v = 0$$

ή γενικότερα την εξίσωση (7.1).

2ος κανόνας Kirchhoff ή πρόταση των θρόχων.

Σε κάθε θρόχο ενός κυκλώματος το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων ισούται προς το άθροισμα των πτώσεων τάσεως στους κλάδους του υπόψη θρόχου.

Αν θεωρήσουμε – κατά σύμβαση – μια φορά διαγραφής του θρόχου ως θετική και λαμβάνοντας τις ομόρροπες προς αυτήν ΗΕΔ και εντάσεις ρεύματος ως θετικές, ενώ τις αντίρροπες ως αρνητικές, τότε διατυπώνουμε το 2ο κανόνα Kirchhoff αλγεβρικά ως εξής:

$$\sum_{v=1}^n E = \sum_{\mu=1}^m I_{\mu} R_{\mu} \quad (7.2)$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω σύμβαση η ΗΕΔ μιας πηγής θεωρείται θετική, όταν η πηγή τείνει να κινήσει στο θρόχο ρεύμα ομόρροπο με τη φορά διαγραφής του θρόχου, που εκλέξαμε ως θετική και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση. Πρακτικά, διατρέχουμε το θρόχο κατά τη φορά που έχουμε ορίσει ως θετική και ως πρόσημο της ΗΕΔ θεωρούμε το αντίθετο πρόσημο του πόλου που συναντούμε πρώτο.

Για τη διαμόρφωση του αλγεβρικού αθροίσματος των πτώσεων τάσεως, όπως ήδη είπαμε, θεωρούμε θετικές τις εντάσεις ρεύματος που έχουν τη φορά διαγραφής του βρόχου που επιλέξαμε. Τις υπόλοιπες τις θεωρούμε ως αρνητικές.

Απόδειξη.

Έστω ο βρόχος ΚΔΒΙΚ ενός κυκλώματος (σχ. 7.26), που συγκροτείται από 4 κλάδους. Ας είναι R_1, R_2, R_3, R_4 η συνολική αντίσταση κάθε κλάδου, δηλαδή το άθροισμα της αντιστάσεως των φορτίων του κλάδου και της εσωτερικής αντιστάσεως της πηγής κάθε κλάδου. Θα γράψουμε τις πτώσεις τάσεως κάθε κλάδου, κινούμενοι κατά τη φορά που έχουμε σημειώσει στο σχήμα 7.26. Ας σημειωθεί ότι αν διαγράψουμε μια πηγή από τον αρνητικό προς το θετικό της πόλο, έχουμε **ανύψωση τάσεως**, ενώ αν κινηθούμε αντίθετα, από το θετικό προς τον αρνητικό της πόλο, έχουμε **πτώση τάσεως**.

Κλάδος ΚΔ: Έχουμε ανύψωση τάσεως λόγω της πηγής ΗΕΔ E_1 .

Έχουμε πτώση τάσεως στην αντίσταση R_1 , άρα:

$$U_{ΚΔ} = -E_1 + I_1 R_1 \quad (7.3)$$

Κλάδος ΔΒ: Έχουμε πτώση τάσεως στην αντίσταση R_2 .

Έχουμε πτώση τάσεως λόγω της πηγής ΗΕΔ E_2 , άρα:

$$U_{ΔΒ} = I_2 R_2 + E_2 \quad (7.4)$$

Κλάδος ΒΙ: Έχουμε ανύψωση τάσεως στην αντίσταση R_3 , άρα:

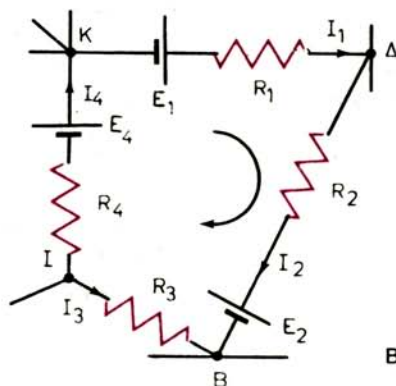
$$U_{ΒΙ} = -I_3 R_3 \quad (7.5)$$

ή - όπερ το αυτό - πτώση τάσεως $U_{ΙΒ} = I_3 R_3$ και $U_{ΒΙ} = -U_{ΙΒ}$

Κλάδος ΙΚ: Έχουμε πτώση τάσεως στην αντίσταση R_4 .

Έχουμε ανύψωση τάσεως λόγω της πηγής ΗΕΔ E_4 , άρα:

$$U_{ΙΚ} = I_4 R_4 - E_4 \quad (7.6)$$



Σχ. 7.26.

Βρόχος κυκλώματος με πηγές και καταναλώσεις.

Αθροίζοντας τις (7.3), (7.4), (7.5) και (7.6), παίρνουμε:

$$U_{\kappa\Delta} + U_{\Delta\beta} + U_{\beta\Gamma} + U_{\Gamma\kappa} = -E_1 + E_2 - E_4 + I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 \quad (7.7)$$

Αλλά σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 2.5 το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή το έργο που παράγεται ή καταναλίσκεται σε μια κλειστή διαδρομή, όπως αυτή του βρόχου ΚΔΒΓΚ είναι μηδέν, άρα, μπορούμε να γράψουμε για τη διαφορά δυναμικού, σύμφωνα και με την εξίσωση (2.13):

$$U_{\kappa\kappa} = 0 \quad \text{ή} \quad U_{\kappa\kappa} = U_{\kappa\Delta} + U_{\Delta\beta} + U_{\beta\Gamma} + U_{\Gamma\kappa} = 0 \quad (7.8)$$

Συνδυάζοντας τις (7.7) και (7.8) παίρνουμε:

$$E_1 - E_2 + E_4 = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 \quad (7.9)$$

$$\text{ή} \quad \sum_{\nu=1}^4 E_{\nu} = \sum_{\mu=1}^4 I_{\mu} R_{\mu} \quad (7.10)$$

ή γενικότερα την εξίσωση (7.2).

Βλέπουμε λοιπόν ότι αποδεικνύεται ο 2ος κανόνας του Kirchhoff εφαρμόζοντας το νόμο του αστροβίλου, δηλαδή την **αρχή της διατήρησης της ενέργειας** σε μια κλειστή διαδρομή στο ηλεκτρικό πεδίο.

7.3 Γενική μέθοδος επιλύσεως δικτύου.

Για να επιλύσουμε γενικά ένα κύκλωμα ή ένα απλό δίκτυο, στηριζόμενοι στους δυο κανόνες Kirchhoff, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1) Παρατηρούμε προσεκτικά το κύκλωμα και καταγράφουμε το πλήθος των κόμβων του (κ) καθώς και το πλήθος των κλάδων του (λ).

2) Σημειώνουμε **αυθαίρετα** σε κάθε ένα από τους λ κλάδους του τη φορά της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος.

3) Εφαρμόζουμε τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff σε $\kappa - 1$ κόμβους του κυκλώματος, λαμβάνοντας έτσι $\kappa - 1$ ανεξάρτητες μεταξύ τους εξισώσεις. Οι $\kappa - 1$ αυτοί κόμβοι ονομάζονται **ανεξάρτητοι κόμβοι** του κυκλώματος.

4) Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff σε $\lambda - \kappa + 1$ βρόχους του κυκλώματος, λαμβάνοντας έτσι $\lambda - \kappa + 1$ ανεξάρτητες εξισώσεις. Οι $\lambda - \kappa + 1$ αυτοί βρόχοι ονομάζονται **ανεξάρτητοι βρόχοι** του κυκλώματος.

5) Σγκροτούμε έτσι, στα βήματα 3 και 4: $(\kappa - 1) + (\lambda - \kappa + 1) = \lambda$ εξισώσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους, όσες και οι άγνωστες εντάσεις από τους λ κλάδους του κυκλώματος.

6) Επιλύουμε το σύστημα των λ εξισώσεων, που είναι πάντοτε πρώτου βαθμού, ως προς τις λ το πλήθος άγνωστες εντάσεις. Όσες εντάσεις βρεθούν θετικές σημαίνει ότι σχεδιάσθηκαν σωστά. Όσες βρεθούν αρνητικές, σημαίνει ότι σχεδιάσθηκαν με την αντίθετη φορά, από εκείνη που πράγματι ρέει στον υπόψη κλάδο. Το γραμμικό σύστημα των λ εξισώσεων μπορεί να λυθεί με

διάφορους τρόπους αλλά συνήθως εφαρμόζεται για τη λύση η μέθοδος των οριζουσών.

Παράδειγμα 7.3.1.

Να επιλυθεί το κύκλωμα 7.3α, με εφαρμογή των κανόνων Kirchhoff. Δίνεται: $E_1 = 24 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $r_1 = r_2 = 2 \ \Omega$, $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$ και $R_3 = 12 \ \Omega$.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3α, το κύκλωμα έχει $\kappa=2$ κόμβους και $\lambda=3$ κλάδους. Σημειώνουμε στο σχήμα αυθαίρετα τις φορές των εντάσεων των ρευμάτων I_1 , I_2 και I_3 .

Εφαρμόζουμε τον **πρώτο κανόνα** Kirchhoff σε $\kappa-1=2-1=1$ κόμβο, π.χ. τον κόμβο Α. Σύμφωνα με την εξίσωση (7.1), θα έχουμε:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το **δεύτερο κανόνα** Kirchhoff σε $\lambda-\kappa+1=3-2+1=2$ βρόχους. Επιλέγουμε γι' αυτό τους βρόχους ΑΔΒΓΑ και ΑΔΒΕΑ, σημειώνοντας αυθαίρετα και τη θετική φορά διαγραφής τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3α. Από την εξίσωση (7.2) έχουμε:

$$\text{Βρόχος ΑΔΒΓΑ: } -E_2 + E_1 = -I_2 r_2 - I_2 R_2 - I_1 R_1 - I_1 r_1 \quad (2)$$

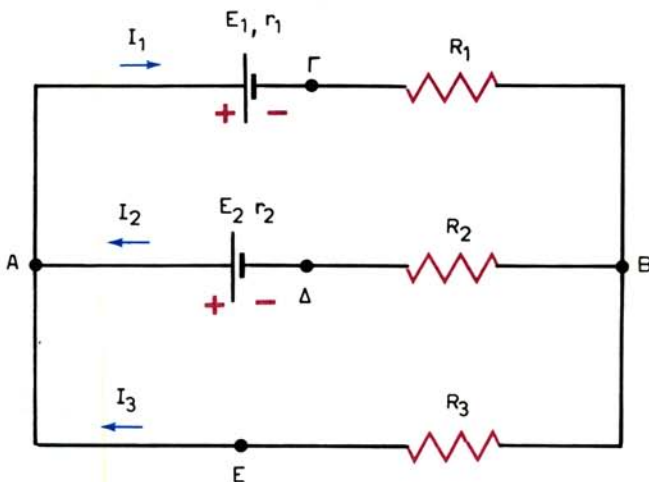
$$\text{Βρόχος ΑΔΒΕΑ: } -E_2 = -I_2 r_2 - I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (3)$$

Άρα το σύστημα των τριών εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ -I_1 (R_1 + r_1) - I_2 (R_2 + r_2) &= E_1 - E_2 \\ -I_2 (R_2 + r_2) + I_3 R_3 &= -E_2 \end{aligned}$$

ή μετά από αριθμητική αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ -I_1 - I_2 &= 1 \\ -I_2 + I_3 &= -1 \end{aligned}$$



Σχ. 7.3α.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.3.1.

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα παίρνουμε:

$$I_1 = -1 \text{ A} \quad I_2 = 0 \text{ A} \quad I_3 = -1 \text{ A}$$

Σύμφωνα με τα αριθμητικά αυτά αποτελέσματα:

- Στον κλάδο ΑΓΒ ρεύμα 1 Α ρέει αντίθετα από ό,τι έχουμε σημειώσει στο σχήμα, δηλαδή από το Β προς το Α.
- Στον κλάδο ΑΔΒ δεν ρέει ρεύμα.
- Στον κλάδο ΑΕΒ ρεύμα 1 Α ρέει αντίθετα από ό,τι έχουμε σημειώσει στο σχήμα, δηλαδή από το Α προς το Β.

Παράδειγμα 7.3.2.

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.36 είναι $E = 4 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $R_{AB} = R_1 = 20 \Omega$ και $R_{A\Delta} = x \Omega$. Να βρεθεί η συνάρτηση $I = f(x)$, όπου I το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Μετασχηματίζουμε το κύκλωμα του σχήματος 7.36, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3γ, ώστε να έχουμε καλύτερη εποπτεία της λειτουργίας του. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3γ το κύκλωμα έχει $k=2$ κόμβους (Γ, Δ) και $\lambda=3$ κλάδους από τους οποίους ρέουν ρεύματα εντάσεων I , I_1 και I_2 .

Εφαρμόζουμε τον 1ο κανόνα Kirchhoff σε $k-1=1$ κόμβο, π.χ. τον κόμβο Γ:

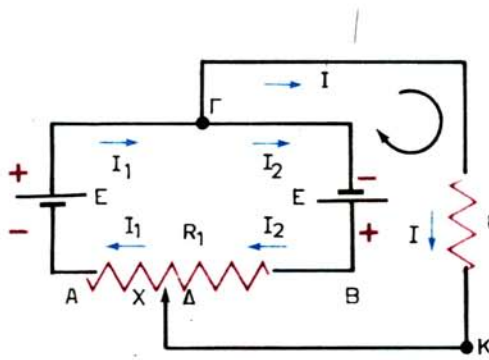
$$I_1 - I_2 - I = 0 \quad (1)$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον 2ο κανόνα Kirchhoff σε $\lambda-k+1=2$ θρόχους, έστω τους θρόχους ΑΓΚΔΑ και ΒΓΚΔΒ, επιλέγοντας τις θετικές φορές διαγραφής τους, που φαίνεται στο σχήμα 7.3γ κι έτσι παίρνουμε:

$$\text{Από το θρόχο ΑΓΚΔΑ: } E = IR + I_1 \cdot x \quad (2)$$

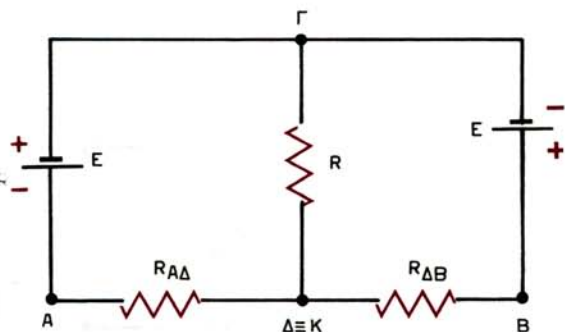
$$\text{Από το θρόχο ΒΓΚΔΒ: } -E = IR - I_2 (R_1 - x) \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow I_1 = \frac{E - IR}{x} \quad (3) \rightarrow I_2 = \frac{E + IR}{R_1 - x}$$



Σχ. 7.36.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.3.2.



Σχ. 7.3γ.

Μετασχηματισμένο κύκλωμα σχήματος 7.36.

Τις τιμές των I_1 και I_2 αντικαθιστούμε στην (1) και καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$I = \frac{E (R_1 - 2x)}{x (R_1 - x) + RR_1} = f(x)$$

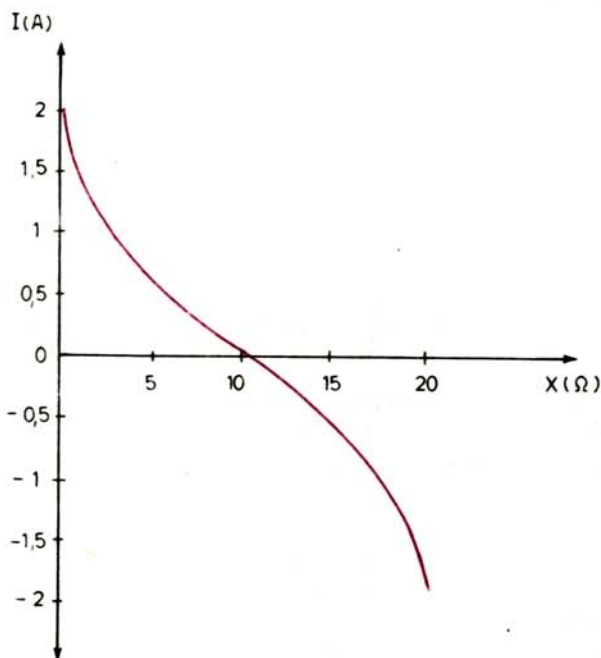
- α) Όταν $x = 0 \rightarrow I = 2 \text{ A}$
 β) Όταν $x = R_1 \rightarrow I = -2 \text{ A}$
 γ) Όταν $x = \frac{R_1}{2} \rightarrow I = 0$

Στο σχήμα 7.3δ φαίνεται η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $I = f(x)$.

Παράδειγμα 7.3.3.

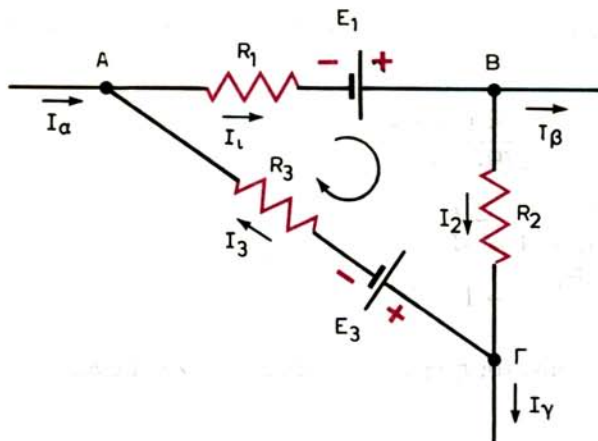
Δίνεται το τμήμα δικτύου του σχήματος 7.3ε όπου $I_a = 6,5 \text{ A}$, $I_b = 4,8 \text{ A}$, $E_1 = 16 \text{ V}$, $E_3 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 0,4 \Omega$. Ζητούνται τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1 , R_2 και R_3 καθώς και το ρεύμα I_v .

Το κύκλωμα του σχήματος 7.3ε αποτελεί τμήμα ενός δικτύου. Το τμήμα αυτό επικοινωνεί με το υπόλοιπο δίκτυο μέσω των κόμβων Α, Β και Γ, όπου φθάνουν ρεύματα εντάσεων I_a , I_b και I_v αντίστοιχα. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τέσσερις εντάσεις ρεύματος (I_1 , I_2 , I_3 και I_v). Παρατηρούμε ότι στο υπόψη **τμήμα δικτύου** δεν μπορούμε να διαμορφώσουμε το πλήθος των εξισώσεων των κανόνων Kirchhoff, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο αυτή. Εδώ έχουμε ένα



Σχ. 7.3δ.

Καμπύλη $I = f(x)$ παραδείγματος 7.3.2.



Σχ. 7.3ε.

Κύκλωμα του παραδείγματος 7.3.3.

μόνο βρόχο, τον ABΓΑ, από τον οποίο θα πάρουμε μια μόνο εξίσωση, και τρεις κόμβους από τους οποίους, **επειδή έχουμε να κάνουμε με τμήμα δικτύου**, μπορούμε να πάρουμε 3 ανεξάρτητες μεταξύ τους εξισώσεις. Έτσι έχουμε:

$$\text{Από τον κόμβο A: } I_{\alpha} + I_3 - I_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Από τον κόμβο B: } I_1 - I_2 - I_{\beta} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Από τον κόμβο Γ: } I_2 - I_3 - I_{\gamma} = 0 \quad (3)$$

$$\text{και από το βρόχο ABΓΑ: } E_1 - E_3 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (4)$$

$$(1) \rightarrow I_3 = I_1 - I_{\alpha} \quad (5), \quad (2) \rightarrow I_2 = I_1 - I_{\beta} \quad (6)$$

οπότε η (4) δίνει:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_3 + I_{\beta} R_2 + I_{\alpha} R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 4,4 \text{ A}$$

Από τις (5), (6) και (3) παίρνουμε:

$$I_3 = 4,4 - 6,5 = -2,1 \text{ A}, \quad I_2 = 4,4 - 4,8 = -0,4 \text{ A} \text{ και } I_{\gamma} = I_2 - I_3 = -0,4 + 2,1 = 1,7 \text{ A}$$

Η φορά των ρευμάτων I_2 και I_3 δεν είναι αυτή που σχεδιάστηκε στο σχήμα αλλά η αντίθετη.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση των παραδειγμάτων που ακολουθούν, είναι σκόπιμο να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την παρουσία **προσγειώσεων** σε κυκλώματα:

- Τα σημεία όπου γίνονται οι προσγειώσεις εξ' ορισμού έχουν δυναμικό ίσο με το δυναμικό της γης, δηλαδή μηδέν.
- Αν το κύκλωμα έχει **ένα μόνο** σημείο προσγειώσεως, τότε από τον αγωγό

προσγειώσεως δεν διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα προς τη γη.

- Αν το κύκλωμα έχει περισσότερα από ένα σημεία προσγειώσεως, τότε από τους αγωγούς προσγειώσεως διέρχεται εν γένει ηλεκτρικό ρεύμα. Στην περίπτωση αυτή τα προσγειωμένα σημεία μπορούμε να τα συνδέουμε με αγωγό χωρίς αντίσταση.

Παράδειγμα 7.3.4.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7.3στ, όπου $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 8\text{ V}$, $r_1 = r_2 = 0,5\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$ και $R_2 = R_3 = 4,5\ \Omega$. Ζητείται να υπολογισθεί το δυναμικό του σημείου A.

Εφόσον έχουμε μια μόνο γείωση, ο αγωγός γειώσεως δεν διαρρέεται από ρεύμα. Το ρεύμα I , που ρέει στο κύκλωμα, υπολογίζεται από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο μοναδικό θρόχο του κυκλώματος:

$$E_1 - E_2 = I R_2 + I R_3 + I r_2 + I R_1 + I r_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{R_2 + R_3 + R_1 + r_1 + r_2} = \frac{4}{20} = 0,2\text{ A}$$

$$\text{Άρα } U_A - U_\Gamma = U_A = I R_2 = 0,2 \cdot 4,5 = 0,9\text{ V}$$

Παράδειγμα 7.3.5.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7.3ζ, όπου $E_1 = 20\text{ V}$, $E_2 = 5\text{ V}$ και $R_1/R_2 = 1,5$. Να υπολογισθεί η E_3 , ώστε ο κλάδος AB να μη διαρρέεται από ρεύμα.

Συνδέουμε τα προσγειωμένα σημεία με αγωγό χωρίς αντίσταση (σχ. 7.3η).

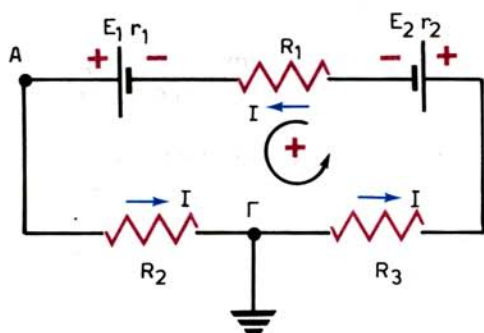
Στο κύκλωμα τότε έχουμε $\kappa=2$ κόμβους και $\lambda=3$ κλάδους. Άρα θα πάρουμε $\kappa-1=1$ εξίσωση από τον 1ο κανόνα και $\lambda-\kappa+1=2$ εξισώσεις από το 2ο κανόνα. Συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\text{Από τον κόμβο A: } I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$\text{Από το θρόχο ABZEA: } E_1 - E_3 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (2)$$

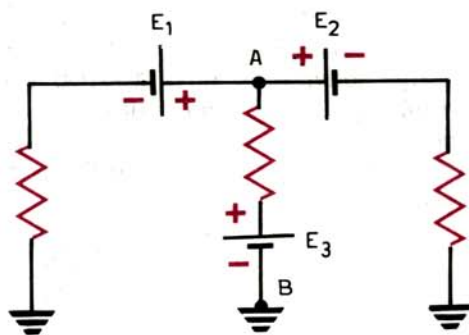
$$\text{και από το θρόχο AΔΓΒΑ: } E_3 - E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow I_1 = I_2 \text{ επειδή } I_3 = 0$$



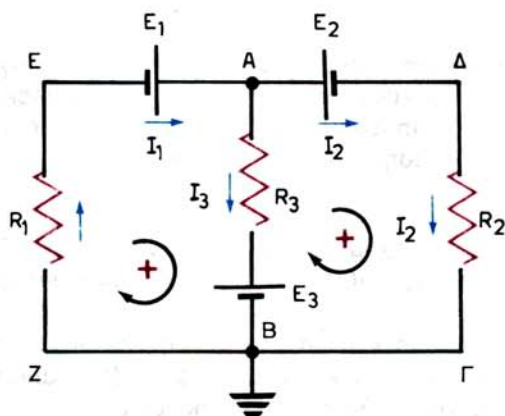
Σχ. 7.3στ.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.3.4.



Σχ. 7.3ζ.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.3.5.



Σχ. 7.3η.

Μετασχηματισμένο κύκλωμα παραδείγματος 7.3.5.

Διαιρούμε κατά μέλη τις (2) και (3):

$$\frac{E_1 - E_3}{E_3 - E_2} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow E_3 = 11 \text{ V}$$

7.4 Πηγές τάσεως και πηγές ρεύματος – Ιδανικές πηγές.

Όπως γνωρίζουμε μια ηλεκτρική πηγή χαρακτηρίζεται από την ηλεκτρεγερτική της δύναμη E και από την εσωτερική της αντίσταση r . Μια τέτοια πηγή ονομάζεται **πραγματική πηγή τάσεως**. Ως **ιδανική πηγή τάσεως** θεωρείται μια πηγή με σταθερή ΗΕΔ E και μηδενική εσωτερική αντίσταση (σχ. 7.4α).

Έτσι σ' ένα φορτίο R_{ϕ} , που συνδέεται με τους πόλους της πηγής, η τάση U είναι σταθερή ($U = E$) και ανεξάρτητη από το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο.

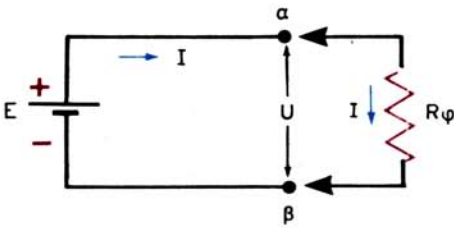
Αν οι ακροδέκτες α και β (σχ. 7.4α) μιας ιδανικής πηγής τάσεως βραχυκυκλωθούν, τότε το ρεύμα που παρέχει η πηγή θα έτεινε στο άπειρο ($I = E/r \rightarrow \infty$). Το ίδιο βέβαια θα συνέβαινε με την ισχύ της ($P = E \cdot I$) και την ενέργειά της. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τους θεμελιώδεις φυσικούς νόμους. Η ιδανική δηλαδή πηγή δεν μπορεί να υπάρξει στην πράξη.

Την πραγματική πηγή τάσεως την παριστάνουμε με μια ιδανική πηγή με σταθερή ΗΕΔ E και μια αντίσταση r , ίση με την εσωτερική αντίσταση της πηγής, που συνδέεται σε σειρά.

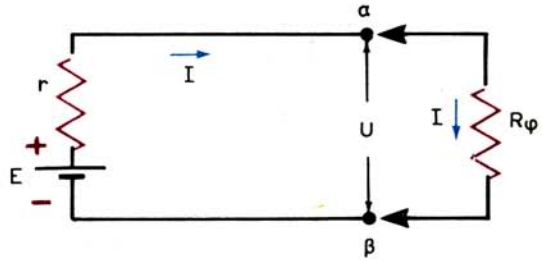
Αν συνδέσουμε ένα φορτίο R_{ϕ} με τους πόλους της πηγής (σχ. 7.4β) τότε η τάση $U_{\alpha\beta} = U$ θα είναι:

$$U = I R_{\phi} = \frac{E R_{\phi}}{r + R_{\phi}} = \frac{E}{\frac{r}{R_{\phi}} + 1} \quad (7.11)$$

Από τη σχέση (7.11) διαπιστώνουμε ότι η τάση στους πόλους πραγματικής πηγής είναι συνάρτηση του φορτίου R_{ϕ} . Για $R_{\phi} = 0$ (βραχυκυκλωμένοι πόλοι της πηγής) είναι $U = 0$ και για $R_{\phi} = \infty$ είναι $U = E$.



Σχ. 7.4α.
Ιδανική πηγή τάσεως.



Σχ. 7.4β.
Κύκλωμα πραγματικής πηγής τάσεως.

Η καμπύλη του σχήματος 7.4γ δείχνει πώς μεταβάλλεται η τάση U σε συνάρτηση με το φορτίο R_{ϕ} .

Εκτός από τις πηγές τάσεως χρησιμοποιούνται σε ηλεκτρονικά κυκλώματα και **πηγές ρεύματος**. Μια **πραγματική πηγή ρεύματος** παρέχει ρεύμα σταθερής εντάσεως I_G , όταν είναι βραχυκυκλωμένη και παρουσιάζει επίσης ορισμένη εσωτερική αντίσταση r .

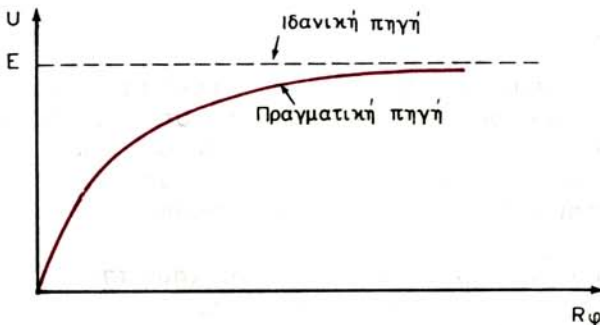
Ως ιδανική πηγή ρεύματος θεωρείται μια πηγή που παρέχει σταθερό ρεύμα I_G ανεξάρτητο από την τάση στους πόλους της πηγής (σχ. 7.4δ).

Η ιδανική πηγή ρεύματος δεν υπάρχει στην πραγματικότητα για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε και για την ιδανική πηγή τάσεως.

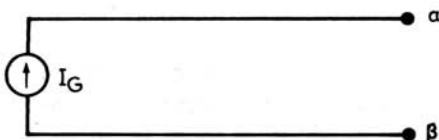
Την πραγματική πηγή ρεύματος την παριστάνουμε με μια ιδανική πηγή ρεύματος I_G και μια εσωτερική αντίσταση r που συνδέεται παράλληλα στην πηγή.

Αν συνδέσουμε στους ακροδέκτες α, β της πηγής (σχ. 7.4ε) ένα φορτίο R_{ϕ} , θα έχουμε:

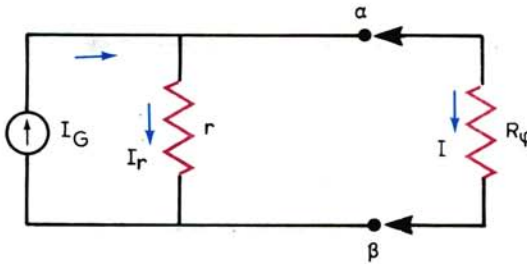
$$I_G = I_r + I \quad (7.12)$$



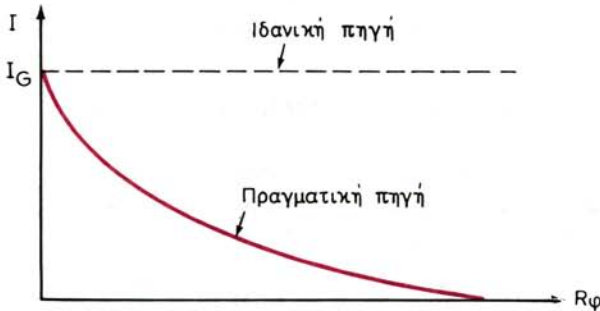
Σχ. 7.4γ.
Μεταβολή της τάσεως U με το φορτίο R_{ϕ} πηγής τάσεως.



Σχ. 7.4δ.
Ιδανική πηγή ρεύματος.



Σχ. 7.4ε.
Κύκλωμα πραγματικής
πηγής ρεύματος.



Σχ. 7.4στ.
Μεταβολή του ρεύματος I με
το φορτίο R_ϕ πηγής ρεύματος.

Από τη σχέση (7.12) διαπιστώνομε ότι όταν οι πόλοι της πηγής είναι βραχυκυκλωμένοι ($R_\phi=0$), τότε $I = I_G$ και όταν οι πόλοι της πηγής δεν συνδέονται με κανένα φορτίο ($R_\phi = \infty$), τότε $I = 0$. Η καμπύλη του σχήματος 7.4στ δείχνει πώς μεταβάλλεται το ρεύμα I σε συνάρτηση με το φορτίο R_ϕ .

Πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι η χρησιμοποίηση του όρου «ηλεκτρική πηγή» χωρίς άλλη διευκρίνιση σημαίνει «ηλεκτρική πηγή τάσεως»· αντίθετα, όταν πρόκειται για πηγή ρεύματος, αυτό ρητά συνοδεύει τον όρο «ηλεκτρική πηγή».

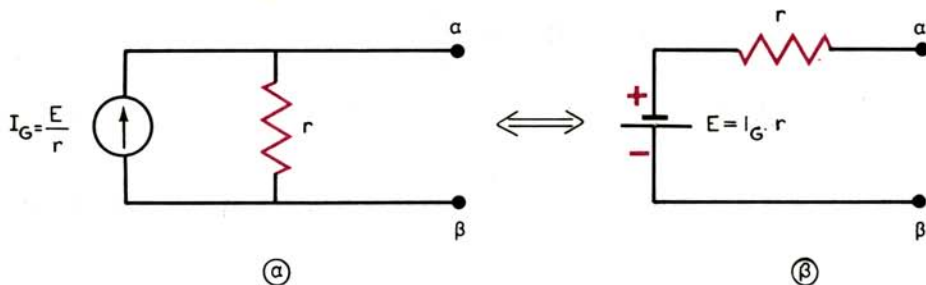
7.4.1 Μετασχηματισμός ηλεκτρικών πηγών.

Σε αρκετές περιπτώσεις είναι σκόπιμο – ή ακόμη και απαραίτητο – να μετασχηματίζομε μια πηγή ρεύματος σε πηγή τάσεως και αντιστρόφως. Ας αναφέρουμε π.χ. ότι ο 2ος κανόνας του Kirchhoff δεν μπορεί να εφαρμοσθεί παρά μόνο όταν ο βρόχος έχει μόνο πηγές τάσεως. Έτσι, είναι χρήσιμο να γνωρίζομε πώς γίνεται ο μετασχηματισμός αυτός, ο οποίος στηρίζεται στην εξής πρόταση:

Δυο ηλεκτρικές πηγές θεωρούνται ισοδύναμες, όταν παρέχουν την ίδια τάση και την ίδια ένταση ρεύματος στην ίδια κατανάλωση.

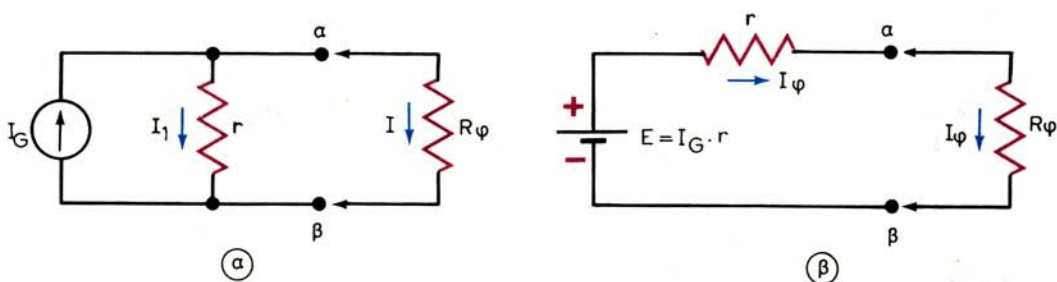
Με βάση την πρόταση αυτή θα αποδείξομε ότι μια πηγή ρεύματος, εντάσεως I_G και εσωτερικής αντιστάσεως r , μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη πηγή τάσεως ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως $E = I_G \cdot r$ και εσωτερικής αντιστάσεως r , όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα 7.4ζ.

Ας υποθέσομε ότι μεταξύ των ακροδεκτών α και β των δυο πηγών του σχήματος 7.4ζ συνδέομε φορτίο αντιστάσεως R_ϕ , της ίδιας τιμής και στις δυο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4η.



Σχ. 7.4ζ.

Ισοδύναμες πηγές. α) Ρεύματος. β) Τάσεως.



Σχ. 7.4η.

Ισοδύναμα κυκλώματα πηγών. α) Ρεύματος. β) Τάσεως.

Ας υπολογίσουμε την ένταση ρεύματος I , που περνά από την αντίσταση R_ϕ , στην περίπτωση του κυκλώματος της πηγής ρεύματος [σχ. 7.4η(α)]:

Από τον 1ο κανόνα Kirchhoff σ' ένα κόμβο του κυκλώματος έχουμε:

$$I_G = I_1 + I$$

Εξάλλου για τη διαφορά δυναμικού $U_{αβ}$ έχουμε:

$$U_{αβ} = I_1 r = I R_\phi$$

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε:

$$I = I_G \frac{r}{R_\phi + r} \quad (7.13)$$

και

$$U_{αβ} = I_G \frac{r R_\phi}{R_\phi + r} \quad (7.14)$$

Εξάλλου η ένταση ρεύματος I_ϕ , που περνά από την αντίσταση R_ϕ , στην περίπτωση του κυκλώματος της πηγής τάσεως [σχ. 7.4η (β)], είναι:

$$I_\phi = \frac{E}{R_\phi + r} = I_G \frac{r}{R_\phi + r} \quad (7.15)$$

η δε τάση
$$U'_{αβ} = I_{\phi} R_{\phi} = I_G \frac{r R_{\phi}}{R_{\phi} + r} \quad (7.16)$$

Η ισότητα των σχέσεων (7.13) και (7.15) αφ' ενός και (7.14) και (7.16) αφ' ετέρου, δηλαδή:

$$I = I_G \text{ και } U_{αβ} = U'_{αβ}$$

εξασφαλίζει την ισοδυναμία μιας πηγής ρεύματος (I_G, r) με μια πηγή τάσεως ($E = I_G \cdot r$).

Παράδειγμα 7.4.1.

Να μετασχηματισθούν οι πηγές τάσεως του δικτύου του σχήματος 7.4θ σε πηγές ρεύματος και να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R .

Τα ρεύματα των ισοδύναμων πηγών ρεύματος θα είναι:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1} = \frac{9}{3} = 3 \text{ A} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{E_2}{r_2} = 2 \text{ A}$$

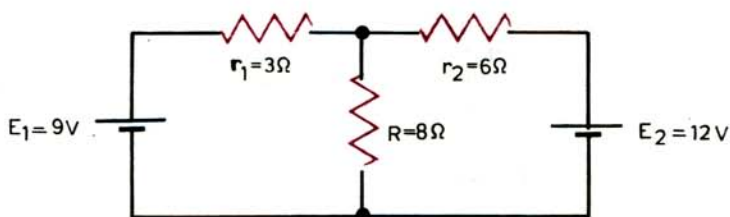
Αντικαθιστούμε τις πηγές τάσεως με τις ισοδύναμες πηγές ρεύματος (σχ. 7.4ι). Είναι:

$$r = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega, \quad I_1 + I_2 = 5 \text{ A}, \quad \text{Άρα } I = 5 \cdot \frac{2}{2 + 8} = 1 \text{ A}$$

Παράδειγμα 7.4.2.

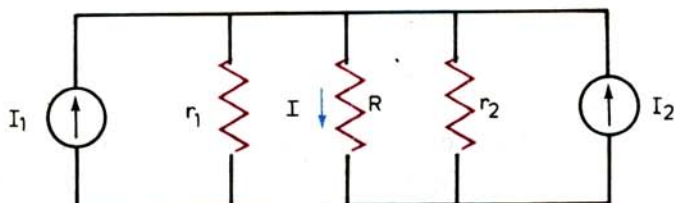
Να μετασχηματιστούν οι πηγές ρεύματος του δικτύου του σχήματος 7.4ια σε μία πηγή τάσεως.

Αντικαθιστούμε τις πηγές ρεύματος με τις ισοδύναμες πηγές τάσεως (σχ. 7.4ιβ).



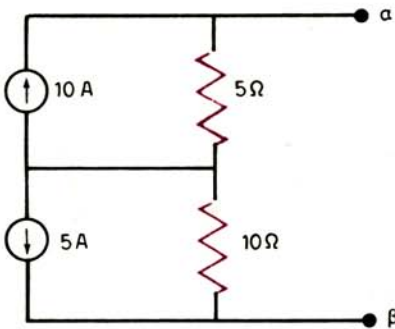
Σχ. 7.4θ.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.4.1.

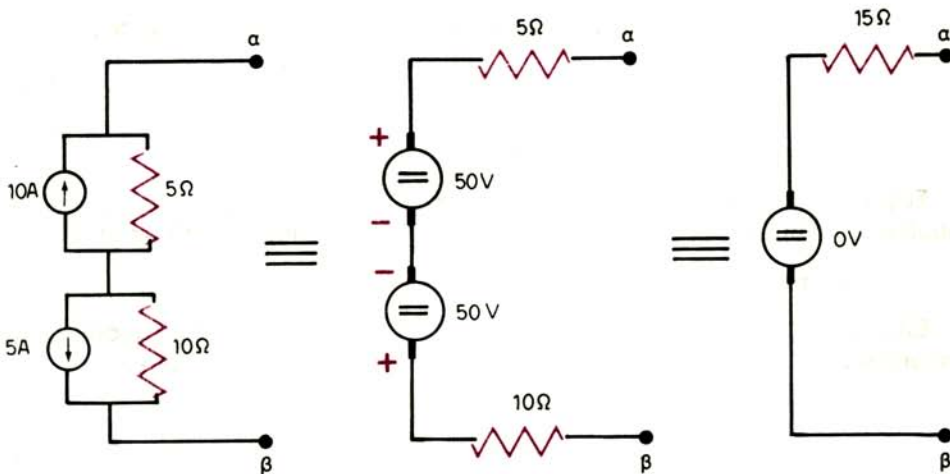


Σχ. 7.4ια.

Μετασχηματισμένο κύκλωμα σχήματος 7.4θ.



Σχ. 7.4α.
Κύκλωμα παραδείγματος 7.4.2.



Σχ. 7.4β.

Μετασχηματισμοί των πηγών του κυκλώματος του σχήματος 7.4α.

Τελικά βρίσκουμε μια πηγή τάσεως 0 V και αντίσταση σε σειρά 15 Ω.

7.4.2 Συνδεσμολογία ηλεκτρικών πηγών τάσεως.

Μια ηλεκτρική πηγή τάσεως έχει μια ορισμένη ΗΕΔ και μπορεί να δώσει ένα (ορισμένο) μέγιστο ρεύμα σε κανονική λειτουργία. Όταν θέλουμε σ' ένα κύκλωμα μεγαλύτερη ΗΕΔ, ή μεγαλύτερη ένταση ή και τα δυο πρέπει να συνδέσουμε μεταξύ τους περισσότερες πηγές με έναν από τους τρόπους που αναφέρομε στη συνέχεια.

Σε κάθε περίπτωση συνδεσμολογίας ηλεκτρικών πηγών ενδιαφέρει ο υπολογισμός των στοιχείων ($E_{ολ}$, $r_{ολ}$) μιας ισοδύναμης πηγής η οποία, αν συνδεθεί μεταξύ των σημείων του κυκλώματος, όπου συνδέεται η συνδεσμολογία της πηγής, παρέχει την ίδια τάση και την ίδια ένταση ρεύματος στην τροφοδοτούμενη κατανάλωση.

α) Σύδεση πηγών σε σειρά.

Οι ηλεκτρικές πηγές συνδέονται σε σειρά, όταν ο αρνητικός πόλος της

πρώτης συνδέεται με το θετικό της δεύτερης, ο αρνητικός της δεύτερης με το θετικό της τρίτης κλπ.

Έτσι, η κατανάλωση συνδέεται μεταξύ του θετικού πόλου της πρώτης πηγής και του αρνητικού της τελευταίας, όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.4ιγ.

Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ισοδύναμης πηγής, δηλαδή την ΗΕΔ ($E_{o\lambda}$) καθώς και την εσωτερική της αντίσταση ($r_{o\lambda}$).

Σύμφωνα με το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο του κυκλώματος του σχήματος 7.4ιγ, έχουμε:

$$E_1 + E_2 + E_3 = IR + Ir_1 + Ir_2 + Ir_3 \rightarrow I = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{R + r_1 + r_2 + r_3} \quad (7.17)$$

Εξάλλου, αν μεταξύ των σημείων Α και Β του κυκλώματος συνδέσουμε την ισοδύναμη πηγή, θα έχουμε:

$$I = \frac{E_{o\lambda}}{R + r_{o\lambda}} \quad (7.18)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (7.17) και (7.18) συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία της ισοδύναμης πηγής, στην περίπτωση του κυκλώματος που εξετάζουμε, θα είναι:

$$E_{o\lambda} = E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{και} \quad r_{o\lambda} = r_1 + r_2 + r_3$$

Είναι φανερό ότι οι πιο πάνω σχέσεις μπορεί αμέσως να επεκταθούν στην περίπτωση συνδεσμολογίας με n το πλήθος πηγών, οπότε έχουμε:

$$E_{o\lambda} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i \quad (7.19)$$

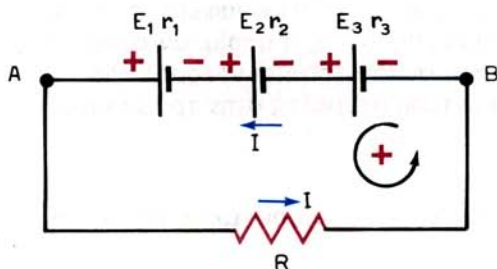
και

$$r_{o\lambda} = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = \sum_{i=1}^n r_i \quad (7.20)$$

Δηλαδή: Όταν έχουμε πηγές σε σειρά η ισοδύναμη ΗΕΔ είναι ίση με το άθροισμα των ΗΕΔ των πηγών και η ισοδύναμη εσωτερική αντίσταση ίση με το άθροισμα των εσωτερικών των αντιστάσεων. Αν έχουμε n όμοιες πηγές οι σχέσεις (7.19) και (7.20) δίνουν:

$$E_{o\lambda} = nE \quad (7.21)$$

$$\text{και } r_{o\lambda} = nr \quad (7.22)$$



Σχ. 7.4ιγ.
Σύνδεση πηγών σε σειρά.

οπότε η ένταση ρεύματος που παρέχει η συνδεσμολογία είναι:

$$I = \frac{nE}{R + nr} \quad (7.23)$$

Τη σύνδεση πηγών σε σειρά εφαρμόζουμε όταν θέλουμε να εξασφαλίσουμε μεγάλη ΗΕΔ.

β) Παράλληλη σύνδεση πηγών.

Οι πηγές συνδέονται παράλληλα, όταν όλοι οι θετικοί πόλοι συνδέονται σε κοινό ακροδέκτη Α, που αποτελεί το θετικό πόλο της συνδεσμολογίας και όλοι οι αρνητικοί σε άλλο κοινό ακροδέκτη Β που αποτελεί τον αρνητικό πόλο της συνδεσμολογίας. Η κατανάλωση συνδέεται μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β (σχ. 7.4ιδ).

Στην παράλληλη σύνδεση πρέπει όλες οι πηγές να είναι όμοιες, γιατί αλλιώς θα κυκλοφορούν ανεπιθύμητα τοπικά ρεύματα στους βρόχους των πηγών, ακόμα και όταν δεν υπάρχει κανένα εξωτερικό φορτίο R.

Θα υπολογίσουμε τώρα τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ισοδύναμης πηγής, δηλαδή την ΗΕΔ ($E_{ολ}$) καθώς και την εσωτερική της αντίσταση ($r_{ολ}$).

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα Kirchhoff σε ένα βρόχο που σχηματίζεται από μια οποιαδήποτε πηγή, π.χ. την πηγή που διαρρέεται από ρεύμα I_2 στο σχήμα 7.4ιδ, και την κατανάλωση (R):

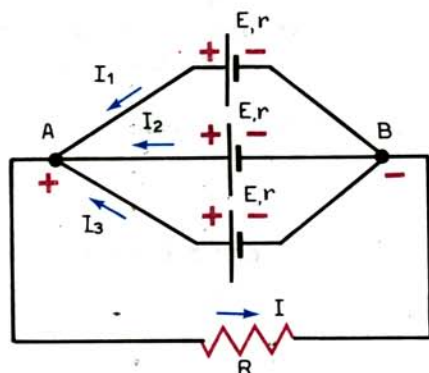
$$E = I_2 r + IR \quad \text{ή} \quad I_2 = \frac{E - IR}{r} \quad (7.24)$$

Όπως είναι φανερό από τη σχέση (7.24), εφόσον όλες οι πηγές είναι μεταξύ τους όμοιες, οι εντάσεις ρεύματος που διέρχονται από τους κλάδους τους θα είναι μεταξύ τους ίσες, δηλαδή:

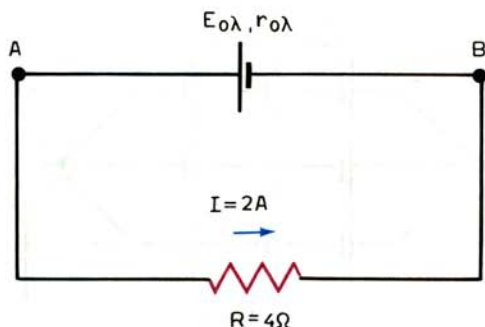
$$I_1 = I_2 = I_3 = I_n$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας τον 1ο κανόνα Kirchhoff στον κόμβο Α, έχουμε:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3 I_n$$



Σχ. 7.4ιδ.
Παράλληλη σύνδεση πηγών.



Σχ. 7.4ιστ.
Κύκλωμα παραδείγματος 7.4.3.

Η αντίσταση του καταναλωτή είναι:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{64}{16} = 4 \Omega$$

και το κανονικό ρεύμα λειτουργίας του:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{16}{8} = 2 \text{ A}$$

Ας δούμε τώρα τι χαρακτηριστικά ($E_{ολ}$, $r_{ολ}$) πρέπει να έχει μια πηγή, ώστε να τροφοδοτήσει αυτή την κατανάλωση (σχ. 7.4ιστ):

$$E_{ολ} = IR + Ir_{ολ} = 8 + 2r_{ολ} \quad (1)$$

Εάν n από τις 12 διατιθέμενες πηγές συνδέσουμε σε σειρά θα έχουμε:

$$E_{ολ} = n \cdot E = 3n \text{ V} \quad (2)$$

και

$$r_{ολ} = n \cdot r = 1,5n \Omega \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) παίρνουμε:

$$3n = 8 + 2 \cdot 1,5n = 8 + 3n$$

Είναι φανερό ότι η πιο πάνω εξίσωση είναι **αδύνατη**, άρα η συνδεσμολογία σε σειρά δεν μπορεί να εξυπηρετήσει την κατανάλωση. Είναι επίσης φανερό ότι και παράλληλη συνδεσμολογία δεν εξυπηρετεί, δοθέντος ότι η ΗΕΔ κάθε πηγής (3 V) είναι μικρότερη από την απαιτούμενη τάση τροφοδοσίας του καταναλωτή (8 V). Έτσι, καταλήγουμε στο ότι – ενδεχομένως – μόνο με μικτή σύνδεση μπορεί να τροφοδοτήσουμε την κατανάλωση αυτή.

Σύμφωνα με τη σχέση (7.33) έχουμε:

$$I = \frac{\alpha E}{R + \frac{\alpha r}{\theta}} \rightarrow 2 = \frac{3\alpha}{4 + \frac{1,5\alpha}{\theta}} \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι χρησιμοποιούμε και τις 12 πηγές. Τότε έχουμε:

$$\alpha \cdot \theta = 12 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) λύνοντας ως προς α λαμβάνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$3\alpha^2 - 36\alpha + 96 = 0$$

Ρίζες της είναι οι: $\alpha_1 = 4$ και $\alpha_2 = 8$.

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω ρίζες στη σχέση (5) λαμβάνουμε για το θ τις τιμές: $\theta_1 = 3$ και $\theta_2 = 1,50$.

Απορρίπτομε – για προφανείς λόγους – τη δεκαδική τιμή $\theta = 1,50$ και δεχόμαστε μόνο την ακέραια: $\theta = 3$ οπότε $\alpha = 4$.

Δηλαδή, η τροφοδοσία επιτυγχάνεται εάν σχηματίσουμε 3 παράλληλες συστοιχίες που η κάθε μια αποτελείται από 4 πηγές σε σειρά.

Παράδειγμα 7.4.4.

Σαράντα στοιχεία συνδέονται μικτά και τροφοδοτούν καταναλωτή που έχει αντίσταση 3Ω . Κάθε στοιχείο έχει ΗΕΔ $1,6 V$ και εσωτ. αντίσταση $0,3 \Omega$. Να καθορισθεί ο τρόπος συνδέσεως για να γίνει το ρεύμα που διαρρέει τον καταναλωτή μέγιστο και να υπολογισθεί αυτό το ρεύμα.

Σύμφωνα με τη σχέση (7.34) πρέπει:

$$R = r_{\text{ολ}} = \frac{\alpha r}{\theta} \quad (1)$$

$$\text{Είναι επίσης:} \quad \alpha \cdot \theta = n \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $\alpha = 20$ και $\theta = 2$.

Το μέγιστο ρεύμα σύμφωνα με τη σχέση (7.35) θα είναι:

$$I_{\text{max}} = \frac{\alpha E}{2R} = \frac{20 \cdot 1,6}{2 \cdot 3} = 5,33 \text{ A}$$

Πριν κλείσουμε αυτή την παράγραφο, όπου μελετήσαμε τους τρόπους συνδεσμολογίας των ηλεκτρικών πηγών τάσεως, είναι αναγκαίο να παρατηρήσουμε ότι αντίστοιχες συνδεσμολογίες πραγματοποιούνται και για τις πηγές ρεύματος. Οι σχέσεις που δίνουν τα χαρακτηριστικά των ισοδυνάμων πηγών

ρεύματος προκύπτουν ανάλογα. Ανάπτυξη όμως του αντικειμένου αυτού ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού.

7.5 Η μέθοδος των βροχικών εντάσεων για την επίλυση δικτύου.

Η μέθοδος των βροχικών εντάσεων διατυπώθηκε από το Σκωτσέζο φυσικό J.C. Maxwell* και φέρει επίσης τις ονομασίες *μέθοδος των βρόχων*, *μέθοδος των οφθαλμών* και *μέθοδος Maxwell*. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται αποκλειστικά στο *δεύτερο κανόνα Kirchhoff* και συνεπώς, κατά την εφαρμογή της, τηρούνται όλες οι σχετικές με τον κανόνα αυτόν συμβάσεις που αναφέραμε στις παραγράφους 7.2 και 7.3. Επίσης, ισχύει η προϋπόθεση που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο 7.4, ότι δηλαδή το κύκλωμα πρέπει να έχει μόνο πηγές τάσεως, ή εφόσον έχει πηγές εντάσεως να έχουν προηγουμένως μετασχηματισθεί.

Για να επιλύσουμε ένα κύκλωμα, με τη μέθοδο των βροχικών εντάσεων, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1) Αναγνωρίζουμε τους βρόχους του κυκλώματος, και επιλέγουμε $(\lambda - \kappa + 1)$ ανεξάρτητους βρόχους.

2) Θεωρούμε ότι σε όλους τους κλάδους, καθενός από τους $(\lambda - \kappa + 1)$ ανεξάρτητους βρόχους, κυκλοφορεί ρεύμα της ίδιας εντάσεως που ονομάζεται *βροχική ένταση*. Για λόγους ομοιομορφίας επιλέγουμε την ίδια φορά για όλες τις βροχικές εντάσεις του κυκλώματος, συνήθως την ωρολογιακή.

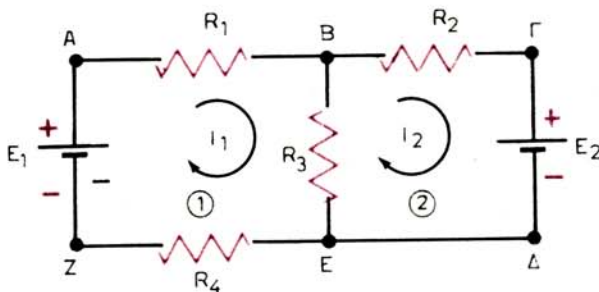
3) Διατυπώνουμε τις $(\lambda - \kappa + 1)$ εξισώσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff, για τους ανεξάρτητους βρόχους του κυκλώματος. Καταστρώνουμε έτσι σύστημα $(\lambda - \kappa + 1)$ εξισώσεων ως προς τις ισάριθμες άγνωστες βροχικές εντάσεις. Επιλύουμε το σύστημα.

4) Υπολογίζουμε τώρα τις εντάσεις κάθε κλάδου του κυκλώματος, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

- Αν ο υπόψη κλάδος ανήκει σε *ένα μόνο* από τους ανεξάρτητους βρόχους που επιλέξαμε, η έντασή του ισούται προς την αντίστοιχη βροχική ένταση.
- Αν ο υπόψη κλάδος ανήκει σε *δύο* από τους ανεξάρτητους βρόχους που επιλέξαμε, η έντασή του ισούται προς το αλγεβρικό άθροισμα των βροχικών εντάσεων των ρευμάτων των ανεξαρτήτων βρόχων, για τους οποίους ο υπόψη κλάδος είναι κοινός. Αν οι βροχικές εντάσεις έχουν επιλεγεί με την ίδια φορά, τότε η ένταση του ρεύματος του κλάδου προκύπτει ως η διαφορά των δυο βροχικών εντάσεων.

Πλεονέκτημα της μεθόδου των βροχικών εντάσεων, σε σύγκριση με τη γενική μέθοδο επίλυσης δικτύου με βάση τους δυο κανόνες Kirchhoff που αναπτύξαμε στην παράγραφο 7.3, είναι: τώρα έχουμε να επιλύσουμε σύστημα $(\lambda - \kappa + 1)$ εξισώσεων αντί του συστήματος των λ εξισώσεων της προηγούμενης μεθόδου, δηλαδή, το προς επίλυση σύστημα έχει $\kappa - 1$ εξισώσεις λιγότερες. Το πλεονέκτημα όμως δεν είναι μόνον ο περιορισμός των αγνώστων του προβλήματος, αλλά, κυρίως, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η συστηματοποίηση

* J.C. Maxwell, 1831-1879.



Σχ. 7.5α.

Απλό κύκλωμα για την εφαρμογή της μεθόδου των βροχικών εντάσεων.

ση της εργασίας σε μεγάλο βαθμό, η οποία, τελικά, μας απαλλάσσει από αρκετό κόπο.

Ας εφαρμόσουμε πρώτα τη μέθοδο των βροχικών εντάσεων στην απλή περίπτωση του κυκλώματος του σχήματος 7.5α. Το κύκλωμα έχει δυο κόμβους ($\kappa = 2$) και τρεις κλάδους ($\lambda = 3$), άρα έχει $\lambda - \kappa + 1 = 2$ ανεξάρτητους βρόχους. Επιλέγουμε για την εφαρμογή της μεθόδου τους βρόχους ΑΒΕΖΑ και ΒΓΔΕΒ με βροχικές εντάσεις I_1 και I_2 αντίστοιχα. Για λόγους ευκολίας αριθμούμε τους βρόχους αντίστοιχα με τους δείκτες των βροχικών τους εντάσεων. Θεωρούμε επίσης, για λόγους ευκολίας, ότι οι εσωτερικές αντιστάσεις των πηγών E_1 και E_2 περιλαμβάνονται στις αντιστάσεις R_1 και R_2 αντίστοιχα.

Γράφουμε για τους βρόχους αυτούς το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff:

$$\text{Βρόχος 1:} \quad I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_3 + I_1 R_4 = E_1 \quad (7.36)$$

$$\text{Βρόχος 2:} \quad I_2 R_2 + (I_2 - I_1) R_3 = -E_2 \quad (7.37)$$

$$\text{ή} \quad I_1 (R_1 + R_3 + R_4) - I_2 R_3 = E_1 \quad (7.38)$$

$$-I_1 R_3 + I_2 (R_2 + R_3) = -E_2 \quad (7.39)$$

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (7.38) και (7.39) με πιο γενικό τρόπο:

$$I_1 R_{11} - I_2 R_{12} = E_1 \quad (7.40)$$

$$-I_1 R_{21} + I_2 R_{22} = -E_2 \quad (7.41)$$

όπου $R_{11} = R_1 + R_3 + R_4$, $R_{22} = R_2 + R_3$ και $R_{12} = R_{21} = R_3$

Καθένας από τους συντελεστές R_{11} και R_{22} που παρέχει το άθροισμα των αντιστάσεων ενός ανεξάρτητου βρόχου (1) του κυκλώματος ονομάζεται **αυτοαντίσταση** του αντίστοιχου βρόχου. Καθένας από τους συντελεστές R_{12} και R_{21} που παρέχει την κοινή αντίσταση μεταξύ των δυο βρόχων ονομάζονται **κοινή ή αμοιβαία αντίσταση** δυο βρόχων. Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε και να τυποποιήσουμε τη μέθοδο των βρόχων.

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τα ακόλουθα:

α) Αν υπάρχουν στο κύκλωμα πηγές ρεύματος τις μετατρέπουμε σε πηγές τάσεως.

β) Ορίζουμε σε κάθε ανεξάρτητο βρόχο ένα ρεύμα βρόχου με δεξιόστροφη φορά.

γ) Γράφουμε τις εξισώσεις των βρόχων:

$$\begin{aligned}
 I_1 R_{11} - I_2 R_{12} - I_3 R_{13} - \dots - I_n R_{1n} &= \sum_j E_{1j} \\
 -I_1 R_{21} + I_2 R_{22} - I_3 R_{23} - \dots - I_n R_{2n} &= \sum_j E_{2j} \\
 -I_1 R_{31} - I_2 R_{32} + I_3 R_{33} - \dots - I_n R_{3n} &= \sum_j E_{3j} \\
 &\vdots \\
 -I_1 R_{i1} - I_2 R_{i2} - I_3 R_{i3} - \dots + I_i R_{ii} \dots - I_n R_{in} &= \sum_j E_{ij} \\
 &\vdots \\
 -I_1 R_{n1} - I_2 R_{n2} - I_3 R_{n3} - \dots + I_n R_{nn} &= \sum_j E_{nj}
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

όπου: I_i η βροχική ένταση του βρόχου i ,

R_{ii} η αυτοαντίσταση του βρόχου i ,

R_{in} η αμοιβαία αντίσταση των βρόχων i και n ,

$\sum_j E_{nj}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ΗΕΔ στο βρόχο i που σχηματίζεται με βάση τη σύμβαση που ισχύει για την εφαρμογή του δεύτερου κανόνα Kirchhoff και

$n = \lambda - \kappa + 1$, το πλήθος των ανεξαρτήτων βρόχων του κυκλώματος.

Είναι φανερό ότι:

- Το αριστερό μέρος κάθε εξισώσεως είναι το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσεως στις αντιστάσεις του βρόχου.

- Το δεξιό μέρος είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ΗΕΔ των πηγών στο βρόχο που εξετάσαμε.

δ) Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (7.42) με τη μέθοδο των οριζουσών (κανόνας του Cramer) θα έχουμε:

$$I = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \quad I_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Η «χαρακτηριστική ορίζουσα» Δ γράφεται:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1n} \\ -R_{21} & +R_{22} & \dots & -R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & -R_{n2} & \dots & +R_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.43}$$

Η ορίζουσα Δ_1 προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την πρώτη στήλη της Δ με τη στήλη των δευτέρων μελών των εξισώσεων του συστήματος (7.42). Δηλαδή:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Sigma E_1 & -R_{12} & \dots & -R_{1n} \\ \Sigma E_2 & +R_{22} & \dots & -R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma E_n & -R_{n2} & \dots & +R_{nn} \end{vmatrix} \quad (7.44)$$

Ανάλογα προκύπτουν και οι ορίζουσες $\Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$. Όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο της Δ είναι οι αυτοαντιστάσεις και έχουν πάντα θετικό πρόσημο. Όλα τα άλλα στοιχεία της Δ είναι οι αμοιβαίες αντιστάσεις και έχουν πάντα αρνητικό πρόσημο.

ε) Αφού υπολογίσουμε τις βροχικές εντάσεις υπολογίζουμε τις εντάσεις των κλάδων, ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου (5) πιο πάνω.

Παράδειγμα 7.5.1.

Δίνεται το δίκτυο του σχήματος 7.56. Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους AB και ΓΔ με τη μέθοδο των βρόχων.

Είναι: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 40 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$

$R_2 = R_5 = 10 \Omega$ και $R_4 = 15 \Omega$

Το κύκλωμα έχει $k = 3$ κόμβους (A, Γ, B \equiv Δ) και $\lambda = 5$ κλάδους. Άρα έχει $\lambda - k + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ ανεξάρτητους βρόχους. Επιλέγουμε τους βρόχους 1, 2 και 3 που φαίνονται στο σχήμα 7.56.

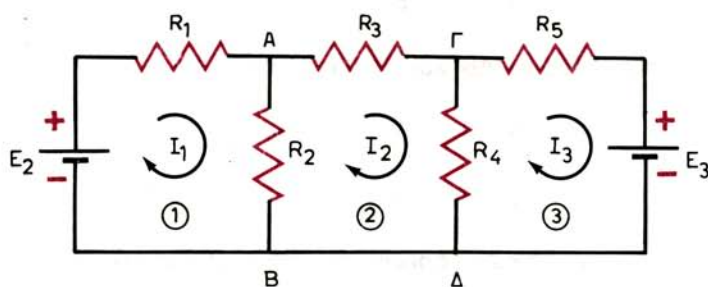
Οι ανεξάρτητοι βρόχοι είναι τρεις.

Ορίζουμε τα ρεύματα των βρόχων I_1, I_2 και I_3 με ωρολογιακή φορά. Γράφουμε τις εξισώσεις των βρόχων:

$$I_1 R_{11} - I_2 R_{12} - I_3 R_{13} = E_1$$

$$-I_1 R_{21} + I_2 R_{22} - I_3 R_{23} = 0 \quad (1)$$

$$-I_1 R_{31} - I_2 R_{32} + I_3 R_{33} = -E_3$$



Σχ. 7.56.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.5.1.

$$\begin{aligned} \text{όπου: } R_{11} &= R_1 + R_2 = 5 + 10 = 15 \, \Omega, \\ R_{22} &= R_2 + R_3 + R_4 = 10 + 4 + 15 = 29 \, \Omega, \\ R_{33} &= R_4 + R_5 = 15 + 10 = 25 \, \Omega, \\ R_{12} &= R_{21} = R_2 = 10 \, \Omega, \\ R_{13} &= R_{31} = 0 \text{ και} \\ R_{23} &= R_{32} = R_4 = 15 \, \Omega \end{aligned}$$

οπότε το σύστημα των εξισώσεων (1) γίνεται:

$$15 I_1 - 10 I_2 - 0 I_3 = 20$$

$$-10 I_1 + 29 I_2 - 15 I_3 = 0 \quad (2)$$

$$-0 I_3 - 15 I_2 + 25 I_3 = -40$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) με τον κανόνα του Cramer θα έχουμε:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 29 & -15 \\ 0 & -15 & 25 \end{vmatrix} = 5000$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -10 & 0 \\ 0 & 29 & -15 \\ -40 & -15 & 25 \end{vmatrix} = 4000, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 15 & 20 & 0 \\ -10 & 0 & -15 \\ 0 & -40 & 25 \end{vmatrix} = -4000$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 15 & -10 & 20 \\ -10 & 29 & 0 \\ 0 & -15 & -40 \end{vmatrix} = -10.400$$

οπότε:
$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4000}{5000} = 0,8 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{4000}{5000} = -0,8 \text{ A}$$

και
$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{10.400}{5000} = -2,08 \text{ A}$$

Τα ρεύματα των κλάδων AB και ΓΔ θα είναι:

$$I_{AB} = I_1 - I_2 = 0,8 - (-0,8) = 1,6 \text{ A}$$

$$I_{\Gamma\Delta} = I_2 - I_3 = -0,8 - (-2,08) = 1,28 \text{ A}$$

7.6 Η μέθοδος των κομβικών τάσεων για την επίλυση δικτύου.

Η μέθοδος των κομβικών τάσεων ή **μέθοδος των κόμβων** στηρίζεται αποκλειστικά στον **πρώτο κανόνα Kirchhoff** και συνεπώς, κατά την εφαρμογή

της, τηρούνται όλες οι σχετικές με τον κανόνα αυτό συμβάσεις που αναφέραμε στις παραγράφους 7.2 και 7.3. Επίσης, επί πλέον προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων είναι ότι το κύκλωμα πρέπει να έχει μόνο πηγές εντάσεως, ή εφόσον έχει πηγές τάσεως να έχουν προηγουμένως μετασχηματισθεί. Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της μεθόδου των κόμβων ως αναφέραμε ότι η μέθοδος αυτή είναι αντίστοιχη προς τη μέθοδο των βρόχων, με τις εξής χαρακτηριστικές διαφορές:

- Στη μέθοδο των βρόχων υπολογίζονται οι βροχικές εντάσεις με τη βοήθεια του δεύτερου κανόνα Kirchhoff.
- Στη μέθοδο των *κόμβων* υπολογίζονται οι κομβικές τάσεις με τη βοήθεια του πρώτου κανόνα Kirchhoff.

Και στις δυο μεθόδους ακολουθεί, με απλούς συλλογισμούς και πράξεις, ο υπολογισμός των εντάσεων των κλάδων. Τέλος, και οι δυο μέθοδοι παρουσιάζουν το πλεονέκτημα της συστηματοποίησης της εργασίας σε μεγάλο βαθμό, πράγμα που μας απαλλάσσει από αρκετό κόπο.

Για να επιλύσουμε ένα κύκλωμα με τη μέθοδο των κομβικών τάσεων ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1) Αναγνωρίζουμε τους κόμβους του κυκλώματος. Επιλέγουμε έναν από τους k το πλήθος κόμβους ως *κόμβο αναφοράς*, ενώ οι υπόλοιποι $k-1$ κόμβοι είναι οι ανεξάρτητοι κόμβοι του κυκλώματος. Συνήθως ως κόμβος αναφοράς επιλέγεται ο κόμβος, στον οποίο καταλήγουν οι περισσότεροι κλάδοι. Επίσης θεωρούμε – εντελώς συμβατικά – ότι το δυναμικό του κόμβου αναφοράς είναι μηδέν.

2) Σημειώνουμε στους κλάδους του κυκλώματος τις εντάσεις του ρεύματος και στη συνέχεια διατυπώνουμε τις $(k-1)$ εξισώσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του 1ου κανόνα του Kirchhoff για τους $(k-1)$ ανεξάρτητους κόμβους του κυκλώματος. Καταστρώνουμε έτσι σύστημα $(k-1)$ εξισώσεων ως προς λ αγνώστους, δηλαδή τις εντάσεις του ρεύματος που διέρχεται από τους λ κλάδους του κυκλώματος. Βεβαίως, επειδή $\lambda > k$, το σύστημα αυτό δεν επιλύεται.

3) Λαμβάνουμε τώρα υπόψη ότι η ένταση του ρεύματος I_μ , από ένα οποιοδήποτε κλάδο του κυκλώματος, συνδέεται, σύμφωνα με το νόμο του Ohm, με τα δυναμικά των κόμβων του υπόψη κλάδου, με τη σχέση (σχ. 7.6a):

$$I_\mu = \frac{V_k - V_\lambda}{R_\mu} \quad (7.45)$$

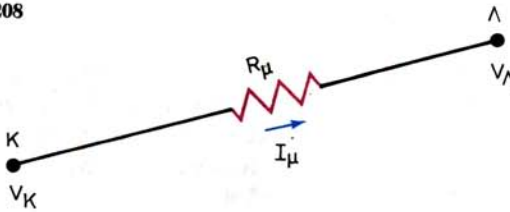
όπου: V_k, V_λ τα δυναμικά στους κόμβους του κλάδου (κομβικές τάσεις),

R_μ η αντίσταση του υπόψη κλάδου και

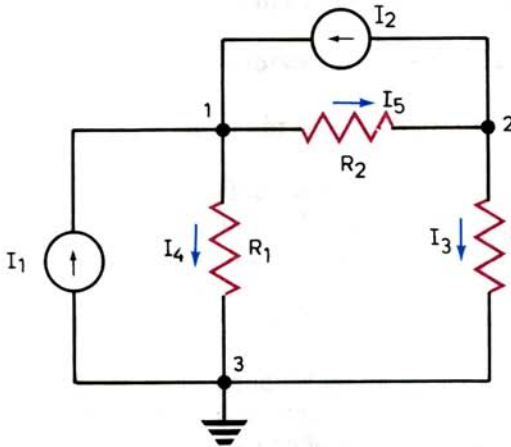
I_μ η ένταση του ρεύματος από τον υπόψη κλάδο.

Εξυπακούεται ότι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (7.45) για κάθε κλάδο του κυκλώματος, εφόσον υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν στο κύκλωμα πηγές τάσεως. Τέλος, είναι φανερό ότι δεν έχει νόημα να γράψουμε τη σχέση (7.45) για κλάδους όπου υπάρχουν πηγές εντάσεως, γιατί στους κλάδους αυτούς η ένταση του ρεύματος είναι εξ' ορισμού γνωστή.

4) Αντικαθιστούμε τώρα τις εντάσεις των κλάδων στο σύστημα του βήματος 2



Σχ. 7.6α.
Κλάδος κυκλώματος.



Σχ. 7.6β.
Απλό κύκλωμα εφαρμογής της
μεθόδου των κομβικών τάσεων.

με τις κομβικές τάσεις, σύμφωνα με τη σχέση (7.45). Προκύπτει έτσι σύστημα $(\kappa - 1)$ εξισώσεων ως προς $(\kappa - 1)$ αγνώστους, δηλαδή τις κομβικές τάσεις στα άκρα των $(\kappa - 1)$ ανεξαρτήτων κόμβων του συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι η τάση του κόμβου αναφοράς ελήφθη ίση με το μηδέν. Επιλύουμε το σύστημα των $(\kappa - 1)$ εξισώσεων.

5) Αφού υπολογίσουμε τις τιμές των κομβικών τάσεων, με τη βοήθεια και πάλι της σχέσεως (7.45) υπολογίζουμε τις εντάσεις των κλάδων. Εξυπακούεται ότι αν οι τιμές κάποιων εντάσεων προκύψουν αρνητικές, θα αλλάζουμε τη φορά τους στους αντίστοιχους κλάδους.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τη μέθοδο των κομβικών τάσεων, στην απλή περίπτωση του κυκλώματος του σχήματος 7.6β, που έχει $\kappa = 3$ κόμβους.

Οι πηγές I_1 και I_2 είναι πηγές σταθερής εντάσεως. Θεωρούμε τον κόμβο 3 σαν κόμβο αναφοράς των δυναμικών ($U_3 = 0$). Θα έχουμε:

$$\text{Κόμβος 1: } I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0 \rightarrow$$

$$I_1 + I_2 = \frac{U_1 - U_3}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} \rightarrow$$

$$G_1 U_1 + G_2 (U_1 - U_2) = I_1 + I_2 \rightarrow$$

$$(G_1 + G_2) U_1 - G_2 U_2 = I_1 + I_2 \quad (7.46)$$

$$\text{Κόμβος 2: } -I_3 + I_5 - I_2 = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{U_2 - U_3}{R_3} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} - I_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 -G_3 U_2 + G_2 (U_1 - U_2) - I_2 = 0 &\rightarrow G_3 U_2 - G_2 (U_1 - U_2) = -I_2 \\
 &\rightarrow -G_2 U_1 + (G_2 + G_3) U_2 = -I_2
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (7.46) και (7.47) με πιο γενικό τρόπο:

$$G_{11} U_1 - G_{12} U_2 = I_1 + I_2 \tag{7.48}$$

$$-G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = -I_2 \tag{7.49}$$

Κάθε ένας από τους συντελεστές

$$G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{και} \quad G_{22} = G_2 + G_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

που παρέχει το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων των κλάδων που καταλήγουν στον αντίστοιχο κόμβο, ονομάζεται **αυτοαγωγιμότητα** του αντίστοιχου κόμβου. Ο συντελεστής $G_{12} = G_{21} = 1/R_2$ ονομάζεται αμοιβαία αγωγιμότητα δύο κόμβων και παρέχεται από το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων των κλάδων που συνδέουν απευθείας τους δυο κόμβους (1 και 2). Το ίδιο ισχύει και για το συντελεστή G_{21} ($G_{12} = G_{21}$). Αν δυο κόμβοι δεν συνδέονται απευθείας, αλλά μέσω άλλου κόμβου, τότε η αμοιβαία αγωγιμότητά τους είναι ίση με μηδέν.

Μπορούμε να γενικεύσουμε και να τυποποιήσουμε τη μέθοδο των κόμβων. Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τα ακόλουθα:

α) Αν υπάρχουν στο κύκλωμα πηγές τάσεως τις μετατρέπουμε σε πηγές ρεύματος.

β) Ορίζουμε τον κόμβο, στον οποίο καταλήγουν οι περισσότεροι κλάδοι, ως κόμβο αναφοράς και μετά αναγνωρίζουμε όλους τους άλλους κόμβους που υπάρχουν στο κύκλωμα.

γ) Γράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων:

$$\begin{aligned}
 G_{11} U_1 - G_{12} U_2 & \dots\dots\dots - G_{1m} U_m = \sum_j I_{1j} \\
 -G_{21} U_1 + G_{22} U_2 & \dots\dots\dots - G_{2m} U_m = \sum_j I_{2j} \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 -G_{i1} U_1 - G_{i2} U_2 & \dots\dots + G_{ij} I_j \dots\dots - G_{im} U_m = \sum_j I_{ij} \\
 -G_{m1} U_1 - G_{m2} U_2 & \dots\dots\dots + G_{mm} U_m = \sum_j I_{mj}
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

όπου: U_i η κομβική τάση του κόμβου i ,

G_{ij} η αυτοαγωγιμότητα του κόμβου i ,

G_{in} η αμοιβαία αγωγιμότητα των κόμβων i και n ,

$\sum I_{ij}$ το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των πηγών ρεύματος που καταλήγουν στον κόμβο j που σχηματίζεται με βάση τη σύμβαση που ισχύει για την εφαρμογή του πρώτου κανόνα Kirchhoff και $m = \kappa - 1$ το πλήθος των ανεξαρτήτων κόμβων του κυκλώματος.

δ) Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (7.50) π.χ. με τη μέθοδο του Cramer. Η «χαρακτηριστική ορίζουσα» Δ γράφεται:

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1m} \\ -G_{21} & +G_{22} & \dots & -G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{m1} & -G_{m2} & \dots & +G_{mm} \end{vmatrix} \quad (7.51)$$

οπότε τα δυναμικά των κόμβων είναι:

$$U_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad U_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \dots \quad U_m = \frac{\Delta_m}{\Delta}$$

όπου οι ορίζουσες $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες στήλες της Δ με τη στήλη των δευτέρων μελών του συστήματος (7.50). Όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο της Δ είναι αυτοαγωγιμότητες και έχουν πάντα θετικό πρόσημο. Όλα τα άλλα στοιχεία της Δ είναι αμοιβαίες αγωγιμότητες και έχουν πάντα αρνητικό πρόσημο.

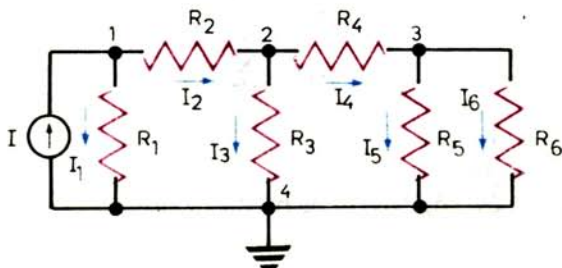
ε) Αφού υπολογίσουμε τις κομβικές τάσεις, υπολογίζουμε τις εντάσεις των κλάδων, ακολουθώντας τη διαδικασία του παραπάνω εδαφίου (5).

Παράδειγμα 7.6.1.

Δίνεται το δίκτυο του σχήματος 7.6γ. Ζητούνται: α) Τα δυναμικά των κόμβων 1, 2 και 3. β) Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες του δικτύου. Είναι $I = 7 \text{ A}$, $R_1 = 0,5 \ \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1 \ \Omega$.

α) Το κύκλωμα έχει $\kappa = 4$ κόμβους και $\lambda = 6$ κλάδους. Θεωρούμε τον κόμβο 4 ως κόμβο αναφοράς. Γράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων:

$$\begin{aligned} G_{11} U_1 - G_{12} U_2 - G_{13} U_3 &= I \\ -G_{21} U_1 + G_{22} U_2 - G_{23} U_3 &= 0 \\ -G_{31} U_1 - G_{32} U_2 + G_{33} U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$



Σχ. 7.6γ.
Κύκλωμα παραδείγματος 7.6.1.

$$\text{όπου: } G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 + 1 = 3 \Omega^{-1}$$

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_4 = 3 \Omega^{-1}, \quad G_{33} = G_4 + G_5 + G_6 = 3 \Omega^{-1}$$

$$G_{12} = G_{21} = G_2 = \frac{1}{R_2} = 1 \Omega^{-1}, \quad G_{13} = G_{31} = 0$$

$$\text{και } G_{23} = G_{32} = G_4 = \frac{1}{R_4} = 1 \Omega^{-1}$$

οπότε το σύστημα των εξισώσεων (1) γίνεται:

$$3U_1 - U_2 - 0U_3 = 7$$

$$-U_1 + 3U_2 - U_3 = 0 \quad (2)$$

$$-0U_1 - U_2 + 3U_3 = 0$$

Η «χαρακτηριστική ορίζουσα» Δ είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 21 \quad \text{Είναι επίσης} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 56$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 21 \quad \text{και} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

$$\text{οπότε} \quad U_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{56}{21} = \frac{8}{3} \text{ V}, \quad U_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \text{ V}$$

$$\text{και} \quad U_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \text{ V}$$

$$6) \quad U_{12} = U_1 - U_2 = \frac{5}{3} \text{ V}, \quad U_{23} = U_2 - U_3 = \frac{2}{3} \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_4}{R_1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{16}{3} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{5}{3} \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = 1 \text{ A}, \quad I_4 = \frac{U_{23}}{R_4} = \frac{2}{3} \text{ A}, \quad I_5 = \frac{U_3}{R_5} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

$$\text{και} \quad I_6 = \frac{U_3}{R_6} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

7.7 Γέφυρες συνεχούς ρεύματος.

Με τον όρο **γέφυρες συνεχούς ρεύματος** αναφερόμαστε σε απλά κυκλώματα που συγκροτούνται με αντικειμενικό σκοπό την εκτέλεση ηλεκτρικών μετρή-

σεων – και κυρίως μετρήσεων ωμικών αντιστάσεων – μεγάλης ακρίβειας. Τα κυκλώματα γεφυρών συγκροτούνται από τα εξής, κυρίως, στοιχεία:

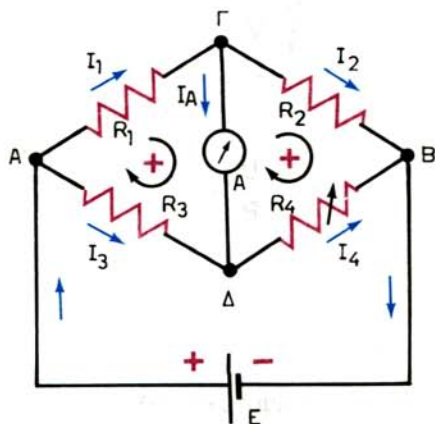
- Μια μεταβλητή αντίσταση με επακριβώς καθορισμένα χαρακτηριστικά.
- Ένα όργανο μετρήσεως εντάσεως συνεχούς ρεύματος (αμπερόμετρο ή γαλβανόμετρο).
- Μερικές πρότυπες ωμικές αντιστάσεις.
- Μια πηγή συνεχούς ρεύματος.
- Μια άγνωστη τιμής ωμική αντίσταση, την τιμή της οποίας θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Μετά τη συγκρότηση του κυκλώματος της γέφυρας στόχος μας είναι να μεταβάλλουμε την τιμή της μεταβλητής αντιστάσεως, ώστε από τον κλάδο του κυκλώματος, όπου βρίσκεται το όργανο μετρήσεως της εντάσεως, να μη διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα. Τότε λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε **ισορροπία** και η κατάσταση αυτή συνεπάγεται κάποια σχέση μεταξύ των τιμών των αντιστάσεων που συγκροτούν τη γέφυρα. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της άγνωστης αντιστάσεως.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε μια πολύ γνωστή γέφυρα, τη **γέφυρα Wheatstone**, η οποία εξυπηρετεί αρκετές περιπτώσεις ηλεκτρικών μετρήσεων. Τέλος, θα αναπτύξουμε μια πολύ χρήσιμη για την πράξη εφαρμογή της γέφυρας Wheatstone που επιτρέπει τον προσδιορισμό της θέσεως σφάλματος ενός υπόγειου καλωδίου.

7.7.1 Η γέφυρα Wheatstone.

Όπως ήδη είπαμε, η γέφυρα Wheatstone συνεχούς ρεύματος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση των ωμικών αντιστάσεων. Η γέφυρα συγκροτείται όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 7.7α. Βέβαια, το κύκλωμα της γέφυρας μπορεί να αναλυθεί για οποιεσδήποτε τιμές των αντιστάσεων και της πηγής που τη συγκροτούν. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάλυση του κυκλώματος στην περίπτωση ισορροπίας της γέφυρας. Η ισορροπία επιτυγχάνεται, αν μεταβάλλουμε την τιμή της μεταβλητής R_4 έτσι, ώστε στον κλάδο $\Gamma\Delta$, όπου βρίσκεται το αμπερόμετρο, να μη διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα ($I_A = 0$).



Σχ. 7.7α.
Γέφυρα Wheatstone.

Εξαιτίας της ισορροπίας της γέφυρας ισχύει:

$$I_A = 0 \quad (7.52)$$

$$I_1 = I_2 \quad (7.53)$$

$$I_3 = I_4 \quad (7.54)$$

$$U_\Gamma = U_\Delta \quad (7.55)$$

Ας γράψουμε τώρα τις εξισώσεις του 2ου κανόνα Kirchhoff για τους δυο βρόχους (ΑΓΔΑ) και (ΓΒΔΓ) της γέφυρας, όταν αυτή ισορροπεί:

$$\text{Βρόχος ΑΓΔΑ:} \quad I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \rightarrow I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad (7.56)$$

$$\text{Βρόχος ΓΒΔΓ:} \quad I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0 \rightarrow I_2 R_2 = I_4 R_4 \quad (7.57)$$

Από τις (7.53), (7.54), (7.56) και (7.57) προκύπτει:

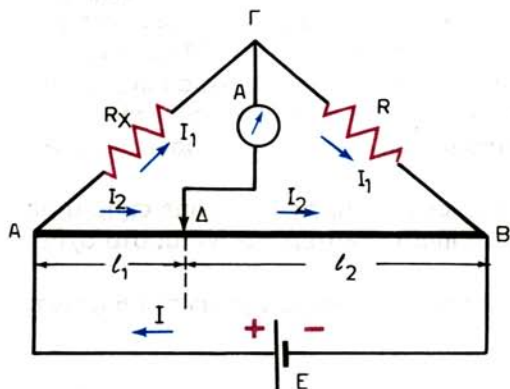
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (7.58)$$

Από τη σχέση (7.58) μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας αντιστάσεως, εφόσον είναι γνωστές οι υπόλοιπες τρεις.

7.7.2 Γέφυρα Wheatstone με χορδή.

Στη γέφυρα Wheatstone με χορδή οι αντιστάσεις R_3 και R_4 έχουν αντικατασταθεί από ένα ευθύγραμμο σύρμα (χορδή) με μικρή και σταθερή σ' όλο το μήκος διατομή, πάνω στο οποίο ολισθαίνει η επαφή Δ ενός δρομέα. Το αμπερόμετρο έχει συνδεθεί με τα σημεία Γ και Δ (σχ. 7.76).

Μετακινούμε το δρομέα Δ μέχρι να βρούμε τη θέση, για την οποία το



Σχ. 7.76.
Γέφυρα Wheatstone με χορδή.

αμπερόμετρο δείχνει ένταση ρεύματος μηδέν. Στη θέση αυτή της ισορροπίας θα έχουμε, σύμφωνα με τη σχέση (7.58):

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_{A\Delta}}{R_{\Delta B}} \quad (7.59)$$

Αλλά, όπως ήδη είπαμε, η διατομή (S) της χορδής είναι σταθερή σε όλο της το μήκος. Άρα, αν είναι ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού, από τον οποίο είναι κατασκευασμένη η χορδή, τότε θα έχουμε:

$$\frac{R_{A\Delta}}{R_{\Delta B}} = \frac{\rho(A\Delta)/S}{\rho(\Delta B)/S} = \frac{(A\Delta)}{(\Delta B)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (7.60)$$

Από τις σχέσεις (7.59) και (7.60) παίρνουμε:

$$R_x = R \frac{l_1}{l_2} \quad (7.61)$$

Έτσι, όταν η γέφυρα ισορροπήσει, μετράμε μ' ένα κανόνα τα μήκη l_1 και l_2 και υπολογίζουμε, σύμφωνα με τη σχέση (7.61), την άγνωστη αντίσταση R_x εφόσον γνωρίζουμε την τιμή της R .

7.7.3 Προσδιορισμός της θέσεως σφάλματος καλωδίου με τη μέθοδο Murray.

Μια από τις εφαρμογές της γέφυρας Wheatstone είναι και ο εντοπισμός της θέσεως σφάλματος ενός καλωδίου που έχει διαρροή προς τη γη. Η μέθοδος είναι γνωστή ως **μέθοδος Murray** και έχει ως εξής:

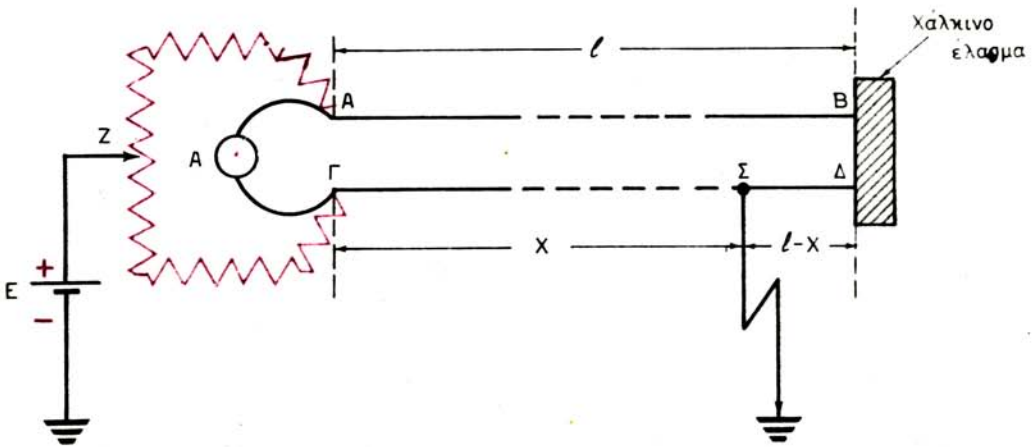
Έστω ότι μια γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας (π.χ. υπόγειο καλώδιο) που αποτελείται από δυο αγωγούς AB και ΓΔ, παρουσιάζει διαρροή στο σημείο Σ (σχ. 7.7γ).

Για τον εντοπισμό του σημείου Σ, όπου γίνεται η γείωση, προσδιορίζουμε πρώτα την αρχή και το τέλος της γραμμής και μετά βραχυκυκλώνουμε το τέρμα μ' ένα χάλκινο έλασμα (αμελητέας αντιστάσεως). Στα δυο άλλα άκρα της γραμμής Α και Γ συνδέουμε το αμπερόμετρο Α καθώς και τα άκρα μιας χορδής ΑΖΓ. Ο αρνητικός πόλος μιας πηγής Ε γειώνεται, ενώ ο θετικός συνδέεται με την κινητή επαφή Ζ, την οποία μετακινούμε, έως όπου το αμπερόμετρο δείξει ένταση ρεύματος μηδέν.

Εάν παρατηρήσουμε το σχήμα 7.7γ, βλέπουμε ότι πρακτικά έχουμε σχηματίσει μια γέφυρα Wheatstone, όπως άλλωστε παραστατικότερα φαίνεται στο σχήμα 7.7δ.

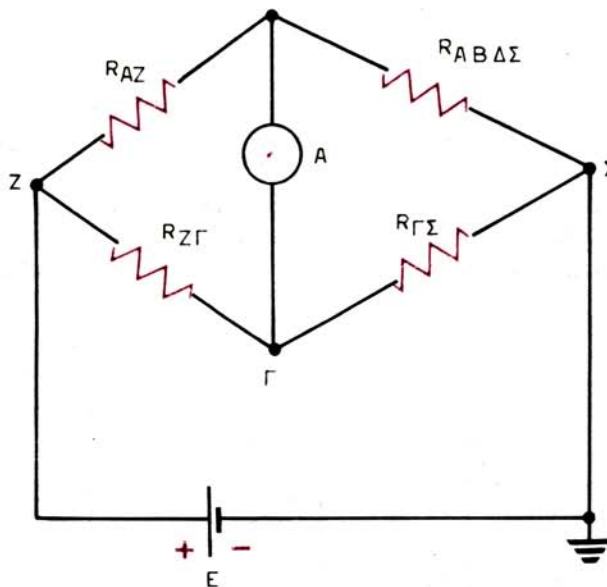
Η συνθήκη ισορροπίας της γέφυρας αυτής σύμφωνα με τη σχέση (7.58) είναι:

$$\frac{R_{AZ}}{R_{ΓZ}} = \frac{R_{A\Delta\Sigma}}{R_{Γ\Sigma}} \quad (7.62)$$



Σχ. 7.7γ.

Σχηματισμός της γέφυρας κατά τη μέθοδο Murray, για τον προσδιορισμό σφάλματος διαρροής στο σημείο Σ .



Σχ. 7.7δ.

Ισοδύναμο κύκλωμα γέφυρας για τη μέθοδο Murray.

Υποθέτοντας ότι οι αγωγοί της γραμμής έχουν σταθερή διατομή (S) και ειδική αντίσταση (ρ) σ' όλο τους το μήκος, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \frac{R_{AB\Delta\Sigma}}{R_{\Gamma\Sigma}} &= \frac{\frac{\rho}{S} [(\Sigma\Delta) + (AB)]}{\frac{\rho (\Gamma\Sigma)}{S}} = \frac{(\Sigma\Delta) + (AB)}{(\Gamma\Sigma)} = \\ &= \frac{(l-x) + l}{x} = \frac{2l-x}{x} = \frac{2l}{x} - 1 \end{aligned} \quad (7.63)$$

Συνδυάζοντας τις (7.62) και (7.63) παίρνουμε:

$$\frac{R_{AZ}}{R_{\Gamma Z}} = \frac{2l}{x} - 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{2l}{\frac{R_{AZ}}{R_{\Gamma Z}} + 1} = 2l \frac{R_{\Gamma Z}}{R_{AZ} + R_{\Gamma Z}} \quad (7.64)$$

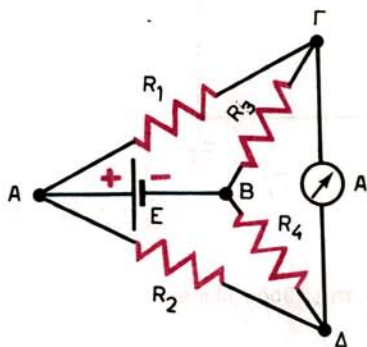
Είναι πια φανερό ότι η σχέση (7.64) επιτρέπει τον υπολογισμό της θέσεως, όπου υπάρχει διαρροή του καλωδίου προς τη γη. Μπορούμε, τέλος, να παρατηρήσουμε ότι, εάν η αντίσταση AZΓ είναι τύπου χορδής, τότε η σχέση (7.64) γίνεται:

$$x = 2l \frac{(\Gamma Z)}{(AZ\Gamma)} \quad (7.65)$$

Παράδειγμα 7.7.1.

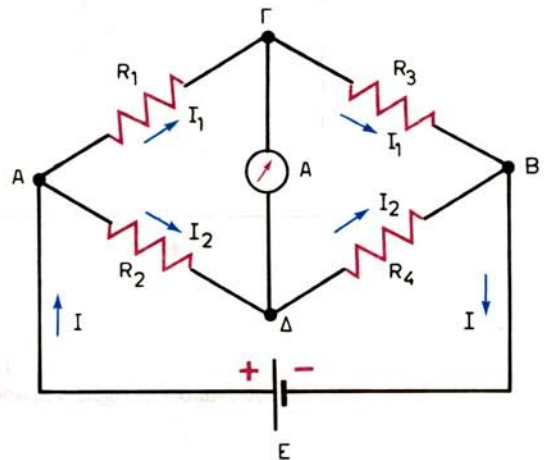
Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7.7ε, όπου $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ και $E = 18 \text{ V}$. Αν η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι μηδέν, να υπολογισθεί η ισχύς που καταναλώνει κάθε αντιστάτης.

Το κύκλωμα του σχήματος 7.7ε είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα του σχήματος 7.7στ, το οποίο, όπως φαίνεται, είναι κύκλωμα γέφυρας Wheatstone. Επειδή η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι μηδέν, η γέφυρα είναι σε ισορροπία, οπότε



Σχ. 7.7ε.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.7.1.



Σχ. 7.7στ.

Ισοδύναμο κύκλωμα σχήματος 7.7ε.

σύμφωνα με τη σχέση (7.58) έχουμε:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \rightarrow R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{12}{2} = 6 \Omega$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2 + R_4} = \frac{18}{9} = 2 \text{ A}$$

Άρα: $P_1 = I_1^2 R_1 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ W}$
 $P_2 = I_2^2 R_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ W}$
 $P_3 = I_1^2 R_3 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ W}$
 $P_4 = I_2^2 R_4 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ W}$

Παράδειγμα 7.7.2.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7.7ζ. Να υπολογισθεί η αντίσταση x , ώστε ο κλάδος $\alpha\gamma$ να μη διαρρέεται από ρεύμα.

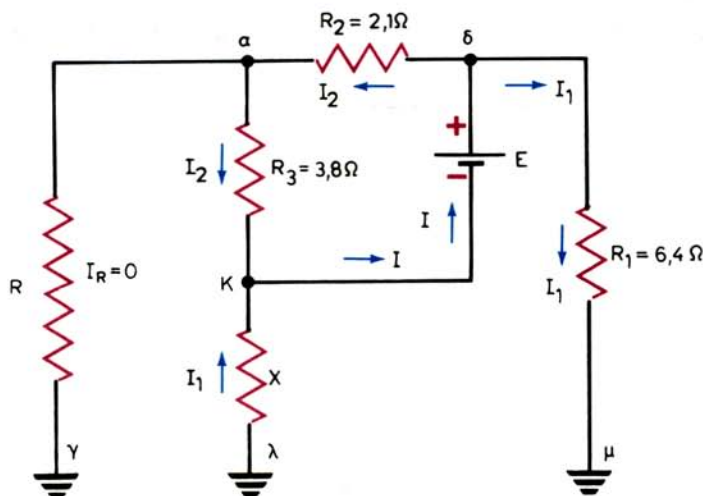
Οι κλάδοι (δμ) και (κλ) διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I_1 , επειδή ο κλάδος (γα) δεν διαρρέεται από ρεύμα και οι δυο κλάδοι είναι γειωμένοι. Το ίδιο θέβαιο ισχύει και για τους κλάδους (αδ) και (ακ).

Είναι $U_\mu = U_\lambda = U_\gamma = U_\alpha$ (αφού $U_\alpha - U_\gamma = 0$)

Άρα $U_\delta - U_\alpha = U_\delta - U_\mu$

Επομένως: $\frac{U_\delta - U_\alpha}{U_\alpha - U_\kappa} = \frac{U_\delta - U_\mu}{U_\lambda - U_\kappa} \rightarrow \frac{I_2 R_2}{I_2 R_3} = \frac{I_1 R_1}{I_1 x}$

$$x = R_1 \frac{R_3}{R_2} = \frac{6,4 \cdot 3,8}{2,1} \rightarrow x = 11,58 \Omega$$



Σχ. 7.7ζ.
Κύκλωμα παραδείγματος 7.7.2.

7.8 Διαιρέτες – Καταμεριστές τάσεως.

Οι διαιρέτες ή καταμεριστές τάσεως είναι διατάξεις αντιστάσεων, με τις οποίες επιτυγχάνεται ο υποβιβασμός ή καταμερισμός τάσεων. Έχουν ευρεία εφαρμογή τόσο σε διατάξεις υψηλών τάσεων, όσο και σε διάφορες ηλεκτρονικές συσκευές. Ο ραδιοφωνικός δέκτης π.χ. απαιτεί διάφορες τάσεις σε πολλά σημεία των κυκλωμάτων του. Ακόμα όλες αυτές τις τάσεις θα πρέπει να τις πάρουμε από μια μοναδική πηγή. Οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται με τη χρήση κυκλώματος διαιρέτη τάσεως.

Το τυπικό κύκλωμα διαιρέτη τάσεως συγκροτείται από δυο ή περισσότερες αντιστάσεις που συνδέονται σε σειρά με πηγή ΗΕΔ E (σχ. 7.8α).

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{E}{R_{o\lambda}}$$

οπότε η πτώση τάσεως U_1 θα είναι:

$$U_1 = IR_1 = E \frac{R_1}{R_{o\lambda}}$$

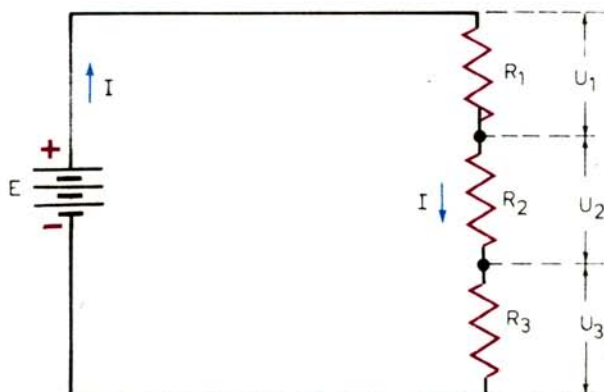
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$U_2 = E \frac{R_2}{R_{o\lambda}}, \quad U_3 = E \frac{R_3}{R_{o\lambda}}$$

και γενικά

$$U_n = E \frac{R_n}{R_{o\lambda}} \quad (7.66)$$

Δηλαδή η τάση της πηγής διαιρείται στις διάφορες αντιστάσεις του μονού βρόχου ανάλογα με την τιμή της καθεμιάς από τις αντιστάσεις αυτές.



Σχ. 7.8α.

Διαιρέτης τάσεως (κύκλωμα μονού βρόχου).

Παράδειγμα 7.8.1.

Στο κύκλωμα του σχήματος 7.8β, ο διαιρέτης τάσεως συνδέεται με πηγή τάσεως $E = 270\text{ V}$ και τροφοδοτεί συγχρόνως τρία φορτία: των 10 mA σε τάση 90 V μεταξύ ακροδέκτη A και O , 5 mA σε τάση 150 V μεταξύ ακροδέκτη B και O και 30 mA σε τάση 180 V μεταξύ Γ και O . Το ρεύμα στον αντιστάτη R_1 , είναι 15 mA . Να υπολογισθούν το ρεύμα, η τάση, η αντίσταση και η ισχύς των 4 αντιστατών.

Είναι:

$$I_2 = I_1 + 10 = 25\text{ mA}$$

$$I_3 = I_2 + 5 = 30\text{ mA}$$

$$I_4 = I_3 + 30 = 60\text{ mA}$$

$$U_{AB} = 150 - 90 = 60\text{ V}$$

$$U_{B\Gamma} = 180 - 150 = 30\text{ V}$$

$$U_{\Gamma\Delta} = 270 - 180 = 90\text{ V}$$

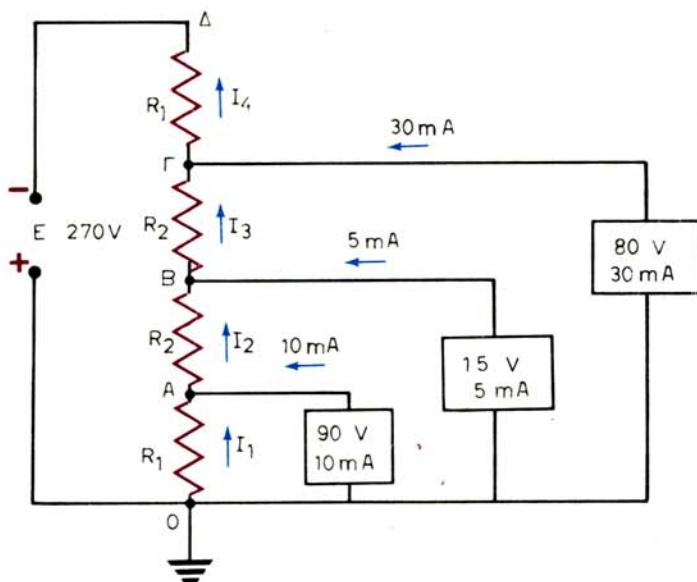
οπότε:

$$R_1 = \frac{V_{OA}}{I_1} = 6000\ \Omega = 6\text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{U_{AB}}{I_2} = 2400\ \Omega = 2,4\text{ k}\Omega$$

$$R_3 = \frac{U_{B\Gamma}}{I_3} = 1000\ \Omega = 1\text{ k}\Omega$$

$$P_4 = \frac{U_{\Gamma\Delta}}{I_4} = 1500\ \Omega = 1,5\text{ k}\Omega$$



Σχ. 7.8β.

Κύκλωμα παραδείγματος 7.8.1.

Ισχύεις:

$$P_1 = U_{OA} I_1 = 90 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 1,35 \text{ W}$$

$$P_2 = U_{AB} I_2 = 60 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 1,5 \text{ W}$$

$$P_3 = U_{BG} I_3 = 30 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 0,9 \text{ W}$$

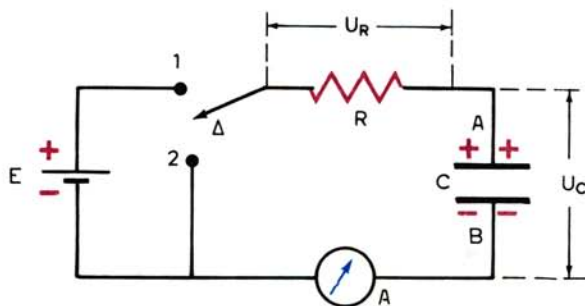
$$P_4 = U_{\Gamma\Delta} I_4 = 90 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 5,4 \text{ W}$$

7.9 Κυκλώματα συνεχούς ρεύματος για τη φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτών.

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε τη συμπεριφορά των πυκνωτών σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Ας θυμηθούμε, κατ' αρχήν, ότι η σπουδαιότερη ιδιότητα του διηλεκτρικού ενός πυκνωτή είναι ότι δεν επιτρέπει την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μεταξύ των οπλισμών του. Άρα μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή είναι κατ' αρχήν αδύνατο να υπάρξει ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Γενικότερα, η παρεμβολή ενός πυκνωτή σ' ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος έχει ως συνέπεια τη διακοπή – στον κλάδο όπου υπάρχει ο πυκνωτής – της ροής του ρεύματος. Όμως, όπως θα γνωρίσουμε στη συνέχεια, η διακοπή αυτή δεν γίνεται ακαριαία, αλλά μέσα σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Έτσι, η δράση ενός πυκνωτή ως «διακόπτη» καθιστά την παρουσία του τουλάχιστον περιττή στα κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Δεν θα πρέπει όμως να παραβλέπομε ότι, όπως ήδη έχουμε γνωρίσει, η φόρτιση ενός πυκνωτή γίνεται από κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Επίσης, η εκφόρτιση ενός πυκνωτή, γίνεται από κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Για το λόγο αυτό, στις παραγράφους που ακολουθούν, θα αναπτύξομε τα παραπάνω θέματα και θα υπολογίσομε τα χρονικά μεταβαλλόμενα συνεχή ρεύματα που κυκλοφορούν στα κυκλώματα φορτίσεως και εκφορτίσεως πυκνωτών.

7.9.1 Φόρτιση πυκνωτή.

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.9α, που περιλαμβάνει ηλεκτρική πηγή E ($r = 0$), πυκνωτή χωρητικότητας C , αντιστάτη ωμικής αντιστάσεως R ,



Σχ. 7.9α.

Κύκλωμα φορτίσεως - εκφορτίσεως πυκνωτή.

διακόπτη δυο θέσεων Δ και αμπερόμετρο Α που έχει το μηδέν στη μέση της κλίμακάς του.

Όταν ο διακόπτης Δ μετακινηθεί στη θέση 1, παρατηρούμε ότι η βελόνη του αμπερομέτρου εκτρέπεται απότομα προς τα δεξιά και επανέρχεται στο μηδέν σε ελάχιστο χρονικό διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι κυκλοφόρησε ρεύμα για μικρό χρονικό διάστημα στο κύκλωμα, μολονότι μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή υπάρχει μονωτής. Αυτό συμβαίνει γιατί η ΗΕΔ της πηγής (αντλία ηλεκτρονίων) αναγκάζει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του οπλισμού Α να «μετακινηθούν» προς τον οπλισμό Β. Έτσι προκύπτει συσσώρευση ηλεκτρονίων στον οπλισμό Β και έλλειμμα ηλεκτρονίων στον οπλισμό Α.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **ο πυκνωτής φορτίζεται**. Όταν η συνεχώς αυξανόμενη τάση U_C στους οπλισμούς του πυκνωτή γίνει ίση με την ΗΕΔ της πηγής (E), τότε το ρεύμα φορτίσεως μηδενίζεται και λέμε ότι ο πυκνωτής φορτίσθηκε.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μετακίνηση φορτίων μεταξύ των δυο οπλισμών του πυκνωτή οφείλεται ουσιαστικά στο φαινόμενο της πολώσεως του διηλεκτρικού που μελετήσαμε στην παράγραφο 4.8. Έτσι, **φαίνεται** ότι λόγω των δεσμών φορτίων (ή φορτίων πολώσεως) ο πυκνωτής διαρρέεται για βραχύ χρονικό διάστημα από ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο ονομάζεται **ηλεκτρικό ρεύμα μετατοπίσεως**. Βέβαια, στο κύκλωμα φορτίσεως υπάρχει, όσο χρόνο διαρκεί η φόρτιση, ροή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από την πηγή και τους αγωγούς, το οποίο, όπως γνωρίζουμε, οφείλεται στην αγωγιμότητα των ελευθέρων τους ηλεκτρονίων, και ονομάζεται **ηλεκτρικό ρεύμα αγωγιμότητας**. Ας παρατηρήσουμε, τέλος, ότι η ονομασία «ρεύμα μετατοπίσεως» οφείλεται στη μετατόπιση των τροχιών των ηλεκτρονίων των ατόμων του διηλεκτρικού, ως προς τον πυρήνα τους, που μελετήσαμε στην παράγραφο 4.7.

Ας δούμε τώρα πώς θα μελετήσουμε ποσοτικά το φαινόμενο της φορτίσεως πυκνωτή, δηλαδή πώς θα υπολογίσουμε τις χρονικά μεταβαλλόμενες:

– Τάση φορτίσεως του πυκνωτή, $U_C(t)$,

– Ένταση φορτίσεως του πυκνωτή, $I(t)$,

στην περίπτωση του απλού κυκλώματος φορτίσεως του σχήματος 7.9α, όπου πυκνωτής χωρητικότητας C, φορτίζεται από πηγή ΗΕΔ E, μέσω αγωγών που παρουσιάζουν ωμική αντίσταση R.

Εφαρμόζουμε, κατ' αρχήν, τον 2ο κανόνα Kirchhoff, στο κύκλωμα φορτίσεως, για ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt . Έτσι, έχουμε για τις στιγμιαίες τιμές των πιο πάνω μεγεθών:

$$E - U_C(t) = I(t) \cdot R \quad (7.67)$$

όμως για τη στιγμιαία τιμή της εντάσεως, ισχύει:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad (7.68)$$

όπου η στιγμιαία τιμή $q(t)$ του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή, δηλαδή

$$q(t) = C U_C(t) \quad (7.69)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.67), (7.68) και (7.69), γράφουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$E - U_C(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU_C}{E - U_C} = \frac{1}{RC} dt \quad (7.70)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.70) παίρνουμε:

$$\ln(E - U_C) = -\frac{t}{RC} + k \quad (7.71)$$

όπου k σταθερά ολοκληρώσεως, η τιμή της οποίας προκύπτει από την αρχική συνθήκη:

για $t = 0$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, δηλαδή $U_C = 0$.

Έτσι, προκύπτει:

$$k = \ln E$$

οπότε η (7.71) γίνεται

$$\ln(E - U_C) = -\frac{t}{RC} + \ln E$$

$$\text{ή} \quad \ln \frac{E - U_C}{E} = -\frac{t}{RC}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η συνάρτηση της τάσεως στα άκρα του πυκνωτή $U_C(t)$:

$$U_C(t) = E(1 - e^{-t/RC}) \quad (7.72)$$

Η μεταβολή της τάσεως U_C σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 7.96.

Από τη συνάρτηση της σχέσεως (7.72) παρατηρούμε ότι όταν $t \rightarrow \infty$ τότε $U_C = E$, δηλαδή θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο η τάση θα γίνει ίση με E .

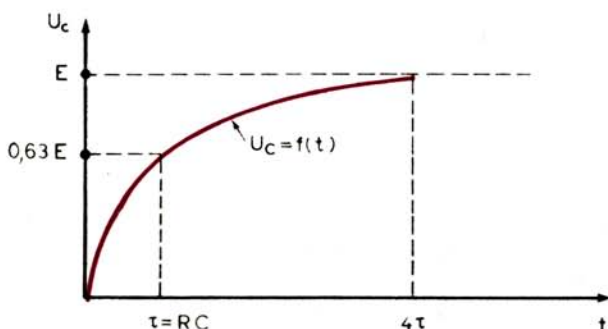
Ας υπολογίσουμε τώρα την τιμή της τάσεως U_C σε χρόνο:

$$\tau = RC \quad (7.73)$$

Από την (7.72), για $t = RC$ παίρνουμε:

$$U_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = E\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,63 E \quad (7.74)$$

Ο χαρακτηριστικός αυτός χρόνος $\tau = RC$, ο οποίος απαιτείται για να φθάσει η



Σχ. 7.9β.

Μεταβολή της τάσεως U_C με το χρόνο t , κατά τη φόρτιση πυκνωτή.

τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή το 63% της ΗΕΔ E της πηγής φορτίσεως ονομάζεται **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος φορτίσεως του πυκνωτή.

Εύκολα επαληθεύεται ότι η σταθερά χρόνου έχει πράγματι διαστάσεις χρόνου

$$[\tau] = [R] [C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[q]}{[U]} = \frac{[q]}{[I]} = [t]$$

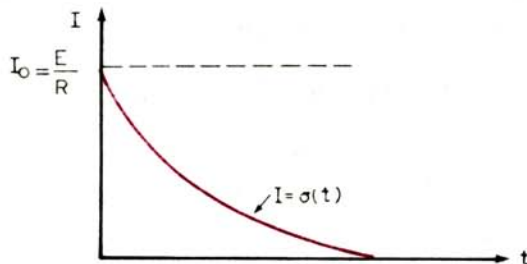
Τέλος, όπως φαίνεται τόσο από τη συνάρτηση (7.72), όσο και από τη γραφική της απεικόνιση (σχ. 7.9β), πρακτικά, μετά από χρόνο $t = 4\tau = 4RC$ ο πυκνωτής έχει φορτισθεί σε τάση $U_C \approx E$.

Θα υπολογίσουμε τώρα τη συνάρτηση $I(t)$ του ρεύματος που ρέει στο κύκλωμα φορτίσεως. Από τη σχέση (7.67) έχουμε:

$$I(t) = \frac{E - U_C(t)}{R} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}(1 - e^{-t/RC})$$

ή
$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \quad (7.75)$$

Η μεταβολή του ρεύματος φορτίσεως σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 7.9γ.



Σχ. 7.9γ.

Μεταβολή του ρεύματος I με το χρόνο t κατά τη φόρτιση πυκνωτή.

Αν θέσουμε στην (7.75) $t = \tau = RC$ προκύπτει:

$$I = \frac{E}{R} e^{-1} = \frac{I_0}{e} \approx 0,37 I_0 \quad (7.76)$$

Δηλαδή, σε χρόνο ίσο προς τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος φορτίσεως του πυκνωτή, η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα φθάνει στο 37% της αρχικής της τιμής.

Εξάλλου, όπως φαίνεται από τη συνάρτηση (7.75) μετά από χρόνο $t = 4\tau = 4RC$, στο κύκλωμα φορτίσεως ρέει ρεύμα εντάσεως:

$$I = \frac{E}{R} e^{-4} = 0,018 \frac{E}{R} = 0,018 I_0$$

δηλαδή, ίσης προς το 1,8% της αρχικής της τιμής. Μετά από το χρόνο αυτό το ρεύμα μειώνεται ακόμη περισσότερο. Έτσι, επαληθεύεται αυτό που είπαμε και στην αρχή της παραγράφου, ότι ο πυκνωτής τελικά συμπεριφέρεται ως ανοικτός διακόπτης στο συνεχές ρεύμα.

Χρόνο μισής ζωής t_h ονομάζουμε το χρόνο που απαιτείται για να μειωθεί το ρεύμα στο μισό της αρχικής του τιμής.

Αν θέσουμε στην (7.75) $I = \frac{I_0}{2} = \frac{E}{2R}$ προκύπτει:

$$\frac{E}{2R} = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = 2 \rightarrow$$

$$\ln e^{t/RC} = \ln 2 \rightarrow t_h = RC \ln 2 = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (7.77)$$

Από τη σχέση (7.67) προκύπτει η συνάρτηση $U_R(t)$ της πτώσεως τάσεως στα άκρα της αντιστάσεως φορτίσεως R :

$$E - U_C = U_R \rightarrow U_R = E - E(1 - e^{-t/RC}) \rightarrow$$

$$U_R(t) = E \cdot e^{-t/RC} \quad (7.78)$$

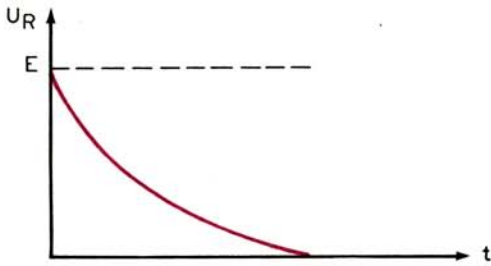
Επίσης προκύπτει και η συνάρτηση $q(t)$ του φορτίου του πυκνωτή:

$$q(t) = CU_C \rightarrow q = CE(1 - e^{-t/RC}) \quad (7.79)$$

Τα σχήματα 7.9δ και 7.9ε παρέχουν τα αντίστοιχα διαγράμματα των συναρτήσεων $U_R = f(t)$ και $q = f(t)$.

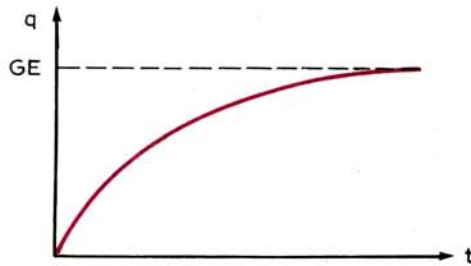
7.9.2 Εκφόρτιση πυκνωτή.

Όταν ο διακόπτης Δ μετακινηθεί στη θέση 2 του κυκλώματος του σχήματος 7.9α, παρατηρούμε ότι η βελόνη του αμπερομέτρου εκτρέπεται απότομα προς



Σχ. 7.9δ.

Μεταβολή της τάσεως U_R με το χρόνο, κατά τη φόρτιση πυκνωτή.



Σχ. 7.9ε.

Μεταβολή του φορτίου q με το χρόνο, κατά τη φόρτιση πυκνωτή.

τα αριστερά και επανέρχεται στο μηδέν σε ελάχιστο χρονικό διάστημα. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ηλεκτρόνια που έχουν συσσωρευθεί στον οπλισμό Β, επιστρέφουν μέσα από τον αντιστάτη, στο θετικό οπλισμό Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **ο πυκνωτής εκφορτίζεται**. Όταν συμπληρωθεί η εκφόρτιση, το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή εξαφανίζεται. Και κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή **φαίνεται** ότι ο πυκνωτής διαρρέεται για βραχύ χρονικό διάστημα από «ηλεκτρικό ρεύμα μετατοπίσεως» που έχει αντίθετη φορά από εκείνο που δημιουργείται κατά τη φόρτιση. Αντίστοιχα, το κύκλωμα εκφορτίσεως διαρρέεται πράγματι από ηλεκτρικό ρεύμα αγωγιμότητας.

Η εκφόρτιση δεν γίνεται ακαριαία, αλλά διαρκεί ένα ορισμένο χρονικό διάστημα που εξαρτάται από τις τιμές των στοιχείων R και C . Στην περίπτωση της εκφορτίσεως επειδή $E = 0$ η εξίσωση (7.67) γράφεται:

$$-U_C(t) = I(t) R = R \frac{dq}{dt} = R \cdot C \frac{dU_C}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU_C}{U_C} = - \frac{1}{RC} dt \quad (7.80)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.80) παίρνουμε:

$$\ln U_C = - \frac{t}{RC} + k \quad (7.81)$$

όπου k σταθερά ολοκληρώσεως, η τιμή της οποίας προκύπτει από την αρχική συνθήκη. Για $t = 0$ ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε τάση $U_C = E$.

Έτσι, προκύπτει:

$$k = \ln E$$

οπότε η (7.81) γίνεται:

$$\ln U_C = - \frac{t}{RC} + \ln E \quad \text{ή} \quad \ln \frac{U_C}{E} = - \frac{t}{RC}$$

ή

$$U_C(t) = E e^{-t/RC} \quad (7.82)$$

Η μεταβολή της τάσεως εκφορτίσεως U_C σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 7.9στ.

Από τη συνάρτηση (7.82) παρατηρούμε ότι $U_C = 0$ όταν $t \rightarrow \infty$, δηλαδή θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο η τάση U_C θα γίνει μηδέν. Αν θέσουμε $t = \tau = RC$ θα έχουμε:

$$U_C = \frac{E}{e} \approx 0,37 E$$

Η συνάρτηση του ρεύματος εκφορτίσεως $I(t)$ θα είναι:

$$I(t) = \frac{U_C(t)}{R} \rightarrow I(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \quad (7.83)$$

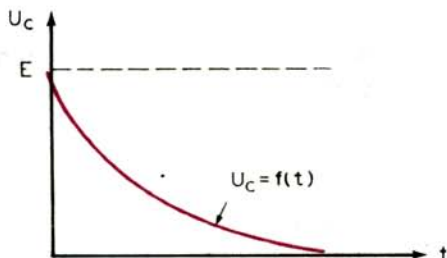
Είναι επίσης $q(t) = CU_C = CE e^{-t/RC} \quad (7.84)$

και

$$U_R(t) = IR = E \cdot e^{-t/RC} \quad (7.85)$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις είδαμε πώς εκφορτίζεται ένας πυκνωτής, με τη βοήθεια μιας εξωτερικής αντιστάσεως. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορεί να γίνει η εκφόρτιση ενός πυκνωτή, χωρίς τη χρησιμοποίηση εξωτερικής αντιστάσεως, εάν το διηλεκτρικό του δεν είναι τέλει μονωτικό, αλλά παρουσιάζει κάποια, έστω και μικρή αγωγιμότητα. Έτσι, αν ένας πυκνωτής φορτισθεί με μία πηγή και στη συνέχεια αποσυνδεθεί από την πηγή, μπορεί να υπάρξει αγωγιμότητα του διηλεκτρικού του που έχει ως συνέπεια τη μεταφορά φορτίων μεταξύ των δυο οπλισμών μέσω του διηλεκτρικού. Και στην περίπτωση αυτή εκφορτίσεως του πυκνωτή, χωρίς εξωτερική αντίσταση, ισχύουν όλες οι πιο πάνω σχέσεις (7.80) έως (7.85). Επί πλέον, αν ο πυκνωτής είναι επιπέδων οπλισμών, τότε για τη σταθερά χρόνου του ισχύει:

$$\tau = R \cdot C = \left(\rho \frac{l}{S} \right) \left(\epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} \right) = \epsilon \cdot \epsilon_0 \rho$$



Σχ. 7.9στ.

Μεταβολή της τάσεως U_C με το χρόνο, κατά την εκφόρτιση πυκνωτή.

$$\eta \quad \tau = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{\gamma} \quad (7.86)$$

όπου: ϵ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του πυκνωτή και
 γ η ειδική αγωγιμότητα του διηλεκτρικού του.

Η σχέση (7.86) μπορεί να χρησιμοποιείται για πυκνωτή οποιασδήποτε γεωμετρίας. Τέλος, **ο χρόνος αυτοεκφορτίσεως** ενός πυκνωτή, προκύπτει και πάλι ίσος προς 4τ .

Παράδειγμα 7.9.1.

Για να μετρήσουμε μια μεγάλη αντίσταση R φορτίζουμε ένα πυκνωτή αέρα χωρητικότητας π.χ. $C = 50 \text{ nF}$ με μια τάση U_0 και στη συνέχεια τον αφήνουμε να εκφορτισθεί μέσα από την άγνωστη αντίσταση R . Μετά από χρόνο έστω $t_0 = 2\text{s}$, διαπιστώνουμε ότι η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή έμεινε η μισή. Ζητείται να υπολογισθεί η αντίσταση R .

$$\text{Είναι} \quad U_R = U_C = U_0 e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\frac{U_0}{2} = U_0 e^{-t_0/RC} \rightarrow \ln 1 - \ln 2 = - \frac{t_0}{RC} \rightarrow$$

$$0 - 0,69 = - \frac{t_0}{RC} \rightarrow R = \frac{t_0}{0,69 C} = \frac{2}{0,69 \cdot 50 \cdot 10^{-19}} = 58 \text{ M}\Omega$$

Παράδειγμα 7.9.2.

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 7.9ζ. Να υπολογισθούν τα φορτία στα οποία τελικά φορτίζονται οι πυκνωτές. Είναι $E_1 = 80 \text{ V}$, $E_2 = 40 \text{ V}$, $R_3 = R_5 = 10 \text{ }\Omega$, $C_1 = 5 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_4 = 50 \text{ }\Omega$.

Σύμφωνα με τη διατύπωση της εκφωνήσεως του παραδείγματος αυτού, ενδιαφέρει να υπολογισθούν τα φορτία των πυκνωτών αφού ολοκληρωθεί η φόρτισή τους, δηλαδή, μετά την πάροδο κατάλληλου χρονικού διαστήματος, οπότε πλέον από τους κλάδους των πυκνωτών δεν θα διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα. Ας δούμε λοιπόν, στην περίπτωση αυτή, οπότε οι πυκνωτές συμπεριφέρονται πλέον ως διακόπτες, ποιες είναι οι εντάσεις ρεύματος και οι τάσεις στο κύκλωμα.

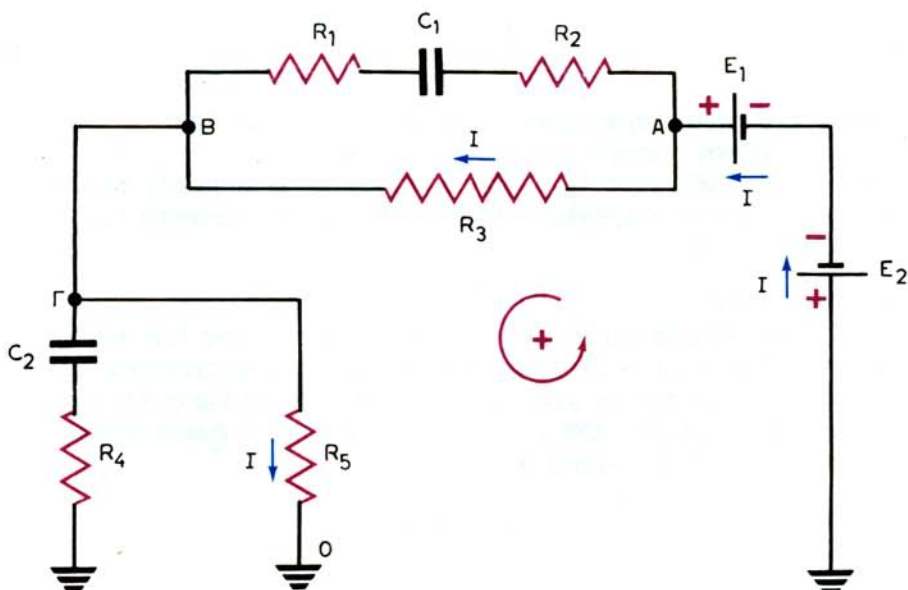
Οι κλάδοι των πυκνωτών δεν διαρρέονται από ρεύμα. Όπως εύκολα προκύπτει από το σχήμα 7.9ζ, το μοναδικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$E_1 - E_2 = I (R_3 + R_5) \rightarrow$$

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_3 + R_5} = \frac{80 - 40}{10 + 10} = 2 \text{ A}$$

Έτσι ο πυκνωτής C_1 βρίσκεται τελικά υπό τάση:

$$U_{AB} = U_{C_1} = IR_3 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ V}$$



Σχ. 7.9ζ.
Κύκλωμα παραδείγματος 7.9.2.

ενώ ο πυκνωτής C_2 υπό τάση:

$$U_{\Gamma 0} = U_{C_2} = IR_5 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ V}$$

Άρα τα φορτία τους είναι: $q_1 = C_1 U_{AB} = 5 \cdot 20 = 100 \mu\text{C}$
 $q_2 = C_2 U_{\Gamma 0} = 10 \cdot 20 = 200 \mu\text{C}$

Παράδειγμα 7.9.3.

Πυκνωτής χωρητικότητας C φορτίζεται από πηγή τάσεως U_0 μέσω αντιστάσεως R . Πότε η ισχύς στον πυκνωτή γίνεται μέγιστη και ποια η τιμή της; Η στιγμιαία ισχύς του πυκνωτή είναι:

$$P(t) = U_C(t) \cdot I_C(t) =$$

$$U_0 (1 - e^{-t/RC}) \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{U_0^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{U_0^2}{R} e^{-2t/RC} \quad (1)$$

Η ισχύς γίνεται μέγιστη όταν $\frac{dP}{dt} = 0$

Παραγωγίζομε* την (1):

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{1}{RC} e^{-t/RC} + \frac{U_0^2}{R} \frac{2}{RC} e^{-2t/RC} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{U_0^2}{R^2C} e^{-t/RC} + \frac{2U_0^2}{R^2C} e^{-2t/RC} = \\
 &= \frac{U_0^2}{R^2C} e^{-t/RC} (-1 + 2e^{-t/RC}) = 0 \\
 &\rightarrow -1 + 2e^{-t/RC} = 0 \rightarrow e^{-t/RC} = \frac{1}{2} \rightarrow \\
 &-\frac{t}{RC} = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \rightarrow \\
 &t = RC \ln 2 = t_h
 \end{aligned}$$

Ο χρόνος αυτός αποτελεί το χρόνο μισής ζωής του κυκλώματος, άρα:

$$I_C = \frac{I_0}{2} = \frac{U_0}{2R} \quad \text{και} \quad U_C = U_0 - I_C R = \frac{U_0}{2}$$

Άρα η μέγιστη ισχύς θα είναι:

$$P_{Cmax} = \frac{U_0}{2R} \cdot \frac{U_0}{2} = \frac{U_0^2}{4R}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

8.1 Εισαγωγή.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσαμε τους κανόνες του Kirchhoff καθώς και μεθόδους που προκύπτουν αμέσως από αυτούς, με των οποίων τη βοήθεια επιτυγχάνεται η επίλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Όμως, στην περίπτωση που ζητείται η επίλυση ηλεκτρικών δικτύων, το πλήθος των εξισώσεων του γραμμικού συστήματος που προκύπτει μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο, οπότε η επίλυσή του είναι γενικά επίπονη και απαιτεί, ενδεχομένως, πολύ χρόνο. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί ορισμένα θεωρήματα, που στηρίζονται και στους κανόνες Kirchhoff, με των οποίων τη χρησιμοποίηση σε αρκετές περιπτώσεις απλοποιείται σημαντικά η εργασία του υπολογισμού των εντάσεων ρεύματος στους κλάδους ενός δικτύου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα κυριότερα θεωρήματα των ηλεκτρικών δικτύων. Τα θεωρήματα αυτά ονομάζονται και **θεωρήματα της ηλεκτροτεχνίας** και ισχύουν τόσο στο συνεχές όσο και στο εναλλασσόμενο ρεύμα, με τις απαραίτητες βέβαια τροποποιήσεις και προσαρμογές.

Τα θεωρήματα της ηλεκτροτεχνίας χρησιμοποιούνται σε πάρα πολλές εφαρμογές, όπως π.χ. στην επίλυση ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, στις ηλεκτρικές μετρήσεις, στον προσδιορισμό ισοδυνάμων κυκλωμάτων κλπ.

8.2 Θεώρημα μετασχηματισμού αστέρα σε τρίγωνο και αντίστροφα ή θεώρημα του Kenelly.

Σύμφωνα με το θεώρημα που διατυπώθηκε από τον Kenelly*, τρεις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 , που συνδέουν τρεις κόμβους Α, Β, Γ οποιουδήποτε δικτύου, σχηματίζοντας έτσι τρίγωνο, μπορεί να αντικατασταθούν από τρεις άλλες αντιστάσεις R_x , R_y , R_z , που συνδέονται κατά το ένα άκρο τους διαδοχικά προς τους κόμβους Α, Β, Γ του δικτύου, και κατά το άλλο άκρο τους σε κοινό κόμβο Κ, σχηματίζοντας έτσι αστέρα, χωρίς να μεταβάλλουν τη λειτουργία του υπόλοιπου δικτύου.

Ας δούμε πώς υπολογίζονται οι τιμές των αντιστάσεων του αστέρα (R_x , R_y ,

* A.E. Kenelly, Αμερικανός μηχανικός, 1861-1939.

R_z). Θεωρούμε τα δυο ηλεκτρικά δικτυώματα του σχήματος 8.2α. Το ένα (α) συγκροτεί μια τριγωνική συνδεσμολογία αντιστάσεων ή **τύπου Δ**, ενώ το άλλο (β) μια συνδεσμολογία σε σχήμα αστέρα ή **τύπου Υ**.

Για να είναι τα δυο δικτυώματα ισοδύναμα, θα πρέπει οι αντίστοιχες τάσεις να είναι ίσες μεταξύ τους (π.χ. $U_{AB}^Y = U_{AB}^Δ$) καθώς επίσης και τα αντίστοιχα ρεύματα (π.χ. $I_A^Y = I_A^Δ$). Επομένως θα πρέπει οι ισοδύναμες αντιστάσεις μεταξύ των σημείων Α και Β, Β και Γ, Α και Γ να είναι και στα δυο δικτυώματα ίσες, δηλαδή:

$$R_x + R_y = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (8.1)$$

$$R_y + R_z = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (8.2)$$

$$R_z + R_x = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (8.3)$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (8.1), (8.2) και (8.3) προκύπτει:

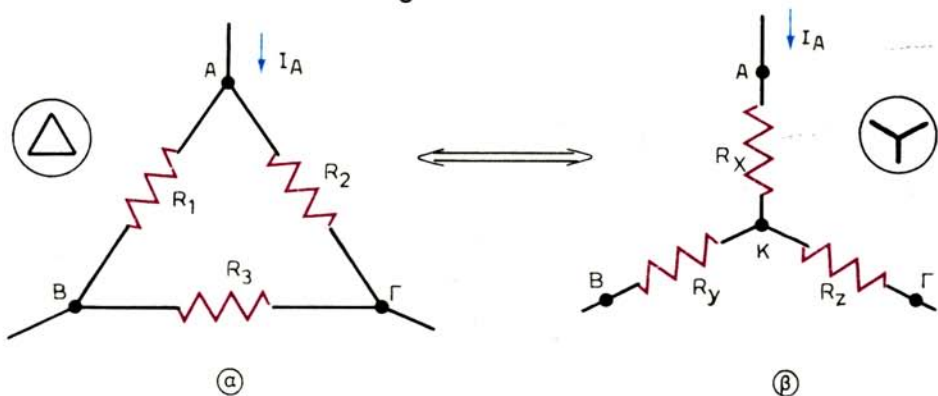
$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_y = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ και } R_z = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Αν επιλύσουμε το σύστημα ως προς R_1 , R_2 και R_3 προκύπτει:

$$R_1 = \frac{R_x R_y + R_z R_y + R_x R_z}{R_z} \quad (8.4), \quad R_2 = \frac{R_x R_y + R_y R_z + R_x R_z}{R_y} \quad (8.5)$$

$$\text{και } R_3 = \frac{R_x R_y + R_y R_z + R_x R_z}{R_x} \quad (8.6)$$

Αν $R_1 = R_2 = R_3 = R_Δ$ και $R_x = R_y = R_z = R_Y$
τότε $R_Δ = 3 R_Y$ και $R_Y = \frac{R_Δ}{3}$



Σχ. 8.2α.

Συνδεσμολογία αντιστάσεων. α) Τριγώνου. β) Αστέρα.

Παράδειγμα 8.2.1.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.26 είναι $E = 92 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_1 = R_3 = 30 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$ και $R_5 = 11 \Omega$. Ζητούνται: α) Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{A\Delta}$. β) Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή.

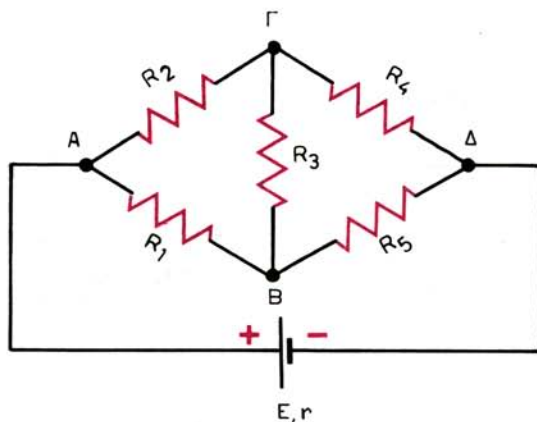
α) Μετασχηματίζουμε το τρίγωνο ABΓ σε αστέρα ABΓ, Κ (σχ. 8.2γ).

Σύμφωνα με το θεώρημα του Kennelly θα έχουμε:

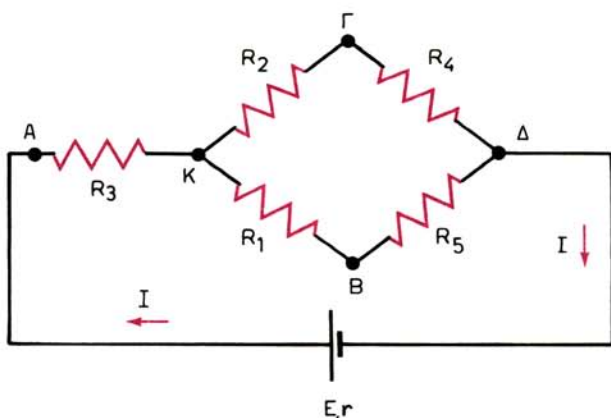
$$R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 40}{100} = 12 \Omega$$

$$R'_1 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 30}{100} = 9 \Omega \quad \text{και}$$

$$R'_2 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 40}{100} = 12 \Omega$$

**Σχ. 8.26.**

Κύκλωμα παραδείγματος 8.2.1.

**Σχ. 8.2γ.**

Μετασχηματισμένο κύκλωμα σχήματος 8.26.

Είναι $R_2' + R_4 = R_1' + R_5 = 20 \Omega$
 Άρα $R_{K\Delta} = 10 \Omega$ και $R_{A\Delta} = R_{K\Delta} + R_3' = 22 \Omega$

$$b) \quad I = \frac{E}{r + R_{A\Delta}} = \frac{92}{1+22} = 4 \text{ A}$$

Παράδειγμα 8.2.2.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.2δ είναι $E_1 = 32 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 72 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 20 \Omega$ και $R_2 = 10 \Omega$. Να υπολογισθούν τα ρεύματα των κλάδων.

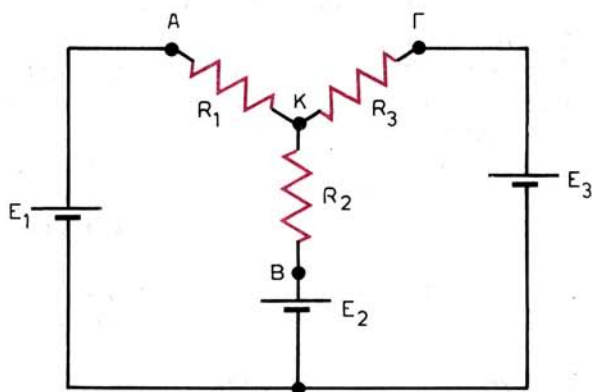
Μετατρέπομε το δικτύωμα Υ σε δικτύωμα Δ (σχ. 8.2ε).

Θα έχουμε:

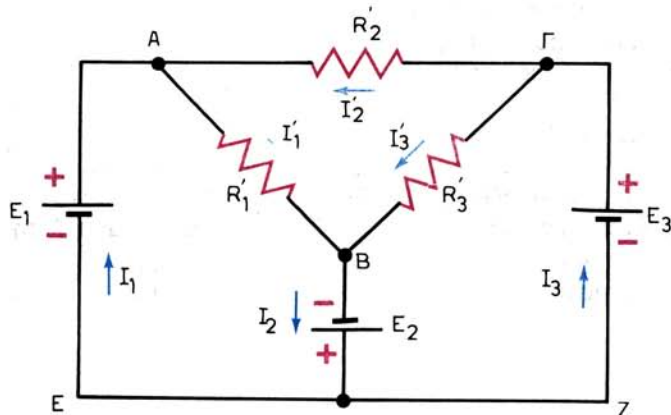
$$R_1' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{800}{20} = 40 \Omega$$

$$R_2' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{800}{10} = 80 \Omega$$

και $R_3' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{800}{20} = 40 \Omega$



Σχ. 8.2δ.



Σχ. 8.2ε.

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } U_A - U_B &= (U_A - U_E) + (U_E - U_B) = E_1 + E_2 \\ U_\Gamma - U_B &= (U_\Gamma - U_Z) + (U_Z - U_B) = E_3 + E_2 \\ U_\Gamma - U_A &= (U_\Gamma - U_Z) + (U_Z - U_E) + (U_E - U_A) \\ &= E_3 + 0 - E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } I'_1 &= \frac{U_{AB}}{R'_1} = \frac{E_1 + E_2}{R'_1} = \frac{40}{40} = 1 \text{ A} \\ I'_3 &= \frac{U_{\Gamma B}}{R'_3} = \frac{E_3 + E_2}{R'_3} = \frac{80}{40} = 2 \text{ A} \\ I'_2 &= \frac{U_{\Gamma A}}{R'_2} = \frac{E_3 - E_1}{R'_2} = \frac{40}{80} = 0,5 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\text{Κόμβος Α: } I_1 = I'_1 - I'_2 = 0,5 \text{ A}$$

$$\text{Κόμβος Β: } I_2 = I'_1 + I'_3 = 3 \text{ A}$$

$$\text{Κόμβος Γ: } I_3 = I'_2 + I'_3 = 2,5 \text{ A}$$

8.3 Θεώρημα της επαλληλίας ή της υπερθέσεως.

Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε από τον Helmholtz το 1853, ως εξής:

Σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο που συγκροτείται από γραμμικά στοιχεία και έχει περισσότερες από μία ηλεκτρικές πηγές (διεγέρσεις), η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος (απόκριση) σ' έναν κλάδο του δικτύου είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των αποκρίσεων στον υπόψη κλάδο, που οφείλονται σε κάθε μια διεγερση, αν αυτή δρούσε στο δίκτυο μόνη της.

Θα αναλύσουμε τώρα το θεώρημα της επαλληλίας, με σκοπό να υποδείξουμε τα βήματα που ακολουθούνται για την επίλυση ενός δικτύου:

1) Διακόπτουμε τη λειτουργία όλων των διεγέρσεων εκτός από μία. Η διακοπή της λειτουργίας των διεγέρσεων έχει ως συνέπεια:

- Αν πρόκειται για πηγή τάσεως την αντικαθιστούμε με ένα βραχυκύκλωμα.
- Αν πρόκειται για πηγή ρεύματος ανοίγουμε τον κλάδο της (ανοικτό κύκλωμα).

Σε κάθε περίπτωση η εσωτερική αντίσταση της πηγής παραμένει.

2) Επιλύουμε το δίκτυο και υπολογίζουμε την απόκριση σε κάθε κλάδο του, που οφείλεται μόνο στη διεγερση που εξετάζουμε.

3) Το ίδιο κάνουμε και για τις υπόλοιπες διεγέρσεις.

4) Η απόκριση σ' ένα κλάδο είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των μερικών αποκρίσεων (εντάσεων) του κλάδου αυτού.

Το θεώρημα της επαλληλίας αποτελεί συνέπεια της γραμμικής σχέσεως μεταξύ εντάσεως και τάσεως. Εφαρμόζεται συνήθως στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η αφαίρεση ορισμένων διεγέρσεων από το δίκτυο, καθιστά δυνατή τη σύνθεση αντιστάσεων σε σειρά ή παράλληλα ή τους μετασχηματισμούς τριγώνων σε αστέρες ή αντίστροφα, που συνεπάγονται απλούστευση του δικτύου.

Παράδειγμα 8.3.1.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.3α είναι $E = 12 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$ και

$I = 6 \text{ A}$. Να υπολογισθεί το ρεύμα I_x που διαρρέει την R_2 .

Σύμφωνα με το θεώρημα της επαλληλίας διακόπτομε τη λειτουργία της πηγής ρεύματος και παίρνουμε το κύκλωμα του σχήματος 8.3β.

Το ρεύμα I_1 είναι:

$$I_1 = \frac{E}{r + R_1 + R_2} = \frac{12}{12} = 1 \text{ A}$$

Στη συνέχεια βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσεως και παίρνουμε το κύκλωμα του σχήματος 8.3γ.

Η ισοδύναμη ολική αντίσταση μεταξύ των κόμβων A και B θα είναι:

$$R_{AB} = \frac{R_2 (R_1 + r)}{R_2 + R_1 + r} \quad (1)$$

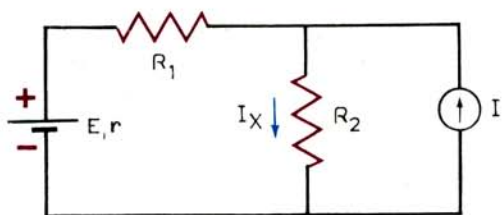
Άρα, η διαφορά δυναμικού U_{AB} , μπορεί να γραφεί ως:

$$U_{AB} = I R_{AB} = I_2 R_2 \quad (2)$$

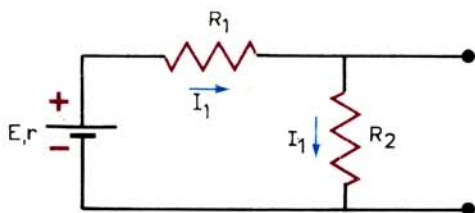
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$I_2 = I \frac{R_1 + r}{r + R_1 + R_2} = 6 \cdot \frac{4}{12} = 2 \text{ A}$$

Άρα $I_x = I_1 + I_2 = 1 + 2 = 3 \text{ A}$

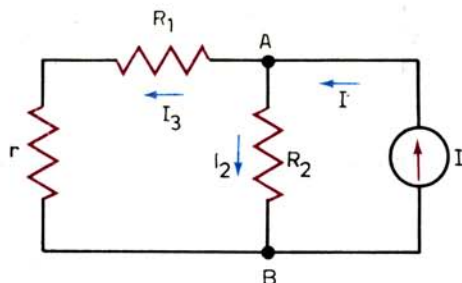


Σχ. 8.3α.
Κύκλωμα παραδείγματος 8.3.1.



Σχ. 8.3β.

Διακοπή της λειτουργίας της πηγής εντάσεως του κυκλώματος του σχήματος 8.3α.



Σχ. 8.3γ.

Διακοπή της λειτουργίας της πηγής τάσεως του κυκλώματος του σχήματος 8.3α.

8.4 Θεωρήματα των ισοδυνάμων πηγών.

Σε πολλές περιπτώσεις έχουμε ένα σύνθετο κύκλωμα από ενεργητικά και παθητικά στοιχεία (δίκτυο) και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την απόκριση (τάση, ρεύμα) σε ένα μόνο παθητικό στοιχείο, π.χ. σε μια μόνο αντίσταση. Στις περιπτώσεις αυτές η επίλυση του κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff ή τις άλλες μεθόδους που αναπτύξαμε είναι επίπονη, γιατί είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίζουμε τα ρεύματα που διαρρέουν όλους τους κλάδους του κυκλώματος.

Περισσότερο επίπονη είναι η περίπτωση, κατά την οποία έχουμε ένα δίκτυο με μια μεταβλητή κατανάλωση και μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το ρεύμα που τη διαρρέει για κάθε τιμή της.

Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να αντικαταστήσουμε το υπόλοιπο κύκλωμα, δηλαδή το κύκλωμα εκτός από την κατανάλωση που ενδιαφέρει, με ένα απλό ισοδύναμο κύκλωμα μιας πηγής με εσωτερική αντίσταση. Ας σημειωθεί ότι:

Δυο κυκλώματα είναι ισοδύναμα, όταν δημιουργούν το ίδιο ρεύμα στην ίδια κατανάλωση.

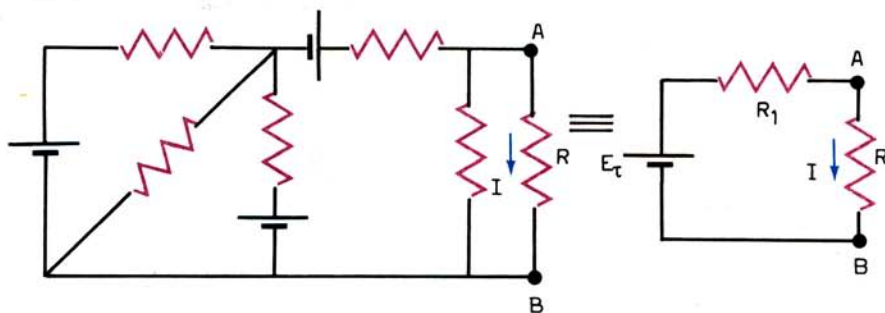
Το σχήμα 8.4α δείχνει δυο ισοδύναμα κυκλώματα. Και στα δυο ρέει στην κατανάλωση R το ίδιο ρεύμα I .

Η μετατροπή συνθέτων κυκλωμάτων σε ισοδύναμα απλά κυκλώματα γίνεται με τη βοήθεια των θεωρημάτων Thevenin και Norton, τα οποία θα αναπτύξουμε στις παραγράφους που ακολουθούν.

8.4.1 Θεώρημα Thevenin.

Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε από τον Thevenin*, ως εξής:

Οποιοδήποτε γραμμικό δίκτυο που έχει σ' ένα κλάδο του AB ένα παθητικό στοιχείο, π.χ. R , μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα που συγκροτείται από μια ιδανική πηγή τάσεως E_T σε σειρά με δυο αντιστάτες R_T και R .



Σχ. 8.4α.
Δυο ισοδύναμα κυκλώματα.

* L.C. Thevenin, Γάλλος ηλεκτρολόγος μηχανικός, 1857-1926.

Η E_T είναι η τάση μεταξύ των σημείων A και B, όταν αφαιρεθεί το παθητικό στοιχείο R (τάση σε κενό). Η R_T είναι η σύνθετη αντίσταση που εμφανίζεται μεταξύ των ακροδεκτών A και B, όταν αφαιρεθεί η R και διακοπεί η λειτουργία όλων των πηγών του κυκλώματος. Υπενθυμίζουμε ότι η διακοπή της λειτουργίας μιας πηγής έχει ως συνέπεια:

- Αν πρόκειται για πηγή τάσεως την αντικατάστασή της μ' ένα βραχυκύκλωμα.
- Αν πρόκειται για πηγή ρεύματος το άνοιγμα του κλάδου της. Σε κάθε περίπτωση η εσωτερική αντίσταση της πηγής παραμένει.

Παράδειγμα 8.4.1.

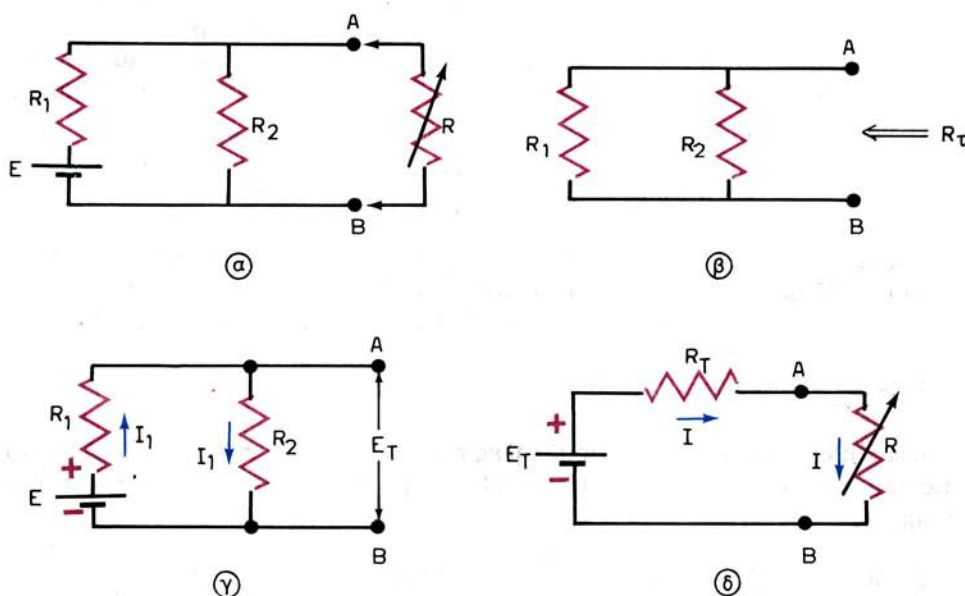
Στο κύκλωμα του σχήματος 8.46 (α) είναι $E = 18 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει το μεταβλητό αντιστάτη R, όταν: $R = 0$, $R = 1 \Omega$, $R = 2 \Omega$, $R = 4 \Omega$, $R = 10 \Omega$ και $R = \infty$.

Θα εργασθούμε με βάση το θεώρημα Thevenin.

α) **Υπολογισμός R_T .** Για τον υπολογισμό της R_T αποσυνδέουμε τον αντιστάτη R από το κύκλωμα και βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσεως. Έτσι προκύπτει το «νεκρό» δίκτυωμα του σχήματος 8.46(β), για το οποίο ισχύει:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

β) **Υπολογισμός E_T .** Η E_T είναι η τάση μεταξύ των ακροδεκτών A και B, μετά



Σχ. 8.46.

- α) Κύκλωμα παραδείγματος 8.4.1. β) Δίκτυωμα του κυκλώματος για τον υπολογισμό της R_T .
 γ) Κύκλωμα για τον υπολογισμό της τάσεως E_T . δ) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

την αποσύνδεση του αντιστάτη R [σχ. 8.46(γ)].

$$E_T = U_{AB} = I_1 R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 \rightarrow E_T = 12 \text{ V}$$

Το σχήμα 8.46(δ) δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.
Για $R = 0$ (βραχυκυκλωμένοι οι ακροδέκτες A και B) είναι:

$$I = \frac{E_T}{R_T} = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}$$

Για $R = 1 \Omega \rightarrow I = \frac{E_T}{R_T + R} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A}$

Για $R = 2 \Omega \rightarrow I = \frac{E_T}{R_T + R} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$

Για $R = 4 \Omega \rightarrow I = \frac{E_T}{R_T + R} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$

Για $R = 10 \Omega \rightarrow I = \frac{E_T}{R_T + R} = \frac{12}{12} = 1 \text{ A}$

Για $R = \infty \rightarrow I = 0$

Παράδειγμα 8.4.2.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.4γ(α) είναι $E = 3 \text{ V}$, $I = 2 \text{ A}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$ και $R_3 = 2 \Omega$. Να υπολογισθεί το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

Υπολογισμός R_T : Βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσεως και ανοικτοκυκλώνουμε την πηγή ρεύματος. Έτσι προκύπτει το «νεκρό» δίκτυωμα του σχήματος 8.4γ(β).

$$\text{Είναι: } \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{11}{6} \rightarrow R_T = 0,54 \Omega$$

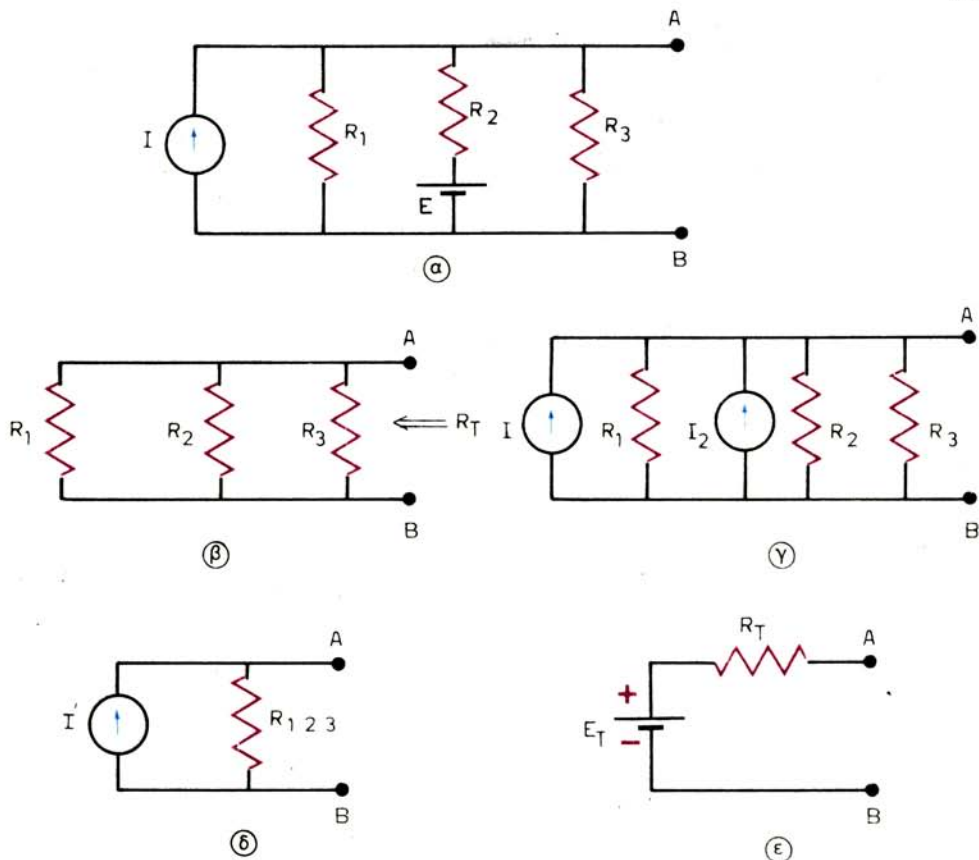
Υπολογισμός E_T : Η $E_T = U_{AB}$ υπολογίζεται με πολλούς τρόπους. Στην περίπτωση μας επειδή έχουμε υπολογίσει την $R_T = R_{1,2,3}$ εργαζόμαστε ως εξής: Μετατρέπουμε την πηγή τάσεως (E , R_2) σε πηγή ρεύματος [σχ. 8.4γ(γ)].

$$\text{Είναι: } I_2 = \frac{E}{R_2} = 3 \text{ A}$$

Αντικαθιστούμε τις τρεις παράλληλες αντιστάσεις με μία ($R_{1,2,3} = 0,54 \Omega$) και τις πηγές ρεύματος με μία ($I' = I + I_2 = 5 \text{ A}$) και παίρνομε το κύκλωμα του σχήματος 8.4γ(δ).

$$\text{Είναι: } E_T = U_{AB} = I' \cdot R_{1,2,3} = \frac{30}{11} = 2,73 \text{ V}$$

Το σχήμα 8.4γ(ε) δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμα.



Σχ. 8.4γ.

- α) Κύκλωμα παραδείγματος 8.4.2. β) Δικτύωμα του κυκλώματος για τον υπολογισμό της R_T . γ) Κύκλωμα, μετά τη μετατροπή της πηγής τάσεως σε πηγή ρεύματος. δ) Νέο ισοδύναμο κύκλωμα με μια μόνο πηγή ρεύματος. ε) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

8.4.2 Θεώρημα Norton.

Η διατύπωση του θεωρήματος αυτού, το οποίο, όπως θα διαπιστώσουμε, είναι παραλλαγή του θεωρήματος Thevenin, οφείλεται στον E. L. Norton, και έχει ως εξής:

Οποιοδήποτε γραμμικό δίκτυο που έχει σ' ένα κλάδο του AB ένα παθητικό στοιχείο, π.χ. τον αντιστάτη R , μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα, που συγκροτείται από μια ιδανική πηγή ρεύματος I_G , και δυο αντιστάτες R_T και R που συνδέονται παράλληλα μεταξύ τους και με την πηγή.

Η I_G είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο AB, όταν βραχυκυκλωθούν τα άκρα A, B (γι' αυτό ονομάζεται και ρεύμα βραχυκυκλώσεως). Η R_T είναι η σύνθετη αντίσταση που εμφανίζεται στους ακροδέκτες A και B, όταν αφαιρεθεί η R. Η R_T υπολογίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που

υπολογίζεται και η αντίσταση Thevenin (γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό). Άλλωστε, το θεώρημα Norton δεν είναι παρά μια διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος Thevenin, αφού το ισοδύναμο κύκλωμα Norton μπορούμε να το πάρουμε από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin με απλή μετατροπή της πηγής τάσεως σε πηγή ρεύματος.

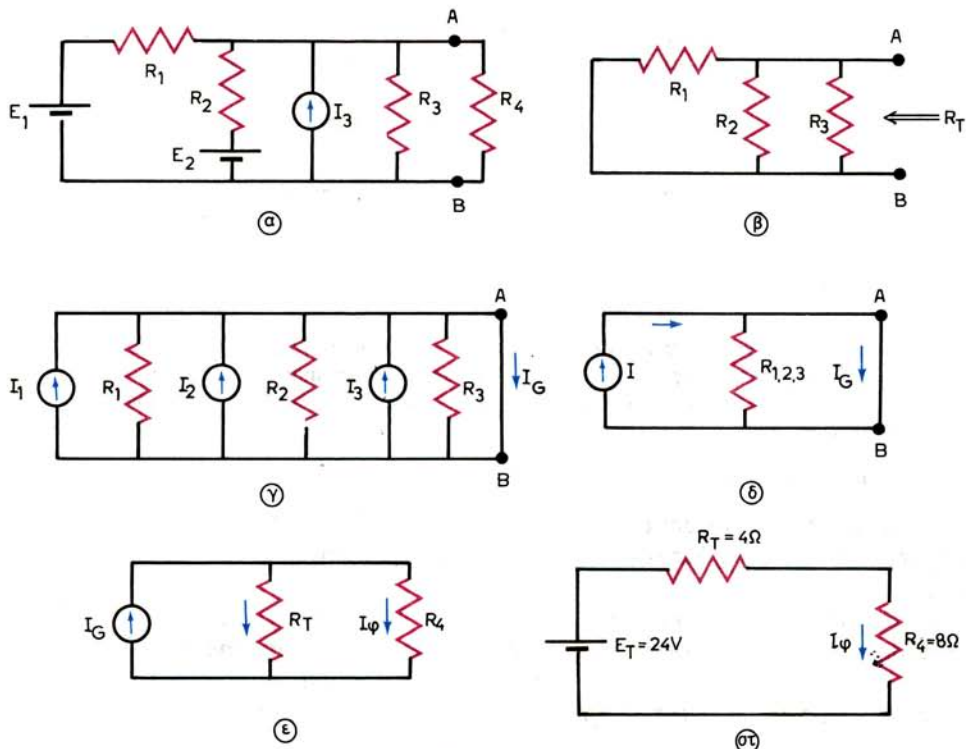
Παράδειγμα 8.4.3.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.4δ(α) είναι $E_1 = 10\text{ V}$, $R_1 = 10\ \Omega$, $E_2 = 20\text{ V}$, $R_2 = 20\ \Omega$, $I_3 = 4\text{ A}$, $R_3 = 10\ \Omega$ και $R_4 = 8\ \Omega$. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_4 .

Υπολογισμός R_T . Αποσυνδέουμε τον αντιστάτη R_4 , βραχυκυκλώνουμε τις πηγές τάσεως και ανοικτοκυκλώνουμε την πηγή ρεύματος. Έτσι προκύπτει το δικτύωμα του σχήματος 8.4δ(β).

$$\text{Είναι: } \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{5}{20} \rightarrow R_T = 4\ \Omega$$

Υπολογισμός του ρεύματος I_G . Βραχυκυκλώνουμε τους ακροδέκτες A και B. Μετατρέπουμε τις πηγές τάσεως σε πηγές ρεύματος [σχ. 8.4δ(γ)].



Σχ. 8.4δ.

α) Κύκλωμα παραδείγματος 8.4.3. β) Δικτύωμα του κυκλώματος για τον υπολογισμό της R_T . γ) Κύκλωμα με τη μετατροπή των πηγών τάσεως σε πηγές ρεύματος. δ) Νέο ισοδύναμο κύκλωμα με μια μόνο πηγή ρεύματος. ε) Ισοδύναμο κύκλωμα Norton. στ) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

$$\text{Είναι: } I_1 = \frac{E_1}{R_1} = 1 \text{ A} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$$

Το κύκλωμα του σχήματος 8.42δ(γ) μπορεί να αντικατασταθεί από το κύκλωμα του σχήματος 8.4δ(δ).

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1 + 1 + 4 = 6 \text{ A}$$

Φανερό είναι ότι η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2,3}$ δεν θα διαρρέεται από ρεύμα, εφόσον μεταξύ Α και Β υπάρχει βραχυκύκλωμα. Άρα:

$$I = I_G = 6 \text{ A}$$

Το σχήμα 8.4δ(ε) δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

Το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_4 είναι:

$$I_\Phi = I_G \cdot \frac{R_T}{R_T + R_4} = 6 \cdot \frac{4}{4 + 8} = 2 \text{ A}$$

Μπορούμε τώρα να μετατρέψουμε την πηγή ρεύματος σε πηγή τάσεως, με χαρακτηριστικά:

$$E_T = I_G \cdot R_T = 6 \cdot 4 = 24 \text{ V}$$

και εσωτερική αντίσταση $R_T = 4 \Omega$, οπότε σχηματίζουμε το κύκλωμα του σχήματος 8.4δ(στ), που είναι το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin. Έτσι βλέπουμε και με το παράδειγμα αυτό ότι τα δυο θεωρήματα είναι πρακτικά ταυτόσημα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και στο ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_4 είναι:

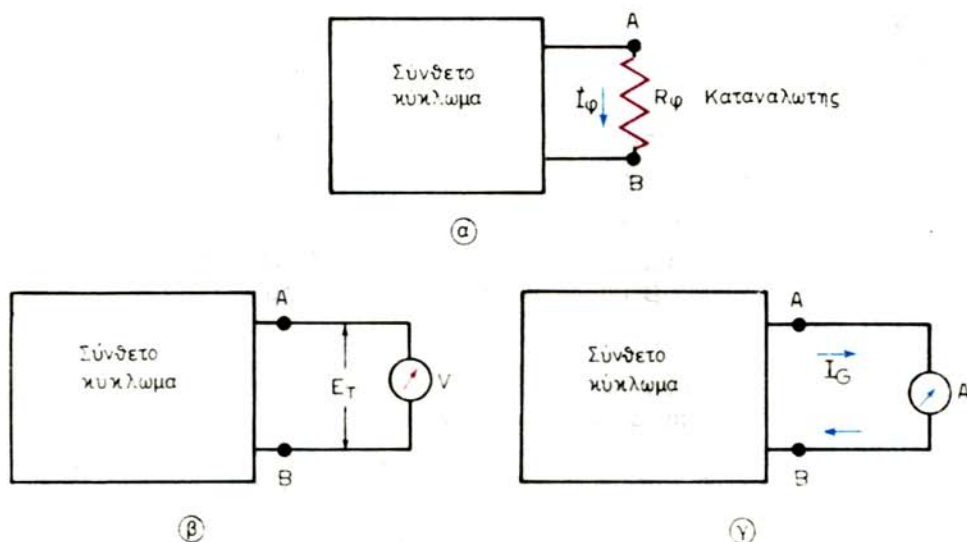
$$I_\Phi = \frac{E_T}{R_T + R_4} = \frac{24}{4 + 8} = 2 \text{ A}$$

8.4.3 Προσδιορισμός των ισοδυνάμων κυκλωμάτων Thevenin και Norton με μετρήσεις.

Σε αρκετές περιπτώσεις ηλεκτρικών δικτύων η πολυπλοκότητά τους είναι απαγορευτική για τον υπολογισμό και προσδιορισμό των κυκλωμάτων των ισοδυνάμων πηγών (Thevenin ή Norton), προκειμένου στη συνέχεια να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα συγκεκριμένο φορτίο R_Φ . Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να καταφύγουμε σε ηλεκτρικές μετρήσεις προκειμένου να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά των ισοδυνάμων κυκλωμάτων, όπως θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα πολύπλοκο δίκτυο, για το οποίο δεν γνωρίζουμε τίποτε, και το οποίο πρόκειται να τροφοδοτήσει ένα καταναλωτή R_Φ . Θεωρούμε ότι το δίκτυο αυτό περιέχεται σ' ένα κλειστό κουτί*, από το οποίο βγαίνουν μόνο δυο ακροδέκτες μεταξύ των οποίων συνδέεται ο καταναλωτής, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.4ε(α).

* Ο διεθνής όρος είναι black box, δηλαδή «μαύρο κουτί».



Σχ. 8.4ε.

α) Σύνθετο κύκλωμα (κλειστό κουτί) που τροφοδοτεί καταναλωτή R_{ϕ} . β) Μέτρηση της τάσεως σε κενό. γ) Μέτρηση του ρεύματος βραχυκυκλώσεως.

Με ένα κατάλληλο βολτόμετρο πολύ μεγάλης εσωτερικής αντιστάσεως μετράμε την τάση μεταξύ των ακροδεκτών A και B, όταν μεταξύ τους δεν υπάρχει συνδεδεμένο φορτίο (τάση σε κενό), όπως φαίνεται στο σχήμα 8.4ε(β). Η τάση αυτή U_{AB} είναι η E_T του κυκλώματος Thevenin.

Βραχυκυκλώνουμε μετά τους ακροδέκτες A και B με ένα αμπερόμετρο, που έχει μικρή εσωτερική αντίσταση [(σχ. 8.4ε(γ))]. Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως που μετράει το όργανο είναι το ρεύμα I_G του ισοδύναμου κυκλώματος Norton. Η αντίσταση των ισοδυνάμων κυκλωμάτων προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$R_T = \frac{E_T}{I_G}$$

Έτσι έχουμε και τα τρία μεγέθη που απαιτούνται για να σχηματίσουμε τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton.

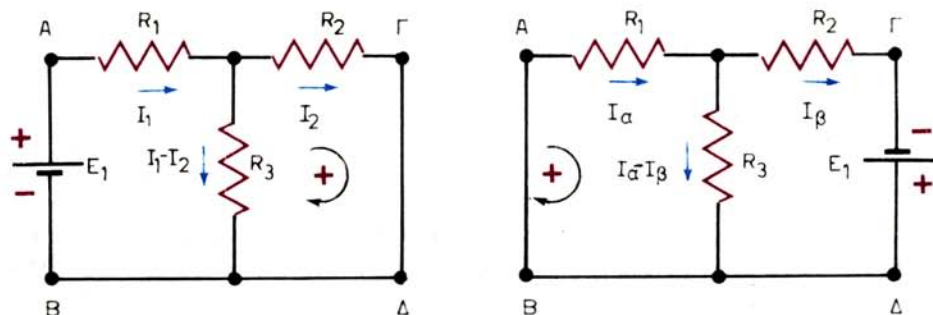
8.5 Θεώρημα της αμοιβαιότητας ή μεταθέσεως.

Το θεώρημα αυτό, που φέρει και τις ονομασίες «θεώρημα της μεταθέσεως» και «θεώρημα της αντιστροφής», έχει ως εξής:

Εάν ηλεκτρεγερτική δύναμη E_1 , που βρίσκεται σ' ένα κλάδο (AB) ενός κυκλώματος και προκαλεί σ' ένα άλλο κλάδο (ΓΔ) ρεύμα εντάσεως I_2 , μετατεθεί στο δεύτερο αυτό κλάδο (ΓΔ), τότε προκαλεί ρεύμα εντάσεως I_2 στον πρώτο κλάδο (AB).

Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό στην απλή περίπτωση του κυκλώματος του σχήματος 8.5α.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.5α(α) έχουμε:



Σχ. 8.5α.

Κυκλώματα για την απόδειξη του θεωρήματος της αμοιβαιότητας. α) Η ΗΕΔ βρίσκεται στον κλάδο (ΑΒ). β) Η ΗΕΔ έχει μετατεθεί στον κλάδο (ΓΔ).

$$E_1 = I_1 \cdot \left[R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right] = I_1 \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2 + R_3} \quad (8.7)$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff στο δεξιό βρόχο του ίδιου κυκλώματος, παίρνουμε:

$$0 = I_2 R_2 - (I_1 - I_2) R_3 \quad \text{ή} \quad I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (8.8)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (8.7) και (8.8) παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{I_2} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (8.9)$$

Ερχόμαστε τώρα στο κύκλωμα του σχήματος 8.5α(β). Στο κύκλωμα αυτό έχουμε:

$$E_1 = I_6 \cdot \left[R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right] = I_6 \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad (8.10)$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff στον αριστερό βρόχο του κυκλώματος αυτού, παίρνουμε:

$$0 = I_\alpha R_1 + (I_\alpha - I_6) R_3 \quad \text{ή} \quad I_\alpha = I_6 \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (8.11)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (8.10) και (8.11) παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{I_\alpha} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad (8.12)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (8.9) και (8.12) βλέπουμε ότι ισχύει:

$$I_\alpha = I_2 \quad (8.13)$$

Δηλαδή, το ρεύμα στον κλάδο (ΓΔ) του πρώτου κυκλώματος ισούται με το ρεύμα στον κλάδο (ΑΒ) του δεύτερου κυκλώματος. Σχετικά με τη μετάθεση της ΗΕΔ πρέπει να κάνουμε τις εξής δυο επισημάνσεις:

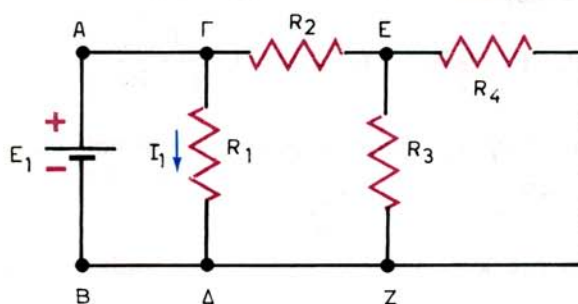
1) Ανάλογα με τον τρόπο της μεταθέσεως της πολικότητας της ΗΕΔ προκύπτει και η φορά του ρεύματος στον πρώτο κλάδο του κυκλώματος. Αν π.χ. στην περίπτωση των κυκλωμάτων του σχήματος 8.5α η πηγή είχε μετατεθεί με ανάποδη πολικότητα, τότε θα προέκυπτε αντί της (8.13) η σχέση: $-I_{\alpha} = I_2$.

2) Το θεώρημα αυστηρά αναφέρεται σε μετάθεση ΗΕΔ και **όχι πηγής τάσεως**. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε να μεταθέσουμε μια μη ιδανική πηγή τάσεως – δηλαδή πηγή που έχει και εσωτερική αντίσταση – θα μεταθέτομε **μόνον την ΗΕΔ** και όχι την εσωτερική αντίσταση, η οποία θα παραμένει στον κλάδο, όπου αρχικά υπήρχε η πηγή.

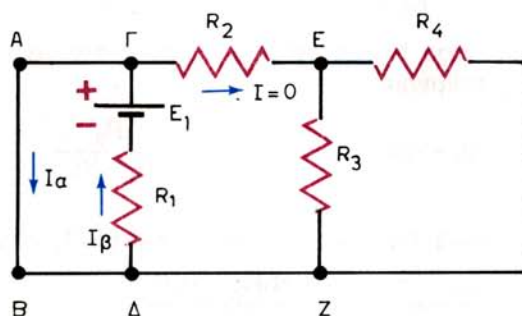
Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή σκόπιμο είναι να προσθέσουμε ότι το θεώρημα της μεταθέσεως χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις, όπου η μετάθεση της ΗΕΔ σ' ένα άλλο κλάδο του κυκλώματος απλουστεύει σημαντικά την επίλυσή του. Αυτό θα φανεί και στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 8.5.1.

Ζητείται να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος από την αντίσταση R_1 του κυκλώματος του σχήματος 8.5β(α). Δίνεται $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 7 \Omega$, $R_4 =$



(α)



(β)

Σχ. 8.56.

Κύκλωμα παραδείγματος 8.5.1. α) Με την ΗΕΔ στην κανονική της θέση. β) Με μετάθεση της ΗΕΔ στον κλάδο (ΓΔ).

12 Ω και $E_1 = 20 \text{ V}$.

Μεταθέτομε την πηγή στον κλάδο της αντιστάσεως R_1 , όπως φαίνεται και στο σχήμα 8.56(β). Εφόσον μεταξύ των σημείων Α και Β υπάρχει τώρα βραχυκύκλωμα και στο κύκλωμα δεν υπάρχει άλλη πηγή, ο κλάδος (ΓΕ) δεν θα διαρρέεται από ρεύμα. Άρα, το ρεύμα εντάσεως I_a , που διαρρέει τον κλάδο (ΑΒ), θα διαρρέει και τον κλάδο (ΓΔ), δηλαδή: $I_a = I_b$.

Γράφοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff στο βρόχο ΑΒΔΓ του κυκλώματος του σχήματος 8.56(β), παίρνομε:

$$E_1 = I_a \cdot R_1 \quad \text{ή} \quad I_b = I_a = \frac{E_1}{R_1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της αμοιβαιότητας ισχύει: $I_1 = I_b = 2 \text{ A}$.

Δηλαδή ρεύμα εντάσεως 2 Α διαρρέει την αντίσταση R_1 στο κύκλωμα που μας έχει δοθεί αρχικά. Με το παράδειγμα αυτό είδαμε πόσο εύκολο είναι να επιλύσομε, ορισμένες φορές, ένα κύκλωμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα της αμοιβαιότητας.

8.6 Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (θεώρημα προσαρμογής).

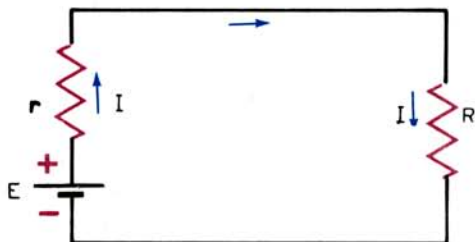
Γνωρίζομε ότι σ' ένα ηλεκτρικό δίκτυο τα ενεργητικά στοιχεία (πηγές) παρέχουν ενέργεια και τα παθητικά στοιχεία (π.χ. αντιστάτες) καταναλώνουν ενέργεια.

Η ηλεκτρική ενέργεια (ή ισχύς), που καταναλώνουν οι αντιστάτες, για να μετατραπεί σε άλλη μορφής ενέργεια π.χ. για θερμότητα κλπ., ονομάζεται **ωφέλιμη ενέργεια**. Αντίθετα η ενέργεια, που δεν καταναλώνεται επάνω στην αντίσταση φόρτου, αλλά δαπανάται ανώφελα μέσα στο κύκλωμα ονομάζεται **ενέργεια απωλειών** (ή αντίστοιχα **απώλεια ισχύος**).

Το θεώρημα της προσαρμογής μας επιτρέπει να προσδιορίσομε την ωμική αντίσταση R_f ενός φορτίου, έτσι ώστε η ισχύς που αποδίδεται στο φορτίο αυτό από μια πηγή τάσεως να είναι η μέγιστη δυνατή. Ας πάρομε για παράδειγμα το πιο απλό ηλεκτρικό κύκλωμα, που αποτελείται από πηγή ΗΕΔ E και εσωτερική αντίσταση r και μια αντίσταση φορτίου R (σχ. 8.6α).

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (8.14)$$



Σχ. 8.6α.
Κύκλωμα πηγής τάσεως - τροφοδοτούμενου φορτίου.

Επομένως η ισχύς (ωφέλιμη) που καταναλώνει ο αντιστάτης R θα είναι:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{E^2 \cdot R}{(R + r)^2} \quad (8.15)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (8.15) η ωφέλιμη ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R γίνεται μέγιστη, αν $r = 0$, δηλαδή αν διαθέτομε πηγή με αμελητέα εσωτερική αντίσταση. Αν όμως, όπως συνήθως συμβαίνει στην πράξη, η πηγή είναι δεδομένης εσωτερικής αντιστάσεως, σκόπιμο είναι να ζητήσουμε κάτω από ποιες συνθήκες, **όσον αφορά την τιμή της R** , η αποδιδόμενη από την πηγή ισχύς γίνεται μέγιστη.

Θεωρούμε, λοιπόν, την ωφέλιμη ισχύ ως συνάρτηση της αντιστάσεως του φορτίου:

$$P(R) = \frac{E^2 \cdot R}{(R + r)^2} = f(R) \quad (8.16)$$

και ζητούμε την τιμή της R για την οποία έχει μέγιστο.

Για να έχει η συνάρτηση $P = f(R)$ μέγιστο θα πρέπει:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad (8.17) \quad \text{και} \quad \frac{d^2P}{dR^2} < 0 \quad (8.18)$$

Είναι:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R + r)^2 \cdot E^2 - E^2 R^2 (r + R)}{(R + r)^4} = E^2 \frac{(R + r)^2 - 2R(r + R)}{(R + r)^4}$$

Σύμφωνα με την (8.17) θα πρέπει:

$$(R + r)^2 - 2R(r + R) = 0 \rightarrow r + R - 2R = 0 \rightarrow R = r \quad (8.19)$$

Υπολογίζομε και τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2P}{dR^2} = E^2 \frac{2R - 4r}{(R + r)^4} \quad (8.20)$$

Αν θέσομε στην (8.20) $R = r$ παίρνομε:

$$\frac{d^2P}{dR^2} = - \frac{2E^2 r}{(2r)^4} < 0$$

Άρα για $R = r$ η ισχύς που αποδίδεται στην αντίσταση R γίνεται μέγιστη. Συμπεραίνομε λοιπόν ότι:

Μια πηγή παρέχει τη μέγιστη ισχύ σε μια εξωτερική αντίσταση, όταν η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι ίση με την εξωτερική αντίσταση.

Το φαινόμενο αυτό κατά το οποίο μεταφέρεται η μέγιστη δυνατή ισχύς από την πηγή στην κατανάλωση ονομάζεται **προσαρμογή** της καταναλώσεως στην πηγή και έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές. Μπορούμε π.χ. να προσαρμόσομε ένα φορτίο σε μια γεννήτρια (ή σ' ένα δίκτυο) έτσι, ώστε η ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο να είναι μέγιστη. Μπορούμε επίσης να προσαρμόσομε τις ενισχυτικές βαθμίδες ενός ενισχυτή με τη βαθμίδα εξόδου (π.χ. τα

ηχεία) με την προσαρμογή του φορτίου στην ενισχυτική βαθμίδα κατορθώνομε να έχουμε τη μέγιστη ισχύ στην έξοδο (αποφεύγουμε επίσης την παραμόρφωση των ηλεκτρονικών σημάτων).

Αν θέσουμε στην (8.15) $R = r$ παίρνομε:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4r} \quad (8.21)$$

Η σχέση (8.21) παρέχει τη μέγιστη ισχύ που μπορεί να δώσει μια πηγή σε εξωτερικό κύκλωμα. Η συνάρτηση $P = f(R)$ απεικονίζεται στο σχήμα 8.66.

Η ωφέλιμη ισχύς που καταναλίσκεται στον αντιστάτη ονομάζεται και **ισχύς εξόδου**. Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (8.15) η ισχύς εξόδου είναι:

$$P_{\varepsilon\xi} = I^2 R = \frac{E^2}{(R + r)^2} R \quad (8.22)$$

Η ισχύς η οποία καταναλίσκεται στην ίδια την πηγή, λόγω της εσωτερικής της αντιστάσεως, ονομάζεται **ισχύς εισόδου** και δίνεται από τη σχέση:

$$P_{\varepsilon\iota\sigma} = I^2 r = \frac{E^2}{(R + r)^2} r \quad (8.23)$$

Ως **βαθμός αποδόσεως κυκλώματος** ορίζεται:

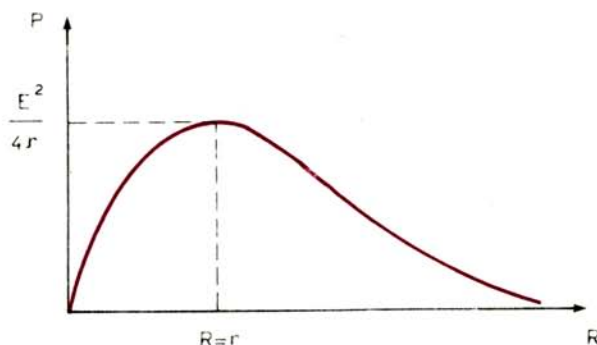
$$\eta = \frac{P_{\varepsilon\xi}}{P_{\varepsilon\iota\sigma} + P_{\varepsilon\xi}} = \frac{R}{R + r} \quad (8.24)$$

Εάν έχουμε **προσαρμογή**, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσομε ότι ισχύει:

$$P_{\varepsilon\iota\sigma} = P_{\varepsilon\xi} = \frac{E^2}{4r} \quad (8.25)$$

και

$$\eta = \frac{1}{2} \quad (8.26)$$



Σχ. 8.66.

Μεταβολή της ισχύος που παρέχει πηγή σε φορτίο, σε συνάρτηση με την αντίσταση φορτίου.

Το διάγραμμα του σχήματος 8.6γ αποδίδει τη μεταβολή του συντελεστή

$$\text{αποδόσεως σε συνάρτηση με την αντίσταση φορτίου} \left(\eta = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \right).$$

Όταν επιτύχουμε μέγιστη ισχύ στην R , η απόδοση του κυκλώματος είναι 50%, πράγμα που δεν είναι πάντοτε συμφέρον. **Εξασθένιση** του κυκλώματος α ορίζομε το πηλίκον:

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{εξ}}{P_{εισ}} \quad (8.27)$$

Κατά την προσαρμογή είναι $\alpha = 0$ γιατί $1/2 \ln 1 = 0$ ($\ln 1 = 0$).

Παράδειγμα 8.6.1.

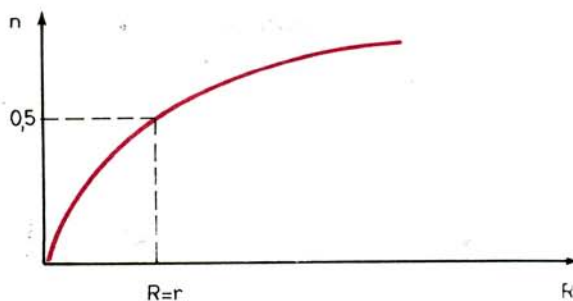
Στη διάταξη του σχήματος 8.6δ είναι $E = 16 \text{ V}$, $r = 2 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_1 = 2 \Omega$. Να προσδιορισθεί η θέση του δρομέα Δ , ώστε η ισχύς στο εξωτερικό κύκλωμα να είναι μέγιστη.

Είναι:

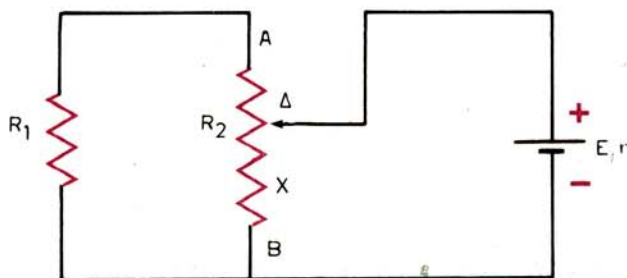
$$R_{AB} = R_2 = 6 \Omega$$

και έστω ότι

$$R_{\Delta B} = x$$



Σχ. 8.6γ.
Μεταβολή του βαθμού αποδόσεως σε συνάρτηση με το φορτίο.



Σχ. 8.6δ.
Κύκλωμα παραδείγματος 8.6.1.

οπότε: $R_{A\Delta} = R_2 - x$

Οι αντιστάτες x και $R_1 + R_2 - x$ συνδέονται παράλληλα.
Άρα:

$$R = \frac{(R_1 + R_2 - x) x}{R_1 + R_2 + x - x} \quad (1)$$

Για να έχουμε προσαρμογή θα πρέπει:

$$R = r \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$x^2 - (R_1 + R_2)x + r(R_1 + R_2) = 0 \quad (3)$$

Η διακρίνουσα της (3) είναι:

$$\Delta = (R_1 + R_2)^2 - 4r(R_1 + R_2) = 64 - 8 \cdot 8 = 0$$

Άρα:

$$x = \frac{6}{29} = \frac{R_1 + R_2}{2} \Rightarrow x = 4 \Omega$$

Η μέγιστη ισχύς είναι:

$$P = \frac{E^2}{4r} = \frac{16^2}{4 \cdot 2} = 32 \text{ W}$$

Παράδειγμα 8.6.2.

Στο κύκλωμα του σχήματος 8.6ε (α) είναι $E_1 = 24 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $R_2 = 6 \Omega$. Ζητείται η R_ϕ έτσι, ώστε η ισχύς στην αντίσταση αυτή να είναι μέγιστη καθώς και η μέγιστη ισχύς.

Προσδιορίζουμε τις E_T και R_T του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin. Η E_T είναι η τάση U_{AB} αν αποσυνδέσουμε την R_ϕ [σχ. 8.6ε(β)].

Είναι:

$$E_T = U_A - U_B = E_1 - I_1 R_1 \quad (1)$$

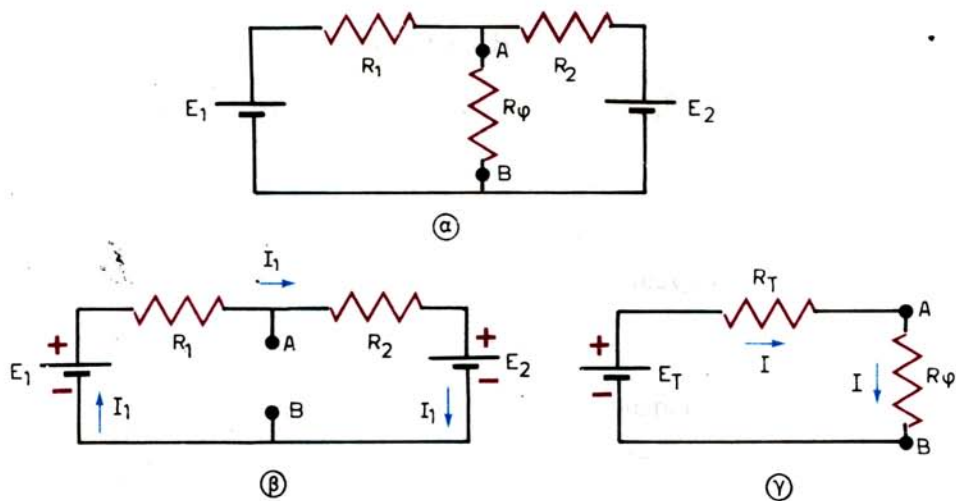
$$E_1 - E_2 = I_1 (R_1 + R_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$E_T = E_1 - \frac{(E_1 - E_2) R_1}{R_1 + R_2} = 18 \text{ V}$$

$$R_T = R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow R_T = 2 \Omega$$

Το σχήμα 8.6ε(γ) δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.



Σχ. 8.6ε.

- α) Κύκλωμα παραδείγματος 8.6.2. β) Κύκλωμα για τον υπολογισμό της τάσεως E_T .
 γ) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

Για να έχουμε μέγιστη ισχύ στο φορτίο, θα πρέπει η R_ϕ να είναι ίση με την R_T :
 $R_\phi = R_T = 2 \Omega$.

Η μέγιστη ισχύς είναι:

$$P_{\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} = \frac{18^2}{4 \cdot 2} = 40,5 \text{ W}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΑΦΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΛΛΩΝ

9.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από τα μέταλλα.

Έχομε ήδη, στην παράγραφο 1.5, αναπτύξει ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στο εσωτερικό των μετάλλων, κινούνται άτακτα μέσα στη μάζα των μετάλλων, όπως ακριβώς τα μόρια ενός αερίου, ελεύθερα από δυνάμεις. Εξυπακούεται ότι η κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου γίνεται προσανατολισμένη, μόνον αν μέσα στο μέταλλο δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο.

Όταν όμως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια φθάσουν στην επιφάνεια του μετάλλου, αναπτύσσεται σ' αυτά ελκτική δύναμη, η οποία τα εμποδίζει να εγκαταλείψουν το μέταλλο. Έτσι, λόγω της ελκτικής αυτής δύναμews, η οποία εμποδίζει την **εξαγωγή των ηλεκτρονίων από το μέταλλο**, όταν τα ηλεκτρόνια φθάνουν στην επιφάνεια των μετάλλων επιβραδύνονται και αναγκάζονται να επιστρέψουν στο εσωτερικό τους.

Δεν είναι αντικείμενο του βιβλίου αυτού να εξηγηθεί η φύση και η προέλευση των ελκτικών αυτών δυνάμεων. Το μόνο που θα μπορούσε να λεχθεί είναι ότι, αν προσπαθούσε έστω και ένα ηλεκτρόνιο να εξέλθει από το μέταλλο, τότε στη μάζα του μετάλλου θα είχαμε έλλειψη ηλεκτρονίων, δηλαδή περίσσεια θετικού ηλεκτρικού φορτίου. Το φορτίο αυτό θα ανέπτυξε ελκτικές δυνάμεις στο ηλεκτρόνιο που προσπαθεί να εξέλθει από το μέταλλο.

Το μέγεθος των ελκτικών αυτών δυνάμεων εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες, μεταξύ των οποίων και η θερμοκρασία του μετάλλου. Έτσι, αν η θερμοκρασία του μετάλλου αυξηθεί αρκετά, οι ταχύτητες των ελευθέρων ηλεκτρονίων αυξάνουν και συνεπώς η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων αυξάνει, με συνέπεια τη δυνατότητα εξαγωγής των ηλεκτρονίων από το μέταλλο. Το φαινόμενο αυτό, της εξαγωγής δηλαδή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο λόγω αυξήσεως της θερμοκρασίας του, ονομάζεται **θερμιονική εκπομπή ηλεκτρονίων**. Βέβαια, εξαγωγή ηλεκτρονίων είναι δυνατή αν αυξηθεί γενικά η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και με άλλους, εκτός από την αύξηση της θερμοκρασίας, τρόπους. Σε κάθε περίπτωση η πρόσθετη ενέργεια που πρέπει να προσδοθεί στο μέταλλο, ώστε να αυξηθεί η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων του για να υπερνικηθούν οι ελκτικές δυνάμεις και να εξέλθει το ηλεκτρόνιο από το μέταλλο, ονομάζεται **έργο εξαγωγής του ηλεκτρονίου**. Το έργο εξαγωγής συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα «*b*», εξαρτάται δε από τη φύση του μετάλλου και τη θερμοκρασία του. Από τη στιγμή που θα καταφέρομε να απομακρύνουμε ένα ηλεκτρόνιο από ένα μέταλλο, το ηλεκτρο-

νιο αποκτά, εκτός από την κινητική, και δυναμική ενέργεια. Η **δυναμική ενέργεια** ενός ηλεκτρονίου είναι μηδέν, όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα στο μέταλλο, και αυξάνει όσο το ηλεκτρόνιο απομακρύνεται από αυτό. Όταν το ηλεκτρόνιο απομακρυνθεί αρκετά, ώστε να μην εξασκούνται σ' αυτό ελκτικές δυνάμεις από το μέταλλο, η δυναμική του ενέργεια φθάνει σε οριακή τιμή (A_∞). Εάν με W συμβολίσουμε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, τότε το έργο εξαγωγής ισούται:

$$b = A_\infty - W \quad (9.1)$$

Το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων ενός μετάλλου ονομάζεται **ολική ενέργεια**.

Στηριζόμενοι στις πιο πάνω έννοιες, θα προσπαθήσουμε, στις παραγράφους που ακολουθούν, να ερμηνεύσουμε τι συμβαίνει στις επιφάνειες επαφής δυο μετάλλων.

9.2 Φαινόμενα κατά την επαφή δυο ομοίων μετάλλων.

Εάν φέρομε σε τέλεια επαφή δυο όμοια μέταλλα, τότε, επειδή η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων τους είναι η ίδια, μπορεί ηλεκτρόνια να διακινούνται μέσω της επαφής μεταξύ των δυο αυτών μετάλλων. Έτσι λέμε ότι έχουμε αποκαταστήσει **ηλεκτρική επαφή** μεταξύ των δυο αυτών μετάλλων. Αν, επί πλέον, το σύστημα αυτό των δυο συνδεδεμένων μεταλλικών αγωγών τεθεί υπό διαφορά δυναμικού, τότε θα έχουμε προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων, δηλαδή ροή ηλεκτρικού ρεύματος στο σύστημα αυτό των δυο σε επαφή μεταλλικών αγωγών.

9.3 Φαινόμενα κατά την επαφή δυο διαφορετικών μετάλλων.

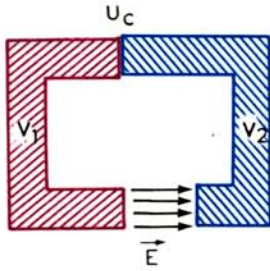
Ας υποθέσουμε τώρα ότι φέρομε σε τέλεια επαφή δυο διαφορετικά μέταλλα. Μια και η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων τους είναι διαφορετική, μπορεί ηλεκτρόνια να μετακινηθούν από το ένα μέταλλο στο άλλο. Η κίνηση αυτή των ηλεκτρονίων θα σταματήσει, όταν η ολική ενέργεια των ηλεκτρονίων στα δυο μέταλλα εξισωθεί: Αποτέλεσμα της μετακινήσεως αυτής των ηλεκτρονίων είναι η δημιουργία περίσσειας ηλεκτρονίων στο ένα μέταλλο και αντίστοιχου ελλείμματος στο άλλο. Έτσι, μεταξύ των δυο μετάλλων αναπτύσσεται μια διαφορά δυναμικού, η οποία ονομάζεται **τάση επαφής**. Η τάση επαφής ορίζεται από τη σχέση:

$$U_c = \frac{b_2 - b_1}{e} \quad (9.2)$$

όπου: b_1 , b_2 τα έργα εξαγωγής των ηλεκτρονίων στα δυο μέταλλα και e το φορτίο του ηλεκτρονίου.

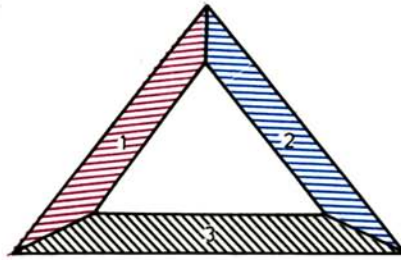
Στο σχήμα 9.3α φαίνεται παραστατικά το σύστημα δυο διαφορετικών μετάλλων σε επαφή, η αναπτυσσόμενη τάση επαφής $U_c = U_1 - U_2$ καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο (\vec{E}) που δημιουργείται στο διάκενο των δυο μετάλλων.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει στην παράγραφο 9.1, η τάση επαφής εξαρτάται



Σχ. 9.3α.

Τάση κατά την επαφή δυο μετάλλων.



Σχ. 9.3β.

Κλειστό κύκλωμα διαφορετικών μετάλλων.

από τη φύση των μετάλλων και από τη θερμοκρασία τους. Αν η κινητική ενέργεια των ελευθέρων ηλεκτρονίων στο ένα μέταλλο είναι W_1 και στο άλλο W_2 , τότε ονομάζουμε **τάση Galvani** το πηλίκον:

$$U_G = \frac{W_2 - W_1}{e} \quad (9.3)$$

όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Σύμφωνα με πρόταση που διατυπώθηκε από τον Ιταλό φυσικό Al. Volta (1745-1827) και σήμερα φέρει την ονομασία **νόμος του Volta**:

Σε ένα κλειστό κύκλωμα, που συγκροτείται από διαφορετικά μέταλλα, το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων επαφής είναι ίσο με μηδέν, εφόσον όλες οι επαφές βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία.

Εάν εφαρμόσουμε το νόμο του Volta στο κλειστό κύκλωμα του σχήματος 9.3β, λαμβάνουμε:

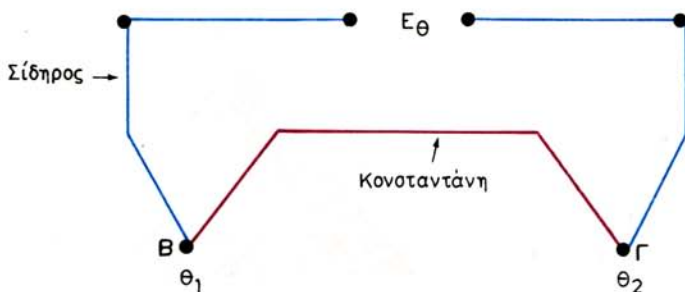
$$U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,1} = 0 \quad (9.4)$$

Ο νόμος του Volta είναι απόρροια του αξιώματος της διατηρήσεως της ενέργειας. Αν το άθροισμα των τάσεων επαφής ήταν διάφορο του μηδενός, θα είχαμε, στο κλειστό κύκλωμα, ροή ηλεκτρικού ρεύματος χωρίς αντίστοιχη κατανάλωση ενέργειας, δηλαδή αεικίνητο. Εξάλλου, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο νόμος του Volta ισχύει και για το αντίστοιχο άθροισμα των τάσεων Galvani σε ένα κλειστό κύκλωμα διαφορετικών μετάλλων.

9.4 Θερμοηλεκτρικό φαινόμενο.

Ο νόμος του Volta δεν ισχύει όταν οι επαφές των διαφορετικών μετάλλων που συγκροτούν το κλειστό κύκλωμα βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες.

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα με τη βοήθεια του κυκλώματος του σχήματος 9.4α, που συγκροτείται από δυο διαφορετικά μέταλλα, το σίδηρο και το κράμα που ονομάζεται κοσταντάνη (55% Cu – 45% Ni). Ας υποθέσουμε ότι μεταξύ των ακροδεκτών Α και Δ μετρούμε την τάση. Αν οι δυο επαφές του κυκλώματος (Β και Γ) βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία, τότε, σύμφωνα με το νόμο του Volta, θα διαπιστώσουμε ότι $U_{AD} = 0$.



Σχ. 9.4α.
Θερμοστοιχείο ($\theta_1 > \theta_2$).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θερμαίνουμε την επαφή Β ($\theta_1 > \theta_2$). Αποτέλεσμα της αύξησης της θερμοκρασίας είναι η αύξηση των ενεργειών W_1 και W_2 των ηλεκτρονίων στην περιοχή της επαφής Β. Όμως, επειδή η αύξηση αυτή δεν είναι ίδια και στα δυο μέταλλα, η τάση Γαλvani της επαφής θα αλλάξει τιμή και επομένως το άθροισμα των τάσεων στο υπόψη κλειστό κύκλωμα θα είναι διαφορετικό από το μηδέν.

Το φαινόμενο της εμφάνισης τάσεως σε ένα κλειστό κύκλωμα, που συγκροτείται από δυο διαφορετικά μέταλλα, όταν οι δυο επαφές τους βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες, ονομάζεται **θερμοηλεκτρικό φαινόμενο**.

Η τάση που αναπτύσσεται ονομάζεται **θερμοηλεκτρική τάση** και παρέχεται από τη σχέση:

$$E_{\theta} = k \Delta\theta = k(\theta_1 - \theta_2) \quad (9.5)$$

Ο συντελεστής αναλογίας k ονομάζεται συντελεστής **θερμοηλεκτρικής τάσεως** και εξαρτάται από τη φύση των δυο μετάλλων και τη θερμοκρασία.

Η αρχή αυτή του θερμοηλεκτρικού φαινομένου χρησιμοποιείται ευρύτατα για την κατασκευή **θερμοηλεκτρικών θερμομέτρων**. Αυτά συγκροτούνται από ένα κατάλληλα επιλεγμένο ζεύγος δυο μετάλλων ή κραμάτων μετάλλων, που ονομάζεται **θερμοστοιχείο**, και ένα βολτόμετρο, με το οποίο μετράται η θερμοηλεκτρική τάση. Πρακτικά κατασκευάζονται και πωλούνται στην αγορά ορισμένοι τύποι θερμοστοιχείων, καταλλήλων για μετρήσεις μεγάλης περιοχής θερμοκρασιών (από -300 έως 1800°C). Ένας τύπος θερμοστοιχείων, αρκετά φθηνός, που συνηθέστατα χρησιμοποιείται στην πράξη, συγκροτείται από τα κράματα **Chromel** (90% Ni, 10% Cr) και **Alumel** (95% Ni, 2% Al, 2% Mn). Το θερμοστοιχείο αυτό φέρει την εμπορική ονομασία **θερμοστοιχείο τύπου K**, έχει δε συντελεστή θερμοηλεκτρικής τάσεως $k = 41 \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$, στην περιοχή $0-100^{\circ}\text{C}$.

Τα βολτόμετρα, με τα οποία μετράται η θερμοηλεκτρική τάση, είναι συχνά ηλεκτρονικά και επί πλέον είναι αρκετές φορές βαθμονομημένα, ώστε να δίνουν μονάδες θερμοκρασίας ($^{\circ}\text{C}$) για ένα **συγκεκριμένο τύπο** θερμοστοιχείου. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο θερμοστοιχείου - βολτομέτρου ονομάζεται **ηλεκτρονικό θερμομέτρο**.

Αλλά θερμοστοιχεία χρησιμοποιούνται και για τη μέτρηση τάσεων ή εντάσεων ρευμάτων υψηλής συχνότητας. Όμως, η ανάπτυξη του θέματος αυτού ξεφεύγει από τα όρια του παρόντος βιβλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΥΓΡΩΝ

10.1 Γενικά.

Σε προηγούμενες παραγράφους του βιβλίου αυτού, όπως π.χ. στην παράγραφο 5.1, γνωρίσαμε ότι η κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων είναι δυνατή τόσο μέσα στους μεταλλικούς αγωγούς όσο και μέσα από υγρά ή και αέρια, κάτω όμως από κατάλληλες συνθήκες. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το θέμα της διόδου του ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από τα υγρά, ενώ σε επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε το θέμα της αγωγιμότητας των αερίων. Ο χωρισμός αυτός επιβάλλεται εξαιτίας των εντελώς διαφορετικών φυσικών μηχανισμών, στους οποίους οφείλεται η αγωγιμότητα των δυο αυτών κατηγοριών ρευστών, δηλαδή των υγρών και των αερίων.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το θέμα της αγωγιμότητας των υγρών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δοθέντος ότι το φαινόμενο αυτό αποτελεί αρχή λειτουργίας αρκετών τύπων πηγών συνεχούς ρεύματος, π.χ. των ηλεκτρικών συσσωρευτών, όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 5.2.

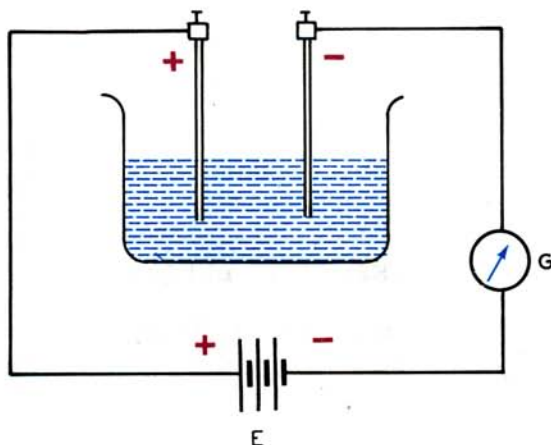
10.2 Πειραματικές παρατηρήσεις – Ορισμοί.

Αν μέσα σε δοχείο που περιέχει ένα υγρό βυθίσουμε δυο σύρματα και τα συνδέσουμε στους πόλους ηλεκτρικής πηγής συνεχούς ρεύματος (σχ. 10.2), τρία πράγματα μπορεί να συμβούν, ανάλογα με το είδος του υγρού:

α) **Δεν διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα** όπως διαπιστώνουμε από το δείκτη του γαλβανομέτρου G, ο οποίος παραμένει ακίνητος. Αυτό συμβαίνει όταν το υγρό είναι **μονωτής**, π.χ. αποσταγμένο νερό, πετρέλαιο, λάδι κλπ.

β) **Διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα ενώ η χημική σύνθεση του υγρού παραμένει αναλλοίωτη**, όπως διαπιστώνουμε από το δείκτη του γαλβανομέτρου G, ο οποίος εκτρέπεται και παραμένει σταθερά σε μια θέση, εφόσον η ΗΕΔ της πηγής τροφοδοσίας είναι σταθερή. Αυτό συμβαίνει με τα υγρά μέταλλα, π.χ. ο υδράργυρος. Πρόκειται δηλαδή για καθαρούς μεταλλικούς αγωγούς, όπου, όπως έχουμε γνωρίσει, φορείς των φορτίων είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια.

γ) **Διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα, ενώ ταυτόχρονα το υγρό υφίσταται χημική αποσύνθεση**, όπως διαπιστώνουμε από το δείκτη του γαλβανομέτρου G, ο οποίος αρχικά εκτρέπεται αλλά στη συνέχεια επανέρχεται αργά-αργά στη θέση ηρεμίας. Αυτό συμβαίνει όταν το υγρό είναι διάλυμα οξέος, βάσεως ή άλατος. Τα υγρά αυτά ονομάζονται **ηλεκτρολύτες**, το δε φαινόμενο της χημικής



Σχ. 10.2.

Διάταξη δοχείου με υγρό υπό τάση.

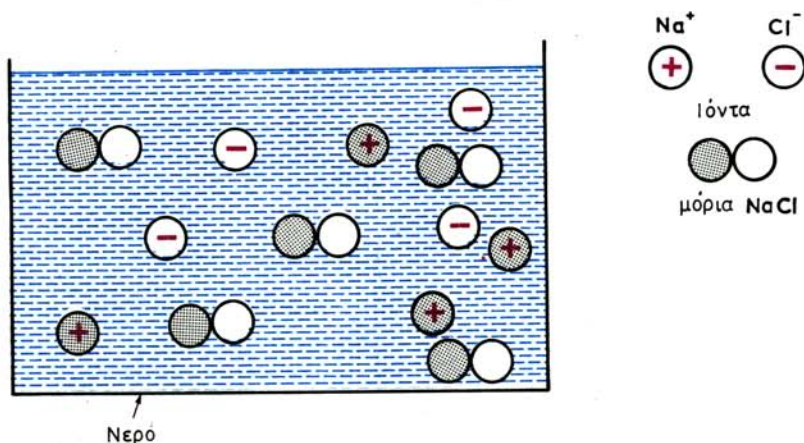
αποσυνθέσεως των ηλεκτρολυτών κατά τη δίοδο **συνεχούς** ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από τη μάζα τους ονομάζεται **ηλεκτρόλυση**. Όπως ήδη, στην παράγραφο 5.2, έχουμε αναφέρει και θα εξηγήσουμε διεξοδικά στη συνέχεια, φορείς των ηλεκτρικών φορτίων στους ηλεκτρολύτες είναι τα ιόντα, θετικά ή αρνητικά.

10.3 Μηχανισμός της ηλεκτρολύσεως.

Για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε το μηχανισμό του φαινομένου της ηλεκτρολύσεως, θα πρέπει προηγουμένως να αναφέρομε ένα άλλο φυσικό φαινόμενο, το φαινόμενο της ηλεκτρολυτικής διασάσεως. Σύμφωνα με το φαινόμενο αυτό και τη σχετική θεωρία του, η οποία αναπτύχθηκε από το Σουηδό χημικό S. Arrhenius, όταν ένας ηλεκτρολύτης διαλύεται στο νερό, ορισμένα από τα ηλεκτρικώς ουδέτερα μόριά του διασπώνται σε θετικά και αρνητικά ιόντα. Η διάσπαση αυτή των μορίων ενός ηλεκτρολύτη ονομάζεται **ηλεκτρολυτική διάσπαση** και συμβαίνει είτε μέσα στο δοχείο, στο οποίο βρίσκεται το ηλεκτρολυτικό διάλυμα, υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο είτε όχι.

Ας αναφέρομε π.χ. ότι ένα μόριο χλωριούχου νατρίου (NaCl) προέρχεται από τη συνένωση ενός θετικού ιόντος νατρίου (Na^+) και ενός αρνητικού ιόντος χλωρίου (Cl^-), των οποίων τα φορτία αλληλοεξουδετερώνονται και το μόριο εμφανίζεται ως ηλεκτρικά ουδέτερο. Όταν όμως διαλύσομε μέσα στο νερό μια ποσότητα χλωριούχου νατρίου, τότε μέρος των μορίων του υφίσταται ηλεκτρολυτική διάσπαση, δηλαδή διαχωρίζεται αυτόματα σε ιόντα νατρίου και ιόντα χλωρίου. Έτσι, στο διάλυμα τελικά θα υπάρχουν θετικά ιόντα νατρίου, αρνητικά ιόντα χλωρίου καθώς και αδιάσπαστα ουδέτερα μόρια χλωριούχου νατρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.3α.

Η ηλεκτρολυτική διάσπαση οφείλεται σε διαφορετικά αίτια, ανάλογα με το είδος του ηλεκτρολύτη. Τα μόρια π.χ. των ιοντικών ενώσεων (άλατα, υδροξείδια) αποτελούνται από αντίθετα φορτισμένα ιόντα, τα οποία συγκρατούνται με



Σχ. 10.3α.

Διάσπαση μορίων ηλεκτρολύτη σε ιόντα.

ισχυρές ηλεκτροστατικές δυνάμεις (Coulomb). Όταν οι ενώσεις αυτές διαλυθούν στο νερό, ένα μέρος από τα μόρια διαχωρίζεται αυτόματα σε ιόντα, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται μόρια νερού. Αυτό οφείλεται στην πολικότητα των μορίων του H_2O και στη μεγάλη διηλεκτρική του σταθερά ($\epsilon = 81$, δηλαδή οι ηλεκτροστατικές έλξεις γίνονται 81 φορές μικρότερες και έτσι τα ιόντα αποχωρίζονται). Οι ομοιοπολικές ενώσεις (οξέα, αμμωνία κλπ) διασπώνται σε ιόντα, γιατί αντιδρούν με το νερό, κατά την αντίδραση, π.χ.:



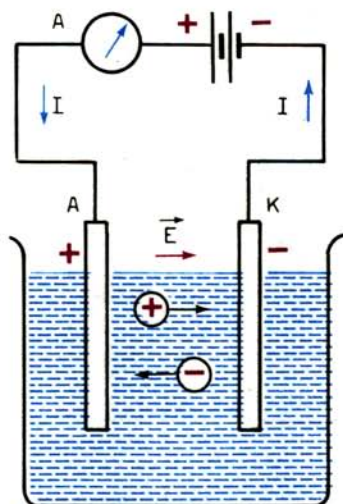
Περισσότερη ανάλυση του φαινομένου της ηλεκτρολυτικής διαστάσεως ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού. Όμως, πριν προχωρήσουμε, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε δυο βασικά συμπεράσματα της σχετικής θεωρίας, που θα μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια:

- Ο αριθμός των μορίων που βρίσκονται σε διάσταση, είναι σταθερός για δεδομένο ηλεκτρολύτη και εξωτερικές συνθήκες (θερμοκρασία, πίεση).
- Ο αριθμός των θετικών ιόντων ισούται με τον αριθμό των αρνητικών ιόντων. Το ίδιο ισχύει και για τα αντίστοιχα φορτία τους.

Εάν, τώρα, μέσα στο δοχείο όπου βρίσκεται ο εν διάστασει ηλεκτρολύτης δημιουργηθεί μόνιμο ηλεκτρικό πεδίο, τα ιόντα προσανατολίζονται και τείνουν, κινούμενα κατά τις δυναμικές γραμμές, να δημιουργήσουν ηλεκτρικό πεδίο αντίθετο από αυτό που έχει επιβληθεί.

Τα πιο πάνω φαινόμενα μπορεί να μελετηθούν με πειραματική διάταξη που ονομάζεται **βολτάμετρο** και φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 10.36.

Η διάταξη αυτή αποτελείται από ένα δοχείο από μονωτική ύλη και δυο μεταλλικά σύρματα βαπτισμένα στο δοχείο που ονομάζονται **ηλεκτρόδια**. Το ένα ηλεκτρόδιο συνδέεται με το θετικό πόλο μιας πηγής Σ.Ρ. και ονομάζεται **άνοδος** (Α) ενώ το άλλο συνδέεται με τον αρνητικό πόλο και ονομάζεται **κάθοδος** (Κ). Έτσι μεταξύ των ηλεκτροδίων δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} .



Σχ. 10.36.

Σχηματική διάταξη συσκευής ηλεκτρολύσεως (βολτάμετρο).

Αν μέσα στο βολτάμετρο ρίξουμε αποσταγμένο νερό, το αμπερόμετρο δείχνει ένταση ρεύματος μηδέν, γιατί το αποσταγμένο νερό έχει πολύ μικρό βαθμό διαστάσεως (ένα ελάχιστο μέρος των μορίων του έχει διασπασθεί σε ιόντα), οπότε δεν εμφανίζει αγωγιμότητα.

Αν στο νερό προσθέσουμε ένα ηλεκτρολύτη, π.χ. NaCl, τότε στα ιόντα του ηλεκτρολύτη εξασκούνται δυνάμεις ($\vec{F} = q \vec{E}$) με αποτέλεσμα τα θετικά ιόντα να κινηθούν προς την κάθοδο και τα αρνητικά προς την άνοδο. Για το λόγο αυτό τα θετικά ιόντα ονομάζονται και **κατιόντα**, ενώ τα αρνητικά ιόντα ονομάζονται **ανιόντα**. Η κίνηση αυτή των ιόντων, τόσο των θετικών όσο και των αρνητικών, συνιστά ηλεκτρικό ρεύμα. Έτσι μέσα στον ηλεκτρολυτικό αγωγό δημιουργούνται δυο ηλεκτρικά ρεύματα, τα οποία έχουν την ίδια φορά, σε αντίθεση με τους μεταλλικούς αγωγούς όπου έχουμε κίνηση ενός μόνου είδους φορτίων, των ηλεκτρονίων, και συνεπώς ενός μόνου ηλεκτρικού ρεύματος. Αντίστοιχα, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μέσα στον ηλεκτρολυτικό αγωγό είναι άθροισμα των εντάσεων δυο ρευμάτων:

$$I = I (+) + I (-)$$

Εκείνης που αντιστοιχεί στην κίνηση των κατιόντων $I (+)$, και εκείνης που αντιστοιχεί στην κίνηση των ανιόντων $I (-)$. Την ένταση αυτή δείχνει και το αμπερόμετρο που συνδέεται μεταξύ των ηλεκτροδίων του βολταμέτρου (σχ. 10.36). Τα ιόντα, αφού φθάσουν στα αντίστοιχα ηλεκτρόδια, αποβάλλουν τα φορτία τους στα ηλεκτρόδια και μεταπίπτουν είτε σε ουδέτερα άτομα, είτε σε ουδέτερα μόρια, μετά από δευτερεύουσες χημικές αντιδράσεις, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν. Επί πλέον, αρκετές φορές προϊόν των αντιδράσεων αυτών είναι ένα αέριο (O_2 ή H_2 ή Cl_2 κλπ) του οποίου οι φουσαλίδες φαίνονται, όπως εκλύονται, στα ηλεκτρόδια.

Μπορούμε, λοιπόν, να ανακεφαλιώσουμε λέγοντας ότι: αποτέλεσμα της αγωγιμότητας ορισμένων διαλυμάτων, όταν μέσα σ' αυτά αναπτύσσεται μόνιμο ηλεκτρικό πεδίο, είναι η χημική αποσύνθεση των μορίων της ουσίας που έχει διαλυθεί με ταυτόχρονη πρόκληση δευτερογενών αντιδράσεων, που έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή άλλων ατόμων ή μορίων στα ηλεκτρόδια. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε ότι:

Ηλεκτρόλυση ονομάζεται η χημική αποσύνθεση ορισμένων διαλυμάτων, όταν μέσα στη μάζα τους περάσει ηλεκτρικό ρεύμα, λόγω της επιβολής μόνιμου ηλεκτρικού πεδίου.

Τα διαλύματα αυτά ονομάζονται **ηλεκτρολυτικά διαλύματα** ή απλά **ηλεκτρολύτες**.

Οι μηχανισμοί της ηλεκτρολύσεως αποδίδονται από δυο απλούς ποιοτικούς νόμους:

α) Κατά την ηλεκτρόλυση τα θετικά ιόντα (π.χ. ιόντα υδρογόνου, τα μέταλλα, οι ηλεκτροθετικές ρίζες) πηγαίνουν στην κάθοδο (κατιόντα), ενώ τα αρνητικά ιόντα (π.χ. αμέταλλα ή ηλεκτραρνητικές ρίζες) πηγαίνουν στην άνοδο (ανιόντα).

β) Κατά την ηλεκτρόλυση τα ιόντα εκφορτίζονται στα αντίστοιχα ηλεκτρόδια, όπου παράγονται και τα προϊόντα της ηλεκτρολύσεως.

Τα προϊόντα που παράγονται κατά την ηλεκτρόλυση, εξαρτώνται από το υλικό των ηλεκτροδίων και τη φύση του ηλεκτρολύτη. Ως παράδειγμα αναφέρουμε ότι ο χαλκός που χρησιμοποιείται ως υλικό κατασκευής αγωγών, παράγεται ηλεκτρολυτικά από μετάλλεμά του. Το αλουμίνιο που κυκλοφορεί στο εμπόριο, είναι επίσης προϊόν ηλεκτρολύσεως.

Η ηλεκτρόλυση εφαρμόζεται επίσης για την επεξεργασία μεταλλικών επιφανειών, όπως π.χ. στις διάφορες επιμεταλλώσεις (επιχάλκωση, επικαδμίωση, επινικέλωση, επιχρωμίωση κλπ).

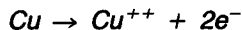
Παράδειγμα 10.3.1.

Ηλεκτρόλυση διαλύματος CuSO_4 με ηλεκτρόδια από χαλκό:



Κάθοδος (-): $\text{Cu}^{++} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}$

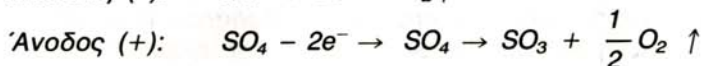
Άνοδος (+): Στην άνοδο τα ιόντα SO_4^- δεν χάνουν το φορτίο τους αλλά η συσσώρευσή τους κοντά στο ηλεκτρόδιο διευκολύνει τον ιονισμό των ατόμων του χαλκού της ανόδου:



Δηλαδή η ηλεκτρόλυση έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταφορά καθαρού χαλκού από την άνοδο στην κάθοδο χωρίς η συγκέντρωση του διαλύματος να μεταβάλλεται. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε επιχάλκωσεις αντικειμένων και στον καθαρισμό ακάθαρτου χαλκού.

Παράδειγμα 10.3.2.

Ηλεκτρόλυση διαλύματος H_2SO_4 με ηλεκτρόδια από σίδηρο:



Δηλαδή ο όγκος του H_2 που εκλύεται στην κάθοδο είναι **διπλάσιος** του όγκου του οξυγόνου που εκλύεται στην άνοδο. Αυτό χρησιμεύει για την αναγνώριση του αρνητικού πόλου μιας πηγής δοθέντος ότι περισσότερες φυσαλίδες αερίου εκλύονται από τον αρνητικό πόλο.

10.4 Νόμος του Ohm στους ηλεκτρολυτικούς αγωγούς.

Όπως στους μεταλλικούς αγωγούς έτσι και στους ηλεκτρολυτικούς μεταξύ τάσεως (U) και εντάσεως (I) διαπιστώνεται ότι ακολουθείται η σχέση:

$$I = \frac{U}{R} = UG \quad (10.1)$$

όπου R η αντίσταση του ηλεκτρολύτη και G η αγωγιμότητά του.

Η αγωγιμότητα ενός ηλεκτρολύτη εξαρτάται από τις γεωμετρικές διαστάσεις του ηλεκτρολύτη και από την ειδική του αγωγιμότητα. Οι γεωμετρικές διαστάσεις του ηλεκτρολύτη καθορίζονται από το σχήμα και τις διαστάσεις του δοχείου στο οποίο γίνεται η ηλεκτρόλυση, καθώς και από το σχήμα, τις διαστάσεις και τις θέσεις των ηλεκτροδίων.

Η ειδική αγωγιμότητα του ηλεκτρολύτη είναι ανάλογη προς την ευκινησία, το σθένος και τον αριθμό των ιόντων του ηλεκτρολύτη, που περιέχονται στη μονάδα του όγκου· αυτός πάλι εξαρτάται από τη συγκέντρωση και το βαθμό διασπάσεως του ηλεκτρολύτη.

Η ειδική αγωγιμότητα των ηλεκτρολυτών αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία, γιατί η αύξηση της θερμοκρασίας συνοδεύεται από αύξηση της ευκινησίας των ιόντων και από αύξηση του βαθμού διασπάσεως. Επομένως ο **θερμικός συντελεστής αντιστάσεως των ηλεκτρολυτών είναι αρνητικός.**

10.5 Νόμοι της ηλεκτρολύσεως.

Οι νόμοι αυτοί φέρουν και την ονομασία **νόμοι του Faraday**, προς τιμήν του Άγγλου φυσικο-χημικού M. Faraday (1791 - 1867) που τους διετύπωσε το έτος 1833. Σύμφωνα με τους δυο αυτούς νόμους:

1ος νόμος: Η ποσότητα του αποτιθέμενου στα ηλεκτρόδια κατιόντος ή ανιόντος είναι ανάλογη με την ένταση του ρεύματος και ανάλογη με το χρόνο διελεύσεώς του.

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου αυτού είναι:

$$m = a \cdot I \cdot t \quad (10.2)$$

όπου: m η ποσότητα του αποτιθέμενου ιόντος,
 I η ένταση ρεύματος,
 t ο χρόνος διελεύσεως του ρεύματος και
 A σταθερά που εξαρτάται από τη φύση του ιόντος.

2ος νόμος: Για να αποτεθεί μάζα ίση προς το γραμμοίσοδύναμο ενός οποιουδήποτε ιόντος, ανεξάρτητα από το είδος του, απαιτείται πάντοτε η ίδια ποσότητα ηλεκτρισμού.

Από ακριβείς μετρήσεις καθορίστηκε ότι για την απόθεση ενός γραμμοίσοδύναμου οποιουδήποτε ιόντος, απαιτείται, κατά την ηλεκτρόλυση, ποσότητα ηλεκτρισμού ίση προς 96.500 C. Η σταθερά αυτή αποτελεί **παγκόσμια σταθερά** και ονομάζεται **σταθερά του Faraday**:

$$F = 96500 \text{ C/greq} \quad (10.3)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **γραμμοίσοδύναμο** ενός ιόντος ορίζεται ως το πηλίκον του ατομικού βάρους (A , gr) διά του σθένους του (n):

$$\text{Γραμμοίσοδύναμο (greq)} = \frac{A}{n} \text{ gr} \quad (10.4)$$

Από το 2ο νόμο του Faraday συμπεραίνουμε ότι η μάζα ιόντος που αποτίθεται σε ηλεκτρόδιο κατά την ηλεκτρόλυση, είναι:

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{n} q \quad (10.5)$$

όπου: m η μάζα του ιόντος (gr),
 $F = 9600 \text{ C/greq}$,
 A το ατομικό βάρος του ιόντος,
 n το σθένος του ιόντος και
 q το φορτίο που διέρχεται από το βολτάμετρο ($q = I \cdot t$).

Παράδειγμα 10.5.1.

Πόσο ηλεκτρικό φορτίο πρέπει να περάσει από διάλυμα CuSO_4 για τον ηλεκτρολυτικό καθορισμό 1 kg χαλκού; Πόσο θα κοστίσει ο καθορισμός αν η ηλεκτρόλυση γίνεται με τάση 4 V;

Δίνονται: Ατομικό βάρος χαλκού $A = 63,6$, σθένος χαλκού $n = 2$ και ότι 1 kWh κοστίζει 10 δρχ.

Σύμφωνα με τη σχέση (10.5) το ηλεκτρικό φορτίο που θα διέλθει από το βολτάμετρο είναι:

$$q = \frac{F m \cdot n}{A} = \frac{96500 \cdot 1000 \cdot 2}{63,6} = 30,3 \cdot 10^5 \text{ C}$$

Η ηλεκτρική ενέργεια που θα καταναλωθεί δίνεται:

$$W = qu = (30,3 \cdot 10^5 \cdot 4) \text{ J} = 3,36 \text{ kWh}$$

Δαπάνη = $3,36 \cdot 10 = 33,6$ δρχ.

10.6 Φαινόμενα στην επαφή μεταξύ μετάλλου και ηλεκτρολύτη.

Αν ένα μεταλλικό έλασμα βυθισθεί μέσα σ' ένα διάλυμα ηλεκτρολύτη, τότε μεταξύ μετάλλου και ηλεκτρολύτη αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού που ονομάζεται **ηλεκτρολυτικό δυναμικό** του μετάλλου ως προς τον ηλεκτρολύτη.

Το αίτιο που προκαλεί την εμφάνιση του ηλεκτρολυτικού δυναμικού μεταξύ μετάλλου και ηλεκτρολύτη, όταν βρίσκονται σε επαφή, είναι ανάλογο προς το αίτιο που προκαλεί την τάση επαφής μεταξύ δυο μετάλλων (παράγρ. 9.3), με μία όμως σημαντική διαφορά:

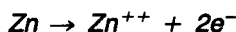
Ενώ κατά την επαφή δυο μετάλλων μετακινούνται μεταξύ τους ηλεκτρόνια, κατά την επαφή μετάλλου και ηλεκτρολύτη διακινούνται μεταξύ διαλύματος και μετάλλου ιόντα.

Αλλά ας δούμε αναλυτικότερα τα φαινόμενα που συμβαίνουν κατά την επαφή ενός μετάλλου που βαπτίζεται με τη μορφή **ενός και μοναδικού** ηλεκτροδίου, μέσα σ' ένα ηλεκτρολύτη. Το φαινόμενο αρχίζει με τη μετακίνηση θετικών ιόντων κατά τη μία κατεύθυνση, μπορεί, δηλαδή, ένας αριθμός θετικών ιόντων του μετάλλου να το εγκαταλείψουν και να διαλυθούν στο διάλυμα. Έτσι, το μέταλλο αρχίζει να φορτίζεται αρνητικά ενώ το διάλυμα θετικά. Αποτέλεσμα της κινήσεως αυτής είναι η ανάπτυξη διαφοράς δυναμικού, η οποία έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία αντίθετης κινήσεως θετικών ιόντων από το διάλυμα προς το μέταλλο. Η διαφορά δυναμικού συνεχώς αυξάνει, λαμβάνει δε τη μέγιστη τιμή της τη στιγμή που ο αριθμός των ανά μονάδα χρόνου διαλυομένων ιόντων του μετάλλου γίνει ίσος με τον αριθμό των ιόντων που επιστρέφουν από το διάλυμα και αποτίθενται στο μέταλλο. Λέμε ότι τη στιγμή εκείνη το σύστημα μετάλλου-διαλύματος βρίσκεται σε κατάσταση **ισορροπίας** και η μέγιστη διαφορά δυναμικού που παρατηρείται την ίδια στιγμή ονομάζεται **ηλεκτρολυτικό δυναμικό**.

Το ηλεκτρολυτικό δυναμικό ενός μετάλλου ως προς ηλεκτρολυτικό διάλυμα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Εάν π.χ. το μέταλλο βυθισθεί σε διάλυμα δικού του άλατος, το τι θα συμβεί εξαρτάται από τη συγκέντρωση των ιόντων στο διάλυμα. Αν π.χ. η συγκέντρωση είναι σχετικά μικρή τότε το μέταλλο δημιουργεί θετικά ιόντα και γίνεται αρνητικότερο από το διάλυμα. Αν η συγκέντρωση γίνει πάρα πολύ μεγάλη, τότε το φαινόμενο μπορεί να αρχίσει με μετακίνηση θετικών ιόντων από το διάλυμα προς το μέταλλο, με αποτέλεσμα το μέταλλο να φορτισθεί θετικότερα από το διάλυμα. Αλλά ας δούμε τι συμβαίνει σε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα, όπου έχουμε βύπτιση μετάλλου σε διάλυμα άλατός του που περιέχει ένα γραμμοίσοδύναμο ιόντων ανά λίτρο, δηλαδή σε διάλυμα με **κανονική συγκέντρωση**.

Παράδειγμα 10.6.1.

Βυθίζομε σε διάλυμα άλατος $ZnSO_4$ κανονικής συγκεντρώσεως, ένα μεταλλικό ηλεκτρόδιο Zn . Τα άτομα Zn του ηλεκτροδίου, διασπώνται σε ιόντα Zn και δυο ηλεκτρόνια:



Τα ιόντα ψευδαργύρου εισέρχονται κατ' αρχήν στο διάλυμα και το φορτίζουν

θετικά, ενώ τα ηλεκτρόνια παραμένουν στο ηλεκτρόδιο του Zn και το φορτίζουν αρνητικά (σχ. 10.6α).

Έτσι το μέταλλο «διαλύεται» και σχηματίζεται γύρω του μια **διπλή ηλεκτρική στιβάδα** (στιβάδα Helmholtz). Ταυτόχρονα ιόντα Zn μετακινούνται, με διαφορετικό όμως ρυθμό, από το διάλυμα προς το ηλεκτρόδιο. Η διαδικασία της διαλύσεως θα σταματήσει, όταν ο αριθμός των ιόντων ψευδαργύρου που εισέρχονται στο διάλυμα γίνει ίσος με τον αριθμό των ιόντων ψευδαργύρου που επιστρέφουν στο ηλεκτρόδιο. Στην κατάσταση αυτή, που ονομάσαμε **κατάσταση ισορροπίας**, η διαφορά δυναμικού που έχει αναπτυχθεί μεταξύ του ηλεκτροδίου και του διαλύματος έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της, η οποία ονομάζεται ηλεκτρολυτικό δυναμικό. Έτσι, το ηλεκτρολυτικό δυναμικό του Zn ως προς κανονικό διάλυμα $ZnSO_4$ είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 10.6.2.

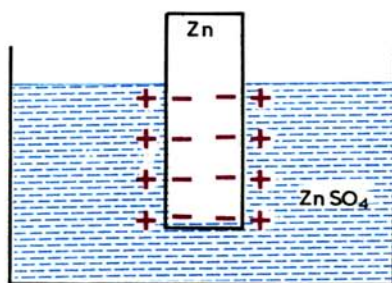
Αν βυθίσουμε ένα ηλεκτρόδιο χαλκού μέσα σε κανονικό διάλυμα $CuSO_4$, ιόντα χαλκού μετακινούνται κατ' αρχήν από το διάλυμα στο μέταλλο (σχ. 10.6β).

Ταυτόχρονα, με μικρότερο όμως αρχικά ρυθμό, ιόντα χαλκού μετακινούνται από το διάλυμα προς το ηλεκτρόδιο. Στην κατάσταση ισορροπίας το ηλεκτρόδιο του χαλκού βρίσκεται φορτισμένο θετικά. Επομένως το ηλεκτρολυτικό δυναμικό του χαλκού ως προς κανονικό διάλυμα $CuSO_4$ είναι θετικό.

10.6.1 Ηλεκτρολυτικό δυναμικό και μέτρησή του.

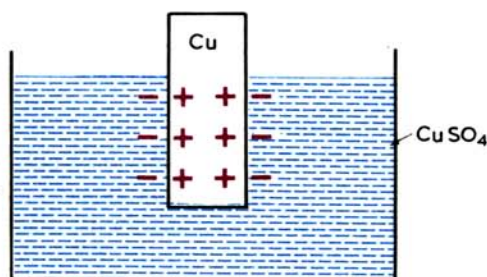
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, **ηλεκτρολυτικό δυναμικό** ενός μετάλλου ως προς ένα διάλυμα, ονομάζεται το δυναμικό που αναπτύσσεται μεταξύ ενός και μοναδικού ηλεκτροδίου κατασκευασμένου από το υπόψη μέταλλο, όταν **βυθίζεται** στο διάλυμα.

Για να μετρηθεί, με ένα βολτόμετρο, το ηλεκτρολυτικό δυναμικό ενός μετάλλου (Α) είναι αναγκαίο να βυθισθεί στο διάλυμα του ηλεκτρολύτη ένα ακόμη ηλεκτρόδιο (Β). Έτσι, μετράται η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο ηλεκτροδίων, δηλαδή η **διαφορά** των δυο ηλεκτρολυτικών δυναμικών των υλικών των δυο ηλεκτροδίων. Το δεύτερο αυτό βοηθητικό ηλεκτρόδιο ονομάζεται ηλεκτρόδιο αναφοράς και η τιμή του ηλεκτρολυτικού δυναμικού του (U_R), στο υπόψη διάλυμα, πρέπει να είναι ακριβώς γνωστή προκειμένου να



Σχ. 10.6α.

Βύθιση ηλεκτροδίου Zn σε διάλυμα $ZnSO_4$.



Σχ. 10.6β.

Βύθιση ηλεκτροδίου Cu σε διάλυμα $CuSO_4$.

υπολογισθεί το ηλεκτρολυτικό δυναμικό (U_A) του μετάλλου A, από τη σχέση:

$$U_\mu = U_A - U_H \quad (10.6)$$

όπου U_μ η ένδειξη του βολτομέτρου.

Έχει επικρατήσει ως ηλεκτρόδιο αναφοράς να χρησιμοποιείται ένα σύστημα που ονομάζεται **ηλεκτρόδιο υδρογόνου**. Το σύστημα αυτό συγκροτείται από ένα ηλεκτρόδιο λευκοχρύσου γύρω από το οποίο δημιουργείται κατάλληλα ατμόσφαιρα αερίου υδρογόνου. Έτσι τελικά το ηλεκτρόδιο εμφανίζεται ως ηλεκτρόδιο ιόντων H^+ . Επίσης έχει γίνει δεκτό συμβατικά και λαμβάνεται το ηλεκτρολυτικό δυναμικό του ηλεκτροδίου υδρογόνου ίσο με μηδέν.

Στη βιβλιογραφία δίνονται πίνακες με τιμές των ηλεκτρολυτικών δυναμικών μετάλλων, όταν αυτά βυθίζονται σε άλατά τους κανονικής συγκεντρώσεως. Τα ηλεκτρολυτικά αυτά δυναμικά ονομάζονται **κανονικά ηλεκτρολυτικά δυναμικά**. Συνηθίζεται, επίσης, να δίνονται τα κανονικά ηλεκτρολυτικά δυναμικά των διαφόρων μετάλλων όπως μετρούνται με ηλεκτρόδιο αναφοράς υδρογόνου. Μερικές τιμές των κανονικών ηλεκτρολυτικών δυναμικών ορισμένων μετάλλων παρέχονται στον πίνακα 10.6.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 10.6.1.

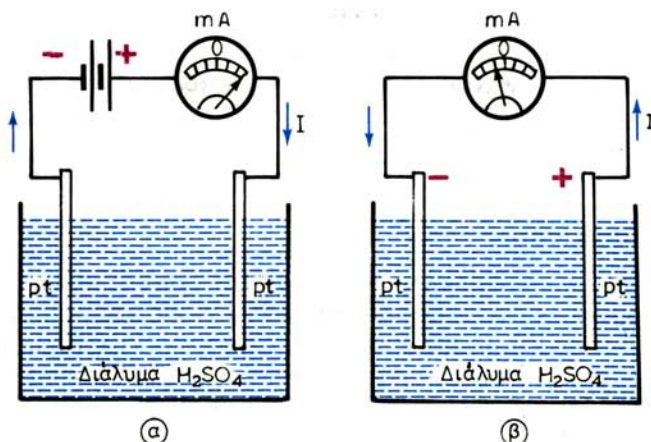
Κανονικά ηλεκτρολυτικά δυναμικά ως προς το υδρογόνο μετάλλων - κανονικών διαλυμάτων αλάτων τους.

Μέταλλο	Ηλεκτρολυτικό δυναμικό (V)	Μέταλλο	Ηλεκτρολυτικό δυναμικό (V)
Li	-3,02	Ni	-0,25
K	-2,92	Pb	-0,13
Na	-2,71	H_2	0
Mg	-2,35	Cu	+0,34
Zn	-0,76	Hg	+0,79
Fe	-0,44	Ag	+0,8
Cd	-0,40	Au	+1,5

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι, αν βυθίσουμε μέσα στον ίδιο ηλεκτρολύτη δυο ηλεκτρόδια από το ίδιο μέταλλο, η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους θα είναι μηδέν, γιατί και τα δυο έχουν το ίδιο ηλεκτρολυτικό δυναμικό ως προς το ίδιο διάλυμα.

10.7 Πόλωση των ηλεκτροδίων κατά την ηλεκτρόλυση.

Ας υποθέσουμε ότι σε βολτάμετρο, με ηλεκτρόδια λευκοχρύσου (Pt), θέλουμε να ηλεκτρολύσουμε διάλυμα θειικού οξέος (H_2SO_4). Όπως γνωρίζουμε, αν δεν τροφοδοτήσουμε το βολτάμετρο με πηγή Σ.Ρ., το αμπερόμετρο (σχ. 10.7a) θα δείξει ένταση 0 A. Αυτό γιατί εφόσον τα δυο ηλεκτρόδια είναι ίδια, αναπτύσσουν το ίδιο ηλεκτρολυτικό δυναμικό ως προς το διάλυμα και κατά συνέπεια η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους είναι ίση με μηδέν. Συνδέουμε τώρα μεταξύ των ηλεκτροδίων πηγή σταθερής τάσεως, οπότε στο διάλυμα θα αρχίσει ηλεκτρόλυση και ταυτόχρονα το αμπερόμετρο αποκλίνει από τη θέση ηρεμίας



Σχ. 10.7α.

Διάταξη για την εξήγηση του φαινομένου της πόλωσης κατά την ηλεκτρόλυση. α) Ηλεκτρόλυση με τη βοήθεια πηγής σταθερής τάσεως. β) Μετά την αφαίρεση της πηγής το αμπερόμετρο διαρρέεται από ρεύμα αντίθετης, προς την προηγούμενη, φοράς.

κινούμενο π.χ. προς τα δεξιά [σχ. 10.7α(α)]. Κατά τη διάρκεια της ηλεκτρολύσεως στο ηλεκτρόδιο της ανόδου εκλύεται οξυγόνο, στο δε ηλεκτρόδιο της καθόδου εκλύεται υδρογόνο, όπως αναπτύξαμε στο παράδειγμα 10.3.2. Το μεγαλύτερο μέρος των δυο αυτών αερίων απομακρύνεται από τα ηλεκτρόδια υπό μορφή φυσαλίδων, μέρος των οποίων επικάθεται στα ηλεκτρόδια και σχηματίζει λεπτότατο στρώμα αερίου, πάχους περίπου ενός μορίου. Έτσι, η άνοδος καλύπτεται από λεπτό στρώμα οξυγόνου η δε κάθοδος από λεπτό στρώμα υδρογόνου, ώστε τελικά να επέρχεται μεταβολή της φύσεως της επιφάνειας των δυο ηλεκτροδίων. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **πόλωση των ηλεκτροδίων** και συμβαίνει πάντοτε κατά την ηλεκτρόλυση, ανεξάρτητα από το είδος των ηλεκτροδίων και του ηλεκτρολύτη. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ότι:

Πόλωση των ηλεκτροδίων ονομάζεται η αλλοίωση της φύσεως των επιφανειών επαφής ηλεκτροδίων και ηλεκτρολύτη, κατά την εκφόρτιση των ιόντων επί των ηλεκτροδίων, η οποία οφείλεται είτε σε απορρόφηση αερίων από τα ηλεκτρόδια, είτε σε απόθεση μετάλλων στην επιφάνειά τους.

Επειδή η μεταβολή στην άνοδο είναι γενικά διαφορετική από ό,τι η μεταβολή στην κάθοδο, εμφανίζεται λόγω της διαφοράς των ηλεκτρολυτικών δυναμικών, διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο ηλεκτροδίων με φορά τέτοια, ώστε το ρεύμα το οποίο τείνει να προκαλέσει να είναι αντίρροπο προς το ρεύμα της ηλεκτρολύσεως. Για το λόγο αυτό, η τάση που οφείλεται στην πόλωση των ηλεκτροδίων ονομάζεται **τάση πολώσεως** ή ϵ^- λόγω της φοράς της - **αντιηλεκτρεγερτική δύναμη**. Αποτέλεσμα, λοιπόν, της αντιηλεκτρεγερτικής αυτής δυνάμεως είναι η κυκλοφορία, με αύξοντα ρυθμό, ρεύματος αντίθετου από το σταθερό ρεύμα που παρέχει η εξωτερική πηγή σταθερής τάσεως. Αυτό έχει ως συνέπεια τη βαθμιαία ελάττωση της ενδείξεως του αμπερομέτρου του σχήματος 10.7α(α). Αν, μάλιστα, αφαιρέσουμε την πηγή και συγκροτήσουμε το

κύκλωμα του σχήματος 10.7α(β), παρατηρούμε ότι το αμπερόμετρο αποκλίνει κατά αντίθετη φορά, από ό,τι προηγουμένως. Από το γεγονός αυτό προκύπτει και πειραματικά ότι κατά την ηλεκτρόλυση, το βολτάμετρο καθίσταται πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμews αντίρροπη προς εκείνη που προκάλεσε την ηλεκτρόλυση, η οποία, για το λόγο αυτό, ονομάσθηκε αντιηλεκτρεγερτική δύναμη.

10.7.1 Το βολτάμετρο ως αποδέκτης.

Ονομάζομε γενικά **αποδέκτη** κάθε συσκευή που λαμβάνει (αποδέχεται) ηλεκτρική ενέργεια και την μετατρέπει σε ενέργεια άλλης μορφής.

Το βολτάμετρο είναι αποδέκτης, γιατί μετατρέπει την ηλεκτρική ενέργεια σε χημική. Αν E' η ΑΗΕΔ ή τάση πολώσεως του βολταμέτρου, τότε η ηλεκτρική ενέργεια που μετασχηματίζεται σε χημική είναι:

$$W_{\omega\phi} = E' \cdot q = E' It \quad (10.7)$$

Αν r' η εσωτερική αντίσταση του βολταμέτρου, τότε η ηλεκτρική ενέργεια που μετασχηματίζεται σε θερμική είναι:

$$W_{\theta} = I^2 r' t \quad (10.8)$$

Αν η τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του βολταμέτρου είναι U (σχ. 10.7β), τότε η ηλεκτρική ενέργεια που προσφέρεται στο βολτάμετρο είναι:

$$W = qU = Ult \quad (10.9)$$

Η ενέργεια W θα είναι ίση με:

$$W = W_{\omega\phi} + W_{\theta} \quad (10.10)$$

Από τις σχέσεις (10.7) ως (10.10) προκύπτει:

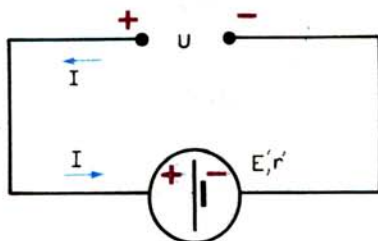
$$U = E' + Ir' \quad (10.11)$$

Η σχέση (10.11) παρέχει την πολική τάση στα άκρα του βολταμέτρου και γενικά την πολική τάση ενός αποδέκτη.

Από τη σχέση (10.11) προκύπτει:

$$I = \frac{U - E'}{r'} \quad (10.12)$$

Η σχέση (10.12) αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του νόμου του Ohm για τμήμα κυκλώματος με αποδέκτη.



Σχ. 10.7β.
Το βολτάμετρο ως αποδέκτης.

10.8 Ηλεκτρικά στοιχεία.

Εάν σε δοχείο που περιέχει ηλεκτρολύτη βυθίσουμε δυο ηλεκτρόδια από **διαφορετικά μέταλλα**, τότε λόγω των διαφορετικών ηλεκτρολυτικών δυναμικών τους ως προς τον ηλεκτρολύτη, θα αναπτυχθεί μεταξύ τους διαφορά δυναμικού ίση προς τη διαφορά των δυο ηλεκτρολυτικών δυναμικών. Η διάταξη αυτή ονομάζεται **ηλεκτρικό στοιχείο** η δε παραγόμενη διαφορά δυναμικού **ηλεκτρεγερτική δύναμη (E)** του στοιχείου. Στο σχήμα 10.8α φαίνεται ηλεκτρικό στοιχείο που συγκροτείται από διάλυμα θειικού οξέος και ηλεκτρόδια Cu(+) και Zn(-). Το ηλεκτρικό αυτό στοιχείο συμβολίζεται ως $\text{Cu}/\text{H}_2\text{SO}_4/\text{Zn}$ και ονομάζεται **στοιχείο του Volta**. Η ΗΕΔ του στοιχείου του Volta υπολογίζεται με τη βοήθεια των στοιχείων του πίνακα 10.6.1, ως:

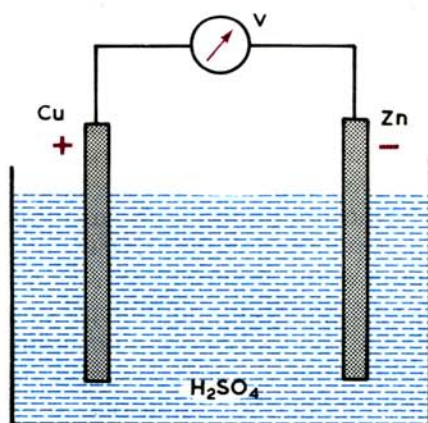
$$E = U_{\text{Cu}} - U_{\text{Zn}} = 0,34 - (-0,76) = 1,10 \text{ V}$$

Αν μεταξύ των ηλεκτροδίων του ηλεκτρικού στοιχείου συνδέσουμε συρμάτινο αγωγό, αντιστάσεως R, θα διέλθει από αυτόν ρεύμα, του οποίου η ένταση θα είναι, σύμφωνα με το νόμο του Ohm, ίση με:

$$i = \frac{E}{R + r} \quad (10.13)$$

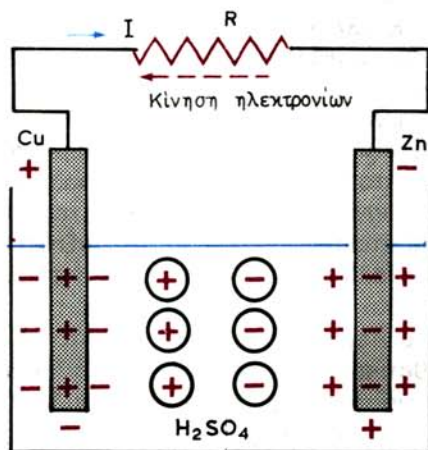
όπου r η εσωτερική αντίσταση του ηλεκτρικού στοιχείου, δηλαδή η αντίσταση του συστήματος ηλεκτρόδια - ηλεκτρολύτης.

Στο σχήμα 10.8β φαίνεται μια τέτοια σύνδεση καθώς και η κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων. Συγκεκριμένα, ηλεκτρόνια θα κινηθούν από το αρνητικό ηλεκτρόδιο του Zn, μέσω του συρματινού αγωγού, προς το θετικό ηλεκτρόδιο του Cu. Η συμβατική δηλαδή φορά του ρεύματος I είναι από το ηλεκτρόδιο του Cu προς το ηλεκτρόδιο του Zn.



Σχ. 10.8α.

Ηλεκτρικό στοιχείο του Volta.



Σχ. 10.8β.

Το ηλεκτρικό στοιχείο σε λειτουργία.

Τα ιόντα SO_4^- κινούνται προς το ηλεκτρόδιο του Zn, γιατί η στιβάδα του είναι θετική, και αντιδρούν με τα ιόντα ψευδαργύρου:



Έτσι η ισορροπία μεταξύ στιβάδας και μετάλλου διαταράσσεται με αποτέλεσμα ιόντα ψευδαργύρου, που προκύπτουν από τη διάσπαση του ψευδαργύρου, να πηγαίνουν στη στιβάδα

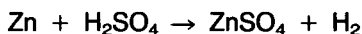


Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και από την αντίδραση (2), την παραγωγή νέων ηλεκτρονίων, τα οποία κινούνται προς το ηλεκτρόδιο του χαλκού. Ο ψευδάργυρος συνέχεια διασπάται σε ιόντα και ηλεκτρόνια, γι' αυτό και φθείρεται. Τα ιόντα υδρογόνου ($\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^-$) πηγαίνουν προς το χαλκό, που έχει στιβάδα αρνητική



Από την όλη λειτουργία του στοιχείου γίνεται φανερό ότι έχουμε μια συνεχή ροή ηλεκτρονίων από το ηλεκτρόδιο του Zn προς το ηλεκτρόδιο του χαλκού, μέσω του συρμάτινου αγωγού.

Η ηλεκτρική ενέργεια που παρέχει το στοιχείο, είναι η χημική ενέργεια των αντιδράσεων (1), (2) και (3), δηλαδή της αντιδράσεως:



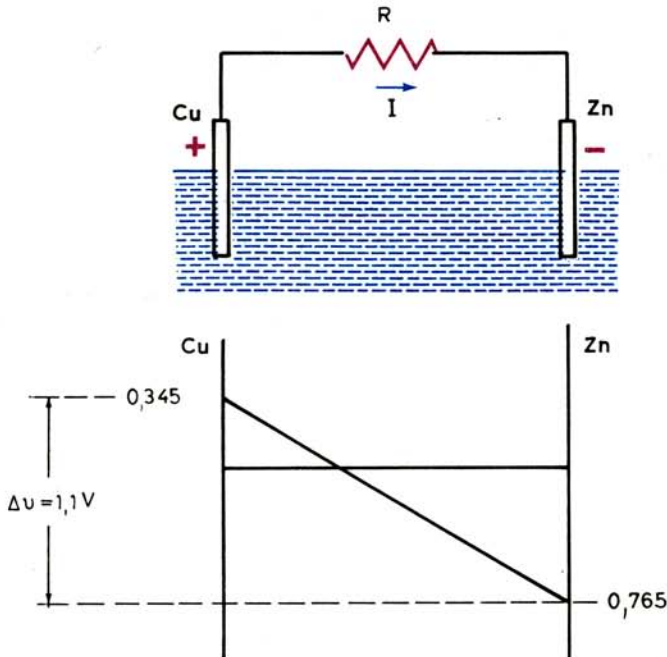
Θα πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα ότι, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει κατά την ηλεκτρόλυση, κατά τη λειτουργία του ηλεκτρικού στοιχείου θετικά ιόντα κινούνται προς το θετικό ηλεκτρόδιο και αρνητικά ιόντα προς το αρνητικό ηλεκτρόδιο.

Η κατανομή δυναμικού στο στοιχείο Volta φαίνεται στο σχήμα 10.8γ.

Εξάλλου, όπως συμβαίνει στην ηλεκτρόλυση, και κατά τη λειτουργία των ηλεκτρικών στοιχείων παρατηρείται **πόλωση των ηλεκτροδίων**. Ας αναφέρουμε π.χ. τι συμβαίνει κατά τη λειτουργία του στοιχείου του Volta.

Ενώ το μεγαλύτερο μέρος του παραγόμενου υδρογόνου διαφεύγει με τη μορφή φυσαλίδων, ένα μικρό μέρος περιβάλλει την κάθοδο και σχηματίζει ένα λεπτό στρώμα. Ο χαλκός τώρα, που περιβάλλεται από το μονωτικό στρώμα του υδρογόνου, δεν έρχεται σε επαφή με τον ηλεκτρολύτη και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα: α) Αισθητή αύξηση της αντιστάσεως στην επιφάνεια επαφής μεταξύ ηλεκτροδίων και ηλεκτρολύτη, δηλαδή αύξηση της εσωτερικής αντιστάσεως του στοιχείου και επομένως αύξηση της πτώσεως τάσεως στην εσωτερική αντίσταση του στοιχείου. β) Το υδρογόνο σε συνδυασμό με το θετικό ηλεκτρόδιο του χαλκού δημιουργεί ΗΕΔ, που έχει αντίθετη πολικότητα από την ΗΕΔ του στοιχείου (γι' αυτό ονομάζεται και αντιηλεκτρεγερτική δύναμη ΑΗΕΔ). Και τα δυο αυτά φαινόμενα συνεπάγονται τη μείωση του ρεύματος που διαρρέει το εξωτερικό κύκλωμα. Μάλιστα, σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα η τιμή του ρεύματος γίνεται πρακτικά μηδέν.

Ανάλογα φαινόμενα συμβαίνουν σε όλους σχεδόν τους τύπους των ηλεκτρικών στοιχείων.



Σχ. 10.8γ.

Κατανομή του δυναμικού στο στοιχείο του Volta.

Αν θέλομε να αποφύγομε την πόλωση των ηλεκτροδίων ενός ηλεκτρικού στοιχείου, χρησιμοποιούμε διάφορα **αντιπολωτικά** υλικά. Τα υλικά αυτά είναι ενώσεις πλούσιες σε οξυγόνο, οι οποίες περιβάλλουν το θετικό ηλεκτρόδιο για να απορροφούν το παραγόμενο υδρογόνο. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και άλατα του υλικού, από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ηλεκτρόδιο.

Η χρησιμοποίηση αντιπολωτικών στην περίπτωση του στοιχείου του Volta, είναι πρακτικά ανέφικτη. Γι' αυτό το στοιχείο αυτό δεν χρησιμοποιείται. Αντίθετα, χρησιμοποιούνται δυο τύποι ηλεκτρικών στοιχείων που θα εξετάσομε στην επόμενη παράγραφο.

10.8.1 Στοιχείο Leclanché.

Το στοιχείο αυτό χρησιμοποιείται σε δυο μορφές: την υγρή και την ξηρή.

Μολονότι το στοιχείο δεν χρησιμοποιείται σήμερα σε υγρή μορφή, αλλά μόνο σε ξηρή, θα περιγράψομε και την πρώτη, γιατί η περιγραφή αυτή θα διευκολύνει και την κατανόηση της δεύτερης.

α) Υγρό στοιχείο.

Ο ηλεκτρολύτης του στοιχείου αυτού είναι διάλυμα χλωριούχου αμμωνίου:

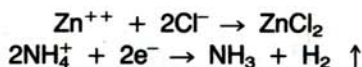


Το θετικό ηλεκτρόδιο αποτελείται από ράβδο άνθρακα, που περιβάλλεται από σάκο, ο οποίος περιέχει μίγμα από σκόνη γραφίτη και πυρολουσίτη (MnO_2)

που είναι και το αντιπολωτικό μέσο (σχ. 10.8δ).

Το αρνητικό ηλεκτρόδιο είναι μια ράβδος από ψευδάργυρο.

Κατά τη λειτουργία του στοιχείου τα θετικά ιόντα κινούνται προς το θετικό ηλεκτρόδιο και τα αρνητικά ιόντα προς το αρνητικό. Έτσι πραγματοποιούνται οι αντιδράσεις:



Το παραγόμενο υδρογόνο, αν δεν υπήρχε το αντιπολωτικό μέσο, θα προκαλούσε την πόλωση του στοιχείου. Τώρα όμως αντιδρά με τον πυρολουσίτη και έτσι αποφεύγεται η πόλωση:



Η ΗΕΔ του στοιχείου είναι 1,5 V και η εσωτερική του αντίσταση 3-5 Ω.

β) Ξηρό στοιχείο.

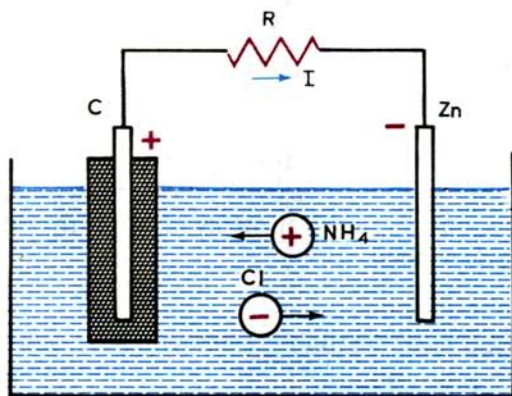
Παρόμοιο με το υγρό είναι και το ξηρό στοιχείο (σχ. 10.8ε). Ο ηλεκτρολύτης (NH_4Cl) αναμιγνύεται με υγροσκοπικά άλατα (για να μένει υγρός) και ρινίσματα ξύλου, ώστε να μετατρέπεται σε μια παχύρρευστη μάζα (πολτός).

Το αρνητικό ηλεκτρόδιο του Zn έχει διαμορφωθεί έτσι, ώστε να χρησιμεύει και σαν δοχείο. Το ανοικτό μέρος καλύπτεται με πώμα από κερί και πίσσα που κλείνει αεροστεγώς το σύστημα, για να αποφεύγεται η εξάτμιση του ηλεκτρολύτη.

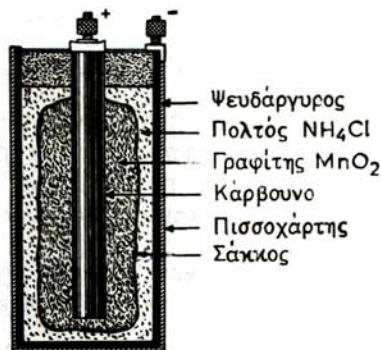
10.8.2 Συνδεσμολογία ηλεκτρικών στοιχείων.

Εφόσον τα ηλεκτρικά στοιχεία αποτελούν ηλεκτρικές πηγές Σ.Ρ., όσα ισχύουν για τη σύνδεση των ηλεκτρικών πηγών ισχύουν και για τη σύνδεση των ηλεκτρικών στοιχείων.

Χαρακτηριστικό μέγεθος ενός ηλεκτρικού στοιχείου είναι η χωρητικότητα του:



Σχ. 10.8δ.
Υγρό στοιχείο Leclanché.



Σχ. 10.8ε.
Ξηρό στοιχείο Leclanché.

Χωρητικότητα του στοιχείου είναι το συνολικό φορτίο που θα αποδώσει το στοιχείο σε όλη τη διάρκεια της ζωής του. Εξαρτάται από τις διαστάσεις του στοιχείου, το είδος των ηλεκτροδίων και του ηλεκτρολύτη και εκφράζεται σε Ah ($1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C}$).

Κατά τη σύνδεση των στοιχείων σε σειρά, η χωρητικότητα της συστοιχίας είναι ίση με τη χωρητικότητα του ενός στοιχείου.

Κατά την παράλληλη σύνδεση η χωρητικότητα της συστοιχίας είναι ίση με το άθροισμα των χωρητικότητων των στοιχείων.

10.9 Συσσωρευτές.

Στην προηγούμενη παράγραφο 10.8 γνωρίσαμε πώς, με τη βοήθεια ενός ηλεκτρικού στοιχείου, μπορούμε να μετατρέψουμε τη χημική ενέργεια σε ηλεκτρική. Επίσης, αναπτύξαμε το φαινόμενο της πολώσεως των ηλεκτροδίων ενός ηλεκτρικού στοιχείου, του οποίου αποτέλεσμα είναι η δημιουργία αντιηλεκτρεγερτικής δυνάμεως (ΑΗΕΔ) αντίθετης πολικότητας από εκείνη της ΗΕΔ του στοιχείου.

Το φαινόμενο της πολώσεως των ηλεκτροδίων εκμεταλλευόμαστε στην πράξη, προκειμένου να κατασκευάσουμε πηγές συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος, πολύ όμως μεγαλύτερης χωρητικότητας από εκείνη των ηλεκτρικών στοιχείων. Οι πηγές αυτές ονομάζονται **συσσωρευτές**.

Ένας συσσωρευτής αποτελείται από δυο κατά το δυνατόν όμοια ηλεκτρόδια – που ονομάζονται και **πόλοι** – βυθισμένα μέσα σε ηλεκτρολυτικό διάλυμα. Εφόσον τα ηλεκτρόδια είναι όμοια, αναπτύσσουν το ίδιο ηλεκτρολυτικό δυναμικό, οπότε, μεταξύ των πόλων του συσσωρευτή δεν παρατηρείται ανάπτυξη ΗΕΔ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι συνδέουμε μεταξύ των πόλων του συσσωρευτή μια ηλεκτρική πηγή Σ.Ρ., τότε, λόγω της πολώσεώς τους τα ηλεκτρόδια καθίστανται ανόμοια, οπότε μεταξύ τους αναπτύσσεται αντιηλεκτρεγερτική δύναμη. Η διαδικασία αυτή της πολώσεως των ηλεκτροδίων ενός συσσωρευτή ονομάζεται **φόρτιση** του συσσωρευτή. Μετά τη διακοπή της φορτίσεως μεταξύ των πόλων διαπιστώνεται η ύπαρξη της ΗΕΔ από την πόλωση των ηλεκτροδίων, έτσι, ο συσσωρευτής καθίσταται πηγή ηλεκτρικού ρεύματος, εφόσον οι πόλοι του συνδεθούν με εξωτερικό αγωγό. Η διαδικασία αυτή, κατά την οποία ο ήδη φορτισμένος συσσωρευτής παρέχει μέρος της ενέργειάς του σε εξωτερικό ηλεκτρικό κύκλωμα, ονομάζεται **εκφόρτιση** του συσσωρευτή. Το ρεύμα εκφορτίσεως έχει φορά αντίθετη από το ρεύμα φορτίσεως. Ταυτόχρονα, κατά την εκφόρτιση πραγματοποιούνται χημικές αντιδράσεις, που έχουν ως αποτέλεσμα την επαναφορά των ηλεκτροδίων στην κατάσταση που είχαν πριν από τη φόρτιση. Εξυπακούεται ότι κατά την εκφόρτιση μειώνεται συνεχώς η ΗΕΔ του συσσωρευτή με αποτέλεσμα κάποτε να εκφορτισθεί εντελώς, οπότε πρέπει να φορτισθεί πάλι για να είναι έτοιμος να χρησιμοποιηθεί. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι στους συσσωρευτές αποταμιεύουμε ηλεκτρική ενέργεια υπό μορφή χημικής ενέργειας, προκειμένου να τη χρησιμοποιήσουμε σε ευθετότερο χρόνο και τόπο.

Ανακεφαλαιώνοντας όσα αναπτύξαμε πιο πάνω σχετικά με τη λειτουργία του συσσωρευτή λέμε:

Ο συσσωρευτής όταν είναι φορτισμένος λειτουργεί σαν ηλεκτρική πηγή, ενώ όταν είναι αφόρτιστος λειτουργεί σαν βολτάμετρο, το οποίο αν πολωθεί με τη βοήθεια ρεύματος, μετατρέπεται σε φορτισμένο συσσωρευτή.

Η εκλογή του είδους των ηλεκτροδίων και του ηλεκτρολύτη γίνεται έτσι, ώστε η ΗΕΔ που δημιουργείται από την πόλωση να διατηρείται για μεγάλο χρονικό διάστημα, ενώ η ένταση του ρεύματος που παρέχει ο συσσωρευτής να διατηρείται σε ικανοποιητικά επίπεδα. Έτσι έχουν διαμορφωθεί αρκετοί τύποι συσσωρευτών, δυο από τους οποίους, αυτοί που χρησιμοποιούνται περισσότερο, θα αναπτύξουμε στις παραγράφους που ακολουθούν.

10.9.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη συσσωρευτών.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή χαρακτηριστικών τύπων συσσωρευτών, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε ορισμένα γενικά χαρακτηριστικά μεγέθη τους, τα οποία βέβαια θα εξειδικεύσουμε κατόπιν ανάλογα με τους τύπους συσσωρευτών που θα εξετάσουμε. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι:

- α) **Η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ, E).**
- β) **Η εσωτερική αντίσταση (r),** που συνήθως είναι πολύ μικρή.
- γ) **Η χωρητικότητα (Q),** δηλαδή το ηλεκτρικό φορτίο (Ah) που μπορεί να αποδώσει ο συσσωρευτής κατά την εκφόρτίσή του.
- δ) **Το κανονικό ρεύμα** φορτίσεως ή εκφορτίσεως ή μέγιστο ρεύμα, που ορίζεται ως αριθμητικά ίσο προς το 1/10 της χωρητικότητας του συσσωρευτή σε Ah.

Ένας συσσωρευτής π.χ. 60 Ah πρέπει κανονικά να εκφορτίζεται με ρεύμα 6 A. Μεγαλύτερα ρεύματα, όπως θα δούμε, προκαλούν βλάβες στο συσσωρευτή. Επειδή:

$$q_{εκφ} = I_{εκφ} t_{εκφ} \quad \text{και} \quad I_{εκφ} = \frac{1}{10} q_{εκφ}$$

Συμπεραίνουμε ότι: $t_{εκφ} = 10$ h, δηλαδή η διάρκεια της κανονικής εκφορτίσεως είναι για όλους τους συσσωρευτές 10 h.

ε) **Η πολική τάση.** Είναι η τάση που παρέχει ο συσσωρευτής όταν τροφοδοτεί φορτίο:

$$U = E - Ir \approx E \quad (10.14)$$

γιατί η εσωτερική αντίσταση r είναι πολύ μικρή.

στ) **Η απόδοση του συσσωρευτή.** Διακρίνουμε:

1) **Απόδοση σε φορτίο.** Η απόδοση σε φορτίο είναι το πηλίκον του φορτίου που παρέχει ο συσσωρευτής σε μία πλήρη εκφόρτίσή του προς το φορτίο που διέρχεται από το συσσωρευτή κατά τη φόρτίσή του.

$$\eta_{\varphi} = \frac{q_{εκ}}{q_{\varphi}} = \frac{I_{εκ} t_{εκ}}{I_{\varphi} t_{\varphi}} \quad (10.15)$$

2) **Απόδοση σε ενέργεια.** Η απόδοση σε ενέργεια είναι το πηλίκον της

ενέργειας που παρέχει ο συσσωρευτής σε μία πλήρη εκφόρτιση προς την ενέργεια που παίρνει κατά τη φόρτιση.

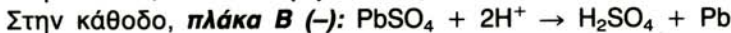
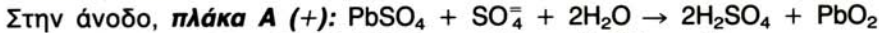
$$\eta_{\text{ev}} = \frac{W_{\text{εκ}}}{W_{\text{φ}}} \quad (10.16)$$

10.9.2 Συσσωρευτές μολύβδου.

Οι συσσωρευτές μολύβδου έχουν ως ηλεκτρολύτη διάλυμα H_2SO_4 και ως ηλεκτρόδια πλάκες μολύβδου. Οι πλάκες μόλις βυθιστούν μέσα στο H_2SO_4 καλύπτονται από στρώμα θειικού μολύβδου (PbSO_4) (σχ. 10.9α).

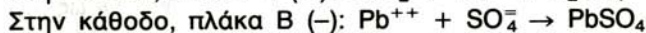
Όταν συνδέσουμε τα ηλεκτρόδια με τους πόλους ηλεκτρικής πηγής (φόρτιση), τότε τα θετικά ιόντα υδρογόνου έρχονται στην κάθοδο Β και τα αρνητικά ιόντα SO_4^- έρχονται στην άνοδο Α (σχ. 10.9β).

Οι χημικές αντιδράσεις που συμβαίνουν κατά τη **φόρτιση** του συσσωρευτή μολύβδου, είναι:

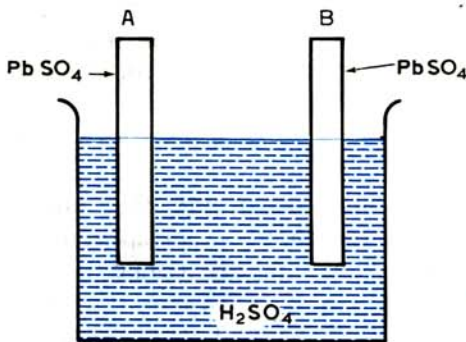


Παρατηρούμε ότι με τη φόρτιση του συσσωρευτή οι επιφάνειες των ηλεκτροδίων Α και Β μετατρέπονται αντίστοιχα σε PbO_2 και Pb . Ο συσσωρευτής μετά τη φόρτισή του μπορεί να λειτουργήσει σαν πηγή που έχει ΗΕΔ περίπου 2V.

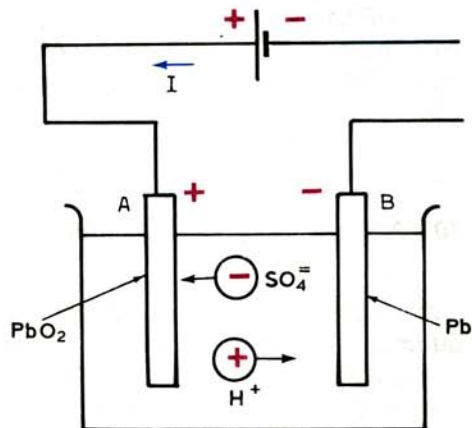
Ας υποθέσουμε τώρα ότι εκφορτίζουμε το συσσωρευτή με έναν αντιστάτη (R) (σχ. 10.9γ). Οι χημικές αντιδράσεις που πραγματοποιούνται κατά την εκφόρτιση του συσσωρευτή μολύβδου είναι:



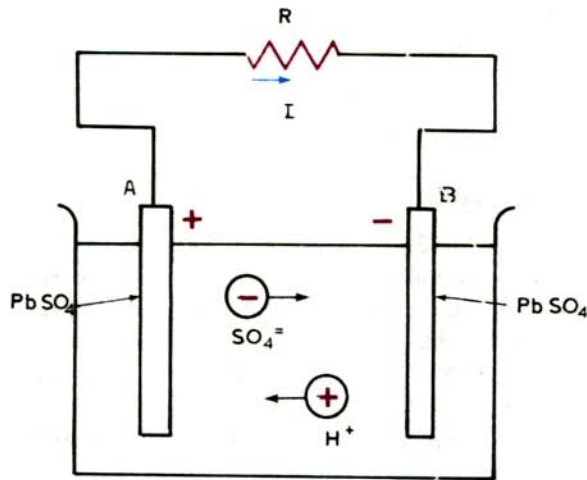
Παρατηρούμε δηλαδή ότι μετά από την εκφόρτιση τα ηλεκτρόδια σταδιακά επανέρχονται στην αρχική τους κατάσταση. Συνεπώς, για να λειτουργήσει πάλι ως πηγή ο συσσωρευτής χρειάζεται να ξαναφορτισθεί. Παρατηρούμε επίσης



Σχ. 10.9α.
Συσσωρευτής μολύβδου.



Σχ. 10.9β.
Φόρτιση συσσωρευτή μολύβδου.



Σχ. 10.9γ.
Εκφόρτιση συσσωρευτή μολύβδου.

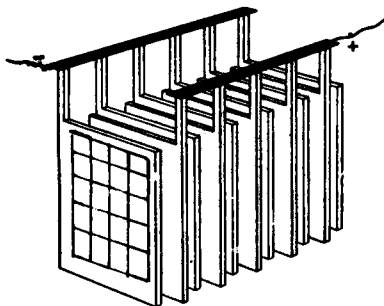
ότι ενώ κατά τη φόρτιση δημιουργείται H_2SO_4 , που καθιστά τον ηλεκτρολύτη **πυκνότερο**, κατά την εκφόρτιση παράγεται νερό που καθιστά τον ηλεκτρολύτη **αραιότερο**.

Αν παρακολουθήσουμε διαδοχικές φορτίσεις και εκφορτίσεις, θα παρατηρήσουμε ότι σε κάθε νέα φόρτιση σχηματίζονται περισσότερα στρώματα σπογγώδους μολύβδου και PbO_2 στην επιφάνεια των ηλεκτροδίων. Όπως όμως γνωρίζουμε από τα ηλεκτρικά στοιχεία, η χωρητικότητά τους είναι ανάλογη προς τις διαστάσεις των ηλεκτροδίων. Όσο λοιπόν αυξάνονται αυτά τα στρώματα, που ονομάζονται και **ενεργά** στρώματα, τόσο μεγαλώνει η χωρητικότητα του συσσωρευτή.

Η ΑΗΕΔ του συσσωρευτή μολύβδου κατά τη φόρτιση εξηγείται ως εξής: Κατά τη φόρτιση τα δυο όμοια ηλεκτρόδια ($PbSO_4$) μετασχηματίζονται σιγά-σιγά σε Pb και PbO_2 . Έτσι μεταξύ τους αρχίζει και αναπτύσσεται μια τάση, η οποία στο τέλος της φορτίσεως έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της. Επειδή η πολικότητά της είναι αντίθετη από την πολικότητα της πηγής φορτίσεως, την ονομάζουμε **αντιηλεκτρεγερτική δύναμη** (ΑΗΕΔ).

10.9.2.1 Συσσωρευτές μολύβδου για βιομηχανική χρήση.

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε το συσσωρευτή μολύβδου από καθαρά θεωρητική σκοπιά. Όμως η κατασκευή του στην πράξη, προκειμένου ο συσσωρευτής να χρησιμοποιηθεί για βιομηχανική χρήση, διαφέρει σημαντικά. Η πρώτη διαφοροποίηση στην κατασκευή, επιβάλλεται από το γεγονός ότι η χωρητικότητα ενός στοιχείου με δυο πλάκες είναι σχετικά μικρή. Έτσι, προκειμένου να κατασκευάσουμε συσσωρευτές με μεγαλύτερη χωρητικότητα συνδέουμε **παράλληλα** περισσότερα από ένα ζεύγη πλακών που βυθίζονται σ' ένα ηλεκτρολυτικό διάλυμα, όπως φαίνεται στη διάταξη του σχήματος 10.9δ.



Σχ. 10.95.

Πλάκες συσσωρευτών μολύβδου.

Έτσι σχηματίζεται ένα στοιχείο συσσωρευτή για βιομηχανική χρήση. Η δεύτερη διαφοροποίηση επιβάλλεται από το γεγονός ότι η ΗΕΔ ενός στοιχείου, ανεξάρτητα από το πλήθος των ζευγών πλακών που διαθέτει, είναι αρκετά μικρή (περίπου 2 V). Έτσι, προκειμένου να κατασκευάσουμε συσσωρευτές με μεγαλύτερη ΗΕΔ, συνδέουμε *σε σειρά* ορισμένο πλήθος στοιχείων, συγκροτώντας, με τον τρόπο αυτό, μια συστοιχία συσσωρευτών.

Οι πλάκες των συσσωρευτών βιομηχανικής χρήσεως κατασκευάζονται από κράμα μολύβδου και αντιμονίου και έχουν σχήμα δικτυωτού (σχάρας). Το αντιμόνιο (σε αναλογία 5% μέχρι 10%) αυξάνει τη μηχανική αντοχή του σκελετού.

Μέσα στα διάκενα των πλακών τοποθετούνται υπό πίεση τα *ενεργά υλικά* (υπό μορφή πάστας), που έχουν πολλούς πόρους για να είναι εύκολη η δίοδος των ιόντων του ηλεκτρολύτη και η δημιουργία μέσα σε λίγο χρόνο παχέων ενεργών στρωμάτων.

Τα ενεργά υλικά για τις θετικές πλάκες είναι το *μίνιο* (Pb_3O_4) και για τις αρνητικές ο *λιθάργυρος* (PbO). Αμέσως με τις πρώτες φορτοεκφορτίσεις σχηματίζονται τα ενεργά στρώματα. Οι θετικές πλάκες παίρνουν βαθυκάστανο χρώμα (PbO_2), οι αρνητικές γκριζο (Pb) και ο συσσωρευτής είναι έτοιμος για λειτουργία. Όπως είπαμε, για τη συγκρότηση συσσωρευτών μεγάλης χωρητικότητας χρησιμοποιούνται πολλές πλάκες θετικές και αρνητικές. Οι πλάκες τοποθετούνται σε δοχείο (αρνητική-θετική-αρνητική κλπ) και χωρίζονται με μονωτικούς διαχωριστήρες (ξύλο, νάυλον, καουτσούκ) για να μην έλθουν σε επαφή και προκληθεί βραχυκύκλωση του στοιχείου.

Όλες οι θετικές πλάκες συνδέονται σ' ένα βραχίονα που καταλήγει σε κεφαλή. Το ίδιο συμβαίνει και με τις αρνητικές. Με τη βοήθεια των κεφαλών οι πλάκες στερεώνονται στο μονωτικό κάλυμμα του δοχείου και τοποθετούνται μέσα στο δοχείο, ενώ οι κεφαλές χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα και σαν ακροδέκτες (πόλοι) του στοιχείου.

Ο ηλεκτρολύτης παρασκευάζεται από πυκνό H_2SO_4 που αραιώνεται με απεσταγμένο νερό. Το πυκνό H_2SO_4 που χρησιμοποιείται έχει πυκνότητα 1,84 kg/lit που γίνεται περίπου 1,18 kg/lit όταν αραιωθεί με νερό.

Η πυκνότητα του ηλεκτρολύτη μετράται και σε βαθμούς *Beaumé* ($^{\circ}Bé$). Το απεσταγμένο νερό (πυκνότητα 1) αντιστοιχεί σε $0^{\circ}Bé$, ενώ το H_2SO_4 πυκνότητας 1,84 αντιστοιχεί σε $66^{\circ}Bé$. Η πυκνότητα σε $^{\circ}Bé$ υπολογίζεται από την

εμπειρική σχέση:

$$^{\circ}\text{Bé} = 144,3 \left(1 - \frac{1}{\text{πυκνότητα (kg/lit)}} \right)$$

Η πυκνότητα μετράται με ειδικά όργανα που ονομάζονται **πυκνόμετρα**. Αυτά αποτελούνται από μικρό γυάλινο σωλήνα βαθμολογημένο σε $^{\circ}\text{Bé}$. Ο σωλήνας καταλήγει σε σφαίρα που περιέχει υδράργυρο. Το πυκνόμετρο βυθίζεται μέσα στον ηλεκτρολύτη τόσο περισσότερο όσο αραιότερος είναι. Η υποδιαίρεση του πυκνομέτρου που αντιστοιχεί στην επιφάνεια του ηλεκτρολύτη δείχνει την πυκνότητά του.

Υπάρχουν και άλλοι τύποι πυκνομέτρων με απλή σχετικά χρήση.

10.9.2.2 Τεχνικά χαρακτηριστικά συσσωρευτών μολύβδου.

Οι τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών (παράγρ. 10.9.1) των συσσωρευτών μολύβδου έχουν, κατά περίπτωση, ως εξής:

α) **H HEΔ**. Αυτή εξαρτάται κυρίως από την πυκνότητα του διαλύματος και υπολογίζεται πρακτικά, για ένα στοιχείο, από τη σχέση:

$$\text{HEΔ (Volt)} = 0,84 + \text{πυκνότητα H}_2\text{SO}_4 \text{ (kg/lit)}$$

Όταν π.χ. η πυκνότητα είναι $1,26 \frac{\text{kg}}{\text{lit}}$ ($= 30^{\circ}\text{Bé}$)

η HEΔ είναι: $\text{HEΔ} = 0,84 + 1,26 = 2,1 \text{ V}$.

Η HEΔ παραμένει πρακτικά σταθερή κατά τη διάρκεια της φορτίσεως (εκφορτίσεως) του συσσωρευτή. Μόνο στην αρχή και στο τέλος της φορτίσεως (εκφορτίσεως) η HEΔ μεταβάλλεται, επειδή μεταβάλλεται η πυκνότητα του ηλεκτρολύτη.

β) **H εσωτερική αντίσταση**. Αυτή εξαρτάται από τις διαστάσεις και τη θέση (απόσταση) των πλακών και η τιμή της είναι σχετικά πολύ μικρή (0,001 Ω μέχρι 0,01 Ω). Ο συσσωρευτής μπορεί λοιπόν να δώσει, σε σύγκριση με άλλες πηγές, τα μεγαλύτερα ρεύματα βραχυκυκλώσεως ($I_{sp} = E/r$). Σε κανονική λειτουργία η εσωτερική πτώση τάσεως Ir είναι πολύ μικρή. Ο συσσωρευτής ανταποκρίνεται εύκολα σε παροχή μεγάλων ρευμάτων (π.χ. κατά την εκκίνηση αυτοκινήτων μέχρι 200 A), αν και αυτό είναι σε βάρος της ζωής του.

γ) **H χωρητικότητα**. Όπως γνωρίζουμε, ως χωρητικότητα του συσσωρευτή ορίζεται το συνολικό φορτίο που αποδίδει ο συσσωρευτής σε μία πλήρη κανονική εκφόρτίσή του. Εξαρτάται από τον αριθμό και τις διαστάσεις των πλακών και μετράται σε αμπερώρια (Ah). Η χωρητικότητα των συσσωρευτών μολύβδου που χρησιμοποιούνται στα αυτοκίνητα κυμαίνεται συνήθως από 45 μέχρι 60 Ah. Για πρόχειρη εκτίμηση μπορούμε να υπολογίζουμε 5 με 10 Ah για κάθε dm^2 επιφάνειας των πλακών. Ωστόσο η χωρητικότητα επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, όπως η θερμοκρασία, οι προηγούμενες συνθήκες ζωής του συσσωρευτή, οι συνθήκες εκφορτίσεως κλπ. Σε γρήγορη π.χ. εκφόρτιση ο συσσωρευτής παρουσιάζει μικρότερη χωρητικότητα από εκείνη που παρουσιάζει

ζει σε αργή εκφόρτιση.

δ) Η **απόδοση** (σε ενέργεια) των συσσωρευτών μολύβδου ανέρχεται σε 80%.

10.9.2.3 Φόρτιση και εκφόρτιση συσσωρευτών.

Όπως είδαμε κατά τη φόρτιση ο συσσωρευτής μολύβδου εμφανίζει ΑΗΕΔ E' , η οποία παραμένει σχεδόν σταθερή (περίπου 2 V) κατά τη διάρκεια της φορτίσεως και μόνο στο τέλος της αυξάνεται απότομα από 2,1 V σε 2,7 V περίπου. Η εσωτερική του αντίσταση r είναι σχετικά πολύ μικρή. Για να κυκλοφορήσει ρεύμα φορτίσεως κανονικής εντάσεως απαιτείται για κάθε στοιχείο τάση 2,4 μέχρι 2,6 V. Για συστοιχία π.χ. 3 στοιχείων σε σειρά απαιτείται τάση 7,2 V μέχρι 7,8 V.

Συνήθως όμως η διαθέσιμη τάση (Σ.Π.) είναι πολύ μεγάλη (110 V ή 220 V) γι' αυτό παρεμβάλλεται σε σειρά αντίσταση που προκαλεί πτώση τάσεως, ώστε να εφαρμόζεται στη συστοιχία η τάση που απαιτείται. Συνήθως η αντίσταση φορτίσεως R_ϕ είναι μεταβλητή και ονομάζεται **ροοστάτης φορτίσεως**.

Σε μερικές περιπτώσεις η R_ϕ μπορεί να αντικατασταθεί από λάμπες φωτισμού. Στο κύκλωμα φορτίσεως (σχ. 10.9ε) ο θετικός πόλος της συστοιχίας συνδέεται με το θετικό πόλο της πηγής φορτίσεως και ο αρνητικός πόλος της συστοιχίας με τον αρνητικό.

Η φόρτιση γίνεται συνήθως με τη μέθοδο της **σταθερής τάσεως**.

Κατά τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε την αντίσταση φορτίσεως, ώστε στη συστοιχία να εφαρμόζεται η τάση U_{AB} που απαιτείται για κάθε στοιχείο. (Στην πράξη ρυθμίζουμε το ροοστάτη φορτίσεως).

Το ρεύμα που διαρέει το κύκλωμα είναι:

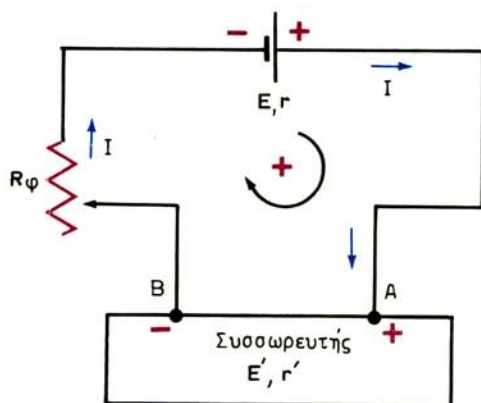
$$E - E' = I (R_\phi + r + r') \rightarrow I = \frac{E - E'}{R_\phi + r + r'} \quad (10.17)$$

όπου: E, r η ΗΕΔ και η εσωτερική αντίσταση της πηγής φορτίσεως,

E', r' η ΑΗΕΔ και η εσωτερική αντίσταση του συσσωρευτή και

R_ϕ η αντίσταση φορτίσεως.

Από τη σχέση (10.17) προκύπτει ότι το ρεύμα I μειώνεται αρκετά στο τέλος



Σχ. 10.9ε.

Κύκλωμα φορτίσεως συσσωρευτή.

της φορτίσεως (επειδή αυξάνεται η E').

Η τάση στους πόλους του συσσωρευτή (αποδέκτης), όπως έχομε αποδείξει, είναι:

$$U_{AB} = E' + Ir' \quad (10.18)$$

Η μεταβολή της σε σχέση με το χρόνο φορτίσεως παρέχεται από καμπύλη, όπως αυτή του σχήματος 10.9στ.

Συνήθως, επειδή η εσωτερική αντίσταση r' είναι πολύ μικρή, ισχύει:

$$U_{AB} \approx E'$$

Σε λιγότερη έκταση χρησιμοποιείται και η **μέθοδος του σταθερού ρεύματος**.

Κατά τη μέθοδο αυτή το ρεύμα μένει σταθερό σ' όλη τη διάρκεια της φορτίσεως (μικρότερο ή το πολύ ίσο με το 1/10 της χωρητικότητας).

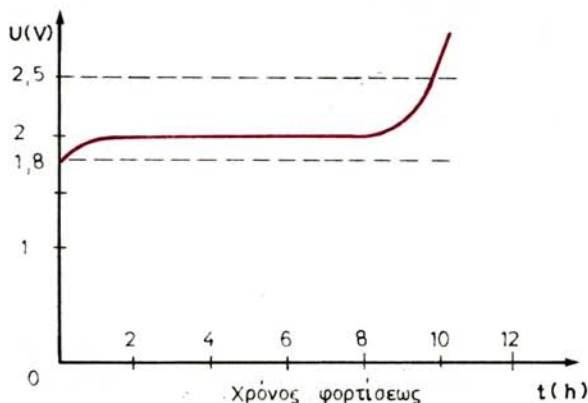
Στην αρχή της φορτίσεως η ΑΗΕΔ E' είναι μικρή και η αντίσταση που παρεμβάλλεται με το ροοστάτη είναι μεγάλη, ώστε να περιορίζεται το ρεύμα στην κανονική τιμή.

Στη διάρκεια της φορτίσεως η ΑΗΕΔ E' αυξάνεται, επομένως το ρεύμα ελαττώνεται, οπότε ελαττώνομε την αντίσταση με το ροοστάτη, ώστε το ρεύμα να διατηρεί σταθερή κανονική τιμή μέχρι το τέλος της φορτίσεως.

Ας επαναλάβομε ότι σε κάθε περίπτωση, η φόρτιση γίνεται με συνεχές ρεύμα. Όταν διαθέτομε μόνο εναλλασσόμενο ρεύμα χρησιμοποιούμε ανορθωτικές διατάξεις που μετατρέπουν το εναλλασσόμενο σε συνεχές.

Κατά τη φόρτιση των συσσωρευτών **μολύβδου** μπορούμε να παρατηρούμε μια σειρά γεγονότων από την εξέλιξη των οποίων μπορεί να καθορισθεί το πέρας της φορτίσεως. Οι ενδείξεις που καθορίζουν το τέλος της φορτίσεως είναι:

1) **Η ΑΗΕΔ κάθε στοιχείου φτάνει τα 2,7 V περίπου.** (Μετά την αποσύνδεση του συσσωρευτή εμφανίζεται ΗΕΔ 2,2 V που σε λίγο σταθεροποιείται στα 2,1 V).



Σχ. 10.9στ.

Καμπύλη φορτίσεως συσσωρευτή.

2) Η πυκνότητα του ηλεκτρολύτη ανέρχεται στους 27 με 30° Βέ (1,26 kg/l).

3) Έντονη παραγωγή φυσαλίδων (το διάλυμα αρχίζει να κοχλάζει). Οι φυσαλίδες είναι μίγμα αερίων υδρογόνου και οξυγόνου που παράγονται από την ηλεκτρόλυση του H_2SO_4 . Στη διάρκεια της φορτίσεως δεν παράγονται φυσαλίδες γιατί τα ιόντα του διαλύματος αντιδρούν με τον $PbSO_4$. Στο τέλος της φορτίσεως δεν υπάρχει πια ο $PbSO_4$ (οι πλάκες έχουν μετασχηματιστεί σε Pb και PbO_2) με αποτέλεσμα, αν συνεχισθεί η φόρτιση, να ηλεκτρολύεται το H_2SO_4 .

4) Οι θετικές πλάκες παίρνουν το κανονικό βαθυκάστανο χρώμα τους και οι αρνητικές το γκριζο. Όταν διαπιστώσουμε ότι συμπληρώθηκε η φόρτιση του συσσωρευτή, πρέπει να τον αποσυνδέσουμε από το κύκλωμα φορτίσεως, γιατί η συνέχιση της φορτίσεως είναι επιζήμια για το συσσωρευτή.

Αντίστοιχες ενδείξεις για το τέλος της εκφορτίσεως είναι:

α) Η τάση σε κάθε στοιχείο μειώνεται στα 1,8 V.

Μερικές φορές επιτρέπεται παράταση της εκφορτίσεως μέχρι 1,7 V αλλά ποτέ πιο κάτω. (Από το όριο αυτό αρχίζουν να παράγονται μη αναστρέψιμες χημικές αντιδράσεις).

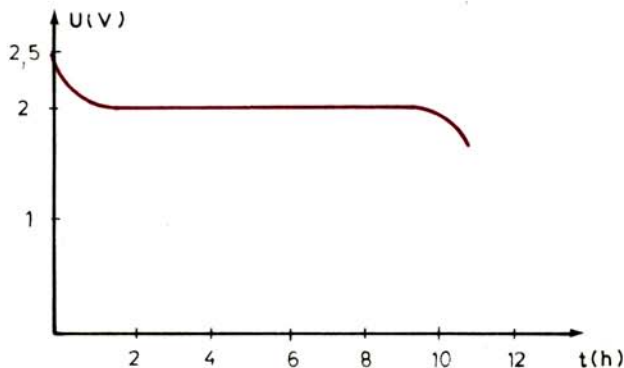
β) Η πυκνότητα του ηλεκτρολύτη πέφτει στους 20°Βέ (1,16 kg/l).

γ) Οι πλάκες παίρνουν το ίδιο χρώμα.

Η καμπύλη του σχήματος 10.9ζ παρέχει τη μεταβολή της τάσεως σε σχέση με το χρόνο εκφορτίσεως.

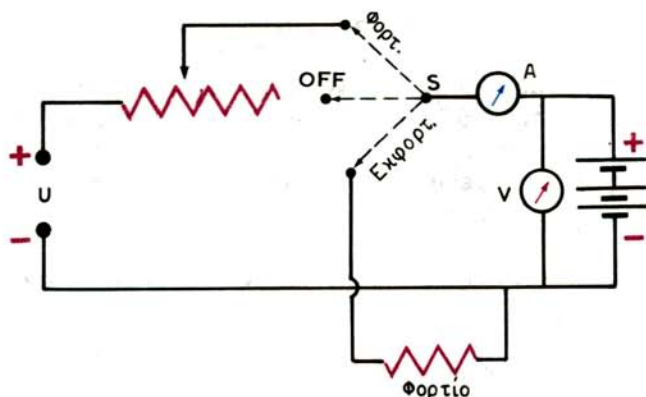
Τυπικό κύκλωμα φορτίσεως-εκφορτίσεως φαίνεται στο σχήμα 10.9η.

Όταν ο διακόπτης (τριών θέσεων) S βρίσκεται στη θέση ΦΟΡΤ. η συστοιχία συνδέεται στην πηγή και φορτίζεται. (Το αμπερόμετρο δείχνει το ρεύμα φορτίσεως και το βολτόμετρο την τάση φορτίσεως). Στη θέση OFF έχουμε ανοικτό κύκλωμα, ενώ στη θέση ΕΚΦΟΡΤ. η συστοιχία εκφορτίζεται. (Το αμπερόμετρο δείχνει το ρεύμα εκφορτίσεως και το βολτόμετρο την πολική τάση της συστοιχίας).



Σχ. 10.9ζ.

Καμπύλη εκφορτίσεως συσσωρευτή.



Σχ. 10.9η.
Κύκλωμα φορτίσεως-εκφορτίσεως συσσωρευτή.

Παράδειγμα 10.9.1.

Συσσωρευτής ΗΕΔ 8 V και εσωτερικής αντιστάσεως 0,5 Ω τροφοδοτεί αντιστάτη ισχύος $P_1 = 32 \text{ W}$ με κανονικό ρεύμα. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του (σχ. 10.9θ).

Η ισχύς που παρέχει ο συσσωρευτής στο κύκλωμα είναι:

$$P = E \cdot I$$

Η ισχύς που καταναλώνεται στην εσωτερική αντίσταση είναι:

$$P_2 = I^2 r \quad (2)$$

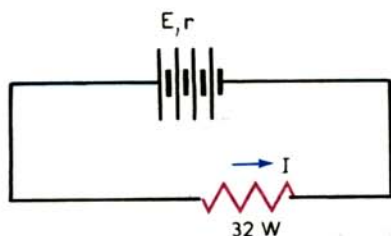
Θα είναι:

$$P = P_1 + P_2 \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$I^2 r + P_1 - EI = 0 \rightarrow$$

$$0,5 I^2 - 8 I + 32 = 0 \rightarrow I = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2 \cdot 0,5} \rightarrow I = 8 \text{ A.}$$



Σχ. 10.9θ.
Κύκλωμα παραδείγματος 10.9.1.

Επειδή το ρεύμα είναι το κανονικό θα έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \rightarrow q = 10 \cdot I = 80 \text{ Ah}$$

Παράδειγμα 10.9.2.

Αυτοκίνητο έχει μπροστά δυο προβολείς με δυο μεγάλους βολβούς των 40 W και δυο μικρούς των 4 W. Πίσω έχει επίσης δυο μικρούς βολβούς των 4 W. Τη νύκτα πρέπει τα φώτα πορείας εμπρός και πίσω να είναι πάντοτε αναμμένα και κατά βούληση ν' ανάβουν οι μεγάλοι βολβοί στους προβολείς. Η τροφοδότηση γίνεται με συσσωρευτή ΗΕΔ 12 V και χωρητικότητας 45 Ah. Να κατασκευασθεί το ηλεκτρικό κύκλωμα με το διακόπτη και τις κατάλληλες ασφάλειες και να υπολογισθεί ο χρόνος εκφορτίσεως του συσσωρευτή, αν ξεχάσουμε αναμμένα:

α) Τα φώτα πορείας. β) Τους προβολείς. γ) Όλα τα φώτα.

Το κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 10.9ι.

α) Η αντίσταση των λυχνιών των 4 W είναι:

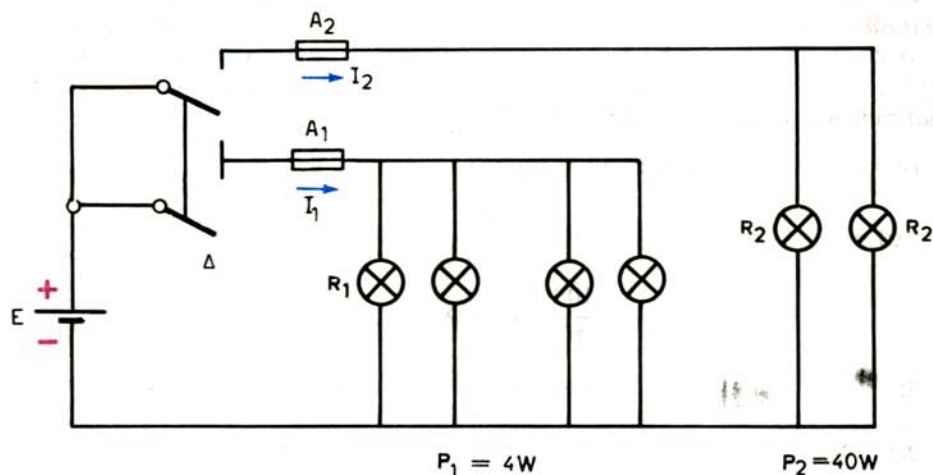
$$R_1 = \frac{E^2}{P_1} = \frac{12^2}{4} = 36 \Omega$$

Η συνολική αντίσταση των 4 λυχνιών είναι:

$$R = \frac{R_1}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Omega$$

οπότε

$$I_1 = \frac{E}{R} = \frac{12}{9} = 1,34 \text{ A}$$



Σχ. 10.9ι.

Κύκλωμα παραδείγματος 10.9.2.

δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε ασφάλεια των 2 A. ($A_1 = 2$ A)

$$I_1 = \frac{q}{t_1} \rightarrow t_1 = \frac{q}{I_1} = \frac{45}{1,34} = 33,6 \text{ h}$$

β) Η αντίσταση των λυχνιών των 40 W είναι:

$$R_2 = \frac{E^2}{P_2} = \frac{12^2}{40} = 3,6 \ \Omega$$

Η συνολική αντίσταση των 4 λυχνιών είναι:

$$R' = \frac{R_2}{2} = \frac{3,6}{2} = 1,8 \ \Omega$$

οπότε

$$I_2 = \frac{E}{R'} = \frac{12}{1,8} = 6,7 \text{ A}$$

δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε ασφάλεια των 10 A. ($A_2 = 10$ A)

$$t_2 = \frac{q}{I_2} = \frac{45}{6,7} = 6,7 \text{ h}$$

γ)

$$I = I_1 + I_2 = 8,04 \text{ A}$$

$$t = \frac{q}{I} = \frac{45}{8,04} = 5,6 \text{ h}$$

Παράδειγμα 10.9.3.

Συστοιχία συσσωρευτών ΑΗΕΔ $E' = 12$ V και εσωτερικής αντιστάσεως $r' = 0,1$ Ω πρόκειται να φορτιστεί από πηγή ΗΕΔ $E = 110$ V ($r = 0$). Η χωρητικότητα της συστοιχίας είναι 100 Ah και η φόρτιση θα γίνει με κανονικό ρεύμα. Ζητούνται: α) Η αντίσταση φορτίσεως R_ϕ . β) Η τάση στους πόλους του συσσωρευτή. γ) Η δαπάνη για τη φόρτιση αν το 1 kWh κοστίζει 10 δρχ.

Το κύκλωμα φορτίσεως φαίνεται στο σχήμα 10.9.α. Θα έχουμε:

$$\alpha) E - E' = I (R_\phi + r') \rightarrow R_\phi = \frac{E - E'}{I} - r' = \frac{110 - 12}{10} - 0,1 = 9,7 \ \Omega$$

$$(I = I_{\text{καν}} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A})$$

$$\beta) U_{AB} = E' + Ir' = 12 + 10 \cdot 0,1 = 13 \text{ V}$$

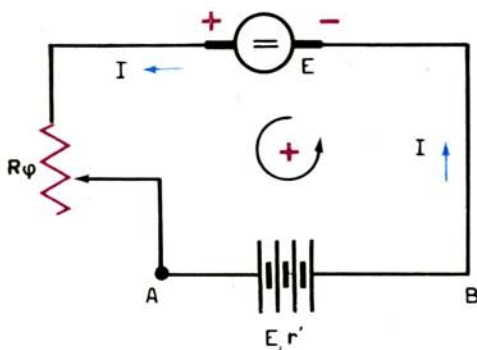
$$\gamma) W = EIt, \text{ όπου } t = q/I = 10 \text{ h}$$

$$\text{Άρα } W = 110 \cdot 10 \cdot 10 \text{ Wh} = 11 \text{ kWh}$$

$$\text{Δαπάνη: } 11 \cdot 10 = 110 \text{ δρχ.}$$

Παράδειγμα 10.9.4.

Συσσωρευτής αποτελείται από 60 στοιχεία που καθένα έχει εσωτερική



Σχ. 10.9α.
Κύκλωμα παραδείγματος 10.9.3.

αντίσταση $0,9 \text{ m}\Omega$. Η ΑΗΕΔ κάθε στοιχείου είναι $E'_{\min} = 1,83 \text{ V}$, αυξάνει δε κατά τη διάρκεια της φορτίσεως μέχρι $E'_{\max} = 2,75 \text{ V}$. Ο συσσωρευτής πρόκειται να φορτιστεί από πηγή ΗΕΔ $E = 220 \text{ V}$ ($r = 0$). Ζητούνται: α) Η αντίσταση και η ισχύς του αντιστάτη φορτίσεως, αν η ένταση του ρεύματος φορτίσεως είναι $I_{\max} = 20 \text{ A}$. β) Η ένταση του ρεύματος κατά την πλήρη φόρτιση του συσσωρευτή.

α) Μπορούμε να εργασθούμε με βάση το κύκλωμα του σχήματος 10.9α. Είναι:

$$r'_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{60} r'_i = 60 \cdot r' = 54 \text{ m}\Omega$$

$$E'_{\min, \text{ολ}} = \sum_{i=1}^{60} E'_{\min, i} = 60 \cdot E'_{\min} = 110 \text{ V}$$

$$E - E'_{\min, \text{ολ}} = I_{\max} (R + \Sigma r'_{\text{ολ}}) \rightarrow R = \frac{E - E'_{\min, \text{ολ}}}{I_{\max}} - r'_{\text{ολ}} = 5,5 - 54 \cdot 10^{-3} \approx 5,5 \Omega$$

$$P = I_{\max}^2 R = 400 \cdot 5,5 = 2200 \text{ W}$$

β) Στο τέλος της φορτίσεως είναι:

$$E'_{\max, \text{ολ}} = \sum_{i=1}^{60} E'_{\max, i} = 60 \cdot E'_{\max} = 165 \text{ V}$$

$$E - E'_{\max, \text{ολ}} = I_{\min} R \rightarrow I_{\min} = \frac{E - E'_{\max, \text{ολ}}}{R} = \frac{55}{5,5} = 10 \text{ A}$$

Παρατηρούμε ότι το ρεύμα μειώθηκε από 20 A σε 10 A .

Παράδειγμα 10.9.5.

Συσσωρευτής φορτίζεται (με τη μέθοδο του σταθερού ρεύματος) με ρεύμα 2 A επί 20 h. Στη συνέχεια τροφοδοτεί καταναλωτή 24 W. Αν η ΗΕΔ είναι 6 V ($r = 0$) και η απόδοσή του σε φορτίο 90%, πόσες ώρες μπορεί να τροφοδοτεί τον καταναλωτή;

$$\eta = \frac{q_{εκ}}{q_{φ}} = \frac{I_{εκ} \cdot t_{εκ}}{I_{φ} \cdot t_{φ}} \quad (1)$$

Αφού $r = 0$ η ισχύς που παρέχει ο συσσωρευτής στο κύκλωμα καταναλώνεται ολόκληρη από τον καταναλωτή:

$$P = E \cdot I_{εκ} = P_{κατ} = 24 \text{ W} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$t_{εκ} = \eta E \frac{I_{φ} t_{φ}}{P_{η}} = 0,9 \cdot 6 \cdot \frac{2 \cdot 20}{24} \rightarrow t_{εκ} = 9 \text{ h}$$

10.9.2.4 Βλάβες των συσσωρευτών μολύβδου.

Οι κυριότερες βλάβες των συσσωρευτών μολύβδου είναι:

α) Θειίκωση.

Όπως είδαμε κατά την εκφόρτιση του συσσωρευτή σχηματίζεται στις πλάκες PbSO_4 . Όταν ο συσσωρευτής παραμείνει για μεγάλο χρονικό διάστημα αφόρτιστος ο PbSO_4 κρυσταλλώνεται και δεν μπορεί με τη φόρτιση να διαλυθεί. Θα πρέπει να προσθέσουμε ότι ο κρυσταλλωμένος PbSO_4 έχει πολύ λίγους πόρους.

Όταν επίσης το ρεύμα εκφορτίσεως είναι μεγαλύτερο από το κανονικό, τότε η ποσότητα του PbSO_4 που σχηματίζεται είναι μεγάλη, φράσσει τους πόρους των ενεργών υλικών και δεν απορροφάται, οπότε κρυσταλλώνεται και δεν διαλύεται στη φόρτιση. Κρυστάλλωση του PbSO_4 παρατηρείται και όταν ο ηλεκτρολύτης είναι πολύ πυκνός.

Η βλάβη αυτή ονομάζεται **θειίκωση των πλακών**. Συμπτώματα της θειικώσεως είναι:

1) **Η ελάττωση της χωρητικότητας του συσσωρευτή**, γιατί ένα μέρος από την επιφάνεια των πλακών καλύπτεται από τα αδιάλυτα στρώματα του PbSO_4 και έτσι ελαττώνεται η ενεργός επιφάνεια των πλακών.

2) **Η ελάττωση της πυκνότητας του ηλεκτρολύτη κάτω από 15°Βέ** (αφού ο PbSO_4 δεν διαλύεται δεν παράγεται κατά τη φόρτιση αρκετή ποσότητα H_2SO_4).

3) **Η πυκνότητα του ηλεκτρολύτη δεν ανέρχεται στην κανονική τιμή κατά τη φόρτιση.**

4) **Ο κρυσταλλωμένος PbSO_4 αυξάνει και την εσωτερική αντίσταση του συσσωρευτή.**

Πολλές φορές παρατηρείται θειίκωση και όταν οι συσσωρευτές παραμείνουν για μεγάλο χρονικό διάστημα φορτισμένοι. Αυτή προέρχεται από την **αυτοεκφόρτιση** του συσσωρευτή. Η αυτοεκφόρτιση οφείλεται σε τοπική δράση.

Δηλαδή ο μολύβδινος σκελετός με τα ενεργά υλικά και τον ηλεκτρολύτη σχηματίζουν τοπικά στοιχεία, που προκαλούν εκφόρτιση, έστω και αν το εξωτερικό κύκλωμα είναι ανοικτό. Αποτέλεσμα: Η χωρητικότητα μειώνεται περίπου κατά 1% για κάθε μέρα (δηλαδή σε 3 μήνες περίπου ο συσσωρευτής εκφορτίζεται μόνος του, σε ανοικτό κύκλωμα).

Η θειίκωση, όταν δεν έχει προχωρήσει πολύ, μπορεί να θεραπευθεί με συνεχείς φορτοεκφορτίσεις με ρεύμα 2/10 του κανονικού. Το μικρό ρεύμα παρέχει το χρόνο στα ιόντα του ηλεκτρολύτη να περάσουν μέσα από τους λίγους πόρους του $PbSO_4$ και να τον διαλύσουν.

β) Εσωτερικό βραχυκύκλωμα.

Όταν στις φορτίσεις και εκφορτίσεις χρησιμοποιούμε μεγάλα ρεύματα, τα ενεργά υλικά, που βρίσκονται μέσα στις σχάρες των πλακών, διαστέλλονται (επειδή αναπτύσσεται μεγάλη θερμότητα Joule) με αποτέλεσμα να εξέρχονται από τις σχάρες και να πέφτουν μέσα στον ηλεκτρολύτη. Αυτά συσσωρεύονται στον πυθμένα του δοχείου και με την πάροδο του χρόνου έρχονται σε επαφή με τα κάτω άκρα των πλακών και τις βραχυκυκλώνουν. Επίσης οι πλάκες στρεβλώνονται και ενώνονται μεταξύ τους όταν χρησιμοποιούμε στην εκφόρτιση μεγάλα ρεύματα (υπερθέρμανση).

Εσωτερικό βραχυκύκλωμα προκαλείται και από τυχαία πτώση εργαλείων ή άλλων μεταλλικών αντικειμένων μέσα στο συσσωρευτή. Αποτέλεσμα του εσωτερικού βραχυκυκλώματος είναι:

- 1) **Η ελάττωση της χωρητικότητας.**
- 2) **Η μεγάλη πτώση της ΗΕΔ.**
- 3) **Η ελάττωση της πυκνότητας του διαλύματος.**
- 4) **Ο συσσωρευτής δεν φορτίζεται στον κανονικό χρόνο** (γιατί το περισσότερο ρεύμα διέρχεται από το βραχυκύκλωμα).

γ) Εξωτερικό βραχυκύκλωμα.

Το εξωτερικό βραχυκύκλωμα μπορεί να συμβεί αν οι ακροδέκτες του συσσωρευτή έλθουν σε επαφή, με τη βοήθεια μεταλλικού αντικειμένου ή από τυχαίο βραχυκύκλωμα στο εξωτερικό κύκλωμα. Γι' αυτό τα κυκλώματα των συσσωρευτών πρέπει πάντοτε να προστατεύονται από καλά υπολογισμένες ασφάλειες.

δ) Πήξη του ηλεκτρολύτη.

Το σημείο πήξεως του ηλεκτρολύτη εξαρτάται από την πυκνότητά του. Σε πλήρη φόρτιση με πυκνότητα 1,26 kg/lit (30° Βέ) το σημείο πήξεως είναι $-57^{\circ}C$ ($-70,6^{\circ}F$). Σε εκφόρτιση με πυκνότητα 20° Βέ (1,16 kg/lit) το σημείο πήξεως είναι $-18^{\circ}C$ ($0^{\circ}F$).

ε) Αποκεφαλισμός των πλακών.

Με την πάροδο του χρόνου η στάθμη του διαλύματος κατέρχεται (εξατμίζεται το νερό) με αποτέλεσμα ένα τμήμα των κεφαλών των πλακών να έρχεται σε επαφή με τον αέρα και να οξειδώνεται. Η οξείδωση μπορεί να προχωρήσει πολύ και να αποκόψει τις κεφαλές, οπότε παύουν να είναι σε επαφή με τους

ακροδέκτες.

Για να αποφύγουμε τον αποκεφαλισμό των πλακών πρέπει να παρακολουθούμε τη στάθμη του διαλύματος (πρέπει να βρίσκεται τουλάχιστον 1 cm από τις κορυφές των διαχωριστήρων) και να συμπληρώνουμε, αν έχει κατέθει, με αποσταγμένο νερό.

10.9.2.5 Συντήρηση των συσσωρευτών μολύβδου.

α) Όταν οι συσσωρευτές είναι σε λειτουργία.

- 1) Φορτίζετε και εκφορτίζετε με το κανονικό ρεύμα.
- 2) Μην εκφορτίζετε ποτέ κάτω από την τάση των 1,8 V.
- 3) Μην αφήνετε αφόρτιστο το συσσωρευτή.
- 4) Μην αφήνετε φορτισμένους τους συσσωρευτές για μεγάλο διάστημα χωρίς συμπληρωματικές φορτίσεις.
- 5) Παρακολουθείτε τη στάθμη του ηλεκτρολύτη και συμπληρώνετε, αν έχει κατέθει, με αποσταγμένο νερό.
- 6) Όταν παρασκευάζετε ηλεκτρολύτη ρίχνετε H_2SO_4 σε νερό και ποτέ νερό σε H_2SO_4 (το H_2SO_4 είναι πολύ υδρόφιλο).
- 7) Χρησιμοποιείτε πάντοτε προστατευτικές ασφάλειες στα κυκλώματα των συσσωρευτών.
- 8) Αερίζετε τους χώρους που βρίσκονται οι συσσωρευτές και μην πλησιάζετε φλόγα πάνω απ' αυτούς, γιατί το οξυγόνο που ελευθερώνεται μαζί με το υδρογόνο σχηματίζουν εκρηκτικό μίγμα.

β) Όταν οι συσσωρευτές είναι σε ανάπαυση.

Ιδιαίτερες προφυλάξεις πρέπει να παίρνομε όταν οι συσσωρευτές πρόκειται να μείνουν αχρησιμοποίητοι για μεγάλο χρονικό διάστημα (πάνω από μήνα). Και αυτό γιατί οι πλάκες «σαπίζουν», προκαλείται θειίκωση, θλάπτονται οι διαχωριστήρες κλπ. Οι ενέργειες που πρέπει να κάνομε είναι οι ακόλουθες:

- 1) Εκφορτίζομε τους συσσωρευτές.
- 2) Αντικαθιστούμε τον ηλεκτρολύτη με απεσταγμένο νερό και αφήνομε τις πλάκες στο νερό για 24 ώρες.
- 3) Χύνομε το νερό και αποξηραίνομε τις πλάκες.
- 4) Αποθηκεύομε τους συσσωρευτές σε ξηρό χώρο.

10.9.3 Αλκαλικοί συσσωρευτές.

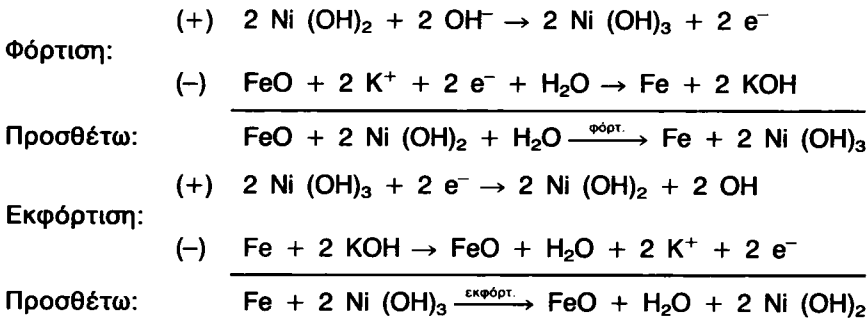
α) Συσσωρευτές σιδηρονικελίου (Edisson).

Ο σκελετός των πλακών καθώς και τα δοχεία των συσσωρευτών κατασκευάζονται από επινικλωμένο χάλυβα. Ως ηλεκτρολύτης χρησιμοποιείται υδατικό διάλυμα (21%) καυστικού καλίου (KOH) που έχει πυκνότητα 1,2 kg/lit (24° Βέ).

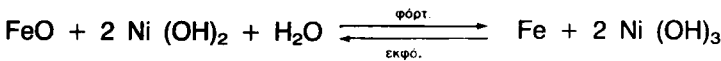
Η άνοδος (θετικές πλάκες) αποτελείται από $Ni(OH)_2$, που τοποθετείται μέσα σε λεπτούς διάτρητους σωλήνες από σιδηρονικέλιο.

Η κάθοδος (αρνητικές πλάκες) αποτελείται από Fe καλυμμένη με λεπτό στρώμα FeO .

Μεταξύ των θετικών και αρνητικών πλακών τοποθετούνται διαχωριστήρες από σκληρό καουτσούκ. Οι χημικές αντιδράσεις είναι οι ακόλουθες:



Δηλαδή οι χημικές αντιδράσεις μπορούν να περιγραφούν από την ακόλουθη αμφίδρομη εξίσωση:

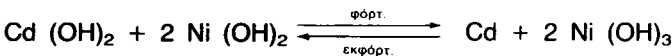


Παρατηρούμε ότι ο ηλεκτρολύτης δε συμμετέχει τελικά στην αντίδραση, με αποτέλεσμα η πυκνότητά του να διατηρείται σταθερή. Η ΗΕΔ του συσσωρευτή σε πλήρη φόρτιση είναι 1,4 V. Η πολική τάση κατά την εκφόρτιση είναι 1,2 V αλλά στο τέλος της εκφορτίσεως εμφανίζει σοβαρή πτώση (1 έως 0,8 V).

Η ΗΕΔ του συσσωρευτή στο τέλος της φορτίσεως ανέρχεται στα 1,7 V για κάθε στοιχείο (με το συσσωρευτή στο κύκλωμα φορτίσεως). Αυτή είναι και η μοναδική ένδειξη του τέλους φορτίσεως των αλκαλικών συσσωρευτών.

β) Συσσωρευτές καδμιονικελίου.

Η διαφορά τους από τους συσσωρευτές Edison είναι ότι οι αρνητικές πλάκες περιέχουν κάδμιο ως ενεργό ύλη. Οι χημικές αντιδράσεις περιγράφονται συνοπτικά από την αμφίδρομη εξίσωση:



Η απόδοση σε ενέργεια των αλκαλικών συσσωρευτών ανέρχεται σε 50%.

10.9.4 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

α) Πλεονεκτήματα των αλκαλικών συσσωρευτών.

- 1) Έχουν μικρότερο βάρος από τους συσσωρευτές μολύβδου (για τον ίδιο αριθμό αμπερωρίων).
- 2) Παρουσιάζουν μεγαλύτερη μηχανική αντοχή.
- 3) Μπορούν να φορτισθούν ή εκφορτισθούν με ρεύματα μεγάλης εντάσεως, χωρίς κανένα κίνδυνο θλάθης.
- 4) Εκλύουν πολύ μικρή ποσότητα αερίων γι' αυτό χρησιμοποιούνται για ηλεκτροφωτισμό μεταλλείων.
- 5) Μπορούν να παραμείνουν φορτισμένοι ή αφόρτιστοι για πολύ χρόνο, γιατί ο ηλεκτρολύτης δεν προσβάλλει τα ηλεκτρόδια.

- 6) Δεν απαιτούν επιμελημένη και δαπανηρή συντήρηση.
- 7) Έχουν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής.
- 8) Ο ηλεκτρολύτης τους (ποτάσα) δεν παρουσιάζει τους κινδύνους του οξέος.

6) Μειονεκτήματα.

- 1) Έχουν μεγάλο κόστος.
 - 2) Έχουν μικρή απόδοση (50%).
 - 3) Έχουν μικρότερη ΗΕΔ (1,4 V) από τους συσσωρευτές μολύβδου (2,1 V).
 - 4) Έχουν μεγαλύτερη εσωτερική αντίσταση.
 - 5) Κατά την εκφόρτιση η πολική τάση παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση.
-

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ – ΕΠΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

11.1 Γενικά.

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε φαινόμενα που οφείλονται στην ύπαρξη, μέσα σ' ένα χώρο, ηλεκτρικών φορτίων. Γνωρίσαμε, μάλιστα, ότι ένα ή περισσότερα ηλεκτρικά φορτία, που κατά κάποιο τρόπο τοποθετούνται μέσα σ' ένα χώρο, αναπτύσσουν γύρω τους πεδίο δυνάμεων, το οποίο ονομάσαμε ηλεκτρικό πεδίο (βλ. παράγρ. 2.2).

Πειραματικά διαπιστώνεται ότι ένα **κινούμενο** ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί στον περιβάλλοντα χώρο του πεδίο δυνάμεων, που ονομάζεται **μαγνητικό πεδίο**. Κατάλληλο υπόθεμα για τη διαπίστωση της υπάρξεως ενός μαγνητικού πεδίου μπορεί να είναι ένα άλλο κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, όπως αναλυτικά θα αναπτύξουμε σε επόμενες παραγράφους. Θα γνωρίσουμε επίσης ότι και τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται από μόνιμους μαγνήτες εξηγούνται κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή οφείλονται στην κίνηση των ηλεκτρονίων των ατόμων του μαγνήτη.

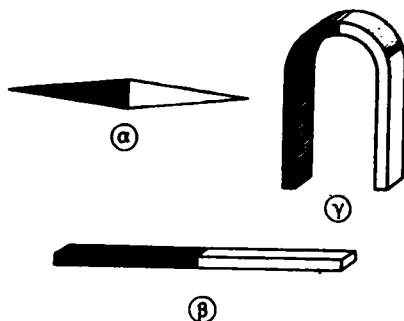
11.2 Φυσικοί και τεχνητοί μαγνήτες.

Ονομάζονται **μαγνήτες** σώματα που έχουν την ιδιότητα να εξασκούν ελκτικές δυνάμεις σε τεμάχια σιδήρου, κοβαλτίου, νικελίου και στα κράματά τους. Η ιδιότητα αυτή των μαγνητών ονομάζεται **μαγνητική ιδιότητα** ή **μαγνητισμός**.

Οι μαγνήτες διακρίνονται σε **φυσικούς** και **τεχνητούς**. Φυσικοί μαγνήτες είναι ορισμένα ορυκτά του σιδήρου όπως π.χ. ο μαγνητίτης (Fe_3O_4). Τεχνητοί μαγνήτες είναι τεμάχια χάλυβα, που με ειδικούς τρόπους μεταβάλλονται σε μαγνήτες (σχ. 11.2).

Αν θυθίσουμε ένα μαγνήτη μέσα σε ρινίσματα σιδήρου και μετά τον ανασύρομε, θα παρατηρήσουμε ότι αυτά συγκρατούνται μόνο σε ορισμένες περιοχές στα άκρα του μαγνήτη. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται **πόλοι** του μαγνήτη.

Αν στηρίξουμε μαγνητική βελόνη σε κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το



Σχ. 11.2.

Τεχνητοί μαγνήτες. α) Μαγνητική βελόνη. β) Ραβδόμορφη. γ) Πεταλοειδής.

κέντρο βάρους της, θα παρατηρήσουμε ότι η βελόνη προσανατολίζεται και ο ένας πόλος της στρέφεται πάντοτε προς το Βορρά και ο άλλος προς το Νότο.

Τον πόλο της μαγνητικής βελόνης, που δείχνει το Βορρά, ονομάζουμε **βόρειο** μαγνητικό πόλο (N) και αυτόν που δείχνει το Νότο, **νότιο** μαγνητικό πόλο (S). Αυτή την ιδιότητα των μαγνητών την χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε όργανα προσανατολισμού που ονομάζονται **μαγνητικές πυξίδες**. Αν σε μαγνητική βελόνη, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα, πλησιάσουμε μαγνήτη, θα παρατηρήσουμε ότι εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας της. Αυτό συμβαίνει γιατί μεταξύ των πόλων των μαγνητών εξασκούνται δυνάμεις. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

- α) Οι ομώνυμοι μαγνητικοί πόλοι απωθούνται.
- β) Οι ετερόνυμοι μαγνητικοί πόλοι έλκονται.

Οι ίδιες αλληλεπιδράσεις που παρατηρούνται μεταξύ δυο μαγνητών, όταν τους φέρουμε σε μικρή σχετικά απόσταση, παρατηρούνται και μεταξύ ενός μαγνήτη και ενός ρευματοφόρου αγωγού.

Αν π.χ. σε μαγνητική βελόνη πλησιάσουμε ένα ρευματοφόρο αγωγό, θα παρατηρήσουμε ότι η βελόνη προσανατολίζεται και ισορροπεί σε νέα θέση, που σημαίνει ότι δέχεται την επίδραση δυνάμεων.

Αυτό αποτελεί μια πειραματική διαπίστωση του γεγονότος ότι οι ρευματοφόροι αγωγοί και γενικότερα τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, δημιουργούν γύρω τους πεδία δυνάμεων ανάλογα με εκείνα των μονίμων ή τεχνητών μαγνητών. Δυνάμεις επίσης εξασκούνται μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις**. Η δύναμη που εξασκείται μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών, καθώς και η δύναμη που εξασκεί ο ρευματοφόρος αγωγός στη μαγνητική βελόνη, προέρχονται από τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία στο εσωτερικό των αγωγών.

Η δύναμη που εξασκείται μεταξύ δυο μαγνητών οφείλεται στην περιφορά των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα των ατόμων του μαγνήτη.

11.3 Μαγνητικό πεδίο.

Καλούμε **μαγνητοστατικό** ή **μαγνητικό πεδίο** το χώρο σε κάθε σημείο του οποίου ένα φυσικό ανυσματικό μέγεθος, που ονομάζεται **μαγνητική επαγωγή** του πεδίου, παίρνει μια ορισμένη τιμή.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, το μαγνητικό πεδίο είναι ένα πεδίο δυνάμεων, με υπόθεμα το κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Μπορούμε επομένως να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Μαγνητικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος σε κάθε σημείο του οποίου ένας ρευματοφόρος αγωγός ή ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο ή ένας μαγνήτης δέχεται την επίδραση δυνάμεως.

Οι διαφορές μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι οι ακόλουθες:

α) Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ηλεκτρικά φορτία σε ηρεμία (ή σε κίνηση), ενώ το μαγνητικό πεδίο οφείλεται σε **κινούμενα** ηλεκτρικά φορτία.

β) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο, ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι **στροβιλό**.

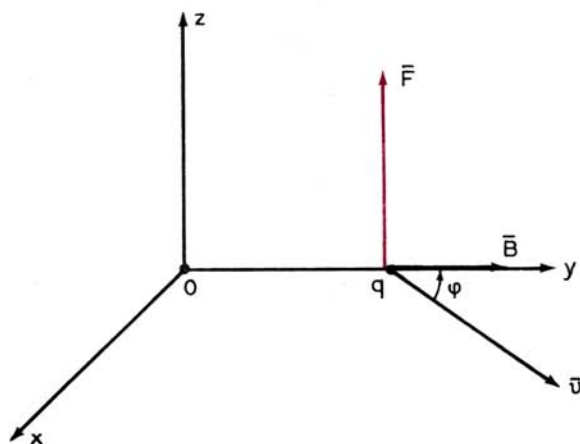
γ) Το ηλεκτρικό πεδίο εξασκεί δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται σε ηρεμία ή κινούνται, ενώ το μαγνητικό πεδίο μόνο σε **κινούμενα** ηλεκτρικά φορτία.

δ) Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ανοικτές (έχουν αρχή και τέλος) ενώ, όπως θα δούμε, οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι **κλειστές**.

11.4 Νόμος Laplace – Μαγνητική επαγωγή.

Όπως είδαμε το μαγνητικό πεδίο οφείλεται αλλά και επιδρά σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία. Η δύναμη που εξασκείται σε κάθε ηλεκτρικό φορτίο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο ονομάζεται **δύναμη Laplace**, προς τιμήν του Γάλλου φυσικού P.S. de Laplace (1749-1827) που τη μελέτησε.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θετικό φορτίο q , κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε χρονικά αμετάβλητο μαγνητικό πεδίο (σχ. 11.4α). Όπως ήδη έχουμε πει το μαγνητικό πεδίο εξασκεί στο φορτίο δύναμη. Πειραματικά διαπιστώνεται ότι η δύναμη αυτή εξαρτάται από τη διεύθυνση της ταχύτητας' μάλιστα, υπάρχει **πάντοτε** μια διεύθυνση κινήσεως του φορτίου κατά την οποία στο φορτίο δεν εξασκείται **καμία δύναμη**. Η διεύθυνση αυτή ονομάζεται **διεύθυνση του**



Σχ. 11.4α.

Δύναμη Laplace που ασκείται σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

μαγνητικού πεδίου. Για άλλες διευθύνσεις κινήσεως η δύναμη εξαρτάται από τη γωνία φ , μεταξύ του ανύσματος \vec{u} της ταχύτητας και της διευθύνσεως του μαγνητικού πεδίου.

Πειραματικά βρίσκεται ότι η δύναμη Laplace (F), που εξασκείται σε φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα u μέσα σε μαγνητικό πεδίο, είναι:

- Ανάλογη με το φορτίο q ,
- Ανάλογη με την ταχύτητα u και
- ανάλογη με το ημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζεται μεταξύ του ανύσματος \vec{u} και της διευθύνσεως του μαγνητικού πεδίου.

Δηλαδή:

$$F = B \cdot q \cdot u \cdot \eta\mu\varphi \quad (11.1)$$

όπου: B σταθερά αναλογίας, της οποίας η τιμή εξαρτάται από το επιβεβλημένο μαγνητικό πεδίο, και ονομάζεται **μαγνητική επαγωγή** ή **πυκνότητα μαγνητικής ροής**.

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής (\vec{B}), με διεύθυνση και φορά εκείνες του μαγνητικού πεδίου, και μέτρο ίσο προς τη σταθερά αναλογίας (B) της σχέσεως (11.1). Στην περίπτωση αυτή η διεύθυνση της δυνάμεως Laplace είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα ανύσματα \vec{u} και \vec{B} και η φορά της είναι ίδια με εκείνη, κατά την οποία προχωρεί δεξιόστροφος κοχλίας, αν στρέψουμε το \vec{u} κατά τη μικρότερη γωνία για να συναντήσουμε το \vec{B} (δηλαδή στο σχήμα 11.4α κατά γωνία φ).

Αν το φορτίο q είναι αρνητικό ($q < 0$) η δύναμη Laplace \vec{F} έχει αντίθετη φορά από εκείνη που ασκείται σε θετικό ηλεκτρικό φορτίο. Επομένως η σχέση (11.1) γράφεται ανυσματικά:

$$\vec{F} = q[\vec{u} \times \vec{B}] \quad (11.2)$$

και ονομάζεται νόμος Laplace για κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Από τη σχέση (11.1) προκύπτει:

$$B = \frac{F}{q\eta\mu\varphi} \quad (11.3)$$

Η σχέση (11.3) παρέχει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής του πεδίου. Η μονάδα της στο σύστημα S.I. είναι το **Tesla (1 T)**.

$$\begin{aligned} 1 \text{ T} &= 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}^2} = 1 \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}^2} \rightarrow \\ &\rightarrow 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

Το $\text{V} \cdot \text{s}$ όπως θα δούμε είναι η μονάδα της μαγνητικής ροής και ονομάζεται **Weber (Wb)**. Η σχέση μεταξύ του Weber/m² και της παλιάς μονάδας Gauss (του ηλεκτρομαγνητικού συστήματος) είναι:

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$$

Από τη σχέση (11.1) προκύπτει για $\varphi = 90^\circ$, $F_{\max} = qvB$, και για $\varphi = 0 \rightarrow F = 0$.
 Δηλαδή:

Η μαγνητική επαγωγή \vec{B} έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τη διεύθυνση και φορά που πρέπει να έχει η ταχύτητα \vec{v} ενός θετικού φορτίου, ώστε να μην εξασκείται σ' αυτό δύναμη Laplace.

Συνοπώς, το διάνυσμα \vec{B} μπορεί να περιγράψει ένα μαγνητικό πεδίο, αν γνωρίζουμε την τιμή του σε κάθε σημείο, όπως το διάνυσμα \vec{D} (μονάδα: $A \cdot s/m^2$) περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο. Αν το \vec{B} είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία του πεδίου, δηλαδή έχει το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση και φορά, το μαγνητικό πεδίο ονομάζεται **ομογενές**.

Το μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από συνεχή ρεύματα δεν μεταβάλλεται ως προς το χρόνο, δηλαδή η μαγνητική επαγωγή έχει μόνιμη κατανομή στο χώρο του πεδίου. Τέτοια μαγνητικά πεδία ονομάζονται **στατικά** ή **μόνιμα** ή **ήρεμα** μαγνητικά πεδία. Για στατικά μαγνητικά πεδία το έργο της μαγνητικής δυνάμεως \vec{F} είναι μηδέν (αφού $\vec{F} \perp \vec{v}$). Έτσι ένα στατικό μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να αλλάξει την κινητική ενέργεια σε κινούμενο φορτίο. Όταν φορτίο q κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε χώρο, όπου συνυπάρχει ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} και μαγνητικό πεδίο \vec{B} , η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι:

$$\vec{F} = \vec{E}q + q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (11.4)$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται δύναμη Lorentz.

Στο παράδειγμα 11.4.1 που ακολουθεί, θα μελετήσουμε την κίνηση ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα μόνιμο μαγνητικό πεδίο. Πριν όμως προχωρήσουμε στο παράδειγμα αυτό, ας υπενθυμίσουμε ότι το σύμβολο $\otimes \Sigma$ που θα χρησιμοποιήσουμε σε σχήματα που ακολουθούν, σημαίνει ότι το άνυσμα $\vec{\Sigma}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του βιβλίου και κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Αντίθετα το σύμβολο $\odot \Sigma$ σημαίνει ότι το κάθετο στο επίπεδο του βιβλίου άνυσμα $\vec{\Sigma}$, κατευθύνεται από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Παράδειγμα 11.4.1.

Κίνηση ηλεκτρονίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Ηλεκτρόνιο κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} με σταθερή ταχύτητα \vec{v} . Να μελετηθεί η κίνησή του όταν:

- Τα ανύσματα \vec{v} και \vec{B} είναι μεταξύ τους κάθετα.
- Σχηματίζουν γωνία φ .

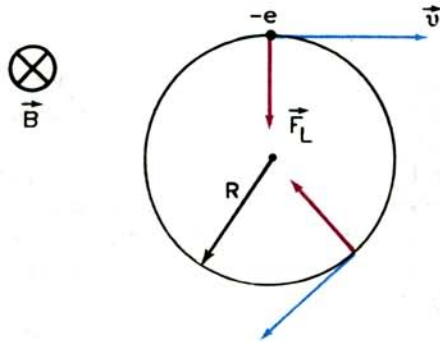
α) Το σχήμα 11.48 μας δείχνει ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{v} μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} έτσι, ώστε τα ανύσματα \vec{v} και \vec{B} να είναι μεταξύ τους κάθετα.

Σύμφωνα με το νόμο του Laplace στο ηλεκτρόνιο θα εξασκηθεί δύναμη F_L :

$$F_L = e \cdot v \cdot B = \text{σταθ} \quad (1)$$

που θα είναι κάθετη στην ταχύτητα \vec{v} (επειδή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα \vec{v} και \vec{B}).

Αλλά όταν μία σταθερή (κατά μέτρο) δύναμη F είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα ενός υλικού σημείου, το σημείο διαγράφει κυκλική τροχιά, δηλαδή η



Σχ. 11.46.

Η τροχιά του ηλεκτρονίου που κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι κυκλική ($\vec{v} \perp \vec{B}$).

F_L ενεργεί σαν κεντρομόλος:

$$F_L = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου και R η ακτίνα της τροχιάς.

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$Bev = \frac{mv^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{Be} \quad (3)$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω είναι:

$$v = \omega R = \omega \cdot \frac{mv}{Be} \rightarrow \omega = \frac{Be}{m} \quad (4)$$

Η περίοδος και η συχνότητα της κυκλικής κινήσεως είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{Be} \quad (5)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{Be}{2\pi m} \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα είναι ανάλογη προς την ταχύτητα, ενώ η περίοδος και η συχνότητα είναι σταθερές και ανεξάρτητες από την ταχύτητα. Δηλαδή, γενικά, για ίσα φορτία που έχουν μεγάλη ταχύτητα, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι μεγάλη, ενώ αυτά που έχουν μικρότερη ταχύτητα θα έχουν και μικρότερη ακτίνα. **Όλα όμως τα φορτία χρειάζονται τον ίδιο χρόνο για να συμπληρώσουν μια περιστροφή** (ή τον ίδιο αριθμό περιστροφών) γιατί η συχνότητα είναι σταθερή.

β) Αναλύομε την ταχύτητα u σε δυο συνιστώσες: μια κατά τη διεύθυνση του πεδίου $u_{\pi} = u \sin \varphi$ (7) και μία κάθετη στο \vec{B} $u_{\kappa} = u \cos \varphi$ (8). Η τροχιά του ηλεκτρονίου προκύπτει ως επαλληλία της κυκλικής κινήσεως που προκαλεί η u_{κ} και της ευθύγραμμης που προκαλεί η u_{π} , οπότε θα έχει ελικοειδή μορφή (σχ. 11.4γ).

Η κυκλική τροχιά θα έχει ακτίνα:

$$r = \frac{m u_{\kappa}}{B e} \quad (9) \quad \text{και περίοδο } T = \frac{2\pi m}{B e} \quad (10)$$

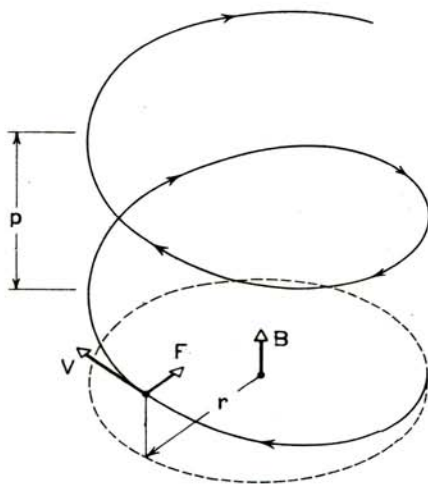
Από τις (8) και (9) προκύπτει η ακτίνα r της έλικας:

$$r = \frac{m u \cos \varphi}{B e} \quad (11)$$

Το βήμα της έλικας ρ είναι: $\rho = u_{\pi} T$ (12)

Από τις (7), (10) και (12) προκύπτει:

$$\rho = \frac{2\pi m u \sin \varphi}{B e} \quad (13)$$

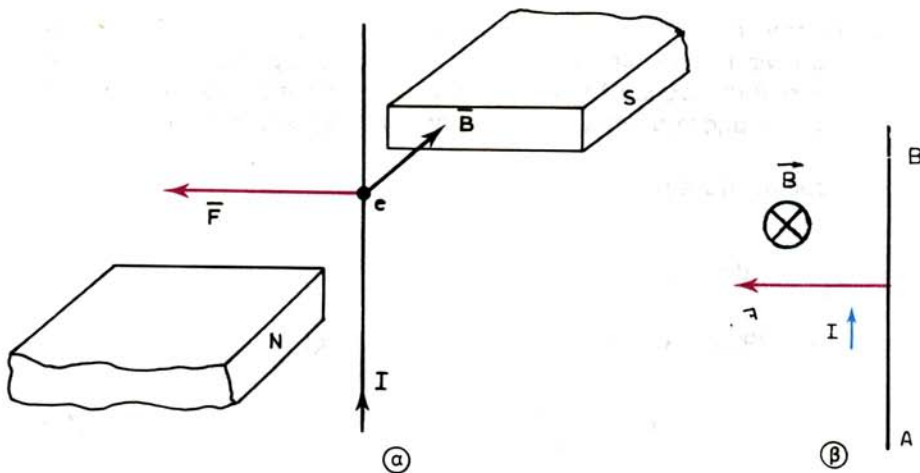


Σχ. 11.4γ.

Όταν τα ανύσματα \vec{u} και \vec{B} σχηματίζουν γωνία $\varphi \neq 90^\circ$, η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο ελικοειδής.

11.5 Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό.

Θεωρούμε ευθύγραμμο αγωγό μήκους $AB = l$, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} (σχ. 11.5α). Για απλούστευση θεωρούμε ότι ο αγωγός βρίσκεται στο επίπεδο



Σχ. 11.5α.

Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό. α) Διάταξη στο χώρο. β) Ο αγωγός στο επίπεδο της σελίδας.

της σελίδας [σχ. 11.5α (β)].

Εφόσον το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη σε κάθε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, έπεται ότι θα ασκείται δύναμη Laplace και στο ρευματοφόρο αγωγό, δοθέντος ότι μέσα σ' αυτόν κινούνται ηλεκτρόνια. Σύμφωνα λοιπόν με όσα έχουμε αναφέρει, η δύναμη \vec{F} που εξασκείται στον αγωγό, είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το άνυσμα \vec{B} και τον αγωγό. Η φορά της βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, αν ληφθεί υπόψη ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται αντίθετα από τη συμβατική φορά της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος (παράγρ. 5.2). Πρακτικά η φορά της δυνάμεως Laplace που ασκείται σε ρευματοφόρο αγωγό, βρίσκεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού: Αν ο αντίχειρας δείχνει το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό και ο δείκτης τη φορά του πεδίου, τότε ο μέσος δείχνει τη φορά της δυνάμεως \vec{F} που εξασκείται στον αγωγό (σχ. 11.5β).

Όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια το μέτρο της δυνάμεως \vec{F} παρέχεται από τη σχέση:

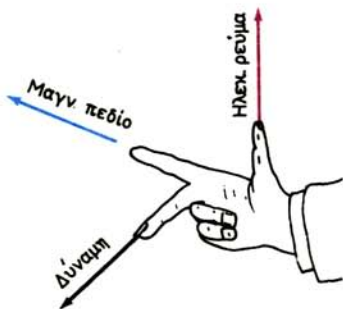
$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \eta \mu \varphi \quad (11.5)$$

όπου φ η γωνία την οποία σχηματίζει ο αγωγός με άνυσμα \vec{B} .

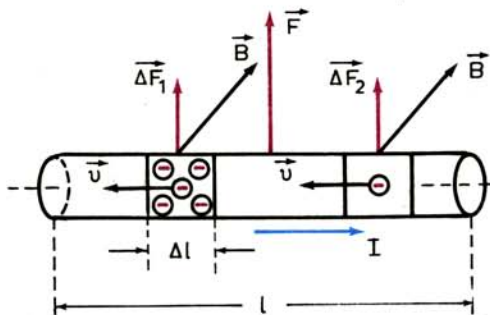
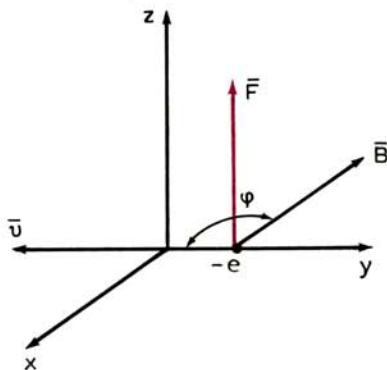
Από τη σχέση (11.5) προκύπτει για $\varphi = 0^\circ$ ή $\varphi = 180^\circ$ ότι: $F = 0$, δηλαδή: Όταν ρευματοφόρος αγωγός είναι παράλληλος προς τη διεύθυνση του πεδίου δεν δέχεται την επίδραση δυνάμεως.

Απόδειξη της σχέσεως (11.5).

Θεωρούμε ευθύγραμμο αγωγό μήκους l που διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ένταση \vec{B} σχηματίζει



Σχ. 11.56.
Κανόνας των τριών δακτύλων.



Σχ. 11.5γ.
Δυνάμεις Laplace σε ηλεκτρόνια ρευματοφόρου αγωγού.

γωνία φ με τον αγωγό (σχ. 11.5γ).

Ας είναι S η επιφάνεια της διατομής του αγωγού, σταθερή σε όλο το μήκος του l και z τα ανά μονάδα όγκου του αγωγού κινούμενα ηλεκτρόνια του (ελεύθερα ηλεκτρόνια). Αν θεωρήσουμε στοιχειώδες μήκος Δl του αγωγού, τότε η δύναμη Laplace, που θα ασκείται σ' αυτόν λόγω των κινουμένων μέσα του ηλεκτρονίων, θα έχει μέτρο:

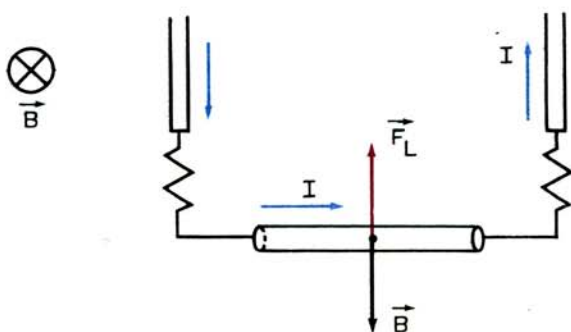
$$\Delta F = B \cdot z \cdot e \cdot S \cdot \Delta l \cdot u \cdot \eta \mu \varphi \quad (11.6)$$

Αν όμως ληφθεί υπόψη ότι η σταθερή ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ισούται, σύμφωνα με τη σχέση (5.18) με $l = z \cdot u \cdot e \cdot S$ τότε η σχέση (11.6) γίνεται:

$$\Delta F = B \cdot I \cdot \Delta l \cdot \eta \mu \varphi \quad (11.7)$$

Όπως φαίνεται το μέτρο της στοιχειώδους δύναμης Laplace είναι το ίδιο για οποιοδήποτε στοιχειώδες μήκος (Δl) του αγωγού.

Εξάλλου, επειδή η $\vec{\Delta F}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα \vec{u} , συμπεραίνομε ότι οι στοιχειώδεις δυνάμεις $\vec{\Delta F}_1, \vec{\Delta F}_2, \dots$ όλων των στοιχειωδών μηκών του αγωγού



Σχ. 11.55.

Διάταξη παραδείγματος 11.5.1.

έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση και φορά. Επομένως η συνισταμένη τους \vec{F} θα εξασκείται στο μέσο του αγωγού και θα έχει μέτρο ίσο προς το άθροισμα των μέτρων τους:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta F_i = \sum_{i=1}^{\infty} B \cdot I \cdot \Delta l_i \cdot \eta\mu\phi = BI\eta\mu\phi \sum_{i=1}^{\infty} \Delta l_i = B \cdot I \cdot l\eta\mu\phi$$

$$\eta \quad F = B \cdot I \cdot l\eta\mu\phi \quad (11.8)$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι ως **μήκος** l ενός αγωγού στις σχέσεις (11.5) ή (11.8) εννοείται μόνο το μήκος του αγωγού, που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

Παράδειγμα 11.5.1.

Σύρμα μήκους $l = 0,6 \text{ m}$ και μάζας $m = 12 \text{ gr}$ κρέμεται από δυο δυναμόμετρα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο εντάσεως $B = 0,4 \text{ T}$ (σχ. 11.55). Να υπολογισθεί το ρεύμα, που πρέπει να διαρρέει το σύρμα, ώστε η ένδειξη των δυναμομέτρων να είναι μηδέν ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Στο σύρμα εξασκείται το βάρος του F_g που είναι:

$$F_g = mg \quad (1)$$

Εξασκείται επίσης η δύναμη Laplace F_L :

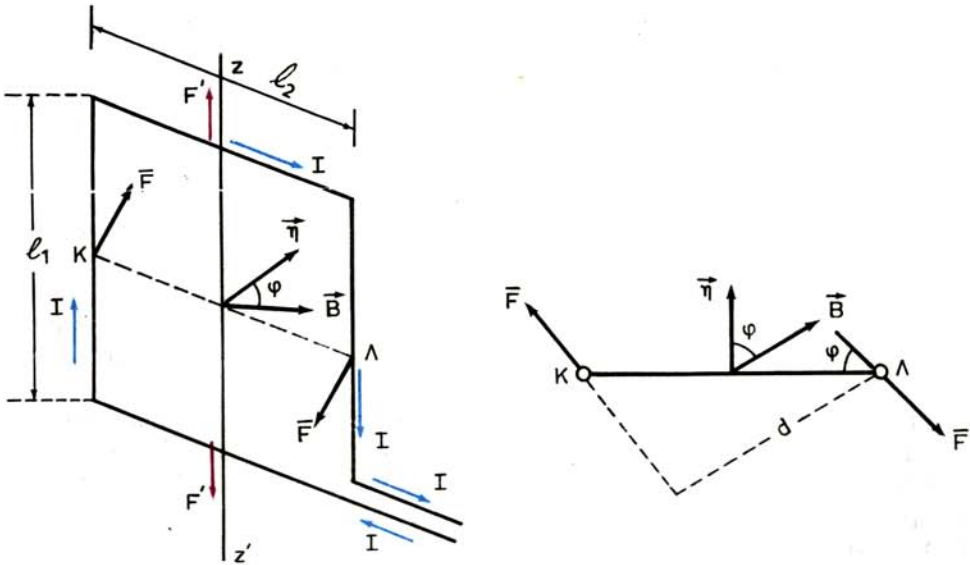
$$F_L = BI\eta\mu 90^\circ = BI \quad (2)$$

Το ρεύμα I θα πρέπει να έχει τέτοια φορά, ώστε η \vec{F}_L να είναι αντίρροπη της \vec{F}_g και τέτοια τιμή, ώστε $F_L = F_g$, δηλαδή:

$$BI = mg \rightarrow I = \frac{mg}{B} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0,6 \cdot 0,4} = 0,5 \text{ A}$$

11.6 Μαγνητική ροπή – Μαγνητικό δίπολο.

Θεωρούμε ένα αγωγό σε σχήμα πλαισίου με διαστάσεις l_1 και l_2 (σχ. 11.6α),



Σχ. 11.6α.

Δυνάμεις Laplace που εξασκούνται στις πλευρές ορθογώνιου ρευματοφόρου πλαισίου.

που διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} . Το πλαίσιο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα ZZ' . Έστω φ η γωνία που σχηματίζει το άνυσμα \vec{B} με το άνυσμα \vec{n} , που είναι κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου (σχ. 11.6α).

Οι δυνάμεις \vec{F} που εξασκούνται στις πλευρές με μήκος l_2 είναι παράλληλες προς τον άξονα ZZ' και επομένως η ροπή τους είναι μηδέν.

Οι δυνάμεις που εξασκούνται στις δυο άλλες πλευρές είναι αντίρροπες και έχουν το ίδιο μέτρο:

$$F = BI l_1 \eta \mu 90 = BI l_1 \quad (11.9)$$

Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν ζεύγος δυνάμεων που έχει ροπή:

$$M = Fd = BI l_1 l_2 \eta \mu \varphi \rightarrow M = BIS \eta \mu \varphi \quad (11.10)$$

όπου $S = l_1 \cdot l_2$ το εμβαδόν του πλαισίου.

Αποδεικνύεται ότι η σχέση (11.10) ισχύει ανεξάρτητα από το σχήμα που έχει το πλαίσιο. Έτσι, γενικά, το γινόμενο της εντάσεως του ρεύματος επί το εμβαδόν S του πλαισίου ονομάζεται μαγνητική ροπή M^* :

$$M^* = I \cdot S \quad (11.11)$$

οπότε η (11.10) γίνεται:

$$M = M^* B \eta \mu \varphi \quad (11.12)$$

Η μαγνητική ροπή μπορεί να θεωρηθεί ως ανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του πλαισίου. Η φορά της συμπίπτει με τη φορά, με την οποία θα προχωρήσει δεξιόστροφος κοχλίας κάθετος στο

πλαίσιο, αν στραφεί κατά τη φορά του ρεύματος.

Μονάδα μετρήσεως της μαγνητικής ροπής στο σύστημα S.I. είναι το $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Η σχέση (11.12) γράφεται ανυσματικά, ως:

$$M = [\vec{M}^* \times \vec{B}] \quad (11.13)$$

Είναι φανερό ότι το πλαίσιο ισορροπεί όταν $M = 0$. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν $\eta\mu\phi = 0$, δηλαδή όταν $\phi = 0^\circ$ ή $\phi = 180^\circ$. Συνεπώς:

Όταν ένα πλαίσιο με οποιοδήποτε σχήμα βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} και διαρρέεται από ρεύμα, τότε εξασκείται σ' αυτό ροπή, που τείνει να το περιστρέψει έτσι, ώστε η μαγνητική του ροπή \vec{M}^ να γίνει παράλληλη προς το άνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} .*

Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι, όπως συμπεριφέρεται ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, έτσι ακριβώς συμπεριφέρεται και το πλαίσιο μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Γι' αυτό ακριβώς ονομάζεται και **μαγνητικό δίπολο**. Το πλαίσιο και γενικά κάθε κλειστός βρόχος ρεύματος που έχει μαγνητική ροπή αποτελεί ένα μαγνητικό δίπολο. Κάθε μαγνητικό δίπολο, όταν βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο, δέχεται μηχανική ροπή ίση με:

$$M = M^* \eta\mu\phi \quad (11.14)$$

Η ροπή αυτή τείνει να το περιστρέψει ώστε η μαγνητική του ροπή \vec{M}^* να γίνει παράλληλη προς τη μαγνητική επαγωγή \vec{B} .

Μαγνητική ροπή έχει και ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται με συχνότητα ν γύρω από τον πυρήνα. Η κίνηση αυτή ισοδυναμεί με ρεύμα εντάσεως:

$$I = \frac{e}{T} = e\nu \quad (11.15)$$

Από τις (11.11) και (11.15) προκύπτει ότι η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου, θα είναι:

$$M^* = e\nu\pi r^2 \quad (11.16)$$

όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το ηλεκτρόνιο ($S = \pi r^2$).

Παράδειγμα 11.6.1.

Να υπολογισθεί το έργο W , που απαιτείται για την περιστροφή μαγνητικού διπόλου κατά γωνία ϕ_0 μέσα σε μαγνητικό πεδίο εντάσεως \vec{B} .

Υποθέτουμε ότι το δίπολο αρχικά ισορροπεί, δηλαδή το άνυσμα της μαγνητικής του ροπής \vec{M}^* σχηματίζει με το άνυσμα της μαγνητικής επαγωγής γωνία 0° .

Για μια στοιχειώδη περιστροφή κατά γωνία $d\phi$ απαιτείται στοιχειώδες έργο dW ίσο με:

$$dW = M d\phi = M^* \eta\mu\phi d\phi$$

Άρα το έργο για την περιστροφή από 0° μέχρι ϕ_0 είναι:

$$W = \int_0^{\phi_0} M^* \eta\mu\phi d\phi = M^* B \int_0^{\phi_0} \eta\mu\phi d\phi \rightarrow W = M^* B (1 - \text{συν}\phi_0)$$

Παράδειγμα 11.6.2.

Αγωγός σχήματος ημικυκλίου διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $I = 10 \text{ A}$. Η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $R = 25 \text{ cm}$ και ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο εντάσεως $B = 0,1 \text{ T}$ με το επίπεδό του κάθετο στη μαγνητική επαγωγή \vec{B} . Να υπολογισθεί η δύναμη που εξασκείται στον αγωγό (σχ. 11.6θ).

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα dI του ημικυκλίου. Η δύναμη Laplace που εξασκείται σ' αυτό είναι:

$$dF = BIdl \quad (1)$$

Από τις συνιστώσες της dF η dF_x εξουδετερώνεται από τη δύναμη που εξασκείται στο αντίστοιχο τμήμα dI , συμμετρικό του dI ως προς τον άξονα y .

Επομένως, η δύναμη που εξασκείται στο ημικύκλιο είναι:

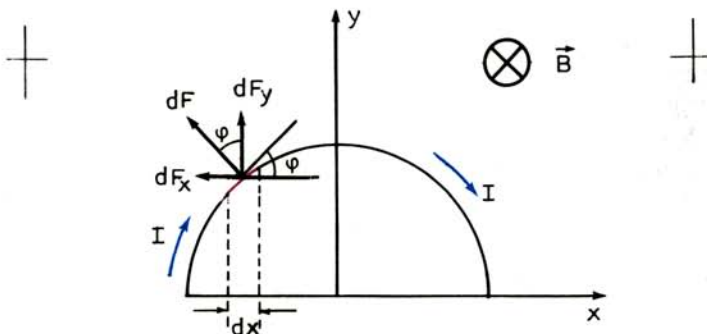
$$F_y = \int dF_y = \int dF \sin\varphi \quad (2)$$

Είναι επίσης:

$$dx = dl \sin\varphi \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$F_y = \int_{-R}^{+R} BIdx = BI [x]_{-R}^{+R} = 2 BIR = 2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 0,25 = 0,5 \text{ N}$$



Σχ. 11.6θ.

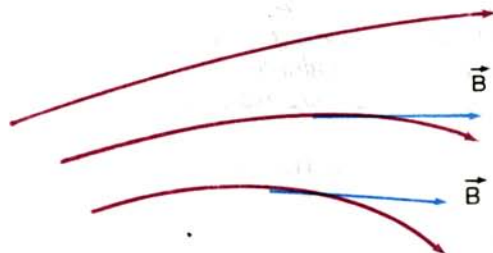
Διάταξη παραδείγματος 11.6.2.

11.7 Μαγνητικές δυναμικές γραμμές – Μαγνητική ροή.

Όπως για την εποπτική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου σχεδιάζουμε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, έτσι και για το μαγνητικό πεδίο σχεδιάζουμε τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

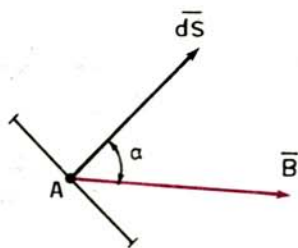
Ως **μαγνητική δυναμική γραμμή** ορίζεται η γραμμή, σε κάθε σημείο της οποίας η εφαπτομένη της έχει τη διεύθυνση του ανύσματος της μαγνητικής επαγωγής (\vec{B}) στο υπόψη σημείο (σχ. 11.7α).

Επί της μαγνητικής δυναμικής γραμμής σημειώνεται με βέλος και η φορά του ανύσματος της μαγνητικής επαγωγής. Τέλος οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζο-



Σχ. 11.7α.

Τμήμα δυναμικών γραμμών μαγνητικού πεδίου.



Σχ. 11.7β.

Στοιχειώδης επιφάνεια μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

νται έτσι, ώστε να μας δίνουν, κατά το δυνατόν, και το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής. Έτσι, όπου οι δυναμικές γραμμές είναι **πυκνότερες** εκεί και η μαγνητική επαγωγή **λαμβάνει** υψηλότερες τιμές.

Όσα ισχύουν για τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές ισχύουν και για τις μαγνητικές με μία ουσιώδη διαφορά: Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι **κλειστές**, δηλαδή δεν έχουν αρχή και τέλος.

Η φορά των μαγνητικών δυναμικών γραμμών εξ ορισμού συμπίπτει με τη φορά, που πρέπει να έχει η ταχύτητα ενός θετικού φορτίου, για να μη δέχεται δύναμη Laplace.

Στο **ομογενές** μαγνητικό πεδίο οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι **παράλληλες** και **ισοπέχουν**.

Θεωρούμε ότι μέσα σε μαγνητικό πεδίο βρίσκεται μια στοιχειώδης επιφάνεια με εμβαδόν dS (σχ. 11.7β). Ονομάζουμε στοιχειώδη μαγνητική ροή $d\Phi$ που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια dS το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων \vec{B} και $d\vec{S}$, δηλαδή:

$$d\Phi = (\vec{B} \cdot d\vec{S}) \quad (11.17)$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η μαγνητική ροή είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μέτρο:

$$d\Phi = B dS \cos \alpha \quad (11.18)$$

όπου α η γωνία που σχηματίζουν τα ανύσματα \vec{B} και $d\vec{S}$.

Ας υπενθυμίσουμε ότι το άνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{S}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια dS και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της.

Η μαγνητική ροή Φ , που διέρχεται από επιφάνεια S , βρίσκεται αν αθροίσουμε όλες τις στοιχειώδεις ροές $d\Phi$ που διέρχονται από τις στοιχειώδεις επιφάνειες dS , της επιφάνειας S , δηλαδή αν ολοκληρώσουμε κατάλληλα την εξίσωση (11.18) στην επιφάνεια S :

$$\Phi = \int_S B \cos \alpha dS \quad (11.19)$$

Βέβαια, ολοκληρώματα όπως αυτό, που εκτείνονται σε επιφάνεια (επιφανειακά ολοκληρώματα), δεν είναι εύκολο να επιλυθούν, άλλωστε η επίλυσή τους ξεφεύγει από τα όρια του βιβλίου αυτού. Όμως, αυτό μπορεί να γίνει σε ορισμένες πολύ απλές περιπτώσεις πεδίων, όπως π.χ. εκείνη του **ομογενούς** μαγνητικού πεδίου, για το οποίο ισχύει $\vec{B} = \text{σταθ}$. Αν μάλιστα θέλομε να

υπολογίσουμε τη μαγνητική ροή, που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια, της οποίας το άνωσμα σχηματίζει γωνία α με το άνωσμα της μαγνητικής επαγωγής, οπότε $\sigma_{\text{να}} = \sigma_{\text{αθ.}}$, τότε από την (11.19) παίρνουμε (σχ. 11.7γ):

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS \sigma_{\text{να}} = B \sigma_{\text{να}} \int_S dS \rightarrow \Phi = BS \sigma_{\text{να}} \quad (11.20)$$

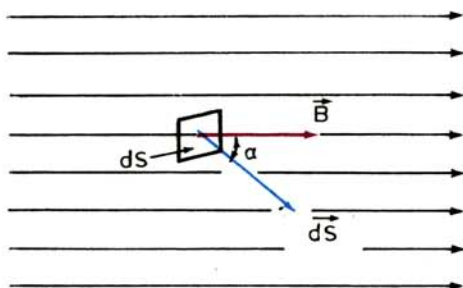
Επειδή η μαγνητική επαγωγή B είναι μέγεθος ανάλογο προς τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από τη μονάδα της επιφάνειας, συμπεραίνουμε ότι η μαγνητική ροή είναι μέγεθος ανάλογο προς το συνολικό πλήθος των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από όλη την επιφάνεια.

Η μονάδα ροής στο σύστημα S.I. είναι το Weber (1 Wb) και ορίζεται από τη σχέση (11.20), ως:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \text{ s} \rightarrow 1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$$

Η σχέση μεταξύ της μονάδας Weber και της παλιάς μονάδας **Maxwell** (του ηλεκτρομαγνητικού συστήματος) είναι:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} = 10^8 \text{ Mx}$$



Σχ. 11.7γ.
Μαγνητική ροή σε ομογενές πεδίο.

Παράδειγμα 11.7.1.

Έργο ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων.

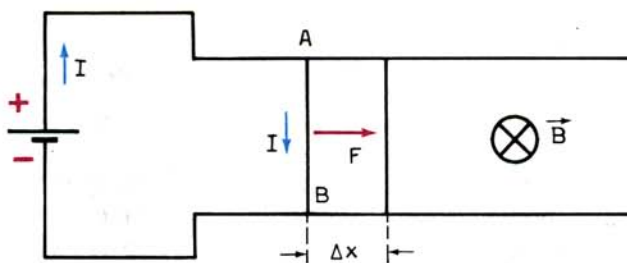
Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός $AB = l$ ολισθαίνει μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} επάνω σε δυο ακίνητους μεταλλικούς οδηγούς. Ζητείται το έργο της δυνάμεως Laplace που εξασκείται στον αγωγό (σχ. 11.7δ).

Η δύναμη Laplace που εξασκείται στον αγωγό είναι:

$$F = BI \sigma_{\text{να}} = BI \quad (1)$$

Το έργο ΔW της F , όταν ο αγωγός μετατοπίζεται κατά Δx , είναι:

$$\Delta W = F \cdot \Delta x \quad (2)$$



Σχ. 11.7δ.

Διάταξη παραδείγματος 11.7.1.

Είναι: $I \cdot \Delta x = \Delta S$ (3) και $B \Delta s = \Delta \Phi$ (4)

Από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει: $\Delta W = I \Delta \Phi$ (5)

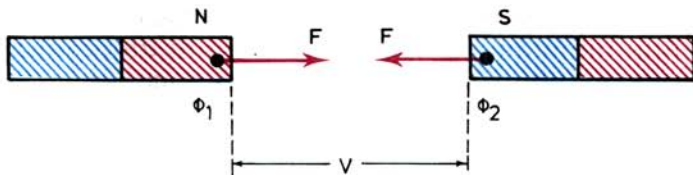
Η σχέση (5) ισχύει γενικά κατά τη μετατόπιση ενός οποιουδήποτε κλειστού βρόχου. Το $\Delta \Phi$ παριστάνει τη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια του βρόχου (ΔS είναι η επιφάνεια που σαρώνει ο αγωγός κατά τη μετατόπισή του).

11.8 Νόμος του Coulomb στο μαγνησμό.

Οι πόλοι ενός πηνίου καταλαμβάνουν καθένας ένα μήκος περίπου ίσο προς το 1/10 του συνολικού μήκους του πηνίου. Οι πόλοι επίσης ενός ευθύγραμμου μαγνήτη καταλαμβάνουν καθένας μήκος ίσο προς το 1/6 του συνολικού μήκους του μαγνήτη.

Όταν αναφερόμαστε στην **εντοπισμένη μαγνητική ροή** σ' ένα πόλο πηνίου ή μαγνήτη, εννοούμε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από μία επιφάνεια, η οποία περιβάλλει στενά γύρω-γύρω τον πόλο του πηνίου ή του μαγνήτη.

Ας θεωρήσουμε δυο ευθύγραμμους μαγνήτες που βρίσκονται σε αρκετά μεγάλη, σχετικά με τις διαστάσεις τους, απόσταση r . Με την προϋπόθεση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πόλοι των μαγνητών είναι σημειακοί και ότι εξασκούνται δυνάμεις μόνο μεταξύ των πόλων (1) και (2) και όχι μεταξύ του άλλου ζεύγους των πόλων των μαγνητών (σχ. 11.8α).



Σχ. 11.8α.

Δυνάμεις μεταξύ μαγνητών.

Αν Φ_1 και Φ_2 είναι οι εντοπισμένες μαγνητικές ροές των πόλων (1) και (2) και r η απόσταση των πόλων, τότε η δύναμη F που εξασκείται μεταξύ τους (ελκτική στην προκειμένη περίπτωση) παρέχεται από τον παρακάτω **νόμο του Coulomb**:

Η δύναμη που εξασκείται μεταξύ δυο σημειακών πόλων είναι ανάλογη με το γινόμενο $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ των εντοπισμένων μαγνητικών ροών των δυο πόλων και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της αποστάσεώς τους.

Η μαθηματική έκφραση του νόμου του Coulomb είναι:

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi_1 \Phi_2}{r^2} \quad (11.21)$$

Ο συντελεστής μ_0 ονομάζεται **απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα** και έχει τιμή:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

Ο συντελεστής μ εξαρτάται από τη φύση του υλικού που υπάρχει μεταξύ των μαγνητικών πόλων (1) και (2) και ονομάζεται **σχετική μαγνητική διαπερατότητα**. Για το κενό και τον αέρα είναι $\mu = 1$, οπότε η σχέση (11.21) γράφεται:

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\Phi_1 \Phi_2}{r^2} \quad (11.22)$$

Όπως παρατηρούμε ο μαγνητοστατικός νόμος του Coulomb μοιάζει με τον ηλεκτροστατικό. Τη θέση των φορτίων q την κατέχουν εδώ οι μαγνητικές ροές Φ των πόλων. Ο παραλληλισμός του φορτίου και της ροής υποστηρίζεται και από τις μονάδες των δυο μεγεθών: το φορτίο μετράται σε A.s (C) και η ροή σε V.s (Wb). Η δύναμη F που εξασκείται σ' ένα σημειακό μαγνητικό πόλο με εντοπισμένη ροή Φ , ο οποίος βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B , στο κενό είναι:

$$F = \frac{B}{\mu_0} \Phi \quad (11.23)$$

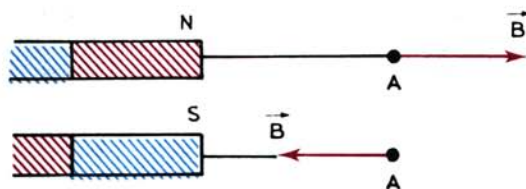
Από τις (11.22) και (11.23) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή \vec{B} του πεδίου που παράγεται από μαγνητικό πόλο Φ σ' ένα σημείο A στο κενό που απέχει απόσταση r από τον πόλο:

$$B = \frac{1}{4\pi} \frac{\Phi}{r^2} \quad (11.24)$$

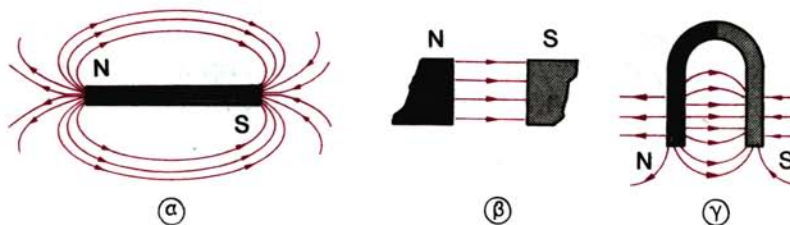
Το άνυσμα της μαγνητικής επαγωγής B , σ' ένα σημείο A του πεδίου, θα έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τη δύναμη που δέχεται βόρειος μαγνητικός πόλος, όταν τον φέρομε στο σημείο A (σχ. 11.86).

Επειδή το άνυσμα \vec{B} έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τις δυναμικές γραμμές, προκύπτει ότι οι δυναμικές γραμμές θα έχουν φορά από το βόρειο

μαγνητικό πόλο στο νότιο. Στο σχήμα 11.8γ έχουν σχεδιασθεί οι μορφές των μαγνητικών πεδίων που δημιουργούν διάφοροι μαγνήτες.



Σχ. 11.86.
Μαγνητική επαγωγή.



Σχ. 11.8γ.

- α) Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου μαγνήτη. β) Μαγνητικό πεδίο μεταξύ δυο ετερονύμων πόλων. γ) Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί πεταλοειδής μαγνήτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ

ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ – ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

12.1 Γενικά.

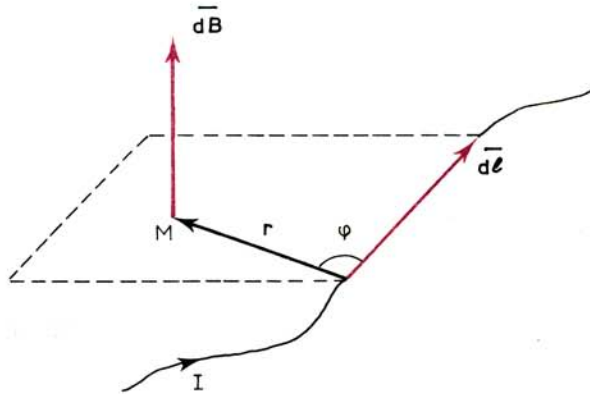
Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε αρχικά την έννοια του μαγνητικού πεδίου, αναφέροντας ταυτόχρονα την πειραματική διαπίστωση σχετικά με τη δημιουργία του πεδίου αυτού από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε κυρίως με θέματα σχετικά με την ανάπτυξη δυνάμεων και ροπών που οφείλονται σε μαγνητικά πεδία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα επανέλθουμε στο θέμα της προελεύσεως του μαγνητικού πεδίου και θα αναφέρομε νόμους ή σχέσεις που συνδέουν το ηλεκτρικό ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από αυτό.

Είναι σκόπιμο, στο σημείο αυτό, να παρατηρήσουμε ότι από ό,τι έχει μέχρι τώρα φανεί τα δυο πεδία δυνάμεων, που εξετάζουμε στο βιβλίο αυτό, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο σχεδόν πάντοτε συνυπάρχουν. Άλλωστε, όπως είπαμε, το μαγνητικό πεδίο οφείλεται στην ύπαρξη του ηλεκτρικού πεδίου. Για το λόγο αυτό αναφερόμαστε στα δυο αυτά πεδία χρησιμοποιώντας, αρκετές φορές, τον όρο *ηλεκτρομαγνητικό πεδίο*, στα δε αντίστοιχα φαινόμενα χρησιμοποιώντας τον όρο *φαινόμενα ηλεκτρομαγνητισμού*. Με αυτή την έννοια, στο κεφάλαιο αυτό, θα αναπτύξουμε τους σημαντικότερους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού.

12.2 Το μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού – Νόμος των Biot και Savart.

Όπως ήδη έχουμε πει, αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί στο γύρω του χώρο μαγνητικό πεδίο. Αυτό, όπως γνωρίζουμε και από τη Φυσική, μπορεί να δειχθεί και με το πείραμα του Oersted. Σύμφωνα με το πείραμα αυτό, εάν πλησιάσουμε μία μαγνητική βελόνη που να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα, σε ένα ρευματοφόρο αγωγό, τότε η βελόνη εκτρέπεται από την αρχική της θέση και προσανατολίζεται κάθετα προς τον αγωγό. Ο προσανατολισμός αυτός της βελόνης οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί γύρω του ο ρευματοφόρος αγωγός. Ο υπολογισμός της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής ($d\vec{B}$) που οφείλεται σε στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$ αγωγού διαρρέομενου από ρεύμα εντάσεως I , σε σημείο M του χώρου και σε απόσταση r από το στοιχείο $d\vec{l}$ (σχ. 12.2), γίνεται με το νόμο των Biot και Savart. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, που επαληθεύεται πειραματικά:



Σχ. 12.2.

Μαγνητική επαγωγή ρευματοφόρου αγωγού που οφείλεται σε στοιχειώδες μήκος \vec{dl} .

α) Το **μέτρο** της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής (dB) παρέχεται από τη σχέση:

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \eta\mu\phi}{r^2} \quad (12.1)$$

όπου: μ_0 η απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα $\left(\frac{4\pi}{10^7} \frac{Vs}{Am} \right)$,

μ η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός (καθαρός αριθμός),

I η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό (A),

dl το στοιχειώδες μήκος επί του αγωγού (m),

r η απόσταση του στοιχείου dl από το σημείο M, όπου υπολογίζεται η

μαγνητική επαγωγή (m),

ϕ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ανυσμάτων \vec{dl} και \vec{r} . Ας σημειωθεί ότι το διάνυσμα dl έχει ως φορά εκείνη της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος στον αγωγό και το διάνυσμα r κατευθύνεται προς το σημείο M και

dB το μέτρο της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής στο σημείο M (Wb).

β) Το άνυσμα \vec{dB} έχει **διεύθυνση** κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα \vec{dl} και \vec{r} και φορά που καθορίζεται από το δεξιόστροφο κοχλία, δηλαδή η φορά του \vec{dB} είναι ίδια με τη φορά κατά την οποία θα προχωρούσε δεξιόστρ×φος κοχλίας, αν στρεφόταν κατά τη φορά που έπρεπε να στραφεί το \vec{dl} για να συναντήσει το \vec{r} κατά τη μικρότερη γωνία, δηλαδή κατά τη γωνία ϕ . Σύμφωνα με τα πιο πάνω μπορούμε να διατυπώσουμε ανυσματικά το νόμο των Biot και Savart, ως εξής:

$$\vec{dB} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^3} [\vec{dl} \times \vec{r}] \quad (12.2)$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική μαγνητική επαγωγή \vec{B} στο σημείο Μ, που οφείλεται σε όλο τον αγωγό, αθροίζουμε ανυσματικά τις μαγνητικές επαγωγές που οφείλονται στα άπειρα στοιχειώδη τμήματα $d\vec{l}$ στο σημείο αυτό, δηλαδή, ολοκληρώνουμε τη σχέση (12.2), όπως θα δούμε σε παραδείγματα που ακολουθούν. Έτσι λοιπόν παρατηρούμε ότι ο νόμος των Biot και Savart επιτρέπει, εν γένει, την επίλυση ενός μαγνητικού πεδίου που οφείλει την ύπαρξή του σ' ένα ή και περισσότερους ρευματοφόρους αγωγούς.

12.3 Το θεώρημα του Ampère.

Το θεώρημα του Ampère, που συναντάται και με την ονομασία **νόμος του διαρρεύματος**, αποτελεί θεμελιώδες θεώρημα του μαγνητικού πεδίου. Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού είναι δυνατή η επίλυση αρκετών μορφών μαγνητικών πεδίων, στα οποία, ο νόμος των Biot και Savart δεν δίνει, από πρακτικής πλευράς, λύση. Πριν να αναπτύξουμε το θεώρημα του Ampère, θα πρέπει να δώσουμε μερικούς ορισμούς που αναφέρονται στα μαγνητικά πεδία.

α) Ορίζεται ως **μαγνητική διέγερση*** ή απλά ως **άνυσμα \vec{H}** του μαγνητικού πεδίου, το άνυσμα:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad (12.3)$$

με μονάδα μετρήσεως στο S.I. το 1 Am^{-1} .

Σχετικά με τη φυσική σημασία του ανύσματος \vec{H} θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο.

β) Ονομάζεται **διαφορά μαγνητικού δυναμικού** ή **μαγνητική τάση** δυο σημείων Α και Β ενός μαγνητικού πεδίου το ολοκλήρωμα:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (12.4)$$

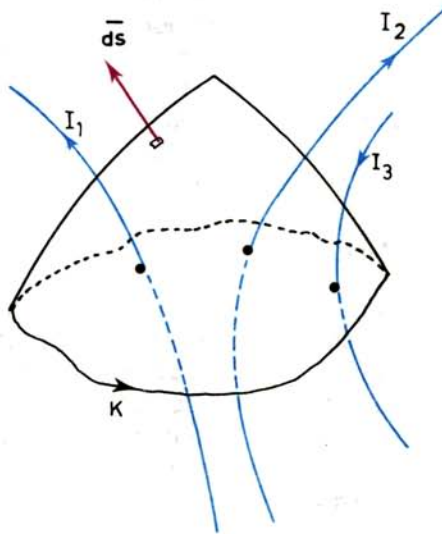
κατά μήκος μιας οποιασδήποτε γραμμής, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β.

Όπως προκύπτει από τη σχέση (12.4) η μαγνητική τάση έχει διαστάσεις εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος, δηλαδή μονάδα μετρήσεως της μαγνητικής τάσεως είναι το 1 Α.

Ας θεωρήσουμε τώρα την προσανατολισμένη επιφάνεια του σχήματος 12.3, και ας είναι dS το μοναδιαίο διάνυσμα προσανατολισμού της που δείχνει προς το θετικό ημιχώρο της επιφάνειας.

γ) Ονομάζεται **διάρρευση** διά της προσανατολισμένης αυτής επιφάνειας το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ηλεκτρικών ρευμάτων που διέρχονται από την επιφάνεια αυτή. Ας σημειωθεί ότι «θετικά» θεωρούνται τα ρεύματα, των οποίων η φορά συμπίπτει με το μοναδιαίο διάνυσμα προσανατολισμού της επιφάνειας, ενώ όλα τα υπόλοιπα θεωρούνται «αρνητικά».

*Πριν από την εισαγωγή του συστήματος S.I, το άνυσμα \vec{H} ονομάζονταν «ένταση μαγνητικού πεδίου», στο οποίο οι διαστάσεις ήταν ίδιες όπως και στο άνυσμα \vec{B} .



Σχ. 12.3.

Διάρρευμα από προσανατολισμένη επιφάνεια $\sum_{i=1}^3 I_i = I_1 + I_2 - I_3$.

Το διάρρευμα της επιφάνειας του σχήματος 12.3 είναι:

$$\sum_{i=1}^3 I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

δ) Ονομάζεται **θετική φορά διαγραφής** (K^+) μιας κλειστής γραμμής K στην οποία περατούται προσανατολισμένη επιφάνεια, η φορά περιστροφής δεξιόστροφου κοχλία, ο οποίος προχωρεί κατά τη κατεύθυνση του διανύσματος προσανατολισμού ($d\vec{S}$) της επιφάνειας.

Μετά τους πιο πάνω ορισμούς μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το **θεώρημα του Ampère** ως εξής:

Η μαγνητική τάση σε οποιαδήποτε κλειστή γραμμή του πεδίου που διαμορφώνεται κατά τη θετική φορά διαγραφής της γραμμής, ισούται με το διάρρευμα από οποιαδήποτε προσανατολισμένη επιφάνεια που περατούται στην κλειστή γραμμή, δηλαδή:

$$\oint_{K^+} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad (12.5)$$

Άμεσο συμπέρασμα του θεωρήματος του Ampère είναι ότι το μαγνητικό πεδίο είναι **στροβιλό**.

Ο νόμος των Biot και Savart και το θεώρημα του Ampère αποτελούν τους δυο βασικούς νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού, τους οποίους θα εφαρμόσουμε στη

συνέχεια για να μελετήσουμε μερικές ενδιαφέρουσες μορφές ηλεκτρικών πεδίων.

12.4 Επίλυση χαρακτηριστικών μορφών μαγνητικών πεδίων.

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των Biot και Savart και το θεώρημα του Ampère για να επιλύσουμε μερικές χαρακτηριστικές μορφές πεδίων. Σε μία περίπτωση θα επιλύσουμε το πεδίο και με τους δυο τρόπους, ώστε να καταδειχθούν και οι διαφορές στην εφαρμογή τους.

12.4.1 Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού που έχει άπειρο μήκος.

Ας θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό με άπειρο μήκος, όπως αυτός που φαίνεται στο σχήμα 12.4a. Θα δούμε πώς υπολογίζεται η μαγνητική επαγωγή σε σημείο M του χώρου που απέχει απόσταση R από τον αγωγό, εργαζόμενοι και με τις δυο μεθόδους που προαναφέραμε.

α) Με το νόμο των Biot και Savart.

Χωρίζουμε τον αγωγό σε άπειρου πλήθους στοιχειώδη ανύσματα $d\vec{l}$, κατά τη φορά της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος. Το διάνυσμα της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής $d\vec{B}$ στο σημείο M εξαιτίας ενός, οποιουδήποτε, ρευματοφόρου στοιχείου $d\vec{l}$ προκύπτει, σύμφωνα με το νόμο των Biot και Savart, κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα $d\vec{l}$ και \vec{r} . Η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Το μέτρο του διανύσματος $d\vec{B}$, θα είναι, σύμφωνα με την εξίσωση (12.1):

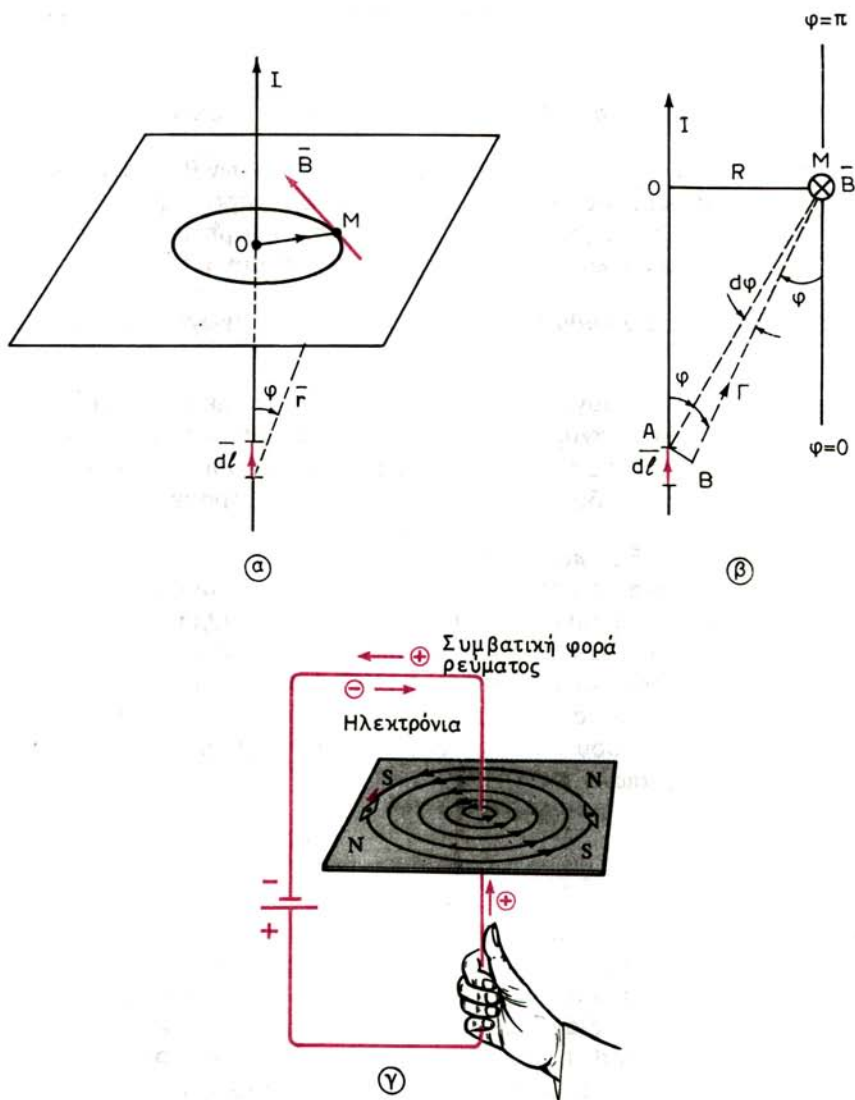
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \cdot \eta\mu\phi}{r^2} \quad (12.6)$$

Είναι φανερό ότι σε όλα τα σημεία M, που βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου σε επίπεδο κάθετο προς τον αγωγό, με κέντρο το σημείο της τομής αγωγού (κάθετου επιπέδου), θα υπολογίζουμε την ίδια τιμή για τη στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή $d\vec{B}$. Εξάλλου το διάνυσμα της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής, ως κάθετο στο επίπεδο των $d\vec{l}$, \vec{r} θα εφάπτεται στην παραπάνω περιφέρεια κύκλου.

Σύμφωνα με τους συλλογισμούς αυτούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού με άπειρο μήκος, είναι ομόκεντρες περιφέρειες κύκλου που έχουν επίπεδα κάθετα προς τον αγωγό και κέντρα επί του αγωγού. Η φορά των δυναμικών γραμμών βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου ή τον κανόνα του **δεξιού χεριού**: Όταν κρατάμε τον αγωγό με το δεξί χέρι, έτσι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει τη φορά του ρεύματος, τότε τα άλλα δάκτυλα δείχνουν τη φορά των δυναμικών γραμμών [σχ. 12.4a(γ)].

Εφόσον τα στοιχειώδη ανύσματα της μαγνητικής επαγωγής $d\vec{B}$, στο σημείο M, εξαιτίας των στοιχειωδών ρευματοφόρων τμημάτων $d\vec{l}$ του αγωγού, είναι συγγραμμικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή στο σημείο M, ολοκληρώνοντας κατάλληλα τη σχέση (12.6). Πριν όμως προχωρήσουμε στην



Σχ. 12.4α.

Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού. α) Δυναμικές γραμμές. β) Τομή κατά κατακόρυφο επίπεδο. γ) Η φορά των δυναμικών γραμμών βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

ολοκλήρωση, ας παρατηρήσουμε με τη βοήθεια του σχήματος 12.4α(β), ότι ισχύει:

$$\varepsilon\phi(d\phi) = \frac{(AB)}{r} = \frac{d\vec{l} \cdot \eta\mu\phi}{r}$$

Επειδή η γωνία $d\varphi$ είναι πάρα πολύ μικρή (απειροστή), ισχύει: $r d\varphi = d\varphi$

$$\text{οπότε:} \quad dl \cdot \eta\mu\varphi = r \cdot d\varphi \quad (12.7)$$

Έτσι, εξαιτίας της (12.7) ή (12.6) γίνεται:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} r d\varphi = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\varphi \quad (12.8)$$

$$\text{Εξάλλου ισχύει:} \quad \eta\mu\varphi = \frac{R}{r}$$

$$\text{οπότε η (12.8) γίνεται:} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} I \eta\mu\varphi d\varphi \quad (12.9)$$

Ολοκληρώνουμε τώρα την (12.9) ως προς τη γωνία φ , η οποία όπως φαίνεται και στο σχήμα 12.4α(β) παίρνει τιμές από $\varphi = 0$ έως $\varphi = \pi$ και λαμβάνουμε:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} I \int_0^\pi \eta\mu\varphi d\varphi = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (12.10)$$

Συνεπώς η σχέση (12.10) δίνει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής σε σημεία M που απέχουν απόσταση R από τον αγωγό.

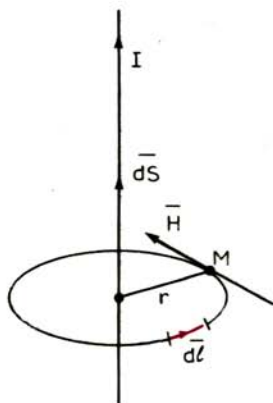
β) Με το θεώρημα του Ampère.

Από την ανάλυση που ήδη έχει προηγηθεί, ή με απλούς συλλογισμούς για τη συμμετρία του πεδίου, καταλήγουμε ως προς τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής ή του συγγραμμικού του διανύσματος \vec{H} , που εφάπτεται σε περιφέρειες κύκλου με κέντρο επί του αγωγού, που κείνται σε επίπεδο κάθετο προς τον αγωγό. Ας θεωρήσουμε την περιφέρεια του κύκλου αυτού ως κλειστή γραμμή με θετική φορά διαγραφής αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού (σχ. 12.4β). Σ' αυτήν περατούται προσανατολισμένη επιφάνεια με διάνυσμα $d\vec{S}$, παράλληλο προς τον αγωγό κατά τη φορά του ρεύματος. Το διάρρευμα διά της επιφάνειας αυτής είναι I , οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Ampère, θα έχουμε:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (12.11)$$

Αλλά στην υπόψη κλειστή γραμμή τα ανύσματα \vec{H} και $d\vec{l}$ είναι συνεχώς συγγραμμικά. Επί πλέον το μέτρο του διανύσματος \vec{B} , και κατ' ακολουθίαν του \vec{H} , είναι σταθερό σε όλα τα σημεία M της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r που εξετάζουμε. Άρα, σύμφωνα με τους συλλογισμούς αυτούς μπορούμε να αναπτύξουμε το ολοκλήρωμα της σχέσεως (12.11), ως εξής:

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_l H \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = H \int_l dl = H \cdot 2\pi r$$



Σχ. 12.46.

ή

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (12.12)$$

οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό της μαγνητικής διεγέρσεως, παίρνομε:

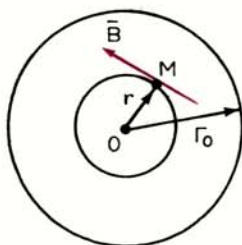
$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (12.13)$$

Όπως φαίνεται, η σχέση (12.13) που δίνει το μέτρο του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής σε σημεία M του χώρου που απέχουν απόσταση r από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό με άπειρο μήκος, συμπίπτει πλήρως με τη σχέση (12.10) που προέκυψε με εφαρμογή του νόμου των Biot και Savart. Βέβαια, η λύση που δόθηκε σύμφωνα με το θεώρημα του Ampère, ήταν, στην περίπτωση αυτή, αρκετά απλούστερη. Επί πλέον, το θεώρημα του Ampère επιτρέπει και τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής μέσα στο ρευματοφόρο αγωγό, όπου και εκεί αναπτύσσεται μαγνητικό πεδίο.

Ας υποθέσουμε ότι ο αγωγός έχει ακτίνα r_0 , και ότι η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος (J) είναι σταθερή σε όλα τα σημεία M της διατομής του. Με συλλογισμούς ανάλογους με εκείνους που κάναμε για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού, καταλήγουμε στο ότι και στο εσωτερικό του αγωγού το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής εφάπτεται σε περιφέρειες κύκλου, με κέντρο το κέντρο της διατομής του αγωγού (σχ. 12.4γ), στα σημεία των οποίων έχει σταθερό μέτρο. Θεωρούμε μια τέτοια περιφέρεια κύκλου, ακτίνας r, ως την κλειστή γραμμή στην οποία **περατούται** προσανατολισμένη επιφάνεια με διάνυσμα dS παράλληλο προς τον αγωγό, κατά τη φορά του ρεύματος. Εφόσον υποθέσουμε ότι η πυκνότητα (J) του ηλεκτρικού ρεύματος είναι σταθερή σε όλα τα σημεία της διατομής, το διάρρευμα από την επιφάνεια κύκλου ακτίνας r, θα είναι: $J \cdot 4\pi r^2$.

Εξάλλου, η ένταση ρεύματος I, του αγωγού αυτού ακτίνας r_0 , θα είναι: $I = J \cdot 4\pi r_0^2$.

Γράφομε πλέον την εξίσωση που συνεπάγεται η εφαρμογή του θεωρήματος του Ampère στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας r:



Σχ. 12.4γ.

Υπολογισμός του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής σε εσωτερικό ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγού με άπειρο μήκος.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = J \cdot 4\pi r^2 \quad \text{ή} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{4\pi r_0^2} 4\pi r^2 \quad \text{ή} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{r^2}{r_0^2} I$$

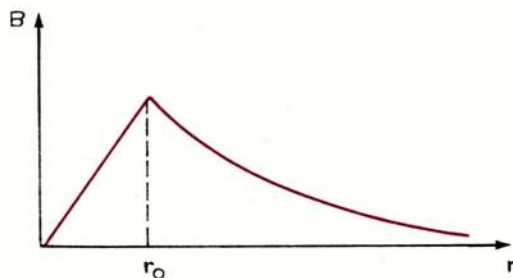
Αναπτύσσοντας σύμφωνα με όσα ήδη έχουμε αναφέρει, το πιο πάνω ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$H \cdot 2\pi r = \frac{r^2}{r_0^2} I \quad \text{ή} \quad H = \frac{I r}{2\pi r_0^2} \quad (12.14)$$

οπότε το μέτρο του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής μέσα στον αγωγό ακτίνας r_0 , σε αποστάσεις r από τον άξονά του, προκύπτει:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r_0^2} I r \quad (12.15)$$

Η καμπύλη του σχήματος 12.4δ σχεδιάστηκε με βάση τις εξισώσεις (12.13) και (12.15) και παρέχει τη μεταβολή της \vec{B} μέσα και έξω από ευθύγραμμο αγωγό σε συνάρτηση με την απόσταση από τον άξονά του.



Σχ. 12.4δ.

Γραφική απεικόνιση του μέτρου του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό ($r < r_0$) και στο εξωτερικό ($r > r_0$) ρευματοφόρου αγωγού άπειρου μήκους.

12.4.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.

Θεωρούμε ένα κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό, δηλαδή μια σπείρα που έχει ακτίνα r και διαρρέεται από ρεύμα I (σχ. 12.4ε).

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχήν τη μαγνητική επαγωγή στο κέντρο K της σπείρας. Χωρίζουμε, για το λόγο αυτό, τον αγωγό σε άπειρου πλήθους στοιχειώδη ανύσματα $d\vec{l}$ (σχ. 12.4ε) κατά τη φορά της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος. Το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής στο σημείο K , εξαιτίας ενός οποιουδήποτε ρευματοφόρου στοιχείου $d\vec{l}$, προκύπτει, σύμφωνα με το νόμο των Biot και Savart, κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα ανύσματα $d\vec{l}$ και \vec{r} , και με τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Το μέτρο του διανύματος $d\vec{B}$ θα είναι, σύμφωνα με την εξίσωση (12.1):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\ell \sin\phi}{r^2}$$

όπου ϕ η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων $d\vec{l}$ και \vec{r} , η οποία στην περίπτωση αυτή είναι ίση με 90° ($\sin\phi = 1$), οπότε:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\ell}{r^2} \quad (12.16)$$

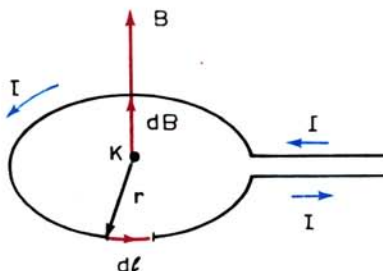
Εφόσον τα στοιχειώδη ανύσματα της μαγνητικής επαγωγής $d\vec{B}$ στο σημείο K , εξαιτίας των στοιχειωδών ρευματοφόρων τμημάτων $d\vec{l}$ του αγωγού, είναι συγγραμμικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή στο σημείο K , ολοκληρώνοντας στην περιφέρεια του κύκλου, τη σχέση (12.16):

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \int d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

δηλαδή:

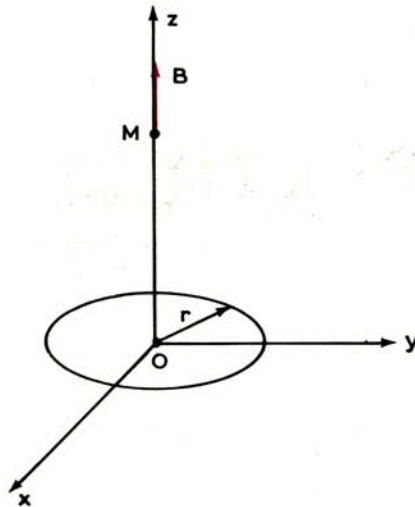
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (12.17)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς και πορεία, μπορούμε να υπολογίσουμε το



Σχ. 12.4ε.

Μαγνητική επαγωγή στο κέντρο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.



Σχ. 12.4στ.

Διάγραμμα της μαγνητικής επαγωγής στον άξονα σπείρας.

διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής B σε οποιοδήποτε σημείο M του άξονα της σπείρας, το οποίο τελικά προκύπτει με διεύθυνση και φορά κατά τον άξονα z της σπείρας (σχ. 12.4στ), έχει δε μέτρο:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12.18)$$

όπου z η απόσταση του σημείου M από το κέντρο της σπείρας.

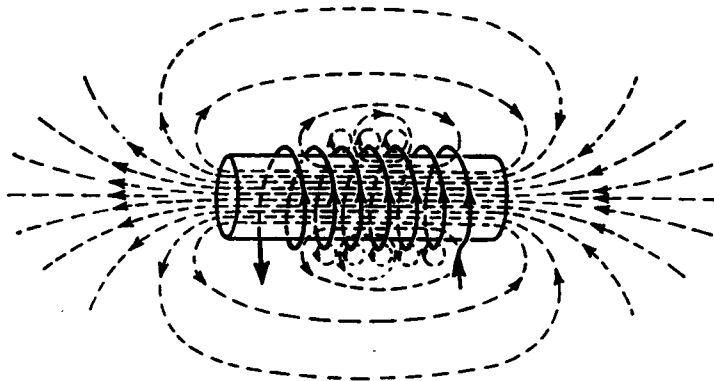
Επίσης, μπορεί να υπολογισθεί το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής και σε άλλα σημεία, εκτός του άξονα της σπείρας, στα οποία βέβαια δεν προκύπτει με διεύθυνση κατά τον άξονα z .

12.4.3 Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς πηνίου με άπειρο μήκος.

Το **σωληνοειδές πηνίο** κατασκευάζεται, αν τυλίξουμε ένα μονωμένο σύρμα γύρω από ένα κοίλο κύλινδρο από μονωτικό υλικό, έτσι ώστε τα επίπεδα των σπειρών να είναι κάθετα προς τον άξονα του κυλίνδρου (σχ. 12.4ζ).

Θεωρώντας ότι το σωληνοειδές συγκροτείται από πλήθος ρευματοφόρων σπειρών καταλήγομε, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο 12.4.2, ότι το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής στα σημεία του άξονα του σωληνοειδούς είναι συγγραμμικό προς τον άξονα και με φορά που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία ή τον κανόνα της **δεξιάς παλάμης**: Αν κρατήσουμε το σωληνοειδές έτσι, ώστε τα 4 δάκτυλα της δεξιάς παλάμης να είναι κατά τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τις σπείρες, τότε ο αντίχειρας δείχνει τη φορά των δυναμικών γραμμών (που είναι και η φορά της \vec{B}).

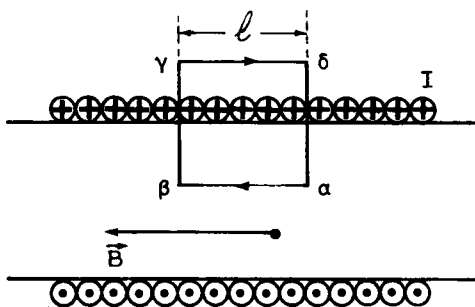
Έτσι, η δυναμική γραμμή κατά τον άξονα του σωληνοειδούς είναι μια γραμμή



Σχ. 12.4ζ.
· Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς.

που εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$ όπου και θεωρείται ότι κλείνει. Οι άλλες δυναμικές γραμμές του σωληνοειδούς έχουν καμπυλότητα που μεγαλώνει στα άκρα του σωληνοειδούς και κλείνουν στον περιβάλλοντα το σωληνοειδές χώρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 12.4ζ. Πάντως, το μαγνητικό πεδίο έξω από το σωληνοειδές είναι πάρα πολύ πιο ασθενές, από ό,τι στο εσωτερικό του.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το σωληνοειδές έχει άπειρο μήκος. Στην περίπτωση αυτή οι δυναμικές γραμμές του αναπτυσσόμενου μαγνητικού πεδίου θα κλείνουν στο άπειρο, και συνεπώς θα είναι παράλληλες σε όλο το μήκος του σωληνοειδούς. Εξάλλου, στο εξωτερικό του σωληνοειδούς στην περίπτωση αυτή δεν θα υπάρχει μαγνητικό πεδίο ($B = 0$). Θα υπολογίσουμε, μετά από αυτά, το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό σωληνοειδούς με άπειρο μήκος, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Amperè. Θεωρούμε, για το σκοπό αυτό, ως προσανατολισμένη επιφάνεια, την ορθογωνικής διατομής σκιασμένη επιφάνεια του σχήματος 12.4η, που περατώνεται στην κλειστή γραμμή περίμετρο του ορθογώνιου $\alpha\beta\gamma\delta$. Αν υποθέσουμε ότι το ανά μονάδα μήκος του σωληνοειδούς πλήθος σπειρών είναι n , τότε το διάρρευμα που θα περνά από την πιο πάνω επιφάνεια θα είναι: $n \cdot (\alpha\beta) \cdot I = n \cdot l \cdot I$. l μια και κάθε σπείρα διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I .



Σχ. 12.4η.
Υπολογισμός μαγνητικής επαγωγής σε σωληνοειδές με άπειρο μήκος.

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα του Ampère, θα έχουμε:

$$\oint_{\alpha\beta\gamma\delta} \vec{H} dl = n \cdot I \cdot l$$

ή

$$\oint_{\alpha\beta\gamma\delta} \vec{B} dl = \mu_0 n \cdot I \cdot l \quad (12.19)$$

Αναπτύσσουμε το πιο πάνω ολοκλήρωμα στην κλειστή διαδρομή αβγδ, λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα \vec{B} έχει διεύθυνση κατά τον άξονα του σωληνοειδούς:

$$\oint \vec{B} dl = \oint B dl \cos \alpha = \int_a^b B dl \cos 0^\circ + \int_b^c B dl \cos 90^\circ + \int_c^d B dl \cos 180^\circ + \int_d^a B dl \cos 90^\circ = \int_a^b B dl = B \cdot l$$

Έτσι από την εξίσωση (12.19) παίρνουμε τελικά:

$$B = \mu_0 n I \quad (12.20)$$

Η σχέση (12.20) δείχνει ότι η μαγνητική επαγωγή δεν εξαρτάται από τη διάμετρο του πηνίου και ότι είναι σταθερή σ' όλο το εσωτερικό του, δηλαδή καταλήγουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό σωληνοειδούς πηνίου με άπειρο μήκος είναι ομογενές.

Εάν το σωληνοειδές πηνίο έχει πεπερασμένο μήκος (l), τότε, ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του είναι περισσότερο πολύπλοκος, γιατί η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται και κατά τον άξονά του αλλά και στα διάφορα σημεία της διατομής του. Έτσι, θα αρκестθούμε να παραθέσουμε μόνο τα συμπεράσματα της σχετικής μελέτης, σύμφωνα με τα οποία:

Αν το σωληνοειδές πηνίο έχει:

- Ακτίνα R ,
- Μήκος l ,
- Σπείρες (συνολικά N), τότε, η μαγνητική επαγωγή στο **κέντρο** του, είναι:

$$B = \frac{\mu_0 N \cdot I}{\sqrt{4R^2 + l^2}} \quad (12.21)$$

Αν υποθεθεί ότι το μήκος l του πηνίου είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του ($l \gg R$), τότε από τη σχέση (12.21), παίρνουμε την:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad (12.22)$$

που συμπίπτει με τη σχέση (12.20).

Η σχέση (12.22) ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια, εάν το μήκος του σωληνοειδούς είναι δεκαπλάσιο της ακτίνας του.

Εξάλλου, η μαγνητική επαγωγή στα άκρα του άξονα του σωληνοειδούς πηνίου (σημεία P του σχήματος 12.4ζ), βρίσκεται:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2 + l^2}} \quad (12.23)$$

Αν και πάλι υποθέσουμε ότι $l \gg R$, τότε παίρνουμε:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2l} \quad (12.24)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (12.22) και (12.24) καταλήγουμε στο ότι η μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του πηνίου είναι περίπου διπλάσια από ό,τι στα άκρα του.

Σε όλες τις πιο πάνω σχέσεις υπεισέρχεται το γινόμενο NI του ρεύματος, που διαρρέει το πηνίο, επί τον αριθμό των σπειρών του. Το γινόμενο αυτό ονομάζεται **μαγνητεγερτική δύναμη (ΜΕΔ)** ή **αμπεροστροφές** ή **αμπεροελίγματα**.

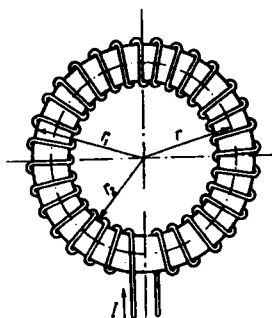
12.4.4 Μαγνητικό πεδίο δακτυλιοειδούς πηνίου.

Το σχήμα 12.4θ δείχνει ένα **δακτυλιοειδές** πηνίο (ονομάζεται και **τοροειδές** πηνίο) που έχει εξωτερική ακτίνα r_1 , εσωτερική ακτίνα r_2 , αριθμό σπειρών N και διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I .

Είναι φανερό ότι οι κλειστές μαγνητικές δυναμικές γραμμές του δακτυλιοειδούς πηνίου είναι περιφέρειες κύκλου, ομόκεντρες προς τις περιφέρειες του πηνίου. Στο εξωτερικό του πηνίου δεν αναπτύσσεται μαγνητικό πεδίο. Η μαγνητική επαγωγή σε μια οποιαδήποτε δυναμική γραμμή, ακτίνας r , υπολογίζεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Αμπέρ, κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως έγινε για το σωληνοειδές με άπειρο μήκος. Επιλέγουμε λοιπόν ως προσανατολισμένη επιφάνεια κυκλική με κέντρο το κέντρο του πηνίου και ακτίνα r . Από την επιφάνεια αυτή διέρχεται διάρρευμα: NI .

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Αμπέρ, στην περιφέρεια κύκλου r , θα έχουμε:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \quad \text{ή} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \sin 0^\circ = \mu_0 NI \rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$



Σχ. 12.4θ.
Δακτυλιοειδές ή τοροειδές πηνίο.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (12.25)$$

Η σχέση (12.25) αν εφαρμοσθεί για τη μέση περιφέρεια του πηνίου, η οποία

έχει μήκος: $l = 2\pi r_\mu$ όπου $r_\mu = \frac{r_1 + r_2}{2}$

γίνεται:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\pi (r_1 + r_2)} \quad (12.26)$$

Αν η ακτίνα r_μ μεγαλώσει αρκετά σε σχέση με την ακτίνα της διατομής του πηνίου, τότε η (12.25) παραμένει πρακτικά σταθερή, για τις διάφορες ακτίνες του σωληνοειδούς, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές, με μαγνητική επαγωγή:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (12.27)$$

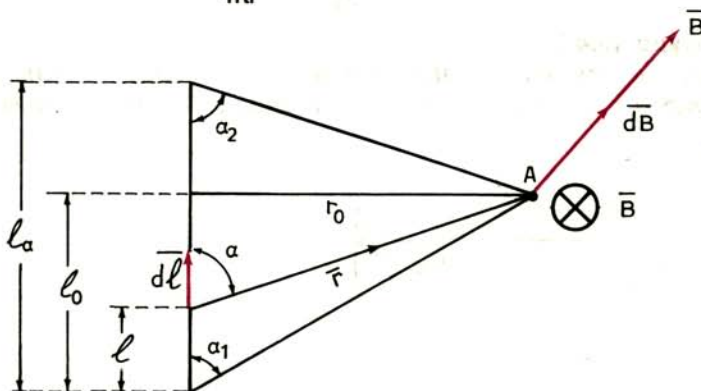
όπου l το μήκος της μέσης περιφέρειας του πηνίου.

Παράδειγμα 12.4.1.

Ευθύγραμμος αγωγός μικρού μήκους l_a διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I . Να υπολογισθεί η μαγνητική επαγωγή \vec{s} ένα σημείο A του πεδίου που απέχει από τον αγωγό απόσταση r_0 (σχ. 12.4i).

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες μήκος του αγωγού $d\vec{l}$. Η στοιχειώδης μαγνητική επαγωγή $d\vec{B}$ στο σημείο A , εξαιτίας του ρευματοφόρου αυτού μήκους σύμφωνα με το νόμο των Biot-Savart, έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των $d\vec{l}$ και \vec{r} , (στην περίπτωση μας το επίπεδο του σχεδίου), φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, και μέτρο:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \eta\mu\alpha \quad (1)$$



Σχ. 12.4i.

Υπολογισμός της B που οφείλεται σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους l_a .

Είναι φανερό ότι κάθε στοιχειώδες ρευματοφόρο μήκος $d\vec{l}$ του αγωγού, θα δίνει στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{B}$ στο σημείο A με την ίδια διεύθυνση και φορά. Άρα, σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής στο σημείο A, ολοκληρώνοντας κατάλληλα τη σχέση (1), δηλαδή:

$$B = \int_{l=0}^{l=l_0} dB = \int_{l=0}^{l=l_0} \frac{\mu\mu_0 l dl}{4\pi r^2} \eta\mu\alpha$$

$$\text{Είναι } l = l_0 - r_0 \text{ σφα} \rightarrow dl = -\frac{r_0}{\eta\mu^2\alpha} d\alpha \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } \frac{r_0}{r} = \eta\mu\alpha \quad (3) \quad \text{και } \frac{1}{r^2} = \frac{\eta\mu^2\alpha}{r_0^2} \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 l}{4\pi r_0} \eta\mu\alpha d\alpha \quad \text{Άρα:}$$

$$B = \int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=180-\alpha_2} dB = \int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=180-\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 l}{4\pi r_0} \eta\mu\alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 l}{4\pi} [-\sigma\upsilon\nu\alpha]_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=180-\alpha_2}$$

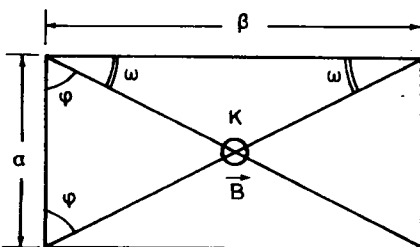
$$B = \frac{\mu\mu_0 l}{4\pi r_0} (\sigma\upsilon\nu\alpha_1 + \sigma\upsilon\nu\alpha_2) \quad (5)$$

Όταν η κάθετη r_0 διέρχεται από το μέσο του αγωγού τότε $\sigma\upsilon\nu\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha$ και η σχέση (5) γίνεται:

$$B = \frac{\mu\mu_0 l}{2\pi r_0} \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (6)$$

Παράδειγμα 12.4.2.

Ορθογώνιο πλαίσιο με πλευρές a και b διαρρέεται από ρεύμα I . Να υπολογισθεί η μαγνητική επαγωγή στο σημείο τομής των διαγωνίων του (σχ. 12.4ια).



Σχ. 12.4ια.

Η μαγνητική επαγωγή B_1 στο σημείο K, που οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει την πλευρά α, σύμφωνα με τη σχέση (6) του παραδείγματος 12.4.1 είναι:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi \frac{\theta}{2}} \text{ συν}\phi = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi\theta} \text{ συν}\phi$$

Η μαγνητική επαγωγή B_2 που οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει την πλευρά β, είναι:

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi a} \text{ συν}\omega$$

και τα δυο διανύσματα \vec{B}_1 και \vec{B}_2 είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, άρα η μαγνητική επαγωγή στο σημείο K λόγω και των 4 πλευρών, θα είναι:

$$B = 2(B_1 + B_2) = \frac{2\mu\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{\text{συν}\phi}{\theta} + \frac{\text{συν}\omega}{a} \right) \quad (1)$$

$$\text{Είναι} \quad \text{συν}\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \theta^2}} \quad \xi(2) \quad \text{και} \quad \text{συν}\omega = \frac{\theta}{\sqrt{a^2 + \theta^2}} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$B = \frac{2 \mu\mu_0 I}{\pi a\theta} \sqrt{a^2 + \theta^2}$$

Το άνυσμα \vec{B} είναι κάθετο στο επίπεδο του σχεδίου και κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς το σχέδιο.

Παράδειγμα 12.4.3.

Ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $I = 10 \text{ A}$. Σε απόσταση $r = 5 \text{ cm}$ από τον αγωγό εκτοξεύεται, παράλληλα προς τον αγωγό, ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $v = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Να υπολογισθεί η δύναμη που θα εξασκηθεί στο ηλεκτρόνιο κατά τη στιγμή της εκτοξεύσεως όταν:

α) Η \vec{u} είναι ομόρροπη με το ρεύμα I .

β) Η \vec{u} είναι αντίρροπη του I .

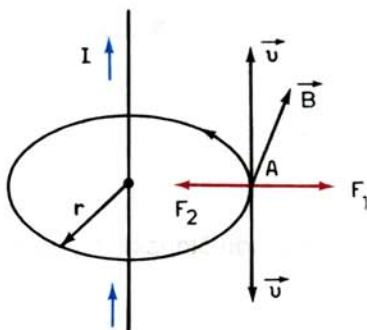
Δίνονται: $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ και $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s/Am}$ ($\mu = 1$)

α) Η μαγνητική επαγωγή B στο σημείο A που απέχει απόσταση από τον αγωγό (σχ. 12.4ιβ) είναι:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (1)$$

Επομένως στο ηλεκτρόνιο που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο εντάσεως \vec{B} και κινείται με ταχύτητα \vec{u} ($\vec{u} \perp \vec{B}$) θα εξασκηθεί δύναμη Laplace ίση με:

$$F_1 = Beu \quad (2)$$



Σχ. 12.416.
Σχήμα παραδείγματος 12.4.3.

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $F_1 = \mu_0 \epsilon \nu \frac{I}{2\pi r} \rightarrow$

$$F_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^6 \frac{10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

6) Στην περίπτωση αυτή η δύναμη \vec{F}_2 θα είναι αντίρροπη της \vec{F}_1 , και θα έχει μέτρο $F_2 = F_1 = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ N}$.

12.5 Δυνάμεις μεταξύ παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών.

Θεωρούμε δυο άπειρου μήκους παράλληλους αγωγούς A και B που βρίσκονται σε απόσταση r και διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα I_1 και I_2 . Κάθε αγωγός δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο άλλος αγωγός. Επομένως σε κάθε αγωγό θα εξασκείται δύναμη Laplace.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 12.4.1, η μαγνητική επαγωγή είναι διάνυσμα κάθετο στους δυο παράλληλους αγωγούς και έχει φορά που προκύπτει σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (σχ. 12.5). Έτσι, αν ο αγωγός B βρίσκεται σε θέση όπου η μαγνητική επαγωγή εξαιτίας του αγωγού A είναι B_1 , θα δέχεται δύναμη Laplace F_1 κάθετη στο επίπεδο των B_1 , και αγωγού με φορά προς τον αγωγό A.

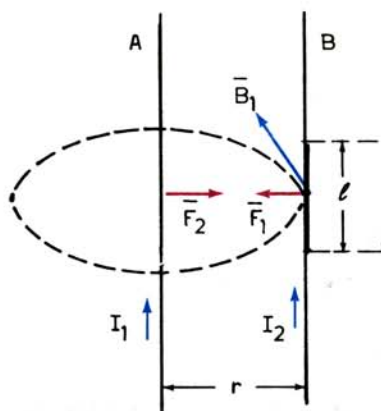
Η μαγνητική επαγωγή B_1 που δημιουργεί ο αγωγός A σε απόσταση r , θα είναι, σύμφωνα με τη σχέση (12.10):

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \quad (12.28)$$

Επειδή οι αγωγοί είναι παράλληλοι και με άπειρο μήκος, σε κάθε σημείο του αγωγού B θα επικρατεί η ίδια μαγνητική επαγωγή B_1 εξαιτίας του αγωγού A και αντίστροφα. Η δύναμη Laplace που δέχεται το τμήμα μήκους l του αγωγού B θα είναι:

$$F_1 = B_1 I_2 l \eta\mu 90^\circ \quad (12.29)$$

Από τις (12.28) και (12.29) προκύπτει:



Σχ. 12.5.

Δυνάμεις μεταξύ παραλλήλων
ρευματοφόρων αγωγών.

$$F_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r} \quad (12.30)$$

Ο ίδιος τύπος προκύπτει και για τη δύναμη F_2 που εξασκείται στον αγωγό Α ($F_1 = F_2$). Η φορά της \vec{F}_2 είναι αντίρροπη από τη φορά της \vec{F}_1 .

Άρα δύο παράλληλοι αγωγοί που διαρρέονται από **ομόρροπα** ρεύματα **έλκονται**. Αν οι αγωγοί διαρρέονται από **αντίρροπα** ρεύματα **απωθούνται**. Η δύναμη F που εξασκείται μεταξύ δυο παραλλήλων αγωγών που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, χρησιμεύει για τον προσδιορισμό της μονάδας της εντάσεως του ρεύματος: Θεωρούμε δυο αγωγούς με άπειρο μήκος που βρίσκονται στον αέρα ($\mu = 1$) σε απόσταση $r = 1$ m και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I . Αν σε τμήμα κάθε αγωγού μήκους $l = 1$ m εξασκείται δύναμη $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N, τότε η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε αγωγό είναι 1 Ampère.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ
Η ΥΛΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

13.1 Εισαγωγή – Μαγνητική διαπερατότητα.

Θεωρούμε ένα σωληνοειδές πηνίο με άπειρο μήκος, που διαρέεται από ρεύμα εντάσεως I και έχει n σπείρες ανά μονάδα μήκους. Όταν στο εσωτερικό του πηνίου υπάρχει αέρας ($\mu = 1$), τότε η μαγνητική επαγωγή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B_0 = \mu_0 n I \quad (13.1)$$

Αν γεμίσομε το χώρο στο εσωτερικό του πηνίου μ' ένα υλικό και τοποθετήσομε π.χ. ένα σιδερένιο πυρήνα, παρατηρούμε ότι μολονότι το ρεύμα, με το οποίο τροφοδοτούμε το πηνίο, παραμένει σταθερό, η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται και γίνεται:

$$B = \mu \mu_0 n I \quad (13.2)$$

Από τις (13.1) και (13.2) προκύπτει:

$$\mu = \frac{B}{B_0} \quad (13.3)$$

Η σχετική μαγνητική διαπερατότητα ενός υλικού, που ορίσαμε στην παράγραφο 11.8, προκύπτει ίση με το πηλίκον της μαγνητικής επαγωγής B που δημιουργείται στο υλικό, όταν αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό σωληνοειδούς, προς τη μαγνητική επαγωγή B_0 που δημιουργείται στο ίδιο σωληνοειδές, όταν υπάρχει κενό.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μαγνητικό πεδίο μέσα σε σωληνοειδές με άπειρο μήκος είναι ομογενές, τότε από τη σχέση (13.3) σε συνδυασμό με την (11.20) προκύπτει:

$$\mu = \frac{B \cdot S}{B_0 \cdot S} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\text{Ροή με πυρήνα}}{\text{Ροή χωρίς πυρήνα (κενό)}} \quad (13.4)$$

Η σχέση (13.4) αποτελεί ένα ακόμη ορισμό της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας ενός υλικού. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι καθαρός αριθμός, που παίρνει διάφορες τιμές, μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη μονάδα για τα διάφορα υλικά. Μπορούμε τώρα να συμπληρώσομε ότι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι καθαρός αριθμός,

που χαρακτηρίζει τις «μαγνητικές ιδιότητες» των διαφόρων υλικών, τα οποία, από τη σκοπιά αυτή, διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

α) **Διαμαγνητικά υλικά:** Στα υλικά αυτά η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι σταθερή και μικρότερη από τη μονάδα ($\mu < 1$).

Εάν, λοιπόν, υποθεθεί ότι ένα τέτοιο διαμαγνητικό υλικό εισαχθεί στον πυρήνα σωληνοειδούς, τότε η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του σωληνοειδούς θα μειωθεί. Τυπικά υλικά της κατηγορίας αυτής είναι ο χαλκός ($\mu = 0,999991$) και το νερό ($\mu = 0,999991$).

β) **Παραμαγνητικά υλικά:** Στα υλικά αυτά η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι σταθερή και μεγαλύτερη από τη μονάδα ($\mu > 1$).

Εάν, λοιπόν, υποθεθεί ότι ένα τέτοιο παραμαγνητικό υλικό εισαχθεί στον πυρήνα σωληνοειδούς, τότε η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του σωληνοειδούς θα αυξηθεί. Τυπικό υλικό της κατηγορίας αυτής είναι το αργίλιο ($\mu = 1,00002$).

γ) **Σιδηρομαγνητικά υλικά:** Στα υλικά αυτά η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από τη μονάδα ($\mu \gg 1$), αλλά δεν είναι πλέον σταθερή ή τιμή της εξαρτάται από το μέτρο του διανύσματος \vec{H} και από την προϊστορία του υλικού. Στην κατηγορία αυτή, της οποίας τυπικό υλικό είναι ο σίδηρος ($\mu > 2000$), ανήκουν όλα τα υλικά με τα οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε μαγνήτες.

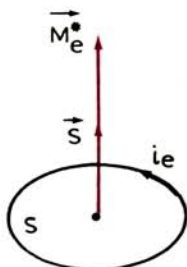
13.2 Μαγνητική ροπή σε υλικά – Επιφανειακό ρεύμα.

Σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει συμπεραίνουμε ότι σε κάθε υλικό που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο εμφανίζεται ένα πρόσθετο μαγνητικό πεδίο. Το πεδίο αυτό οφείλεται στην περιστροφική κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες των ατόμων. Η κίνηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στοιχειώδες ρεύμα i_e μέσα στο άτομο, του οποίου αποτέλεσμα είναι η ανάπτυξη μαγνητικής ροπής (σχέση 11.11).

$$\vec{M}_e^* = i_e \cdot \vec{S} \quad (13.5)$$

όπου S το εμβαδόν του βρόχου, το οποίο θεωρείται ότι διαγράφει κατά την κίνησή του ένα ηλεκτρόνιο (σχ. 13.2α).

Έτσι, σε οποιοδήποτε υλικό, εκτός από τους μόνιμους μαγνήτες, εφόσον δεν επιβάλλεται εξωτερικά μαγνητικό πεδίο, τα στοιχειώδη αυτά ρεύματα των ηλεκτρονίων έχουν τυχαίους προσανατολισμούς στο χώρο και συνεπώς τα



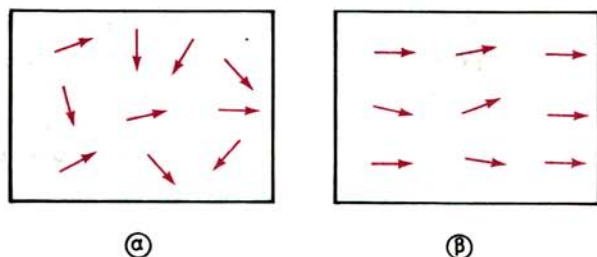
Σχ. 13.2α.
Μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου.

διανύσματα των μαγνητικών ροπών έχουν όλες τις πιθανές διευθύνσεις στο χώρο [σχ. 13.26(α)]. Εάν, λοιπόν, θεωρήσουμε το ανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών των ηλεκτρονίων σ' έναν ορισμένο όγκο του υλικού, αυτό βρίσκεται ίσο με το μηδέν, δοθέντος ότι τα τυχαία προσανατολισμένα διανύσματα των μαγνητικών ροπών αλληλοαναιρούνται.

Αν το υλικό τοποθετηθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο [σχ. 13.26(β)], π.χ. μέσα σε σωληνοειδές που διαρρέεται από ρεύμα, προκαλείται μερικός προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών. Στην περίπτωση αυτή το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών μέσα σε ορισμένο όγκο του υλικού βρίσκεται διάφορο του μηδενός.

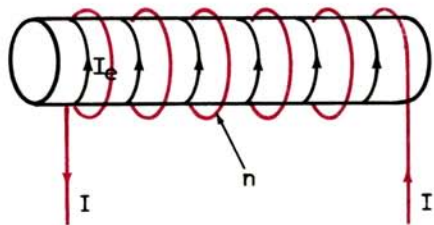
Έτσι, λοιπόν, βλέπουμε ότι μετά την επιβολή του μαγνητικού πεδίου στο σωληνοειδές, μέσα στο υλικό αναπτύσσεται μαγνητική ροπή, πράγμα που σημαίνει ότι, τουλάχιστον προσωρινά, το υλικό αποκτά ιδιότητες μαγνήτη. Αποδεικνύεται, θεωρητικά, ότι τα στοιχειώδη ρεύματα i_e των ηλεκτρονίων του υλικού του πυρήνα του σωληνοειδούς, δίνουν τελικά συνιστάμενο ρεύμα I_e , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι διαρρέει την εξωτερική επιφάνεια του πυρήνα (σχ. 13.2γ). Για το λόγο αυτό τα ρεύματα που οφείλονται στην κίνηση των ηλεκτρονίων των ατόμων του υλικού του πυρήνα, λόγω της επιδράσεως του μαγνητικού πεδίου ονομάζονται **επιφανειακά ρεύματα**.

Μπορούμε, επί πλέον, να θεωρήσουμε ότι το επιφανειακό ρεύμα ρέει διαγράφοντας n^* σπείρες ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς, σε αντιστοι-



Σχ. 13.26.

Διανύσματα μαγνητικών ροπών (\vec{M}_e) ηλεκτρονίων υλικού. α) Έξω από μαγνητικό πεδίο ($\vec{B} = 0$). β) Μέσα σε μαγνητικό πεδίο ($B = 0$).



Σχ. 13.2γ.

Ρεύμα σωληνοειδούς (I) και επιφανειακό ρεύμα (I_e).

χία με το ρεύμα I , που ρέει στις n σπείρες ανά μονάδα μήκους του πηνίου του σωληνοειδούς.

Μια εποπτική δικαιολογία της δημιουργίας επιφανειακού ρεύματος, σε υλικό που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια του σχήματος 13.25. Στο υπόψη σχήμα έχουν σχεδιασθεί οι κυκλικές τροχιές των ηλεκτρονίων – ως τετράγωνοι – σε παράλληλα επίπεδα. Παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο του εσωτερικού του υλικού, το ρεύμα της μιας τροχιάς αναιρείται από το ρεύμα της γειτονικής της, έτσι ώστε συνολικά ρεύμα να υπάρχει μόνο στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού.

Εξαιτίας του επιφανειακού ρεύματος αναπτύσσεται στο υλικό του πυρήνα ένα ακόμα μαγνητικό πεδίο, με φορά που εξαρτάται από το είδος του υλικού. Αν το υλικό είναι **σιδηρομαγνητικό**, τα δυο μαγνητικά πεδία, δηλαδή:

- Το **εξωτερικό** που οφείλεται στη διόδο ηλεκτρικού ρεύματος I από τις σπείρες του σωληνοειδούς, και
- το **εσωτερικό** που οφείλεται στο επιφανειακό ρεύμα I_e , είναι ομόροπα, και εφόσον το σωληνοειδές είναι άπειρου μήκους, δίνουν συνισταμένο μαγνητικό πεδίο:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot n + \mu_0 I_e n^* \quad (13.6)$$

όπου: n οι σπείρες του πηνίου ανά μονάδα μήκους (m^{-1}) και n^* οι σπείρες, τις οποίες θεωρείται ότι διαγράφει το επιφανειακό ρεύμα ανά μονάδα μήκους του πηνίου (m^{-1}).

Η σχέση (13.6) δικαιολογεί την αύξηση της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό σωληνοειδούς, όταν εισαχθεί στον πυρήνα του σιδηρομαγνητικό υλικό ($\mu \gg 1$). Με ανάλογες σκέψεις δικαιολογείται και η μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής, όταν εισάγεται στον πυρήνα σωληνοειδές υλικό, με άλλες μαγνητικές ιδιότητες.

Ας επανέλθουμε τώρα στο θέμα της συνισταμένης μαγνητικής ροπής \overline{dM}^* , σε ένα στοιχείο όγκου dV ενός υλικού. Αυτή ορίζεται ως το ανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών \overline{M}^* , των ηλεκτρονίων που περιστρέφονται στο υπόψη στοιχείο του υλικού. Εάν το υλικό βρίσκεται μέσα σε **ομογενές** μαγνητικό πεδίο, όπως π.χ. συμβαίνει με τον πυρήνα του σωληνοειδούς άπειρου μήκους,



Σχ. 13.25.

Εποπτική δικαιολογία της δημιουργίας επιφανειακού ρεύματος.

τότε η συνισταμένη μαγνητική ροπή κάθε στοιχείου dV του υλικού είναι διάνυσμα συγγραμμικό του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής. Έτσι, εφόσον η διατομή S του πυρήνα είναι σταθερή, μπορούμε να γράψουμε το μέτρο του διανύσματος της μαγνητικής ροπής, που οφείλεται σε **τμήμα μήκους** l του σωληνοειδούς, ως:

$$M^* = S \cdot I_e \cdot n^* \cdot l \quad (13.7)$$

όπου: M^* η μαγνητική ροπή ($A \cdot m^2$),

S το εμβαδόν της επιφάνειας της διατομής του σωληνοειδούς (m^2),

I_e το επιφανειακό ρεύμα (A),

n^* το πλήθος των σπειρών που θεωρείται ότι διαγράφει το επιφανειακό ρεύμα ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς (m^{-1}) και

l το μήκος τμήματος του σωληνοειδούς (m).

13.3 Μαγνήτιση.

Στηριζόμενοι στις έννοιες και τους ορισμούς των δυο προηγούμενων παραγράφων, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι η μαγνητική κατάσταση ενός υλικού μπορεί να αποδοθεί από ένα ανυσματικό μέγεθος, που θα ονομάσομε **μαγνήτιση**.

Μαγνήτιση υλικού \vec{J} ονομάζεται το πηλίκον της συνισταμένης μαγνητικής ροπής $d\vec{M}^*$ των ατόμων που βρίσκονται σε στοιχειώδη όγκο dV του υλικού, διά του όγκου dV :

$$\vec{J} = \frac{d\vec{M}^*}{dV} \quad (13.8)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η μαγνήτιση έχει διαστάσεις εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος ανά μονάδα μήκους και μονάδα μετρήσεως στο S.I. το $1 A m^{-1}$.

Μέσα σε **ομογενές** μαγνητικό πεδίο η μαγνήτιση \vec{J} είναι ίση με το ανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών των στοιχειωδών ρευμάτων ανά μονάδα όγκου του υλικού, δηλαδή:

$$\vec{J} = \frac{\vec{M}^*}{V} \quad (13.9)$$

Από τις σχέσεις (13.7) και (13.9), που ισχύουν για υλικό που βρίσκεται στον πυρήνα σωληνοειδούς άπειρου μήκους, λαμβάνουμε για **τμήμα μήκους** l του πυρήνα:

$$J = \frac{S \cdot I_e \cdot n^* \cdot l}{S \cdot l} = I_e n^* \quad (13.10)$$

Η πιο πάνω εξίσωση, που δίνει τη μαγνήτιση J μήκους l του πυρήνα, αν συνδυασθεί με την (13.6), παρέχει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στον πυρήνα του σωληνοειδούς:

$$B = \mu_0 I_n + \mu_0 J \quad (13.11)$$

ή $B = B_0 + B'_0$ και ανυσματικά:

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'_0 \quad (13.12)$$

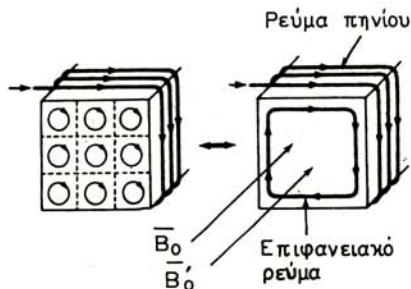
όπου: \bar{B}_0 η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί το ρεύμα που διαρρέει το σωληνοειδές αν ο πυρήνας του είναι κενός ύλης και $\bar{B}'_0 = \mu_0 \bar{J}$ η μαγνητική επαγωγή που δημιουργούν τα ρεύματα της επιφάνειας του υλικού του πυρήνα.

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να προσθέσουμε ότι το άνυσμα \bar{B}'_0 της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργούν τα ρεύματα επιφάνειας στα παραμαγνητικά υλικά είναι ομόρροπο με το άνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \bar{B}_0 , που προκαλεί τη μαγνήτιση του υλικού (σχ. 13.3α).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πλησιάζουμε και αρχίζουμε να εισάγουμε στον κενό από ύλη πυρήνα ενός σωληνοειδούς ένα παραμαγνητικό υλικό. Στο υλικό τότε θα αναπτυχθούν επιφανειακά ρεύματα, ομόρροπα με το ρεύμα που διαρρέει τις σπείρες του πηνίου. Επειδή, όπως γνωρίζουμε, τα ομόρροπα ρεύματα έλκονται, συμπεραίνουμε ότι μόλις πλησιάσουμε ένα παραμαγνητικό υλικό στα άκρα σωληνοειδούς το υλικό έλκεται.

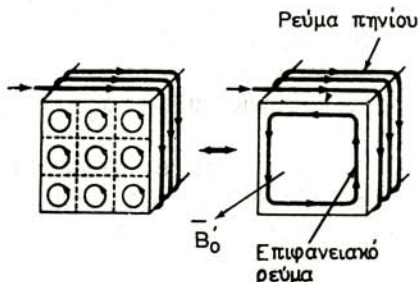
Στα διαμαγνητικά υλικά το άνυσμα \bar{B}'_0 είναι αντίρροπο του ανύσματος \bar{B}_0 (σχ. 13.3β).

Επειδή τα αντίρροπα ρεύματα απωθούνται, συμπεραίνουμε ότι όταν πλησιάζουμε ένα διαμαγνητικό υλικό στα άκρα σωληνοειδούς, το υλικό απωθείται.



Σχ. 13.3α.

Παραμαγνητικό υλικό: Το πεδίο που προέρχεται από τη μαγνήτιση (\bar{B}'_0) είναι ομόρροπο με εκείνο που προκαλεί τη μαγνήτιση (B_0).



Σχ. 13.3β.

Διαμαγνητικό υλικό: Το πεδίο που προέρχεται από τη μαγνήτιση (\bar{B}'_0) είναι αντίρροπο από το πεδίο που προκαλεί τη μαγνήτιση (B_0).

13.4 Μαγνητική διέγερση.

Στην παράγραφο 12.3 του προηγούμενου κεφαλαίου, δώσαμε τον ορισμό του ανύσματος της μαγνητικής διεγέρσεως \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0} \quad (13.13)$$

το οποίο στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε για τη διατύπωση του θεωρήματος του Ampère. Όπως είχαμε τότε υποσχεθεί, θα ασχοληθούμε, στην παράγραφο αυτή, με τη φυσική σημασία του ανύσματος αυτού.

Από τη σχέση (13.11): $B = \mu_0 n I + \mu_0 J$, που αποδείχθηκε για το ομογενές πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς απείρου μήκους, λαμβάνουμε την:

$$\left(\frac{B}{\mu_0} - J \right) = n \cdot I \quad (13.14)$$

Υπενθυμίζουμε όμως ότι το πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς σύμφωνα με τη σχέση (12.20) είναι:

$$B = \mu \cdot \mu_0 n I$$

Άρα η σχέση (13.14), αν ληφθεί υπόψη και η σχέση ορισμού (13.13), γράφεται:

$$\left(\frac{B}{\mu_0} - J \right) = \frac{B}{\mu \mu_0} \quad \text{ή} \quad H = \frac{B}{\mu_0} - J \quad (13.15)$$

Η σχέση (13.15), που μπορεί να διατυπωθεί και ανυσματικά ως:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (13.16)$$

αποδεικνύεται ότι **ισχύει για οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο.**

Σύμφωνα με τη σχέση (13.15) ή την ισοδύναμή της:

$$H = n I \quad (13.17)$$

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στον πυρήνα ενός σωληνοειδούς αναπτύσσεται ένα ακόμη πεδίο, το πεδίο **του ανύσματος \vec{H}** , του οποίου το μέτρο είναι ανεξάρτητο των μαγνητικών ιδιοτήτων του υλικού του πυρήνα και εξαρτάται μόνο από το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο καθώς και το πλήθος των σπειρών του.

Εξάλλου από τη σχέση (13.17) μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι μονάδα μετρήσεως, στο S.I., της μαγνητικής διεγέρσεως είναι το 1 A/m. Μάλιστα, συχνά, χρησιμοποιείται για την υπόψη μονάδα και η ονομασία:

$$1 \frac{\text{αμπεροστροφή}}{\text{μέτρο}}$$

για να τονίζεται ο αδιάστατος όρος των στροφών (N) του πηνίου, ή ο όρος n που εκφράζει τις **στροφές (σπείρες) ανά μονάδα μήκους** του πηνίου.

Στο σημείο αυτό ας υπενθυμίσουμε το σχόλιο που ήδη έχουμε κάνει, σχετικά με την παλαιότερη ονομασία του ανύσματος H: **Ένταση του μαγνητικού πεδίου.**

Η ονομασία αυτή έχει σήμερα εγκαταλειφθεί, γιατί το υπόψη μέγεθος \vec{H} δεν έχει αντιστοιχία προς την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου, αλλά προς τη διηλεκτρική μετατόπιση ή ηλεκτρική διέγερση \vec{D} .

Τέλος, κλείνοντας την παράγραφο αυτή προβαίνουμε σε δυο ακόμη παρατηρήσεις ως προς τα δυο βασικά διανύσματα του μαγνητικού πεδίου:

α) Το μέτρο του **διανύσματος \vec{H}** διαμορφώνεται αποκλειστικά από τις παραμέτρους του ηλεκτρικού πεδίου (I , n), που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο. Για το λόγο αυτό μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα \vec{H} εκφράζει, κατά κάποιο τρόπο, το **αίτιο**.

β) Το μέτρο του **διανύσματος \vec{B}** εξαρτάται τόσο από το μέτρο του διανύσματος \vec{H} όσο και από τις ιδιότητες του χώρου (μ) μέσα στον οποίο αναπτύσσεται το πεδίο. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα \vec{B} εκφράζει κατά κάποιο τρόπο **το αποτέλεσμα**.

Αποδεικνύεται ότι η ενέργεια, η οποία ταμιεύεται σ' ένα μαγνητικό πεδίο, εξαρτάται από τις τιμές των δυο πιο πάνω μεγεθών. Μάλιστα η ενέργεια ανά μονάδα όγκου του χώρου, στον οποίο αναπτύσσεται το πεδίο (w_H) συνδέεται με τη μαγνητική επαγωγή και τη μαγνητική διέγερση, σύμφωνα με τη σχέση:

$$w_H = \int_V \vec{H} d\vec{B} \quad (13.18)$$

όπου w_H η πυκνότητα ενέργειας (J/m^3) σ' ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου.

Είναι, τέλος, φανερό ότι αν το υλικό, μέσα στο οποίο αναπτύσσεται το πεδίο, έχει **σταθερά μαγνητική διαπερατότητα** ($\mu = \text{σταθ}$), η πιο πάνω ολοκλήρωση οδηγεί στη σχέση:

$$w_H = \int_V \vec{H} d\vec{B} = \int_V \frac{B}{\mu_0} dB = \frac{1}{\mu_0} \int_V B dB = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (13.19)$$

13.5 Σχέση μεταξύ των ανυσμάτων της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , της μαγνητικής διεγέρσεως \vec{H} και της μαγνητίσεως \vec{J} .

Η μαγνητική επαγωγή \vec{B} , όπως είδαμε, σ' ένα υλικό που βρίσκεται μέσα σε σωληνοειδές (σχ. 13.5α), δίδεται από τη σχέση (13.12), δηλαδή: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'_0$

όπου: $\vec{B}'_0 = \mu_0 \vec{H}$ η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί το ρεύμα I που διαρρέει το πηνίο και

$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$ η μαγνητική επαγωγή που δημιουργούν τα ρεύματα επιφάνειας.



Σχ. 13.5α.
Μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό ενός υλικού.

Από τις τρεις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) \quad (13.20)$$

Αν, επί πλέον, ληφθεί υπόψη η σχέση (13.3) ορισμού της μαγνητικής διεγέρσεως:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0}$$

λαμβάνομε, από τη (13.20), την:

$$\vec{J} = (\mu - 1)\vec{H} \quad (13.21)$$

Αν θέσουμε

$$x = \mu - 1 \quad (13.22)$$

η (13.21) γίνεται:

$$\vec{J} = x\vec{H} \quad (13.23)$$

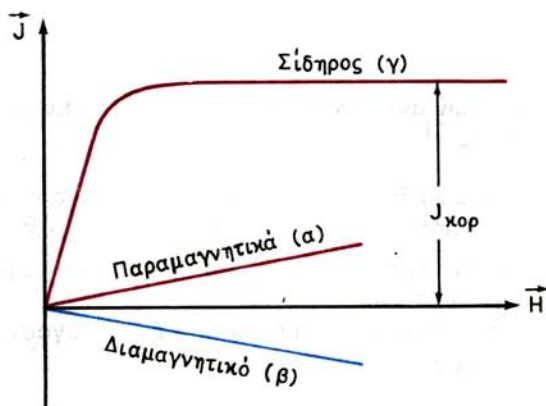
και η (13.3):

$$\vec{B} = (1 + x)\mu_0\vec{H} \quad (13.24)$$

Ο συντελεστής x ονομάζεται **μαγνητική επιδεκτικότητα** του υλικού και χαρακτηρίζεται από την ικανότητα του υλικού να μαγνητίζεται από ένα μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται εξωτερικά.

Στα **παραμαγνητικά** υλικά ο συντελεστής x έχει μικρές τιμές και θετικές. Αυτό σημαίνει ότι αποκτούν μικρή μαγνήτιση \vec{J} που έχει την ίδια φορά με την \vec{H} . Ο συντελεστής x είναι σταθερός και η συνάρτηση $J = f(H)$ είναι γραμμική (σχ. 13.5β, καμπύλη α). Από τα παραμαγνητικά υλικά μεγαλύτερη επιδεκτικότητα παρουσιάζουν το υγρό οξυγόνο και το μαγγάνιο. Η μαγνητική διαπερατότητα των υλικών αυτών είναι λίγο μεγαλύτερη από τη μονάδα ($\mu > 1$).

Στα **διαμαγνητικά** υλικά ο συντελεστής x έχει μικρές τιμές και αρνητικές. Αυτό σημαίνει ότι αποκτούν μικρή μαγνήτιση \vec{J} που είναι αντίρροπη της \vec{H} . Ο x είναι σταθερός και η συνάρτηση $J = f(H)$ είναι γραμμική (σχ. 13.5β, καμπύλη β).



Σχ. 13.5β.

Συνάρτηση $J = f(H)$ των υλικών.

Τα περισσότερα υλικά είναι διαμαγνητικά. Η μαγνητική διαπερατότητα των υλικών αυτών είναι λίγο μικρότερη από τη μονάδα ($\mu < 1$).

Στα **παραμαγνητικά** και **διαμαγνητικά** υλικά δεν γίνεται πλήρης προσανατολισμός των ατόμων του υλικού και επομένως και των μαγνητικών ροπών, γιατί αντιδρά η θερμική κίνηση των ατόμων (πλήρης προσανατολισμός μπορεί να γίνει στη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός, δηλαδή στους -273°C).

Πλήρης προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών γίνεται στα **σιδηρομαγνητικά** και **σιδηριμαγνητικά** υλικά. Η διαφορά μεταξύ των δυο υλικών εντοπίζεται στη δομή που έχουν τα μόριά τους.

Στην πρώτη κατηγορία υπάγονται ο σίδηρος, ο χάλυβας, το κοβάλτιο, το νικέλιο και τα διάφορα κράματά τους με άλλα στοιχεία.

Στη δεύτερη κατηγορία υπάγονται διάφορες ποικιλίες φερριτών.

Στα σιδηρομαγνητικά υλικά ο συντελεστής χ έχει μεγάλες τιμές και θετικές ($\chi \gg 1$). Αυτό σημαίνει ότι αποκτούν ισχυρή μαγνήτιση \vec{J} που έχει την ίδια φορά με την \vec{H} . Ο χ δεν είναι σταθερός και η συνάρτηση $J = f(H)$ δεν είναι γραμμική (σχ. 13.5β, καμπύλη γ). Η μαγνήτιση \vec{J} εξαρτάται και από την ιστορία του υλικού. Η μαγνητική διαπερατότητα των υλικών αυτών μπορεί να πάρει τιμές πολύ μεγαλύτερες από τη μονάδα ($\mu \gg 1$).

Στο σχήμα 13.5β, καμπύλη γ παρατηρούμε ότι στην αρχή, όταν αυξάνεται η H , αυξάνεται και η μαγνήτιση J του σιδήρου. Όταν όμως η μαγνητική διέγερση (H) γίνει μεγαλύτερη από μία ορισμένη τιμή, τότε παύει η αύξηση της μαγνητίσεως J (μαγνητικός κόρος). Η μέγιστη τιμή μαγνητίσεως ονομάζεται **μαγνήτιση κόρου** $J_{\text{κορ}}$.

Στο μαγνητικό κόρο φθάνομε όταν η μαγνητική διέγερση πάρει τέτοια τιμή, ώστε όλες οι μαγνητικές ροπές των ατόμων να προσανατολισθούν κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Από τη σχέση (13.21) προκύπτει ότι η μορφή των καμπυλών δεν θ' αλλάξει αν στον άξονα των τεταγμένων αντί της J απεικονίσουμε τη μαγνητική επαγωγή B .

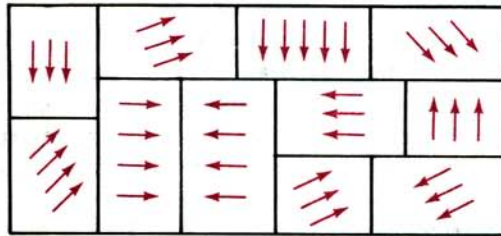
Μπορούμε να συνοψίσουμε ότι για τις διάφορες ομάδες των υλικών ισχύουν τα παρακάτω:

Κενό	Παραμαγνητικά	Διαμαγνητικά	Σιδηρομαγνητικά
$\mu = 1$	$\mu > 1$	$\mu < 1$	$\mu \gg 1$
$\chi = 0$	$\chi > 0$	$\chi < 0$	$\chi \gg 0$

Θεωρία Weiss.

Αντίθετα με την ατομική προέλευση της παραμαγνητικής και διαμαγνητικής ιδιότητας των υλικών ο σιδηρομαγνητισμός είναι ιδιότητα του κρυσταλλικού πλέγματος και εξηγείται με τη θεωρία του Weiss. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή τα σιδηρομαγνητικά υλικά αποτελούνται από μικρές περιοχές που ονομάζονται **περιοχές Weiss** (σχ. 13.5γ).

Μέσα σε κάθε περιοχή Weiss υπάρχει ομαδικός προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών των ατόμων, δηλαδή η μαγνήτιση κάθε περιοχής Weiss έχει την τιμή της μαγνητίσεως κόρου. Αν μακροσκοπικά δεν παρατηρείται μαγνήτιση σε σιδηρομαγνητικό υλικό, που βρίσκεται έξω από μαγνητικό πεδίο, αυτό συμβαίνει γιατί οι μαγνητικές ροπές των διαφόρων περιοχών Weiss δεν



Σχ. 13.5γ.
Περιοχές Weiss.

παρέχουν καμία συνισταμένη μαγνητική ροπή.

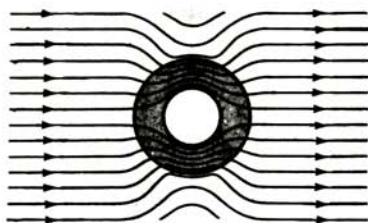
Όταν τώρα το υλικό βρεθεί μέσα σε πολύ ισχυρό μαγνητικό πεδίο και η θερμοκρασία του προσεγγίζει το απόλυτο μηδέν, τότε οι μαγνητικές ροπές όλων των περιοχών Weiss προσανατολίζονται και το υλικό παρουσιάζει μαγνήτιση κόρου. Η αναδίπλωση αυτή των μαγνητικών διπόλων προκαλεί μια αντίστοιχη μηχανική μετατόπιση των διαχωριστικών τοιχωμάτων μονοκρυσταλλικών περιοχών Weiss, με αποτέλεσμα να γίνονται οι μετατοπίσεις αυτές ακουστές σαν θόρυβοι (εφόσον φυσικά οι θόρυβοι αυτοί ενισχυθούν κατάλληλα και οδηγηθούν μέσα από ενισχυτή σε μεγάφωνο).

Όταν η θερμοκρασία υπερβεί ορισμένο όριο στα σιδηρομαγνητικά υλικά, εξαφανίζεται ο προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών στις περιοχές Weiss και το υλικό μετατρέπεται σε παραμαγνητικό. Η θερμοκρασία αυτή ονομάζεται **θερμοκρασία Curie** και είναι π.χ. για το σίδηρο 785°C, για το νικέλιο 305°C κλπ.

13.6 Μαγνητική θωράκιση.

Γνωρίζουμε ότι ένα ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, του οποίου η διέγερση (H) εξαρτάται μόνο από την ένταση του ρεύματος και το πλήθος των σπειρών του πηνίου ($H = I \cdot n$). Γνωρίζουμε επίσης ότι η τιμή της μαγνητικής επαγωγής (B) και κατ' ακολουθίαν της πυκνότητας των μαγνητικών δυναμικών γραμμών στον πυρήνα του πηνίου εξαρτάται από το υλικό του πυρήνα ($B = \mu \cdot \mu_0 H$). Έχει καταστεί, από όσα έχουν προηγηθεί, φανερό ότι, όταν στον πυρήνα εισαχθεί σιδηρομαγνητικό υλικό, η μαγνητική επαγωγή αυξάνει σημαντικά όπως επίσης και η πυκνότητα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών. Η ιδιότητα των σιδηρομαγνητικών υλικών να προκαλούν ισχυρή συγκέντρωση των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου μας επιτρέπει να περιορίζουμε την έκταση του μαγνητικού πεδίου μέσα σε ορισμένα όρια. Έτσι, αν εισάγουμε κοίλη σφαίρα από σίδηρο μέσα σε μαγνητικό πεδίο, παρατηρούμε ότι οι δυναμικές γραμμές διέρχονται από τα τοιχώματα της σφαίρας (μεγάλη διαπερατότητα μ) και δεν εισχωρούν στο εσωτερικό της (αέρας ή κενό με $\mu = 1$) (σχ. 13.6). Έτσι προφυλάσσουμε ευαίσθητα όργανα ή συσκευές από ανεπιθύμητα μαγνητικά πεδία.

Ο τρόπος αυτός μαγνητικής προστασίας χρησιμοποιείται όχι μόνο όταν τα μαγνητικά πεδία είναι στατικά (χρονικά σταθερά) αλλά και όταν είναι εναλλασ-



Σχ. 13.6.

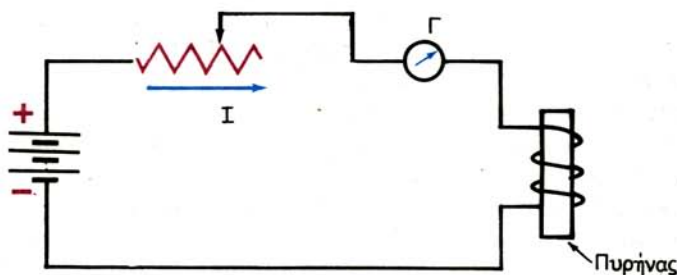
Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της κοίλης σιδερένιας σφαίρας είναι μηδέν.

σόμενα με χαμηλές συχνότητες. Καλοί θώρακες για ραδιοτεχνικές εφαρμογές κατασκευάζονται από το κράμα permalloy (79,5% Ni και 20,5% Fe). Για υψηλές συχνότητες χρησιμοποιούμε θώρακα από μη μαγνητικό υλικό, που να έχει όμως καλή ηλεκτρική αγωγιμότητα (π.χ. από χαλκό ή αλουμίνιο).

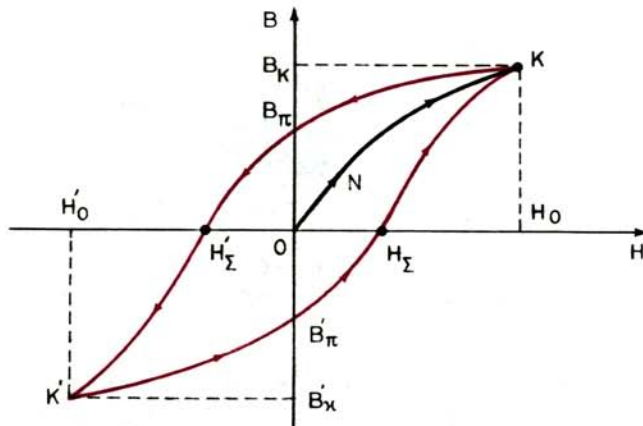
13.7 Μαγνητική υστέρηση.

Μέσα σε μαγνητικό πεδίο, τη μαγνητική διέγερση και τη φορά του οποίου μπορούμε να μεταβάλλουμε (π.χ. στο εσωτερικό σωληνοειδούς) τοποθετούμε ένα σιδηρομαγνητικό υλικό, π.χ. τεμάχιο χάλυβα, που για πρώτη φορά πρόκειται να μαγνητίσουμε (σχ. 13.7α).

Στο κύκλωμα παρεμβάλλεται ροοστάτης για την κατά βούληση μεταβολή της εντάσεως του ηλεκτρικού ρεύματος από το πηνίο, και κατ' ακολουθία της μαγνητικής διεγέρσεως του πηνίου ($H = I \cdot n$). Στο κύκλωμα παρεμβάλλεται επίσης κατάλληλο όργανο για τη μέτρηση της μαγνητικής επαγωγής B (βαλλιστικό γαλβανόμετρο). Σε ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων απεικονίζουμε τις τιμές της μαγνητικής διεγέρσεως H και τις αντίστοιχες τιμές της μαγνητικής επαγωγής B στον πυρήνα του πηνίου. Συγκεκριμένα στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζουμε την τιμή της μαγνητικής επαγωγής B (εξαρτημένη μεταβλητή) που διαμορφώνεται ανάλογα με την τιμή της μαγνητικής διεγέρσεως H (ανεξάρτητη μεταβλητή), την οποία απεικονίζουμε στον οριζόντιο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.7β.



Σχ. 13.7α.



Σχ. 13.78.

Βρόχος υστερήσεως σιδηρομαγνητικού υλικού.

Αρχίζομε να αυξάνομε την τιμή της μαγνητικής διεγέρσεως βαθμιαία, από την τιμή μηδέν, καταγράφοντας τις μετρήσεις μας στο διάγραμμα του σχήματος 13.78, οπότε σχηματίζεται η καμπύλη (ONK).

Στο πρώτο τμήμα της καμπύλης (ONK) η μαγνητική επαγωγή φαίνεται να αυξάνει πολύ, ενώ αργότερα αρχίζει να αυξάνει βραδύτερα, φθάνοντας οριακά στην τιμή B_K (σημείο K). Από την τιμή αυτή πλέον δεν παρατηρείται πρακτικά αύξηση της μαγνητικής επαγωγής, μολονότι αυξάνει η μαγνητική διεγέρση. Λέμε τότε ότι έχει επέλθει **κορεσμός του υλικού**, το δε σημείο K ονομάζεται **σημείο μαγνητικού κόρου**. Το πρώτο τμήμα της καμπύλης ON είναι περίπου ευθύγραμμο, που σημαίνει ότι για μικρές μεταβολές της τιμής της H η B είναι ανάλογη της H. Από το σημείο N αρχίζει η καμπύλωση, που σημαίνει ότι παύει να υπάρχει η παραπάνω αναλογία μέχρι του σημείου K (μαγνητικός κόρος).

Αν τώρα αρχίζομε να ελαττώνομε τη μαγνητική επαγωγή H, ελαττώνοντας το ρεύμα I που διαρρέει το πηνίο, θα παρατηρήσομε ότι και η μαγνητική επαγωγή B μειώνεται, δηλαδή ο χάλυβας **απομαγνητίζεται**. Κατά την απομαγνήτιση όμως αυτή διαπιστώνομε ότι δεν ακολουθείται πια η καμπύλη (KNO), αλλά μια νέα καμπύλη (KB_π), στην οποία οι τιμές της μαγνητικής επαγωγής B είναι υψηλότερες από τις αντίστοιχες της καμπύλης (ONK) για τις ίδιες τιμές της διεγέρσεως H. Για το λόγο αυτό η καμπύλη (ONK), η οποία καταγράφεται μόνο κατά την για πρώτη φορά μαγνήτιση ενός σιδηρομαγνητικού υλικού, ονομάζεται **παρθενική καμπύλη μαγνήτισεως**.

Βλέπομε, λοιπόν, ότι κατά την απομαγνήτιση του σιδηρομαγνητικού υλικού οι μεταβολές των τιμών της μαγνητικής επαγωγής είναι μικρότερες από εκείνες κατά τη μαγνήτιση, για τις ίδιες πάντα τιμές της μαγνητικής διεγέρσεως. Το φαινόμενο αυτό, κατά το οποίο η τιμή της μαγνητικής επαγωγής (B) υστερεί από τη μεταβολή του εξωτερικού πεδίου (H), ονομάζεται **μαγνητική υστέρηση**.

Αποτέλεσμα της υστερήσεως είναι ότι η μαγνητική επαγωγή B δεν μηδενίζε-

ται όταν μηδενίζεται η μαγνητική διέγερση ($H = 0$ για $I = 0$) αλλά διατηρεί μια τιμή B_{π} , που ονομάζεται **παραμένων μαγνητισμός**. Αυτό σημαίνει ότι ο χάλυβας εξακολουθεί να παραμένει μαγνητισμένος, δηλαδή έχει γίνει **μόνιμος μαγνήτης**.

Για να απομαγνητίσουμε τελείως το υλικό, εξουδετερώνοντας τον παραμένοντα μαγνητισμό, πρέπει να επιδράσουμε με μαγνητικό πεδίο, που να έχει αντίρροπη φορά από εκείνη του πρώτου (αυτό γίνεται αν αναστρέψουμε τη φορά του ρεύματος στο σωληνοειδές) και ορισμένη τιμή μαγνητικής διεγέρσεως H_z . Την τιμή αυτή ονομάζουμε **συνεκτικό πεδίο**. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή αυτή, τόσο πιο δύσκολα απομαγνητίζεται το υλικό.

Αύξηση (απόλυτα) της H μετά από την τιμή H_z έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της απόλυτης τιμής της μαγνητικής επαγωγής B , η οποία έχει πλέον αντίρροπη φορά και ακολουθεί την καμπύλη ($H_z K'$). Το σημείο K' δείχνει το μαγνητικό κόρο του πυρήνα, όταν μαγνητίζεται με διέγερση που έχει αντίρροπη φορά (είναι $OB_K = OB_{K'}$ και $OH_o = OH'_o$).

Ελαττώνοντας τώρα πάλι την απόλυτη τιμή H , με σταδιακή μείωση του ρεύματος I , ελαττώνεται και η B . Στην τιμή $H = 0$ το υλικό παρουσιάζει παραμένουσα επαγωγή B_{π} , όπου $B_{\pi} = B_{\pi'}$, δηλαδή ο χάλυβας διατηρεί παραμένοντα μαγνητισμό ίσο με τον προηγούμενο αλλά με αντίρροπη φορά.

Για να απομαγνητίσουμε πάλι το υλικό, πρέπει ν' αλλάξουμε τη φορά της H . Η B μειώνεται και για την τιμή H_z μηδενίζεται. Η H_z είναι ίση με την H_z . Συνεχίζοντας την αύξηση της H φθάνουμε για $H = H_o$ στο σημείο K , από το οποίο ξεκινήσαμε την απομαγνήτιση. Έτσι συμπληρώνεται μια κλειστή διαδρομή ($KB_{\pi} H'_z K' B_{\pi'} H_z K$). Την κλειστή αυτή καμπύλη, που σχηματίζεται στο επίπεδο $B - H$ κατά τη διαδοχική μαγνήτιση και απομαγνήτιση ενός υλικού, ονομάζουμε **βρόχο υστερήσεως**.

Ο μαγνητισμός που παραμένει οφείλεται στο ότι όταν μηδενίζεται η μαγνητική διέγερση (H) ορισμένες περιοχές Weiss παραμένουν προσανατολισμένες. Μετά τις σχετικές με το βρόχο υστερήσεως έννοιες και παρατηρήσεις, μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα, σχετικά με τα σιδηρομαγνητικά υλικά:

α) Σιδηρομαγνητικό υλικό συνεχίζει να παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες, που οφείλονται στον παραμένοντα μαγνητισμό, ακόμη και στην περίπτωση που η μαγνητική διέγερση γίνει μηδέν.

β) Για να εξαφανίσουμε τον παραμένοντα μαγνητισμό, δηλαδή να απομαγνητίσουμε το υλικό, απαιτείται μαγνητική διέγερση αντίρροπη απ' αυτή που τον δημιούργησε.

γ) Για μικρές τιμές της μαγνητικής διεγέρσεως (H), οι μεταβολές της μαγνητικής επαγωγής (B) είναι ανάλογες προς τις μεταβολές της H .

δ) Αν λάβουμε υπόψη:

– Ότι ο πειραματικά παρατηρούμενος βρόχος υστερήσεως των σιδηρομαγνητικών υλικών συνεπάγεται εξάρτηση μεταξύ αιτίου (μαγνητική διέγερση H) και αποτελέσματος (μαγνητική επαγωγή B) της μορφής: $B = f(H)$.

– Τη σχέση ορισμού (12.3), δηλαδή: $B = \mu_o \cdot \mu \cdot H$.

– Το γεγονός ότι η τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας του κενού $\mu_o = 4\pi/10^7$ V.s/A . m είναι σταθερά, καταλήγουμε στο ότι σχετική μαγνητική

διαπερατότητα μ των σιδηρομαγνητικών υλικών δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η διέγερση H και η επαγωγή B .

Η μορφή του βρόχου υστερήσεως εξαρτάται από το είδος του σιδηρομαγνητικού υλικού και είναι χαρακτηριστική για κάθε υλικό. Υλικά με βρόχο υστερήσεως μεγάλου εμβαδού ονομάζονται **σκληρά** μαγνητικά υλικά ενώ υλικά με μικρό βρόχο υστερήσεως ονομάζονται **μαλακά** μαγνητικά υλικά.

Ο σκληρός χάλυβας παρουσιάζει πλατύ βρόχο υστερήσεως με μεγάλο παραμένοντα μαγνητισμό και μεγάλο συνεκτικό πεδίο. Αντίθετα ο μαλακός σίδηρος παρουσιάζει στενό βρόχο, μικρό παραμένοντα μαγνητισμό και μικρό συνεκτικό πεδίο. Έτσι ο σκληρός χάλυβας χρησιμοποιείται για την κατασκευή μονίμων μαγνητών, ενώ ο μαλακός σίδηρος είναι ακατάλληλος, γιατί και μικρό παραμένοντα μαγνητισμό έχει και πολύ εύκολα τον χάνει. Αντίθετα ο μαλακός σίδηρος χρησιμοποιείται απαραίτητα σε μαγνητικά κυκλώματα, που εργάζονται με εναλλασσόμενο ρεύμα, π.χ. σε μετασχηματιστές, κινητήρες και γεννήτριες εναλλασσόμενου ρεύματος κλπ., όπου αναγκαστικά έχουμε συνεχή μαγνήτιση και απομαγνήτιση του υλικού.

13.8 Απώλειες από μαγνητική υστέρηση.

Η μαγνήτιση και απομαγνήτιση των σιδηρομαγνητικών υλικών συνεπάγεται απώλειες ενέργειας, τις οποίες βέβαια πρέπει να καλύπτει η πηγή τροφοδοτήσεως του κυκλώματος μαγνήτισεως και απομαγνήτισεως. Οι απώλειες αυτές ονομάζονται απώλειες ενέργειας **από μαγνητική υστέρηση** και προκαλούν τελικά θέρμανση του υλικού.

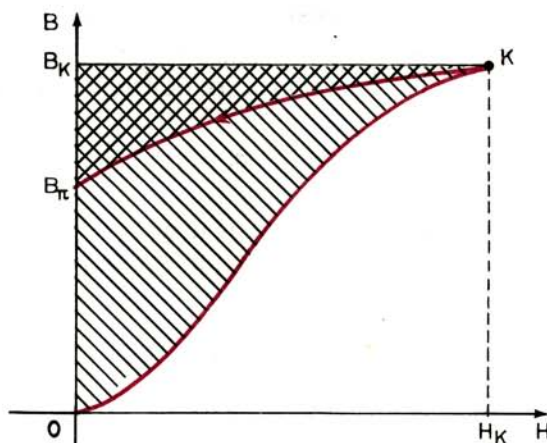
Είναι εύκολο να αποδειχθεί, με βάση όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 13.4 σχετικά με την πυκνότητα ενέργειας, που είναι ταμειευμένη σ' ένα μαγνητικό πεδίο, ότι η πυκνότητα ενέργειας, που καταναλίσκεται ή αποδίδεται κατά τους διάφορους κύκλους μαγνήτισεως - απομαγνήτισεως ενός υλικού, είναι ανάλογη προς το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη μαγνήτισεως, μέχρι και τον άξονα των τεταγμένων, όπου απεικονίζεται η μαγνητική επαγωγή. Έτσι π.χ. κατά την παρθενική μαγνήτιση μέχρι κορεσμού ενός υλικού, η καταναλισκόμενη ενέργεια:

$$w_m = \int_0^{B_k} H dB \quad (13.25)$$

είναι μέγεθος ανάλογο του εμβαδού (OKB_kO), που είναι σκιασμένο με κόκκινο χρώμα στο σχήμα 13.8. Εξάλλου κατά τη μείωση της μαγνητικής διεγέρσεως από την τιμή H_k ως το μηδέν αποδίδεται στο εξωτερικό κύκλωμα ενέργεια που έχει πυκνότητα:

$$w_m = \int_{B_k}^{B_\pi} H dB \quad (13.26)$$

Η ενέργεια αυτή είναι ανάλογη προς το εμβαδόν (KB_kB_π), που είναι σκιασμένο με πράσινο χρώμα στο σχήμα 13.8. Άρα κατά την παρθενική μαγνήτιση ενός υλικού και την εν συνεχεία μερική απομαγνήτισή του μέχρι του σημείου B_π (παραμένοντα μαγνητισμός) καταναλίσκεται ενέργεια, της οποίας



Σχ. 13.8.

Απώλειες ενέργειας από μαγνητική υστέρηση.

η πυκνότητα είναι ανάλογη του εμβαδού του χωρίου (OKB_{π}) που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης μαγνητίσεως και απομαγνητίσεως. Η ενέργεια αυτή εμφανίζεται υπό μορφή θερμότητας στο υλικό.

Επεκτείνοντας τα πιο πάνω συμπεράσματα καταλήγουμε στο ότι κατά τη διαγραφή ενός βρόχου υστερήσεως καταναλίσκεται ενέργεια, η οποία είναι ανάλογη του εμβαδού του βρόχου υστερήσεως. Το ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα περιστάνουν πυκνότητα ενέργειας μπορούμε να το επαληθεύσουμε και από τις μονάδες του γινομένου:

$$B \cdot H \left(\frac{V \cdot S}{m^2} \cdot \frac{A}{m} = \frac{V \cdot S \cdot A}{m^3} = \frac{J}{m^3} \right)$$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι τα μαλακά μαγνητικά υλικά με στενό βρόχο έχουν μικρές απώλειες υστερήσεως γι' αυτό και χρησιμοποιούνται στους μετασχηματιστές, στις ηλεκτρικές μηχανές, στα ρελέ κλπ.

13.9 Μαγνητικά κυκλώματα και επίλυσή τους.

Μετά από όσα έχουμε μέχρι τώρα αναπτύξει σχετικά με τα μαγνητικά πεδία και τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές μέσα στην ύλη, μπορούμε πλέον, κατ' αναλογία προς τα ηλεκτρικά κυκλώματα, να ορίσουμε και μαγνητικά κυκλώματα:

Μαγνητικά κυκλώματα ονομάζουμε ένα σύνολο από κλειστές διαδρομές μαγνητικών δυναμικών γραμμών, που διέρχονται είτε μέσα από τον αέρα είτε μέσα από διάφορα υλικά.

Επίσης ανάλογα προς τον ορισμό της ηλεκτρικής αντιστάσεως είναι δυνατό να ορισθεί και το μέγεθος **μαγνητική αντίσταση** ενός τμήματος μαγνητικού κυκλώματος ή και γενικότερα ενός ολόκληρου μαγνητικού κυκλώματος.

Έστω μήκος l ενός μαγνητικού κυκλώματος σταθερής διατομής S (σχ. 13.9α). Σύμφωνα με όσα έχουμε ορίσει στην παράγραφο 11.2, η μαγνητική τάση μεταξύ των διατομών 1 και 2, επειδή κινούμαστε σε δυναμική γραμμή, θα είναι:

$$V_m = \int_1^2 \vec{H} dl = \int_1^2 H \cdot dl = H \int_1^2 dl = H \cdot l = \frac{B}{\mu \mu_0} \cdot l \quad (13.27)$$

Ας θυμίσουμε, όμως, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 11.7 για τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, ότι η μαγνητική ροή στο υπόψη τμήμα του κυκλώματος θα είναι:

$$\Phi = B \cdot S \quad (13.28)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (13.28) και (13.27) παίρνουμε:

$$\Phi = \frac{V_m}{\frac{l}{\mu \cdot \mu_0 S}} \quad (13.29)$$

Ονομάζουμε **μαγνητική αντίσταση** του τμήματος κυκλώματος μήκους l το μέγεθος:

$$R_m = \frac{l}{\mu \cdot \mu_0 S} \quad (13.30)$$

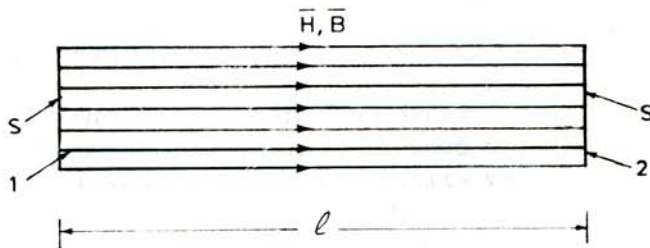
που εύκολα διαπιστώνεται ότι έχει μονάδες μετρήσεως το:

$$1 \frac{A}{Wb} = 1 \frac{A}{V \cdot s}$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (13.30) η μαγνητική αντίσταση εξαρτάται από τη γεωμετρία του μαγνητικού κυκλώματος (l, S) και από τη φύση του υλικού (μ), μέσα από το οποίο διέρχονται οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Μετά την εισαγωγή του μεγέθους της μαγνητικής αντιστάσεως, η σχέση (13.29) γράφεται:

$$\Phi = \frac{V_m}{R_m} \quad (13.31)$$



Σχ. 13.9α.
Τμήμα μαγνητικού κυκλώματος.

και θυμίζει το νόμο του Ohm για τα κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.

Παράδειγμα 13.9.1.

Το σωληνοειδές του σχήματος 13.96 έχει αντίσταση 7Ω , μήκος $0,2 \text{ m}$, διατομή 10 cm^2 και αριθμό σπειρών 400 . Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον πυρήνα του είναι 24 π Mx , η αντίσταση του αμπερομέτρου 3Ω , του λαμπτήρα 6Ω και της πηγής 1Ω .

Θεωρώντας ότι το σωληνοειδές αυτό συμπεριφέρεται ως σωληνοειδές άπειρου μήκους, ζητούνται:

α) Η ένδειξη του οργάνου. β) Η ΗΕΔ της πηγής. γ) Η ισχύς που καταναλώνει ο λαμπτήρας ($\mu = 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$).

Λύση.

α) Εφόσον θεωρείται ότι το σωληνοειδές αυτό συμπεριφέρεται σαν να είχε άπειρο μήκος, το μαγνητικό πεδίο στον πυρήνα του θεωρείται ομογενές, με μαγνητική επαγωγή που δίνεται από τη σχέση (12.20):

$$B = \mu \cdot \mu_0 n I \quad (1)$$

όπου n το πλήθος των σπειρών ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς, δηλαδή:

$$n = \frac{N}{l} \quad (2)$$

Επιπλέον, εφόσον το πεδίο είναι ομογενές, η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του σωληνοειδούς θα είναι:

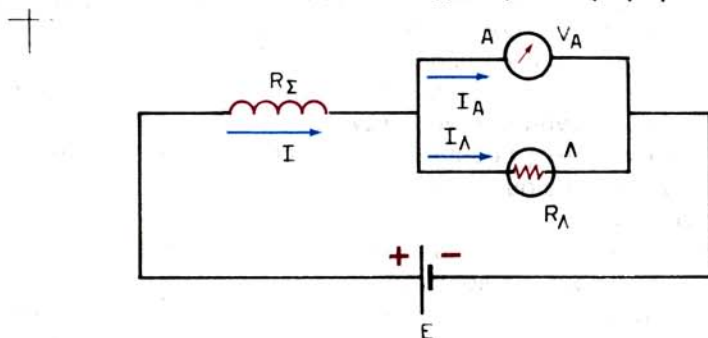
$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = BS \quad (3)$$

όπου S το εμβαδόν επιφάνειας της διατομής του πυρήνα του σωληνοειδούς.

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$\Phi = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I \cdot S = \frac{NI}{\frac{l}{\mu \mu_0 S}} \quad (4)$$

Όπως φαίνεται, η σχέση (4), που ισχύει για το μαγνητικό κύκλωμα που



Σχ. 13.96.

Κύκλωμα παραδείγματος 13.9.1.

συγκροτούν οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές στον πυρήνα σωληνοειδούς με άπειρο μήκος, συμπίπτει με τη γενική σχέση (13.29), αν ως μαγνητική τάση θεωρηθεί το γινόμενο

$$V = N \cdot I \quad (5)$$

Σε επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι η σχέση (4) έχει γενικότερη ισχύ. Ας επανέλθουμε όμως τώρα στο παράδειγμά μας. Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το ρεύμα I που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$I = \frac{\Phi \cdot l}{\mu_0 N S}$$

όπου: $\Phi = 24\pi \text{ Mx} = 24\pi \cdot 10^{-8} \text{ Wb}$, $l = 0,2 \text{ m}$, $\mu = 1$,
 $N = 400$ και $S = 10 \text{ cm}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Άρα:

$$I = \frac{24\pi \cdot 10^{-8} \cdot 0,2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,3 \text{ A}$$

Επομένως:

$$I_A = I \frac{R_A}{r_A + R_A} = 0,3 \frac{6}{9} = 0,2 \text{ A}$$

β) $E = Ir + IR_\Sigma + I_A R_A = 3 \text{ V}$

γ) $I_A = I - I_A = 0,1 \text{ A}$

Άρα:

$$P_A = I_A^2 R_A = 10^{-2} \cdot 6 \text{ W} = 60 \text{ mW}$$

13.9.1 Μαγνητικά ζυγώματα.

Ορίσαμε, στην προηγούμενη παράγραφο, ως **μαγνητικό κύκλωμα** κάθε κλειστή διαδρομή μιας δέσμης μαγνητικών δυναμικών γραμμών. Όπως αμέσως προκύπτει από τον ορισμό αυτό, για να υπάρχει μαγνητικό κύκλωμα πρέπει να συντρέχουν δυο προϋποθέσεις:

α) Να υπάρχει μαγνητική διέγερση (H) εξαιτίας της οποίας να δημιουργείται μαγνητικό πεδίο και κατ' ακολουθία μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

β) Να υπάρχει κατάλληλο υλικό μέσο, του οποίου η γεωμετρική κατασκευή, σε συνδυασμό με τις μαγνητικές του ιδιότητες, να δημιουργούν κλειστές διαδρομές μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

Η πρώτη από τις δυο αυτές προϋποθέσεις πραγματοποιείται σχετικά απλά, π.χ. με ένα πηνίο του οποίου οι αμπεροστροφές ($H = ni$) αποτελούν τη μαγνητική διέγερση.

Η δεύτερη προϋπόθεση πραγματοποιείται κάπως δυσκολότερα και αφού λάβουμε υπόψη όλους τους περιορισμούς σχετικά με τη σκοπιμότητα της κατασκευής του μαγνητικού κυκλώματος, την εφαρμογή που πρόκειται να εξυπηρετήσει, τα υλικά που διατίθενται για την κατασκευή του κλπ.

Στις παραγράφους που θα ακολουθήσουν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα τόσο

από θεωρητικής όσο και από υπολογιστικής σκοπιάς με τα πιο πάνω δυο θέματα και θα αναπτύξουμε μεθόδους επιλύσεως απλών μαγνητικών κυκλωμάτων, που είναι χρήσιμες και για τον υπολογισμό συνθετοτέρων κατασκευών, όπως π.χ. ηλεκτρομαγνητών, ηλεκτρονόμων, γεννητριών, κινητήρων κλπ.

Πριν όμως προχωρήσουμε, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε ότι το υλικό μέσο ή ο φορέας στον οποίο δημιουργείται η κλειστή διαδρομή των μαγνητικών γραμμών, που συνιστά το μαγνητικό κύκλωμα, ονομάζεται **μαγνητικό ζύγωμα**. Ένα τέτοιο μαγνητικό ζύγωμα, που αποτελείται από 4 πρισματικά τεμάχια διαφόρων υλικών, φαίνεται στο σχήμα 13.9γ. Η μαγνητική διέγερση στο ζύγωμα αυτό δημιουργείται με περιέλιξη στο τεμάχιο 4.

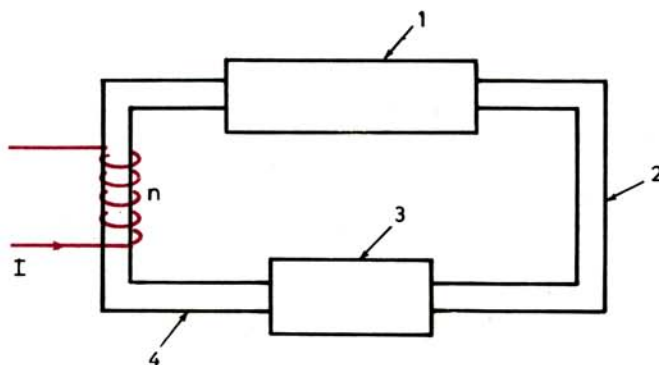
Εξυπακούεται ότι τμήμα ενός ζυγώματος μπορεί να αποτελεί και διαδρομή μέσα από τον αέρα. Βέβαια, στην πράξη αποφεύγουμε τις διαδρομές μέσα από τον αέρα, λόγω της μεγάλης μαγνητικής αντιστάσεως που παρουσιάζει.

Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούμε να αποφύγουμε τελείως την παρουσία του αέρα. Π.χ. μεταξύ του σώματος και του οπλισμού ενός ηλεκτρομαγνήτη θα υπάρχει πάντα ένα μικρό διάκενο αέρα. Επίσης σε μια ηλεκτρική μηχανή θα υπάρχει διάκενο αέρα μεταξύ του ακίνητου και του κινητού μέρους της. Σε άλλες περιπτώσεις επιβάλλεται η παρουσία του αέρα, ο οποίος αν και έχει μεγάλη μαγνητική αντίσταση, διαθέτει πάντως σταθερό μ ($\mu = 1$) και δεν παρουσιάζει μαγνητικές απώλειες. Τα μαγνητικά ζυγώματα δηλαδή των κατασκευών είναι συνήθως μικτά και αποτελούνται από μαγνητικά υλικά και διάκενο αέρα.

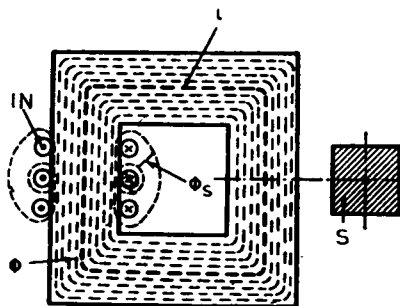
Οι μαγνητικές γραμμές ακολουθούν γενικά τις διαδρομές με τη μικρότερη μαγνητική αντίσταση. Το μεγαλύτερο μέρος των δυναμικών γραμμών διέρχεται μέσα από το σιδηρομαγνητικό υλικό, που προσφέρει μεγάλη μαγνητική αγωγιμότητα. Ωστόσο ένα μικρό μέρος διέρχεται μέσα από τον αέρα (σχ. 13.9δ).

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **σκεδάση** και η ροή Φ_o που διέρχεται από τον αέρα ονομάζεται **ροή σκεδάσεως**.

Η ροή σκεδάσεως μειώνει την κύρια ροή που διέρχεται αποκλειστικά μέσα από το σιδηρομαγνητικό υλικό. Έτσι πρέπει να την λαμβάνουμε υπόψη στον



Σχ. 13.9γ.
Μαγνητικό ζύγωμα.



Σχ. 13.95.

Μαγνητικό κύκλωμα. Κύρια ροή Φ και ροή σκεδάσεως Φ_s .

υπολογισμό των κυκλωμάτων, εκτός αν είναι μικρή σε σχέση με την κύρια ροή, οπότε την αγνοούμε.

Γενικά με τον όρο *σκέδαση* αναφερόμαστε στην κυκλοφορία ορισμένων μαγνητικών γραμμών εκτός από τα τμήματα του ζυγώματος που εξετάζουμε, όπου και επιθυμούμε να οδεύουν αλλά από ανεπιθύμητες παρόδους. Πάντως, όπως ήδη είπαμε, συχνά για λόγους απλουστεύσεως υποθέτουμε ότι σ' ένα μαγνητικό ζύγωμα ολόκληρη η ροή διέρχεται μέσα από το σιδηρομαγνητικό υλικό και από τα κενά αέρα που σκόπιμα υπάρχουν (κατασκευάζουμε) στο ζύγωμα.

13.9.2 Ο νόμος του Hopkinson.

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε τη σχέση (13.31), που ισχύει για τμήμα μαγνητικού κυκλώματος, ώστε να εφαρμόζεται και στην περίπτωση ενός πλήρους μαγνητικού κυκλώματος που αναπτύσσεται σε μαγνητικό ζύγωμα.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι μαγνητικό ζύγωμα συγκροτείται από n ως προς το πλήθος πρισματικές ράβδους, όπως π.χ. αυτές του σχήματος 13.9γ, και ότι στο ζύγωμα δημιουργείται μαγνητικό πεδίο από περιέλιξη N το πλήθος σπειρών που διαρρέονται από ρεύμα εντάσεως I . Για να προχωρήσουμε στην επίλυση του ιδεατού αυτού ζυγώματος θα κάνουμε τρεις ακόμη παραδοχές:

1) Οι διαστάσεις της διατομής των ράβδων είναι πολύ μικρές σε σχέση με το μήκος τους, έτσι ώστε οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές να είναι παράλληλες προς τον άξονα του ζυγώματος.

2) Η μαγνητική σκέδαση του συστήματος θεωρείται αμελητέα, ακόμη και εάν τμήματα του ζυγώματος αποτελούνται από κενά αέρα.

3) Το μαγνητικό πεδίο σε κάθε πρισματική ράβδο του ζυγώματος θεωρείται ομογενές.

Μετά τις παραπάνω παραδοχές, μπορούμε για κάθε ράβδο του ζυγώματος, ανάλογα προς τη σχέση (13.28), να γράψουμε τις σχέσεις:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}, \quad \dots B_s = \frac{\Phi}{S_s}, \quad \dots B_v = \frac{\Phi}{S_v} \quad (13.32)$$

και συνεπώς:

$$H_1 = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_1 S_1}, \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_2 S_2}, \quad \dots H_\delta = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_\delta S_\delta}, \quad \dots H_\nu = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_\nu S_\nu} \quad (13.33)$$

Από το θεώρημα του Ampere έχουμε:

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = NI \quad (13.34)$$

όπου η ολοκλήρωση νοείται στην κλειστή διαδρομή από τον άξονα του ζυγώματος. Σύμφωνα με τις προϋποθέσεις που θέσαμε πιο πάνω, η ολοκλήρωση αυτή δίνει:

$$\bar{H} d\bar{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_\delta l_\delta + \dots + H_\nu l_\nu = \sum_{\delta=1}^{\nu} H_\delta l_\delta \quad (13.35)$$

οπότε από την (13.34) έχουμε τελικά:

$$\sum_{\delta=1}^{\nu} H_\delta l_\delta = NI \quad (13.36)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις μαγνητικές διεγέρσεις H_δ στη σχέση (13.36) από τις τιμές τους (13.35) παίρνομε:

$$\sum_{\delta=1}^{\nu} \frac{\Phi l_\delta}{\mu_0 \mu_\delta S_\delta} = NI$$

ή

$$\Phi \sum_{\delta=1}^{\nu} \frac{l_\delta}{\mu_0 \mu_\delta S_\delta} = NI \quad (13.37)$$

Λαμβάνοντας πλέον υπόψη τη σχέση ορισμού της μαγνητικής αντιστάσεως (13.30), η σχέση (13.37) γίνεται:

$$\Phi \sum_{\delta=1}^{\nu} R_{m,\delta} = NI \quad (13.38)$$

Αν επί πλέον ονομασθεί ως **συνολική μαγνητική αντίσταση** του κυκλώματος το άθροισμα:

$$R_{m0} = \sum_{\delta=1}^{\nu} R_{m,\delta} \quad (13.39)$$

θα έχουμε τελικά:

$$\Phi = \frac{NI}{R_{mo}} \quad (13.40)$$

Το γινόμενο $N \cdot I$ συνήθως ορίζεται ως **μαγνητεγερτική δύναμη** (ΜΕΔ), δηλαδή:

$$M = N \cdot I \quad (13.41)$$

έχει δε μονάδες **A** ή ορθότερα **Αμπεροστροφές**.

Έτσι η (13.40) διατυπώνεται τελικά ως:

$$\Phi = \frac{M}{R_{mo}} \quad (13.42)$$

Η σχέση (13.42) ονομάζεται **νόμος του Hopkinson** και χαρακτηρίζεται ως νόμος του Ohm της μαγνητικής ροής σ' ένα μαγνητικό κύκλωμα.

Ας υπενθυμίσουμε ότι η μονάδα της μαγνητικής αντιστάσεως είναι το:

$$1 \frac{A}{Wb} = 1 \frac{A}{V \cdot s}$$

Τέλος, είναι σκόπιμο να παρατηρήσουμε ότι εύκολα προκύπτει ότι η μαγνητεγερτική δύναμη M ισούται με το άθροισμα των μαγνητικών πτώσεων τάσεως στα διάφορα τμήματα του ζυγώματος, δηλαδή:

$$\bar{M} = V_{m,1} + V_{m,2} + \dots + V_{m,\delta} + \dots + V_{m,\nu} = \sum_{\delta=1}^{\nu} V_{m,\delta} \quad (13.43)$$

Βέβαια η μαγνητική πτώση τάσεως σε κάθε τμήμα του κυκλώματος μπορεί να διατυπωθεί κατά την (13.31), ως:

$$V_{m,\delta} = \Phi R_{m,\delta} \quad (13.44)$$

Παράδειγμα 13.9.2.

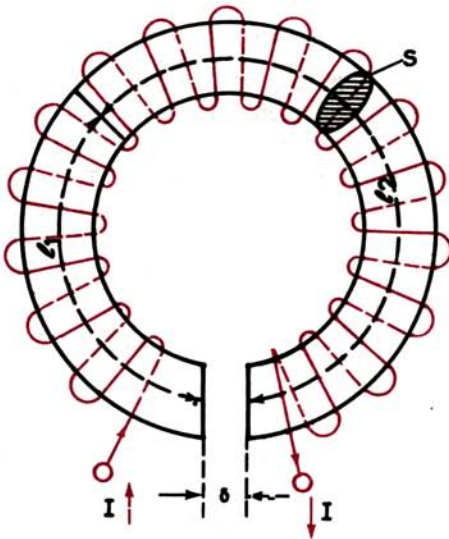
Ένα πηνίο με N σπείρες είναι τυλιγμένο πάνω σ' ένα δακτυλίδι που αποτελείται από δυο κομμάτια μηκών l_1 και l_2 , από διαφορετικό υλικό με μαγνητικές διαπερατότητες μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Το δακτυλίδι είναι επίσης κομμένο σ' ένα τμήμα του και το διάκενο αέρα ($\mu = 1$) έχει μήκος δ , όπως φαίνεται στο σχήμα 13.9ε. Να υπολογισθούν οι αμπεροστροφές του πηνίου ώστε η μαγνητική επαγωγή στο διάκενο αέρα να είναι 1 T .

Δίνονται: $l_1 = 360 \text{ mm}$, $l_2 = 238 \text{ mm}$, $\delta = 2 \text{ mm}$, $S = 1000 \text{ mm}^2$, και σταθερές τιμές για τις μαγνητικές διαπερατότητες των δυο υλικών $\mu_1 = 800$ και $\mu_2 = 1000$.

Λύση.

Οι μαγνητικές αντιστάσεις των τριών τμημάτων (δηλ. του υλικού 1, του υλικού 2 και του αέρα αντίστοιχα) είναι:

$$R_{m_1} = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1}, \quad R_{m_2} = \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} \quad \text{και} \quad R_{m_3} = \frac{\delta}{\mu_0 S} \quad (1)$$



Σχ. 13.9ε.
Ζύγωμα παραδείγματος 13.9.2.

Άρα η μαγνητεγερτική δύναμη $M = NI$ (2) θα πρέπει να υπερνικήσει τη συνολική μαγνητική αντίσταση R_{m_0} όπου:

$$R_{m_0} = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} \quad (3)$$

Άρα:

$$\Phi = \frac{M}{R_m} \rightarrow M = NI = \Phi R_{m_1} + \Phi R_{m_2} + \Phi R_{m_3} \quad (4)$$

Και τα τρία τμήματα έχουν την ίδια διατομή: $S_1 = S_2 = S_3 = S = 1000 \text{ mm}^2$. Η μαγνητική αντίσταση κάθε τμήματος υπολογίζεται:

$$R_{m_1} = \frac{360 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 3,58 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

$$R_{m_2} = \frac{283 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 2,25 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

$$R_{m_3} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 15,90 \cdot 10^{-5} \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

Άρα:

$$R_{m_0} = R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} = 21,73 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

Εξάλλου στο διάκενο του αέρα θα ισχύει:

$$\Phi = B \cdot S = 1 \text{ T} \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 10^{-3} \text{ Wb}$$

Έτσι, από την (4) υπολογίζουμε:

$$M = \Phi \cdot R_{m_0} = 10^{-3} \text{ Wb} \cdot 21,73 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Wb}} = 2173 \text{ A-στροφές}$$

13.9.3 Σχεδιασμός και υπολογισμός μαγνητικών κυκλωμάτων.

Μετά τις έννοιες, τους ορισμούς και τις σχέσεις που έχουμε διατυπώσει σχετικά με τα ζυγώματα και τα μαγνητικά τους κυκλώματα και αφού ήδη έχουμε επιλύσει δυο πολύ απλά μαγνητικά κυκλώματα, μπορούμε να αναπτύξουμε γενικότερα το θέμα και να δώσουμε γενικές οδηγίες σχετικά με το σχεδιασμό και τον υπολογισμό των μαγνητικών κυκλωμάτων. Δεν θα πρέπει να παραβλέψουμε ότι ο σχεδιασμός και υπολογισμός των μαγνητικών κυκλωμάτων των διαφόρων ηλεκτρομαγνητικών συσκευών είναι ένα πολύ σύνθετο πρόβλημα που απαιτεί επίπονη προσπάθεια. Έτσι, θα περιορισθούμε στην εξέταση μερικών απλών μαγνητικών κυκλωμάτων περιγράφοντας τη σειρά εργασίας που πρέπει να ακολουθήσουμε για την επίλυσή τους.

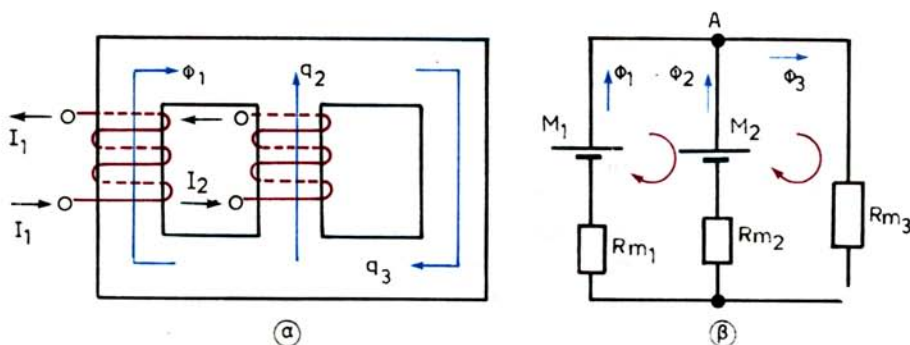
α) Το ορθό πρόβλημα.

Δίνεται το κύκλωμα με τις διαστάσεις του και το υλικό των διαφόρων τμημάτων του καθώς επίσης και οι μαγνητεγερτικές του δυνάμεις (αμπεροστροφές) $M = NI$. Ζητείται η μαγνητική ροή Φ στα διάφορα τμήματα του κυκλώματος.

β) Το αντίστροφο πρόβλημα.

Δίνεται το μαγνητικό κύκλωμα με τις διαστάσεις του και το υλικό κατασκευής του. Δίνονται επίσης η καμπύλη μαγνήτισης του υλικού $B = f(H)$ και οι μαγνητικές ροές που πρέπει να δημιουργηθούν στα διάφορα τμήματά του από πηνία που είναι τοποθετημένα σε ορισμένες θέσεις. Ζητούνται οι απαιτούμενες αμπεροστροφές.

Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια τη μεθοδολογία της αντιμετώπισης και των δυο προβλημάτων. Μάλιστα, η ανάπτυξη θα είναι επαγωγικότερη, αν γίνει χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο μαγνητικό κύκλωμα, όπως π.χ. αυτό του ζυγώματος του σχήματος 13.9στ. Στο ζύγωμα του σχήματος 13.9στ(α) έχει σχεδιασθεί η φορά των ρευμάτων στα δυο πηνία καθώς και η φορά των μαγνητικών ροών. Το σχήμα 13.9στ(β) δείχνει το απλοποιημένο κύκλωμα με τις μαγνητεγερτικές δυνάμεις M_1 και M_2 και τις μαγνητικές αντιστάσεις R_{m_1} , R_{m_2} και R_{m_3} .



Σχ. 13.9στ.

α) Μαγνητικό ζύγωμα. β) Αντίστοιχο απλοποιημένο μαγνητικό κύκλωμα.

– **Ορθό πρόβλημα.**

Στο ορθό πρόβλημα οι μαγνητεγερτικές δυνάμεις M_1 και M_2 καθώς και οι μαγνητικές αντιστάσεις R_{m_1} , R_{m_2} και R_{m_3} θεωρούνται γνωστές και ζητούνται οι ροές Φ_1 , Φ_2 και Φ_3 .

Όπως στα ηλεκτρικά κυκλώματα έτσι και εδώ χρησιμοποιούμε για την επίλυσή τους τους δυο κανόνες αντίστοιχους των κανόνων του Kirchhoff, εάν:

- Στο μέγεθος **ηλεκτρεγερτική δύναμη** των κυκλωμάτων ΣΡ αντιστοιχίσαμε το μέγεθος **μαγνητεγερτική δύναμη** των μαγνητικών κυκλωμάτων. Η πολικότητα της μαγνητεγερτικής δυνάμεως λαμβάνεται έτσι, ώστε από τον κατά σύμβαση θετικό της πόλο να εξέρχεται η ροή, την οποία τείνει να δημιουργήσει η υπόψη ΜΕΔ στο κύκλωμα.
- Στο μέγεθος **ένταση ηλεκτρικού ρεύματος** των κυκλωμάτων ΣΡ αντιστοιχίσαμε το μέγεθος **μαγνητική ροή** των μαγνητικών κυκλωμάτων. Έτσι για τους δυο βρόχους του κυκλώματος θα έχουμε:

$$M_1 - M_2 = \Phi_1 R_{m_1} - \Phi_2 R_{m_2} \quad (13.45)$$

$$M_2 = \Phi_2 R_{m_2} + \Phi_3 R_{m_3} \quad (13.46)$$

Επίσης για τον κόμβο Α θα έχουμε:

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (13.47)$$

Από την επίλυση του συστήματος των τριών εξισώσεων (13.45), (13.46) και (13.47) προσδιορίζουμε τις ροές Φ_1 , Φ_2 και Φ_3 .

Οι μαγνητικές αντιστάσεις προσδιορίζονται από τη γνωστή σχέση:

$$R_m = \frac{l_m}{\mu \mu_0 S} \quad (13.48)$$

όπου: l_m το μέσο μήκος της μαγνητικής διαδρομής,

S η διατομή και

μ η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του υλικού.

Για τον αέρα αλλά και για τα παραμαγνητικά και διαμαγνητικά υλικά, το μ είναι ανεξάρτητο από τη ροή Φ και πρακτικά ίσο με τη μονάδα ($\mu = 1$). Για τα σιδηρομαγνητικά όμως υλικά το μ δεν είναι σταθερό αλλά υπολογίζεται από την καμπύλη $B = f(H)$, ανάλογα με την κάθε φορά επιβεβλημένη μαγνητική διέγερση H . Έτσι, δεν μπορεί να ορισθεί προκαταβολικά, ώστε να υπολογίσουμε τις αντιστάσεις. Συνεπώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες του Kirchhoff. Στην περίπτωση αυτή οι ροές προσδιορίζονται έμμεσα με γραφικό τρόπο, που ουσιαστικά στηρίζεται στη μεθοδολογία του αντίστροφου προβλήματος.

– **Αντίστροφο πρόβλημα.**

Στο αντίστροφο πρόβλημα δίνονται οι ροές Φ_1 , Φ_2 και Φ_3 , οι διαστάσεις και το υλικό του πλαισίου καθώς και η καμπύλη μαγνητίσεως $B = f(H)$. Για να υπολογίσουμε τις μαγνητεγερτικές δυνάμεις M_1 και M_2 ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Υπολογίζουμε τις μαγνητικές επαγωγές B_1 , B_2 και B_3 :

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} \quad \text{και} \quad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$$

β) Από την καμπύλη μαγνητίσεως υπολογίζουμε τις διεγέρσεις H_1 , H_2 και H_3 .
 γ) Η διεγερση H επί το μέσο μήκος l_m μιας διαδρομής παρέχει τη μαγνητική τάση. Σε μια κλειστή διαδρομή το άθροισμα των μαγνητικών τάσεων είναι ίσο με το άθροισμα των μαγνητεγερτικών δυνάμεων, σύμφωνα με το θεώρημα του Ampere. Άρα για τους δυο βρόχους θα έχουμε:

$$M_1 - M_2 = H_1 l_{m_1} - H_2 l_{m_2} \quad (13.49)$$

$$M_2 = H_2 l_{m_2} - H_3 l_{m_3} \quad (13.50)$$

Από την επίλυση του συστήματος προσδιορίζουμε τις αμπεροστροφές $M_1 = N_1 I_1$ και $M_2 = N_2 I_2$.

– **Το ορθό πρόβλημα σε ζύγωμα με σιδηρομαγνητικό υλικό.**

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε να επιλύσουμε το ορθό πρόβλημα σ' ένα απλό μαγνητικό ζύγωμα, όπως αυτό του σχήματος 13.9ζ, συγκροτημένο από σιδηρομαγνητικό υλικό, όπου επιπλέον υπάρχει διάκενο αέρα μήκους δ . Μας δίνονται όλες οι διαστάσεις του ζυγώματος, η καμπύλη μαγνητίσεως $B = f(H)$ του υλικού και η μαγνητεγερτική δύναμη M_1 . Ζητείται η ροή Φ_0 που διέρχεται από το κύκλωμα.

Ο τρόπος που ακολουθούμε είναι ο ακόλουθος:

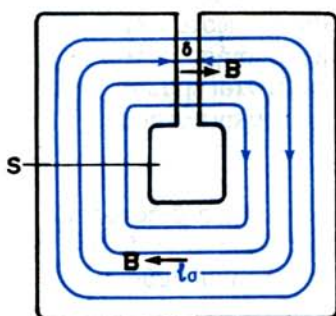
α) Δίνουμε αυθαίρετες τιμές Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 ... στη ροή και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες μαγνητεγερτικές δυνάμεις M_1 , M_2 , M_3 ...

β) Υπολογίζουμε τη μαγνητική επαγωγή από τη σχέση: $B = \Phi/S$

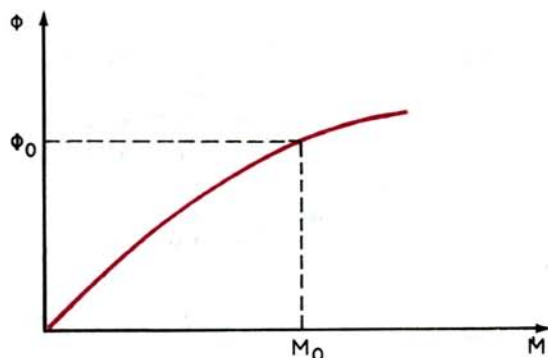
γ) Υπολογίζουμε τη διεγερση H_0 , για το τμήμα της ροής που διέρχεται μέσα από το υλικό, από την καμπύλη μαγνητίσεως $B = f(H)$. Η διεγερση H_0 στο διάκενο υπολογίζεται από τη σχέση: $H_0 = B/\mu_0$.

δ) Εφαρμόζουμε το νόμο του διαρρέυματος: $M = NI = H_0 l_0 + H_0 l_\delta$

ε) Σχεδιάζουμε την καμπύλη $\Phi = f(M)$. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται μαγνητική χαρακτηριστική του κυκλώματος (σχ. 13.9η). Από τη μαγνητική χαρακτηριστική υπολογίζουμε τη μαγνητική ροή Φ_0 που αντιστοιχεί στην τιμή M_0 που μας δόθηκε αρχικά.



Σχ. 13.9ζ.
Μαγνητικό ζύγωμα με διάκενο αέρα μήκους δ .



Σχ. 13.9η.
Μαγνητικά χαρακτηριστικά κυκλώματος.

Παράδειγμα 13.9.3.

Το μεσαίο σιδερένιο σκέλος του μαγνητικού ζυγώματος που φαίνεται στο σχήμα 13.9θ φέρει τύλιγμα που αποτελείται από 1000 σπείρες. Να υπολογισθεί το ρεύμα που απαιτείται για να δημιουργηθεί μαγνητική ροή $\Phi = \Phi_2 = \Phi_3 = 1 \text{ mWb}$ σε κάθε διάκενο αέρα ($l_0 = 0,2 \text{ cm}$). Υποθέτομε ότι η ροή σκεδάσεως είναι μηδέν. Η καμπύλη μαγνητίσεως του μαλακού σιδήρου δίνεται στο σχήμα 13.9ι. Δίνεται επίσης ότι $l_2 = l_3 = (αβγ) = (αθη) = (δκε) = (εμζ) = 15 \text{ cm}$ και $l_1 = (αε) = 12 \text{ cm}$.

Η μαγνητική επαγωγή στα πλευρικά σκέλη και στα διάκενα αέρα είναι:

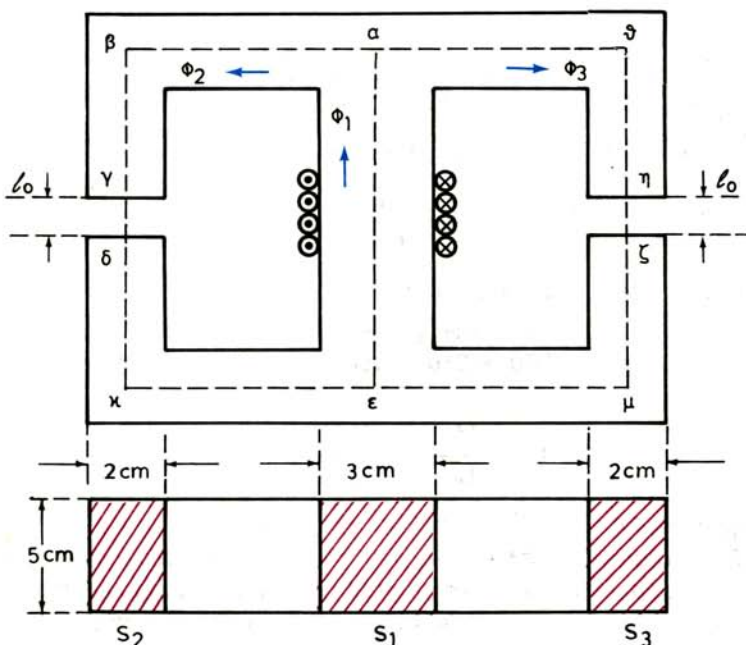
$$B_2 = B_3 = B_0 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ T}$$

Από την καμπύλη μαγνητίσεως $B = f(H)$ βρίσκουμε ότι η διέγερση στα πλευρικά σκέλη είναι:

$$H_2 = H_3 = 10 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 1000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

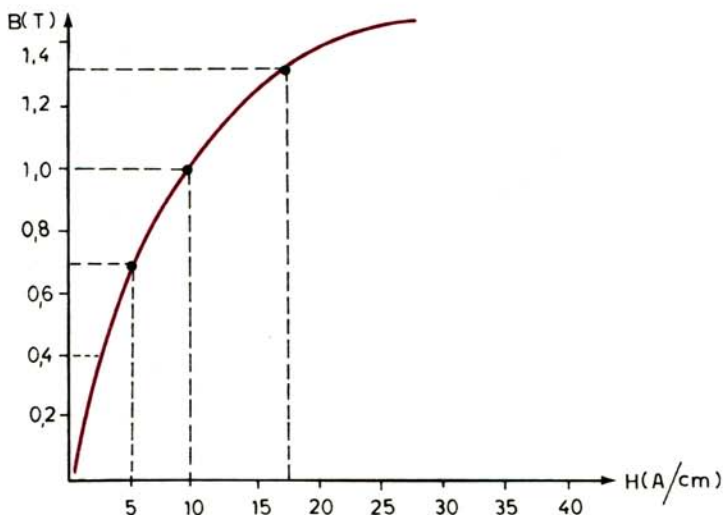
Η διέγερση στα διάκενα είναι:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 8 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$



Σχ. 13.9θ.

Ζύγωμα παραδείγματος 13.9.3.



Σχ. 13.9i.
Καμπύλη μαγνητίσεως μαλακού σιδήρου.

Είναι:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 2 \Phi = 2 \text{ mWb}$$

Άρα:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 10^{-4}} = 1,33 \text{ T}$$

Από την καμπύλη μαγνητίσεως βρίσκουμε ότι για:

$$B_1 = 1,33 \text{ T} \rightarrow H_1 = 18 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 1800 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Από το νόμο του Ampere έχουμε:

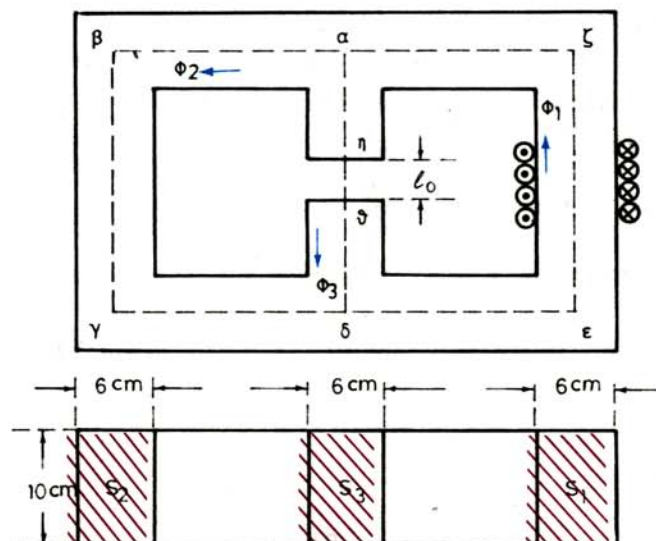
$$M = NI = \Sigma H\Delta l = H_2 l_2 + H_2 l_2 + H_1 l_1 + H_0 l_0 = 2H_2 l_2 + H_1 l_1 + H_0 l_0 = 2 \cdot 10 \cdot 15 + 18 \cdot 12 + 8 \cdot 10^3 \cdot 0,2 = 300 + 216 + 1600 \rightarrow M = NI = 2116 \text{ αμπεροστροφές}$$

οπότε:

$$I = \frac{M}{N} = \frac{2116}{1000} = 2,12 \text{ A}$$

Παράδειγμα 13.9.4.

Το δεξιό σιδερένιο σκέλος του μαγνητικού ζυγώματος που φαίνεται στο σχήμα 13.9ia φέρει τύλιγμα που αποτελείται από 840 σπείρες. Να υπολογισθεί το ρεύμα που απαιτείται για να δημιουργηθεί μαγνητική ροή στο διάκενο $\Phi_3 = 2,4 \text{ mWb}$. Η καμπύλη μαγνητίσεως του υλικού δίνεται στο σχήμα 13.9i. Δίνεται επίσης ότι $l_2 = (\alpha\beta\gamma\delta) = 48 \text{ cm}$, $l_1 = (\alpha\zeta\epsilon\delta) = l_2 = 48 \text{ cm}$ και $l_3 = (\alpha\delta) = 16 \text{ cm}$.



Σχ. 13.9α.
Ζυγώμα παραδείγματος 13.9.4.

Το σχήμα 13.9β δίνει απλοποιημένα το μαγνητικό κύκλωμα ζυγώματος του σχήματος 13.9α.

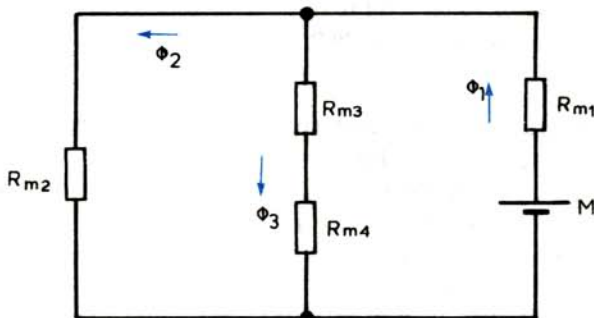
Στο κεντρικό σκέλος έχουμε:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \text{ T}$$

Από την καμπύλη μαγνητίσεως βρίσκουμε ότι για $B_3 = 0,4 \text{ T}$ έχουμε $H_3 = 2,5 \text{ A/cm}$.

Η μαγνητική διέγερση H_0 στο διάκενο είναι:

$$H_0 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{0,4}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 32,10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 3200 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$



Σχ. 13.9β.
Μαγνητικό κύκλωμα ζυγώματος σχήματος 13.9α.

Η μαγνητική τάση στο μεσαίο σκέλος είναι:

$$U_m = H_3 (l_3 - l_0) + H_0 l_0 = 5 \cdot 15,8 + 3200 \cdot 0,2 = 79 + 640 \rightarrow U_m = 719 \text{ A}$$

Η μαγνητική τάση είναι ίση με την τάση στο αριστερό σκέλος (παράλληλη σύνδεση), οπότε:

$$U_m = H_2 l_2 \rightarrow H_2 = \frac{U_m}{l_2} \approx 5 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

Από την καμπύλη μαγνητίσεως παίρνουμε: $H_2 = 5 \text{ A/cm} \rightarrow B_2 = 0,7 \text{ T}$.
Είναι:

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

οπότε:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Η μαγνητική επαγωγή στο δεξιό σκέλος θα είναι:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{6,6 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \text{ T}$$

Από την καμπύλη μαγνητίσεως για $B_1 = 1,1 \text{ T}$ παίρνουμε: $H_1 = 12,5 \text{ A/cm}$
οπότε:

$$M = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 48 (12,5 + 5) = 840 \text{ A} \rightarrow I = \frac{M}{N} = \frac{840}{840} = 1 \text{ A}$$

13.10 Ηλεκτρομαγνήτες και εφαρμογές τους.

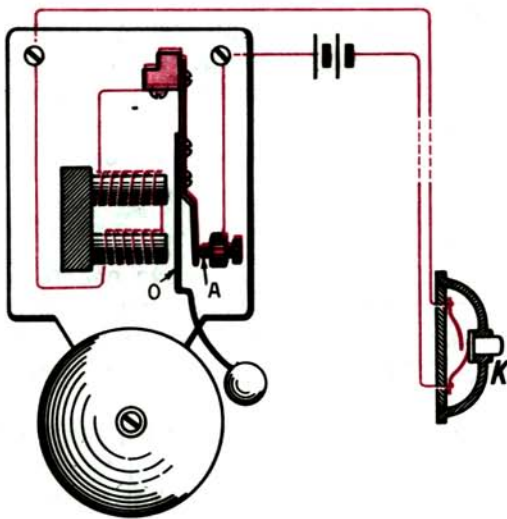
Οι ηλεκτρομαγνήτες γενικά είναι πηνία εφοδιασμένα με πυρήνες από μαλακά μαγνητικά υλικά (σε αντίθεση με τους μόνιμους μαγνήτες που κατασκευάζονται από σκληρά μαγνητικά υλικά). Συνήθως ο πυρήνας κατασκευάζεται από μαλακό σίδηρο έτσι, ώστε όταν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο διακοπεί, ο παραμένον μαγνητισμός να είναι μικρός. Η συσκευή δηλαδή δραστηριοποιείται μόνο όταν διέρχεται ρεύμα από την περιέλιξη (τύλιγμα) του ηλεκτρομαγνήτη. Με τους ηλεκτρομαγνήτες μπορούμε να αναπτύξουμε ισχυρά μαγνητικά πεδία, πολύ ισχυρότερα από τους μόνιμους μαγνήτες.

Παρακάτω αναφέρομε μερικές εφαρμογές των ηλεκτρομαγνητών.

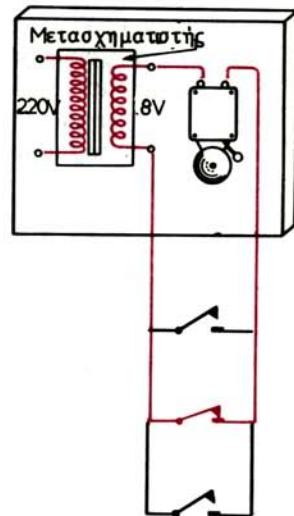
α) Ηλεκτρικό κουδούνι.

Στο ηλεκτρικό κουδούνι ο ευκίνητος οπλισμός Ο του ηλεκτρομαγνήτη καταλήγει σε πλήκτρο (σχ. 13.10α).

Όταν δεν πιέζουμε το κουμπί Κ ο οπλισμός βρίσκεται σε επαφή με την ακίδα Α. Όταν πιέζουμε το κουμπί, κλείνουμε το κύκλωμα, ο ηλεκτρομαγνήτης διεγείρεται και έλκει τον οπλισμό Ο. Τότε όμως διακόπτεται το κύκλωμα (στην ακίδα Α) και ο οπλισμός επανέρχεται στην αρχική του θέση. Το κύκλωμα κλείνει πάλι και επαναλαμβάνεται το ίδιο. Σε κάθε έλξη του οπλισμού αντιστοιχεί μια κρούση του πλήκτρου στο κουδούνι. Έτσι το ρεύμα που διαρρέει τον ηλεκτρομαγνήτη διακόπτεται και αποκαθίσταται πολλές φορές το δευτερόλε-



Σχ. 13.10α.
Ηλεκτρικό κουδούνι.



Σχ. 13.10β.
Κουδούνι με τρία κουμπιά.

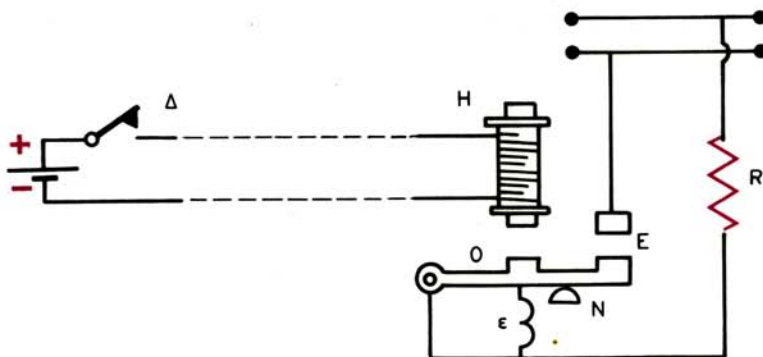
πτο. Η τροφοδότηση ενός κουδουνιού μπορεί να γίνει και με εναλλασσόμενη τάση. Στο σχήμα 13.10β σαν πηγή εναλλασσόμενης τάσεως χρησιμοποιείται μετασχηματιστής, ο οποίος παρέχει τάση 8 V.

Επίσης έχουμε τρία κουμπιά που βρίσκονται στα διάφορα σημεία π.χ. μιας οικίας. Είναι φανερό ότι όποιο κουμπί και αν πιέσουμε, το κουδούνι θα λειτουργήσει.

β) Ηλεκτρονόμοι (relais).

Είναι διατάξεις που χρησιμοποιούνται για την αποκατάσταση ή διακοπή ενός κυκλώματος από μεγάλη (ή μικρή) απόσταση (σχ. 13.10γ).

Ένας ηλεκτρομαγνήτης τροφοδοτείται από μια πηγή με ασθενές ρεύμα I . Το κύκλωμα του ηλεκτρομαγνήτη ονομάζεται οδηγό κύκλωμα. Όταν ο διακόπτης



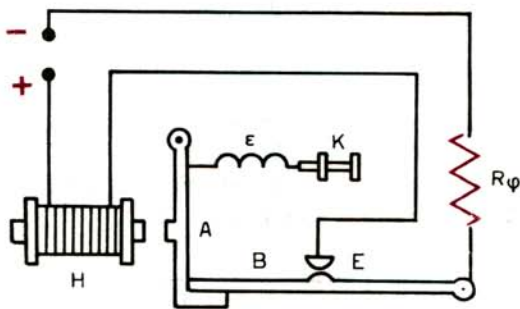
Σχ. 13.10γ.
Ηλεκτρονόμος.

Δ είναι ανοικτός, τότε ο οπλισμός Ο εφάπτεται στη νεκρή επαφή Ν και το κύκλωμα τροφοδοτήσεως του καταναλωτή R (κύριο κύκλωμα) είναι ανοικτό. Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ, ο ηλεκτρομαγνήτης διεγείρεται, έλκει τον οπλισμό Ο, η επαφή Ε αποκαθίσταται και το κύριο κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, που μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από το ρεύμα που διαρρέει το οδηγό κύκλωμα.

γ) Αυτόματοι διακόπτες.

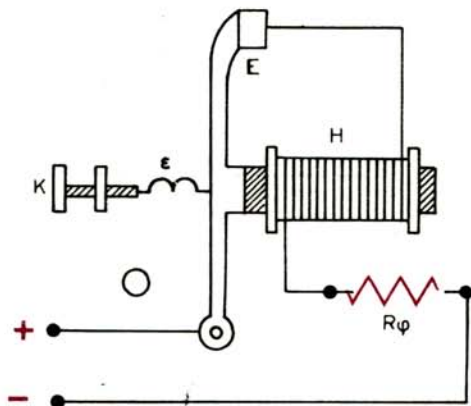
Με τους αυτόματους διακόπτες μπορούμε να διακόψουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα στις περιπτώσεις που η ένταση του ρεύματος υπερβεί μια ορισμένη τιμή (διακόπτης μέγιστου) ή γίνει μικρότερη από μια ορισμένη τιμή (διακόπτης ελάχιστου). Ο διακόπτης μέγιστου (σχ. 13.10δ) λειτουργεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Όταν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι η κανονική (αυτή δηλαδή που απαιτείται για να εκτελέσουμε μια εργασία), η έλξη που εξασκείται από τον ηλεκτρομαγνήτη στον οπλισμό Α δεν είναι ικανή να υπερνικήσει την έλξη του ελατηρίου ε και οι οπλισμοί Α και Β παραμένουν στη θέση τους. (Το κύκλωμα δηλαδή είναι κλειστό). Όταν όμως το ρεύμα αυξηθεί και υπερβεί την κανονική τιμή, τότε η δύναμη που εξασκεί ο ηλεκτρομαγνήτης στον οπλισμό Α είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που εξασκεί το ελατήριο με αποτέλεσμα να έλκεται από τον ηλεκτρομαγνήτη ο οπλισμός Α και το κύκλωμα να διακόπτεται (ο οπλισμός Β ελευθερώνεται και κατέρχεται προς τη νεκρή επαφή Ν). Ανάλογα λειτουργεί και ο διακόπτης ελάχιστου (σχ. 13.10ε).



Σχ. 13.10δ.
Αυτόματος διακόπτης (μέγιστου).

Σχ. 13.10ε.
Αυτόματος διακόπτης (ελάχιστου).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΕΠΑΓΩΓΗ

14.1 Γενικά.

Στα προηγούμενα κεφάλαια του βιβλίου αυτού αναπτύχθηκαν οι αρχές και αναφέρθηκαν εφαρμογές των χρονικά σταθερών (μονίμων) ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τις πιο βασικές θεωρίες σχετικά με τα χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Θα μελετήσουμε επίσης τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Ο πιο θεμελιώδης νόμος του ηλεκτρομαγνητισμού, που αναφέρεται στις αλληλεπιδράσεις αυτές, είναι ο νόμος της **επαγωγής**, σύμφωνα με τον οποίο:

*Αν κλειστό ηλεκτρικό κύκλωμα διαπεράται από μαγνητικές δυναμικές γραμμές, τότε η ενδεχόμενη χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής από το κύκλωμα συνεπάγεται την εμφάνιση στο κύκλωμα ηλεκτρεγερτικής δύναμews. Η ηλεκτρεγερτική αυτή δύναμη ονομάζεται **επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη**.*

Το **φαινόμενο της επαγωγής** παρατήρησε πρώτος ο Άγγλος φυσικός M. Faraday το 1831, ο οποίος έδωσε και την ποσοτική έκφραση του νόμου της επαγωγής, σύμφωνα με την οποία:

Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, που αναπτύσσεται σ' ένα κλειστό κύκλωμα, είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της συνολικής μαγνητικής ροής που διαπερνά το υπόψη κύκλωμα, δηλαδή:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (14.1)$$

Το πρόσημο «πλην» στην πιο πάνω σχέση του νόμου της επαγωγής δίνει και τον προσανατολισμό της ΗΕΔ, κάτι με το οποίο αναλυτικά θα ασχοληθούμε σε επόμενη παράγραφο. Ας προσθέσουμε ότι η σχέση (14.1) που εκφράζει και ποσοτικά το νόμο της επαγωγής, απαντάται στη βιβλιογραφία και ως **νόμος του Faraday**. Το νόμο αυτό θα αποδείξουμε, σε απλή γεωμετρία κυκλώματος, στην επόμενη παράγραφο.

Πριν όμως προχωρήσουμε στη θεωρητική ανάπτυξη του φαινομένου της επαγωγής σκόπιμο είναι να αναφέρομε πρώτα μια σημαντική πρακτική δυνατότητα που συνεπάγεται:

Αν σ' ένα χώρο, όπου υφίσταται μαγνητικό πεδίο, καταβάλλοντας μηχανική ενέργεια μεταβάλλουμε χρονικά τη ροή των μαγνητικών δυναμικών γραμμών, τότε στο χώρο αυτό μπορεί να αναπτυχθεί ΗΕΔ και συνεπώς ηλεκτρικό πεδίο.

Το φαινόμενο αυτό, που ανακάλυψε ο Faraday, είναι ακριβώς αντίστροφο του φαινομένου που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 11, και ιδιαίτερα στο παράδειγμα 11.7.1, όπου γνωρίσαμε ότι ηλεκτρική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε μηχανική ενέργεια δυνάμεων Laplace, σε ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Μάλιστα είχαμε διατυπώσει ότι η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας (ΔW) σε ρευματοφόρο βρόχο που κινείται σε μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\Delta W = I \cdot \Delta \Phi \quad (14.2)$$

όπου $\Delta \Phi$ η μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το βρόχο κατά τη μετατόπισή του.

Αλλά ας δούμε πώς, καταβάλλοντας μηχανική ενέργεια, μπορούμε να μεταβάλλουμε χρονικά τη μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια ενός βρόχου. Γενικά, η μαγνητική αυτή ροή επηρεάζεται από τη σχέση (11.20), δηλαδή:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sigma \nu \alpha \quad (14.3)$$

όπου: B η μαγνητική επαγωγή,

S η επιφάνεια του βρόχου και

α η γωνία που σχηματίζουν οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές με το διάνυσμα προσανατολισμού της επιφάνειας του βρόχου.

Αν παραγωγίσουμε, ως προς το χρόνο t, τη σχέση (14.3), λαμβάνουμε:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \sigma \nu \alpha \frac{dS}{dt} + B \cdot S \frac{d(\sigma \nu \alpha)}{dt} + S \cdot \sigma \nu \alpha \frac{dB}{dt} \quad (14.4)$$

Από τη σχέση (14.4) προκύπτει ότι για να δημιουργήσουμε ρυθμό μεταβολής της ροής και επομένως επαγωγική ΗΕΔ, θα πρέπει να μεταβάλλουμε ή την επιφάνεια του βρόχου S ή τη γωνία α ή τη μαγνητική επαγωγή B. Οι μεταβολές αυτές μπορεί πρακτικά να γίνουν με ένα από τους εξής τρόπους:

α) Μεταβάλλουμε το εμβαδόν S του βρόχου, ενώ αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, μετακινώντας π.χ. μια του πλευρά. Τότε, δοθέντος ότι B = σταθ., α = σταθ., έχουμε:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \sigma \nu \alpha \frac{dS}{dt} \quad (14.5a)$$

β) Περιστρέφουμε το βρόχο μέσα σε μαγνητικό πεδίο (όπως συμβαίνει στις γεννήτριες) και έτσι μεταβάλλουμε τη γωνία α (B = σταθ., S = σταθ.), οπότε:

$$\frac{d\Phi}{dt} = BS \frac{d\sigma \nu \alpha}{dt} = -BS \eta \mu \alpha \quad (14.5b)$$

γ) Μεταβάλλουμε τη μαγνητική επαγωγή B (S = σταθ., α = σταθ.), οπότε:

$$\frac{d\Phi}{dt} = S \sigma \nu \alpha \frac{dB}{dt} \quad (14.5\gamma)$$

δ) Μετακινούμε το βρόχο σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο, οπότε μεταβάλλεται η μαγνητική επαγωγή B και επομένως και η ροή.

ε) Βάζομε (ή βγάζομε) σε ομογενές μαγνητικό πεδίο το βρόχο, οπότε μεταβάλλεται η S και φυσικά και η ροή.

Η καταπληκτική ανάπτυξη της ηλεκτροτεχνίας οφείλεται στην ανακάλυψη του φαινομένου της επαγωγής, του οποίου η πλήρης γνώση είναι απαραίτητη για την κατανόηση της λειτουργίας των ηλεκτρικών μηχανών, των μετασχηματιστών, της παραγωγής εναλλασσομένων ρευμάτων και πλήθους άλλων εφαρμογών.

14.2 Νόμος του Faraday.

Θεωρούμε αγωγό μήκους $l = (AB)$ που κινείται με ταχύτητα \vec{v} κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής B [σχ. 14.2α)].

Σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο του αγωγού θα εξασκείται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη Laplace ίση με: $\vec{F} = -e[\vec{v} \times \vec{B}]$.

Εφόσον υποθέτομε ότι ο αγωγός κινείται κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές, το μέτρο της δυνάμεως Laplace θα ισούται:

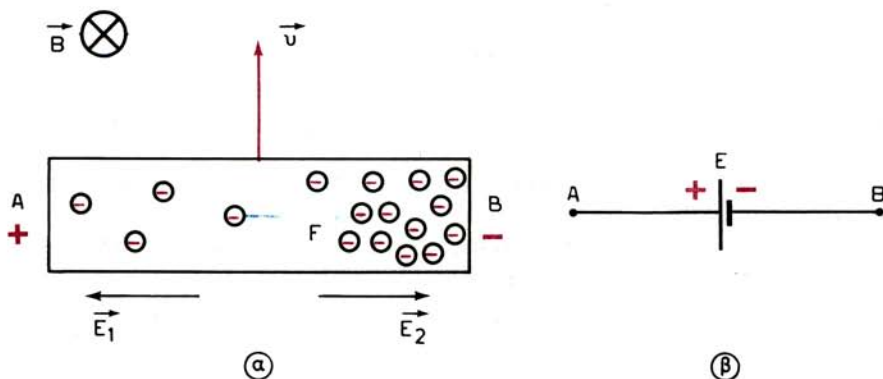
$$F = evB \quad (14.6)$$

Η διεύθυνσή της θα είναι κατά τον άξονα του αγωγού, και η φορά της, στο σχήμα 14.2α, από αριστερά προς τα δεξιά. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο 2.2, μπορούμε στην παραπάνω δύναμη **να αντιστοιχίσουμε** ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως:

$$E_1 = \frac{F}{e} \quad (14.7)$$

Από τις (14.6) και (14.7) προκύπτει:

$$E_1 = vB \quad (14.8)$$



Σχ. 14.2α.

- α) Κατά την κίνηση αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο, στα ηλεκτρόνιά του ασκείται δύναμη \vec{F} .
β) Πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ.

Εξάλλου τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, υπό την επίδραση των δυνάμεων Laplace, θα αρχίσουν να μετακινούνται προς το άκρο A του αγωγού. Εξαιτίας της μετακίνησης αυτής το ένα άκρο A του αγωγού εμφανίζεται θετικά φορτισμένο, ενώ το άλλο άκρο B αρνητικά φορτισμένο. Δημιουργείται έτσι μεταξύ των άκρων του αγωγού μια διαφορά δυναμικού $U_A - U_B$, η οποία συνεχώς αυξάνεται, εφόσον συνεχίσει να μετακινούνται ηλεκτρόνια από το ένα άκρο στο άλλο. Όμως, η μετακίνηση αυτή των ηλεκτρονίων έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός δεύτερου ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_2 αντίρροπου του \vec{E}_1 , με μέτρο:

$$E_2 = \frac{U_A - U_B}{l} \quad (14.9)$$

Εξυπακούεται ότι η μετακίνηση των ηλεκτρονίων θα σταματήσει όταν

$$E_1 = E_2 \quad (14.10)$$

ή ανυσηματικά:

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad (14.11)$$

Στην περίπτωση αυτή μεταξύ των άκρων του αγωγού έχει αποκατασταθεί μια σταθερή διαφορά δυναμικού, η οποία ονομάζεται επαγωγική ΗΕΔ ή επαγωγική τάση $E = U_A - U_B$.

Από τις (14.8), (14.9) και (14.10) προκύπτει:

$$uB + \frac{U_A - U_B}{l} = E = U_A - U_B = uBl \quad (14.12)$$

Ο θετικός πόλος της E είναι το άκρο A και ο αρνητικός το άκρο B [σχ. 14.2α(β)]. Στη γενική περίπτωση που το άνυσμα της ταχύτητας του αγωγού σχηματίζει με το άνυσμα της μαγνητικής επαγωγής γωνία α η σχέση (14.12) γράφεται:

$$E = Blv \sin \alpha \quad (14.13)$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι εφόσον χρησιμοποιηθούν μονάδες του S.I. για τα μεγέθη του θ' μέλους της εξισώσεως (14.13), (δηλαδή: η B σε T, το l σε m, η u σε m/s), τότε η επαγωγική ΗΕΔ προκύπτει σε Volt.

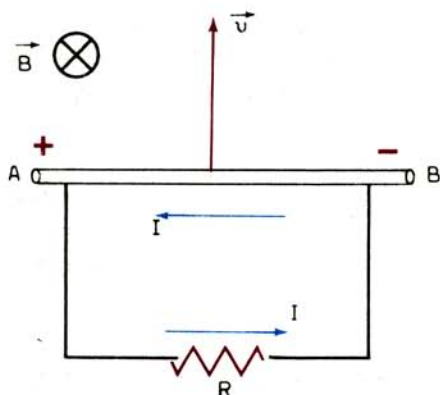
Σε πολλά βιβλία ηλεκτροτεχνίας η σχέση (14.13) αναφέρεται ως ο **πρώτος νόμος της επαγωγής**.

Αν ο αγωγός αποτελεί τμήμα κλειστού κυκλώματος αντιστάσεως R (σχ. 14.2β), τότε το κύκλωμα θα διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (14.14)$$

Το ρεύμα αυτό ονομάζεται **επαγωγικό ρεύμα** και η φορά του βρίσκεται πρακτικά με τον **κανόνα των τριών δακτύλων** του δεξιού χεριού:

Αν ο αντίχειρας δείχνει την ταχύτητα \vec{v} του αγωγού και ο δείκτης τη φορά



Σχ. 14.26.

Δημιουργία επαγωγικού ρεύματος.

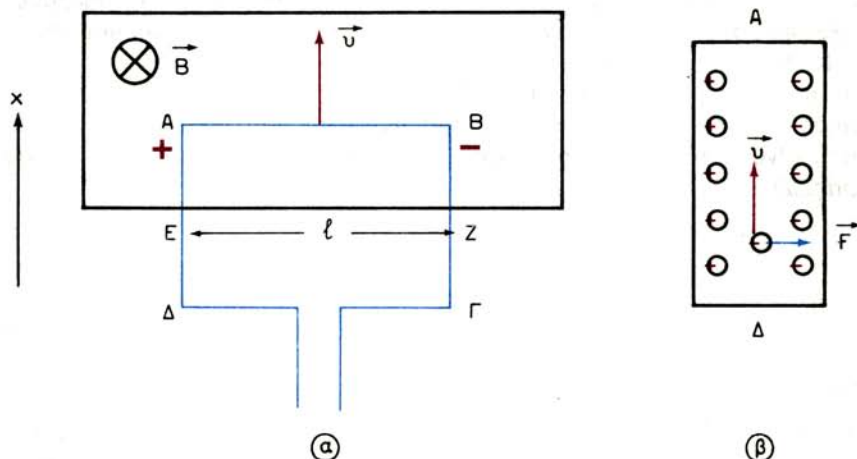
της \vec{B} , τότε ο μέσος δείχνει τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό.

Θεωρούμε τώρα το ορθογώνιο πλαίσιο ΑΒΓΔ [σχ. 14.2γ(α)] το οποίο εισέρχεται με ταχύτητα \vec{u} ($u = dx / dt$) μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , κινούμενο κάθετα προς το πεδίο.

Επαγωγική τάση αναπτύσσεται μόνο στον αγωγό ΑΒ, γιατί στους αγωγούς ΑΔ και ΒΓ (ακριβέστερα στους αγωγούς ΑΕ και ΒΖ) παρατηρείται μόνο μια μικρή πλευρική διαφορά δυναμικού [σχ. 14.2γ(β)], που δεν μας ενδιαφέρει, ενώ ο αγωγός ΓΔ βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου. Άρα το μέτρο της επαγωγικής ΗΕΔ θα είναι κατά την (14.12):

$$E = B/u = Bl \frac{dx}{dt} = B \frac{dS}{dt} \quad (14.15)$$

όπου $dS = l dx$ το εμβαδόν του πλαισίου που θα εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο μέσα σε χρόνο dt .



Σχ. 14.2γ.

α) Κίνηση πλαισίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο. β) Τομή αγωγού (ΑΔ).

Αν η κίνηση του πλαισίου είναι ισοταχής, τότε η παραγόμενη επαγωγική ΗΕΔ E , έχει σταθερή χρονικά τιμή. Αν όμως αυτό δεν συμβαίνει, τότε η σχέση (14.15) παρέχει τη στιγμιαία τιμή της επαγωγικής ΗΕΔ, οπότε γράφουμε την απόλυτη τιμή της στιγμιαίας επαγωγικής ΗΕΔ:

$$e = E(t) = B \frac{dS}{dt} \quad (14.16)$$

Εξάλλου η μεταβολή της μαγνητικής ροής που περνά από το πλαίσιο σε χρόνο dt θα είναι:

$$d\Phi = B \cdot dS \quad (14.17)$$

Αυτό συμβαίνει επειδή σε χρόνο dt , επιφάνεια dS του πλαισίου εισέρχεται στο χώρο όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο. Από τις σχέσεις (14.16) και (14.17) μπορούμε να πάρουμε την απόλυτη τιμή της στιγμιαίας επαγωγικής ΗΕΔ:

$$e = \frac{d\Phi}{dt}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και κατά την κίνηση οποιουδήποτε σχήματος πλαισίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Μάλιστα, επεκτείνεται η ισχύς της και στην περίπτωση που το πλαίσιο δεν κινείται, αλλά μεταβάλλεται χρονικά αυτό το ίδιο το μαγνητικό πεδίο. Σε κάθε περίπτωση, για τη γενίκευση της ισχύος της, η σχέση γράφεται προσημασμένη ως:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (14.18)$$

ώστε να παρέχει και το πρόσημο της επαγωγικής ΗΕΔ. Σχετικά με την ερμηνεία του προσήμου αυτού θα επανέλθουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η σχέση (14.18) αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του **νόμου της επαγωγής (Faraday)**, ο οποίος στη γενική περίπτωση που το πλαίσιο έχει N σπείρες, διατυπώνεται ως εξής:

Αν η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από πλαίσιο μεταβληθεί κατά $d\Phi$ μέσα σε χρόνο dt , τότε στα άκρα του πλαισίου αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ που είναι ίση με την ταχύτητα μεταβολής της ροής επί τον αριθμό των σπειρών του πλαισίου:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} N \quad (14.19)$$

Σε πολλά βιβλία η σχέση (14.19) αναφέρεται ως ο δεύτερος (γενικός) νόμος της επαγωγής.

Το γινόμενο
$$\Psi = N \cdot \Phi \quad (14.20)$$

των σπειρών επί τη ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα ενός πλαισίου ή σωληνοειδούς, ονομάζεται πεπλεγμένη ή **αλληλένδετη ροή** του σωληνοειδούς. Βέβαια η σχέση (14.20) ισχύει εφόσον από όλες τις σπείρες του σωληνοειδούς διέρχεται η ίδια μαγνητική ροή. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η (14.20) γράφεται

ως το άθροισμα των ρών που διέρχονται από κάθε μια σπείρα του σωληνοειδούς. Μετά την εισαγωγή του μεγέθους της αλληλένδετης ροής, η σχέση (14.19) γίνεται:

$$e = - \frac{d\psi}{dt} \quad (14.21)$$

Αν το πλαίσιο ή το σωληνοειδές έχει ολική ωμική αντίσταση R τότε η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει, είναι:

$$i(t) = - \frac{d\Phi}{dt} \frac{N}{R} \quad (14.22)$$

Το φορτίο dq που θα περάσει από μια τομή ενός αγωγού του πλαισίου σε χρόνο dt θα είναι:

$$dq = Idt \quad (14.23)$$

Από τις (14.22) και (14.23) προκύπτει:

$$dq = - \frac{Nd\Phi}{R} \quad (14.24)$$

Συνεπώς, η απόλυτη τιμή της στοιχειώδους ενέργειας του επαγωγικού ρεύματος θα είναι:

$$dW = Eidt \rightarrow dW = NId\Phi \quad (14.25)$$

14.3 Φορά του επαγωγικού ρεύματος – Κανόνας του Lenz.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στην παράγραφο αυτή θα δικαιολογήσουμε το πρόσημο «πλην» που αυθαίρετα θέσαμε στις σχέσεις (14.18) και (14.19), που εκφράζουν το νόμο της επαγωγής.

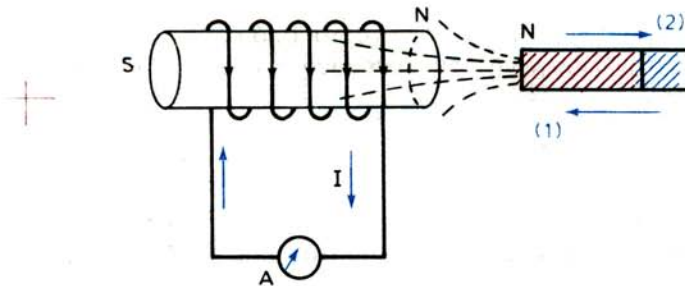
Η αιτιολόγηση αυτή στηρίζεται ουσιαστικά σε πρόταση που στηρίζεται στο αξίωμα διατηρήσεως της ενέργειας. Η πρόταση αυτή φέρει την ονομασία **κανόνας του Lenz*** και διατυπώνεται ως εξής:

Τα επαγωγικά ρεύματα, καθώς και οι δυνάμεις που εξασκούνται σ' αυτά, έχουν τέτοια φορά, ώστε να αντιδρούν στο αίτιο που τα παράγει.

Μια πειραματική απόδειξη του κανόνα του Lenz μπορεί να γίνει με τη διάταξη του σχήματος 14.3α. Στο κύκλωμα των σπειρών ενός πηνίου παρεμβάλλεται αμπερόμετρο. Κατά τον άξονα του πηνίου **μπορεί να κινείται μαγνήτης**. Αν ο μαγνήτης κινηθεί κατά τη φορά (1), πλησιάζοντας στο πηνίο, τότε μεταβάλλεται (αυξάνεται) η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πηνίο. Έτσι, αναπτύσσεται στα άκρα του επαγωγική ΗΕΔ και επαγωγικό βέβαια ρεύμα, εφόσον το κύκλωμα είναι κλειστό.

Το ρεύμα αυτό, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, θα πρέπει να έχει τέτοια φορά, ώστε να αντιτίθεται στην αιτία που το προκάλεσε. Το αίτιο είναι η αύξηση της μαγνητικής ροής (που προκαλείται από την κίνηση του βόρειου πόλου του

* H. F. Lenz, φυσικός από τη Βαλτική, 1804-1865.



Σχ. 14.3α.

Διάταξη για την πειραματική απόδειξη του κανόνα του Lenz.

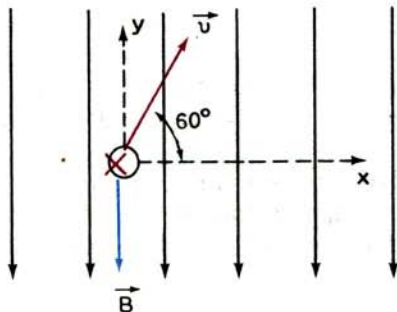
μαγνήτη κατά τη φορά 1), επομένως το άκρο του πηνίου, στο οποίο πλησιάζει ο βόρειος πόλος του μαγνήτη, θα γίνει βόρειος πόλος (για να προκληθεί άπωση) και το άλλο άκρο θα γίνει νότιος. Για να συμβεί αυτό πρέπει το ρεύμα που διαρρέει τις σπείρες να έχει τη φορά που σημειώνεται στο σχήμα. Αντίθετη φορά θα έχει όταν ο μαγνήτης κινηθεί κατά τη φορά 2. Φανερό είναι ότι η ενέργεια του επαγωγικού ρεύματος θα πρέπει να είναι ίση με το έργο που δαπανήσαμε για να κινησόμαστε το μαγνήτη.

Με τον κανόνα του Lenz εξηγείται το αρνητικό πρόσημο στο νόμο της επαγωγής.

Ο κανόνας του Lenz μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει το χαρακτήρα της αδράνειας του μαγνητικού πεδίου. Κάθε μεταβολή του μαγνητικού πεδίου τείνει να εμποδισθεί από το επαγωγικά ρεύματα που επάγονται στους αγωγούς, που βρίσκονται μέσα στην περιοχή του πεδίου. Με τον τρόπο αυτό το μαγνητικό πεδίο τείνει να διατηρήσει την κατάστασή του, όπως ακριβώς τα σώματα τείνουν να διατηρήσουν την κινητική τους κατάσταση μέσα στο πεδίο βαρύτητας.

Παράδειγμα 14.3.1.

Αγωγός μήκους $l = 1 \text{ m}$ κινείται με ταχύτητα $u = 2 \text{ m/s}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο $B = 2 \text{ T}$ (σχ. 14.3β). Αν ο αγωγός αποτελεί τμήμα κλειστού κυκλώματος που έχει συνολική αντίσταση $R = 1 \Omega$, να υπολογισθεί το ρεύμα που τον διαρρέει.



Σχ. 14.3β.

Είναι:

$$E = Blv \sin(\vec{v}, \vec{B}) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \text{ ημ}(60^\circ + 90^\circ) = 4 \text{ ημ } 150^\circ \rightarrow E = 2 \text{ V}$$

Άρα:

$$I = \frac{E}{R} = 1 \text{ A}$$

Αν αναλύσουμε την ταχύτητα \vec{v} σε δυο συνιστώσες v_x και v_y παρατηρούμε ότι:

$$\text{ημ}(\vec{v}, \vec{B}) = \text{ημ } 150^\circ = \text{ημ } 30^\circ = v_x$$

Η v_y δεν συμμετέχει στην ανάπτυξη επαγωγικής ΗΕΔ γιατί είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του πεδίου.

Για τον προσδιορισμό της φοράς του ρεύματος χρησιμοποιούμε τον κανόνα των τριών δακτύλων, δηλαδή το ρεύμα θα έχει φορά από τον αναγνώστη προς το επίπεδο της σελίδας (ο αντίχειρας δείχνει τη φορά της v_x τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό).

Παράδειγμα 14.3.2.

Να υπολογισθεί και στις δυο περιπτώσεις το ρεύμα που διαρρέει τη σπείρα του σχήματος 14.3γ.

α) Οι επαγωγικές ΗΕΔ που αναπτύσσονται στα άκρα των δυο πλευρικών αγωγών είναι:

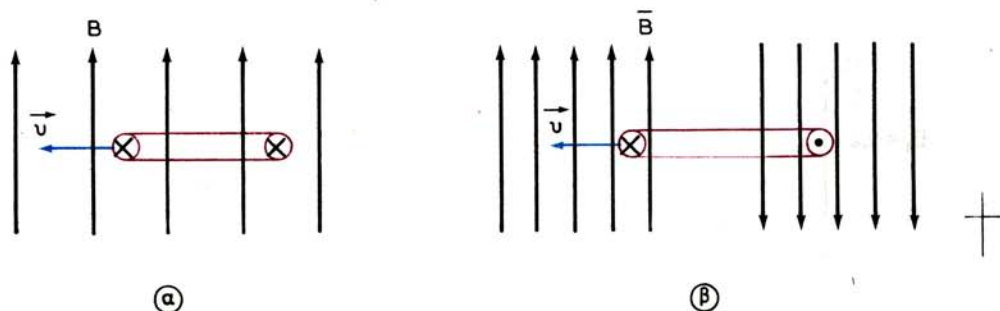
$$E_1 = E_2 = E = Blv$$

Η περίπτωση αυτή είναι όμοια με την περίπτωση κατά την οποία δυο ηλεκτρικές πηγές με την ίδια ΗΕΔ E έχουν συνδεθεί, όπως δείχνει το σχήμα 13.3δ (R είναι η συνολική αντίσταση της σπείρας).

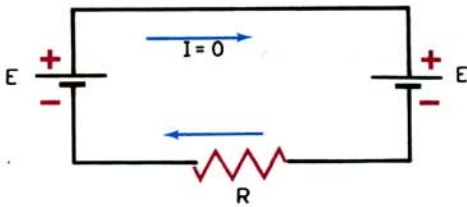
Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E - E}{R} = 0$$

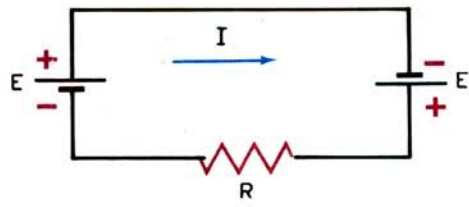
β) Στην περίπτωση αυτή οι δυο πλευρικοί αγωγοί της σπείρας κινούνται μέσα σε μαγνητικά πεδία που έχουν την ίδια επαγωγή B αλλά αντίθετη φορά (όπως



Σχ. 14.3γ.



Σχ. 14.35.



Σχ. 14.3ε.

συμβαίνει στις ηλεκτρικές μηχανές). Η περίπτωση αυτή είναι όμοια με την περίπτωση του σχήματος 14.3ε, όπου δυο πηγές με την ίδια ΗΕΔ E έχουν συνδεθεί σε σειρά.

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E+E}{R} = \frac{2E}{R} = \frac{2Blv}{R}$$

Παράδειγμα 14.3.3.

Πηνίο αποτελούμενο από 100 σπείρες εμβαδού 20 cm^2 βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B_1 = 0,2 \text{ T}$ έτσι, ώστε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου να είναι κάθετες στα επίπεδα των σπειρών του. Αν η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται, όπως δείχνει το διάγραμμα του σχήματος 14.3στ, να υπολογισθεί η επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου.

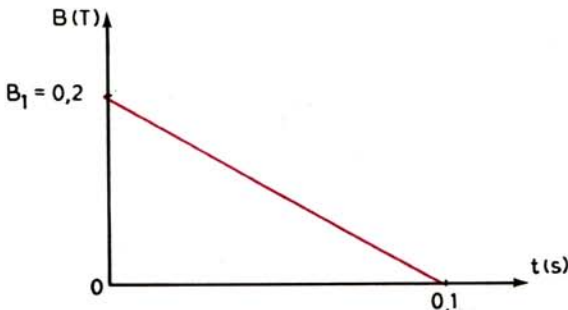
Είναι:

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot S \frac{dB}{dt} \quad (1)$$

Από το σχήμα 14.3στ προκύπτει ότι η συνάρτηση $B = f(t)$ είναι: $B = 0,2 - \frac{0,2}{0,1}t$

Άρα:

$$\frac{dB}{dt} = -2 \quad (2)$$



Σχ. 14.3στ.

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$E = 100.20.10^{-4} \cdot 2 = 0,4 \text{ V}$$

14.4 Ρεύματα Foucault (δινορρεύματα).

Τα επαγωγικά ρεύματα τα οποία δημιουργούνται σε μεταλλικές μάζες, όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που τις διαπερνά, ονομάζονται **δινορρεύματα** ή **ρεύματα Foucault**.

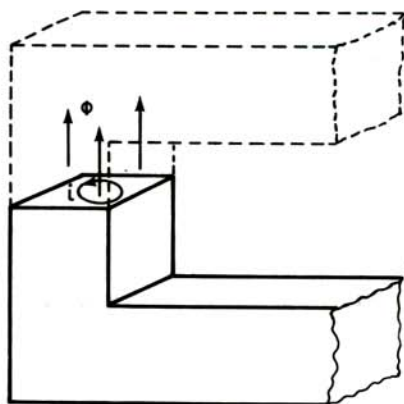
Τα ρεύματα Foucault δημιουργούνται σε μεταλλικές μάζες, που κινούνται σε μαγνητικό πεδίο είτε σταθερής είτε μεταβαλλόμενης μαγνητικής επαγωγής ή μένουν ακίνητες μέσα σε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Τα ρεύματα Foucault διαφέρουν από τα συνήθη επαγωγικά ρεύματα στο ότι διανύουν κλειστές τροχιές μέσα στις μεταλλικές μάζες, όπως φαίνεται στο σχήμα 14.4α, και επομένως δεν μπορούν να διοχετευθούν σε εξωτερικό κύκλωμα.

Η φορά των ρευμάτων Foucault είναι τέτοια, ώστε οι δυνάμεις Laplace που εξασκούνται σ'αυτά να τείνουν να αναιρέσουν την κίνησή τους. Έτσι π.χ. ο περιστρεφόμενος δίσκος του σχήματος 14.4β υφίσταται ισχυρή πέδηση (φρενάρισμα), όταν διεγερθεί ο ηλεκτρομαγνήτης AB.

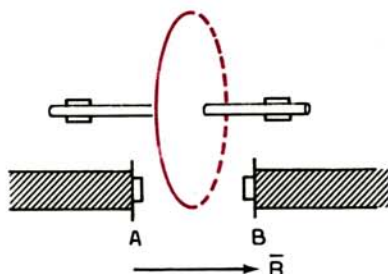
Αυτό συμβαίνει γιατί στα επαγωγικά ρεύματα που δημιουργούνται εξασκούνται δυνάμεις Laplace οι οποίες, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, τείνουν να αναιρέσουν την κίνηση του δίσκου. Γι' αυτό το λόγο τα ρεύματα Foucault βρίσκουν πρακτική εφαρμογή στην κατασκευή ηλεκτρομαγνητικών φρένων καθώς και στην απόσβεση της κινήσεως των κινητών συστημάτων των ηλεκτρικών οργάνων (π.χ. Αμπερόμετρα, Βολτόμετρα κλπ.).

Επειδή οι μεταλλικές μάζες παρουσιάζουν μικρή αντίσταση, τα δινορρεύματα έχουν μεγάλη ένταση με αποτέλεσμα να παράγεται στο εσωτερικό των



Σχ. 14.4α.

Ρεύματα Foucault (δινορρεύματα)
σε μεταλλική μάζα.



Σχ. 14.4β.

Περιστρεφόμενος δίσκος υφιστάμενης
πέδησεως λόγω ρευμάτων Foucault.

μαζών μεγάλο ποσό θερμότητας. Χρήση της θερμότητας αυτής γίνεται στην κατασκευή ηλεκτρικών κλιβάνων. Σε άλλες όμως περιπτώσεις, όπως π.χ. στους πυρήνες των ηλεκτρικών μηχανών, των μετασχηματιστών κλπ. η θερμότητα αυτή μεγαλώνει τις απώλειες ισχύος και προκαλεί πρόσθετη αύξηση της θερμοκρασίας (επιζήμια για τη λειτουργία της μηχανής). Για να περιορίζονται τα ρεύματα Foucault χρησιμοποιούμε, αντί για συμπαγείς πυρήνες, πολύ λεπτά σιδερένια ελάσματα, που είναι ηλεκτρικά μονωμένα μεταξύ τους.

Τα δινορρεύματα περιορίζονται επίσης όταν αυξήσουμε την ειδική αντίσταση του υλικού που χρησιμοποιούμε στον πυρήνα. (Έτσι κατασκευάζονται ειδικά κράματα, π.χ. σιδήρου, με μικρή περιεκτικότητα πυριτίου).

14.5 Αυτεπαγωγή.

Γνωρίζουμε ότι γύρω από ρευματοφόρο αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο. Μαγνητικό πεδίο επίσης δημιουργείται σε σωληνοειδές διαρρέομενο από ρεύμα. Κάθε μεταβολή της εντάσεως του ρεύματος επιφέρει ανάλογη μεταβολή στη μαγνητική επαγωγή, η οποία και αυτή επιφέρει μεταβολή στη μαγνητική ροή με αποτέλεσμα να δημιουργείται στα άκρα του αγωγού ή του πηνίου επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αυτεπαγωγή**.

Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δημιουργείται στα άκρα ενός πηνίου ή αγωγού και γενικά σ' ένα κύκλωμα επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, εξαιτίας της μεταβολής της εντάσεως του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα αυτό.

Συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta I \rightarrow \Delta B \rightarrow \Delta \Phi \rightarrow E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Η επαγωγική ΗΕΔ που δημιουργείται ονομάζεται **ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτεπαγωγής**.

Αν ο αγωγός έχει σχήμα σωληνοειδούς πηνίου, τότε το φαινόμενο της αυτεπαγωγής είναι ακόμη πιο έντονο, διότι αυτεπαγωγική ΗΕΔ δημιουργείται σε κάθε μια από τις N σπείρες του.

Ορίζουμε ως **συντελεστή αυτεπαγωγής** (L) ενός αγωγού ή γενικότερα ενός σωληνοειδούς που διαρρέεται από ρεύμα I και έχει αλληλένδετη ροή Ψ , το πηλίκον:

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (14.26)$$

Βέβαια, αν το σωληνοειδές έχει μια μόνο σπείρα ή είναι απλός αγωγός, τότε η σχέση (14.26) καθίσταται:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Μονάδες του συντελεστή αυτεπαγωγής, ο οποίος όπως θα διαπιστώσουμε σε επόμενες παραγράφους εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία του αγωγού και

από τις μαγνητικές ιδιότητες του χώρου που τον περιβάλλει, είναι:

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$$

Η μονάδα αυτή έχει δική της ονομασία, το Henry, γράφομε δηλαδή:

$$1 \text{ H} = \frac{1 \text{ Wb}}{\text{A}}$$

Ας σημειωθεί ότι μετά την εισαγωγή της μονάδας της αυτεπαγωγής, οι μονάδες της απόλυτης μαγνητικής διαπερατότητας γίνονται:

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{V} \cdot \text{S}}{\text{Am}} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Wb}}{\text{Am}} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Τέλος, θα πρέπει να επισημόνομε την εννοιολογική αναλογία μεταξύ της σχέσεως (14.26) ορισμού της αυτεπαγωγής και της σχέσεως (3.2) ορισμού της χωρητικότητας ($C = q/U$). Στο σημείο όμως αυτό καθώς και στη φυσική του σημασία, θα επανέλθομε σε επόμενη παράγραφο.

Είναι αυτονόητο ότι η ΗΕΔ αυτεπαγωγής μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση (14.21) η οποία, αν ληφθεί υπόψη ο ορισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής, γίνεται:

$$e_i = -L \frac{di}{dt} \quad (14.27)$$

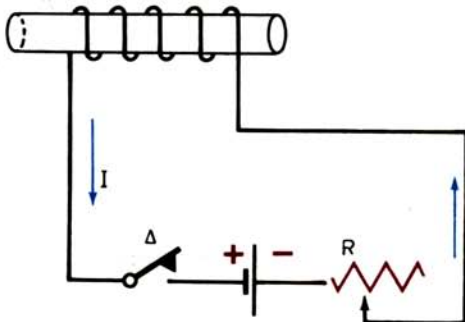
Η σχέση (14.27) υποδηλώνει ότι:

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτεπαγωγής είναι ανάλογη προς την ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής και την ΗΕΔ αυτεπαγωγής σε απλές γεωμετρίες ρευματοφόρων αγωγών.

14.5.1 Υπολογισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής και της ηλεκτρεγερτικής δύναμης αυτεπαγωγής σωληνοειδούς.

Θεωρούμε σωληνοειδές μήκους l που έχει N σπείρες εμβαδού S αλλά συμπεριφέρεται σαν να είχε άπειρο μήκος (σχ. 14.5α). Συνδέομε τα άκρα του



Σχ. 14.5α.
Κύκλωμα τροφοδοσίας σωληνοειδούς.

σωληνοειδούς με ηλεκτρική πηγή παρεμβάλλοντας στο κύκλωμα και το ροοστάτη R.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου είναι:

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 \frac{NI}{l} S \quad (14.28)$$

Η αλληλένδετη ροή του πηνίου θα είναι:

$$\Psi = \Phi \cdot N = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{l} S \quad (14.29)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του συντελεστή αυτεπαγωγής, σχέση (14.26), θα έχουμε:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

δηλαδή, ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (14.30)$$

εξαρτάται από τη σχετική μαγνητική διαπερατότητα του υλικού του πυρήνα και από τα στοιχεία του σωληνοειδούς.

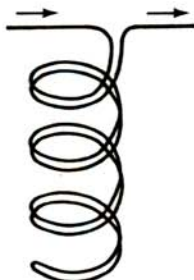
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτεπαγωγής του πηνίου προκύπτει από τη σχέση (14.27), ως:

$$e_i = -L \frac{di}{dt} = -\mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} \frac{di}{dt} \quad (14.31)$$

14.5.2 Δίμιτη περιέλιξη.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πηνίο που να μην παρουσιάζει αυτεπαγωγή με τον ακόλουθο τρόπο: Διπλώνουμε ένα αγωγό στο μέσο του μήκους του και μετά τον τυλίγουμε γύρω από κύλινδρο, ώστε να σχηματισθεί πηνίο (δίμιτη περιέλιξη, σχ. 14.56).

Με τον τρόπο αυτό σε κάθε σημείο του πηνίου υπάρχουν πάντοτε δυο ίσα και αντίρροπα ρεύματα που τα μαγνητικά τους πεδία εξουδετερώνονται. Έτσι οι



Σχ. 14.56.

Πηνίο με δίμιτη περιέλιξη.

μεταβολές του ρεύματος δεν προκαλούν φαινόμενο αυτεπαγωγής. Η δίμιτη περιέλιξη χρησιμοποιείται στην κατασκευή αντιστάσεων που δεν πρέπει να έχουν αυτεπαγωγή, π.χ. των προτύπων αντιστάσεων που χρησιμοποιούνται στις ηλεκτρικές μετρήσεις.

Παράδειγμα 14.5.1.

Μαγνητικό κύκλωμα έχει σταθερή μαγνητική αντίσταση R_m (ανεξάρτητη της ροής Φ). Να αποδειχθεί ότι η αυτεπαγωγή του L είναι αντιστρόφως ανάλογη της R_m .

Είναι:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (1)$$

Επίσης σύμφωνα με τον τύπο του Hopkinson είναι:

$$\Phi = \frac{NI}{R_m} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:
$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (3)$$

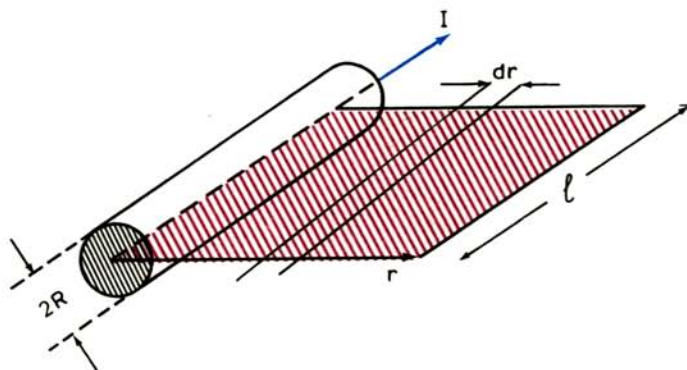
Παράδειγμα 14.5.2.

Συντελεστής αυτεπαγωγής ευθύγραμμου αγωγού.

Ευθύγραμμος αγωγός ακτίνας R και μήκους l τόσο μεγάλου, ώστε ο αγωγός να συμπεριφέρεται σαν να είχε άπειρο μήκος, διαρρέεται από ρεύμα I . Να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του (σχ. 14.5γ).

Η μαγνητική επαγωγή σε απόσταση r από τον αγωγό θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (12.13):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (1)$$



Σχ. 14.5γ.

Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού.

Εξαιτίας της επαγωγής αυτής ο χώρος γύρω από τον αγωγό θα διαπερνάται από μαγνητικές δυναμικές γραμμές, η στοιχειώδης ροή των οποίων, από ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους l και ύψους dr , η μια πλευρά του οποίου είναι παράλληλη προς τον άξονα του αγωγού, θα είναι:

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{l}{r} I \cdot dr \quad (2)$$

Άρα η συνολική ροή του αγωγού προκύπτει με ολοκλήρωση της σχέσεως (2) για ακτίνες από $r=0$ μέχρι του απείρου, δηλαδή:

$$\Phi = \int_{r=0}^{\infty} d\Phi = \int_{r=0}^{\infty} \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{l}{r} I \cdot dr = \frac{\mu\mu_0 l \cdot I}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{dr}{r}$$

ή

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 l I}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \quad \text{οπότε}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{1}{R}$$

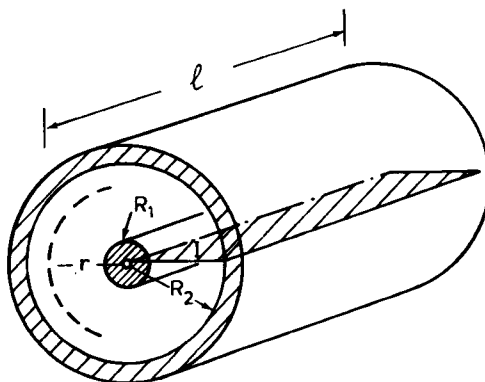
Παράδειγμα 14.5.3.

Αυτεπαγωγή ομοαξονικού καλωδίου.

Ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από ευθύγραμμο αγωγό, ο οποίος περιβάλλεται από μεταλλικό αγωγό μανδύα (σχ. 14.5δ). Αν η ακτίνα του αγωγού είναι R_1 , το μήκος του καλωδίου είναι l και η ακτίνα του καλωδίου R_2 , να υπολογισθεί η αυτεπαγωγή του.

Η ένταση B του πεδίου σε απόσταση r από τον αγωγό είναι:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$



Σχ. 14.5δ.
Ομοαξονικό καλώδιο.

Επομένως:

$$\Phi = \int_{S_m} B \, dS = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Άρα

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Παράδειγμα 14.5.4.

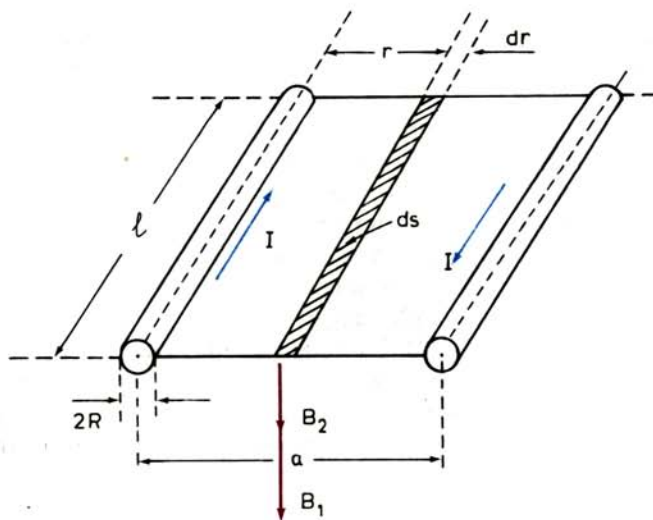
Αυτεπαγωγή γραμμής μεταφοράς δυο αγωγών.

Μια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δυο αγωγούς που έχουν ακτίνα R , μήκος l και βρίσκονται σε απόσταση a . Να υπολογισθεί η αυτεπαγωγή της γραμμής (σχ. 14.5ε).

Είναι: $B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$ και $d\Phi_1 = B_1 dS \rightarrow d\Phi_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} dr$

Επομένως η ροή Φ_1 που οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει τον αριστερό αγωγό θα είναι το άθροισμα των στοιχειωδών ροών, στην επιφάνεια που βρίσκεται μεταξύ των δυο αγωγών, δηλαδή:

$$\Phi_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{a-R} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a-R}{R}$$



Σχ. 14.5ε.

Γραμμή μεταφοράς δυο αγωγών.

και επειδή $a \gg R$ θα είναι: $\Phi_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{R}$

Η ροή Φ_2 που οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει το δεξιό αγωγό θα είναι ίση με την Φ_1 , δηλαδή:

$$\Phi = 2 \Phi_1 = 2 \Phi_2 = \frac{2 \mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{R}$$

Οι δυο αγωγοί της γραμμής μπορεί να θεωρηθούν σαν μια σπείρα η οποία διαρρέεται από ρεύμα I και από την οποία διέρχεται ροή Φ . Άρα:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{R}$$

14.6 Αποτελέσματα της αυτεπαγωγής.

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε το φαινόμενο της αυτεπαγωγής και δώσαμε τον ορισμό και τρόπους υπολογισμού του συντελεστή αυτεπαγωγής απλών ρευματοφόρων στοιχείων. Γνωρίσαμε π.χ. ότι φαινόμενο αυτεπαγωγής παρατηρείται τόσο σ' ένα σωληνοειδές πηνίο όσο και σε μια γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

Εκτός όμως του φυσικού μεγέθους «αυτεπαγωγή» συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ο όρος αυτεπαγωγή για να υποδηλώσει μια συσκευή που χρησιμοποιείται για την αποθήκευση ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο. Με αυτή την έννοια ένα πηνίο πολλές φορές ονομάζεται απλά «αυτεπαγωγή». Μπορούμε μάλιστα να πούμε ότι η αυτεπαγωγή, ως συσκευή, αποτελεί το αντίστοιχο του πυκνωτή του ηλεκτρικού πεδίου.

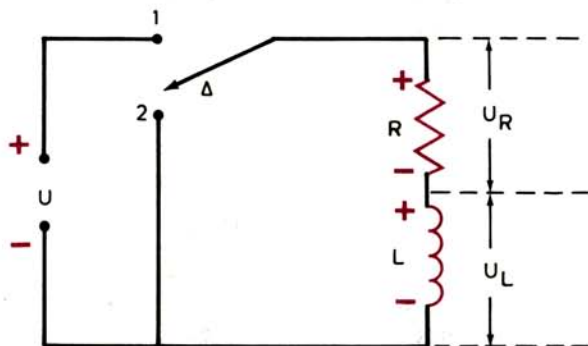
Ενδιαφέρον παρουσιάζει, εκτός από τον υπολογισμό του συντελεστή αυτεπαγωγής, η μελέτη της συμπεριφοράς ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, όταν σ' αυτό παρεμβληθούν στοιχεία που παρουσιάζουν αυτεπαγωγή. Αυτή τη μελέτη θα κάνουμε σε δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

- Κατά το κλείσιμο ενός κυκλώματος που έχει αυτεπαγωγή.
- Κατά τη βραχυκύκλωση μιας αυτεπαγωγής.

Για τη μελέτη αυτή θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 14.6α, που περιλαμβάνει ηλεκτρική πηγή τάσεως U , διακόπτη δυο θέσεων Δ και πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L και ωμικής αντιστάσεως R .

Αν ο διακόπτης Δ μετακινηθεί στη θέση 1, παρατηρούμε ότι το ρεύμα δεν παίρνει αμέσως την τιμή $I_0 = U/R$ που προβλέπεται από το νόμο του Ohm, αλλά μετά από παρέλευση ορισμένου χρόνου, ο οποίος εξαρτάται από τα στοιχεία R και L του κυκλώματος. Αυτό συμβαίνει γιατί το πηνίο κάποια χρονική στιγμή αρχίζει να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Η μεταβολή αυτή στην ηλεκτρική κατάσταση του πηνίου έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη στα άκρα του ΗΕΔ αυτεπαγωγής ίσης προς:

$$U_L = -L \frac{di}{dt} \quad (14.32)$$



Σχ. 14.6α.
Κύκλωμα με αυτεπαγωγή.

Εξαιτίας της ΗΕΔ αυτεπαγωγής στο πηνίο τείνει ν' αναπτυχθεί ηλεκτρικό ρεύμα που σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz είναι αντίρροπο από το ρεύμα της πηγής. Για το λόγο αυτό το ρεύμα που τείνει να δημιουργήσει στο πηνίο η ΗΕΔ αυτεπαγωγής, ονομάζεται **αντίρρευμα αποκαταστάσεως**.

Ας γράψουμε τώρα τον 2ο κανόνα του Kirchhoff, μια χρονική στιγμή t :

$$U - U_L = U_R$$

$$\text{ή} \quad U - L \frac{di}{dt} = iR \quad (14.33)$$

όπου με το σύμβολο i εννοούμε τη στιγμιαία τιμή του ρεύματος I , δηλαδή $i = I(t)$

Μετασχηματίζουμε περισσότερο την εξίσωση (14.33) προκειμένου να την επιλύσουμε:

$$-\frac{L}{R} \frac{di}{dt} = i - \frac{U}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{di}{i - \frac{U}{R}} = -\frac{R}{L} dt \quad \text{ή} \quad \frac{d\left(i - \frac{U}{R}\right)}{i - \frac{U}{R}} = -\frac{R}{L} dt \quad (14.34)$$

Ολοκληρώνουμε πλέον την εξίσωση (14.34):

$$\begin{aligned} - \int \frac{d\left(i - \frac{U}{R}\right)}{i - \frac{U}{R}} &= \int -\frac{R}{L} dt \rightarrow \ln\left(i - \frac{U}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + C \\ \rightarrow i - \frac{U}{R} &= e^{-\frac{R}{L}t + C} \rightarrow i = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L}t} \cdot e^C \end{aligned} \quad (14.35)$$

Η σταθερή ολοκληρώσεως C προσδιορίζεται από τη συνθήκη ότι για $t=0$ το ρεύμα $I=0$, οπότε η (14.35) δίνει:

$$0 = \frac{U}{R} + e^C \rightarrow e^C = -\frac{U}{R} \quad (14.36)$$

Από τις (14.35) και (14.36) προκύπτει:

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \quad (14.37)$$

Από την (14.37) για $t \rightarrow \infty$ έχουμε $I = I_0 = U/R$ δηλαδή θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο το ρεύμα παίρνει την τιμή I_0 που προβλέπει ο νόμος του Ohm.

Η μεταβολή του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 14.66.

Αν θέσουμε στην (14.37) $t = \frac{L}{R}$ παίρνουμε:

$$i = I(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-1}) = I_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,63 I_0$$

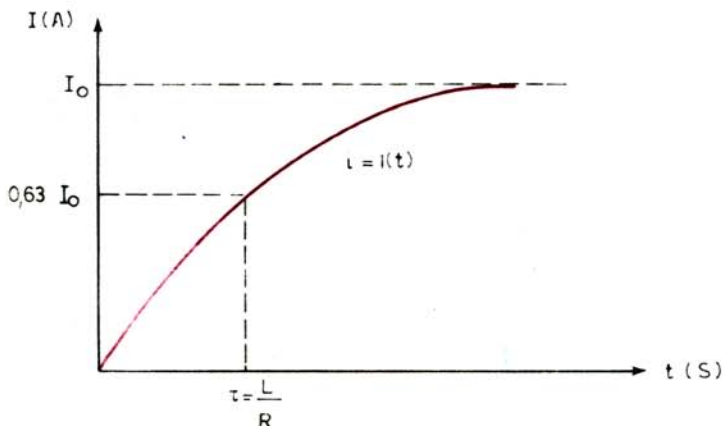
Το πηλίκο $\frac{L}{R}$ εκφράζει χρόνο, αφού είναι:

$$1 \frac{H}{\Omega} = 1 \frac{V \cdot s}{A \cdot \Omega} = 1 \frac{V \cdot s}{A \cdot V} = s$$

Η σταθερή $\tau = L/R$ (14.38) ονομάζεται **σταθερή χρόνου**.

Σταθερή χρόνου είναι ο χρόνος που απαιτείται για να αποκτήσει το ρεύμα το 63% της τελικής του τιμής I_0 .

Πρακτικά μετά από χρόνο $t = 4\tau = 4 L/R$ (14.39) το ρεύμα γίνεται $I_0 = U/R$.



Σχ. 14.66.

Μεταβολή του ρεύματος με το χρόνο κατά το κλείσιμο κυκλώματος με αυτεπαγωγή.

Ο χρόνος μισής ζωής του μεταβατικού φαινομένου του κυκλώματος υπολογίζεται αν θέσουμε στην (14.37) $I = I_0/2 = U/2R$ και είναι:

$$t_h = \frac{L}{R} \ln 2 = \tau \ln 2 \quad (14.40)$$

Οι τάσεις U_R και U_L υπολογίζονται ως εξής:

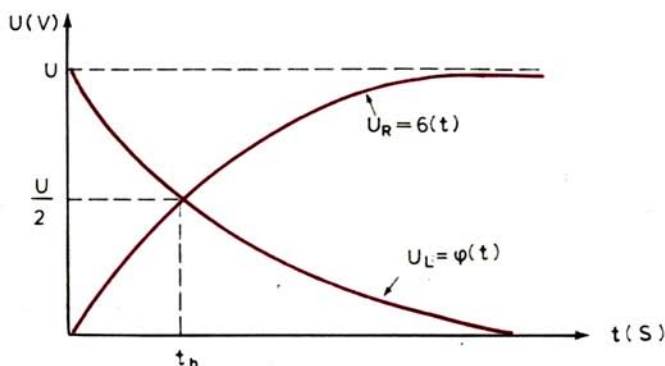
$$U_R(t) = R \cdot I(t) = U \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \quad (14.41)$$

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)$$

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow U_L(t) = U e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (14.42)$$

Οι καμπύλες για τις συναρτήσεις (14.41) και (14.42) έχουν χαραχθεί στο σχήμα 14.6γ.

Αν τώρα ο διακόπτης Δ μετακινηθεί στη θέση 2 το ρεύμα I δεν θα μηδενισθεί αμέσως, αλλά μετά από παρέλευση ορισμένου χρόνου. Αυτό γιατί στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ αυτεπαγωγής (μειώνεται τώρα η μαγνητική ροή), η οποία, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, έχει την ίδια φορά (πολικότητα) με την τάση U και επομένως τείνει να κινήσει ομόρροπο ρεύμα με το ρεύμα της πηγής (που μειώνεται) που ονομάζεται **επίρρευμα διακοπής**. Η ΗΕΔ αυτεπαγωγής μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές με αποτέλεσμα να εμφανίζεται κατά το άνοιγμα του διακόπτη ηλεκτρικός σπινθήρας μεταξύ των επαφών του, που οφείλεται στη μεγάλη ένταση ρεύματος που τείνει να κυκλοφορήσει η ΗΕΔ αυτεπαγωγής. Σε πολλές περιπτώσεις, ιδιαίτερα στα κυκλώματα που παρουσιάζουν μεγάλη αυτεπαγωγή, ο σπινθήρας είναι πολύ έντονος και μπορεί να προκαλέσει δυσάρεστα αποτελέσματα (τήξη των επαφών του διακόπτη, να τεθεί σε κίνδυνο ο χειριστής κλπ.).



Σχ. 14.6γ.

Μεταβολή των τάσεων U_L και U_R με το χρόνο κατά το κλείσιμο κυκλώματος με αυτεπαγωγή.

Γι' αυτό το λόγο οι διακόπτες κυκλωμάτων μεγάλης αυτεπαγωγής χειρίζονται από απόσταση και οι επαφές τους τοποθετούνται μέσα σε λάδι, για να ψύχονται και να εξουδετερώνεται ο σπινθήρας.

Αν εφαρμόσουμε στιγμιαία το νόμο του Ohm, μετά από το άνοιγμα του διακόπτη θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 -L \frac{di}{dt} &= iR \rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} t \rightarrow \\
 \rightarrow \int \frac{di}{i} &= -\frac{R}{L} \int dt \rightarrow \ln i = -\frac{R}{L} t + C \\
 \rightarrow i &= e^{-\frac{R}{L} t + C} = e^{-\frac{R}{L} t} \cdot e^C
 \end{aligned} \tag{14.43}$$

Η σταθερή ολοκληρώσεως C προσδιορίζεται από τη συνθήκη ότι για $t=0$ το ρεύμα $i = I_0$, οπότε η (14.43) δίνει:

$$I_0 = e^C \tag{14.44}$$

Από τις (14.43) και (14.44) προκύπτει:

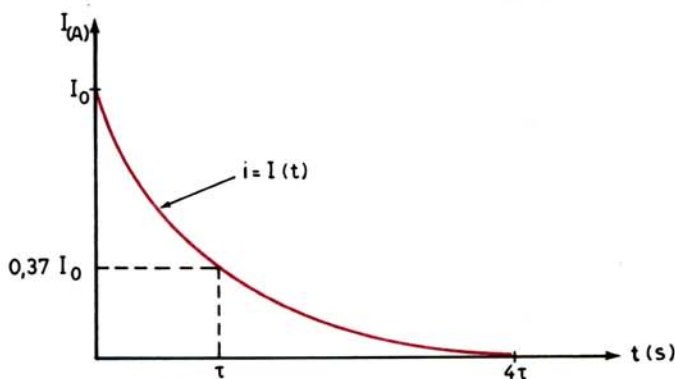
$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \tag{14.45}$$

Η μεταβολή του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 14.65.

Οι τάσεις U_R και U_L υπολογίζονται ως εξής:

$$U_R(t) = R i(t) = U e^{-\frac{R}{L} t} \tag{14.46}$$

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow U_L(t) = -U e^{-\frac{R}{L} t} \tag{14.47}$$



Σχ. 14.65.

Μεταβολή του ρεύματος με το χρόνο κατά τη βραχυκύκλωση αυτεπαγωγής.

Από την (14.45) για $t \rightarrow \infty$ έχουμε $I = 0$, δηλαδή θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο το ρεύμα μηδενίζεται.

Αν θέσουμε στην (14.45) $t = L/R$ παίρνουμε:

$$I = I_0 e^{-1} \approx 0,37 I_0$$

Η σταθερή $\tau = \frac{L}{R}$ ονομάζεται πάλι **σταθερή χρόνου**.

Πρακτικά μετά από $t = 4\tau = 4L/R$ το ρεύμα μηδενίζεται. (14.48)

Παράδειγμα 14.6.1.

Ο διακόπτης Δ κλείνει σε χρόνο $t = 0$ στο κύκλωμα του σχήματος 14.6ε. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα: α) Κατά το κλείσιμο του διακόπτη ($t \rightarrow 0$). β) Μετά από άπειρο χρόνο ($t \rightarrow \infty$).

α) Όπως προκύπτει από τη σχέση (14.37), κατά τη θέση υπό τάση μιας αυτεπαγωγής το ρεύμα που τη διαρρέει, είναι:

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \quad (1)$$

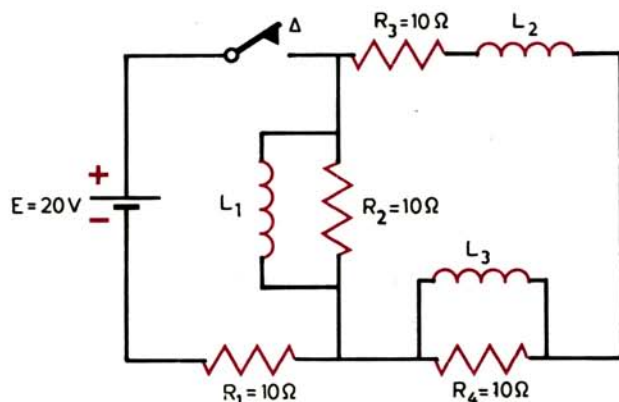
όπου: U η τάση υπό την οποία τίθεται η αυτεπαγωγή και
 R η ωμική της αντίσταση.

Από την πιο πάνω σχέση προκύπτει ότι το χρόνο $t = 0$, ακριβώς με τη θέση της αυτεπαγωγής υπό τάση, το ρεύμα που τη διαρρέει είναι 0, δηλαδή: Τα πηνία κατά τη στιγμή της θέσεώς τους υπό τάση συμπεριφέρονται σαν ανοικτοί διακόπτες.

Επομένως, για $t = 0$, το κύκλωμα του σχήματος 14.6ε μετασχηματίζεται σ' εκείνο του σχήματος 14.6στ.

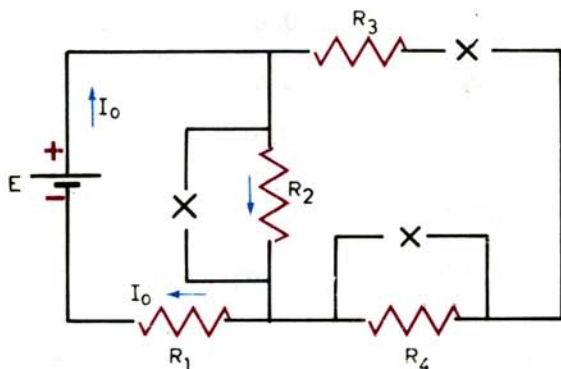
Είναι:

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$$



Σχ. 14.6ε.

Κύκλωμα παραδείγματος 14.6.1.



Σχ. 14.6α.

Κύκλωμα σχήματος 14.6ε για χρόνο $t = 0$.

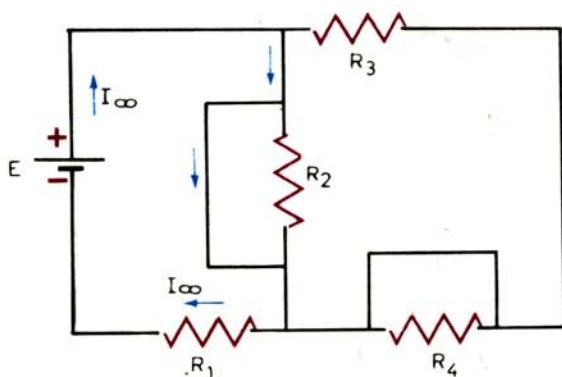
β) Από τη σχέση (1) προκύπτει για πολύ μεγάλους χρόνους μετά τη θέση της αυτεπαγωγής υπό τάση, δηλαδή $t \rightarrow \infty$, το ρεύμα που τη διαρρέει γίνεται:

$$I_{t \rightarrow \infty} = \frac{U}{R}$$

Αν, επιπλέον, η αυτεπαγωγή έχει μηδενική ωμική αντίσταση, τότε το ρεύμα αυτό καθίσταται άπειρο, δηλαδή η αυτεπαγωγή συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα. Έτσι, για $t \rightarrow \infty$ το κύκλωμα του σχήματος 14.6ε μετασχηματίζεται σ' εκείνο του σχήματος 14.6ζ.

Έτσι το ρεύμα I_{∞} θα είναι:

$$I_{\infty} = \frac{E}{R_1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$



Σχ. 14.6ζ.

Κύκλωμα σχήματος 14.6ε για χρόνο $t \rightarrow \infty$.

14.7 Ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

Στην παράγραφο 13.4, με την ευκαιρία της αναπτύξεως των ιδιοτήτων του διανύσματος H της μαγνητικής διεγέρσεως, γνωρίσαμε ότι η πυκνότητα της ενέργειας η οποία ταμιεύεται σε μαγνητικό πεδίο, δίνεται από τη σχέση:

$$w_m = \int_0^B H dB \quad (14.49)$$

όπου: w_m η πυκνότητα ενέργειας σ' ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου (J/m^3),
 H το μέτρο του διανύσματος H στο ίδιο σημείο (A/m) και
 B το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο ίδιο σημείο (T).

Αναφέραμε επίσης ότι αν το υλικό μέσα στο οποίο αναπτύσσεται το μαγνητικό πεδίο έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα ($\mu = \text{σταθ.}$), η πιο πάνω ολοκλήρωση οδηγεί στη σχέση:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (14.50)$$

Βέβαια τη σχέση (14.49) δεν την αποδείξαμε· άλλωστε η απόδειξή της ξεφεύγει από το αντικείμενο του βιβλίου αυτού. Όμως, μετά τις γνώσεις που αποκτήσαμε με το φαινόμενο της αυτεπαγωγής, μπορούμε να δικαιολογήσουμε το θέμα της ταμιεύσεως της ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο και να υπολογίσουμε την ενέργεια που εγκλείεται στο πεδίο ενός πηνίου, χωρίς να κάνουμε χρήση των δύο παραπάνω σχέσεων.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το ρεύμα κατά το κλείσιμο του κυκλώματος ωμικής αντιστάσεως R σε σειρά με μια αυτεπαγωγή, δεν παίρνει αμέσως την τιμή $I_0 = U/R$ που προβλέπεται από το νόμο του Ohm. Αυτό συμβαίνει, γιατί κατά τη διάρκεια της αποκαταστάσεως του ρεύματος, ένα μέρος της ενέργειας που δίνει η πηγή μετατρέπεται στις αντιστάσεις του κυκλώματος σε θερμότητα και ένα άλλο μέρος αποδίδεται στο πηνίο και αποτελεί την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου. Όταν το ρεύμα πάρει την οριακή του τιμή I_0 , τότε παύει η αποταμίευση ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου διατηρείται σταθερή. Αν τώρα διακόψουμε το κύκλωμα και βραχυκυκλώσουμε την αυτεπαγωγή μέσω αντιστάσεως R , ολόκληρη η ενέργεια που έχει αποθηκευθεί στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου, μετατρέπεται σε ηλεκτρική και έτσι προκύπτει το επίρρευμα διακοπής.

Έστω, λοιπόν πηνίο, αυτεπαγωγής L , που διαρρέεται, κάποια χρονική στιγμή t κατά την αποκατάσταση του ρεύματος, από ρεύμα: $i = I(t)$.

Απειροστή πρόσδωση ενέργειας στο πηνίο, από τη χρονική στιγμή t μέχρι τη χρονική στιγμή $t + dt$, με αύξηση του ρεύματος i κατά di , θα μεταβάλει τα πεδιακά μεγέθη κατά $d\psi$, dB και θα δημιουργήσει ΗΕΔ αυτεπαγωγής, ίση προς:

$$e_i = - \frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (14.51)$$

Η απαιτούμενη στοιχειώδης ηλεκτρική ενέργεια για το σκοπό αυτό θα είναι, σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από το ηλεκτρικό πεδίο:

$$dw = e_i idt \quad (14.52)$$

Από τις σχέσεις (14.51) και (14.52) προκύπτει η ενέργεια που απαιτείται από τη στιγμή που αρχίζει να δημιουργείται το μαγνητικό πεδίο, μέχρις ότου το ρεύμα αποκαταστάσεως πάρει την τιμή i , σε χρόνο t , ως:

$$W = \int_0^i Lidi \quad (14.53)$$

Η ενέργεια αυτή ταμιεύεται στο μαγνητικό πεδίο, και μπορεί επίσης να εκφραστεί σε συνάρτηση της αλληλενδότητος ροής ως:

$$W = \int_0^\Psi id\Psi \quad (14.54)$$

Αν το υλικό που βρίσκεται στον πυρήνα του πηνίου έχει **σταθερή τιμή του συντελεστή μαγνητικής διαπερατότητας**, τότε και ο συντελεστής αυτεπαγωγής L έχει σταθερή τιμή, ανεξάρτητη από το αναπτυσσόμενο μαγνητικό πεδίο, σε όλη τη διάρκεια της αποκαταστάσεως το ρεύματος, οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σχέση (14.53):

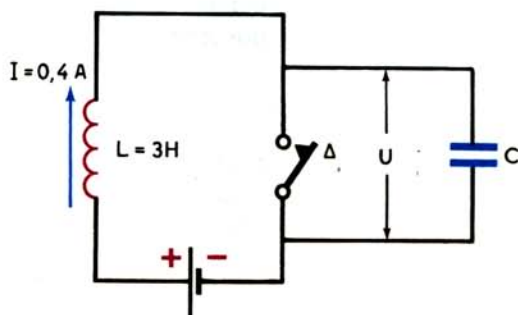
$$W = L \int_0^i idi = \frac{1}{2} Li^2 \quad (14.55)$$

Η σχέση (14.55) παρέχει την ενέργεια που ταμιεύεται στο μαγνητικό πεδίο από τη δημιουργία του ($t = 0$) ώσπου το ρεύμα αποκαταστάσεως να φθάσει την τιμή $i = I(t)$. Εξυπακούεται ότι αν το ρεύμα φθάσει στην οριακή του τιμή I_0 , τότε η ολική ενέργεια που ταμιεύεται στο μαγνητικό πεδίο γίνεται:

$$W_0 = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (14.56)$$

Παράδειγμα 14.7.1.

Αν η τάση στα άκρα του πυκνωτή του κυκλώματος του σχήματος 14.7α δεν



Σχ. 14.7α.
Κύκλωμα παραδείγματος 14.7.1.

πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 400 V, να υπολογισθεί η χωρητικότητά του, ώστε να μη δημιουργηθεί ηλεκτρικός σπινθήρας κατά την αποσύνδεση του πηνίου, του οποίου η ωμική αντίσταση είναι αμελητέα.

Πολλές φορές, για να εξουδετερώσουμε το σπινθήρα που παράγεται κατά την αποσύνδεση πηνίων μεγάλης αυτεπαγωγής, τοποθετούμε παράλληλα προς το ρευματολήπτη ένα πυκνωτή. Ο πυκνωτής πρέπει να έχει τέτοια χωρητικότητα, ώστε να μπορέσει να αποθηκεύσει την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} CU^2 \rightarrow C = \frac{LI^2}{U^2} \rightarrow C = \frac{3.0,4^2}{400^2} = 3.10^{-6} \text{ F} = 3\mu\text{F}$$

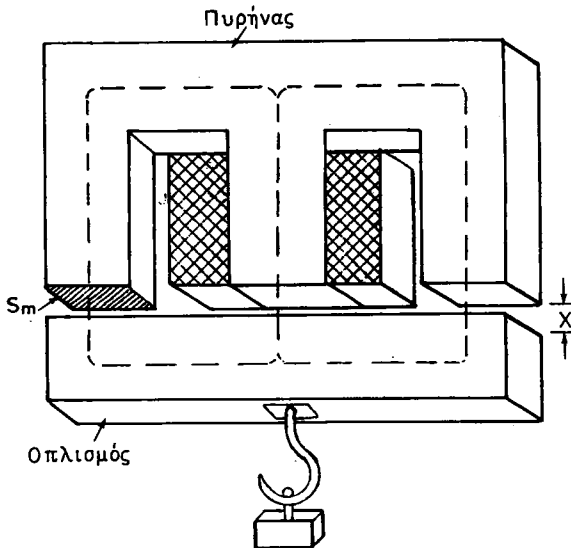
Παράδειγμα 14.7.2.

Δίνεται ο ηλεκτρομαγνήτης του σχήματος 14.7β. Αν στο διάκενο αέρα η μαγνητική επαγωγή είναι B_a να υπολογισθεί η δύναμη που εξασκείται στον οπλισμό. Η δύναμη αυτή ονομάζεται και **φέρουσα** δύναμη ηλεκτρομαγνήτη.

Έστω S_m η επιφάνεια της διατομής του ενός σκέλους του μαγνήτη και x η απόσταση μεταξύ του πυρήνα και του οπλισμού. Αν ο οπλισμός πλησιάσει κατά dx τον πυρήνα, η δύναμη έλξεως F παράγει έργο, σε θάρος της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή θα έχουμε:

$$F \cdot dx = w_m S_m dx \quad (1)$$

όπου w_m η πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου στο διάκενο αέρα μεταξύ οπλισμού και πυρήνα.



Σχ. 14.7β.

Ηλεκτρομαγνήτης παραδείγματος 14.7.2.

Από τη σχέση (1) σε συνδυασμό με τη (14.50) παίρνομε:

$$F = w_m S_m = \frac{B_a^2}{2\mu_0} S_m$$

Δηλαδή, προκύπτει ότι η φέρουσα δύναμη F ηλεκτρομαγνήτη είναι:

$$F = \frac{B_a^2 S_m}{2\mu_0}$$

14.8 Αμοιβαία επαγωγή.

Θεωρούμε διάταξη του σχήματος 14.8 που αποτελείται από δυο γειτονικά πηνία 1 και 2. Το πηνίο 1 διαρρέεται από ρεύμα που μπορεί να μεταβάλλεται, και ονομάζεται πρωτεύον. Το πηνίο 2, στο οποίο δεν υπάρχει ηλεκτρική πηγή αλλά αναπτύσσεται, όπως θα δούμε, επαγωγική ΗΕΔ ονομάζεται δευτερεύον.

Όταν μεταβάλλεται το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον, μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή που το διαρρέει. Επειδή ένα μέρος της ροής του πρωτεύοντος διέρχεται και από το δευτερεύον θα μεταβάλλεται και η ροή του δευτερεύοντος, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται στα άκρα του επαγωγική ΗΕΔ. Το φαινόμενο αυτό κατά το οποίο δημιουργείται επαγωγική ΗΕΔ σ' ένα κύκλωμα εξαιτίας της μεταβολής του ρεύματος που διαρρέει γειτονικό κύκλωμα ονομάζεται **αμοιβαία επαγωγή**.

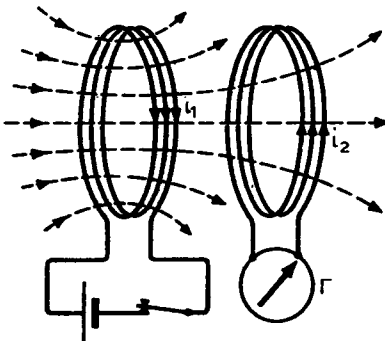
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται στο δευτερεύον ονομάζεται **ηλεκτρεγερτική δύναμη αμοιβαίας επαγωγής**.

Συμβολίζομε με Φ_{12} τη μαγνητική ροή του πηνίου 1 που διέρχεται από το πηνίο 2. Αν το πηνίο 2 έχει N_2 σπείρες, η αλληλένδετη ροή του είναι $\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12}$. Εφόσον το μαγνητικό πεδίο του πηνίου 1 αναπτύσσεται μέσα στον αέρα (ή σε υλικό με σταθερό μ), η αλληλένδετη ροή είναι ανάλογη του ρεύματος i_1 που διαρρέει το πηνίο 1:

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = M i_1 \quad (14.57)$$

Αντίστροφα, αν το πηνίο 2 διαρρέεται από ρεύμα i_2 και Φ_{21} είναι η ροή που διέρχεται από το πηνίο 1, θα ισχύει:

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = M i_2 \quad (14.58)$$



Σχ. 14.8.
Αμοιβαία επαγωγή.

Ο συντελεστής M ονομάζεται **συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής** ή, απλά, αμοιβαία επαγωγή και εξαρτάται από το σχήμα, τη σχετική θέση των πηνίων καθώς και από τη σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου που βρίσκεται μεταξύ των πηνίων.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (14.57) και (14.26) συμπεραίνουμε ότι οι διαστάσεις και συνεπώς οι μονάδες του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής και του συντελεστή αυτεπαγωγής συμπίπτουν. Άρα, μονάδα μετρήσεως του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής M στο SI είναι το 1 Henry (H).

Η ΗΕΔ αμοιβαίας επαγωγής e_2 που επάγεται στο δευτερεύον, όταν το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον 1 μεταβάλλεται κατά di_1 δίνεται, σύμφωνα με τις σχέσεις (14.21) και (14.57):

$$e_2 = - \frac{d\psi_{12}}{dt} = - M \frac{di_1}{dt} \quad (14.59)$$

14.8.1 Μαγνητική σύζευξη – Συντελεστές συζεύξεως και σκεδάσεως.

Όταν η θέση των δυο γειτονικών πηνίων είναι τέτοια, ώστε το μεγαλύτερο μέρος της ροής του πρωτεύοντος να διέρχεται από το δευτερεύον, τότε λέμε ότι τα δυο πηνία βρίσκονται σε **στενή** μαγνητική σύζευξη. Σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι η σύζευξη είναι **χαλαρή**. Ορίζουμε ως **βαθμό συζεύξεως** k_{12} του πηνίου 1 ως προς το πηνίο 2, το πηλίκον της ροής Φ_{12} που διέρχεται από το δευτερεύον προς τη ροή Φ_1 που διέρχεται από το πρωτεύον. Δηλαδή:

$$k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \quad (14.60)$$

Ανάλογα ορίζεται και ο βαθμός συζεύξεως του πηνίου (2) ως προς το πηνίο (1):

$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \quad (14.61)$$

Εξ ορισμού ο βαθμός συζεύξεως είναι καθαρός αριθμός, μικρότερος ή και ίσος με τη μονάδα.

Μετά τον ορισμό του βαθμού συζεύξεως, οι σχέσεις (14.57) και (14.58) γίνονται αντίστοιχα:

$$M = \frac{N_2 k_{12} \Phi_1}{l_1} \quad (14.62) \quad \text{και} \quad M = \frac{N_1 k_{21} \Phi_2}{l_2} \quad (14.63)$$

Από τις (14.62) και (14.63) προκύπτει:

$$M^2 = k_{12} k_{21} \frac{N_1 \Phi_1}{l_1} \cdot \frac{N_2 \Phi_2}{l_2} \quad (14.64)$$

$$\text{Αλλά} \quad \frac{N_1 \Phi_1}{l_1} = L_1 \quad \text{και} \quad \frac{N_2 \Phi_2}{l_2} = L_2$$

οπότε η (14.64) γίνεται:

$$M^2 = k_{12} \cdot k_{21} \cdot L_1 \cdot L_2 \quad (14.65)$$

Την παράσταση:

$$\sqrt{k_{12} k_{21}} = k \quad (14.66)$$

ονομάζουμε **συντελεστή συζεύξεως** k των δυο πηνίων, χωρίς πια να κάνουμε διάκριση ποιο από τα πηνία λειτουργεί ως πρωτεύον και ποιο ως δευτερεύον.

Από τις (14.65) και (14.66) προκύπτει:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (14.67)$$

Ένας ακόμη χαρακτηριστικός συντελεστής που αφορά κυκλώματα σε μαγνητική σύζευξη είναι ο **συντελεστής σκεδάσεως**, που ορίζεται ως ο λόγος της ροής του πρωτεύοντος που δεν διέρχεται από το δευτερεύον, προς τη ροή που διέρχεται από το πρωτεύον. Η ροή του πρωτεύοντος που δεν διέρχεται από το δευτερεύον ονομάζεται **ροή σκεδάσεως**.

Γενικά ο συντελεστής σκεδάσεως ορίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{12} = \frac{\Phi_{10}}{\Phi_1} \quad (14.68)$$

όπου Φ_{10} η ροή που προέρχεται από το πηνίο (1) και σκεδάζεται ως προς το άλλο πηνίο (2).

Ανάλογα ορίζεται και ο συντελεστής σκεδάσεως του πηνίου (2) ως προς το (1)

$$\sigma_{21} = \frac{\Phi_{20}}{\Phi_2} \quad (14.69)$$

Όταν τα πηνία είναι όμοια, έχουμε: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$ και θα είναι:

$$k + \sigma = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} + \frac{\Phi_{10}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{12} + \Phi_{10}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\Phi_1} = 1$$

Στις βιομηχανικές εφαρμογές επιδιώκουμε συνήθως πολύ έντονες συζεύξεις. Έτσι σε μετασχηματιστές ο βαθμός συζεύξεως πλησιάζει τη μονάδα (σύζευξη 98%). Αντίθετα στις ραδιοτεχνικές εφαρμογές συναντάμε πηνία με χαλαρές συζεύξεις (μεταξύ 1% και 30%).

14.9 Συνδεσμολογία πηνίων αυτεπαγωγής.

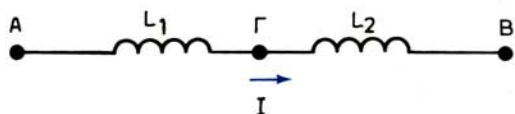
14.9.1 Σύνδεση πηνίων σε σειρά.

Θεωρούμε δυο πηνία με αυτεπαγωγές L_1 και L_2 τα οποία δεν παρουσιάζουν αμοιβαία επαγωγή ($M = 0$, σχ. 14.9α).

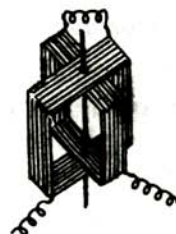
Οι αυτεπαγωγικές ΗΕΔ που θα αναπτυχθούν στα δυο πηνία όταν το ρεύμα μεταβάλλεται σε χρόνο dt κατά di θα είναι:

$$e_{AΓ} = -L_1 \frac{di}{dt} \quad \text{και} \quad e_{ΓΒ} = -L_2 \frac{di}{dt}$$

Επειδή η ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος di/dt είναι η ίδια και στα δυο



Σχ. 14.9α.
Σύνδεση πηνίων σε σειρά.



Σχ. 14.9β.
Βαριόμετρο.

πηνία, συμπεραίνουμε ότι η ολική ΗΕΔ θα αναπτύσσεται κάθε χρονική στιγμή στα άκρα Α, Β των πηνίων θα είναι:

$$e_{AB} = e_{A\Gamma} + e_{\Gamma B} = -(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

όπου L η ισοδύναμη αυτεπαγωγή των δυο πηνίων.

Άρα:
$$L = L_1 + L_2 \quad (14.70)$$

Όταν $M \neq 0$ οι ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις στα δυο πηνία θα είναι:

$$e_{A\Gamma} = -(L_1 \pm M) \frac{di}{dt} \quad \text{και} \quad e_{\Gamma B} = -(L_2 \pm M) \frac{di}{dt}$$

Ο συντελεστής M είναι **θετικός** όταν τα μαγνητικά πεδία των πηνίων είναι **ομόρροπα**, δηλαδή όταν έχουμε ορθή σύνδεση των τυλιγμάτων των πηνίων και αρνητικός όταν τα μαγνητικά πεδία των πηνίων είναι **αντίρροπα** (αντίθετη σύνδεση των τυλιγμάτων).

Η ολική ΗΕΔ στα άκρα των πηνίων θα είναι:

$$e_{AB} = e_{A\Gamma} + e_{\Gamma B} = -(L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Δηλαδή:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (14.71)$$

Ο συντελεστής M , όπως είδαμε, εξαρτάται και από τη σχετική θέση των δυο πηνίων. Όταν επομένως μεταβάλλεται η θέση των πηνίων θα μεταβάλλεται και η ισοδύναμη αυτεπαγωγή.

Στην αρχή αυτή στηρίζεται η κατασκευή των βαριομέτρων. Τα βαριόμετρα αποτελούνται από δυο πηνία, των οποίων τα τυλίγματα συνδέονται σε σειρά (σχ. 14.9β). Το ένα πηνίο είναι σταθερό και το άλλο κινητό. Όταν στρέφεται το κινητό πηνίο, στρέφεται και το μαγνητικό του πεδίο και ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταβάλλεται από $+2M$ (όταν τα μαγνητικά πεδία των πηνίων έχουν την ίδια φορά) μέχρι $-2M$ (όταν έχουν αντίθετη φορά).

Τα βαριόμετρα χρησιμοποιούνται σε συσκευές ρυθμίσεως και σε ραδιοηλεκτρικές κατασκευές.

14.9.2 Παράλληλη σύνδεση πηνίων.

Θεωρούμε δυο πηνία με αυτεπαγωγές L_1 και L_2 , που έχουν συνδεθεί παράλληλα και δεν παρουσιάζουν αμοιβαία επαγωγή (σχ. 14.9γ).

Όταν το ρεύμα I μεταβληθεί κατά di σε χρόνο dt η αυτεπαγωγή ΗΕΔ που θα αναπτυχθεί στα άκρα των πηνίων θα είναι:

$$e = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{1}{L} = - \frac{di/dt}{e} \quad (14.72)$$

Είναι επίσης:

$$e = -L_1 \frac{di_1}{dt} \rightarrow \frac{1}{L_1} = - \frac{di_1/dt}{e} \quad (14.73)$$

και

$$e = -L_2 \frac{di_2}{dt} \rightarrow \frac{1}{L_2} = - \frac{di_2/dt}{e} \quad (14.74)$$

Ακόμα

$$i = i_1 + i_2 \rightarrow di = di_1 + di_2 \quad (14.75)$$

Από τις (14.72) έως (14.74) προκύπτει:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \rightarrow L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (14.76)$$

Αποδεικνύεται ότι όταν $M \neq 0$ η ισοδύναμη αυτεπαγωγή L παρέχεται από τη σχέση:

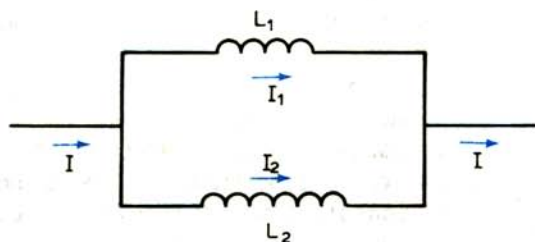
$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M} \quad (14.77)$$

Παράδειγμα 14.9.1.

Βαριόμετρο αποτελείται από δυο πηνία σε σειρά με αυτεπαγωγές $L_1 = L_2 = 10 \text{ mH}$. Μέσα σε ποια όρια μπορεί να μεταβάλλεται η αυτεπαγωγή του συστήματος αν ο βαθμός συζεύξεως είναι $k = 0,8$;

$$\text{Είναι} \quad L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (1)$$

$$\text{και} \quad M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (2)$$



Σχ. 14.9γ.
Παράλληλη σύνδεση πηνίων.

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2k \sqrt{L_1 L_2} \rightarrow L = (10 + 10 \pm 2 \times 0,8 \times 10) \text{ mH}$$

δηλαδή $4 \leq L \leq 36 \text{ mH}$

Παράδειγμα 14.9.2.

Αν δυο πηνία συνδεθούν σε σειρά, έτσι ώστε τα μαγνητικά τους πεδία να είναι ομόρροπα, παρουσιάζουν συνολική αυτεπαγωγή $L = 900 \mu\text{H}$. Αν τα πηνία συνδεθούν πάλι σε σειρά, αλλά τα μαγνητικά τους πεδία να είναι αντίρροπα, παρουσιάζουν αυτεπαγωγή $L' = 200 \mu\text{H}$. Αν η αυτεπαγωγή του ενός πηνίου είναι τριπλάσια της αυτεπαγωγής του άλλου, να βρεθεί η αυτεπαγωγή καθενός, η αμοιβαία επαγωγή και ο συντελεστής συζεύξεως.

Έστω L_1 και L_2 οι αυτεπαγωγές των πηνίων και M η αμοιβαία επαγωγή. Θα έχουμε:

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (1) \text{ στην πρώτη περίπτωση}$$

$$L' = L_1 + L_2 - 2M \quad (2) \text{ στη δεύτερη περίπτωση}$$

και

$$L_1 = 2L_2 \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$L + L' = 2(L_1 + L_2) \rightarrow L_1 + L_2 = 550 \mu\text{H} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει:

$$4L_2 = 550 \rightarrow L_2 = 137,3 \mu\text{H}$$

και

$$L_1 = 3L_2 = 412,5 \mu\text{H}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$M = \frac{L - (L_1 + L_2)}{2} = \frac{900 - 550}{2} = 175 \mu\text{H}$$

Είναι

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \rightarrow k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{175}{\sqrt{412,5 \cdot 137,5}}$$

$$\rightarrow k = 0,73 \quad (73\%)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

1. Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 1 \mu\text{C}$ και $q_2 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκονται σε απόσταση 10 cm. Σε ποιο σημείο της ευθείας που ενώνει τα δυο φορτία η ένταση του συνιστάμενου πεδίου είναι μηδέν;

Απάντηση: $x = 4,1 \text{ cm}$

2. Δυο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $+q$ και $-q$ βρίσκονται σε απόσταση 2a. Να υπολογισθεί η ένταση του συνιστάμενου πεδίου σε σημείο που βρίσκεται στη μεσοκάθετο της ευθείας που ενώνει τα δυο φορτία και σε απόσταση r από την ευθεία.

Απάντηση:

$$E = k_0 \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

3. Σταγόνες βροχής έχουν φορτισθεί με δυναμικό 2 V. Να υπολογισθεί το δυναμικό U της σταγόνας που θα προκύψει αν ενωθούν 27 τέτοιες σταγόνες ($k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$).

Απάντηση: $U = 18 \text{ V}$

4. Τρία φορτία $q_1 = 400 \text{ nC}$, $q_2 = 300 \text{ nC}$ και $q_3 = -200 \text{ nC}$ βρίσκονται στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 10 cm. Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια W του συστήματος των φορτίων και το δυναμικό U στο κέντρο του τριγώνου.

Απάντηση: $W = -18 \times 10^{-4} \text{ J}$ και $U = 78 \text{ kV}$

5. Ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα $u_0 = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$ εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από δυο παράλληλες πλάκες. Αν η τάση μεταξύ των πλακών είναι 90 V, το μήκος τους 10 cm και η απόστασή τους 4 cm, να υπολογισθούν:

α) Η απόκλιση του ηλεκτρονίου (ΑΒ) από τη διεύθυνση εισόδου τη στιγμή που θα βγαίνει από το πεδίο.

β) Η ταχύτητα εξόδου u και η διεύθυνσή της.

γ) Η απόκλιση (ΑΓ) σε πέτασμα κάθετο στις πλάκες που απέχει από αυτές απόσταση ίση με 6 cm.

Δίνονται το φορτίο του ηλεκτρονίου $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και η μάζα του $m = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (σχ. 1).

Απάντηση: α) $AB = 0,5 \text{ cm}$, β) $u = 2,01 \times 10^7 \text{ m/s}$, $\epsilon\phi\phi = 0,1$ και γ) $(ΑΓ) = 1,1 \text{ cm}$

6. Στο κύκλωμα του σχήματος 2 η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = 1000 \text{ pF}$ η ακτίνα του αγωγού $R = 4,5 \text{ cm}$ και η τάση $u = 20 \text{ V}$. Ζητούνται:

α) Το φορτίο της σφαίρας q_z

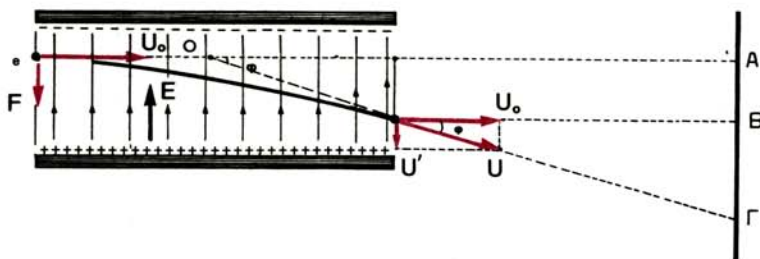
β) Το φορτίο του πυκνωτή q

Δίνεται $k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

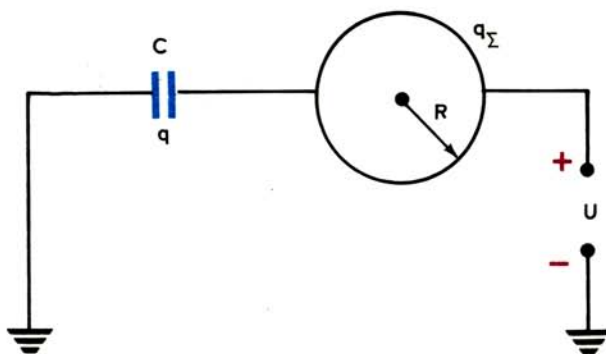
Απάντηση: α) $q_z = 0,1 \text{ nC}$ και β) $q = 20 \text{ nC}$

7. Τρεις πυκνωτές με χωρητικότητες $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 20 \mu\text{F}$ και $C_3 = 30 \mu\text{F}$ συνδέονται όπως δείχνει το σχήμα 3. Να υπολογισθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{AB} .

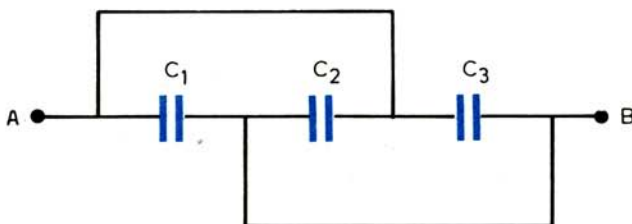
Απάντηση: $C_{AB} = 60 \mu\text{F}$



Σχ. 1.



Σχ. 2.



Σχ. 3.

8. Πυκνωτής αποτελείται από 9 παράλληλες πλάκες που χωρίζονται με φύλλα μίκας πάχους 0,2 mm.

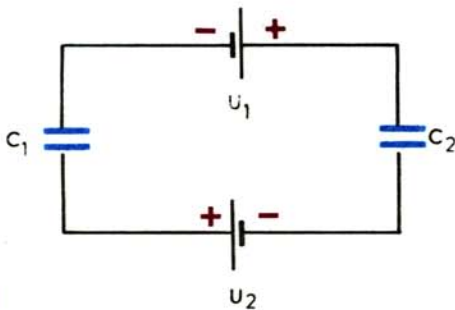
α) Να υπολογισθεί η χωρητικότητά του αν η επιφάνεια κάθε πλάκας είναι 10 cm^2 και η διηλεκτρική σταθερά της μίκας 5.

β) Ο πυκνωτής φορτίζεται υπό τάση 20 V και στη συνέχεια αποσυνδέεται και αφαιρούνται τα φύλλα της μίκας. Να υπολογισθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του ($\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$).

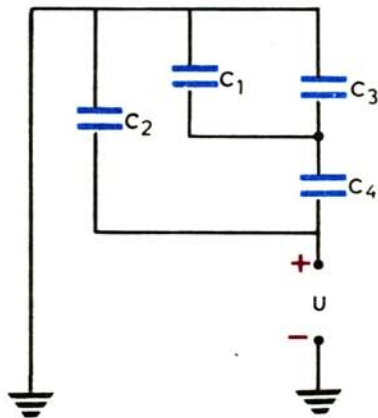
Απάντηση: α) $C = 1,77 \text{ nF}$ και β) $U = 100 \text{ V}$

9. Δίνεται η συνδεσμολογία του σχήματος 4. Αν $U_1 = 8 \text{ V}$, $U_2 = 10 \text{ V}$, $C_1 = 3 \mu\text{F}$ και $C_2 = 6 \mu\text{F}$ να υπολογισθεί η τάση μεταξύ των οπλισμών κάθε πυκνωτή.

Απάντηση: $U_{C_1} = 12 \text{ V}$ και $U_{C_2} = 6 \text{ V}$



Σχ. 4.



Σχ. 5.

10. Ηλεκτρονικός έχει στη διάθεσή του πυκνωτές που φέρουν τις ενδείξεις «2 μF, 500 V». Πόσους πυκνωτές και πώς πρέπει να τους συνδέσει έτσι, ώστε η ισοδύναμη χωρητικότητα να είναι 2 μF αλλά να μη καταστραφούν όταν στα άκρα της συνδεσμολογίας εφαρμοσθεί τάση 1000 V;

11. Δίνεται η συνδεσμολογία των πυκνωτών του σχήματος 5. Αν $C_1 = C_2 = 200 \text{ pF}$ και $C_3 = C_4 = 500 \text{ pF}$ να υπολογισθεί το δυναμικό του σημείου A αν $U = 20 \text{ kV}$.

Απάντηση: $U_A = 8,33 \text{ kV}$

12. Δυο πυκνωτές έχουν χωρητικότητες C_1 και C_2 και φορτία q_1 και q_2 . Συνδέουμε τους πυκνωτές παράλληλα. Να αποδειχθεί ότι η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος μετά τη σύνδεση είναι μικρότερη από την ενέργεια πριν από τη σύνδεση και να υπολογισθεί η απώλεια ενέργειας ΔW .

Απάντηση:

$$\Delta W = \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)}$$

13. Δίνεται η συνδεσμολογία των πυκνωτών του σχήματος 6. Αν $C_1 = C_5 = 3 \text{ μF}$, $C_2 = 6 \text{ μF}$, $C_3 = 12 \text{ μF}$ και $C_4 = 1 \text{ μF}$ να υπολογισθούν:

α) Η ισοδύναμη χωρητικότητα C.

β) Το φορτίο των πυκνωτών και η τάση U αν $U_{ΓΔ} = 10 \text{ V}$.

γ) Η ενέργεια του πυκνωτή C_1 .

Απάντηση:

α) $C = 5 \text{ μF}$

β) $q_1 = q_2 = 60 \text{ μC}$, $U = 30 \text{ V}$, $q_3 = 90 \text{ μC}$, $q_4 = 22,5 \text{ μC}$ και $q_5 = 67,5 \text{ μC}$

γ) $W = 6 \times 10^{-4} \text{ J}$

14. Επίπεδος πυκνωτής έχει σαν διηλεκτρικό τρία μονωτικά στρώματα:

1) καουτσούκ ($\epsilon_1 = 2,8$, $l_1 = 2 \text{ mm}$)

2) αέρα ($\epsilon_2 = 1$, $l_2 = 3 \text{ mm}$)

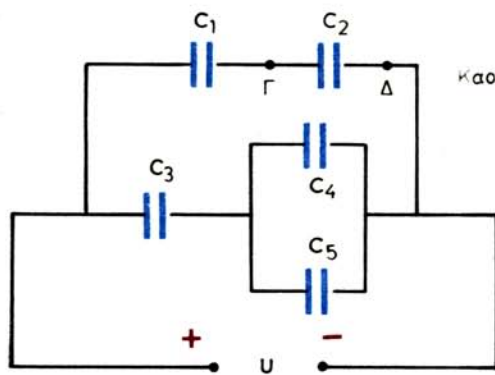
3) γυαλί ($\epsilon_3 = 8,4$, $l_3 = 3 \text{ mm}$)

Η επιφάνεια κάθε οπλισμού είναι $0,1 \text{ m}^2$. Στους οπλισμούς του πυκνωτή εφαρμόζεται τάση $U = 10 \text{ kV}$. Ζητούνται:

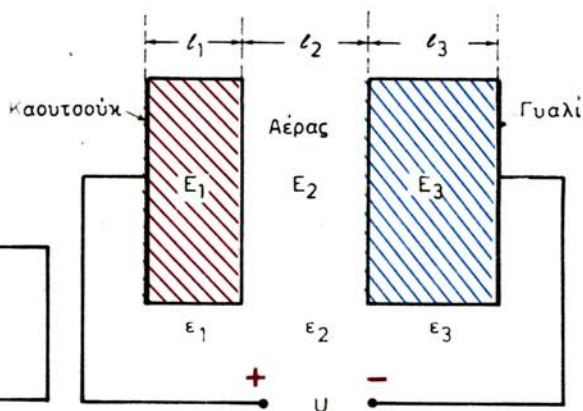
α) Η χωρητικότητα C του πυκνωτή.

β) Η διηλεκτρική μετατόπιση D στο εσωτερικό του πυκνωτή.

γ) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο καουτσούκ, τον αέρα και το γυαλί.



Σχ. 6.



Σχ. 7.

δ) Η κατανομή της τάσεως στα τρία στρώματα του διηλεκτρικού (σχ. 7).

Απάντηση:

α) $C = 217 \text{ pF}$

β) $D = 2,17 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$

γ) $E_1 = 878 \frac{\text{kV}}{\text{m}}, E_2 = 2450 \frac{\text{kV}}{\text{m}}, E_3 = 292 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

δ) $U_1 = 1,75 \text{ kV}, U_2 = 0,9 \text{ kV}, U_3 = 7,35 \text{ kV}$

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

15. Δίνεται η συνδεσμολογία του σχήματος 8 όπου: $R_1 = R_4 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ και $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$. Να βρεθεί η R_{AG}

Απάντηση: $R_{AG} = 3 \text{ k}\Omega$ (Η R_5 είναι βραχυκυκλωμένη και τίθεται εκτός κυκλώματος).

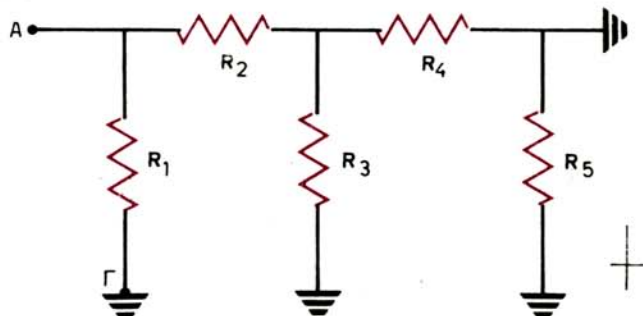
16. Αν στην προηγούμενη άσκηση βραχυκυκλωθεί η R_3 (σχ. 8) ποια η τιμή της R_{AG} ;

Απάντηση: $R_{AG} = 2,4 \text{ k}\Omega$. (Η R_5 είναι βραχυκυκλωμένη και τίθεται εκτός κυκλώματος).

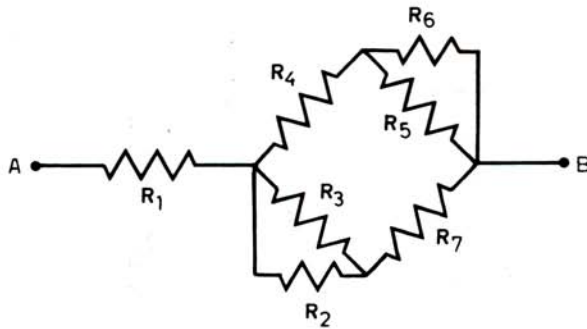
17. Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} της συνδεσμολογίας του σχήματος 9.

Δίνεται: $R_1 = R_2 = \dots = R_7 = 4 \Omega$

Απάντηση: $R_{AB} = 7 \Omega$



Σχ. 8.



Σχ. 9.

18. Τέσσερις αντιστάσεις $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$ και $R_4 = 4 \Omega$ συνδέονται έτσι, ώστε να αποτελέσουν διάταξη συνολικής αντιστάσεως 1Ω . Η διάταξη αυτή συνδέεται με ηλεκτρική πηγή. Αν η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_3 είναι 12 W να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_2 .

Απάντηση: 32 W

19. Στο κύκλωμα του σχήματος 10 είναι: $R = 1 \Omega$, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_4 = 6 \Omega$, $R_3 = R_5 = 3 \Omega$. Αν η ένδειξη του βολτομέτρου είναι 100 V ζητούνται:

α) Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες.

β) Η τάση U .

γ) Η ωριαία δαπάνη της εγκαταστάσεως αν το kWh κοστίζει 12 δρχ.

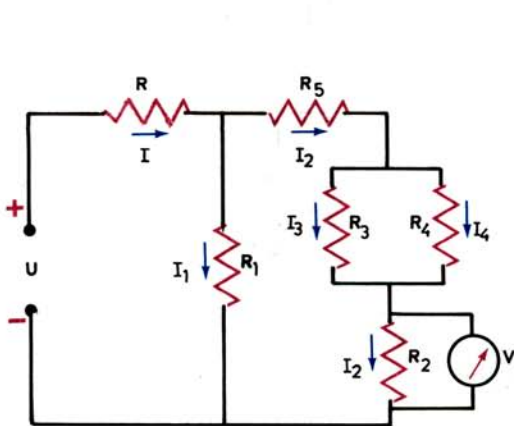
Απάντηση:

α) $I_2 = 10 \text{ A}$, $I_3 = 6,66 \text{ A}$, $I_4 = 3,33 \text{ A}$, $I_1 = 15 \text{ A}$ και $I = 25 \text{ A}$

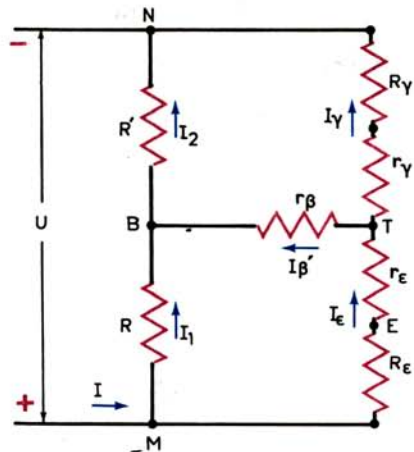
β) $U = 175 \text{ V}$ και γ) $52,5 \text{ δρχ.}$

20. Το κύκλωμα του σχήματος 11 παρουσιάζει απλοποιημένο σχέδιο μιας βαθμίδας ενισχύσεως με τρανζίστορ, που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα που ονομάζεται **ρεύμα ηρεμίας**. Είναι $U = 9 \text{ V}$, $I = 52 \text{ mA}$, $I_B = 1 \text{ mA}$, $U_{ME} = 0,5 \text{ V}$, $U_{MG} = 3 \text{ V}$, $U_{MB} = 0,8 \text{ V}$, $R_V = 120 \Omega$ και $r_V = 10 r_E$. Ζητούνται οι αντιστάσεις R , R' , R_E , r_E , r_B και r_V .

Απάντηση: $R' = 4,1 \text{ k}\Omega$, $R = 800 \Omega$, $R_E = 9,8 \Omega$, $r_E = 4,54 \Omega$, $r_V = 45 \Omega$ και $r_B = 68,5 \Omega$



Σχ. 10.



Σχ. 11.

21. Για να τροφοδοτήσουμε μια συσκευή αντιστάσεως $r_1 = 160 \text{ k}\Omega$ με τάση 120 V και μια άλλη αντιστάσεως $r_2 = 40 \text{ k}\Omega$ με τάση 50 V χρησιμοποιούμε διαίρετη τάσεως που αποτελείται από τρεις αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 (σχ. 12).

Διαθέτουμε πηγή τάσεως $U = 220 \text{ V}$ που μπορεί να αποδώσει ρεύμα $I = 8 \text{ mA}$. Να υπολογιστούν οι τιμές των αντιστάσεων R_1 , R_2 και R_3 .

Απάντηση: $R_1 = 12,5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 9,66 \text{ k}\Omega$ και $R_3 = 8,33 \text{ k}\Omega$

22. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 13 όπου: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ και $U = 12 \text{ V}$. Να υπολογισθεί το φορτίο κάθε πυκνωτή:

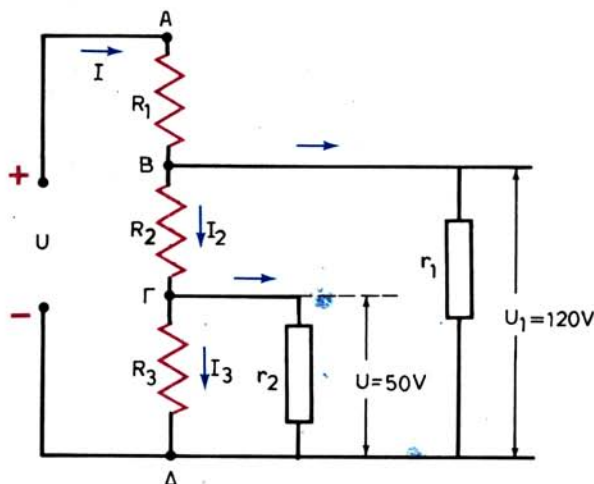
α) Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός.

β) Όταν είναι κλειστός (μόνιμη κατάσταση).

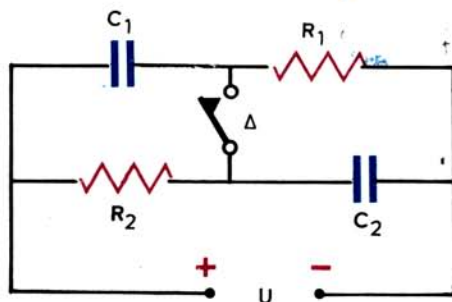
Απάντηση: α) $q_1 = 12 \mu\text{C}$ και $q_2 = 24 \mu\text{C}$ β) $q_1 = 7,2 \text{ mC}$ και $q_2 = 9,6 \text{ mC}$

23. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 14 όπου: $E = 10 \text{ V}$, $r = 2 \Omega$, $E_1 = 6 \text{ V}$, $r_1 = 0,5 \Omega$. Ο λαμπτήρας Λ φέρει τις ενδείξεις 12 V , 32 W . Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ θα ανάψει ο λαμπτήρας;

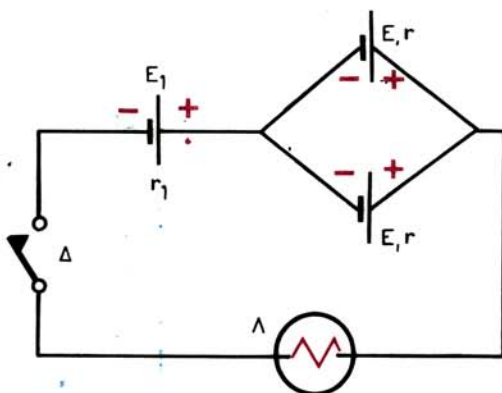
Απάντηση: Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι $2,66 \text{ A}$. Επειδή το ρεύμα αυτό είναι ίσο με το κανονικό ρεύμα λειτουργίας του λαμπτήρα ($I_k = 32/12 = 2,66 \text{ A}$) ο λαμπτήρας θα λειτουργήσει κανονικά.



Σχ. 12.



Σχ. 13.



Σχ. 14.

24. 54 στοιχεία συνδέονται μικτά και τροφοδοτούν καταναλωτή αντιστάσεως 12Ω . Κάθε στοιχείο έχει ΗΕΔ $1,1 \text{ V}$ και εσωτερική αντίσταση 2Ω . Να καθορισθεί ο τρόπος συνδέσεως των στοιχείων για να γίνει το ρεύμα που διαρρέει τον καταναλωτή μέγιστο και να υπολογισθεί το μέγιστο ρεύμα.

Απάντηση: Τρεις παράλληλες συστοιχίες των 18 στοιχείων σε σειρά. Το μέγιστο ρεύμα είναι 825 mA .

25. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 15 στο οποίο είναι: $E = 48 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_1 = R_3 = R_5 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_4 = 7 \Omega$ και $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$. Ζητούνται:

α) Οι τάσεις U , U_C και U_R β) Τα ρεύματα I_2 και I_3 γ) Τα φορτία των πυκνωτών

Απάντηση: α) $U = 45 \text{ V}$, $U_C = 30 \text{ V}$, $U_R = 9 \text{ V}$ β) $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$ γ) $q_1 = q_2 = 150 \mu\text{C}$

26. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 16 όπου: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $E_1 = 6 \text{ V}$, $E_2 = 18 \text{ V}$ και $r_1 = r_2 = 0$. Να υπολογισθούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις πηγές και τις αντιστάσεις του κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff.

Απάντηση: $I = I' = 9 \text{ A}$, $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = 3 \text{ A}$ και $I_4 = 6 \text{ A}$

27. Να επιλυθεί το κύκλωμα της προηγούμενης ασκήσεως (σχ. 16) με τη μέθοδο των βροχικών εντάσεων (Maxwell).

28. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_4 (σχ. 16) με το θεώρημα του Thevenin.

29. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 17 όπου: $E_1 = 38 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $E_2 = 36 \text{ V}$, $R_2 = 6 \Omega$, $E_3 = 42 \text{ V}$, $R_3 = 5 \Omega$ και $E_4 = 18 \text{ V}$. Να υπολογισθούν τα ρεύματα I_1 , I_2 , I_3 και I_4 .

Απάντηση: $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$, $I_3 = 12 \text{ A}$ και $I_4 = 1 \text{ A}$

30. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 18 όπου: $E_1 = 8 \text{ V}$, $r_1 = 2 \Omega$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $r_2 = 1 \Omega$ και $R = 6 \Omega$. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει την R :

α) Με μετασχηματισμό των πηγών τάσεως σε πηγές ρεύματος.

β) Με τους κανόνες του Kirchhoff.

γ) Με τον κανόνα του Maxwell.

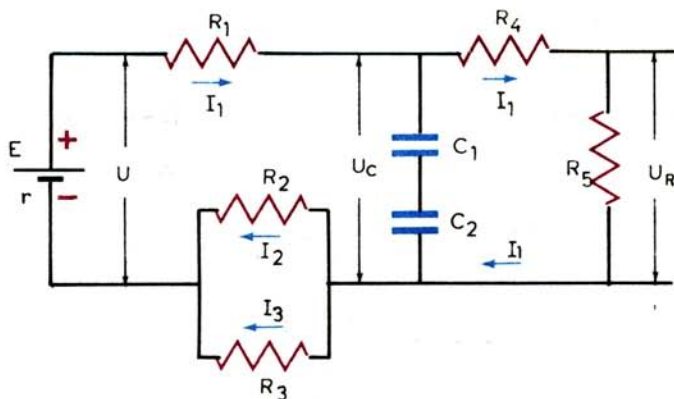
δ) Με το θεώρημα της υπερθέσεως.

ε) Με το θεώρημα του Thevenin.

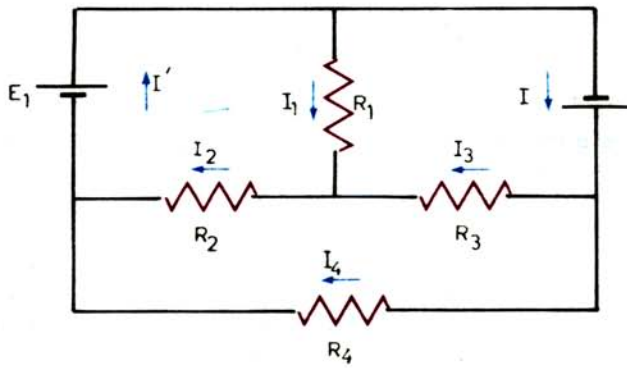
στ) Με το θεώρημα του Norton.

Απάντηση: $I = 1 \text{ A}$ (Τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton έχουν:

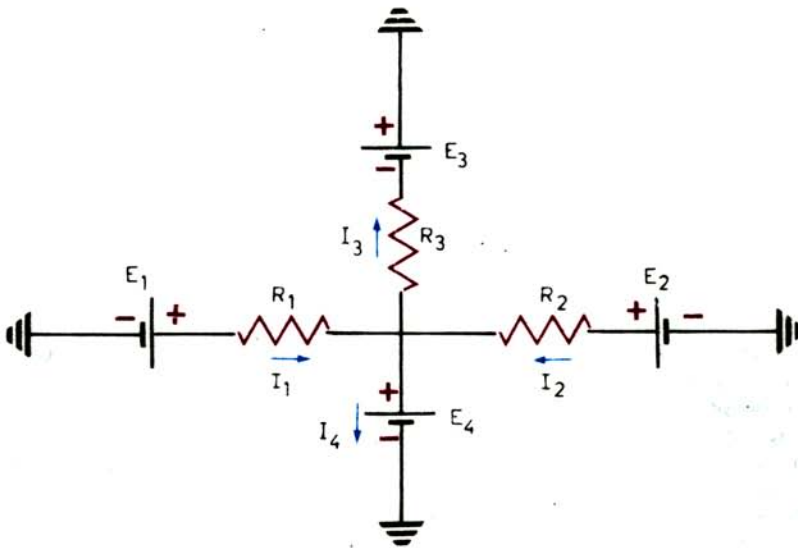
$$E_T = \frac{20}{3} \text{ V}, \quad I_G = 10 \text{ A} \text{ και } R_T = \frac{2}{3} \Omega$$



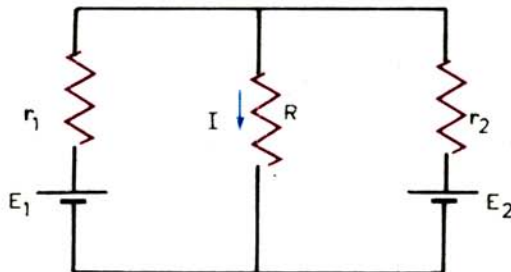
Σχ. 15.



Σχ. 16



Σχ. 17.



Σχ. 18.

31. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 19 όπου: $I = 2 \text{ A}$, $R_1 = 3,5 \Omega$, $R_2 = 2,5 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $E = 10 \text{ V}$, $R_4 = 10 \Omega$ και $R_\phi = 6 \Omega$ Να υπολογισθεί το ρεύμα I_ϕ καθώς και η τάση U_ϕ με το θεώρημα του Thevenin.

Απάντηση: $I_\phi = 0,5 \text{ A}$, $U_\phi = 3 \text{ V}$ (το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin έχει: $E_T = 9 \text{ V}$ και $R_T = 12 \Omega$)

32. Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος 20 όπου: $E_1 = 100 \text{ V}$, $E_2 = 90 \text{ V}$, $E_3 = 80 \text{ V}$, $r_1 = 0,2 \Omega$, $r_2 = 0,25 \Omega$, $r_3 = 0,3 \Omega$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$ και $R_\phi = 5,3 \Omega$. Να υπολογισθεί το ρεύμα που διαρρέει τη R_ϕ με το θεώρημα του Norton.

Απάντηση: $I_\phi = 13,8 \text{ A}$

33. Ηλεκτρική πηγή εσωτερικής αντιστάσεως $r = 2 \Omega$ και πολικής τάσεως $U = 280 \text{ V}$ τροφοδοτεί εγκατάσταση που βρίσκεται σε απόσταση $l = 1 \text{ km}$ από την πηγή (σχ. 21). Η εγκατάσταση αποτελείται από 100 λαμπτήρες φωτισμού που καθένας έχει ισχύ 40 W και τάση λειτουργίας $U_K = 220 \text{ V}$ καθώς και από ένα θερμοσίφωνα ισχύος $2,6 \text{ kW}$ και τάσεως λειτουργίας 220 V . Ζητούνται:

α) Τα ρεύματα I_λ , I_θ και το ρεύμα I που διαρρέει τις γραμμές μεταφοράς καθώς και η διάμετρος της διατομής των αγωγών μεταφοράς δ ($\rho = 4 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$) έτσι ώστε οι καταναλωτές να λειτουργούν κανονικά.

β) Η ΗΕΔ της πηγής.

γ) Η απόδοση της εγκαταστάσεως.

δ) Η ωριαία δαπάνη της εγκαταστάσεως αν το kWh κοστίζει $10 \text{ } \delta\rho\chi$.

Απάντηση:

$$\alpha) I_\lambda = 0,182 \text{ A}, I_\theta = 11,8 \text{ A}, I = 30 \text{ A} \text{ και } \delta = \sqrt{\frac{8 I l \rho}{\pi (U - U_K)}} = 0,714 \text{ cm}$$

$$\beta) E = U + Ir = 340 \text{ V}$$

$$\gamma) \eta = 0,647$$

$$\delta) 102 \text{ } \delta\rho\chi$$

34. Για το σχήμα 22 γνωρίζουμε ότι ο διακόπτης Δ κλείνει σε $t = 0$ και ότι ο πυκνωτής είναι τελείως αφόρτιστος. Ζητούνται:

α) η σταθερά χρόνου.

β) Ο χρόνος μισής ζωής του μεταβατικού φαινομένου.

γ) Να υπολογισθούν οι τιμές της τάσεως u_c για $t = 5 \text{ ms}$, 10 ms , 20 ms , 30 ms και 40 ms .

δ) Να σχεδιασθεί η καμπύλη $u_c = f(t)$.

Απάντηση: α) $\tau = RC = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$

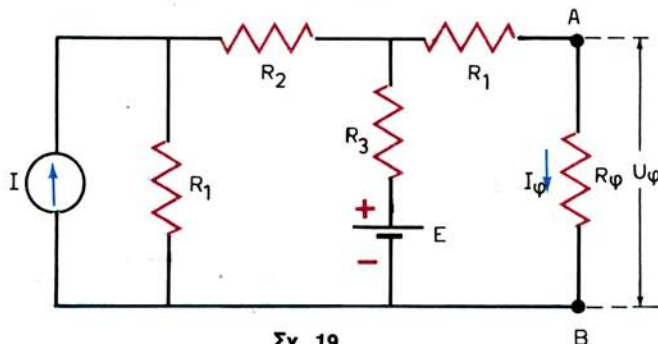
$$\beta) t_h = \tau / \ln 2 = 6,93 \text{ ms}$$

γ) Είναι $u_c = f(t) = 25 - 25 e^{-100t}$. Επομένως:

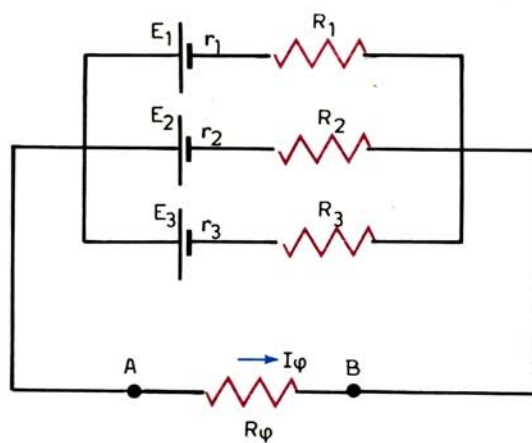
$$t(\text{ms}) \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40$$

$$u_c(\text{V}) \quad 0 \quad 9,84 \quad 15,8 \quad 21,6 \quad 23,75 \quad 24,54$$

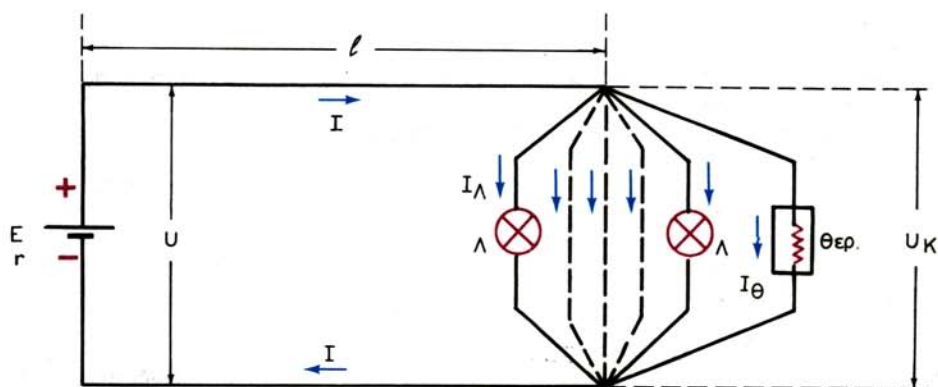
δ) Η καμπύλη $u_c = f(t)$ έχει σχεδιασθεί στο σχήμα 23.



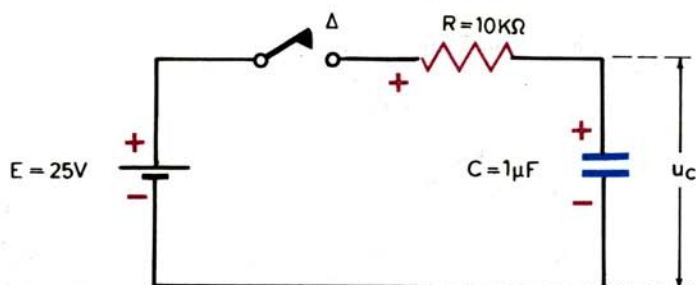
Σχ. 19.



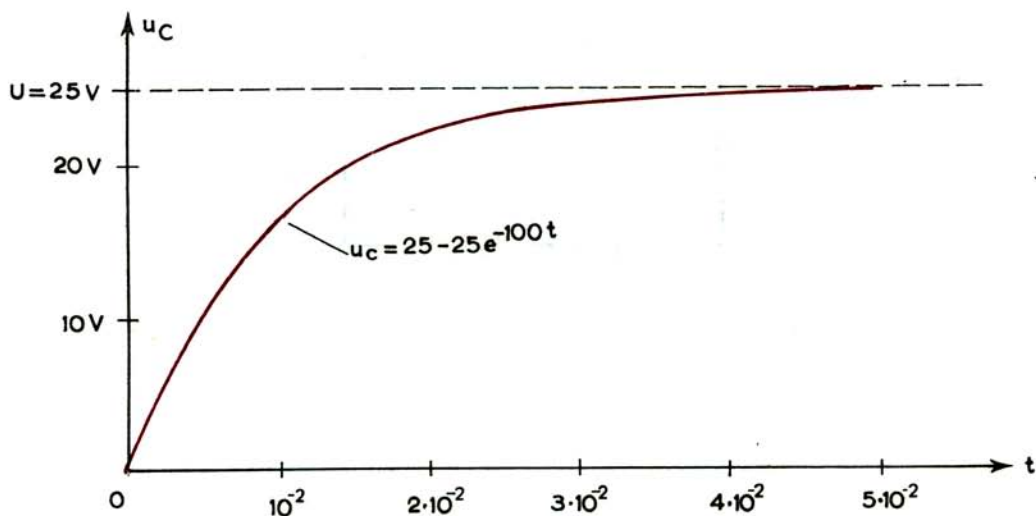
Σχ. 20.



Σχ. 21.



Σχ. 22.



Σχ. 23.

35. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης Δ του σχήματος 24. Ζητούνται:

- Η σταθερά χρόνου.
- Ο χρόνος μισής ζωής του μεταβατικού φαινομένου.
- Η συνάρτηση $u_c = f(t)$.
- Να υπολογισθούν οι τιμές της τάσεως u_c για $t = 10 \text{ ms}$, 30 ms και 40 ms .
- Να σχεδιασθεί η καμπύλη $u_c = f(t)$.

Απάντηση: α) $\tau = RC = (R_1 + R_2) C = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$

β) $t_{1/2} = 6,93 \text{ ms}$

γ) $u_c = 10e^{-100t}$

δ) $t(\text{ms})$ 10 30 40

$u_c(\text{V})$ 3,7 0,5 0,18

ε) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $u_c = f(t)$ αποδίδεται από την καμπύλη του σχήματος 25

36. 12 στοιχεία συσσωρευτών συνδέονται σε σειρά και πρόκειται να φορτισθούν από ηλεκτρική πηγή ΗΕΔ 110 V ($r = 0$). Κάθε στοιχείο έχει ΑΗΕΔ 2 V , χωρητικότητα 150 Ah και εσωτερική αντίσταση $5 \text{ m}\Omega$. Ζητούνται:

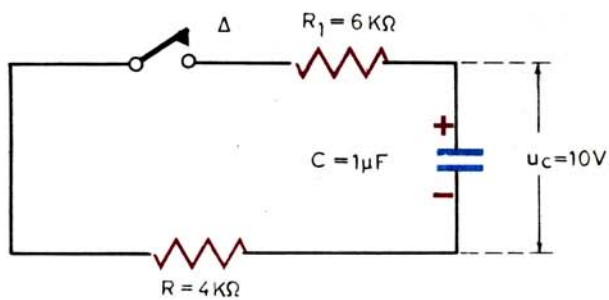
- Να σχεδιασθεί το κύκλωμα φορτίσεως και να υπολογισθεί η αντίσταση φορτίσεως R_Φ έτσι, ώστε η φόρτιση να γίνεται με κανονικό ρεύμα.
- Πόσοι λαμπτήρες φωτισμού μπορούν να αντικαταστήσουν την παραπάνω αντίσταση αν η αντίσταση κάθε λαμπτήρα είναι $121/3 \Omega$.
- Η τάση στους πόλους της μπαταρίας.
- Η δαπάνη φορτίσεως αν το kWh κοστίζει $12 \text{ } \delta\rho\chi$.

Απάντηση: α) Το κύκλωμα φορτίσεως φαίνεται στο σχήμα 26 $R_\Phi = 5,67 \Omega$

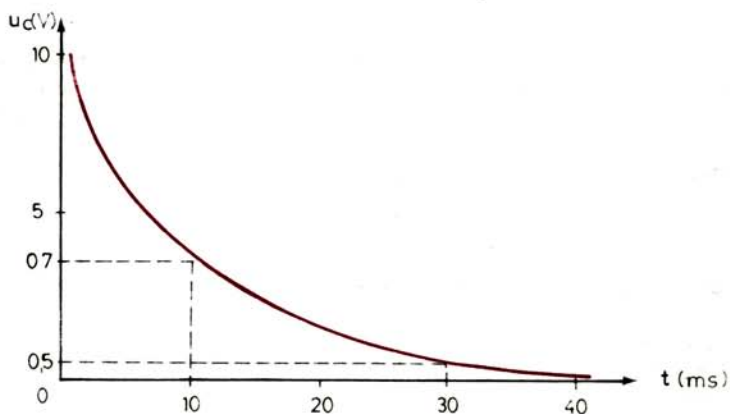
β) 7 λαμπτήρες γ) $U_{AB} = 24,9 \text{ V}$ και δ) $198 \text{ } \delta\rho\chi$. (ο χρόνος φορτίσεως είναι 10 h)

37. 75 συσσωρευτές συνδέονται σε σειρά και φορτίζονται με ρεύμα 6 A . Ο χρόνος φορτίσεως είναι 15 h και η απόδοση 90% . Μετά τη φόρτιση τα στοιχεία συνδέονται σε τρεις ομάδες (σε σειρά) και κάθε ομάδα αποτελείται από 25 στοιχεία που συνδέονται παράλληλα. Ζητούνται:

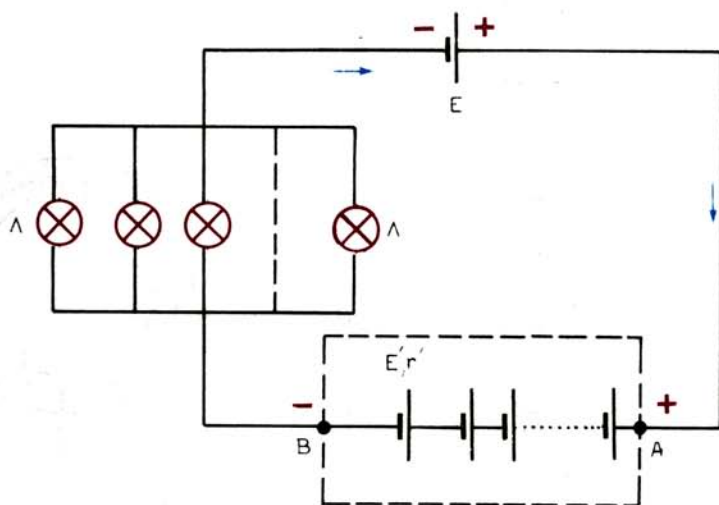
- Τα αμπερώρια που δαπανάμε για να φορτίσουμε τους συσσωρευτές.
- Τα αμπερώρια που παρέχει κάθε στοιχείο όταν εκφορτίζεται.



Σχ. 24.



Σχ. 25.



Σχ. 26.

γ) Η χωρητικότητα κάθε ομάδας.

δ) Ο χρόνος τροφοδοσίας καταναλωτή που λειτουργεί με ρεύμα 27 A.

Απάντηση: α) 90 Ah β) 81 Ah γ) 2025 Ah και δ) 75 h

38. Για την τιμή $R = 1 \Omega$ της μεταβλητής αντιστάσεως το γαλβανόμετρο δείχνει ρεύμα μηδέν (σχ. 27) Αν όλα τα στοιχεία είναι όμοια να υπολογισθεί η εσωτερική αντίσταση κάθε στοιχείου.

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ

39. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί ένα ηλεκτρόνιο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 12,56 \times 10^{-4} \text{ T}$ για να διαγράψει κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 1 \text{ cm}$; Δίνονται: φορτίο ηλεκτρονίου $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και μάζα ηλεκτρονίου $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Απάντηση:

$$v = \frac{Ber}{m} = 2,2083 \times 10^6 \text{ m/s}$$

40. Ηλεκτρόνιο επιταχύνεται ανάμεσα σε δυο σημεία που έχουν μεταξύ τους διαφορά δυναμικού $U = 20 \text{ V}$ και με την ταχύτητα που απέκτησε εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 2,6 \times 10^{-3} \text{ T}$ κάθετα στις δυναμικές του γραμμές. Να υπολογισθεί η ακτίνα της κυκλικής του τροχιάς r .

Απάντηση:

$$r = \sqrt{\frac{2mU}{B^2 e}} = 6 \text{ mm}$$

41. Σωληνοειδές έχει μήκος 80 cm, διάμετρο 10 cm, αριθμό σπειρών 2500 και διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως 1A. Να υπολογισθούν:

α) Η μαγνητική διέγερση H .

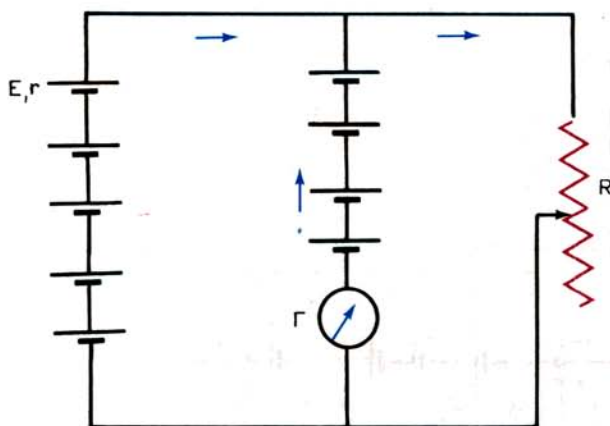
β) Η μαγνητική επαγωγή B όταν εισάγομε στο σωληνοειδές πυρήνα που έχει σχετική μαγνητική διαπερατότητα 3000.

γ) Η μαγνητική ροή πριν και μετά την εισαγωγή του πυρήνα.

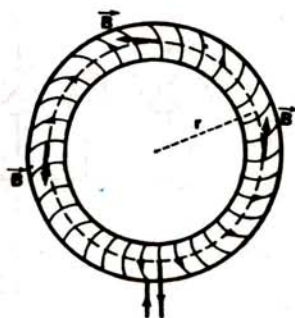
Απάντηση: α) $H = 3125 \text{ A/m}$

β) $B = 11,775 \text{ T}$

γ) $\Phi_{\text{πριν}} = 40,625 \mu\text{Wb}$ και $\Phi_{\text{μετα}} = 121,8 \text{ mWb}$



Σχ. 27.



Σχ. 28.

42. Δυο ευθύγραμμοι παράλληλοι αγωγοί βρίσκονται σε απόσταση 4 cm και διαρρέονται από ρεύματα ομόρροπα εντάσεως 10 A και 40 A αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η δύναμη ανά cm μήκους που ασκείται σε κάθε αγωγό.

Απάντηση: $F = 2 \times 10^{-5} \text{ N}$

43. Δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο και μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα u κάθετη στις δυναμικές γραμμές των δυο πεδίων. Τα δυο πεδία \vec{E} και \vec{B} είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ρυθμισθεί έτσι, ώστε η δέσμη να μη υφίσταται καμμία απόκλιση. Αν $E = 1200 \text{ V/cm}$ και $B = 0,1 \text{ T}$ να υπολογισθεί η ταχύτητα των ηλεκτρονίων.

Απάντηση: $u = 1,2 \times 10^8 \text{ cm/s}$

44. Ένα τοροειδές πηνίο με δακτυλιοειδή πυρήνα από χάλυθα (σχ. 28) έχει μέση ακτίνα $r = 10 \text{ cm}$, διάμετρο κυκλικής διατομής πυρήνα $d = 4 \text{ cm}$ και αριθμό σπειρών $N = 500$. Η καμπύλη μαγνητίσεως φαίνεται στο σχήμα 29. Ζητούνται:

α) Το ρεύμα που χρειάζεται για να δημιουργηθεί μαγνητική ροή $\Phi = 2 \text{ mWb}$.

β) Η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα.

γ) Η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα.

Δίνεται: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m}$

Απάντηση: α) 6,28 A β) $\mu = 254$ και γ) $R_m = 15,7 \times 10^5 \text{ A/Wb}$

45. Σε ένα τοροειδές πηνίο με δακτυλιοειδή πυρήνα από μαλακό σίδηρο με μέση διάμετρο 12 cm και εμβαδό διατομής 4 cm^2 (σχ. 28) δημιουργούμε διάκενο μήκους 5 mm. Θέλομε να δημιουργήσουμε στο διάκενο μαγνητική επαγωγή $B = 0,9 \text{ T}$. Ζητούνται:

α) Η μαγνητεγερτική δύναμη όταν η μαγνητική σκέδαση θεωρείται αμελητέα.

β) Η μαγνητεγερτική δύναμη με ένα συντελεστή απωλειών 1,2 που οφείλεται στις μαγνητικές απώλειες σχεδίασεως του διάκενου. Για το μαλακό σίδηρο ισχύουν οι τιμές:

$B(\text{T})$ 0,1 0,2 0,4 0,6 0,8 1 1,2 1,4

$H(\text{A/m})$ 22,5 45 90 140 205 300 475 940

Απάντηση: α) $M = 3689$ Αμπεροστροφές.

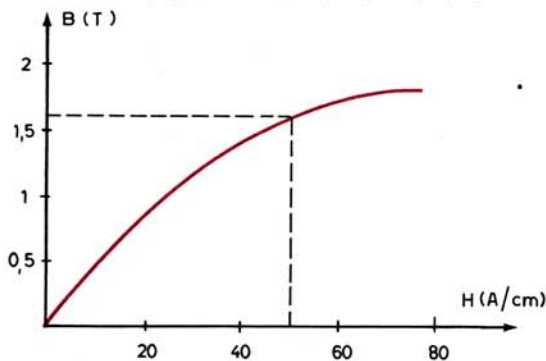
β) Η ροή στον πυρήνα πρέπει να είναι: $\Phi' = B'S = 1,2 \cdot BS \rightarrow B' = 1,2 \times 0,9 = 1,08 \text{ T}$
Τελικά βρίσκουμε ότι $M = 3730$ Αμπεροστροφές.

46. Δίνεται το μαγνητικό κύκλωμα του σχήματος 30. Να υπολογισθεί η απαιτούμενη μαγνητεγερτική δύναμη M για να δημιουργηθεί στο μεσαίο σκέλος του κυκλώματος μαγνητική επαγωγή $B = 1 \text{ T}$. Οι διαστάσεις του κυκλώματος δίνονται σε cm. Οι απαραίτητες τιμές $B - H$ του υλικού είναι:

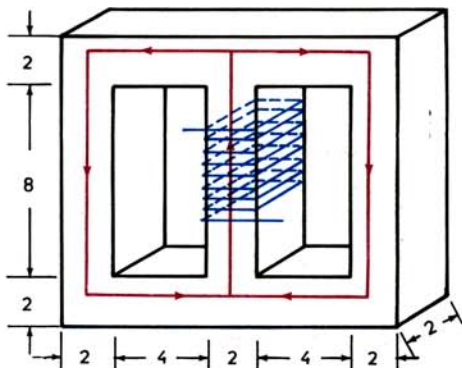
$B(\text{T})$ 0,3 0,5 1,0

$H(\text{A/m})$ 119,4 159,2 398

Απάντηση: $M = 75,2$ Αμπεροστροφές



Σχ. 29.



Σχ. 30.

47. Μαγνητικό κύκλωμα έχει σταθερή μαγνητική αντίσταση R_m (ανεξάρτητη της ροής Φ) Αν ο αριθμός των σπειρών του είναι $N = 100$ να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του L αν $R_m = 2 \times 10^5 \text{ A/Wb} = 2 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$

Απάντηση:
$$L = \frac{N^2}{R_m} = 50 \text{ mH}$$

48. Πηνίο αντιστάσεως $R = 4 \Omega$ και αυτεπαγωγής $L = 0,8 \text{ H}$ διαρρέεται από ρεύμα το οποίο μεταβάλλεται ως εξής:

α) Ομοιόμορφη αύξηση από 0 σε 5A σε 0,25 s.

β) Σταθερό ρεύμα 5A από 0,25 s μέχρι 0,75 s.

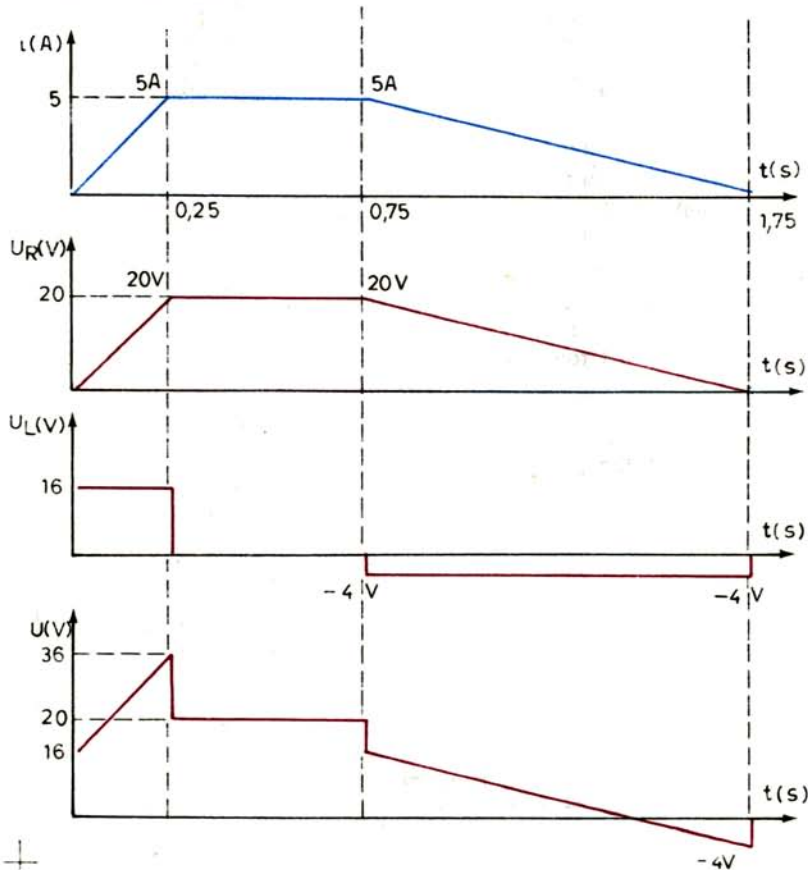
γ) Ομοιόμορφη ελάττωση από 5A σε 0 σε 1 s.

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα του ρεύματος i της τάσεως $U_R = LR$, της επαγόμενης ΗΕΔ $U_L = L \Delta i / \Delta t$ και της εφαρμοσμένης τάσεως $U = U_R + U_L$.

Απάντηση: Σχήμα 31

49. Μια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δυο αγωγούς που έχουν ακτίνα $R = 0,8 \text{ cm}$, μήκος $l = 500 \text{ m}$ και τα κέντρα των αγωγών απέχουν απόσταση $a = 0,5 \text{ m}$. Να υπολογισθεί η αυτεπαγωγή της γραμμής.

Απάντηση: $L = 827 \mu\text{H}$



Σχ. 31.

50. Γύρω από ένα πυρήνα από μαλακό σίδηρο είναι τυλιγμένο πηνίο μήκους 20 cm και διατομής 20 cm². Το πηνίο αποτελείται από 200 σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα 2A. Αν η διακοπή του ρεύματος συντελείται σε χρόνο 20 ms, να υπολογισθεί η αυτεπαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου. Δίνεται η σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 2000$ και ότι $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A.m

Απάντηση: $E = 500$ V

51. Δυο πηνία είναι συζευγμένα και έχουν συνδεθεί με δυο αντιστάσεις R_1 και R_2 , ένα πυκνωτή χωρητικότητας c και μια πηγή όπως δείχνει το σχήμα 32. Αν οι τιμές των αντιστάσεων R_1 και R_2 είναι τέτοιες ώστε το γαλβανόμετρο να δείχνει μηδέν όταν ο διακόπτης δ ανοιγοκλείνει, να υπολογισθεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δυο πηνίων.

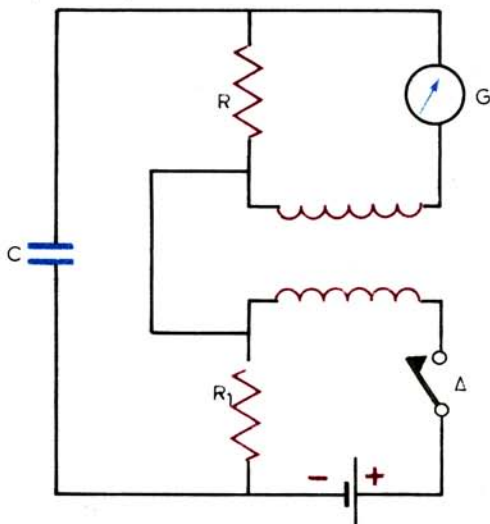
Απάντηση: $M = CR_1R_2$

52. Πηνίο αποτελείται από 500 σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα 10A. Η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου είναι 0,01 Wb. Αν το ρεύμα μεταβληθεί ομαλά και γίνει 9A σε χρόνο 50 ms να υπολογισθεί η αντεπαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου.

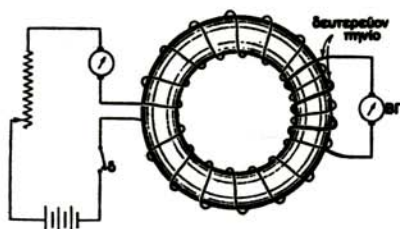
Απάντηση: $E = 10$ V

53. Τοροειδές πηνίο με σιδερένιο πυρήνα περιβάλλεται από δευτερεύον πηνίο που φέρει 100 σπείρες διαμέτρου 2 cm (σχ. 33). Όταν ανοίξουμε το διακόπτη δ μετράμε στο βαλλιστικό γαλβανόμετρο ΒΓ φορτίο 6 mC. Αν η αντίσταση του δευτερεύοντος πηνίου είναι 5 Ω να υπολογισθεί η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του τοροειδούς.

Απάντηση: $B = 0,96$ T



Σχ. 32.



Σχ. 33.

54. Στο σχήμα 34 το ρεύμα I μεταβάλλεται κατά 1A σε χρόνο 5ms . Να υπολογισθεί η E_{AB} ($M = 0$)

Απάντηση: $E_{AB} = 1\text{V}$

55. Στο σχήμα 35 το ρεύμα I μεταβάλλεται κατά 1A σε χρόνο 1ms . Να υπολογισθεί η E_{AB} όταν:

α) Έχομε ορθή σύνδεση των τυλιγμάτων των πηνίων (ομόρροπα μαγνητικά πεδία).

β) Έχομε αντίθετη σύνδεση τυλιγμάτων.

Απάντηση: α) $E_{AB} = 200\text{V}$ και β) $E_{AB} = 100\text{V}$

56. Ο διακόπτης Δ κλείνει σε χρόνο $t = 0$ στο σχήμα 36. Ζητούνται:

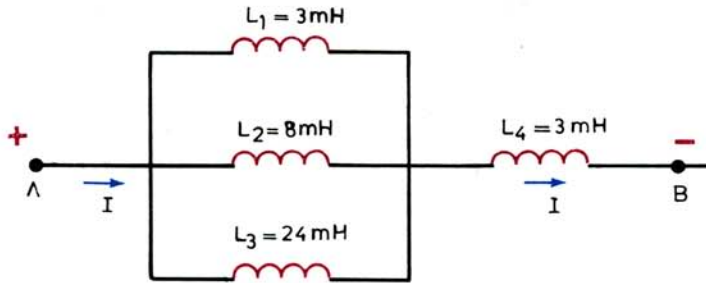
α) Το ρεύμα I και οι τάσεις U_R και U_L σε $t = 0$.

β) Οι ίδιες ποσότητες σε χρόνο $t = \infty$.

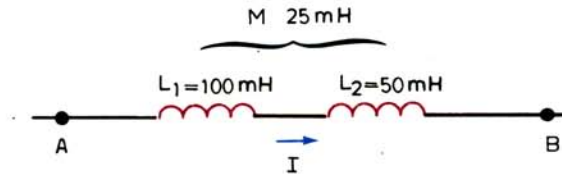
γ) Το ρεύμα μετά από χρόνο $t = 5\text{ms}$ καθώς και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

Απάντηση: α) $I = 0$, $U_R = 0$, $U_L = 20\text{V}$

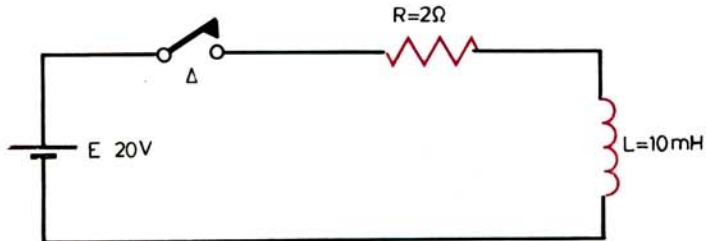
β) $I = 10\text{A}$, $U_R = 20\text{V}$, $U_L = 0$ και γ) $I = 6,3\text{A}$, $W = 198\text{mJ}$



Σχ. 34.



Σχ. 35.



Σχ. 36.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Εισαγωγή – Νόμος του Coulomb

1.1 Γενικά.....	1
1.2 Σύσταση της ύλης.....	3
1.3 Δομή του ατόμου – Ιόντα.....	4
1.4 Φύση του ηλεκτρισμού.....	5
1.5 Αγωγοί και μονωτές.....	6
1.6 Ηλεκτρίση των σωμάτων.....	8
1.7 Ηλεκτροστατικές μηχανές.....	10
1.8 Το ηλεκτροσκόπιο.....	11
1.9 Συστήματα μονάδων.....	12
1.10 Νόμος του Coulomb.....	14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ηλεκτρικό πεδίο

2.1 Η έννοια του πεδίου.....	19
2.2 Ηλεκτρικό πεδίο – Ένταση ηλεκτρικού πεδίου.....	20
2.3 Δυναμικές γραμμές – Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.....	23
2.4 Δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου – Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.....	26
2.5 Διαφορά δυναμικού ή τάση.....	30
2.6 Σχέση μεταξύ τάσεως και εντάσεως ηλεκτρικού πεδίου.....	32
2.7 Ισοδυναμικές επιφάνειες.....	34
2.8 Μορφές ηλεκτρικών πεδίων.....	37
2.9 Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.....	46
2.10 Ηλεκτρική ροή.....	51
2.11 Νόμος της ηλεκτρικής ροής ή θεώρημα του Gauss.....	53
2.12 Αγώγιμα σώματα μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο.....	55
2.13 Πυκνότητα φορτίου – Φαινόμενο Corona.....	58
2.14 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου σφαιρικού αγωγού.....	62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Πυκνωτές

3.1 Χωρητικότητα αγωγού.....	66
3.2 Πυκνωτές.....	69
3.3 Χωρητικότητα γραμμών αγωγών.....	75
3.4 Συνδεσμολογία πυκνωτών.....	77
3.5 Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή.....	86
3.6 Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου.....	87

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Διηλεκτρικά σε ηλεκτρικό πεδίο

4.1 Γενικά.....	92
-----------------	----

4.2	Διηλεκτρική σταθερά	92
4.3	Διηλεκτρική αντοχή	95
4.4	Διηλεκτρική μετατόπιση	96
4.5	Οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών	98
4.6	Ηλεκτρικό δίπολο – Ηλεκτρική ροπή	105
4.7	Ηλεκτρική ροπή ατόμων και μορίων των διηλεκτρικών	106
4.8	Διηλεκτρική πόλωση	108
4.9	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου μέσα σε διηλεκτρικό	116
4.10	Τύποι και βιομηχανική κατασκευή των πυκνωτών	119
4.11	Πιεζοηλεκτρισμός – Ηλεκτροσυστολή	124
4.12	Ηλεκτρικό πεδίο της γης. Αλεξικέραυνο	125

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΣΥΝΕΧΕΣ ΡΕΥΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Νόμος του Ohm – Αντίσταση αγωγού

5.1	Ηλεκτρικό ρεύμα – Φορείς και φορά του ρεύματος	127
5.2	Ηλεκτρικές πηγές – Ηλεκτρικά κυκλώματα	128
5.3	Ένταση και πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	130
5.4	Αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος	133
5.5	Νόμος του Ohm – Αντίσταση αγωγού	133
5.6	Επίδραση της θερμοκρασίας στην αντίσταση αγωγού – Υπεραγωγιμότητα	142
5.7	Ενέργεια και ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος	144
5.8	Χαρακτηριστικά μεγέθη των ηλεκτρικών πηγών	146
5.9	Συνδεσμολογία αντιστάσεων	150
5.10	Βιομηχανική κατασκευή αντιστάτων – Κώδικας χρωμάτων	159
5.11	Ροοστάτες και ποτενσιόμετρα	160

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Θερμικός νόμος του Joule – Υπολογισμοί

6.1	Θερμικός νόμος του Joule	165
6.2	Βαθμός αποδόσεως	166
6.3	Θερμική ισορροπία αντιστάτη	167
6.4	Εφαρμογές του νόμου του Joule	170
6.5	Υπολογισμός των αγωγών σε πυκνότητα ρεύματος	175
6.6	Υπολογισμός των αγωγών σε πτώση τάσεως	176

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Ηλεκτρικά δίκτυα

7.1	Εισαγωγή – Ορισμοί	179
7.2	Κανόνες του Kirchhoff	181
7.3	Γενική μέθοδος επίλυσης δικτύου	184
7.4	Πηγές τάσεως και πηγές ρεύματος – Ιδανικές πηγές	190
7.5	Η μέθοδος των βροχικών εντάσεων για την επίλυση δικτύου	202
7.6	Η μέθοδος των κομβικών τάσεων για την επίλυση δικτύου	206
7.7	Γέφυρες συνεχούς ρεύματος	211
7.8	Διαιρέτες – Καταμεριστές τάσεως	218
7.9	Κυκλώματα συνεχούς ρεύματος για τη φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτών	220

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΩΟ

Θεωρήματα ηλεκτρικών δικτύων

8.1 Εισαγωγή.....	230
8.2 Θεώρημα μετασχηματισμού αστέρα σε τρίγωνο και αντίστροφα ή θεώρημα του Kenelly	230
8.3 Θεώρημα της επαλληλίας ή της υπερθέσεως.....	234
8.4 Θεωρήματα των ισοδυνάμων πηγών	236
8.5 Θεώρημα της αμοιβαιότητας ή μεταθέσεως	242
8.6 Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος (θεώρημα προσαρμογής).....	245

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

Ηλεκτρικά φαινόμενα κατά την επαφή δυο μετάλλων

9.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από τα μέταλλα	251
9.2 Φαινόμενα κατά την επαφή δυο ομοίων μετάλλων	252
9.3 Φαινόμενα κατά την επαφή δυο διαφορετικών μετάλλων	252
9.4 Θερμοηλεκτρικό φαινόμενο	253

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ

Αγωγιμότητα υγρών

10.1 Γενικά.....	255
10.2 Πειραματικές παρατηρήσεις – Ορισμοί	255
10.3 Μηχανισμός της ηλεκτρολύσεως	256
10.4 Νόμος του Ohm στους ηλεκτρολυτικούς αγωγούς.....	260
10.5 Νόμοι της ηλεκτρολύσεως	260
10.6 Φαινόμενα στην επαφή μεταξύ μετάλλου και ηλεκτρολύτη	262
10.7 Πόλωση των ηλεκτροδίων κατά την ηλεκτρόλυση.....	264
10.8 Ηλεκτρικά στοιχεία	267
10.9 Συσσωρευτές	271

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ – ΕΠΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ

Μαγνητικό πεδίο

11.1 Γενικά.....	289
11.2 Φυσικοί και τεχνητοί μαγνήτες.....	289
11.3 Μαγνητικό πεδίο.....	290
11.4 Νόμος Laplace – Μαγνητική επαγωγή	291
11.5 Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό	295
11.6 Μαγνητική ροπή – Μαγνητικό δίπολο.....	298
11.7 Μαγνητικές δυναμικές γραμμές – Μαγνητική ροή	301
11.8 Νόμος του Coulomb στο μαγνητισμό.....	304

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ**Προέλευση του μαγνητικού πεδίου – Ηλεκτρομαγνητισμός**

12.1 Γενικά.....	307
12.2 Το μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού – Νόμος των Biot και Savart.....	307
12.3 Το θεώρημα του Ampere.....	309
12.4 Επίλυση χαρακτηριστικών μορφών μαγνητικών πεδίων.....	311
12.5 Δυνάμεις μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών.....	324

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ**Η ύλη μέσα σε μαγνητικό πεδίο**

13.1 Εισαγωγή – Μαγνητική διαπερατότητα.....	326
13.2 Μαγνητική ροπή σε υλικά – Επιφανειακό ρεύμα.....	327
13.3 Μαγνήτιση.....	330
13.4 Μαγνητική διέγερση.....	332
13.5 Σχέση μεταξύ των αντιστάσεων της μαγνητικής επαγωγής B , της μαγνητικής διεγέρσεως H και της μαγνητίσεως J	333
13.6 Μαγνητική θωράκιση.....	336
13.7 Μαγνητική υστέρηση.....	337
13.8 Απώλειες από μαγνητική υστέρηση.....	340
13.9 Μαγνητικά κυκλώματα και επίλυσή τους.....	341
13.10 Ηλεκτρομαγνήτες και εφαρμογές τους.....	357

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ**Επαγωγή**

14.1 Γενικά.....	359
14.2 Νόμος του Faraday.....	361
14.3 Φορά του επαγωγικού ρεύματος – Κανόνας του Lenz.....	365
14.4 Ρεύματα Foucault (δινορρεύματα).....	369
14.5 Αυτεπαγωγή.....	370
14.6 Αποτελέσματα της αυτεπαγωγής.....	376
14.7 Ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.....	383
14.8 Αμοιβαία επαγωγή.....	386
14.9 Συνδεσμολογία πηνίων αυτεπαγωγής.....	388
Παράρτημα.....	392