ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

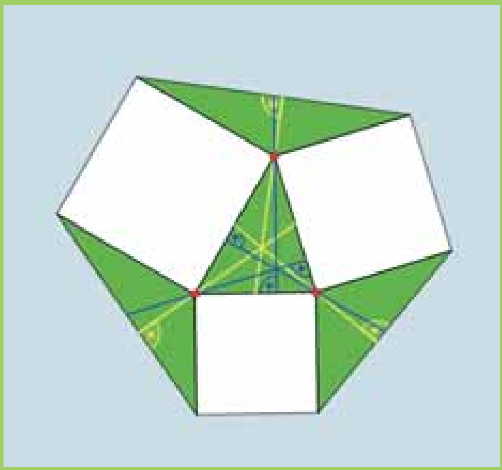
120

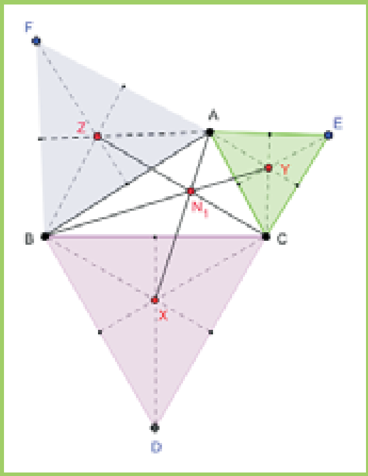
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2021 ευρώ 3,5





Η πηγή της γνώσης

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 120 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2021 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στην πρόσφατη επικαιρότητα των Μαθηματικών

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
με καλή διάθεση και προσδοκία αγχίνοιας*
για την αντιμετώπιση των δυσχερειών

ευχόμαστε σε όλους καλή δύναμη
και καλή επιτυχία παντού.

καλό
καλοκαίρι

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

* αγχίνοια < αγχι (γρήγορα, εγγύς, πλησίον, κοντά) + νους = ευστροφία, οξύνοια, οξύτητα μυαλού, γρήγορη αντίληψη, εξυπνάδα [ως ανθρώπινη ιδιότητα] (Ομηρικά έπη)
Ικανότητα να κατανοεί κανείς τα πράγματα, ως αυτά που πραγματικά είναι, καθώς και να επιλέγει την καλύτερη εκδοχή ανάμεσα σε δύο καταστάσεις [ως αρετή] (Αριστοτέλης)
Δηλαδή κάποιος να έχει ορθή εκτιμηση και ορθή κρίση, μια ικανότητα ιδιαιτέρως απαραίτητη στη διαχείριση καταστάσεων και στη λήψη σωστών αποφάσεων.

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά απρόοπτα, η επικαιρότητα, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται αδύνατη ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	6 Νοεμβρίου	2020
Ευκλείδης:	23 Ιανουαρίου	2021
Αρχιμήδης:	27 Φεβρουαρίου	2021

$$2021 = 20^2+(2\cdot 20)^2+21$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς
1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Η πηγή της Γνώσης

Χρήστος Μπατέλης - *Παράρτημα* ***ΕΜΕ Αχαΐας***

Ο Γιάννης, ένας 16χρονος μαθητής, φέτος το καλοκαίρι, με το που τέλειωσε το σχολείο, πήγε για διακοπές στο χωριό της γιαγιάς του. Ένα μεσημέρι, μετά το φαγητό, ρώτησε τη γιαγιά του αν υπήρχε στο σπίτι **κανένα βιβλίο** που να αναφέρεται στην **ιστορία** του κοντινού **κάστρου**. Η γιαγιά του σκέφτηκε λίγο και του είπε ότι ο παππούς του μπορεί να είχε κάτι. Θυμάται ότι κάποτε, πριν από περίπου δέκα χρόνια, ο παππούς με τον φίλο του τον Κώστα, πήγαιναν πολλές φορές στο κάστρο. "*Αν υπάρχει κάτι, αυτό θα είναι στην σοφίτα, εκεί είχα δει κάποια βιβλία*", του είπε.

Ο Γιάννης θέλοντας να μάθει για την ιστορία του κάστρου ανέβηκε αμέσως στη σοφίτα. Εκεί τα έχασε. Η ακαταστασία, η σκόνη η κλεισούρα δημιουργούσαν μια αποπνικτική ατμόσφαιρα. Μέχρι να ανοίξει το φεγγίτη και να μπει λίγος καθαρός αέρας κόντεψε να λιποθυμήσει. Δεν πρόλαβε καλά να δει αν υπάρχουν βιβλία στην σοφίτα και ακούστηκε η φωνή της Μαρίας που τον καλούσε να πάνε στην πλατεία για να γνωρίσει και κάποια άλλα παιδιά του χωριού.

Η Μαρία μένει στο χωριό και έχει την ίδια ηλικία με τον Γιάννη. Τα δύο παιδιά γνωρίζονται από παλιά, καθώς οι παππούδες τους ήταν πολύ καλοί φίλοι και κάθε φορά που ο Γιάννης πήγαινε στο χωριό έκαναν παρέα.

Δυστυχώς οι δύο καλοί φίλοι, ο παππούς του ο Γιάννης και ο φίλος του, ο Κώστας, έχασαν την ζωή τους, σε ένα ατύχημα, πριν περίπου δέκα χρόνια.

Πηγαίνοντας προς την πλατεία ο Γιάννης είπε στην Μαρία ότι ανέβηκε στη σοφίτα αναζητώντας κάποιο βιβλίο για την ιστορία του κάστρου, δεν γνώριζε όμως αν υπάρχει εκεί κάτι τέτοιο. Η Μαρία τού είπε ότι και ο δικός της παππούς **γνώριζε πολλά πράγματα** για το **κάστρο** και πολλές φορές της έλεγε διάφορες ιστορίες. Έχουν όμως περάσει πάνω από δέκα χρόνια από τότε και δεν θυμόταν πολλά πράγματα. Όμως, του είπε ότι θα έψαχνε στη βιβλιοθήκη της γιαγιάς της να δει αν υπάρχουν βιβλία που αφορούσαν το κάστρο.

Φτάνοντας στην πλατεία, συμφώνησαν στην επόμενη συνάντησή τους να **ανταλλάξουν πληροφορίες** για τυχόν **υλικό** που θα έβρισκαν.

Το επόμενο πρωί, ο Γιάννης ανέβηκε πάλι στη σοφίτα και ξανάρχισε την αναζήτηση. Μετά από αρκετό ψάξιμο, στο βάθος ενός μπαούλου, βρήκε αυτό που ζητούσε. Ήταν δύο βιβλία που από τον τίτλο τους κατάλαβε πως αναφέρονταν στην ιστορία του κάστρου. Αφού τα ξεσκόνισε, άρχισε να τα ξεφυλλίζει. Ήταν αυτό που ήθελε και αυτό τον **ικανοποίησε ιδιαίτερα.** Επιτέλους, τόσες φορές είχε έρθει στο χωριό των παππούδων του και δεν γνώριζε τίποτα για το κάστρο του χωριού. Τώρα όμως μπορούσε να μάθει πολλά πράγματα γι' αυτό. Ακούμπησε τα βιβλία σε μια καρέκλα και προσπάθησε να βάλει σε κάποια τάξη το περιεχόμενο του μπαούλου. Καθώς τακτοποιούσε τα διάφορα αντικείμενα, κάτω από μια κουβέρτα είδε ένα φάκελο που κάτι είχε μέσα. "*Λες να έχει μέσα τίποτα χρήματα που είχε βάλει εδώ ο παππούς για ώρα ανάγκης;*" σκέφτηκε και άνοιξε προσεκτικά τον φάκελο. Χρήματα δεν υπήρχαν.

Είχε μερικά χαρτιά με πληροφορίες για το κάστρο και ένα χαρτί με επιγραμματικές σημειώσεις. Πάνω σε αυτό το χαρτί υπήρχε κι ένα **σχέδιο** που του έκανε εντύπωση.

Έβαλε τον φάκελο σε ένα από τα δύο βιβλία και κατέβηκε στην αυλή, κάτω από μουριά, και άρχισε να το διάβασμα. Πέρα από την ιστορία του κάστρου, ιστορία πολλών αιώνων, αυτό που του έκανε ιδιαίτερη εντύπωση ήταν ότι κάποιοι πολύ αξιόλογοι άνθρωποι των γραμμάτων υπήρξαν ένοικοι του κάστρου στην πορεία του χρόνου. Βρέθηκαν εδώ γιατί οι κατά καιρούς διοικητές του κάστρου **αγαπούσαν και προστάτευαν τα γράμματα και τις τέχνες** και κατ' επέκταση βοηθούσαν τους διανοούμενους της εποχής **να δουλέψουν χωρίς προβλήματα.**

Πραγματικά απόλαυσε την ανάγνωση αυτών των βιβλίων και, επειδή του άρεσε να διαβάζει και να μαθαίνει καινούργια πράγματα, άρχισε να αναρωτιέται: τι να διάβαζαν άραγε αυτοί οι άνθρωποι; τι θέματα προσπαθούσαν να λύσουν; τι να κατάφεραν άραγε; Εκείνη την ώρα άκουσε την φωνή της γιαγιάς του που του έφερνε μια βυσσινάδα να του λέει:

"*Τι γράμμα είναι αυτό κάτω από την καρέκλα;*"

"*Όπα, το είχα ξεχάσει αυτό*", είπε. Και συνέχισε:

"Δεν μου λες, γιαγιά, ποια ήταν η σχέση του παππού με το κάστρο;"

"Από τα λίγα που ξέρω, με τον φίλο του τον Κώστα, τον παππού της Μαρίας, αυτός τον ξεσήκωσε, λίγες μέρες πριν το ατύχημα, πήγαιναν κάθε μέρα στο κάστρο και κάτι έψαχναν. Βλέπεις του Κώστα του άρεσε να διαβάζει, είχε περάσει στο Μαθηματικό τμήμα της Αθήνας, αλλά λόγω οικονομικών προβλημάτων δεν κατάφερε να το τελειώσει. Ο Κώστας, λοιπόν, αν θυμάμαι καλά, είχε βρει κάποια βιβλία για το κάστρο και πίστευε ότι κάτι πολύ σημαντικό υπάρχει εκεί και είχε βαλθεί να το βρει, έχοντας τον παππού σου βοηθό. Κάποιες φορές, όταν δεν είχαν δουλειά, πήγαιναν στο κάστρο και ξεχνούσαν να γυρίσουν."

"Δεν μου λες, γιαγιά, αυτό το χαρτί με αυτό το σχέδιο τι λες να είναι;"

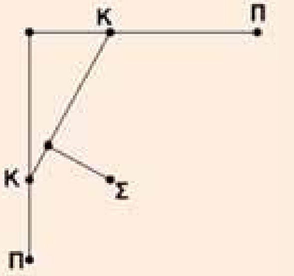
Η γιαγιά του πήρε το χαρτί που ήταν στον φάκελο και το κοίταξε προσεκτικά. Είχε πάει πολλές φορές στο κάστρο και το γνώριζε πολύ καλά.

Το χαρτί είχε το διπλανό σχέδιο και έγραφε:

Ανατολικά - Νότια πυργίσκος.

Ιστός σημαίας.

Αποστάσεις από το τείχος, $1^{ο}$ κανόνι και $2^{ο}$ κανόνι.



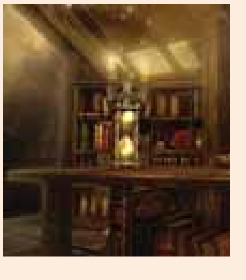
Απόσταση από τη γραμμή που ενώνει τα κανόνια. Η **γραμμή** αυτή **σε πάει στην πηγή** ... έλεγε και κάτι άλλο αλλά δεν φαινόταν.

"*Από αυτά που γράφει καταλαβαίνω ότι είναι ο* ***προμαχώνας*** *του κάστρου. Τα δύο Π που υπάρχουν στο σχέδιο είναι σίγουρα οι δύο πυργίσκοι, όπως τις γράφει.*

Θυμάμαι όταν πήγαινα στο Γυμνάσιο, σε μια επίσκεψη στο κάστρο, η καθηγήτρια των Μαθηματικών μας έβαλε για εργασία να βρούμε τι τρίγωνο είναι αυτό που φτιάχνεται από τους δύο πυργίσκους και την κορυφή του ***προμαχώνα*** *και να βρούμε την* ***απόσταση κάθε πυργίσκου*** *από την κορυφή του προμαχώνα, χωρίς να την μετρήσουμε. Θυμάμαι ότι με ένα σχοινί συγκρίναμε την απόσταση κάθε πυργίσκου από την κορυφή του προμαχώνα και διαπιστώσαμε ότι ήταν ίσες, δηλαδή το τρίγωνο που φτιάχνεται από την κορυφή του προμαχώνα και τους δύο πυργίσκους είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Στη συνέχεια με το σχοινί συνδέσαμε τους δύο πυργίσκους και μετρήσαμε την απόσταση με το μέτρο. Στη συνέχεια, με το* ***Πυθαγόρειο θεώρημα*** *βρήκαμε τις αποστάσεις που ζητούσε η καθηγήτρια. Μου άρεσε τόσο πολύ αυτή η εργασία που ακόμη την θυμάμαι ύστερα από τόσα χρόνια. Πραγματικά το σχοινί που ένωνε τους δύο πυργίσκους περνούσε από το σημείο που ήταν τότε ο ιστός της σημαίας.*

Τα δύο κανόνια είναι στις θέσεις που υπάρχουν στο σχέδιο, μπορείς να πας να το διαπιστώσεις. Ξέρεις όμως ότι ο ιστός της σημαίας δεν υπάρχει, εδώ και πολλά χρόνια η σημαία έχει μεταφερθεί στο Δημαρχείο. Μάλλον δεν θα βρεις ίχνος από τον ιστό γιατί κατά καιρούς έχουν γίνει και κάποιες εργασίες συντήρησης.

Τώρα αυτή η γραμμή που σε πάει στην πηγή δεν ξέρω τι είναι. Δεν θυμάμαι να ***υπήρχε κάποια πηγή στο κάστρο****. Υπήρχε κάποιο πηγάδι, αλλά είναι σε άλλο χώρο και δεν νομίζω ότι έχει να κάνει με τη γραμμή που έχει εδώ.*



Νομίζω ότι αυτό το χαρτί πρέπει να το έγραψε ο Κώστας, δεν είναι γράμματα του παππού σου αυτά, μπορεί να έχει να κάνει με αυτό που έψαχναν να βρουν. Ο παππούς, σου όταν τον ρώτησα μια φορά, μου είπε ότι κάτι έχουν βρει, αλλά δεν ξέρει αν είναι σημαντικό, θα το κουβέντιαζαν με έναν υπάλληλο της αρχαιολογίας στην πόλη. Μετά από λίγες μέρες πηγαίνοντας για δουλειές με το αγροτικό του Κώστα, συνέβη το ατύχημα και δεν μάθαμε τίποτα. Αυτά ξέρω, θέλεις να σου φτιάξω να φας κάτι;"

Πριν προλάβει να απαντήσει, ακούστηκε η φωνή της Μαρίας.Η γιαγιά του τους χαιρέτησε και πήγε να τους ετοιμάσει δύο τοστ. Βλέποντας τα βιβλία που ήταν πάνω στο τραπέζι, η Μαρία έβγαλε από την τσάντα της και άλλα δύο.

"*Βρήκα στη βιβλιοθήκη του παππού μου αυτά* ***τα βιβλία***," του είπε, "*τα οποία αναφέρονται* ***στην ιστορία του κάστρου.*** *Τα διάβασα και έμαθα αρκετά πράγματα που δεν ήξερα, παρόλο που έχω πάει πολλές φορές στο κάστρο.*"

Ξαφνικά σταματάει να μιλά και παίρνει στο χέρι της το χαρτί με τις σημειώσεις και το σχέδιο.

"*Τι είναι αυτό Γιάννη;*" τον ρωτάει με έκπληξη;

"*Το βρήκα στο μπαούλο που ο παππούς μου είχε τα βιβλία για το κάστρο, γιατί τόση έκπληξη;*"

"*Ξέρεις και εγώ βρήκα κάποιο παρόμοιο χαρτί, αλλά δεν του έδωσα και πολλή σημασία, τι νομίζεις ότι είναι;*"

"Από αυτά που μου είπε η γιαγιά μου, οι παππούδες μας κάτι πρέπει να βρήκαν στο κάστρο, αλλά λόγω του ατυχήματος δεν πρόλαβαν να το ανακοινώσουν. Τι λες, θέλεις να δοκιμάσουμε να δούμε αν βρήκαν κάτι;" είπε ο Γιάννης. *"Βέβαια και θέλω"*, του απάντησε η Μαρία, *"πηγαίνω να φέρω το δικό μου χάρτη από το σπίτι."*

Σε λίγο τα δύο παιδιά τρώγοντας το τοστ της γιαγιάς έβλεπαν τον χάρτη του παππού της Μαρίας που ήταν λίγο διαφορετικός από αυτόν που είχε ο Γιάννης. Αυτός **δεν είχε κάποια πληροφορία**, ήταν απλά **ένα σχέδιο** και έγραφε η γραμμή ΣΒ σε πάει στην πηγή της.

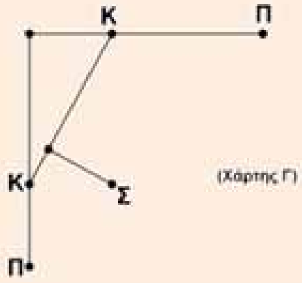
Έβαλαν τους δύο χάρτες δίπλα - δίπλα για να τους συγκρίνουν.

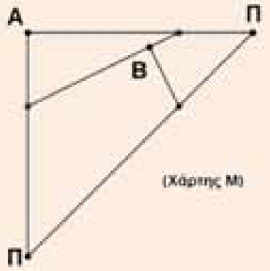
Από μια πρώτη ματιά είδαν ότι και οι δύο είχαν γίνει από το ίδιο χέρι.

"*Από αυτά που μου είπε η γιαγιά μου δεν είναι γράμματα του παππού μου αυτά που υπάρχουν στον δικό μου χάρτη,*" είπε ο Γιάννης, "*άρα και τους δύο τους έφτιαξε ο δικός σου παππούς.*"

"*Για να δούμε λοιπόν τι κοινά έχουν;*" λέει η Μαρία και συνεχίζοντας παρατηρεί ότι βλέπουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο που φτιάχνεται από την κορυφή του προμαχώνα και τους δύο πυργίσκους και μάλλον είναι και ισοσκελές.

"*Αυτό είναι σίγουρο*" της λέει ο Γιάννης. "*Μου το είπε η γιαγιά μου, που το είχε υπολογίσει στο πλαίσιο μιας εργασίας που έκανε όταν ήταν μαθήτρια του Γυμνασίου.*





Επιπλέον, η γραμμή που ενώνει τους πυργίσκους περνάει και από το Σ, σύμφωνα με την γιαγιά μου".

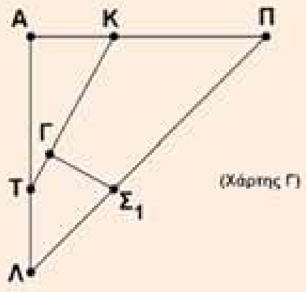
*Νομίζω, συνέχισε ο Γιάννης, ότι ο χάρτης έχει να κάνει με Γεωμετρία. Μην ξεχνάς Μαρία ότι ο παππούς σου ήταν πολύ καλός μαθηματικός, άλλο αν **δεν κατάφερε λόγω οικονομικών προβλημάτων να τελειώσει το Πανεπιστήμιο**. Νομίζω ότι πρέπει να βάλουμε γράμματα στα δύο σχήματα για να μπορέσουμε να συζητήσουμε καλύτερα.*

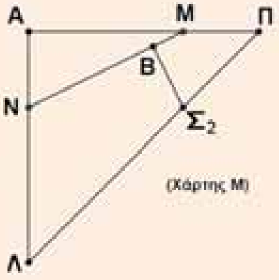
"*Συμφωνώ*", είπε η Μαρία, *ας το κάνουμε ξέροντας ότι έχουμε να κάνουμε με ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο."*

Έφτιαξαν τα παρακάτω σχήματα σε ένα νέο χαρτί, όπως φαίνεται παρακάτω.

"*Τώρα έχουμε μια καλύτερη εικόνα*", λέει η Μαρία, *" και επειδή η $Σ_1Γ$ είναι κάθετη της ΤΚ, θα πρέπει και η γραμμή $Σ_2Β$ που σε πάει στην πηγή να είναι κάθετη στην γραμμή ΝΜ."*

"*Ωραία*", λέει ο Γιάννης, "*δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στον δικό μου χάρτη γράφει για τον ιστό της σημαίας που είναι το $Σ_1$ και αμέσως μετά για αποστάσεις από τους δύο τοίχους, δηλαδή $Σ_1Κ \perp ΑΠ$ και $Σ_1Τ \perp ΑΛ$. Το ίδιο φαίνεται να γίνεται και στον δικό σου χάρτη, Μαρία."*





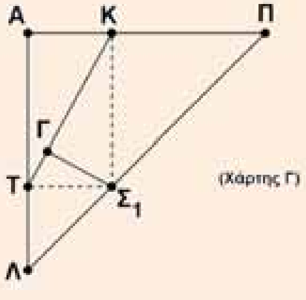
"*Πράγματι*", του λέει η Μαρία, "*είμαι σίγουρη ότι $Σ_2Μ \perp ΑΠ$ και $Σ_2Τ \perp ΑΛ$. Ας φτιάξουμε ένα νέο σχέδιο βάζοντας και αυτές τις κάθετες."*

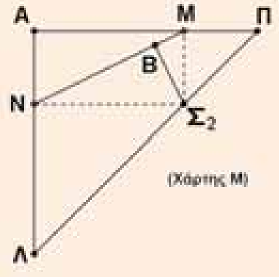
Το νέο σχέδιο που έφτιαξαν φαίνεται παρακάτω.

Έμειναν για λίγο σιωπηλοί κοιτάζοντας τα δύο σχήματα.

"*Τι λες Γιάννη;*" είπε σε λίγο η Μαρία. "*Έχεις καμιά ιδέα;*"

"*Η πληροφορία που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει είναι ότι οι γραμμές $Σ_1Γ$ και $Σ_2Β$, οδηγούν σε κάποια πηγή, που μάλλον δεν πρέπει να είναι πηγή με νερό, γιατί όπως μου είπε η γιαγιά μου δεν υπάρχει πηγή στο κάστρο. Τι σχέση έχουν οι $Σ_1Γ$ και $Σ_2Β$;*" είπε σκεπτικός ο Γιάννης.





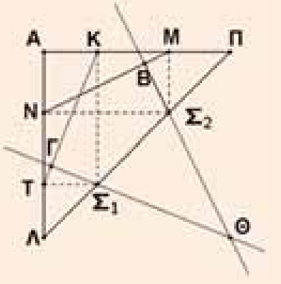
"*Είναι και οι δύο κάθετες στις ΤΚ και ΝΜ αντίστοιχα*", αποκρίθηκε η Μαρία.

"*Ναι,*" λέει ο Γιάννης, "*αλλά τα $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι διαφορετικά σημεία της ΛΠ. Πώς γίνεται και οι δύο γραμμές να οδηγούν στο ίδιο σημείο;*"

"*Καλά λες,*" απάντησε η Μαρία, "*δεν μπορεί ο παππούς μου να έκανε λάθος. Μάλλον η θέση των $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι ανεξάρτητη από την πηγή και αυτό που μετράει μάλλον είναι η καθετότητα στις ΤΚ και ΝΜ από τα τυχαία σημεία $Σ_1$ και $Σ_2$ της ΛΠ.*"

"*Μαρία, έχω μια ιδέα*" λέει τότε ο Γιάννης. "*Να φέρουμε τις γραμμές $Σ_1Γ$ και $Σ_2Β$ να δούμε πού τέμνονται, οπότε αυτό θα είναι και το ζητούμενο σημείο. Μην ξεχνάς ότι δύο ευθείες ή θα είναι παράλληλες, οπότε δεν έχουν κοινά σημεία, ή θα ταυτίζονται, οπότε θα έχουν άπειρα, ή θα τέμνονται οπότε θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.*"
"*Αυτό είναι*", φώναξε με χαρά η Μαρία. "*Ας κάνουμε το σχήμα, να δούμε τι γίνεται.*"

Μετά από λίγο έφτιαξαν το διπλανό σχήμα.



"*Όπως φαίνεται από το σχήμα*", λέει η Μαρία, "*το σημείο τομής Θ των $Σ_1Γ$ και $Σ_2Β$ πρέπει να συμπίπτει με το σημείο τομής των παραλλήλων από το Π προς την ΑΛ και από το Λ προς την ΑΠ.*"

"*Μάλλον έχεις δίκιο* ", λέει ο Γιάννης, "*οπότε το τετράπλευρο ΑΛΘΠ θα είναι τετράγωνο, διότι το τρίγωνο ΑΛΠ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα το σημείο Θ θα είναι η τέταρτη κορυφή του τετραγώνου που είναι σταθερό σημείο.*"

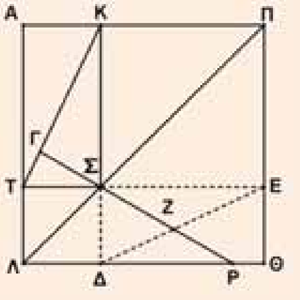
"*Ωραία, Γιάννη*", λέει τότε η Μαρία. "*Θα πρέπει όμως να αποδείξουμε τον ισχυρισμό σου*".

Τότε ο Γιάννης διατύπωσε το καθαρό γεωμετρικό πρόβλημα που είναι:

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΛΠ ($\hat{A}=90^\circ$) και τυχαίο σημείο Σ της ΛΠ. Φέρνουμε ΣΚ⊥ΑΠ, ΣΤ⊥ΑΛ και ΣΓ⊥ΚΤ. Να αποδειχτεί ότι η μεταβλητή ευθεία ΣΓ περνάει από σταθερό σημείο.

"*Βέβαια εμείς,*" λέει η Μαρία, "*το σταθερό σημείο Θ το προσδιορίσαμε ότι πρέπει να είναι η τέταρτη κορυφή του τετραγώνου ΑΛΘΠ. Ας φτιάξουμε, λοιπόν, το τετράγωνο ΑΛΘΠ να έχουμε μια εικόνα του σχήματος.*"

Έβγαλε μια κόλλα και άρχισε να φτιάχνει το νέο σχήμα.



"*Δεν το έφτιαξα καλά, η ΓΣ δεν περνάει από το Θ. Νομίζω όμως ότι είναι καλύτερα έτσι. Αν βάλω Ρ το σημείο τομής της ΓΣ με την ΛΘ, τότε* ***αρκεί να αποδείξουμε ότι το Ρ ταυτίζεται με το Θ.***

Βλέποντας το νέο σχήμα ο Γιάννης της λέει ότι πρέπει να εκμεταλλευτούν την ορθή γωνία $Σ\hat{Γ}Κ$ και μάλλον το ορθογώνιο τρίγωνο ΣΤΚ.

"*Σίγουρα έχεις δίκιο*", του λέει η Μαρία, "*εκεί είναι τα δεδομένα μας. Μπορεί όμως να παίζει ρόλο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΚΣΤ.*"

Ο Γιάννης προχωρά: "*Προέκτεινε με διακεκομμένη την ΚΣ και βάλε Δ το σημείο τομής με την ΛΘ. Κάνε το ίδιο με την ΤΣ και βάλε Ε το σημείο τομής με την ΠΘ. Τι παρατηρείς;*"

"*Ωραία*", λέει η Μαρία, "*το ΣΔΘΕ είναι ορθογώνιο που είναι ίσο με το ΑΚΣΤ και αυτό νομίζω μπορούμε να το αποδείξουμε εύκολα.*

Το ΑΠΘΛ είναι τετράγωνο και η ΛΠ είναι διαγώνιος, άρα: $Α\hat{Λ}Π = Α\hat{Π}Λ = Π\hat{Λ}Θ = Λ\hat{Π}Θ = 45^\circ$ *, οπότε* ΣΤ=ΤΛ *και επειδή το ΣΤΛΔ είναι ορθογώνιο θα είναι τετράγωνο, άρα* ΣΤ=ΣΔ (1).
Όμοια το ΚΠΕΣ είναι τετράγωνο, άρα ΣΚ=ΣΕ (2).

"*Άρα*", συνεχίζει η Μαρία, "*τα ορθογώνια ΣΔΘΕ και ΑΚΣΤ είναι ίσα.*"

Φέρνει με διακεκομμένη γραμμή την διαγώνιο ΔΕ του ορθογωνίου ΣΔΘΕ και βάζει Ζ το σημείο τομής της ΣΡ με την ΔΕ. Λέει στο Γιάννη ότι παρατηρεί τα εξής:

"*Τα ορθογώνια* ***τρίγωνα ΚΣΤ, ΕΣΔ*** *λόγω των (1) και (2)* ***είναι ίσα*** *και μάλλον εδώ θα πρέπει να επικεντρωθούμε.*"

"*Νομίζω, Μαρία,*" λέει ο Γιάννης, "*έχω μια καλή ιδέα. Στο ορθογώνιο ΣΔΘΕ η ΔΕ είναι διαγώνιος. Αν αποδείξουμε ότι το Ζ είναι μέσον της ΔΕ, τότε η ΓΣΖ θα διέρχεται από το Θ, διότι θα είναι διαγώνιος του ορθογωνίου ΣΔΘΕ!*"

"*Αυτό είναι*", έκανε χαρούμενη η Μαρία. "*Πώς όμως* ***θα το αποδείξουμε;***"

"*Νομίζω, Μαρία,*" λέει ο Γιάννης, "*ότι, επειδή το τρίγωνο ΔΣΕ είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΖΣ=ΖΕ, οπότε θα είναι και ΖΣ=ΖΔ, άρα το Ζ θα είναι το μέσον της ΔΕ.*"

"*Νομίζω το έχω*", λέει η Μαρία. "*Είναι* $Ε\hat{Σ}Ζ = Γ\hat{Σ}Τ$ *(κατά κορυφή) και* $Τ\hat{Κ}Σ = Γ\hat{Σ}Τ$ *(πλευρές κάθετες), άρα .* $Ε\hat{Σ}Ζ = Τ\hat{Κ}Σ$ *και επειδή τα τρίγωνα ΣΚΤ, ΣΕΔ είναι ίσα θα είναι* $Ε\hat{Σ}Ζ = Σ\hat{Ε}Δ = Σ\hat{Ε}Ζ$*, άρα το τρίγωνο ΣΖΕ είναι* *ισοσκελές με ΖΣ=ΖΕ (3). Είναι* $\Delta\hat{\Sigma}\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\hat{\Sigma}\mathrm{E}=90^o$ *(4). Επίσης* $\Sigma\hat{\Delta}\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\Sigma=90^o$ *και επειδή* $\mathrm{E}\hat{\Sigma}\mathrm{Z}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\Sigma$ *θα είναι* $\Sigma\hat{\Delta}\mathrm{Z}+\mathrm{E}\hat{\Sigma}\mathrm{Z}=90^o$ *(5).*

Από τις (4) και (5) θα είναι $\Delta\hat{\Sigma}\mathrm{Z}=\Sigma\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ *, άρα ΖΣ=ΖΔ και λόγω (3) ΖΣ=ΖΔ=ΖΕ, άρα το Ζ μέσον της ΔΕ, οπότε η ΓΣ διέρχεται από το Θ.*

Τέλος ουφ!!!"

"*Για κάτσε,* Μαρία", χαμογέλασε ο Γιάννης. "*Τι τέλος; Βρήκαμε τι έψαχναν οι παππούδες μας; Απλά εντοπίσαμε πού μπορεί να είναι η πηγή, δεν την έχουμε βρει. Πρέπει να πάμε στο κάστρο να δούμε αν οι υπολογισμοί που κάναμε έχουν νόημα ή απλά ο παππούς σου, που ήξερε Μαθηματικά, κάπου βρήκε αυτό το πρόβλημα και προσπάθησε να το λύσει φτιάχνοντας ένα σχήμα πάνω στο χαρτί που βρήκες. Αλήθεια, τι μπορεί να είναι αυτή η πηγή; Σίγουρα **δεν μπορεί να είναι πηγή νερού.** Η γιαγιά μου με διαβεβαίωσε **ότι δεν υπάρχει πηγή στο κάστρο**, πρέπει να είναι κάτι άλλο.*
Τι όμως; Δεν μου λες πού βρήκες το χαρτί του παππού σου;"

"*Ήταν μέσα σε ένα βιβλίο Μαθηματικών αλλά είναι γραμμένο στα λατινικά και δεν θεώρησα ότι είχε σχέση με το κάστρο γι' αυτό δεν το έφερα.*" Νομίζω, Μαρία, ότι αυτό το βιβλίο είναι το κλειδί του γρίφου."

"*Τρέχω να το φέρω,*" λέει η Μαρία.

Μετά από λίγο τα δύο παιδιά ξεφύλλιζαν **το βιβλίο**, το οποίο **είχε αρκετά προβλήματα Μαθηματικών**, είχε όμως και κάποια άλλα κείμενα που μάλλον δεν ήταν Μαθηματικά. Εκεί που ξεφύλλιζαν το βιβλίο ο Γιάννης παρατήρησε το ίχνος ενός τσακίσματος σε μια σελίδα. Η σελίδα στην αρχή έγραφε **θεώρημα Vecten** και είχε δύο προβλήματα Μαθηματικών, μάλλον με κάποια σχόλια. Από τα λίγα πράγματα που μπορούσαν να διαβάσουν μάλλον το πρώτο πρόβλημα είχε να κάνει με το πρόβλημα που μόλις είχαν λύσει.

" *Ο παππούς σου, Μαρία, ήξερε Λατινικά; Πώς το διάβασε;*" ρώτησε ο Γιάννης.

"*Δεν ξέρω,*" απάντησε η Μαρία. "*Εκείνη την εποχή έκαναν Λατινικά στο σχολείο; Μπορεί, όμως, να απευθύνθηκε σε κάποιον που ήξερε. Αυτό θα κάνουμε και εμείς, Γιάννη. Θα το πάμε στη φιλόλογο του σχολείου μου. Είναι πολύ καλή καθηγήτρια και γνωρίζει Λατινικά.*"

Χωρίς χρονοτριβή τα παιδιά πήραν το βιβλίο και σε λίγο έφταναν στο σπίτι της καθηγήτριας. Η Μαρία, αφού εξήγησε στην καθηγήτριά της ότι στην βιβλιοθήκη της βρήκε ένα βιβλίο Μαθηματικών του παππού της γραμμένο στα Λατινικά, την παρακάλεσε αν μπορούσε να τους βοηθήσει μεταφράζοντας μερικές, σελίδες με δύο προβλήματα Γεωμετρίας και κάποια σχόλια. Η καθηγήτρια πήρε το βιβλίο και άρχισε να το διαβάζει.

"*Πραγματικά οι σελίδες που θέλεις, έχουν ένα πρόβλημα Γεωμετρίας με δύο ερωτήματα. Είναι, όπως γράφει, τα δύο από τα εννέα ερωτήματα ενός θεωρήματος του Vecten και έχει και την λύση του και στη συνέχεια γράφει για μια εφαρμογή του **θεωρήματος Vecten.***
Μαρία, πάρε μια κόλλα και γράψε την εκφώνηση του προβλήματος."

Η Μαρία άρχισε να γράφει:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έξω απ' αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΓΑΘΙ, τότε ισχύει

1. **α)** Η διάμεσος ΑΜ του $\overset{\triangleleft}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι κάθετη στην ΕΘ και είναι $\mathrm{AM}=\dfrac{\mathrm{E\Theta}}{2}$.

β) Αντίστοιχα η διάμεσος ΑΟ του $\overset{\triangleleft}{\mathrm{AE\Theta}}$ είναι κάθετη στην ΒΓ και $\mathrm{AO}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

2. Αν Σ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΕΑΘΣ τότε: τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΙ είναι ίσα και κάθετα αντίστοιχα με τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΣ και ΓΣ και τέμνονται σε σημείο H_1 του ύψους ΑΚ.

"*Θέλετε να σας διαβάσω και τη λύση;*" ρώτησε η καθηγήτρια.

"*Όχι, κυρία,*" απάντησαν τα παιδιά αυθόρμητα. "*Κυρία,*" είπε η Μαρία, "*θέλουμε να το λύσουμε μόνοι μας, ξέρετε **μας αρέσουν τα Μαθηματικά και ιδιαίτερα η Γεωμετρία,** Απολαύσαμε ένα πρόβλημα που πριν λίγο λύσαμε με τον Γιάννη, είναι μάλλον η εφαρμογή του παραπάνω πρώτου προβλήματος.*"

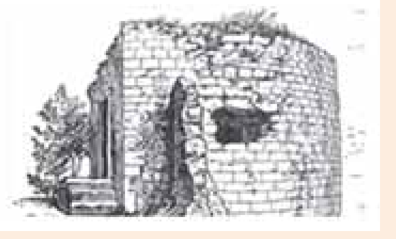
"*Πραγματικά*", λέει η καθηγήτρια, "*είναι ένα νέο πρόβλημα. Βέβαια δεν ξέρω **αν είναι εφαρμογή** του θεωρήματος **Vecten**, γράψε όμως αν θέλεις την εκφώνηση.*"

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ. Φέρνουμε τις αποστάσεις του Δ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου, έστω ΔΕ και ΔΖ και την απόσταση του Δ από την ΕΖ, έστω ΔΚ. Να αποδειχτεί ότι η μεταβλητή ευθεία ΔΚ σε οδηγεί στην πηγή της γνώσης.

"*Αυτό είναι, κυρία. Αυτό αποδείξαμε με την Μαρία*", είπε ο Γιάννης. "*Μόνο που εμείς αποδείξαμε ότι **περνάει από σταθερό σημείο**.*"

"*Για να δούμε, τι άλλο γράφει*", λέει η καθηγήτρια, "*μήπως και σας βοηθήσω.*"

Η καθηγήτρια, αφού γύρισε κάποιες σελίδες, τους είπε ότι αυτός που το έγραψε πρέπει να ήταν κάποιος έμπορος, ο οποίος είχε πάθος με τα Μαθηματικά. Έγραφε ότι προσπαθούσε να κανονίζει έτσι τις δουλειές του, ώστε να έρχεται όσο γίνεται πιο συχνά στο κάστρο που το θεωρούσε σπίτι του. Εδώ αισθανόταν ασφάλεια, εδώ **έβρισκε αγαλλίαση** και **ψυχική ισορροπία** επισκεπτόμενος **την πηγή της γνώσης.**



Εξέφραζε και τον προβληματισμό ότι τα πράγματα ήταν πολύ επικίνδυνα με τις τόσες επιδρομές και τους πολέμους. Φοβόταν ότι θα μπορούσε να καταστραφεί **η πηγή της γνώσης από ανθρώπους που δεν γνώριζαν την αξία των βιβλίων** και μπορεί να τα κατέστρεφαν ή να τα χρησιμοποιούσαν για διάφορους σκοπούς. Ύστερα από κουβέντα με τον φρούραρχο του κάστρου, που και αυτός ήταν **ένας μορφωμένος άνθρωπος**, συμφώνησαν να κρύψουν χτίζοντας την πηγή της γνώσης.

"*Αυτά γράφει σε αυτές τις δύο, μάλλον τρεις σελίδες. Στις υπόλοιπες σελίδες έχει διάφορες ασκήσεις, κάποιες λυμένες και κάποιες άλυτες, ίσως είναι τα υπόλοιπα ερωτήματα από το θεώρημα του Vecten γιατί είναι επτά ασκήσεις. Θέλετε κάτι άλλο να σας μεταφράσω;*"

"*Όχι, κυρία*", είπε η Μαρία, "*αν σας χρειαστούμε μπορούμε να σας ενοχλήσουμε πάλι;*" "*Βεβαίως, μετά χαράς*", είπε η καθηγήτρια και τους χαιρέτησε.

"*Βλέπεις, Μαρία*", είπε ο Γιάννης "*η πηγή δεν έχει να κάνει με νερό, αλλά **με την γνώση και την μόρφωση.** Είναι μάλλον κάποιος χώρος με βιβλία, κάποια βιβλιοθήκη στην οποία έβρισκε γαλήνη και ψυχική ηρεμία ο συγγραφέας του βιβλίου και φοβούμενος μήπως κάποιοι επιδρομείς την καταστρέψουν ή χρησιμοποιήσουν τα βιβλία για άλλους σκοπούς, φρόντισε να την ασφαλίσει.*"

"*Αυτό έψαχναν, λοιπόν, οι παππούδες μας*", είπε η Μαρία. "*Γι' αυτό πήγαιναν τόσο συχνά στο κάστρο! Ήθελαν να ανακαλύψουν την πηγή της γνώσης και από ό,τι φαίνεται κατάφεραν να λύσουν το γρίφο, γι' αυτό είχαν φτιάξει τα δύο σχεδιαγράμματα.*"

"*Έτσι είναι*", λέει ο Γιάννης. "*Δεν ξέρουμε όμως αν βρήκαν την πηγή της γνώσης ή την βρήκαν και δεν είχε τίποτα; Μήπως όλα ήταν καταστραμμένα; Ποιος ξέρει; Οι παππούδες δεν ζουν για να λύσουν τις απορίες μας και οι γιαγιάδες μας δεν ξέρουν τίποτα.*"

"*Ξέρεις, Γιάννη*", λέει η Μαρία. "*Αν είχαν βρει κάτι, θα το έλεγαν αμέσως. Και οι δύο ήταν πολύ έντιμοι άνθρωποι και αυτό που τους ενδιέφερε ήταν η ιστορία του κάστρου και κατ' επέκταση του χωριού. Μάλλον πλησίασαν πολύ κοντά αλλά δεν βρήκαν κάτι. Τι λες; Θέλεις να κάνουμε μια προσπάθεια να δούμε τι είχαν βρει; Εξάλλου τους το χρωστάμε. Αν υπάρχει κάτι και το βρούμε θα γαληνέψει η ψυχή τους. Θα είναι **μια πράξη στη μνήμη τους***".

"*Άλλο που δεν θέλω*", απάντησε ο Γιάννης. "*Πάμε να πάρουμε ένα σχοινί, και κατευθείαν για το κάστρο να βρούμε την πηγή της γνώσης.*"

Σε λίγο τα παιδιά έφτασαν στο κάστρο και γρήγορα με την βοήθεια των πυργίσκων και του σχοινιού, φτιάχνοντας το τετράγωνο, εντόπισαν το σημείο Θ.

"*Τι γίνεται τώρα, Γιάννη; Το Θ πέφτει πάνω σε αυτόν τον μεγάλο τοίχο*", είπε απογοητευμένη η Μαρία. "*Λες να μην υπάρχει τίποτα;*"

"*Δεν ξέρω, Μαρία. Μην ξεχνάς ότι ο Φρούραρχος του κάστρου και ο συγγραφέας του βιβλίου του παππού σου συμφώνησαν να κρύψουν την πηγή της γνώσης, άρα δεν είναι τόσο εύκολο να την βρούμε, πρέπει να προσπαθήσουμε. Αν το σημείο Θ οδηγεί στην πηγή της γνώσης και οι υπολογισμοί του παππού σου είναι σωστοί, θα πρέπει η πηγή της γνώσης να είναι πίσω από αυτές τις πέτρες. Ας τις δούμε λίγο καλύτερα.*"

Επικεντρώθηκαν να παρατηρούν τις πέτρες του τείχους γύρω από το υποτιθέμενο σημείο Θ.

Σε λίγο η Μαρία λέει: "*Νομίζω ότι κάτι γίνεται εδώ, αυτές οι τρεις πέτρες δεν έχουν κονίαμα μεταξύ τους, φαίνεται σαν να είναι στο αέρα.*"

"*Δίκιο έχεις*", λέει ο Γιάννης. "*Νομίζω ότι και οι διπλανές τους αντί για κονίαμα έχουν χώμα. Για να πάρω ένα ξύλο να δω τι γίνεται.*"

Ο Γιάννης, με ένα μυτερό ξύλο, διαπιστώνει ότι και οι διπλανές πέτρες δεν έχουν κονίαμα ή το κονίαμα που έχουν είναι λίγο, απλά ίσα ίσα για να συγκρατούνται οι πέτρες μεταξύ τους.

Ο Γιάννης άρχισε να **βγάζει τις πέτρες μία μία**. Όταν έβγαλε την τρίτη πέτρα, είδε ότι πίσω από αυτή δεν υπήρχε άλλη πέτρα ούτε χώμα, υπήρχε μια τρύπα. Έβαλε τότε ένα καλάμι για να διαπιστώσει μέχρι πού έφτανε το βάθος της τρύπας. Το καλάμι εισχώρησε ενάμιση μέτρο περίπου χωρίς αντίσταση, αλλά δεν πήγαινε παραπέρα γιατί βρήκε κάποιο εμπόδιο.

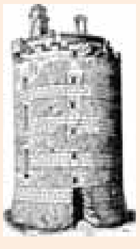
"*Μαρία, εδώ είναι*", είπε χαρούμενος ο Γιάννης. "*Τι λες;* ***Συνεχίζουμε να βγάζουμε τις πέτρες;***"

"*Νομίζω, Γιάννη, ότι είναι καλύτερα να ενημερώσουμε τον Δήμαρχο. Δεν ξέρουμε αν οι πέτρες που θα βγάλουμε συγκρατούν κάποιον τοίχο, οπότε ενδέχεται να καταρρεύσουν και μπορεί να κινδυνέψουμε. Καλύτερα να αναλάβουν κάποιοι ειδικοί γι αυτές τις δουλειές.*"

"*Εντάξει, Μαρία, ας βάλουμε τις πέτρες που βγάλαμε στη θέση τους και πάμε να ενημερώσουμε τον Δήμαρχο.*"

Ακούγοντας ο Δήμαρχος αυτά που του είπαν τα παιδιά έμεινε με το στόμα ανοιχτό. Αμέσως φώναξε τον υπεύθυνο μηχανικό και όλοι μαζί πήγαν στο κάστρο για να δουν τι θα μπορούσαν να κάνουν για να διαπιστώσουν αν οι **εικασίες των παιδιών ήταν σωστές**.

Αφού έβγαλαν τις πέτρες και διαπίστωσαν την ύπαρξη της μεγάλης τρύπας, κατάλαβαν ότι άξιζε τον κόπο να ψάξουν το θέμα. Συμφώνησαν να στείλουν το επόμενο πρωί συνεργείο του Δήμου για να αρχίσει τις σχετικές εργασίες.



Πράγματι, το επόμενο πρωί το συνεργείο του Δήμου, παρουσία των δύο παιδιών και αρκετών κατοίκων που εν τω μεταξύ είχαν μάθει τα νέα, άρχισαν τις εργασίες.

Αφού έβγαλαν με μεγάλη προσοχή τις πέτρες, εμφανίστηκε μια μικρή πόρτα. Οι εργάτες του συνεργείου, αφού έβαλαν τα σχετικά υποστυλώματα, άνοιξαν την πόρτα και **βρέθηκαν μπροστά σε μια αίθουσα με βιβλιοθήκες γεμάτες από βιβλία.** Δεν πίστευαν στα μάτια τους! Εκατοντάδες, μπορεί και χιλιάδες βιβλία, ήταν τακτοποιημένα στις βιβλιοθήκες. Οι υπάλληλοι της εφορείας νεοτέρων μνημείων, που είχαν έρθει ενημερωμένοι από τον Δήμαρχο, μπήκαν μέσα για μια πρώτη εκτίμηση. Μετά από μία ώρα περίπου βγήκαν και ανακοίνωσαν με χαρά ότι πρόκειται για την βιβλιοθήκη του κάστρου **με πάρα πολλά βιβλία** και μάλιστα αρκετά από αυτά ήταν **σε καλή κατάσταση**. Κανόνισαν να έρθει σύντομα ειδικό συνεργείο για να τα παραλάβει για συντήρηση και καταγραφή και στην συνέχεια, αφού αξιολογηθούν, ένα μέρος το πλέον ευαίσθητο, θα τοποθετηθεί σε ειδικό χώρο της Εθνικής βιβλιοθήκης και τα υπόλοιπα στην δημοτική βιβλιοθήκη.

Ο Δήμαρχος, αφού ευχαρίστησε τους υπαλλήλους της εφορείας νεοτέρων μνημείων, είπε ότι "*αυτή η σημαντική ανακάλυψη οφείλεται στα δύο παιδιά, την Μαρία και τον Γιάννη, τα οποία ολοκληρώνοντας μια έρευνα που είχαν αρχίσει οι παππούδες τους, κατάφεραν* ***να ανακαλύψουν αυτή την τόσο σημαντική βιβλιοθήκη****, την πηγή της γνώσης, ένα μέρος της οποίας πολύ σύντομα θα εκτεθεί στο χωριό μας στη δημοτική βιβλιοθήκη*".

Τα δύο παιδιά συγκινημένα σε μια γωνιά παρακολουθούσαν τα τεκταινόμενα. Ένοιωθαν μια χαρά, μια ηρεμία και μια ανακούφιση για ό,τι είχαν καταφέρει, όχι τόσο για τον εαυτό τους, όσο για τους παππούδες τους που πραγματικά τώρα η ψυχή τους θα ανακουφιστεί. "*Σκέφτομαι μήπως να λέγαμε στο Δήμαρχο την ιδέα να δώσει στην αίθουσα της βιβλιοθήκης τα ονόματα των δυο πρωτεργατών της ανακάλυψης, των παππούδων μας, είπε η Μαρία*".

Υπέροχα! ενθουσιάστηκε ο Γιάννης. "*Τι λες Μαρία, πάμε για ένα καφέ στην πλατεία νομίζω ότι τώρα χρειαζόμαστε μια καλή ξεκούραση.*"

"*Γιατί όχι απάντησε η Μαρία*".

Σε λίγο τα δύο παιδιά απολάμβαναν το καφεδάκι τους στην πλατεία του χωριού.

Σε μια στιγμή που ο Γιάννης κάτι έλεγε για την ιστορία του κάστρου, παρατήρησε ότι η Μαρία δεν τον παρακολουθούσε, σαν κάτι άλλο να σκεφτόταν. Σταματώντας αυτά που έλεγε την ρώτησε: "*Μαρία τι έχεις, σε απασχολεί κάτι;*"

"*Ξέρεις κάτι, Γιάννη*", του είπε η Μαρία. "*Σίγουρα η ανακάλυψη της βιβλιοθήκης είναι μια πολύ μεγάλη επιτυχία, όμως αυτό που εισέπραξα εγώ, τώρα που όλα τελείωσαν, είναι αυτό το* ***υπέροχο ταξίδι*** *που κάναμε μαζί* ***στο χώρο της Γεωμετρίας.*** *Ήταν για μένα μια εμπειρία πρωτόγνωρη και παρά πολύ απολαυστική. Δεν είχα ποτέ νοιώσει τόσο υπέροχα λύνοντας ένα πρόβλημα Γεωμετρίας. Η ευτυχία που ένοιωσα και οι γνώσεις που πήρα νομίζω πως ήταν το πρώτο αληθινό ταξίδι μου στον κόσμο της Γεωμετρίας. Τολμώ να πω ότι για μένα, η προσπάθεια που έκανα για να λύσω αυτόν τον γρίφο, άξιζε πολύ περισσότερο από την βιβλιοθήκη που ανακαλύψαμε*"

Ο Γιάννης με ένα πρόσωπο που έλαμπε από χαρά της είπε: " *Πολύ ωραία, Μαρία, μόλις κάναμε την αρχή. Από αύριο θα ασχοληθούμε με τα δύο προβλήματα του Vecten, οπότε ας χαλαρώσουμε λίγο. Έχουμε πολύ δρόμο μπροστά μας."*

Παράρτημα: *Έτσι εδώ ξεφυλλίζοντας, τα παλιά περιοδικά του Ευκλείδη Β, και συγκεκριμένα το **[τεύχος 2 του τόμου 1, Δεκέμβριος-Ιανουάριος 1977],** βρήκα ένα ενδιαφέρον θεώρημα και κάποιες όμορφες εφαρμογές, και σας τις παρουσιάζουμε στο παρακάτω θεώρημα όπως ήταν γραμμένο στο περιοδικό της ΕΜΕ, Ευκλείδης, της εποχής εκείνης, με την απόδειξή του.*

Το θεώρημα του Vecten:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έξω απ' αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ, τότε ισχύει

1. **α)** Η διάμεσος ΑΜ του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι κάθετη στην ΕΘ και είναι $ΑΜ=\frac{ΕΘ}{2}$.

β) Αντίστοιχα η διάμεσος ΑΟ του $\overset{\triangle}{ΑΕΘ}$ είναι κάθετη στην ΒΓ και $ΑΟ=\frac{ΒΓ}{2}$.

2. Αν Σ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΕΑΘΣ τότε: τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΙ είναι ίσα και κάθετα αντίστοιχα με τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΣ και ΓΣ και τέμνονται σε σημείο $Η_1$ του ύψους ΑΚ.

3. Είναι $ΒΘ\perp ΓΕ$ και ΒΘ=ΓΕ.

4. Αν $Τ_1$ το σημείο τομής των ΘΒ και ΓΕ, $Τ_2$ το σημείο τομής των ΑΗ και ΓΔ και $Τ_3$ το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΙ, τότε οι ευθείες $ΑΤ_1$, $ΒΤ_2$, $ΓΤ_3$ είναι αντίστοιχα κάθετες στις ΔΙ, ΕΖ, ΗΘ, οι οποίες περνάνε αντίστοιχα από τα $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$.

5. Αν $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$ είναι τα κέντρα των τετραγώνων ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ, ΑΒΔΕ τότε οι ευθείες $ΑΟ_1$, $ΒΟ_2$, $ΓΟ_3$ περνάνε από το ίδιο σημείο U [Σημείο Vecten του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$], το οποίο είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $Ο_1Ο_2Ο_3$.

6. Αν Φ είναι το μέσον του ΔΙ, τότε το τρίγωνο ΒΦΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7. Το τρίγωνο $Ο_2ΜΟ_3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

8. Οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων ΑΒΔΕ, ΑΓΙΘ και οι ευθείες ΒΘ, ΓΕ, ΔΙ, $ΑΟ_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

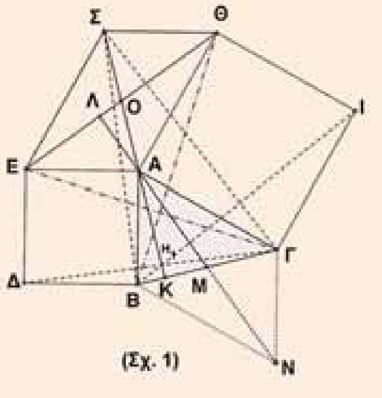
9. Οι ευθείες ΕΙ, ΔΘ, ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο $Η_2$.

Απόδειξη

1) α) Έστω ότι η ΑΜ τέμνει την ΕΘ στο Λ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $Ε\hat{Α}Λ+Β\hat{Α}Μ=90^o$ και επειδή $Ε\hat{Α}Λ+Β\hat{Α}Μ=90^o$ αρκεί $Λ\hat{Ε}Α=Β\hat{Α}Μ$ (Σχ. 1).

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ=ΑΜ, τότε το ΑΓΝΒ είναι παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοι διχοτομούνται), οπότε ΑΒ=ΓΝ και $Α\hat{Ν}Γ=Β\hat{Α}Μ$.

Τα τρίγωνα ΕΑΘ και ΑΓΝ έχουν ΑΘ=ΑΓ (ΑΓΙΘ τετράγωνο) ΕΑ=ΓΝ (ΑΓΝΒ παραλληλόγραμμο)



(Σχ. 1)

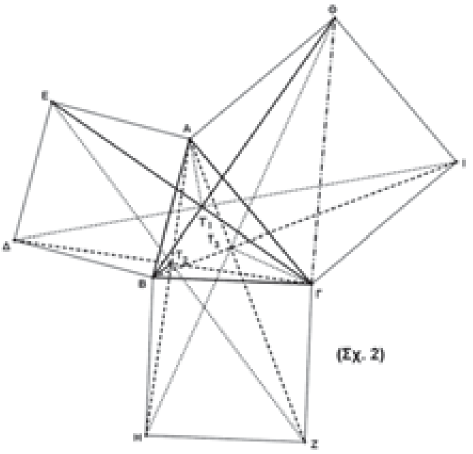
$Ε\hat{Α}Θ=Α\hat{Γ}Ν$ ($Ε\hat{Α}Θ=180^o-Β\hat{Α}Γ$ και $Α\hat{Γ}Ν=180^o-Β\hat{Α}Γ$ λόγω του παραλληλογράμμου ΑΓΝΒ), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $Α\hat{Ν}Γ=Β\hat{Α}Μ=Θ\hat{Ε}Α=Λ\hat{Ε}Α$ και ΕΘ=ΑΝ⇔ΕΘ=2ΑΜ⇔ $ΑΜ=\frac{ΕΘ}{2}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $Γ\hat{Α}Κ+Κ\hat{Γ}Α=90^o$ και επειδή $Θ\hat{Α}Σ+Γ\hat{Α}Κ=90^o$, αρκεί $Θ\hat{Α}Σ=Α\hat{Γ}Κ$.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΘΣ.

Έχουν: ΑΒ=ΣΘ (ΑΒΔΕ τετράγωνο και ΑΕΣΘ παραλληλόγραμμο) ΑΓ=ΑΘ (ΑΓΙΘ τετράγωνο)

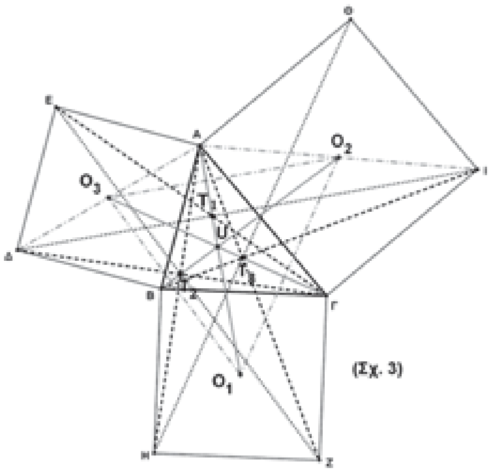
$B\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Theta}\Sigma$ ($B\widehat{A}\Gamma = 180^o - E\widehat{A}\Theta$ και $A\widehat{\Theta}\Sigma = 180^o - E\widehat{A}\Theta$ λόγω του παραλληλογράμμου ΑΘΣΕ), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Gamma}K = \Theta\widehat{A}\Sigma$, και ΒΓ=ΑΣ ⇔ΒΓ=2ΑΟ⇔ $AO = \frac{B\Gamma}{2}$. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΘΣ θα είναι ΒΓ=ΑΣ (1) και $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Sigma}\Theta$ (2).



(Σχ. 2)

2) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΒΣ έχουν: ΒΑ=ΑΒ (ΑΒΔΕ τετράγωνο) ΒΓ=ΑΣ (λόγω (1))

$\Gamma\widehat{B}\Delta = B\widehat{A}\Sigma$ ($\Gamma\widehat{B}\Delta = 90^o + A\widehat{B}\Gamma \overset{(2)}{=} 90^o + A\widehat{\Sigma}\Theta = 90^o + \Sigma\widehat{A}E = B\widehat{A}\Sigma$) άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΓΔ=ΒΣ και $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Sigma$ (3). Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}B + \Delta\widehat{B}\Sigma \overset{(3)}{=} A\widehat{B}\Sigma + \Delta\widehat{B}\Sigma = 90^o$, άρα ΔΓ⊥ΒΣ. Όμοια από την σύγκριση των τριγώνων ΒΓΙ και ΑΓΣ θα είναι ΒΙ=ΓΣ και ΒΙ⊥ΓΣ. Στο τρίγωνο ΣΒΓ είναι ΒΙ⊥ΣΓ, ΓΔ⊥ΣΒ, άρα το ΣΚ θα είναι το τρίτο ύψος, δηλαδή ΒΙ, ΓΔ και ΑΚ συντρέχουν στο H_1.



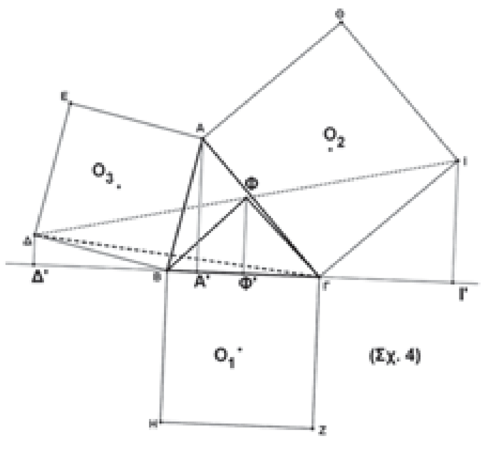
(Σχ. 3)

3) Τα τρίγωνα ΘΒΑ και ΕΓΑ έχουν: ΑΘ=ΑΓ (ΑΓΙΘ τετράγωνο), ΑΒ=ΑΕ (ΑΒΔΕ τετράγωνο), $\Theta\widehat{A}B = \Gamma\widehat{A}E$ (καθεμία είναι $90^o + B\widehat{A}\Gamma$) ή πλευρές κάθετες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΒΘ=ΕΓ και $A\widehat{\Gamma}E = A\widehat{\Theta}B$, άρα το $A\Theta\Gamma T_1$ είναι εγγράψιμο οπότε $\Theta\widehat{T_1}\Gamma = \Gamma\widehat{A}\Theta = 90^o$ (σχ. 2).

4) Το $A\Theta\Gamma T_1$ είναι εγγράψιμο οπότε $A\widehat{T_1}\Theta = A\widehat{\Gamma}\Theta = 45^o$. Επειδή $\Gamma\widehat{A}\Theta = 90^o$ η ΘΓ θα είναι διάμετρος άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του $A\Theta\Gamma T_1$ θα διέρχεται και από το Ι, οπότε $A\widehat{T_1}I = I\widehat{\Gamma}\Theta = 45^o$, άρα $A\widehat{T_1}I = 90^o$ (4). Όμοια το $AT_1B\Delta E$ είναι εγγράψιμο, οπότε $A\widehat{T_1}\Delta = 90^o$ και λόγω της (4) θα είναι Δ, T_1, Ι συνευθειακά, οπότε $AT_1 \perp \Delta I$. Όμοια $BT_2 \perp EZ$ και $\Gamma T_3 \perp H\Theta$.

5) Θα αποδείξουμε ότι η AO_1 διέρχεται από το T_1 (σχ. 3). Από το (3) έχουμε ότι ΒΘ⊥ΕΓ, άρα $B\widehat{T_1}\Gamma = B\widehat{O_1}\Gamma\Theta = 90^o$, οπότε το τετράπλευρο $BT_1\Gamma O_1$ είναι εγγράψιμο, άρα $B\widehat{T_1}O_1 = B\widehat{\Gamma}O_1 = 45^o$ και λόγου του εγγράψιμου $T_1AE\Delta B$ θα είναι και $B\widehat{T_1}\Delta = B\widehat{E}\Delta = 45^o$ οπότε $O_1T_1 \perp \Delta T_1$. Είναι $AT_1 \perp \Delta T_1$, οπότε τα σημείο Α, T_1, O_1 είναι συνευθειακά. Όμοια η BO_2 περνάει από το T_2 και ΓO_3 περνάει από το T_3.

Στο τρίγωνο ΑΔΙ η O_2O_3 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΑΙ άρα θα είναι η O_2O_3//ΔΙ, άρα $AO_1 \perp O_2O_3$. Όμοια $BO_2 \perp O_1O_3$ και $\Gamma O_3 \perp O_1O_2$. Οι ευθείες AO_1, BO_2, ΓO_3 είναι οι φορείς των υψών του τριγώνου $O_1O_2O_3$, επομένως περνάνε από το ορθόκεντρο U του τριγώνου $O_1O_2O_3$.

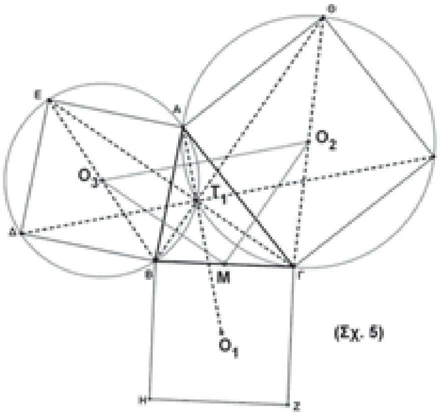


(Σχ. 4)

6) Έστω Δ΄, Ι' και Φ' οι προβολές των Δ, Φ και Ι στην ΒΓ (Σχ. 4). Το τετράπλευρο ΔΔ'Ι'Ι είναι τραπέζιο και επειδή το Φ είναι το μέσον της ΔΙ και η ΦΦ'⊥ΔΊ', άρα παράλληλη των βάσεων ΔΔ', ΙΙ', οπότε το Φ' θα είναι το μέσον της Δ'Ι'. Τα τρίγωνα ΑΒΑ΄ και ΒΔΔ΄ έχουν: ΑΒ=ΒΔ, $\hat{A}' = \hat{\Delta}'' = 90^o$, $B\hat{\Delta}\Delta' = A\hat{B}A'$ (πλευρές κάθετες) άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουμε ΔΔ'=ΒΑ' (5) και Δ'Β=ΑΑ' (6). Όμοια τα τρίγωνα ΑΑ'Γ και ΓΙΙ' έχουν ΓΑ=ΓΙ, $\hat{A}' = \hat{I}' = 90^o$, $A\hat{\Gamma}A' = \Gamma\hat{I}I'$ (πλευρές κάθετες) άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουμε ΙΙ'=ΓΑ' (7) και ΓΙ'=ΑΑ' (8). Από τις (6), (8) θα είναι Δ'Β=ΑΑ'=ΓΙ' (9).
Το Φ' είναι το μέσον της Δ'Ι' άρα Δ'Φ'=Φ'Ι'⇒Δ'Β+ΒΦ'=Φ'Γ+ΓΙ'⇒Δ'Β+ΒΦ'=Φ'Γ+ΔΒ' (λόγω (9)) άρα ΒΦ'=Φ'Γ δηλαδή το Φ είναι και μέσον της ΒΓ και επειδή ΦΦ'⊥ΒΓ το τρίγωνο ΦΒΓ θα είναι ισοσκελές.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι και ορθογώνιο. Επειδή η ΦΦ' είναι διάμεσος αρκεί $\Phi\Phi' = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τραπέζιο ΔΔ'Ι'Ι η ΦΦ' είναι διάμεσος άρα $\Phi\Phi' = \frac{\Delta\Delta' + II'}{2} \overset{(5),(7)}{=} \frac{BA' + \Gamma A'}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα το τρίγωνο ΦΒΓ είναι ορθογώνιο.

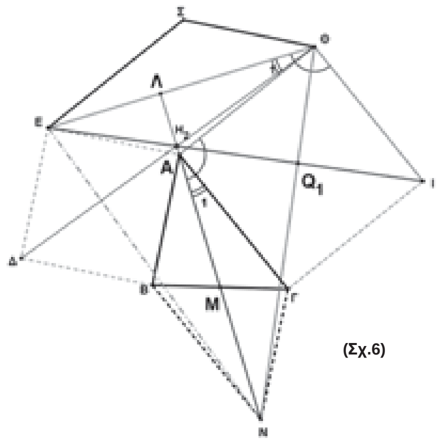
7) Στο τρίγωνο ΓΒΕ η MO_3 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΒΕ άρα $MO_3 // = \frac{\Gamma E}{2}$ (10) (σχ. 5).
Όμοια στο τρίγωνο ΒΓΘ η MO_2 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΘ άρα $MO_2 // = \frac{B\Theta}{2}$ (11). Από το ερώτημα 3) έχουμε ΒΘ⊥ΓΕ και ΒΘ=ΓΕ οπότε λόγω των (10) και (11) το τρίγωνο MO_2O_3 θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



(Σχ. 5)

8) Οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων ΑΒΔΕ και ΑΓΙΘ περνάνε από το σημείο T_1 διότι:
$B\hat{T_1}E = \Gamma\hat{T_1}\Theta = 90^o$ (Σχ. 5). Επίσης από το σημείο T_1 περνάνε και οι ευθείες ΒΘ, ΓΕ, ΔΙ και AO_1.

9) Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμα ΓΑΒΝ. Η ΑΜ διέρχεται από το Ν και όπως αποδείξαμε στο 1) ισχύει ΑΜ⊥ΕΘ και $AM = \frac{E\Theta}{2} \Leftrightarrow E\Theta = 2AM = AN$. Ξέρουμε ότι $E\overset{\triangleleft}{\Theta}A = A\overset{\triangleleft}{N}\Gamma$, άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}_1$ (12). Θα αποδείξουμε ότι και οι ευθείες ΕΙ, ΔΘ είναι κάθετες στις πλευρές ΘΝ, ΕΝ του $N\overset{\triangleleft}{E}\Theta$, οπότε θα συμπίπτουν με τα ύψη του, άρα θα συντρέχουν. Τα τρίγωνα ΕΘΙ και ΑΘΝ έχουν: ΘΙ=ΑΘ (ΑΓΙΘ τετράγωνο) ΕΘ=ΑΝ



(Σχ.6)

($E\Theta = 2AM = AN$), $E\hat{\Theta}I = N\hat{A}\Theta$ ($E\hat{\Theta}I = \hat{\Theta}_1 + 90^o \overset{(12)}{=} \hat{A}_1 + 90^o = N\hat{A}\Theta$), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα είναι $\Theta\hat{E}I = \Theta\hat{N}A$, άρα το τετράπλευρο $E\Lambda Q_1N$ θα είναι εγγράψιμο οπότε $E\hat{\Lambda}N = E\hat{Q_1}N = 90^o$, δηλαδή ΕΙ⊥ΘΝ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΘΔ⊥ΕΝ συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΕΑΝ και ΕΔΘ, άρα οι ευθείες ΕΙ, ΔΘ, ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο έστω H_2.

Ποιος ήταν ο Vecten; Ο Vecten ήταν γάλλος μαθηματικός που έζησε στις αρχές του 19ου αιώνα και δίδαξε Μαθηματικά με τον συνάδελφό του **Gergonne** στη Νιμς της Νότιας Γαλλίας. Το **1817** δημοσίευσε μια σπουδή στο σχήμα που σχηματίζουν τρία εσωτερικά και τρία εξωτερικά τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. [*Πηγές: Wikipedia, Wolframmathworld*]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

ΘΑΛΗΣ 2020-21

Συμπληρωματικός

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν μ,ν θετικοί ακέραιοι, $\mu \geq 2$ και $9^{\mu-1}+9^{\nu} \leq 2\cdot 3^{\nu+\mu-1}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3^{\mu}+3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 12.

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται: $9^{\mu-1}+9^{\nu} \leq 2\cdot 3^{\nu+\mu-1} \Leftrightarrow \left(3^{\mu-1}\right)^2+\left(3^{\nu}\right)^2-2\cdot 3^{\mu-1}\cdot 3^{\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \left(3^{\mu-1}-3^{\nu}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3^{\mu-1}-3^{\nu}=0$,
οπότε $3^{\mu-1}=3^{\nu}$ και $3^{\mu}+3^{\nu}=3\cdot 3^{\mu-1}+3^{\nu}=3\cdot 3^{\nu}+3^{\nu}=4\cdot 3^{\nu}$, που είναι πολλαπλάσιο του 12, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Βρίσκουμε όλα τα αθροίσματα που δημιουργούνται με δύο όρους από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ και παρατηρούμε ότι τα τρία μικρότερα από αυτά είναι 128, 144 και 148, ενώ τα δύο μεγαλύτερα είναι 204 και 192. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$.

Λύση

Τα δύο μικρότερα αθροίσματα είναι $\alpha+\beta=128$ και $\alpha+\gamma=144$. Το 148 που είναι το τρίτο μικρότερο άθροισμα μπορεί να είναι το $\alpha+\delta$ ή $\beta+\gamma$. Τα δύο μεγαλύτερα αθροίσματα είναι τα $\delta+\varepsilon=204$ και $\gamma+\varepsilon=192$. Από τα δεδομένα αθροίσματα έχουμε ότι: $\alpha+\delta=(\alpha+\gamma)+(\delta+\varepsilon)-(\gamma+\varepsilon)=144+204-192=156$, οπότε το τρίτο μικρότερο άθροισμα είναι το $\beta+\gamma=148$.

Από τις ισότητες $\alpha+\beta=128,\ \alpha+\gamma=144,\ \beta+\gamma=148$ με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε $\alpha+\beta+\gamma=210$, από την οποία με αφαίρεση κατά μέλη διαδοχικά των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε: $\alpha=62,\ \beta=66,\ \gamma=82$. Τέλος, από τις εξισώσεις $\gamma+\varepsilon=192$ και $\delta+\varepsilon=204$ λαμβάνουμε: $\varepsilon=110,\ \delta=94$. Άρα είναι $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=(62,66,82,94,110)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και τη διάμεσο ΑΜ στο σημείο Ε. Η κάθετη από το Ε προς την πλευρά ΑΒ την τέμνει στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $\Delta B=2\cdot EZ$.

Λύση

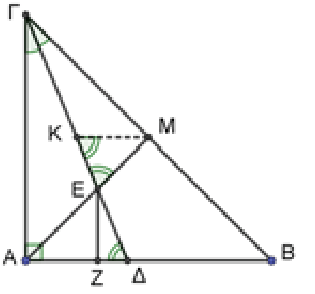
Έστω ότι η παράλληλη από το Μ προς την ΑΒ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ στο Κ. Τότε η ΜΚ είναι μεσοπαράλληλη στο τρίγωνο ΓΒΔ, οπότε: $\Delta B=2\cdot KM$ (1)

Επιπλέον, έχουμε $M\hat{K}E=E\hat{\Delta}A=90^0-A\hat{\Gamma}\Delta=90^0-22{,}5^0=67{,}5^0$. (2)

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΜΓ έχουμε:

$$K\hat{E}M=90^0-E\hat{\Gamma}M=90^0-22{,}5^0=67{,}5^0. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι: $M\hat{K}E = K\hat{E}M = 67{,}5^0$, οπότε το τρίγωνο ΜΚΕ είναι ισοσκελές με ΜΚ = ΜΕ.
Όμως το Ε είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ. Άρα είναι $ME = EZ$,
οπότε θα είναι και $MK = EZ$ (4)
Από τις (1) και (4) έπεται ότι: $\Delta B = 2 \cdot EZ$.



Σχήμα 1

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\beta\gamma = 15 \\ (\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5) = 120 \end{matrix}\right\}.$$

Λύση.

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$(\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5) = 120$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \beta\gamma + 3\alpha\gamma + 5\alpha\beta + 5\beta + 3\gamma + 15\alpha + 15 = 120 \overset{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} \beta\gamma + 3\alpha\gamma + 5\alpha\beta + 5\beta + 3\gamma + 15\alpha = 90$$

$$\Leftrightarrow (15\alpha + \beta\gamma) + (5\beta + 3\alpha\gamma) + (3\gamma + 5\alpha\beta) = 90 \overset{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} 15\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 5\left(\beta + \frac{9}{\beta}\right) + 3\left(\gamma + \frac{25}{\gamma}\right) = 90. \qquad (1)$$

Με τη γνωστή ανισότητα $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$, , όπου η ισότητα ισχύει για $x = y$, λαμβάνουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2,\ \beta + \frac{9}{\beta} \geq 6,\ \gamma + \frac{25}{\gamma} \geq 10,\ \alpha, \beta, \gamma > 0, \qquad (2)$$

όπου οι ισότητες ισχύουν για $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$. Τότε έχουμε:

$$15\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 5\left(\beta + \frac{9}{\beta}\right) + 3\left(\gamma + \frac{25}{\gamma}\right) \geq 15 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 10 = 90,$$

οπότε για να αληθεύει η εξίσωση (1) πρέπει και αρκεί οι τρεις ανισότητες (2) να αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 5)$.

$2^{ος}$ τρόπος: Με τη γνωστή ανισότητα $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$, όπου η ισότητα ισχύει για $x = y$,

λαμβάνουμε: $\alpha + 1 \geq 2\sqrt{\alpha}$, $\beta + 3 \geq 2\sqrt{3b}$, $\gamma + 5 \geq 2\sqrt{5\gamma}$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε: $(\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5) \geq 8\sqrt{15\alpha\beta\gamma} = 8 \cdot 15 = 120$.

Επομένως πρέπει σε όλες να ισχύει η ισότητα, δηλαδή α=1, β=3, γ=5.

Πρόβλημα 2

Για τον πραγματικό αριθμό β γνωρίζουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα: $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$.

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες τιμές του β για τις οποίες ο αριθμός $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Από τις ισότητες $\beta = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ και $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$\gamma + \beta = 2\alpha^2$ και $\gamma - \beta = \frac{2}{\alpha}$, από τις οποίες με απαλοιφή του α λαμβάνουμε: $(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)^2 = 8$.

Αν β,γ ακέραιοι, τότε πρέπει $0<|\gamma-\beta|<3$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$\gamma+\beta=8 \text{ και } (\gamma-\beta)^2=1 \Rightarrow \gamma+\beta=8 \text{ και } (\gamma-\beta=1 \text{ ή } \gamma-\beta=-1), \text{αδύνατο.}$$

2η περίπτωση

$$\gamma+\beta=2 \text{ και } (\gamma-\beta)^2=4 \Rightarrow \gamma+\beta=2 \text{ και } (\gamma-\beta=2 \text{ ή } \gamma-\beta=-2) \Leftrightarrow (\gamma+\beta=2 \text{ και } \gamma-\beta=2)$$
$$\text{ή } (\gamma+\beta=2 \text{ και } \gamma-\beta=-2) \Leftrightarrow \gamma=2, \beta=0 \quad \text{ή} \quad \gamma=0, \beta=2$$

Επομένως, οι ζητούμενες τιμές του β είναι 0 ή 2.

Πράγματι, για $\beta=0$, υπάρχει ο $\alpha=1$, έτσι ώστε $\alpha^2-\frac{1}{\alpha}=\beta$ και τότε $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}=2$, ενώ για $\beta=2$, υπάρχει ο $\alpha=-1$, έτσι ώστε $\alpha^2-\frac{1}{\alpha}=\beta$ και τότε $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}=0$.

2ος τρόπος

Από τις ισότητες $\beta=\alpha^2-\frac{1}{\alpha}$ και $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}$ με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $\gamma-\beta=\frac{2}{\alpha}$, δηλαδή $\alpha=\frac{2}{\gamma-\beta}=\frac{2}{\kappa}$, όπου κ ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση έχουμε ότι

$$\frac{4}{\kappa^2}-\frac{\kappa}{2}=\frac{8-\kappa^3}{2\kappa^2}=\beta\in\mathbb{Z} \qquad (1)$$

οπότε πρέπει ο κ^2 να διαιρεί το 4 και ο 2 να διαιρεί το κ, οπότε $\kappa=\pm1,\pm2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1), οι ακέραιες τιμές του β που παίρνουμε είναι οι 0 και 2.

Πράγματι, για $\beta=0$, υπάρχει ο $\alpha=1$, έτσι ώστε $\alpha^2-\frac{1}{\alpha}=\beta$ και τότε $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}=2$, ενώ για $\beta=2$, υπάρχει ο $\alpha=-1$, έτσι ώστε $\alpha^2-\frac{1}{\alpha}=\beta$ και τότε $\gamma=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}=0$.

Πρόβλημα 3

Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{A}=90^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι διαφορετικά πάνω στην ευθεία ΑΓ έτσι ώστε $A\hat{B}\Delta=15^0$ και $\Gamma\Delta=\Gamma E$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Gamma\hat{B}E$.

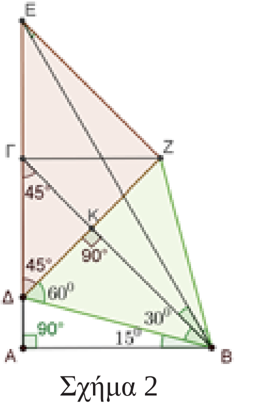
Λύση

Θεωρούμε το σημείο Ζ συμμετρικό του σημείου Δ ως προς την ευθεία ΒΓ. Τότε θα είναι $\Delta Z\perp B\Gamma$ και αν η ΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ, $K\Delta=KZ$.

Επιπλέον, λόγω συμμετρίας, θα είναι $BZ=B\Delta$, και

$$K\hat{B}Z=K\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{B}A-\Delta\hat{B}A=45^0-15^0=30^0.$$

Επειδή $\Delta\hat{B}Z=2\cdot 3\hat{0}=60^0$, το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισόπλευρο, οπότε και $\Delta Z=BZ=B\Delta$. Το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού $\Gamma\Delta=\Gamma Z$, λόγω συμμετρίας, και $\Delta\hat{\Gamma}Z=2\cdot45^0=90^0$. Άρα θα είναι $\Gamma Z=\Gamma\Delta=\Gamma E=\frac{\Delta E}{2}$, οπότε και το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $Z\Delta=ZE$. Επομένως $ZE=ZB$ και το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ισοσκελές με $B\hat{Z}E=B\hat{Z}\Delta+\Delta\hat{Z}E=60^0+90^0=150^0$.



Σχήμα 2

Άρα θα είναι $Z\hat{B}E=\frac{180^0-150^0}{2}=15^0$ και $\Gamma\hat{B}E=\Gamma\hat{B}Z-Z\hat{B}E=30^0-15^0=15^0$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2+y^2+(x-y)^2+2=2|x+y|.$$

Λύση

$$x^2+y^2+(x-y)^2+2=2|x+y| \qquad (1)$$

$$\Rightarrow |x+y|=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{(x-y)^2}{2}+1\geq\frac{(x+y)^2}{4}+1\Rightarrow |x+y|^2-4|x+y|+4\leq 0\Rightarrow (|x+y|-2)^2\leq 0\Rightarrow |x+y|=2,$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $x=y$.

Για $x=y$. η εξίσωση (1) γίνεται: $2x^2+2=4\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1,$ οπότε $(x,y)=(1,1)$ ή $(x,y)=(-1,-1)$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\Sigma(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\left[\mu+(\mu+2)+(\mu+4)+\ldots+(\mu+2\nu)-\mu(\nu+\mu)\right],$$

δεν μπορεί να γραφεί ως δύναμη της μορφής 2^{κ}, όπου κ θετικός ακέραιος, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους μ,ν με $\mu<\nu$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}2\Sigma_{\mu,\nu}&=\mu+(\mu+2)+\ldots+(\mu+2\nu-2)+\mu+2\nu-\mu(\mu+\nu)\\&=\mu(\nu+1)+2(1+2+\ldots+\nu)-\mu(\mu+\nu)=\mu(\nu+1)+\nu(\nu+1)-\mu(\mu+\nu)\\&=(\mu+\nu)(\nu+1)-\mu(\mu+\nu)=(\mu+\nu)(\nu-\mu+1)\end{aligned}$$

Επομένως είναι $(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)=2\Sigma_{\mu,\nu}$, άρτιος. Επειδή οι αριθμοί $\nu+\mu$ και $\nu-\mu$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, έπεται ότι οι αριθμοί $\nu+\mu$ και $\nu-\mu+1$ είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός. Επιπλέον $\nu+\mu\geq 3$ και $\nu-\mu+1\geq 2,$ οπότε σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\Sigma_{\mu,\nu}$ έχει ένα περιττό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Άρα δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2 με θετικό ακέραιο διαιρέτη.

Πρόβλημα 3

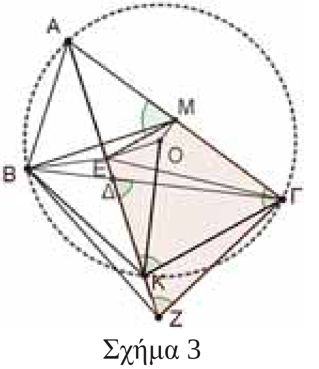
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ=2\cdot ΑΒ$ και περιγεγραμμένο κύκλο $\gamma(O,R)$. Η κάθετη από το Ο προς τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου την τέμνει στο σημείο Ε. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην ευθεία ΑΔ, διαφορετικό από το Δ, τέτοιο ώστε $ΓΔ=ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι: $Ε\hat{Β}Ζ=Ε\hat{Γ}Ζ$.

Λύση

Έστω ότι η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Κ. Επειδή η ΟΕ είναι κάθετη στη χορδή ΑΔ έπεται ότι: $ΑΕ=ΕΚ$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Τότε $ΑΜ=\frac{ΑΓ}{2}=\frac{2\cdot ΑΒ}{2}=ΑΒ$, οπότε τα σημεία Β και Μ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{Α}$.

Τώρα, η ΜΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΚ, οπότε: $Α\hat{Μ}Ε=Α\hat{Γ}Κ$

Όμως, έχουμε και τις ισότητες :



Σχήμα 3

$$Α\hat{Γ}Κ=\hat{Γ}+\frac{\hat{Α}}{2}=Κ\hat{Δ}Γ=Γ\hat{Ζ}Ε$$

Άρα $Α\hat{Μ}Ε=Γ\hat{Ζ}Ε$, οπότε το τετράπλευρο ΕΜΓΖ είναι εγγράψιμο, και $Ε\hat{Β}Ζ=Ε\hat{Μ}Ζ$ (λόγω συμμετρίας) $=Ε\hat{Γ}Ζ$ (από εγγράψιμο ΕΜΓΖ).

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 119

N51. Έστω n θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς διαιρέτες d του $3n^2$ που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός n^2+d να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου. [Ρουμανία 2019]

Λύση. Έστω d διαιρέτης του $3n^2$ έτσι ώστε ο αριθμός n^2+d να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $3n^2=dk$ και $n^2+d=m^2$, $m\in\mathbb{Z}$. Τότε

$$n^2+\frac{3n^2}{k}=m^2 \Rightarrow (mk)^2=n^2\left(k^2+3k\right)\Rightarrow k^2+3k=\left(\frac{mk}{n}\right)^2,\ \text{τέλειο τετράγωνο.}$$

Όμως, έχουμε ότι: $k^2<k^2+3k<(k+2)^2$, οπότε $k^2+3k=(\kappa+1)^2 \Rightarrow k=1$ και $d=3n^2$ που είναι ο διαιρέτης του $3n^2$ που ικανοποιεί το πρόβλημα.

Γ53. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Ι το έκκεντρο του, Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με την πλευρά ΒΓ και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Θεωρούμε και το μέσο Μ του τόξου ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου που περιέχει την κορυφή Α και έστω Ζ το σημείο τομής των ευθειών ΔΙ και ΑΜ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ περνάει από το μέσο του ΕΖ. [Ρουμανία 2019]

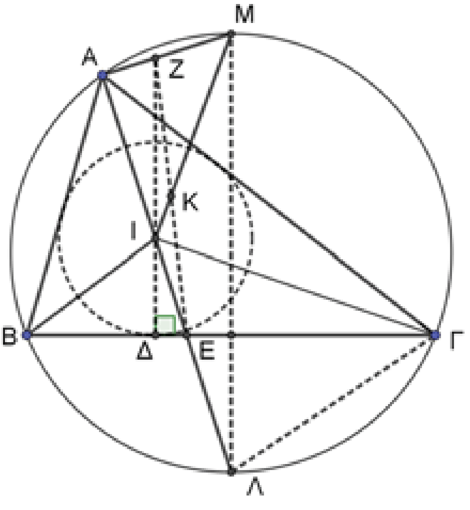
Λύση.
Από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο ΑΕΖ με τέμνουσα την ΙΜ, έχουμε:

$$\frac{AI}{IE}\cdot\frac{EK}{KZ}\cdot\frac{MZ}{MA}=1,$$

οπότε για να ισχύει ότι $EK=KZ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{AI}{IE}=\frac{MA}{MZ}.$$

Η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. περνάει από το μέσο Λ του τόξου ΒΓ που δεν περιέχει το Α, οπότε η ευθεία ΛΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι $\Lambda M \parallel I\Delta$ (κάθετες προς την ΒΓ).



Επειδή $A\hat{\Lambda}\Gamma=A\hat{B}\Gamma$ και $\Lambda\hat{A}\Gamma=B\hat{A}E$, τα τρίγωνα ΑΛΓ και ΑΒΕ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AB}{BE}=\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} \qquad (1)$$

Από το θεώρημα της διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΕ, έχουμε:

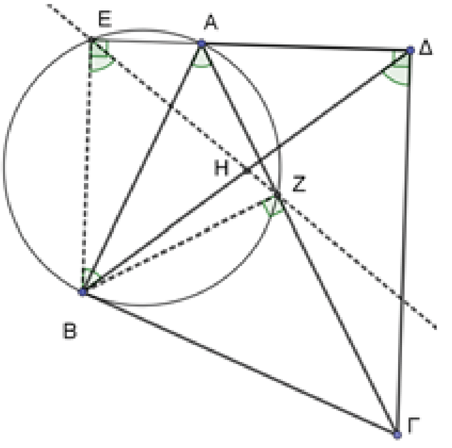
$$\frac{AB}{BE}=\frac{AI}{IE} \qquad (2)$$

Από τη γνωστή ισότητα $\Lambda I=\Lambda\Gamma$ και την παραλληλία

$\Lambda M \parallel I\Delta$ έχουμε: $\dfrac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}=\dfrac{A\Lambda}{\Lambda I}=\dfrac{MA}{MZ}$

Γ54. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $A\hat{\Delta}\Gamma=90^0$. Έστω Ε και Ζ οι ορθές προβολές του σημείου Β πάνω στις ευθείες ΑΔ και ΑΓ, αντίστοιχα. Δίνεται ότι το Ζ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Γ, ενώ το Α βρίσκεται μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Επίσης η ευθεία ΕΖ περνάει από το μέσο της διαγωνίου ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. [Baltic Way 2007]

Λύση



Επειδή $A\hat{E}B = A\hat{Z}B = 90^0$ το τετράπλευρο ΑΕΒΖ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$B\hat{A}Z = B\hat{E}Z \qquad (1)$$

Επειδή η ΕΖ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΔ, έπεται ότι $EH = HB$ και

$$B\hat{E}Z = E\hat{B}\Delta \qquad (2)$$

Επειδή $B\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 \Rightarrow EB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε

$$E\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) – (3) προκύπτει ότι:

$$B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$$

Α63. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $3\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)=4\left(\alpha+\beta\right)$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $K\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{16}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$. **[Ρουμανία 2019]**

Λύση. Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$K\left(\alpha,\beta\right)=\frac{16}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{64}{4\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{\left(8+1\right)^2}{4\alpha+\beta}=\frac{81}{4\alpha+\beta} \qquad (1)$$

Επίσης η υπόθεση γράφεται:

$$3\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)=4\left(\alpha+\beta\right)\Leftrightarrow 9\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)=12\left(\alpha+\beta\right)\Leftrightarrow\left(3\alpha-2\right)^2+\left(3\beta-2\right)^2=17, \qquad (2)$$

οπότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\left[\left(3\alpha-2\right)^2+\left(3\beta-2\right)^2\right]\left(4^2+1^2\right)\geq\left[4\left(3\alpha-2\right)+3\beta-2\right]^2\overset{(2)}{\Longrightarrow}\left(12\alpha+3\beta-10\right)^2\leq 17^2\Rightarrow 4\alpha+\beta\leq 9,$$

οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $K\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{16}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\geq\dfrac{81}{4\alpha+\beta}\geq 9.$

Η ισότητα ισχύει $\alpha=2,\beta=1$ τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος, οπότε η ελάχιστη τιμή που ζητάμε είναι 9.

Ασκήσεις για λύση

Α64. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης: $E\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{\alpha+\beta}{\left(4\alpha^2+3\right)\left(4\beta^2+3\right)}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Γ55. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθόκεντρο Η αυτού και έστω Μ τυχόν σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του $c(O,R)$. Η ευθεία που περνάει από το Α και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΒΜ τέμνει την ευθεία ΓΗ στο σημείο Κ και η ευθεία που περνάει από το Α και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΓΜ τέμνει την ευθεία ΒΗ στο Ν. Να αποδείξετε ότι: $KN \parallel AM$.

Γ56. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ο το περίκεντρό του. Επιλέγουμε σημείο Μ στην ημιευθεία ΑΓ έτσι ώστε το Γ να βρίσκεται μεταξύ των Α και Μ και σημείο Ν στην ημιευθεία ΒΑ έτσι ώστε το Α να βρίσκεται μεταξύ των Β και Ν. Αν τα τρίγωνα ΜΓΝ και ΑΒΓ είναι όμοια με αντίστοιχες κορυφές που προκύπτουν από τη δεδομένη διάταξη, να αποδείξετε ότι το σημείο Ο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΜΝ.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά

Η μεθοδολογία των Μαθηματικών (του Κ. Α. Rybnikov)

τι είναι η "μεθοδολογία των Μαθηματικών "

«...*Όταν μεταξύ των μαθηματικών, ή στη μαθηματική βιβλιογραφία, συζητούνται προβλήματα γενικότερου χαρακτήρα, και ιδιαίτερα φιλοσοφικά προβλήματα, χρησιμοποιείται η λέξη «μεθοδολογία».* Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται με αρκετά ευρεία έννοια. Ορισμένες φορές χρησιμοποιείται για την υποδήλωση ενός συνόλου φιλοσοφικών προβλημάτων των Μαθηματικών.

Η έννοια της μεθοδολογίας της επιστήμης, και ειδικότερα της μεθοδολογίας των Μαθηματικών, είναι πράγματι ευρεία και είναι δύσκολο να εκφραστεί με δυο λόγια ή με ειδικά σύμβολα, όπως είναι καθιερωμένο μεταξύ των μαθηματικών. Δεν είναι σπάνιο φαινόμενο όταν ένας μαθηματικός έχει ασαφείς και ακαθόριστες αντιλήψεις για τις μεθοδολογικές βάσεις της επιστήμης του, παρά την υψηλή ειδίκευση ή την αναγνωρισμένη ευρυμάθειά του. Είναι φανερό ότι η ασάφεια αυτή δεν οφείλεται στην ευρύτητα του αντικειμένου, αλλά απορρέει, κατά κανόνα, από ανεπαρκή κατάρτιση ή υποτίμηση των μεθοδολογικών προβλημάτων της επιστήμης και στηρίζεται σε λαθεμένες αντιλήψεις, οι οποίες αφομοιώθηκαν κατά το παρελθόν.

Η αοριστία που προαναφέρθηκε, εμποδίζει τη *διαμόρφωση επιστημονικών αντιλήψεων για τα θεμέλια, τους τρόπους εξέλιξης και τις προοπτικές των μαθηματικών επιστημών.* …Οι προσπάθειες απάντησης στο ερώτημα, *τι είναι η μεθοδολογία των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενό της, συνήθως, αλλά φυσιολογικά, αρχίζουν με τον προσδιορισμό της ως θεωρίας της μεθόδου ή των μεθόδων, για τον ιδιότυπο τρόπο της δεδομένης επιστήμης στη διερεύνηση της αντικειμενικής πραγματικότητας...*

ποιο το αντικείμενο της "μεθοδολογίας των Μαθηματικών"

Η ιστορία και η μεθοδολογία των Μαθηματικών συνδέονται μεταξύ τους αδιάρρηκτα. Από την πλευρά που εξετάζουμε , δηλ. ως προς το αντικείμενο της μεθοδολογίας των Μαθηματικών, *αυτή η ενότητα εξασφαλίζει τη γνώση του ειδικού περιεχομένου των υπό μελέτη μεθοδολογικών προβλημάτων*.

Ακόμη πιο πλατύτερος ορισμός της μεθοδολογίας των Μαθηματικών διαμορφώνεται από την κατανόηση της μεθοδολογίας ως ως φιλοσοφική θεωρία για τις μεθόδους της γνωστικής διαδικασίας και του μετασχηματισμού της πραγματικότητας, ως εφαρμογή των αρχών της κοσμοθεωρίας, στη γνωστική διαδικασία, στην γενικότερη πνευματική δημιουργία και στην πρακτική. Με την κατανόηση του αντικειμένου της μεθοδολογίας απ' αυτήν την σκοπιά, τα μεθοδολογικά προβλήματα, που εξετάζουμε, επιδέχονται φιλοσοφική ερμηνεία…..»

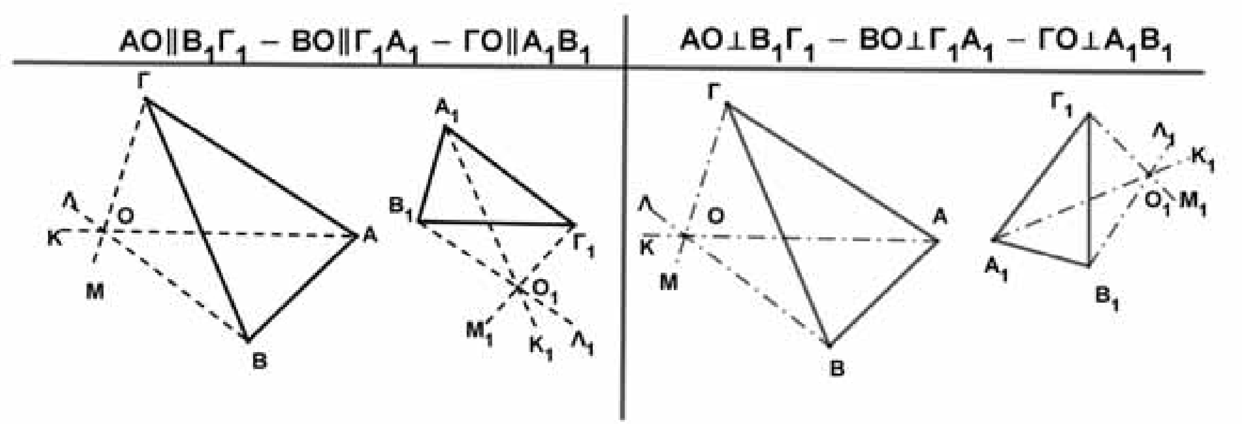
Το απόκομμα δανειστήκαμε από το έργο: «Εισαγωγή στη μεθοδολογία των Μαθηματικών» (του Κ. Α. Rybnikov), εκδ. "Επιστήμη και Κοινωνία", Θεσσαλονίκη (1986) (*μετάφραση: Κ.Γ. Φιλιππίδης)*

ΙΙ. Γεωμετρία αγάπη μου

Στο προηγούμενο τεύχος (στο λήμμα "Γεωμετρία αγάπη μου"), μιλήσαμε για «σημεία μεταπολικά – τρίγωνα μεταπαράλληλα» και «σημεία ορθοπολικά – τρίγωνα ορθολογικά». Στο τεύχος τούτο δίνουμε τις αντίστοιχες εικόνες αυτών, σαν: "σχήμα (α)", "σχήμα (β)", αντίστοιχα[1].

---

1 για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο μνημειώδες τρίτομο έργο του Νείλου Σακελλαρίου (1882-1955) «Στοιχεία Θεωρητικής Γεωμετρίας», (τόμος 2, σελ.189), εκδ. "ΠΟΥΝΤΖΑ"(1951). Χρημάτισε πρόεδρος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, από το 1929 ως το 1955.



σχήματα (α)
σημεία μεταπολικά - τρίγωνα μεταπαράλληλα

σχήματα (β)
σημεία ορθοπολικά - τρίγωνα ορθολογικά

III. Αυτό το ξέρατε;

τί είναι η "φανερότητα διαισθητική" μιας πρότασης;

(***η απάντηση στο τέλος της στήλης***)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα: Γιατί Πρέπει να Μαθαίνουμε Μαθηματικά; της Κατερίνας Παπαδιοφάντους

προλεγόμενα ένας φίλος της στήλης, μας υπέδειξε, ένα κείμενο από τον "Διαγωνισμό Δημοσιογραφικού Άρθρου Φιλοσοφικού Προβληματισμού και Έκφρασης Ιδεών", της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας (1° Βραβείο, 2016).

Σας το παρουσιάζουμε, για να πάρετε μια γεύση από το αδελφό εκπαιδευτικό σύστημα. Η στήλη ερευνά την δυνατότητα συνεργασίας μαζί τους.

«Αναντίρρητα, «η επιστήμη των αριθμών, των σχημάτων και των φυσικών μεγεθών, που μελετά τις μεταξύ τους σχέσεις καθώς και τις σχέσεις τους στον χώρο και στον χρόνο», συνιστά το κρηπίδωμα πάνω στο οποίο στηρίχθηκαν όλες οι σύγχρονες επιστήμες: φυσική, χημεία, πληροφορική, μηχανολογία, βιολογία, αστρονομία κ.α. Η ιστορία των Μαθηματικών ανάγεται στους πρώτους αιώνες ζωής, ενώ η πρόοδος τους υπήρξε σημαντικός αρωγός τόσο στην άνοδο του βιοτικού επιπέδου όσο και στη γενικότερη ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Αρχικά, χρήσιμη θα ήταν μια σύντομη αναδρομή στην ιστορία των μαθηματικών, στην οποία οι Έλληνες κατέχουν εξέχουσα θέση. Οι σπουδαιότεροι Έλληνες μαθηματικοί υπήρξαν, χωρίς αμφιβολία, ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος, των οποίων οι μελέτες επηρεάστηκαν από τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Ο Θαλής θεωρείται από πολλούς ως ο θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, αφού με το έργο του έδωσε λύση σε πολλά προβλήματα γεωμετρίας, ενώ παράλληλα πιστεύεται πως ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον παραγωγικό λογισμό. Ο Πυθαγόρας, ιδρυτής της Πυθαγόρειας Σχολής, ήταν υποστηρικτής της άποψης πως η κατανόηση των μαθηματικών συμβάλλει στην κατανόηση του σύμπαντος. Ακόμα, το πυθαγόρειο θεώρημα και η απόδειξή του οφείλεται σε αυτόν και στους μαθητές του. Ο Πλάτωνας αποτέλεσε έναν ακόμα μεγάλο Έλληνα μαθηματικό, μια και από την περίφημη ακαδημία του εξήλθαν σπουδαίοι μαθηματικοί, ενώ σε αυτόν αποδίδεται και η αναλυτική μέθοδος.

Είναι, λοιπόν, πρόδηλο πως οι Έλληνες συνέβαλαν τα μέγιστα στην εδραίωση των μαθηματικών. Ποιοι είναι, όμως, οι λόγοι για τους οποίους επιβάλλεται η εκμάθηση αυτής της «ξένης γλώσσας»;

Κατ' αρχάς, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όλες οι θετικές επιστήμες στηρίζονται στα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους. Η ανάπτυξή τους δύναται να δώσει απαντήσεις σε ποικίλα ερωτήματα που ταλανίζουν εδώ και αιώνες την ανθρωπότητα, ενώ δεν είναι απίθανη η εξεύρεση λύσης σε προβλήματα που παλαιότερα έμοιαζαν δυσεπίλυτα. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η ανάπτυξη της πληροφορικής. Όπως είναι ευρέως γνωστό, η επιστήμη των υπολογιστών είναι άμεσα συνυφασμένη με τα Μαθηματικά, εφόσον οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές χρησιμοποιούν το δυαδικό σύστημα αρίθμησης, προκειμένου να εκτελέσουν υπολογισμούς. Έτσι, η ανάπτυξη των υπολογιστών, που συντελέστηκε τα τελευταία χρόνια και κατέστησε τη ζωή μας ευκολότερη, οφείλεται στα Μαθηματικά. Δικαιολογημένα, λοιπόν, η τεχνοκρατική και ορθολογιστική κοινωνία, στην οποία ζούμε, απαιτεί από το άτομο την μαθηματική γνώση, ως απαραίτητο παράγοντα ευημερίας και προόδου.

Επιπρόσθετα, τα Μαθηματικά βρίσκουν απήχηση και στην οικονομία. Ο σύγχρονος πολίτης πρέπει να είναι σε θέση να αντιμετωπίζει τις όποιες οικονομικές μεταβολές, αλλά και να τις προβλέπει. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσα από τη λύση μαθηματικών προβλημάτων και «σπαζοκεφαλιών», γεγονός που συμβάλλει στην καλλιέργεια του νου και της ταχείας σκέψης. Επιπροσθέτως, κάθε πολίτης που ασχολείται με το εμπόριο οφείλει να χαρακτηρίζεται από φαντασία και δημιουργικότητα, ώστε να δύναται να προωθήσει τα προϊόντα του και να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Και τα δύο προσόντα μπορούν να καλλιεργηθούν με τη λύση προβλημάτων γεωμετρίας, εφόσον πολλοί είναι αυτοί που πιστεύουν πως ο γεωμετρικός συλλογισμός συμβάλλει στην απόκτηση ταχύνοιας και οξυδέρκειας.

Στο ίδιο μοτίβο, η μαθηματική γνώση είναι επιβεβλημένη, αφού καλλιεργεί την κριτική σκέψη. Κυρίως, μέσα από την πρακτική εφαρμογή των Μαθηματικών, οι μαθητές είναι σε θέση να αξιολογήσουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων των ερευνών τους. Αναλυτικότερα, οι μαθητές που καλούνται να δώσουν λύση σε ένα μαθηματικό ζήτημα καλό θα ήταν να είναι έτοιμοι να κρίνουν κατά πόσον το αποτέλεσμα τους ανταποκρίνεται στο ζητούμενό τους. Αποτελεσματικά, οι μαθητές τηρούν μια κριτική στάση τόσο κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών όσο και κατά τη μετέπειτα ζωή τους. Έτσι αποσοβείται ο κίνδυνος άκριτης αποδοχής μηνυμάτων, γεγονός το οποίο θα επέσυρε αρνητικό αντίκτυπο στην ελευθερία ατόμων και λαών… Εν κατακλείδι, είναι εμφανές πως η επιστήμη των Μαθηματικών δύναται να προσφέρει πολλά στον άνθρωπο. Ως εκ τούτου, η αμάθεια ή η ημιμάθεια των Μαθηματικών συνιστά τροχοπέδη στην πρόοδο και την ευημερία του ανθρώπου. Επιτακτική, λοιπόν, είναι η ανάγκη γνώσης της γλώσσας των αριθμών μια και αυτή δύναται να δώσει τη λύση, στα αδιέξοδα του σύγχρονου ανθρώπου»

Κατερίνα Παπαδιοφάντους (μαθήτρια, Κύπρος)

2ο θέμα. οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν την "Άλγεβρα" πολύ πριν τους Άραβες (!).

Προλεγόμενα. ο φίλος της στήλης Κ. Δεβετζόγλου (Θεσσαλονίκη), μας έστειλε ένα εντυπωσιακό κείμενο. Το κείμενο αυτό αναφέρεται στο συμπέρασμα που κατέληξε ο καθηγητής Γιάννης Χριστιανίδης. Σύμφωνα μ' αυτό, αντίθετα με ό,τι πιστεύαμε ως σήμερα, η Άλγεβρα δεν είναι επινόηση των Αράβων. Η νέα μελέτη απόδειξε ότι παλαιότερα οι αρχαίοι Έλληνες είχαν εφεύρει «αλγεβρικούς» τρόπους επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Λόγω έλλειψης χώρου θα σας το παρουσιάσουμε σε δυο συνέχειες.

α΄ μέρος

«...Όπως εξηγεί ο κ. Χριστιανίδης, υπάρχει μια γενικότερη διελκυστίνδα σε παγκόσμιο πλέον επίπεδο σχετικά με τη συνεισφορά των Αράβων ως προς αυτό που ονομάζουμε «Άλγεβρα». Τα εισαγωγικά εδώ μπαίνουν για να τονιστεί πως δεν πρόκειται για την ολοκληρωμένη μορφή του οικοδομήματος που σήμερα γνωρίζουμε, ως ξεχωριστό κλάδο των Μαθηματικών με αρνητικούς και θετικούς αριθμούς, με μεταβλητές και παραμέτρους, με θεωρήματα για ομάδες, δακτυλίους και σώματα

Αυτό που πήρε τότε το όνομα Άλγεβρα ήταν στον πυρήνα του η έκφραση με εξισώσεις ενός γενικού τρόπου να λύνεις προβλήματα. Με δυο λόγια, είχαν από την εποχή του Διόφαντου τουλάχιστον και δεν ξέρουμε ακόμη πόσο πιο πριν, οι Έλληνες μαθηματικοί είχαν βρει τον τρόπο, προβλήματα που λύνονταν συνήθως μια περίπλοκη σειρά αλγοριθμικών βημάτων, με πρακτική αριθμητική όπως λέγαμε στο δημοτικό σχολείο, να τα λύνουν μεταφράζοντας το πρόβλημα σε εξίσωση με τη χρησιμοποίηση κάτι αντίστοιχου με τον δικό μας σημερινό άγνωστο Χ. Δηλαδή να καταστρώνουν και εκείνοι μια εξίσωση και να φθάνουν πολύ πιο εύκολα στο αποτέλεσμα.

Η σημασία της ανακάλυψης που έγινε στην έδρα της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους Χριστιανίδη και Σκούρα έγκειται στο ότι βρέθηκε και αποδείχθηκε πως ο μαθηματικός Θέων χρησιμοποίησε και σε άλλα πεδία την «αλγεβρική» μέθοδο του Διόφαντου, που ήταν μάλλον σε κοινή χρήση από τους τότε ανθρώπους, για τη λύση πρακτικών αριθμητικών προβλημάτων. Προχώρησε δηλαδή στη λύση ενός καθαρά γεωμετρικού μετρητικού προβλήματος, με προέλευση από την αστρονομία, αφού σχετιζόταν με την τροχιά του πλανήτη Άρη, μετατρέποντάς το σε εξίσωση.

Ηταν η πρώτη φορά, με τη βοήθεια του χειρογράφου και των σχολίων των χαραγμένων επάνω σε αυτό, που επιβεβαιώθηκε κάτι τέτοιο και έχει σαν σημαντική συνέπεια να θεωρούμε ότι κάπου αλλού μάλλον βρίσκονται οι ρίζες αυτής της πρωτόφτιαχτης, προ-νεωτεριστικής (pre-modern) Άλγεβρας από ό,τι για χρόνια πιστευόταν.

Μια σχολή μελετητών επιμένει ότι όλα τα ξεκίνησαν οι Άραβες και ότι πριν δεν υπήρχε τίποτε σχετικό με τη μαθηματική σκέψη με αλγεβρικούς όρους. Απέναντι σε αυτή την άποψη αντιπαρατέθηκε μια άλλη επίσης απολυταρχική σχολή. «Οι Άραβες δεν έκαναν τίποτε παραπάνω από το να μεταφράσουν και να διασώσουν κείμενα και δεν προσέθεσαν μια γραμμή στο σώμα των ήδη γνωστών μαθηματικών θεωριών».

Τώρα, μετά και την αποδοχή του ευρήματος των δύο Ελλήνων μαθηματικών και τη δημοσίευση, έπειτα από κρίση, σε ένα από τα αυστηρότερα περιοδικά του χώρου, στο ιαπωνικό SCIAMVS (14, 2013 41-57), μπορούμε να λέμε ότι πλέον μάλλον θα ανιχνευθούν προς διαφορετική κατεύθυνση οι βασικές ρίζες της Άλγεβρας. Ο Διόφαντος και ο Θέων δείχνουν την κατεύθυνση αυτή. Στην περίπτωση λοιπόν των σχολίων του Θέωνος, χρησιμοποιήθηκε ένα αντίγραφο σε ηλεκτρονική μορφή από τον λεγόμενο κώδικα Vaticanus Graecus 198. Εκεί υπάρχει και το δέκατο τρίτο βιβλίο των σχολίων του Θέωνα αλλά δεν προσφέρεται για απλή και απρόσκοπτη ανάγνωση. Ίσως και γι' αυτό να πέρασε σχετικά ανεκμετάλλευτο ως σήμερα. Υπάρχει το λεγόμενο τρέχον κείμενο, αλλά συχνά εδώ διακόπτεται η ροή με την υπόδειξη προς τον αναγνώστη «ζήτει το εξής εν τοις σχολίοις» ή «ζήτει το εξής εν τοις σχολίοις μέχρι τέλους». «Αναζήτησε τη συνέχεια στα σχόλια» ή «αναζήτησε τη συνέχεια και διάβασε εκεί το τέλος του (συγκεκριμένου) θέματος», διότι ο συγγραφέας εννοούσε πως στο ρέον κυρίως κείμενό του θα καταπιαστεί με κάτι καινούργιο.

Και όταν έχεις την υπομονή να φθάσεις ως εκεί ακολουθώντας τα υπομνηστικά σημάδια, πρέπει στη συνέχεια να αναγνωρίσεις από τα ίχνη που έχει αφήσει στο περιθώριο ο (αντι)γραφέας για ποιο από όλα τα εκεί χαοτικά τοποθετημένα σχόλια πρόκειται…) (***στο επόμενο, το "β΄ μέρος"***)

3ο θέμα."Η σωστή κατεύθυνση για την μεταρρύθμιση" (του Morris Kline)

προλεγόμενα. Με αφορμή τη συζήτηση που γίνεται φέτος, με θέμα την προκήρυξη διαγωνισμού συγγραφής σχολικών βιβλίων Μαθηματικών (από Ι.Ε.Π., του ΥΠΕΠΘ), αρκετοί συνάδελφοι ζήτησαν "μια" γνώμη της στήλης. Είναι γνωστό ότι το θέμα είναι πολυδιάστατο και καυτό… Για το λόγο αυτό επιλέξαμε ένα απόσπασμα από το κλασικό έργο του Morris Kline: *«Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης ή, η αποτυχία των μοντέρνων Μαθηματικών» [εκδ. "Βάνιας", Θεσσαλονίκη 1993] απόσπασμα από την ενότητα "Η σωστή κατεύθυνση για την μεταρρύθμιση". Το κείμενο δανειστήκαμε από το βιβλίο "ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ" του E.T. Bell από τις "Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης" (Ηράκλειο 1995)*

"Η σωστή κατεύθυνση για την μεταρρύθμιση"

«...Παραμελώντας τα κίνητρα και τις εφαρμογές οι παιδαγωγοί έβλαψαν τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι άνθρωποι αυτοί παρουσίασαν το βλαστάρι μα όχι το λουλούδι κι έτσι απέτυχαν να παρουσιάσουν την αληθινή αξία αυτών που διδάσκουν. Ζητούν από τους μαθητές να πάρουν μέρος σε μάχες, μα δεν τους λένε γιατί έχουν εμπλακεί στις μάχες αυτές….

Τη χειρότερη διδασκαλία των Μαθηματικών την κάνουν εκπαιδευτικοί που αντιμετωπίζουν το γνωστικό αντικείμενο σαν να μην είχε καμία σχέση με ο,τιδήποτε βρίσκεται έξω από τα τεχνικά του όρια. Το εξαιρετικά δυσάρεστο λοιπόν με τη διδασκαλία των παραδοσιακών ή καινούριων Μαθηματικών δεν είναι ότι οι εκπαιδευτικοί δεν ξέρουν τι διδάσκουν, μα ότι δεν ξέρουν και δεν μπορούν να δείξουν στους μαθητές γιατί τα Μαθηματικά έχουν μεγάλη σημασία.

Υπάρχουν πολλοί εκπαιδευτικοί που θεωρούν ότι τα κίνητρα και οι εφαρμογές ξεφεύγουν από το θεμιτό περιεχόμενο των Μαθηματικών που διδάσκουν. Μα η γνώση του τι κάνουν τα Μαθηματικά είναι μέρος της γνώσης των Μαθηματικών. Επιπλέον, χωρίς κίνητρα οι μαθητές δεν πρόκειται ν' αγαπήσουν τα καθαυτό Μαθηματικά και κατά συνέπεια πολύ λίγα πετυχαίνουμε, όταν αρκούμαστε να διδάσκουμε σκέτα, ξερά Μαθηματικά. Ο Πλούταρχος είπε: «Το μυαλό δεν είναι δοχείο για να το γεμίζουμε, αλλά φωτιά για να την ανάβουμε». Τα κίνητρα ανάβουν φωτιά.

Η χρήση πραγματικών προβλημάτων, και ιδίως προβλημάτων Φυσικής, δεν χρησιμεύει μόνο σαν κίνητρο για την εκμάθηση των Μαθηματικών αλλά και για να τους δώσει ένα νόημα. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν είναι μόνο οι αντίθετοι των θετικών ακεραίων ως προς την κοινή πρόσθεση, αλλά και ο αριθμός των βαθμών κάτω από το μηδέν του θερμομέτρου. Η Έλλειψη δεν είναι μόνον ένας παράξενος γεωμετρικός τόπος, αλλά και η τροχιά ενός πλανήτη ή ενός κομήτη. Οι συναρτήσεις δεν είναι μόνο σύνολα διατεταγμένων ζευγών, αλλά και σχέσεις ανάμεσα σε πραγματικές μεταβλητές όπως το ύψος και ο χρόνος πτήσης μιας μπάλας που πετάμε στον αέρα, η απόσταση ενός πλανήτη από τον Ήλιο σε διάφορες εποχές του χρόνου και ο πληθυσμός μιας χώρας με την πάροδο του χρόνου. Οι συναρτήσεις είναι νόμοι του σύμπαντος και της κοινωνίας. Οι μαθηματικές έννοιες προέκυψαν από τέτοιες φυσικές καταστάσεις ή φαινόμενα και το νόημα της καθεμιάς τους ήταν φυσικό γι΄ αυτούς που πρωτοδημιούργησαν τα Μαθηματικά. Αν αφαιρέσουμε από τις έννοιες αυτές το νόημά τους, θα κρατήσουμε τη φλούδα και θα πετάξουμε τον καρπό»

4ο θέμα: Παγκόσμια ημέρα για τον αριθμό "π"

προλεγόμενα. Είναι γνωστό ότι κάθε χρόνο η 14 Μάρτη γιορτάζεται ως παγκόσμια ημέρα για τα Μαθηματικά. Με την ευκαιρία αυτή, ο ποιητής, μαθηματικός και τακτικός συνεργάτης της στήλης, Πέτρος Σοφιανός, "ζηλεύοντας" τη δόξα του Πλάτωνα και του (συνιδρυτή της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας), Νίκου Χατζηδάκη, μας έστειλε "λογοποίηση" των παρακάτω ψηφίων του αριθμού "π".

π=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510532097494459230781640623620899862803482 53421170679821480865132823066470…

Το κείμενο με το οποίο "λογοποίησε" τα παραπάνω ψηφία είναι το επόμενο:

(α)…. αεί ο Νους ο μέγας Λογοποιεί τη σφαίρα , καθώς τον
(β)…. ορθόν λογισμόν προβάλλει , κοσμίως διευθετών συν τη ροή
(γ)…. αρμονίαν , θέαν κόσμου εν νοητού μύθω ύλη ωού τρέχουσα
(δ)…. όλω τω θαύματι ερμηνείαν ζητών . τε τηρβάζων - επιζητών
(ε)…. τύχη ο διατρέχων έρευναν, ο Λόγος ανθρωπίνη υφή
(στ)…εκφέρεται προσφέρων άμα νοήμονα φωνήν ω ! "Μέτρω
(ζ)…. χρω" δη . Ενιαύσιον θήρευμα τόξω Απόλλωνος θέση χώρω
(η)…. μετρών λογοθετεί το "γαρ". Κυνηγών ενιαυτόν ο ιερεύς μυεί
(θ)…. Γνώθι το ένα μόριον "τι;". Επιζητών επιστητώς μυστήριον
(ι)…. Γενέσεως εννοεί τα θαυμάσια. Την ύλης ιδιότητα δε μετρά
(κ)….ενώ αυτής τα φ , π μερίζει . Ταύτης αρχικώς αξιολογεί
(λ)….Αλήθειαν τω Α άλφα ευρίσκων . Ελλείψει μέτρου θέτει π
(μ)….τον τε λογισμόν του άμα . Γλώττα λογική νούς καθορεί ...

συμβάσεις. επεξηγούμε ότι:

i. οι αριθμοί που υπάρχουν στον παρακάτω πίνακα δηλώνουν το πλήθος των γραμμάτων της αντίστοιχης λέξης. π.χ. πάνω από την λέξη «*ενιαύσιον*» υπάρχει ο αριθμός "9", αφού αυτή η λέξη αποτελείται από 9 γράμματα,
ii. πάνω από τα σημεία στίξης: "τελεία", "θαυμαστικό" μπαίνει ο αριθμός "0",
iii. τα εισαγωγικά " ", « » δεν έχουν αρίθμηση,
iv. αν παρατάξουμε διαδοχικά τους αριθμούς του πίνακα, θα πάρουμε την τιμή του αριθμού "π".

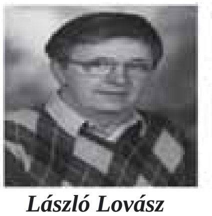
(α)	**3**	**1**	**4**	**1**	**5**	**9**	**2**	**6**	**5**	**3**
	αεί	**ο**	**Νους**	**ο**	**μέγας**	**Λογοποι εί**	**τη**	**σφαίρα,**	**καθώς**	**τον**
(β)	**5**	**8**	**9**	**7**	**9**	**3**	**2**	**3**	**-**	**-**
	ορθόν	**λογισμόν**	**προβάλλει,**	**κοσμίως**	**διευθετών**	**συν**	**τη**	**ροή**		
(γ)	**8**	**4**	**6**	**2**	**6**	**4**	**3**	**3**	**8**	
	αρμονίαν,	**θέαν**	**κόσμου**	**εν**	**νοητού**	**μύθω**	**ύλη**	**ωού**	**τρέχουσα**	
(δ)	**3**	**2**	**7**	**9**	**5**	**2**	**8**	**8**		
	όλω	**τω**	**θαύματι**	**ερμηνεία**	**ζητών**	**τε**	**τηρβάζων**	**επιζητών**		
(ε)	**4**	**1**	**9**	**7**	**1**	**5**	**9**	**3**		
	τύχη	**ο**	**διατρέχων**	**ερευναν,**	**ο**	**λόγος**	**ανθρωπίνη**	**υφή**		
(στ)	**9**	**9**	**3**	**7**	**5**	**1**	**0**	**5**		
	εκφέρεται	**προσφέρων**	**άμα**	**νοήμονα**	**φωνήν**	**ω**	**!**	**"μέτρω**		
(ζ)	**3**	**2**	**0**	**9**	**7**	**4**	**9**	**4**	**4**	
	χρω"	**δη**	**.**	**ενιαύσιον**	**θήρευμα**	**τόξω**	**Απόλλωνο ς**	**θέση**	**χώρω**	
(η)	**6**	**9**	**2**	**3**	**0**	**7**	**8**	**1**	**6**	**4**
	μετρών	**λογοθετεί**	**το**	**"γαρ"**	**.**	**κυνηγών**	**ενιαυτόν**	**ο**	**ιερεύς**	**Μυεί:**
	5	**2**	**3**	**6**	**2**	**0**	**8**	**9**	**9**	

(θ)	**Γνώθι**	**το**	**ένα**	**μόριον**	**"τι"**	**.**	**Επιζητών**	**επιστητώς**	**μυστήριον**	
(ι)	**8**	**6**	**2**	**8**	**0**	**3**	**4**	**8**	**2**	**5**
	Γενέσεως	**εννοεί**	**τα**	**θαυμάσια**	**.**	**Την**	**ύλης**	**ιδιότητα**	**δε**	**μετρά**
κ	**3**	**5**	**2**	**1**	**1**	**7**	**0**	**6**	**7**	**9**
	ενώ	**αυτής**	**τα**	**φ,**	**π**	**μερίζει**	**.**	**Ταύτης**	**αρχικώς**	**αξιολογεί**
λ	**8**	**2**	**1**	**4**	**8**	**0**	**8**	**6**	**5**	**1**
	Αλήθειαν	**τω**	**Α**	**άλφα**	**ευρίσκων**	**.**	**Ελλείψει**	**μέτρου**	**θέτει**	**π**
μ	**3**	**2**	**8**	**3**	**3**	**0**	**6**	**6**	**4**	**7**
	τον	**τε**	**λογισμόν**	**του**	**άμα**	**.**	**Γλώττα**	**λογική**	**νους**	**καθορεί**

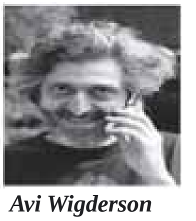
V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. *Abel Prize 2021*

Χαρούμενα νέα στους δύσκολους καιρούς: το βραβείο "Abel 2021", απονεμήθηκε στους László Lovász και Avi Wigderson, για «τις θεμελιώδεις συνεισφορές τους στη θεωρητική επιστήμη των υπολογιστών και τα διακριτά Μαθηματικά, και τον ηγετικό τους ρόλο στη διαμόρφωσή τους σε κεντρικά πεδία των σύγχρονων Μαθηματικών»



László Lovász



Avi Wigderson

2. *Νέο χαρτονόμισμα στη Μ. Βρετανία, με τον Alan Turing*

Ο Άλαν Τιούρινγκ αντικαθιστά στο χαρτονόμισμα των 50 λιρών τους Μάθιου Μπούλτον και Τζέιμς Βατ, τους «πατέρες» της ατμομηχανής.

Η Τράπεζα της Αγγλίας (ΒοΕ) παρουσίασε το νέο χαρτονόμισμα των 50 βρετανικών λιρών, όπου δεσπόζει το πρόσωπο του Άγγλου μαθηματικού Άλαν Τούρινγκ, ο οποίος συμμετείχε στην αποκρυπτογράφηση των γερμανικών μηνυμάτων κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου. «Ο Τιούρινγκ είναι πιο γνωστός για το έργο του στην αποκρυπτογράφηση, που βοήθησε να τερματιστεί ο Β΄ Παγκόσμιος Πόλεμος», επισήμανε ο διοικητής της ΒοΕ Άντριου Μπέιλι, κατά τη διάρκεια της τελετής. Γεννήθηκε το 1912 στο Λονδίνο, ο Άλαν Τούρινγκ είναι διάσημος για τη συμμετοχή του στην αποκωδικοποίηση της συσκευής Enigma, την οποία χρησιμοποιούσαν οι Γερμανοί κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου, μια ιστορία που αφηγείται η ταινία «Το παιχνίδι της μίμησης».

Διαδραμάτισε επίσης «καθοριστικό ρόλο» στην ανάπτυξη των πρώτων υπολογιστών, όταν εργάστηκε στο National Physical Laboratory και κατόπιν στο πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ.

3. Μουσική πιάνου με τη βοήθεια του…Fibonacci

Η σημαντική μαθηματικός και φίλη Ευαγγ. Λώλη, μας βεβαιώνει ότι αν "ψάξουμε" στο Google το «Fibonacci Sequence on piano», θα ακούσουμε μια υπέροχη μουσική πιάνου. Εμείς το πραγματοποιήσαμε και ανταμειφθήκαμε μουσικά.

4. Τα Μαθηματικά την εποχή της Τουρκοκρατίας

Στις 12/03/2021 έγινε στο Ηράκλειο ένα διαδικτυακό στρογγυλό τραπέζι με θέμα: "Οι επιστήμες την εποχή του νεοελληνικού Διαφωτισμού". Σ' αυτό, ένας από τους ομιλητές, ήταν ο καθηγητής Μιχάλης Λάμπρου, που ανάπτυξε το θέμα:«Τα Μαθηματικά την εποχή της Τουρκοκρατίας». Το βίντεο κρατά πάνω από 3,5 ώρες. Η εισήγηση Μ. Λάμπρου ξεκινά περίπου στο σημείο 1:46.

5. Sir Isaac Newton

Αν πληκτρολογήσετε, στο "Google", τη φράση: "Στη αναζήτηση της πρωταρχικής δύναμης", θα παρακολουθήσετε ένα video με τους προβληματισμούς που απασχόλησαν τον Νεύτωνα. Το βίντεο αυτό είναι ένα δραματοποιημένο ντοκιμαντέρ της ζωής και του έργου του Ισαάκ Νεύτωνα. Είναι παραγωγή του Ιδρύματος Ευγενίδου, σε σκηνοθεσία Πάνου Ανέστη. Στον ρόλο του Νεύτωνα ο Κωνσταντίνος Λάγκος. Παρακολουθούμε το πολιτικό σκηνικό, την φυσική φιλοσοφία, την θρησκεία, τις αντιπαλότητες του Νεύτωνα με τις άλλες προσωπικότητες της εποχής και την μάχη του για την καθιέρωση των νόμων της σύγχρονης φυσικής.

VI. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;" "Φανερότητα διαισθητική" (évindence intuitive) έχει μια πρόταση που αρμόζει να τη δεχτούμε από μόνη της σαν αληθινή. "Φανερότητα παραγωγική" (évindence déductive) αποκτά μια πρόταση ύστερα από μια απόδειξη.(από το βιβλίο: "Η Μεθοδική Λύση του Γεωμετρικού Προβλήματος", Αθήνα 1945, του G. Lemaire)

Μονοτονία και ακρότατα τριωνύμου

Ασκήσεις και προβλήματα

Δημήτρης Ντρίζος
3ο Γενικό Λύκειο Τρικάλων

Γιώργος Ρίζος
7ο Γυμνάσιο Κέρκυρας

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x)=x^2-2x-8$, $g(x)=-x^2+4x+12$

i. Να βρείτε το πρόσημό τους για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να παραστήσετε γραφικά τις f και g (την καθεμιά σε διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων Oxy).

iii. Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία τους και να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή τους.

Απάντηση:

i. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x-8$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=36>0$, άρα έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_1=-2$, $x_2=4$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

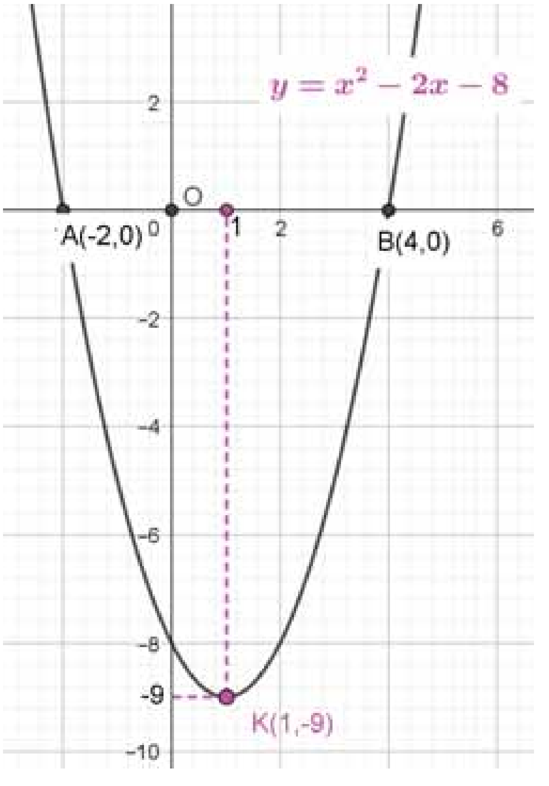
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	—	0	+	

Η συνάρτηση $g(x)=-x^2+4x+12$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=64>0$, άρα έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_1=-2$, $x_2=6$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $g(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$-x^2+4x+12$		—	0	+	0	—	

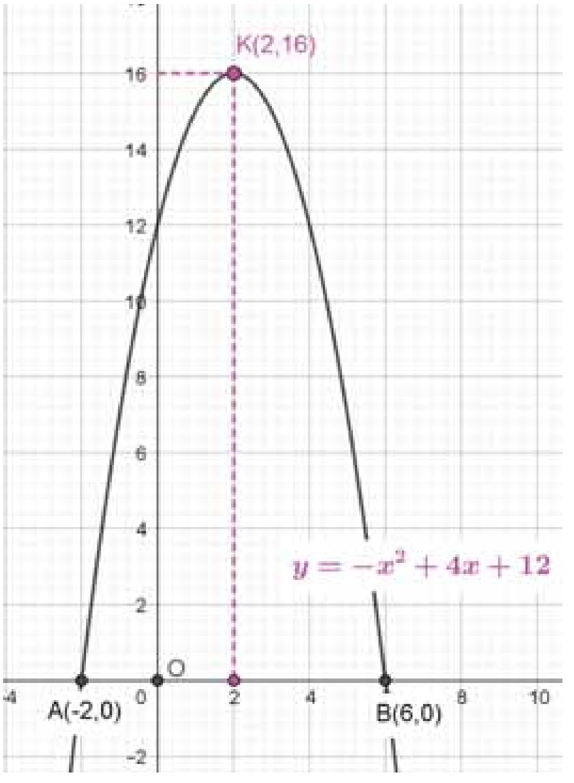
ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x-8$ είναι η παραβολή C_f του παρακάτω σχήματος με κορυφή το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha},f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)\right)$, δηλαδή το $K(1,-9)$.



Η παραβολή C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-2,0)$ και $B(4,0)$, όπου οι τετμημένες τους -2 και 4 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^2+4x+12$ είναι η παραβολή C_g του παρακάτω σχήματος με κορυφή το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha},f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)\right)$, δηλαδή το $K(2,16)$.

Η παραβολή C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-2,0)$ και $B(6,0)$, όπου οι τετμημένες τους -2 και 6 είναι οι ρίζες εξίσωσης $g(x)=0$.



iii.

x	$-\infty$ $\qquad \frac{-\beta}{2\alpha}=1 \qquad$ $+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ $\alpha > 0$	↘ $f(1) = -9$ ↗

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 8$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το $f(1) = -9$.

x	$-\infty$ $\qquad \frac{-\beta}{2\alpha}=2 \qquad$ $+\infty$
$g(x) = -x^2 + 4x + 12$ $\alpha < 0$	↗ $g(2) = 16$ ↘

Η συνάρτηση $g(x) = -x^2 + 4x + 12$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 2$, το $g(2) = 16$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \ \alpha \neq 0$$

η οποία για x = 4 παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με –9.

Αν η γραφική παράσταση C_f, της f, διέρχεται από το σημείο Α(2, –5), τότε

i. να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 8x + 7$

ii. να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από τον άξονα συμμετρίας της C_f

iii. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απάντηση:

i. Το σημείο $A(2,-5)$ ανήκει στην C_f, επομένως είναι

$$f(2) = -5 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = -5 \ , \ (1)$$

Η συνάρτηση f στο $x = 4$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με -9, επομένως είναι

$$\alpha > 0 \ , \ \frac{-\beta}{2\alpha} = 4 \quad \text{και} \quad f(4) = -9$$

- $\frac{-\beta}{2\alpha} = 4 \Leftrightarrow \beta = -8\alpha$, (2)
- $f(4) = -9 \Leftrightarrow 16\alpha + 4\beta + \gamma = -9$, (3)

Αφαιρώντας την εξίσωση (1) κατά μέλη από την (3) βρίσκουμε $12\alpha + 2\beta = -4$, (4)

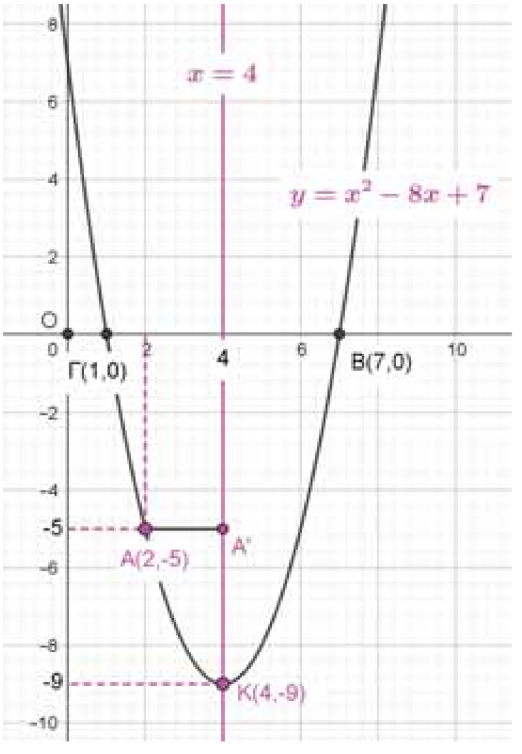
Από το σύστημα των (2) και (4) βρίσκουμε $\alpha = 1$ (δεκτή τιμή, καθώς $\alpha > 0$) και $\beta = -8$. Τέλος, με $\alpha = 1$ και $\beta = -8$ από την (1) βρίσκουμε $\gamma = 7$. Οπότε, $f(x) = x^2 - 8x + 7$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 8x + 7$ είναι η παραβολή C_f του παρακάτω σχήματος, με κορυφή το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)\right)$, δηλαδή το $K(4,-9)$.

Η παραβολή C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\Gamma(1,0)$ και $\Delta(7,0)$, όπου οι τετμημένες τους 1 και 7 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η παραβολή C_f έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, δηλαδή την $x = 4$. Η απόσταση του σημείου $A(2,-5)$

από την ευθεία $x=4$ είναι:

$$(AA')=|x_A-x_{A'}|=|2-4|=|-2|=2$$



iii.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}=4$	$+\infty$
$f(x)=x^2-8x+7$ $\alpha>0$	↘	$f(4)=-9$	↗

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-8x+7$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,4]$, γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=4$, το $f(4)=-9$.

Σχόλιο: Οι συντεταγμένες (τετμημένη, τεταγμένη) της κορυφής της παραβολής, C_f, μας δίνουν αντίστοιχα τη θέση και την τιμή του ελαχίστου της συνάρτησης f.

3. Δείξτε ότι το τριώνυμο $x^2 + 8x + 18$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$(x + \alpha)^2 + \beta.$$

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του παραπάνω μετασχηματισμού (ή και με άλλη μέθοδο) να βρείτε την ελάχιστη τιμή (ελάχιστο) της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 + 8x + 18$$

Απάντηση:

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου μετασχηματίζουμε το τριώνυμο $x^2 + 8x + 18$.

Είναι $x^2 + 8x + 18 = (x^2 + 2\cdot 4x + 16) + 2$
$= (x + 4)^2 + 2$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$(x + 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + 2 \geq 2.$$

Άρα $f(x) = x^2 + 8x + 18 = (x + 4)^2 + 2 \geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x = -4$ είναι

$$f(-4) = (-4 + 4)^2 + 2 = 2$$

Επομένως η f στο $x = -4$ παρουσιάζει ελάχιστο, το $f(-4) = 2$.

2η λύση:

Η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 + 8x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο (αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός) στο σημείο της με τετμημένη:

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{8}{2}=-4.$$

Η ελάχιστη τιμή είναι

$$f(-4)=(-4)^2+8\cdot(-4)+18$$
$$=16-32+18=2$$

4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+9}$, καθώς το x μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$. Για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της (μέγιστο);

Απάντηση:

Επειδή $x^2-2x+9=(x-1)^2+8$ προκύπτει

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2+8},\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι: $(x-1)^2+8\geq 8$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2+8}\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow f(x)\leq\frac{1}{8}=f(1)$$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$, το $f(1)=\dfrac{1}{8}$.

5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της

συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}, x\in\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της (ελάχιστο);

Απάντηση:
Είναι

$$f(x)=\frac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}=\frac{(x^2+8x+20)-4}{x^2+8x+20}$$
$$=1-\frac{4}{x^2+8x+20}=1-\frac{4}{(x+4)^2+4}$$

Άρα $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}=1-\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$, (1)

Από την ισότητα (1) γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν το κλάσμα $\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$ γίνεται μέγιστο, και αυτό συμβαίνει όταν γίνεται ελάχιστος ο παρονομαστής $(x+4)^2+4$, δηλαδή όταν $x=-4$.
Τελικά, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=-4$, το $f(-4)=1-\dfrac{4}{(-4+4)^2+4}=0$

6. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}, x\in\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της (μέγιστο);

Απάντηση:
Είναι

$$f(x)=\frac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}=\frac{2(x^2-4x+7)+3}{x^2-4x+7}$$
$$=2+\frac{3}{x^2-4x+7}=2+\frac{3}{(x-2)^2+3}$$

Άρα $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}=2+\dfrac{3}{(x-2)^2+3}$, (1)

Από την ισότητα (1) γίνεται φανερό ότι η $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν κλάσμα $\dfrac{3}{(x-2)^2+3}$ γίνεται μέγιστο, και αυτό συμβαίνει όταν γίνεται ελάχιστος ο παρονομαστής $(x-2)^2+3$, δηλαδή όταν $x=2$.
Τελικά, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=2$, το $f(2)=2+\dfrac{3}{(2-2)^2+3}=3$.

7. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=|x^2+x+4|-5x+6$.
Για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της (ελάχιστο);

Απάντηση:
Βρίσκουμε ότι το τριώνυμο x^2+x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=-15<0$ και, καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, θα ισχύει $x^2+x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα $|x^2+x+4|=x^2+x+4$, οπότε

$$f(x)=x^2-4x+10 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $f(x)=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$ και καθώς $(x-2)^2+6\geq 6\Leftrightarrow f(x)\geq 6=f(2)$, προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=2$, το $f(2)=6$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2+2\alpha x+16$$
$$\text{και } g(x)=\sqrt{f(x)},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

i. Να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
iii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις δύο συναρτήσεις που προκύπτουν από την f για α = –4 και για α = 4. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε και αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

Απάντηση:
i. Είναι $\Delta=(2\alpha)^2-4\cdot 16$
$$=4\alpha^2-4\cdot 16=4(\alpha-4)(\alpha+4)$$

Πίνακας προσήμου της διακρίνουσας Δ

α	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$\Delta = 4(\alpha - 4)(\alpha + 4)$		+	0	−	0	+	

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$x^2 + 2\alpha x + 16 \geq 0$$

- Βρίσκουμε πρώτα τα α για τα οποία ισχύει

$$x^2 + 2\alpha x + 16 > 0$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, το τριώνυμο $x^2 + 2\alpha x + 16$ γίνεται θετικό, δηλαδή γίνεται ομόσημο του συντελεστή του x^2, αν και μόνον αν η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι αρνητική. Και αυτό, σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της διακρίνουσας Δ, συμβαίνει όταν $\alpha \in (-4, 4)$.

- Βρίσκουμε τώρα και τα α για τα οποία ισχύει $x^2 + 2\alpha x + 16 = 0$.

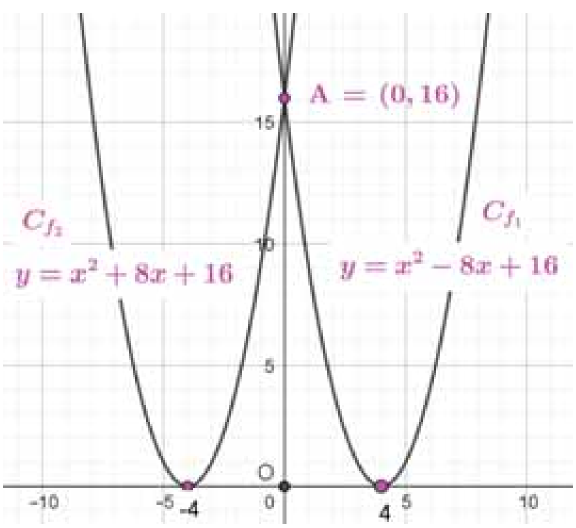
Στον πίνακα προσήμου της διακρίνουσας Δ βλέπουμε ότι έχουμε $\Delta = 0$ όταν $\alpha = -4$ και $\alpha = 4$.

Με $\alpha = -4$ το τριώνυμο $x^2 + 2\alpha x + 16$ γίνεται $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0$.

Με $\alpha = 4$ το τριώνυμο $x^2 + 2\alpha x + 16$ γίνεται $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2 \geq 0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ όταν $\alpha \in [-4, 4]$.

iii.



Έστω f_1 και f_2 οι συναρτήσεις που προκύπτουν από την f με $\alpha = -4$ και $\alpha = 4$ αντίστοιχα. Τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f_1(x) = f_2(x)$.

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 8x + 16$$
$$\Leftrightarrow 16x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Με $x = 0$ βρίσκουμε $f_1(0) = f_2(0) = 16$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f_1 και f_2 έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $(0,16)$, που ανήκει στον άξονα $y'y$.

9. Στους μαθητές μιας τάξης δόθηκε η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$, με $x \in (-2,4)$, και τους ζητήθηκε να βρουν το σύνολο των τιμών της, δηλαδή το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τιμές f(x) για κάθε $x \in (-2,4)$.

Ένας μαθητής έγραψε:

***Έστω* $f(x) = x^2 - 2$ *με* $x \in (-2,4)$.**

Έχουμε διαδοχικά:

$$-2 < x < 4 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 16$$
$$\Leftrightarrow 2 < x^2 - 2 < 14$$
$$\Leftrightarrow 2 < f(x) < 14$$

***Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα* (2, 14).**

Όμως, π.χ. για x = –1, που ανήκει στο (–2, 4), η τιμή f(–1) = –1 δεν ανήκει στο “σύνολο τιμών” που βρήκε ο μαθητής.

i. Σε ποιο σημείο ο μαθητής έκανε λάθος;

ii. Να βρείτε (σωστά) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να παραστήσετε γραφικά την f.

Απάντηση:

i. Το λάθος βρίσκεται στην πρώτη ισοδυναμία, όπου υψώθηκαν στο τετράγωνο τα μέλη της ανίσωσης, ενώ αυτά δεν είναι θετικά.

ii. Παίρνοντας χωριστά τις περιπτώσεις x < 0 και x ≥ 0, έχουμε διαδοχικά:

$$-2 < x < 0 \underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 2 > -x > 0 \Leftrightarrow 4 > (-x)^2 > 0$$
$$\underset{-2}{\Leftrightarrow} 2 > x^2 - 2 > -2$$

Άρα, αν $x \in (-2, 0)$, τότε $-2 < f(x) < 2$

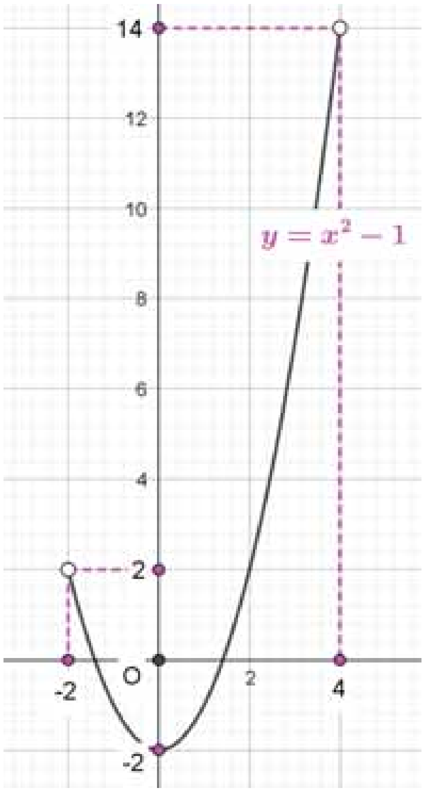
Με τον ίδιο τρόπο:

$$0 \le x < 4 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 < 16$$
$$\Leftrightarrow\; -2 \le x^2 - 2 < 14$$

Άρα, αν $x \in [0, 4)$, τότε $-2 \le f(x) < 14$.

Οπότε, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[-2, 14)$.

iii. Η γραφική παράσταση της f , $x \in (-2,4)$, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

10. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με μεταβλητές διαστάσεις ΑΒ = x και ΒΓ = y σε cm. Αν η περίμετρος του ΑΒΓΔ διατηρείται σταθερή, ίση με 60 cm, τότε

i. να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο

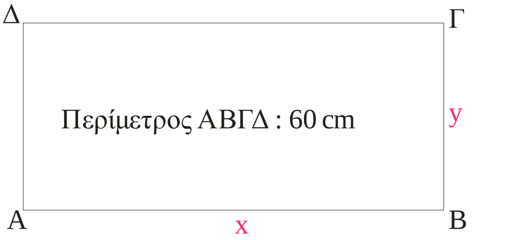
$$\mathbf{E(x) = -x^2 + 30x,\ x \in (0,30)}$$

ii. να βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση Ε παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

iii να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση Ε.

Απάντηση:

i. Προφανώς είναι $x > 0$ και $y > 0$. Αν ονομάσουμε Π την περίμετρο και Ε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, τότε $\Pi = 2x + 2y$ και $E = xy$



Είναι $\Pi = 60 \Leftrightarrow 2x + 2y = 60$
$$\Leftrightarrow x + y = 30 \Leftrightarrow y = 30 - x,\ (1)$$

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 30 - x \end{array}\right\} \Rightarrow 30 - x > 0 \Rightarrow x < 30$

και επειδή είναι $x > 0$, προκύπτει $0 < x < 30$, δηλαδή $x \in (0,30)$. Είναι:

$$E = xy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E = x \cdot (30 - x) \Leftrightarrow E = -x^2 + 30x$$

Δηλαδή, $E(x) = -x^2 + 30x$, $x \in (0,30)$

ii. Η συνάρτηση $E(x) = -x^2 + 30x$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -1$, $\beta = 30$ και $\gamma = 0$.

Επειδή $\alpha < 0$ η συνάρτηση Ε για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, δηλαδή για $x = \dfrac{-30}{2 \cdot (-1)} = 15$ cm παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με

$$E\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = E(15) = -15^2 + 30 \cdot 15$$
$$= -225 + 450 = 225\ \text{cm}^2$$

2^ος^ τρόπος απάντησης του (ii)

$$E(x) = -x^2 + 30x = -\left(x^2 - 30x\right)$$
$$= -\left(x^2 - 2 \cdot 15x + 15^2 - 15^2\right)$$
$$= -\left[(x - 15)^2 - 225\right]$$

Δηλαδή, $E(x) = -(x - 15)^2 + 225$

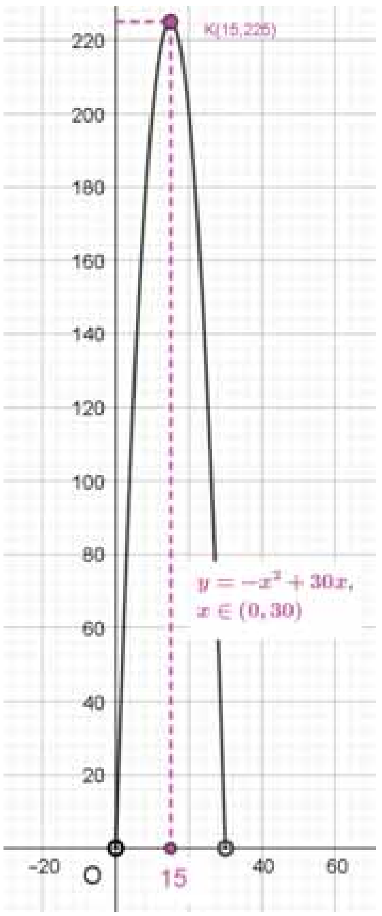
Έχουμε

$$-(x - 15)^2 \le 0 \Leftrightarrow -(x - 15)^2 + 225 \le 225$$
$$\Leftrightarrow E(x) \le 225$$

Δηλαδή ισχύει $E(x) \le 225 = E(15)$ για κάθε $x \in (0,30)$.

Επομένως, η συνάρτηση Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x = 15$ cm, το $E(15) = 225\ \text{cm}^2$.

iii.



11. **Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σπιτάκι στον κήπο για το σκύλο μας. Η ξυλεία κοστίζει 15 ευρώ για κάθε μέτρο μήκους της περιμέτρου. Πληρώνουμε 90 ευρώ για ένα σπιτάκι με πάτωμα σχήματος ορθογωνίου (δίχως να υπολογίσουμε τη σκεπή, την πόρτα και τα παράθυρα). Κάνοντας μερικούς υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι, αν αλλάζαμε τις διαστάσεις του πατώματος, θα μπορούσαμε να φτιάξουμε ένα μεγαλύτερο σπιτάκι με τα ίδια χρήματα. Τι σχήμα θα είχε τότε το πάτωμα στο σπιτάκι και ποιες θα ήταν οι νέες διαστάσεις του;**

Απάντηση:

Διαιρούμε τα 90 € που πληρώσαμε προς το κόστος κάθε m, που είναι 15 €, και βρίσκουμε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 6 m. Ονομάζουμε x και y τις διαστάσεις του.

Οπότε

$$2x + 2y = 6 \Leftrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x,$$

με $0 < x, y < 3$.

Το εμβαδόν, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = x(3 - x) = -x^2 + 3x, \quad 0 < x < 3.$$

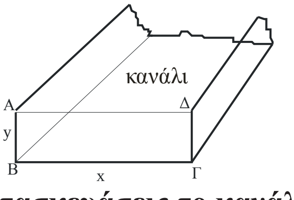
Η συνάρτηση Ε είναι 2^{ου} βαθμού με συντελεστή του x^2 αρνητικό, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$

Το μέγιστο της συνάρτησης Ε είναι ίσο με:

$$E\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

Επομένως, το σπιτάκι με μέγιστο εμβαδόν $2,25\ m^2$ έχει πάτωμα σχήματος τετραγώνου με πλευρά 1,5 m.

12. **Η δουλειά του Γιώργου είναι να παίρνει ένα ορθογώνιο μεταλλικό φύλλο πλάτους 20 cm και να λυγίζει τις άκρες του, ώστε να σχηματίζει ένα κανάλι (λούκι), μέσα από το οποίο θα τρέχει νερό για πότισμα. Οι λυγισμένες άκρες του καναλιού πρέπει να είναι κάθετες πάνω στο υπόλοιπο μεταλλικό φύλλο.**



«Να κατασκευάσεις το κανάλι, ώστε να μεταφέρει όσο το δυνατό περισσότερο νερό», του είπαν. Πως μπορεί να το κάνει αυτό;

Απάντηση:

Το κανάλι θα μεταφέρει όσο το δυνατό περισσότερο νερό, όταν μία κάθετη τομή του καναλιού ΑΒΓΔ, που είναι ορθογώνιο, έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

Είναι ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ = 20 cm, άρα

$$2y + x = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20 - x}{2},$$

με $0 < x < 20$ και $0 < y < 10$.

Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι

$$E(x) = x\cdot\frac{20-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 10x \text{ , με } 0 < x < 20$$

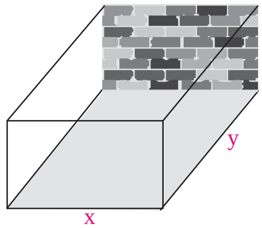
Επειδή $\alpha < 0$, η συνάρτηση Ε για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$,

δηλαδή για $x = -\dfrac{10}{-2\cdot\frac{1}{2}} = 10$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με

$$E(10) = -\frac{1}{2}10^2 + 10\cdot 10 = -50 + 100 = 50$$

Επομένως, περισσότερο νερό μεταφέρεται όταν είναι x = 10 cm και y = 5 cm.

13. Κάποιος θέλει να περιφράξει μια επιφάνεια σχήματος ορθογωνίου για να φτιάξει ένα φυτώριο. Διαθέτει υλικά περίφραξης για (περίμετρο) 10 m. Το φυτώριο έχει στη μία πλευρά του έναν τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η μεγαλύτερη επιφάνεια που μπορεί να περιφράξει με τα υλικά που διαθέτει;



Απάντηση:

Αν x και y είναι οι διαστάσεις της βάσης του φυτωρίου, τότε

$$x + 2y = 10, \text{ με } 0 < x < 10,\ 0 < y < 5.$$

Το εμβαδόν της βάσης δίνεται από τον τύπο Ε = x·y. Είναι $x + 2y = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 2y$.

Αντικαθιστώντας στον τύπο του εμβαδού Ε, βρίσκουμε

$$E(y) = (10-2y)y = -2y^2 + 10y, \quad y \in (0,5)$$

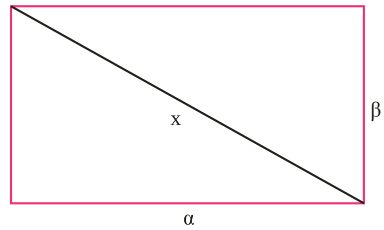
Επειδή $\alpha < 0$, η συνάρτηση Ε για $y = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$,

δηλαδή για $y = -\dfrac{10}{2\cdot(-2)} = \dfrac{5}{2}$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που ισούται με

$$E\left(\frac{5}{2}\right) = -2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 10\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Άρα, η μεγαλύτερη επιφάνεια που μπορεί να περιφράξει είναι ορθογώνιο με μήκος 5m και πλάτος 2,5 m, που έχει εμβαδόν 12,5 m^2.

14. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 100 και η διαγώνιός του έχει μήκος x. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου, ως συνάρτηση του x.



American Mathematics Contest 2002

Να προσδιορίσετε το μέγιστο της συνάρτησης Ε.

Απάντηση:

Αν α, β είναι οι πλευρές του ορθογωνίου, τότε α + β = 50. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε = αβ. Θα εκφράσουμε το Ε ως συνάρτηση του x. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = x^2$$

Είναι $(\alpha+\beta)^2 = 50^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2.500$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2.500 - (\alpha^2 + \beta^2) = 2.500 - x^2.$$

Άρα, $\alpha\beta = 1.250 - \dfrac{x^2}{2}$

Θα βρούμε το (ευρύτερο) σύνολο από το οποίο μπορεί να παίρνει τιμές η μεταβλητή x.
Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:
$0 < x < \alpha + \beta \Leftrightarrow 0 < x < 50$, δηλαδή $x \in (0, 50)$.
Επίσης, αφού το x είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με άθροισμα κάθετων πλευρών 50, έχουμε

$$x^2 = \alpha^2 + (50-\alpha)^2 = 2\alpha^2 - 100\alpha + 2.500$$
$$= 2(\alpha^2 - 50\alpha + 625) + 1.250$$
$$= 2(\alpha - 25)^2 + 1.250 \geq 1.250$$

Οπότε, για α = 25, το x^2 παίρνει την ελάχιστη τιμή του, που ισούται με 1.250. Επομένως, η ελάχιστη τιμή του x είναι

$$x_{min} = \sqrt{1.250} = \sqrt{625\cdot 2} = 25\sqrt{2}$$

Έτσι, η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$$E(x) = -\frac{x^2}{2} + 1.250, \quad x \in \left[25\sqrt{2}, 50\right)$$

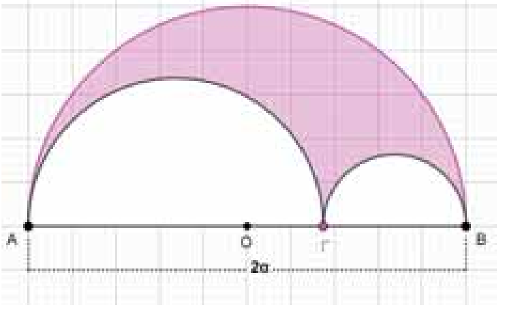
που παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 25\sqrt{2}$, το

$$E\left(25\sqrt{2}\right) = 1250 - 625 = 625$$

Τότε το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

ΣΧΟΛΙΟ: Αν χρησιμοποιούσαμε τη γνωστή πρόταση: **«Από όλα τα ορθογώνια που έχουν σταθερή περίμετρο, το μέγιστο εμβαδόν το έχει το τετράγωνο»**, θα οδηγούμασταν πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα.

15. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ μήκους 2α. Επάνω στην ΑΒ να βρείτε σημείο Γ τέτοιο ώστε, αν κατασκευάσουμε μέσα στο ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ και ΒΓ, η επιφάνεια που περιέχεται μεταξύ αυτών των δύο ημικυκλίων να είναι ισοδύναμη με την επιφάνεια κυκλικού δίσκου ακτίνας $\frac{\alpha}{2}$.



Απάντηση:

Έστω ΑΓ = x, οπότε ΒΓ = 2α – x, με 0 < x < 2α

Τότε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ είναι

$$E_1 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2\alpha}{2}\right)^2 = \pi\alpha^2$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΓ είναι

$$E_2 = \pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$$

και το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΒΓ είναι

$$E_3 = \pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2\alpha - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi(2\alpha - x)^2}{4}$$

Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ των ημικυκλίων διαμέτρων ΑΓ και ΒΓ είναι

$$E = E_1 - E_2 - E_3 = \pi\alpha^2 - \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi(2\alpha - x)^2}{4}$$

$$= \frac{\pi\left(4\alpha^2 - x^2 - (2\alpha - x)^2\right)}{4}$$

$$= \frac{\pi\left(\cancel{4\alpha^2} - x^2 \cancel{-4\alpha^2} + 4\alpha x - x^2\right)}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(-2x^2 + 4\alpha x\right)$$

Ο κυκλικός δίσκος ακτίνας $\frac{\alpha}{2}$ έχει εμβαδόν

$$E' = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\alpha^2$$

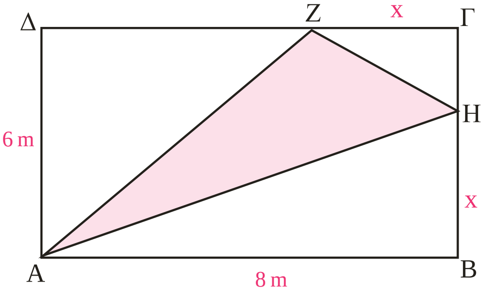
Οπότε, $E = E' \Leftrightarrow \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}}\cdot\left(-2x^2 + 4\alpha x\right) = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}}\cdot\alpha^2$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4\alpha x - \alpha^2 = 0$$

που έχει δύο δεκτές ρίζες

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\alpha \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\alpha$$

16. Από ένα ύφασμα σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 6×8 m θέλουμε να κόψουμε ένα τρίγωνο κομμάτι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για να φτιάξουμε το πανί ενός σκάφους.



i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του πανιού που θα κόψουμε, δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 24$, $0 \le x \le 6$ σε μέτρα, όπου x = (ΗΒ) = (ΖΓ).

ii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση Ε.

iii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης Ε, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο του εμβαδού του πανιού.

iv. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το πανί να έχει σχήμα ισοσκελούς τριγώνου.

Διασκευή από άσκηση εξετάσεων σχολείων Σκωτίας

Απάντηση:

i. Το εμβαδόν του ΑΖΗ δίνεται από την ισότητα:

(ΑΖΗ) = (ΑΒΓΔ) – (ΑΒΗ) – (ΖΗΓ) – (ΑΔΖ), (1)

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό

$$(ΑΒΓΔ) = 6{\cdot}8 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2$$

Τα τρίγωνα ΑΒΗ, ΖΗΓ και ΑΔΖ είναι ορθογώνια με εμβαδά αντίστοιχα:

$$(ΑΒΗ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒ)\cdot(ΒΗ) = \frac{1}{2}\cdot 8x = 4x$$

$$(ΖΗΓ) = \frac{1}{2}\cdot(ΗΓ)\cdot(ΖΓ) = \frac{1}{2}(6-x)\cdot x = \frac{-x^2+6x}{2}$$

$$(ΑΔΖ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΔ)\cdot(ΔΖ) = \frac{1}{2}\cdot 6(8-x) = 24-3x,$$

με $0 \le x \le 6$.

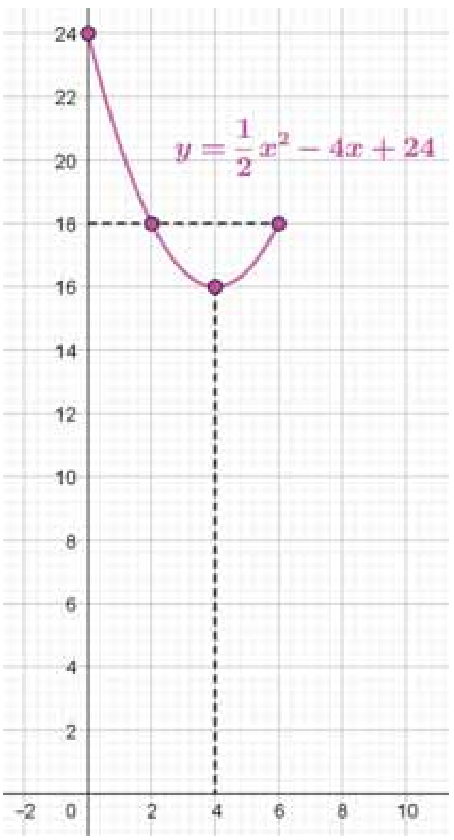
Με αντικατάσταση στην (1), υπολογίζουμε το εμβαδόν του ΑΖΗ, ως συνάρτηση του x:

$$(ΑΖΗ) = E(x) = 48 - 4x - \frac{-x^2+6x}{2} - (24-3x)$$

$$= 48 - 4x + \frac{1}{2}x^2 \cancel{-3x} - 24 \cancel{+3x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 24, \quad x \in [0,6]$$

ii.



Σχεδιάσαμε την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 24$, $x \in [0,6]$, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών:

x	0	2	4	6
y	24	18	16	18

iii. Καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 24$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2\cdot\frac{1}{2}} = 4$, το οποίο είναι

$$E(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4 + 24 = 16.$$

Άρα, το ελάχιστο του εμβαδού του πανιού ισούται με 16 m^2, και αυτό επιτυγχάνεται όταν το Ζ συμπέσει με το μέσο του ΔΓ (και το ΒΗ γίνει ίσο με 4 m). Το μέγιστο του εμβαδού του πανιού ισούται με 24 m^2, και αυτό επιτυγχάνεται όταν το Η συμπέσει με το Β (και το Ζ με το Γ).

iv. Το πανί θα έχει σχήμα ισοσκελούς τριγώνου όταν (ΑΗ) = (ΑΖ).

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΒ και ΑΖΔ αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$(ΑΗ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΗ)^2 = 64 + x^2$$

και $(ΑΖ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΖ)^2 = 36 + (8 - x)^2$.

Οπότε

$$(ΑΗ) = (ΑΖ) \Leftrightarrow \sqrt{64 + x^2} = \sqrt{36 + (8-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{64} + \cancel{x^2} = 36 + \cancel{64} - 16x + \cancel{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 16x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \text{ m}$$

Διόρθωση μιας αβλεψίας

Στο τεύχος 119, σ. 20, 2^η στήλη, αράδα 1 «Έστω $\rho_1 > \rho_2$» να γραφεί «Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης.»

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Niven Ivan, *Maxima and Minima without Calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, No. 6, The Mathematical Association of America, 1981

[2] Saul Mark & Andreescu Titu, *Συμπληρώνοντας το τετράγωνο*, Quantum, Ελληνική έκδοση, τόμος 6ος, τεύχος 1ο, Ιανουάριος - Φεβρουάριος 1999, σελ. 41-43, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[3] Διεθνείς μαθηματικοί διαγωνισμοί.

Τάξη: Α΄

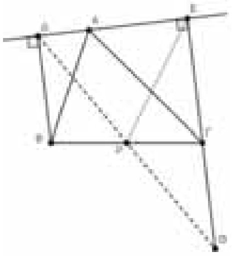
Ασκήσεις Ευκλείδιας Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης

Ασκηση 1η. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τυχαία ευθεία (ε) από την κορυφή Α. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε $ΒΔ \perp (\varepsilon)$ και $ΓΕ \perp (\varepsilon)$. Αν το σημείο Ρ είναι το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΡΔΕ$ είναι ισοσκελές.

Λυση. 1ος τρόπος: Σκέψη: Αφού η γωνία $Δ\hat{Ε}Γ = 90^o$ μπορούμε να εκμεταλευτούμε ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση: Προεκτείνουμε την $ΔΡ$ η οποία τέμνει την προέκταση του $ΓΕ$ στο σημείο $Θ$.



Τα τρίγωνα $ΒΔΡ$ και $ΘΓΡ$ είναι ίσα (γιατί;) οπότε $ΔΡ = ΡΘ$, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΘ$ η $ΕΡ$ είναι διάμεσος οπότε $ΕΡ = ΡΔ$.

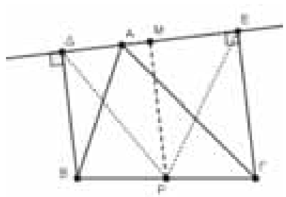
Άρα $ΡΔΕ$ ισοσκελές.

2ος τρόπος: Σκέψη: Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι τραπέζιο και το σημείο Ρ είναι το μέσο της ΒΓ, άρα θα εκμεταλευτούμε την διάμεσο του τραπεζίου.

Λύση: Έχουμε ότι:

Αν Μ είναι το μέσο της $ΔΕ$ τότε η $ΡΜ$ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε

$$ΡΜ // ΒΔ // ΓΕ \text{ και } ΡΜ \perp ΔΕ.$$



Άρα στο τρίγωνο $ΡΔΕ$ η $ΡΜ$ είναι διάμεσος και ύψος, συνεπώς το $ΡΔΕ$ είναι ισοσκελές.

Ασκηση 2η. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίσοιχα ώστε $Ε\hat{Δ}Ζ = 90^o$. Αν Η είναι το συμμετρικό του $Ζ$ ως προς το Δ και φέρουμε $ΒΜ // = ΕΖ$ να δείξετε ότι $ΜΔ \perp ΒΓ$.

Λυση.

Σκέψη: Αφού το Δ είναι το μέσο της $ΒΓ$ αρκεί να δείξουμε ότι η $ΜΔ$ είναι μεσοκάθετος της $ΒΓ$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $ΜΒ = ΜΓ$.

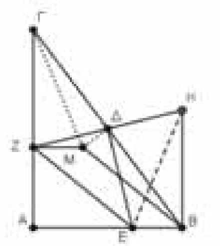
Λύση: Έχουμε:

Αφού $ΔΕ \perp ΖΔ$ και Δ μέσο της $ΖΗ$ έχουμε ότι το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε $ΕΖ = ΕΗ$ και προκύπτει ότι $ΕΖ = ΕΗ = ΒΜ$.

Τα τρίγωνα $ΓΖΔ$ και $ΒΔΗ$ είναι ίσα (γιατί;), οπότε προκύπτει ότι $ΒΗ = ΓΖ$.

Το τετράπλευρο $ΖΜΒΕ$ είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο, συνεπώς $ΕΒ // = ΖΜ$.

Αρα τελικά προκύπτει ότι $ΜΓ = ΕΗ$ (γιατί;).



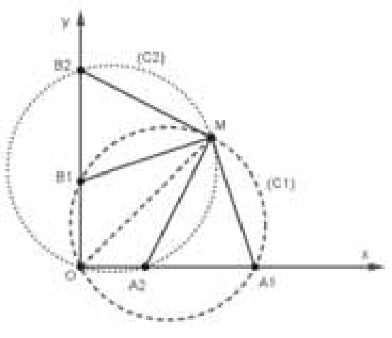
Συνεπώς $ΜΓ = ΜΒ$ και αφού το Δ είναι το μέσο της $ΒΓ$ έχουμε ότι η $ΜΔ \perp ΒΓ$.

Ασκηση 3η. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ στο εσωτερικό της που ισαπέχει από τις πλευρές της. Δύο μεταβλητοί κύκλοι (C_1), (C_2) τέμνουν την πλευρά Ox στα σημεία A_2, A_1 και την πλευρά Oy στα σημεία B_2, B_1 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $A_1A_2 = B_1B_2$

Λύση. Σκέψη: Θέλουμε να αποδείξουμε ισότητα δύο ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε αρκεί να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα που έχουν πλευρές αντίστοιχα τα δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $M\hat{A}_1A_2, M\hat{B}_1B_2$ είναι ίσα.

Λύση: Έχουμε ότι: Αφού το σημείο Μ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$, άρα ανήκει στην διχοτόμο της γωνίας, άρα η OM είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

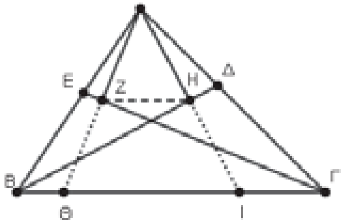


Οπότε στον κύκλο (C_1) έχουμε $\overset{\frown}{MB_2} = \overset{\frown}{MA_2}$ άρα οι χορδές $MB_2 = MA_2$ και αντίστοιχα στον κύκλο (C_2) έχουμε $\overset{\frown}{MB_1} = \overset{\frown}{MA_1}$ οπότε οι χορδές $MB_1 = MA_1$. Επιπλέον έχουμε ότι οι γωνίες $M\hat{B}_2B_1 = M\hat{A}_2A_1$ και $M\hat{B}_1B_2 = M\hat{A}_1A_2$ (μπορείτε να αποδείξετε γιατί;).

Συνεπώς τα τρίγωνα $M\overset{\triangle}{A_1}A_2 = M\overset{\triangle}{B_1}B_2$, οπότε $A_1A_2 = B_1B_2$.

Ασκηση 4η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Από την κορυφή Α φέρνουμε $AZ \perp \Gamma E$ και $AH \perp B\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι τραπέζιο.

Λύση. Σκέψη: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το ΒΖΗΓ είναι τραπέζιο, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $ZH//B\Gamma$. Θα εκμεταλευτούμε τις κάθετες που φέραμε στις διχοτόμους.



Λύση: Προεκτείνουμε τις ΑΖ και ΑΗ που τέμνουν την ΒΓ στα σημεία Θ και Ι αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΑΒΙ είναι ισοσκελή γιατί η διχοτόμος τους είναι και ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Δηλαδή τα σημεία Ζ και Η είναι τα μέσα των ΑΘ και ΑΙ αντίστοιχα. Άρα στο τρίγωνο ΑΘΙ έχουμε ότι $ZH//\Theta I$ δηλαδή $ZH//B\Gamma$ οπότε το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι τραπέζιο.

Βιβλιογραφία:

Γεωργιακάκης Μ & Π: Γεωμετρία Α'
1000 Μεθοδικά θέματα λυμένα [Αθήνα 1977].

Έφυγε από κοντά μας

† Δημήτρης Κοντογιάννης

Ιδιαίτερη θλίψη προκάλεσε στη μαθηματική οικογένεια η είδηση του θανάτου, στις 25 Απριλίου 2021, του **εκλεκτού συναδέλφου** Δημήτρη Κοντογιάννη, ο οποίος είχε προσφέρει σημαντικό έργο στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Ο Δημήτρης Κοντογιάννης γεννήθηκε στο χωριό Παναρίτι του Δήμου Ξυλοκάστρου το 1940. Ήταν το μόνο παιδί μιας αγροτικής οικογένειας. Πέρασε τα παιδικά του χρόνια στο χωριό, σε μια δύσκολη και ταραγμένη εποχή. Κουβαλούσε σε όλη του την ζωή μνήμες από την Κατοχή και τον Εμφύλιο. Έδειξε από πολύ νωρίς τη κλίση του στα γράμματα.

Στο Γυμνάσιο, η οικογένεια του εγκαταστάθηκε στην Κόρινθο και τα δύο πρώτα χρόνια δυσκολεύθηκε αρκετά, οι αποτυχίες τον πείσμωναν και σύντομα μεταμορφώθηκε σαν μαθητής, ανακαλύπτοντας το ταλέντο του στα Μαθηματικά. Περνούσε όλο τον χρόνο του λύνοντας **ασκήσεις**.

Στην αρχή της δεκαετίας του 60 έζησε για δύο χρόνια στην πόλη του Γκρατζ στην Αυστρία, ως φοιτητής της εκεί Πολυτεχνικής Σχολής, οικονομικοί λόγοι όμως τον ανάγκασαν να επιστρέψει στην Ελλάδα. Στη Μαθηματική Σχολή του Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης εισήχθη το 1965. Από τότε **αφιερώθηκε** εξολοκλήρου στα Μαθηματικά. Οι σπουδές του δεν ήταν καθόλου εύκολες όμως, αφού από το πρώτο έτος έπρεπε να παραδίδει μαθήματα για να επιβιώσει. Στα Μαθηματικά ήταν ουσιαστικά αυτοδίδακτος, αφού όπως έλεγε ο ίδιος, δεν είχε την δυνατότητα να παρακολουθεί τις διαλέξεις στο Πανεπιστήμιο. Μελετούσε όμως μόνος του διεθνή συγγράμματα, τα οποία αγόραζε συχνά με στερήσεις.

Επόμενος σταθμός η Αθήνα, πού μετέβηκε στα μέσα της δεκαετίας του 70, ως πτυχιούχος πλέον μαθηματικός. Εργάσθηκε στην αρχή σε φροντιστήρια και αργότερα ως αναπληρωτής και μόνιμος Καθηγητής σε Δημόσια Λύκεια. Συμμετείχε, παρουσιάζοντας εργασίες, σε σεμινάρια στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ταυτόχρονα δημοσίευσε τα πρώτα του βιβλία, εργαζόμενος νυχθημερόν. Το 1978 παντρεύτηκε την σύζυγο του Άννα και μαζί απέκτησαν δύο γιούς.

Από τις αρχές της δεκαετίας του 80, ανέλαβε την προετοιμασία των Ελλήνων μαθητών για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες με μαθήματα που γίνονταν κάθε Σάββατο στα γραφεία της Μαθηματικής Εταιρείας. Σπουδαίο Ρόλο έπαιξαν τα βιβλία του «Μαθηματικές Ολυμπιάδες, τόμος 1» και «Μαθηματικές Ολυμπιάδες, Γεωμετρία» που εκδόθηκαν στα 1981 και 1987. Από την δεκαετία του 90 και μετά ασχολήθηκε με την διδακτική της Γεωμετρίας και την Ιστορία των Μαθηματικών. Εκπόνησε διδακτορική διατριβή (επιβλέπων καθηγητής Θ. Εξαρχάκος), δίδαξε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Διετέλεσε μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ τη διετία 1987-1989, Έφορος Βιβλιοθήκης για δυο διετίες (1989-1991 και 1993-1995) και μέλος της Εξελεγκτικής Επιτροπής της ΕΜΕ τη διετία 1991-1993. Διετέλεσε επίσης Σύμβουλος Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ήταν μέλος της Συντακτικής Επιτροπής του Ευκλείδη Β, μέλος της Επιτροπής Διαγωνισμών της ΕΜΕ τις δεκαετίες '80 και '90 και για πολλά χρόνια υπαρχηγός και αρχηγός των εθνικών ομάδων στους Διεθνείς Διαγωνισμούς.

Ήταν υπαρχηγός της Ελληνικής αποστολής στην 24η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα στο **Παρίσι το 1983**, οπότε πάρθηκε η απόφαση από κοινού με τους εκπροσώπους της Βουλγαρίας και της Ρουμανίας για τη διοργάνωση της Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας. Δική του ιδέα και του Βούλγαρου Ιβάν Τόνοφ ήταν η διοργάνωση της Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας Νέων.

Το Δ.Σ. της **Ε.Μ.Ε.** και από αυτή τη θέση, εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του.

Τάξη: Β΄

Θέματα για εμβάθυνση...

Γεώργιος Μπατέλης

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2\left|\eta\mu^2 x-1\right|+1,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

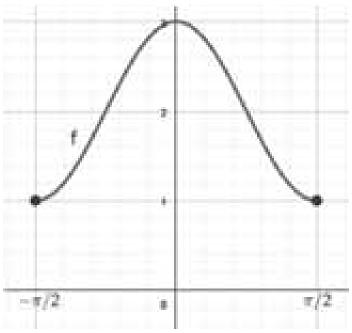
Β3. Ι. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x+1,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ΙΙ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $1\le f(x)\le 3$. Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη το 1;

Β4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η C_f. Με βάση αυτό να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των:

$$-f,\ f\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f(x)-3,\ f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2$$



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$ με

$$\frac{e^{2f(x)}+e^{\sqrt{4-4x^2}}}{2}=e^{f(x)+\sqrt{1-x^2}}\quad (1).$$

Γ1. Ι. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

ΙΙ. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της.

Γ2. Έστω $M(x_1,f(x_1))$ τυχαίο σημείο της C_f και Α, Β τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x με Α(–1, 0) και Β(1, 0).

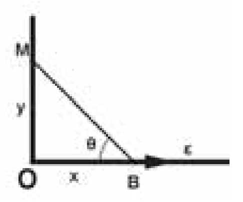
Ι. Να δείξετε ότι η συνάρτηση του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1].$$

ΙΙ. α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθυγράμμων τμημάτων ΜΑ, ΜΒ για Μ(0,1).

β) Τι τρίγωνο είναι το ΑΜΒ για τη μέγιστη τιμή του εμβαδού;

Γ3. Μία σκάλα ΜΒ με μήκος $\sqrt{2}$ είναι στερεωμένη σε ένα τοίχο ΟΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ι. Καθώς η σκάλα γλιστράει κατά μήκος του (Βε) να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΒ συναρτήσει της γωνίας θ, δίνεται από τον τύπο $h(\theta)=\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$, δοθέντος ότι $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

ΙΙ. Να σχεδιάσετε την C_h στο διάστημα μιας περιόδου.

ΙΙΙ. Να συγκρίνετε τα $h\left(\frac{\pi}{36}\right), h\left(\frac{\pi}{37}\right)$.

Γ4.Ι. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$\frac{1}{2}\eta\mu 2x=\sqrt{1-x^2}$ είναι αδύνατη για $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{1-x^2}=(1-x)^2$ (4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}+2,$$

$$g(x)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3x\ \text{ και }\ t(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Δ1.Ι. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ΙΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\le 1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ2.Ι. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές τιμές του κ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa^3-2\kappa^2}-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{5\kappa-6}=3\cdot(\kappa^3-2\kappa^2)-3(5\kappa-6)$$

είναι $-2,\ 1,\ 3$.

ΙΙΙ. Σε μία αριθμητική πρόοδο, η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega=e^{\ln\kappa}$, όπου κ η μεγαλύτερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και ο πρώτος όρος της προόδου, είναι η άλλη θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης. Να βρείτε τον 5ο όρο και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x)-\frac{3}{2}=g(\sigma\upsilon\nu x)+2,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad(1)$$

Σύντομες Υποδείξεις

Β1. Για $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και

$f(-x)=2\left|\eta\mu^2(-x)-1\right|+1=(\ldots)=f(x)$

Β2. Με $-\frac{\pi}{2}\le x_1<x_2\le 0\Rightarrow 0\le\sigma\upsilon\nu x_1<\sigma\upsilon\nu x_2\le 1$

$\Rightarrow 0\le\sigma\upsilon\nu^2x_1<\sigma\upsilon\nu^2x_2\Rightarrow(\ldots)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα f γν. αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Με $0<x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1>\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\ge 0\Rightarrow(\ldots)\Rightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)$, άρα f γν. φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Β3. Ι. Είναι $\eta\mu^2x-1=-\sigma\upsilon\nu^2x$ άρα:

$f(x)=2\left|-\sigma\upsilon\nu^2x\right|+1=2\left|\sigma\upsilon\nu^2x\right|+1=2\sigma\upsilon\nu^2x+1$

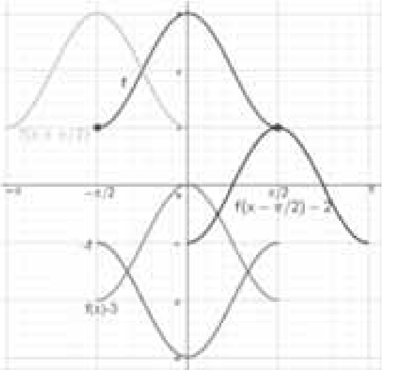
ΙΙ. Για $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$0\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Rightarrow 0\le\sigma\upsilon\nu^2x\le 1\Rightarrow\ldots\Rightarrow 1\le f(x)\le 3$

οπότε: $\min f(x)=1\Leftrightarrow(\ldots)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{\pi}{2}$

$\max f(x)=3\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow x=0$ ή $\sigma\upsilon\nu x=-1$ απορ.

Β4.



Γ1.Ι Πρέπει $4-4x^2\ge 0$ και $1-x^2\ge 0$, δηλαδή $1-x^2\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

$(1)\Leftrightarrow e^{2f(x)}+e^{2\sqrt{1-x^2}}=2e^{f(x)}\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-e^{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=0\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

ΙΙ. Για $x_1,x_2\in[0,1]$ με $0\le x_1<x_2\le 1\Rightarrow$

$0\le x_1^2<x_2^2\le 1\Rightarrow 0\ge -x_1^2>-x_2^2\ge -1\Rightarrow$

$1\ge 1-x_1^2>1-x_2^2\ge 0\Rightarrow 1\ge\sqrt{1-x_1^2}>\sqrt{1-x_2^2}\ge 0$

$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f γν. φθίνουσα στο $[0,1]$.

Για $x_1,x_2\in[-1,0]$ με $-1\le x_1<x_2\le 0\Rightarrow$

$1\ge x_1^2>x_2^2\ge 0\Rightarrow -1\le -x_1^2<-x_2^2\le 0\Rightarrow$

$0\le 1-x_1^2<1-x_2^2\le 1\Rightarrow 0\le\sqrt{1-x_1^2}<\sqrt{1-x_2^2}\le 1$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f γν. αύξουσα στο $[-1,0]$.

Τελικά, για

$-1\le x\le 0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(-1)\le f(x)\le f(0)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$

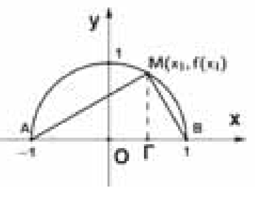
και για

$0\le x\le 1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(1)\le f(x)\le f(0)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$,

δηλ. για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει $f(x)\le 1=f(0)$.

Γ2.Ι.

Το $\mathbf{y\ge 0}$ άρα η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο του σχήματος στο 1^o και 2^o τεταρτημόριο.



$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)\cdot(M\Gamma)=\frac{1}{2}2\cdot f(x_1)=f(x_1)$

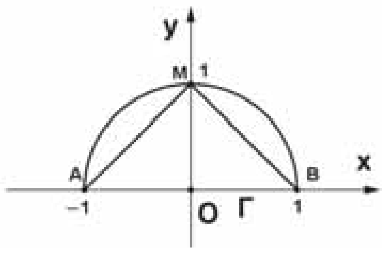
καθώς το Μ είναι τυχαίο.

ΙΙ. α) Η ευθεία ΜΑ: $y=\lambda x+\beta$ και επειδή οι συντεταγμένες των σημείων Α(–1,0) και Μ(0,1) την επαληθεύουν θα είναι: $\left.\begin{matrix}0=-\lambda+\beta\\1=0+\beta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=1\\\beta=1\end{matrix}\right\}$

άρα $(MA): y=x+1$.

Όμοια η ευθεία ΜΒ έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ και επειδή οι συντεταγμένες των σημείων Β(1,0) και Μ(0,1) την επαληθεύουν θα είναι:

$\left.\begin{matrix}0=\lambda+\beta\\1=0+\beta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=-1\\\beta=1\end{matrix}\right\}$ άρα $(MB): y=-x+1$.



β) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AMB}$ είναι ισοσκελές (ΜΑ=ΜΒ) διότι η ΜΟ είναι μεσοκάθετος και επιπλέον είναι και ορθογώνιο καθώς $\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MB}=-1$ ή

εναλλακτικά, $A\hat{M}B$ βαίνει σε ημικύκλιο.

Γ3.Ι. Είναι $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\\ \eta\mu\theta=\dfrac{y}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta\\ y=\sqrt{2}\eta\mu\theta\end{cases}$ άρα

$$(OMB)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sqrt{2}\eta\mu\theta=\frac{1}{2}\eta\mu2\theta=h(\theta)$$

ΙΙ. τετριμμένο

ΙΙΙ. $0\le\frac{\pi}{37}<\frac{\pi}{36}\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow h\left(\frac{\pi}{37}\right)<h\left(\frac{\pi}{36}\right)$

Καθώς η h γν. αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Γ4.Ι. Είναι $0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\le2x\le\frac{\pi}{2}$, άρα η

$h(x)=\frac{1}{2}\eta\mu2x$ είναι γν. αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και

θα είναι $h(0)\le h(x)\le h\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow0\le h(x)\le\frac{1}{2}$ (2).

Επίσης, επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ θα είναι

$0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(0)\ge f(x)\ge f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow1\ge f(x)\ge\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}$ (3). Από (2),(3) αρκεί να δείξουμε ότι: $h(x)\le\frac{1}{2}<\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}\le f(x)$.

Αρκεί $\frac{1}{2}<\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}$, αρκεί $\frac{1}{4}<1-\frac{\pi^2}{16}$, αρκεί $\frac{\pi^2}{16}<1-\frac{1}{4}$, αρκεί $\frac{\pi^2}{16}<\frac{3}{4}$, αρκεί $\pi^2<12$, αρκεί $\pi<\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, που ισχύει.

ΙΙ. Πρέπει και αρκεί $x\in[-1,1]$. Η (4) γίνεται

$1-x^2=(1-x)^4\Leftrightarrow$

$(1-x)(1+x)-(1-x)(1-x)^3=0\Leftrightarrow$

$(1-x)\left[1+x-(1-x)^3\right]=0\Rightarrow$ $x=1$ δεκτή ή

$x^3+3x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x^2+3x-2)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ δεκτή ή $x^2+3x-2=0$.

Η εξίσωση $x^2+3x-2=0$ έχει ρίζες:

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. Για να είναι δεκτές θα πρέπει να ανήκουν το διάστημα [–1,1].

Είναι $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}>0$, αρκεί $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<1$, αρκεί $-3+\sqrt{17}<2$, αρκεί $\sqrt{17}<5$ που ισχύει. Επίσης, μπορούμε να πούμε:

$$\frac{-3+\sqrt{25}}{2}=\frac{2}{2}=1>x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}>\frac{-3+\sqrt{16}}{2}=\frac{1}{2}$$

άρα δεκτή.

Όμοια είναι $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}<0$, αρκεί $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}>-1$, αρκεί $-3-\sqrt{17}>-2$, αρκεί $-\sqrt{17}>1$, που δεν ισχύει άρα αυτή η ρίζα απορρίπτεται.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Ι. Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu0\ge\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\ge\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$1\ge\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\ge0$ ή $1\ge y_1>y_2\ge0$.

Επειδή η συνάρτηση με τύπο $w(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γν. φθίνουσα στο R, άρα για $1\ge y_1>y_2\ge0$ θα είναι

$w(1)\le w(y_1)<w(y_2)\le w(0)$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^{y_1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{y_2}$

ή $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x_2}$ δηλαδή $t(x_1) < t(x_2)$. Άρα η t είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

II. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 = 1 \Leftrightarrow$

$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sigma\upsilon\nu x} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} + 1 = 0$ (2).

Θέτουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = y > 0$ και η (2) γίνεται:

$2\cdot y^2 - 3\cdot y + 1 = 0$ με ρίζες 1 και $\frac{1}{2}$. Άρα:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, κ∈Z. Πρέπει $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ άρα:

- $0 \le 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{2}$.
- $0 \le 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{1}{2}$, αδύνατη.

Ομοίως δουλεύουμε για τη ρίζα $\frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $x = 0$.

III. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$2\cdot y^2 - 3\cdot y + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2(y-1)\left(y - \frac{1}{2}\right) \le 0$ άρα

$\frac{1}{2} \le y \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} \le 1 \Leftrightarrow t(0) \le t(x) \le t\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ καθώς t γν.αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ2.I. $D_g = R$. Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με:

$$x_1 < x_2 \overset{\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\searrow}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x_2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} > 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}$$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2$

Με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε:

$2\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} - 3x_1 > 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2} - 3x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

II. Η δοθείσα γίνεται:

$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa^3 - 2\kappa^2} - 3\cdot(\kappa^3 - 2\kappa^2) = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{5\kappa-6} - 3(5\kappa - 6)$

$\Leftrightarrow g(\kappa^3 - 2\kappa^2) = g(5k - 6)$ άρα θα πρέπει

$\kappa^3 - 2\kappa^2 = 5k - 6 \Leftrightarrow \kappa^3 - 2\kappa^2 - 5k + 6 = 0$

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα θα έχουμε:

$(\kappa - 1)(\kappa^2 - \kappa - 6) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ ή $\kappa = -2$ ή $\kappa = 3$

III. Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης είναι $\kappa = 3$. Από την υπόθεση ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της προόδου $\omega = e^{\ln\kappa} = e^{\ln 3} = 3$.

Άρα:

$\alpha_5 = \alpha_1 + (5-1)\omega = 1 + 4\cdot 3 = 13$, εναλλακτικά $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 7, \alpha_4 = 10, \alpha_5 = 13$.

$S_5 = \frac{5}{2}(\alpha_1 + \alpha_5) = \frac{5}{2}[2\alpha_1 + (5-1)\omega] = \frac{5}{2}(2 + 4\cdot 3) = 35$

ή εναλλακτικά $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$

Δ3. $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} = 0,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Προφανής ρίζα το 0. Θεωρούμε

$r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} = t(x) - \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}$

- $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 + \frac{1}{2} < -\sigma\upsilon\nu x_2 + \frac{1}{2}$
- $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow t(x_1) < t(x_2)$, καθώς $t \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Με άθροιση κατά μέλη έχουμε $r(x_1) < r(x_2)$ οπότε η r είναι γν. αύξουσα, άρα η ρίζα που βρήκαμε είναι μοναδική.

Σημείωση: *Αποφύγαμε να δώσουμε ερωτήσεις για το* ***Θέμα Α****, για να επιμείνουμε περισσότερο στα άλλα θέματα. Αντί αυτού, προτείνεται να δοθούν ενδεικτικές* ***ερωτήσεις κατανόησης*** *του σχολικού βιβλίου για εξάσκηση και για εμβάθυνση και σε αρκετές από αυτές, όπου κρίνεται σκόπιμο, να ζητηθεί* ***αιτιολόγηση****.*

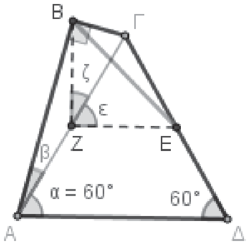
Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Ευκλείδιας Γεωμετρίας

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Άσκηση 1. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}=75°$, $\widehat{Γ}=135°$ και $\widehat{Δ}=60°$. Αν είναι ΑΔ = ΓΔ = 4cm και Ε το μέσο της ΓΔ, να βρείτε το μήκος του ΒΕ.

Λύση: Αν Ζ είναι το μέσον της ΑΓ τότε, για να βρούμε το ΒΕ, θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ορθογώνιο.



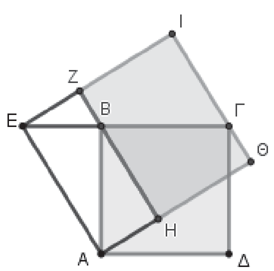
Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, και αφού έχει τη γωνία $\widehat{Δ}=60°$ είναι ισόπλευρο, οπότε $ΑΓ=4\,cm$. Είναι $ΕΖ//=\dfrac{ΑΔ}{2}$ *(γιατί;)*, οπότε $ΕΖ=2\,cm$ και $\hat{ε}=\hat{α}=60°$. Είναι $ΒΖ=\dfrac{ΑΓ}{2}=ΑΖ$, ως διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε είναι $ΒΖ=2\,cm$. Αφού $\widehat{A}=75°$ τότε $\hat{β}=75°-60°=15°$.

Το τριγώνου ΖΑΒ είναι ισοσκελές αφού $ΑΖ=ΒΖ$ και η γωνία ζ είναι εξωτερική του οπότε $\hat{ζ}=2\hat{β}=2\cdot 15°=30°$.

Επομένως $Β\widehat{Ζ}Ε=\hat{ε}+\hat{ζ}=60°+30°=90°$.

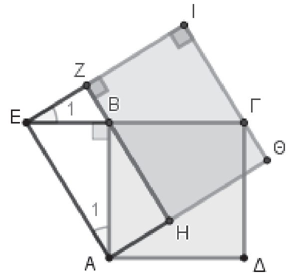
Από το πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΒΖΕ έχουμε: $ΒΕ^2=ΒΖ^2+ΕΖ^2=8$, οπότε $ΒΕ=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,cm$.

Άσκηση 2. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α και τα τετράπλευρα ΑΕΖΗ και ΖΗΘΙ είναι ορθογώνια.



Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΖΗΘΙ.

Λύση: Για να δείξουμε ότι τα ΑΒΓΔ και ΖΗΘΙ είναι ισοδύναμα, δηλαδή ότι έχουν το ίδιο εμβαδόν, αρκεί να δείξουμε ότι:
(ΑΒΓΔ) = (ΖΗΘΙ)
$\Leftrightarrow ΑΒ\cdot ΒΓ=ΗΖ\cdot ΖΙ$.
Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΙΓ είναι όμοια (είναι ορθογώνια και έχουν $\widehat{A}_1=\widehat{E}_1$ γιατί είναι οξείες με κάθετες πλευρές) οπότε έχουμε:

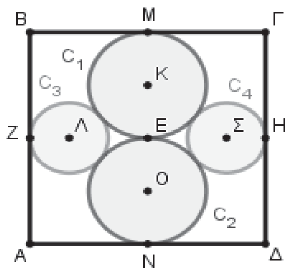


$$\frac{ΑΒ}{ΕΙ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}\Leftrightarrow\frac{ΑΒ}{ΑΕ}=\frac{ΕΙ}{ΕΓ}\quad \textbf{(1)}$$

Είναι $ΒΖ//ΙΓ$ οπότε $\dfrac{ΕΙ}{ΕΓ}=\dfrac{ΖΙ}{ΒΓ}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε $\dfrac{ΑΒ}{ΑΕ}=\dfrac{ΖΙ}{ΒΓ}\Leftrightarrow$ $ΑΒ\cdot ΒΓ=ΑΕ\cdot ΖΙ$ και επειδή $ΑΕ=ΗΖ$ *(γιατί;)* είναι $ΑΒ\cdot ΒΓ=ΗΖ\cdot ΖΙ$

Άσκηση 3. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α=6 cm και τα Ζ, Μ, Η, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του. Οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ίσοι.



Να υπολογίσετε:
α) Την ακτίνα των κύκλων C_1 και C_2 και την ακτίνα των κύκλων C_3 και C_4 συναρτήσει του α.
β) Το εμβαδόν του μέρους του τετράγωνου που βρίσκεται εκτός των τεσσάρων κύκλων.

Λύση: α) Έστω R η ακτίνα των κύκλων C_1 και C_2 και ρ η ακτίνα των κύκλων C_3 και C_4 (οι οποίοι προφανώς είναι ίσοι).
Το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές με πλευρές $ΛΟ=ΛΚ=R+ρ$ και $ΟΚ=2R$.

Είναι $MN = AB = \alpha = 4R$, οπότε $R = \frac{\alpha}{4}$ **(1)**

Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ορθογώνιο στο Ε *(γιατί;)* και είναι $K\Lambda = R + \rho$, $EK = R$ και $E\Lambda = EZ - \Lambda Z = 2R - \rho$, (γιατί $EZ = AN = \frac{\alpha}{2} = \frac{4R}{2} = 2R$ και $\Lambda Z = \rho$),

οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

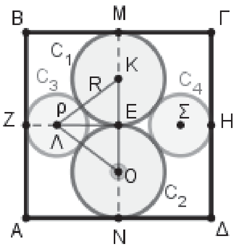
$K\Lambda^2 = EK^2 + E\Lambda^2 \Leftrightarrow$

$(R+\rho)^2 = R^2 + (2R-\rho)^2 \Leftrightarrow$

$R^2 + 2R\rho + \rho^2 = R^2 + 4R^2 - 4R\rho + \rho^2 \Leftrightarrow$

$2R\rho + 4R\rho = 4R^2 \Leftrightarrow 6R\rho = 4R^2 \Leftrightarrow$

$\rho = \frac{4R^2}{6R} \Leftrightarrow \rho = \frac{2R}{3}$ και λόγω της (1) είναι $\rho = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha}{4}$ ή $\rho = \frac{\alpha}{6}$.



β) Το ζητούμενο εμβαδόν βρίσκεται αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τεσσάρων κύκλων. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2=6^2=36cm^2$ και το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κύκλων είναι:

$E_\kappa = E_{C_1} + E_{C_2} + E_{C_3} + E_{C_4} = 2E_{C_1} + 2E_{C_3}$ ή

$E_\kappa = 2\pi R^2 + 2\pi\rho^2 = 2\pi(R^2+\rho^2)$ ή

$E_\kappa = 2\pi(1{,}5^2 + 1^2) = 6{,}5\pi$ cm^2, αφού είναι $R = \frac{\alpha}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ cm και $\rho = \frac{\alpha}{6} = \frac{6}{6} = 1$ cm.

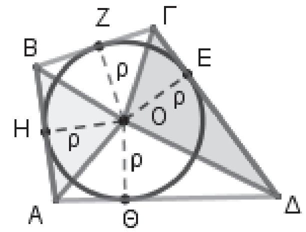
Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:
$E=(AB\Gamma\Delta) - E_\kappa = (6{,}5\pi - 1)$ cm^2.

Άσκηση 4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Να δείξετε ότι: (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).

Λύση: Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ και ΟΑΔ έχουν ύψος την ακτίνα του περιγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Είναι (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = $\frac{1}{2}AB\cdot\rho + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot\rho = \frac{1}{2}(AB + \Gamma\Delta)\cdot\rho$ **(1)**

Είναι (ΟΒΓ) + (ΟΑΔ) = $\frac{1}{2}B\Gamma\cdot\rho + \frac{1}{2}A\Delta\cdot\rho = \frac{1}{2}(B\Gamma + A\Delta)\cdot\rho$ **(2).**

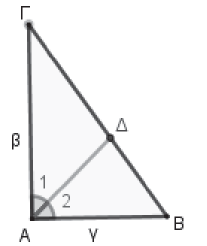


Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα *(δες την εφαρμογή 1 στη σελίδα 132 του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας)*, οπότε ισχύει

ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ **(3)**

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε:
(ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).

Άσκηση 5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Αν β και γ είναι οι κάθετες πλευρές του, να δείξετε ότι $A\Delta = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\beta+\gamma}$.



Λύση: Η ΑΔ είναι η διχοτόμος της ορθής γωνίας του τριγώνου ΑΒΓ οπότε έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45°$.

Είναι (ΑΒΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) =

$= \frac{1}{2}A\Delta\cdot AB\cdot \eta\mu A_2 + \frac{1}{2}A\Delta\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu A_1 =$

$= \frac{1}{2}A\Delta\cdot\gamma\cdot\eta\mu 45° + \frac{1}{2}A\Delta\cdot\beta\cdot\eta\mu 45° =$

$= \frac{1}{2}A\Delta\cdot\gamma\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}A\Delta\cdot\beta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}A\Delta(\gamma+\beta)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

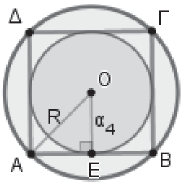
Είναι ακόμα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\beta\gamma$. Άρα:

$\cancel{\frac{1}{2}}A\Delta(\gamma+\beta)\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{\frac{1}{2}}\beta\gamma \Leftrightarrow A\Delta(\gamma+\beta)\sqrt{2} = 2\beta\gamma$

$\Leftrightarrow \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2\beta\gamma}{(\gamma+\beta)\sqrt{2}}$ ή $A\Delta = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\gamma+\beta}$.

Άσκηση 6. **Να δείξετε ότι:**
α) το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου οποιουδήποτε τετραγώνου ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του εγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου.
β) το εμβαδόν του περιγεγραμμένου σε οποιοδήποτε κύκλο τετραγώνου ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του εγγεγραμμένου σε αυτόν τετραγώνου.

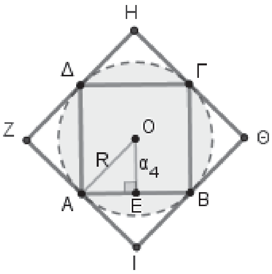
Λύση: α) Αν είναι R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και το απόστημά του $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.



Ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα το απόστημα του τετραγώνου οπότε το εμβαδό του είναι $E_\varepsilon = \pi\alpha_4^2 = \pi\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi\dfrac{2R^2}{4}$ ή $E_\varepsilon = \dfrac{\pi R^2}{2}$

Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $E_\pi = \pi R^2$, οπότε $E_\pi = 2E_\varepsilon$.

β) Το περιγεγραμμένο τετράγωνο στον κύκλο έχει πλευρά 2R *(γιατί;)*, επομένως το εμβαδό του είναι: $(ΖΗΘΙ) = (2R)^2 = 4R^2$



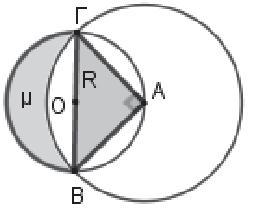
Το εγγεγραμμένο τετράγωνο έχει εμβαδόν

$(ΑΒΓΔ) = \lambda_4^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

Επομένως (ΖΗΘΙ) = 2(ΑΒΓΔ).

Άσκηση 7. **Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) και ο περιγεγραμμένος του κύκλος. Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα την πλευρά ΑΒ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση: Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει ακτίνα R τότε η πλευρά ΑΒ του τριγώνου είναι $\alpha = R\sqrt{2}$ *(γιατί;)*.



Το εμβαδόν του μηνίσκου μ βρίσκεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο τη ΒΓ το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζει η ΒΓ και το τόξο ΒΓ του κύκλου (Α, ΑΒ).

Το εμβαδό του ημικυκλίου είναι $E_1 = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

Το εμβαδό του κυκλικού τμήματος είναι $E_2 = E_{A.\widehat{B\Gamma}} - (AB\Gamma)$.

Το εμβαδό του κυκλικού τομέα $A.\widehat{B\Gamma}$ είναι

$$E_{A.\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi(AB)^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2R^2}{4} \text{ ή}$$

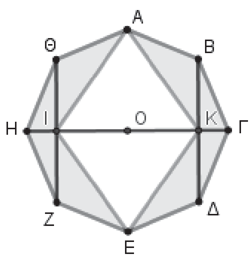
$E_{A.\widehat{B\Gamma}} = \dfrac{\pi R^2}{2}$. Επομένως για το εμβαδόν του μηνίσκου έχουμε:

$$(\mu) = E_1 - E_2 = E_1 - \left(E_{A.\widehat{B\Gamma}} - (AB\Gamma)\right) =$$

$$\frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{2} - (AB\Gamma)\right) = (AB\Gamma).$$

Άσκηση 8. **Το οκτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ του διπλανού σχήματος είναι κανονικό. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΙΕΚ ισούται με το εμβαδό του μέρους του οκταγώνου που βρίσκεται εκτός του τετραπλεύρου.**

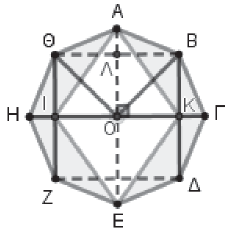
Λύση: Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού οκταγώνου.



Το εμβαδόν του κανονικού οκταγώνου είναι E_8 =4(ΟΘΑΒ). Είναι $ΘΒ = \lambda_4 = R\sqrt{2}$,

$O\Lambda = \alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ και $OA=R$. Το ΟΘΑΒ έχει κάθετες διαγωνίους *(γιατί;)* οπότε το εμβαδόν του ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, συνεπώς είναι: $E_8 = 4(O\Theta AB) =$

$= 4\cdot\dfrac{\Theta B\cdot OA}{2} = 2R\sqrt{2}\cdot R$ ή $E_8 = 2R^2\sqrt{2}$. **(1)**



Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΙΕΚ είναι $(AIEK) = 2(AIE) = \cancel{2}\cdot\dfrac{AE\cdot OI}{\cancel{2}} = AE\cdot OI =$

$2R\cdot\alpha_4 = \cancel{2}R\cdot\dfrac{R\sqrt{2}}{\cancel{2}}$ ή $(AIEK) = R^2\sqrt{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $E_8 = 2(AIEK)$, οπότε το μέρος του οκταγώνου που βρίσκεται εκτός του τετραπλεύρου έχει εμβαδόν
$E = E_8 - (AIEK) = 2(AIEK) - (AIEK)$ ή $E = (AIEK)$

Άσκηση 9. Αν κατασκευάσουμε ένα κύκλο με κέντρο το κέντρο της Γης και μήκος κατά 1 μέτρο μεγαλύτερο από το μήκος της περιφέρειάς της, να δείξετε ότι ανάμεσα από τη Γη και τον κύκλο αυτό μπορεί να περάσει μια . . . γάτα!

Λύση: Αν είναι ρ η ακτίνα της Γης και ρ_1 η ακτίνα του κύκλου, έχουμε $\rho_1 = OA$ και $\rho = OB$. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αρκεί να βρούμε το μήκος $AB = \rho_1 - \rho$.

Αν L είναι το μήκος της περιφέρειας της Γης και L_1 είναι το μήκος του κύκλου, έχουμε:
$L_1 - L = 1 \Leftrightarrow 2\pi\rho_1 - 2\pi\rho = 1 \Leftrightarrow$

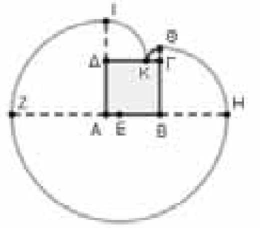
$2\pi(\rho_1 - \rho) = 1 \Leftrightarrow \rho_1 - \rho = \dfrac{1}{2\pi}$.

Άρα $AB = \dfrac{1}{2\pi} = \dfrac{1}{2\cdot 3{,}14} = \dfrac{1}{6{,}28} = 0{,}159\text{m} = 15{,}9$ cm.

Άρα ανάμεσα από τη Γη και τον κύκλο εύκολα μπορεί να περάσει μια γατούλα!!

Άσκηση 10. Ένας σκύλος φυλάει μια τετράγωνη αποθήκη πλευράς 4 μέτρων. Ο σκύλος είναι δεμένος με μια αλυσίδα μήκους 8 μέτρων από ένα σημείο μιας πλευράς της αποθήκης που απέχει από τη γωνία 1 μέτρο.
Να σχεδιάσετε την περιοχή μέσα στην οποία μπορεί να κινηθεί ο σκύλος και να βρείτε το μήκος της περιμέτρου καθώς και το εμβαδόν της παραπάνω περιοχής.

Λύση: Ο σκύλος είναι δεμένος από το σημείο Ε της αποθήκης. Η περιοχή στην οποία κινείται είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα



και περικλείεται από στο ημικύκλιο με διάμετρο τη ΖΗ=16m, και τα τεταρτοκύκλια: με κέντρο Α και ακτίνα ΑΖ=7m, με κέντρο Δ και ακτίνα ΔΙ=3m, με κέντρο Β και ακτίνα ΒΗ=5m, με κέντρο Γ και ακτίνα ΓΘ=1m. Είναι:

$L_{ZH} = \dfrac{\pi\cdot 8\cdot 180}{180} = 8\pi$, $L_{ZI} = \dfrac{\pi\cdot 7\cdot 90}{180} = \dfrac{7\pi}{2}$,

$L_{IK} = \dfrac{\pi\cdot 3\cdot 90}{180} = \dfrac{3\pi}{2}$, $L_{\Gamma H} = \dfrac{\pi\cdot 5\cdot 90}{180} = \dfrac{5\pi}{2}$ και

$L_{\Gamma\Theta} = \dfrac{\pi\cdot 1\cdot 90}{180} = \dfrac{\pi}{2}$. Οπότε το μήκος της περιμέτρου είναι: $L = L_{ZH} + L_{ZI} + L_{IK} + L_{\Gamma H} + L_{Z\Theta}$ ή

$L = 8\pi + \dfrac{7\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 16\pi$

Για το εμβαδό έχουμε: $E_{ZH} = \dfrac{\pi\cdot 8^2\cdot 180}{360} = 32\pi$

$E_{ZI} = \dfrac{\pi\cdot 7^2\cdot 90}{360} = \dfrac{49\pi}{4}$, $E_{IK} = \dfrac{\pi\cdot 3^2\cdot 90}{360} = \dfrac{9\pi}{4}$

$E_{\Gamma H} = \dfrac{\pi\cdot 5^2\cdot 90}{360} = \dfrac{25\pi}{4}$, $E_{\Gamma\Theta} = \dfrac{\pi\cdot 1^2\cdot 90}{360} = \dfrac{\pi}{4}$

Οπότε το εμβαδόν της περιοχής είναι:
$E = E_{ZH} + E_{ZI} + E_{IK} + E_{\Gamma H} + E_{Z\Theta} = 53\pi$.

$L = 32\pi + \dfrac{49\pi}{4} + \dfrac{9\pi}{4} + \dfrac{25\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 53\pi$

Πηγές: *http://www.gogeometry.com/problem/index.html*

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Αντώνης Κυριακόπουλος

1. Σ' ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(2\lambda-3,0)$ και $B(0,\lambda+6)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία του επιπέδου αυτού, από τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση: Από ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία αν, και μόνο αν: $A\hat{M}B=1\text{ορθ.}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (1).

Έχουμε: $\overrightarrow{MA}=(2\lambda-3-x,-y)$ και $\overrightarrow{MB}=(-x,\lambda+6-y)$. Έτσι, έχουμε:

$(1)\Leftrightarrow(2\lambda-3-x)(-x)+(-y)(\lambda+6-y)=0\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+3x-6y-\lambda(2x+y)=0$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αν, και μόνο αν: $\begin{cases}x^2+y^2+3x-6y=0\\2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\5x^2+15x=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x=0,y=0)\text{ ή}\\(x=-3,y=6)\end{cases}$ Άρα, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από τα σημεία $M_1(0,0)$ και $M_2(-3,6)$ υπό ορθή γωνία.

2. Σ' ένα καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0, α), Β(β, 0) και Γ(−β, 0), όπου α και β είναι δύο δοσμένοι πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Θεωρούμε ένα σημείο Μ του άξονα x′x και ονομάζουμε Δ και Ε τις προβολές του στις ευθείες ΑΒ και ΑΓ, αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, η κάθετος ε από το Μ στην ευθεία ΔΕ διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, όταν το σημείο Μ διαγράφει τον άξονα x′x.

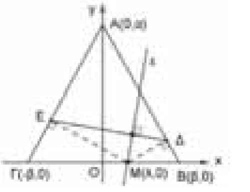
Λύση: Έστω $M(\lambda,\,0)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, ένα σημείο του άξονα $x'x$. Έχουμε: $\lambda_{AB}=-\dfrac{\alpha}{\beta}$, οπότε $AB:\ y-\alpha=-\dfrac{\alpha}{\beta}x$ (1). Έχουμε: $\lambda_{M\Delta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, οπότε: $M\Delta: y=\dfrac{\beta}{\alpha}(x-\lambda)$ (2). Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε ότι:

$$\Delta\left(\beta\frac{\alpha^2+\lambda\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha\beta\frac{\beta-\lambda}{\alpha^2+\beta^2}\right).$$

Όμοια, έχουμε: $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $A\Gamma:\ y-\alpha=\dfrac{\alpha}{\beta}x$ (3), $\lambda_{ME}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $ME: y=-\dfrac{\beta}{\alpha}(x-\lambda)$ (4).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) και βρίσκουμε ότι: $E\left(\beta\dfrac{\lambda\beta-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha\beta\dfrac{\beta+\lambda}{\alpha^2+\beta^2}\right)$.

Τώρα, βρίσκουμε εύκολα ότι: $\lambda_{\Delta E}=-\dfrac{\lambda}{\alpha}$.



i) Έστω ότι $\lambda\neq0$. Τότε, επειδή $(\varepsilon)\perp\Delta E$, έχουμε: $\lambda_\varepsilon=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ και συνεπώς η εξίσωση της (ε) είναι: $y=\dfrac{\alpha}{\lambda}(x-\lambda)\Leftrightarrow\alpha x-\lambda(y+\alpha)=0$ (5).

ii) Έστω ότι $\lambda=0$. Τότε: $\lambda_{\Delta E}=0$, οπότε $\Delta E\parallel x'x$ και η ευθεία (ε) ταυτίζεται με τον άξονα $y'y$, οπότε η εξίσωση της είναι: $x=0$, η οποία προκύπτει από την (5) με $\lambda=0$. Συμπεραίνουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η (5). Από την εξίσωση αυτή, έπεται ότι η ευθεία ε, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, διέρχεται από το σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες x και y είναι λύση του συστήματος: $\begin{cases}\alpha x=0\\y+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\alpha\end{cases}$

Άρα, η (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο: $(0,-\alpha)$

3. Έστω η εξίσωση: $x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y+\lambda^2=0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$ η εξίσωση (1) παριστάνει έναν κύκλο C_λ.

ii) Δίνονται δύο αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ εφάπτονται στην ευθεία (ε): $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$.

Λύση: Η εξίσωση (1) είναι της μορφής:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

με: $A=-2\lambda,\ B=-2\lambda$ και $\Gamma=\lambda^2$

i) Έχουμε: $\dfrac{A^2+B^2}{4}-\Gamma=\dfrac{4\lambda^2+4\lambda^2}{4}-\lambda^2=\lambda^2>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Άρα, η εξίσωση (1), για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$, παριστάνει ένα κύκλο C_λ με κέντρο $K_\lambda(\lambda,\lambda)$ και ακτίνα: $\rho_\lambda=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}=\sqrt{\lambda^2}=|\lambda|$.

ii) Έχουμε: (ε): $\beta x+\alpha y-\alpha\beta=0$. Ένας κύκλος C_λ εφάπτεται στην ευθεία ε αν, και μόνο αν:

$$d(K_\lambda,\varepsilon)=\rho_\lambda\Leftrightarrow\frac{|\beta\lambda+\alpha\lambda-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}=|\lambda|\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |(\alpha+\beta)\lambda-\alpha\beta| = |\lambda|\sqrt{\beta^2+\alpha^2}$ (υψώνουμε στο τετράγωνο κτλ.) $\Leftrightarrow 2\lambda^2-2\lambda(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0$ (2).

Η διακρίνουσα της (2) είναι: $\Delta=4(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta= =4(\alpha^2+\beta^2)>0$. Άρα, η (2) έχει δύο ρίζες λ_1 και λ_2 πραγματικές και άνισες. Συνεπώς, οι κύκλοι C_{λ_1} και C_{λ_2} και μόνο αυτοί, εφάπτονται στην ευθεία (ε).

4. Έστω η εξίσωση: $x^2+y^2-(2\lambda-1)x+(\lambda-1)y-1=0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ένα κύκλο C_λ.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (γ.τ.) των κέντρων των κύκλων C_λ, όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

γ) Από τους κύκλους C_λ να βρείτε εκείνον που έχει την μικρότερη ακτίνα. Ποια είναι η ακτίνα αυτή;

Λύση: α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με: $A=-(2\lambda-1)$, $B=\lambda-1$ και $\Gamma=-1$. Έχουμε, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$: $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma=\frac{(2\lambda-1)^2+(\lambda-1)^2}{4}+1>0$. Άρα, η (1), για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει ένα κύκλο C_λ.

β) Το κέντρο ενός κύκλου C_λ είναι:

$$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{2\lambda-1}{2},\ -\frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στο ζητούμενο γ.τ. αν, και μόνο αν, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2\lambda-1}{2} \\ y=-\dfrac{\lambda-1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2\lambda-1 \\ 2y=-\lambda+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1-2y \\ 2x=2\lambda-1\end{cases}$$

Αυτό συμβαίνει αν, και μόνο αν:

$$2x=2(1-2y)-1 \Leftrightarrow 2x+4y-1=0 \ (2).$$

Άρα, ο ζητούμενος γ.τ. είναι η $2x+4y-1=0$.

γ) Η ακτίνα ενός κύκλου C_λ είναι:

$$\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}=\sqrt{\frac{(2\lambda-1)^2+(\lambda-1)^2}{4}+1}=\frac{1}{2}\sqrt{5\lambda^2-6\lambda+6}.$$

Το τριώνυμο $5\lambda^2-6\lambda+6$ έχει ελάχιστη τιμή για: $\lambda=-\frac{-6}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}$. Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε: $x^2+y^2-\left(\frac{6}{5}-1\right)x+\left(\frac{3}{5}-1\right)y-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y-1=0$ (3).

Άρα, ο ζητούμενος κύκλος είναι εκείνος με εξίσωση την (3). Η ακτίνα του είναι:

$$\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(\frac{3}{5}\right)^2-6\frac{3}{5}+6}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{5}}.$$

5. Θεωρούμε μία παραβολή $C: y^2=2px$. Το άθροισμα των τεταγμένων δύο σημείων Α και Β της C είναι ίσο με το άθροισμα των τεταγμένων δύο άλλων σημείων Γ και Δ της C. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

Λύση: Έστω ότι: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ και $\Delta(x_4,y_4)$, οπότε: $y_1^2=2px_1$, $y_2^2=2px_2$, $y_3^2=2px_3$, $y_4^2=2px_4$ (1) και $y_1+y_2=y_3+y_4$ (2). Έχουμε: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(x_4-x_3, y_4-y_3)$. Έτσι, έχουμε:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_4-x_3 & y_4-y_3\end{vmatrix}=$$

$$(x_2-x_1)(y_4-y_3)-(x_4-x_3)(y_2-y_1)\overset{(1)}{=}$$

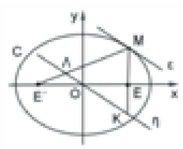
$$\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}\right)(y_4-y_3)-\left(\frac{y_4^2}{2p}-\frac{y_3^2}{2p}\right)(y_2-y_1)=$$

$$=\frac{1}{2p}(y_2+y_1)(y_2-y_1)(y_4-y_3)-$$

$$-\frac{1}{2p}(y_4+y_3)(y_4-y_3)(y_2-y_1)\overset{(2)}{=}0.$$

Ώστε: $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)=0$. Άρα $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και συνεπώς $AB\parallel\Gamma\Delta$.

6. Έστω (ε) η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ στο σημείο της $M\left(2,\ \frac{5}{3}\right)$. Η παράλληλη ευθεία (η) στην (ε) από το κέντρο Ο της C, τέμνει τις ευθείες ΜΕ και ΜΕ΄ στα σημεία Κ και Λ, αντιστοίχως, όπου Ε και Ε΄ οι εστίες της C. Να αποδείξετε ότι: $(EK)=(E'\Lambda)$ (1).



Λύση: Έχουμε: $\alpha^2=9$, $\beta^2=5$ και $\sqrt{9-5}=2$, άρα $E'(-2,\ 0)$ και $E(2,\ 0)$. Επίσης: $\lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=-(5\cdot 2):\left(9\cdot\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ και άρα $(\eta): y=-\frac{2}{3}x$ (2). Προφανώς $MK: x=2$, και $K\left(2,\ -\frac{4}{3}\right)$. Εξάλλου, $\lambda_{ME'}=\frac{5}{3}:(2+2)=\frac{5}{12}$ και άρα $ME': y=\frac{5}{12}(x+2)$ (3).

Από (2), (3) $x=-\frac{10}{13}$ και $y=\frac{20}{39}$. Άρα: $\Lambda\left(-\frac{10}{13},\ \frac{20}{39}\right)$

Έτσι $(EK)=\sqrt{(2-2)^2+\left(0+\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}$ και

$(E'\Lambda)=\sqrt{\left(-2+\frac{10}{13}\right)^2+\left(0-\frac{20}{39}\right)^2}=\cdots=\frac{4}{3}$.

Άρα, η (1) ισχύει.

Τάξη: Γ΄

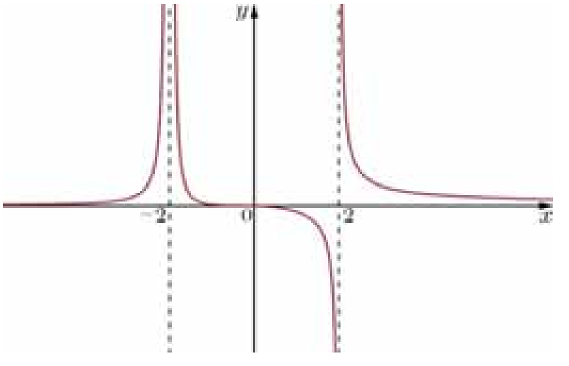
Ανασκόπηση της Σχολικής Ανάλυσης

> Θέλουμε να μορφώσουμε επιστήμονες, που θα είναι ικανοί
> να **κατασκευάσουν** τα Μαθηματικά του αύριο και όχι μόνο
> αυτούς που θα χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά του σήμερα.
> Paul R. Halmos

Γιώργος Τσαπακίδης

Με τη συλλογή αυτή των προβλημάτων επιχειρείται μια επανάληψη όλων των βασικών θεμάτων της ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Τα προβλήματα στοχεύουν στην υπογράμμιση και υπενθύμιση των θεμελιωδών εννοιών της σχολικής Ανάλυσης, που είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων και οι εφαρμογές τους, αποφεύγοντας κατασκευές προβλημάτων χωρίς νόημα, για συναρτήσεις που δεν πρόκειται να συναντήσουν οι μαθητές στις πανεπιστημιακές σπουδές τους.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε, αν η f αντιστρέφεται.
β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και τα διαστήματα στα οποία είναι $f(x)>0$.
γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια: i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, ii) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$, iii) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, iv) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, v) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Για τα όρια, που δεν υπάρχουν, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f, αν υπάρχουν.



ε. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}$, ii) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{f(x)}$, iii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)}$, iv) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{f(x)}$, v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
στ. Να εξετάσετε αν εφαρμόζονται στην f τα θεωρήματα:
i) Bolzano στο [–1,1], ii) Rolle στο [–1,1].

Λύση: α. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

· Το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

β. • $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. • $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty)$

γ. i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, **ii)** $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$, **iii)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$, **iv)** Είναι $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty\neq+\infty=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, άρα, η f δεν έχει όριο στο 2, **v)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

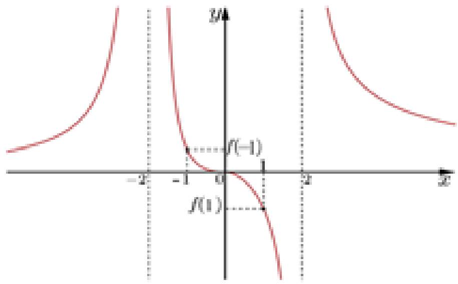
δ. Οριζόντια ασύμπτωτη: $y=0$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Κατακόρυφες ασύμπτωτες: $x=-2$, $x=2$.

ε. i) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x<-2$, άρα, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$. **ii)** Είναι $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$, άρα, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{f(x)}=0$.

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x\in(-2,0)$, άρα, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για $x\in(0,2)$, άρα, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{f(x)}=-\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{f(x)}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{f(x)}$, γι' αυτό η $\frac{1}{f(x)}$ δεν έχει όριο στο 0.

iv) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$, άρα, $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{f(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$, άρα, $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{f(x)}=0$, επομένως $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{f(x)}=0$.

v) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x\in(2,+\infty)$, άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.



στ. i) Επειδή η C_f συνδέει τα σημεία $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$ με συνεχή γραμμή, η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$. Είναι $f(-1)>0$ και $f(1)<0$, άρα, $f(-1)f(1)<0$. Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στην f στο $[-1,1]$.

ii) Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle, γιατί παρόλο που η συνάρτηση φαίνεται να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 1]$, ισχύει $f(-1)\neq f(1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{5^{x+2}+3^{x+1}x^5}{3^x}$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Ποιο είναι το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της $f(x)=0$;

ε. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>25$.

Λύση: α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)=\dfrac{5^2 5^x}{3^x}+\dfrac{3\cdot 3^x x^5}{3^x}=25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+3x^5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5=25\cdot 0+3(-\infty)=-\infty,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5=+\infty+3(+\infty)=+\infty.$

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=\left[25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+3x^5\right]'=25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x\ln\dfrac{5}{3}+15x^4>0.$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

γ. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, για το σύνολο τιμών της έχουμε

$$f(A)=f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

δ. Επειδή $0\in f(A)$, θα υπάρχει $\rho\in A$ με $f(\rho)=0$, έτσι η $f(x)=0$ έχει λύση στον $\mathbb{R}$, που είναι μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, $f(0)=25\left(\dfrac{5}{3}\right)^0+3\cdot 0^5=25>0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Άρα, για πολύ μικρές αρνητικές τιμές του x η $f(x)$ είναι αρνητική, δηλαδή υπάρχει $x_1<0$ με $f(x_1)<0$, έτσι $f(0)f(x_1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) θα είναι συνεχής και στο $[x_1,0]$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano η μοναδική της ρίζα θα ανήκει στο $(x_1,0)$, δηλαδή θα είναι αρνητική.

Σημείωση: Εδώ, αν θεωρήσουμε το διάστημα $\Delta=(-\infty, 0)$, τότε $f(\Delta)=(-\infty, 25)$. Επειδή ο αριθμός 0 περιέχεται στο $f(\Delta)$, η μοναδική ρίζα ρ της εξίσωσης περιέχεται στο Δ, δηλαδή είναι αρνητική.

ε. Είναι: $f(x)>25 \Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0$ (αφού η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- **είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,** • **$f'(x)(f(x)-x)=f(x), x\in\mathbb{R}$,** • **$f(0)=1$.**

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της f^{-1}.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση: α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε $f'(x)(f(x)-x)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)f(x)-xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)f(x)=xf'(x)+f(x)$ $\Leftrightarrow\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=(xf(x))'\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}=xf(x)+c,\ (1)$ Για $x=0$, η (1) γίνεται $\frac{f^2(0)}{2}=0f(0)+c\Leftrightarrow\frac{1}{2}=0+c\Leftrightarrow\frac{1}{2}=c$

Έχουμε λοιπόν, $\frac{f^2(x)}{2}=xf(x)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f^2(x)=2xf(x)+1\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=x^2+1\ \ (2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=f(x)-x$, που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ (είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και της x.

Από την (2) προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε $g(\rho)=0$, οδηγούμαστε στο άτοπο $\rho^2+1=0$. Επιπλέον, $g(0)=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως,

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

β. • Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=1+\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>\frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$ (αφού $-|x|\leq x\leq|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$). Έτσι, $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γι' αυτό είναι 1–1, άρα, αντιστρέφεται.

• Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. $A=(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε: $f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Έτσι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0,+\infty)$. Για τον τύπο της f^{-1}, θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε:

$$y=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow y-x=\sqrt{x^2+1}\text{ με }(y-x\geq 1,\ (1))\Leftrightarrow(y-x)^2=x^2+1\Leftrightarrow y^2-2xy+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2xy=y^2-1$ με $(y\neq 0)\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}$, που επαληθεύει και την (1). Άρα, $f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x},\ x\in(0,+\infty)$.

γ. • Είναι $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, έτσι η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

• Επειδή $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=1+\sqrt{1+0}=2.$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}=0.$ Έτσι η $y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

• είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, • $x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$, • $f'(1)=0,\ f(1)=e$.

α. **Να αποδείξτε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\ x>0$.** **β.** **Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη C_f.**

Λύση

α. Για κάθε $x>0$ είναι $x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f''(x)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f''(x)=\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+c_1,\ (1)$. Είναι: $f'(1)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{1}}-\frac{1}{1}e^{\frac{1}{1}}+c_1=0 \Leftrightarrow 0=e-e+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

$(1) \Leftrightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x)=\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow f(x)=xe^{\frac{1}{x}}+c\ (2).$

Για $x=1$ η σχέση (2) δίνει $f(1)=1\cdot e^{\frac{1}{1}}+c \Leftrightarrow e=e+c \Leftrightarrow 0=c.\quad (2)\Leftrightarrow f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\ x>0.$

β. **1^o Πεδίο ορισμού:** $A=(0,+\infty)$.

2^o Συνέχεια: Η f είναι συνεχής στο $A=(0,+\infty)$, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $x, e^{\frac{1}{x}}$ (είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $e^x, \frac{1}{x}$).

3^o Μονοτονία - Ακρότατα - Κυρτότητα – Σημεία Καμπής:

Για κάθε $x>0$, έχουμε: $f'(x)=f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	e ελάχιστο	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και έχει ελάχιστη τιμή $f(1)=e$. Για κάθε $x>0$, είναι $f''(x)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}>0$, άρα, η f είναι κυρτή στο A και η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

4^o Συμπεριφορά στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού –Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)\ (\text{είναι της μορφής } 0\cdot(+\infty))=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\left(\text{είναι της μορφής}\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty.\quad \left(\text{Θέσαμε } y=\frac{1}{x}, \text{ οπότε } \lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{y\to 0}e^y=+\infty\cdot e^0=+\infty.$$

(Θέσαμε $y=\frac{1}{x}$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.)

- Επειδή $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

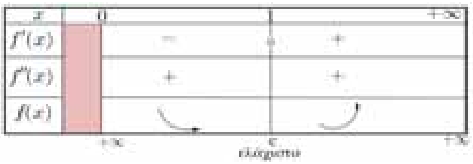
$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}e^y=e^0=1.$$

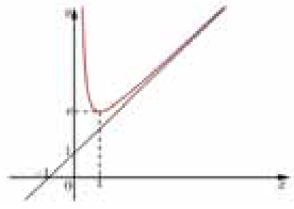
$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\left(\text{είναι της μορφής}\ \frac{0}{0}\right)\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

Άρα, η $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5ο Πίνακας Μεταβολής - Γραφική Παράσταση:





5.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\sqrt{x}, x>0$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη και $3x-1\geq 2\ln x+2\sqrt{x},\ x>0$.

Λύση: α. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0\Rightarrow f(A)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

β. $y-1=\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

γ. Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, οπότε, η f είναι κοίλη στο $A=(0,+\infty)$, άρα,

$$f(x)\leq\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln x+\sqrt{x}\leq\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\ln x+2\sqrt{x}\leq 3x-1,\ x>0.$$

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, • $f(2)=2$, • $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3$, • $f''(x)\neq0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Να αποδείξετε ότι: α. $f(0)=0$ και $f'(0)=9$,

β. η f ΄ έχει το πολύ μια ρίζα στο (0, 2)

γ. υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$,

δ. υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

Λύση: α. Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\eta\mu 3x$ με $\eta\mu 3x\neq0$ και $\lim_{x\to0}g(x)=3$.

- Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως και στο $x_0=0$, έτσι

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(g(x)\eta\mu 3x\right)=3\cdot0=0.$$

- Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, έχουμε

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)\eta\mu 3x}{x}=\lim_{x\to0}g(x)\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\cdot3=9.$$

β. Αν η f΄ είχε δύο ρίζες στο (0, 2), τότε από το Θεώρημα Rolle, η f΄΄ θα είχε ρίζα στο (0, 2), άτοπο, γιατί $f''(x)\neq0$ για $x\in(0,2)$, επομένως, η f΄ έχει το πολύ μια ρίζα στο (0, 2)

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-2$, που είναι συνεχής στο [0, 2] με $h(0)=-2<0$ και $h(2)=f(2)+2-2=2>0$, έτσι $h(2)=f(2)+2-2=2>0$, οπότε, από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+\xi-2=0\Leftrightarrow f(\xi)=2-\xi$.

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $[0,\xi]$, $[\xi,2]$, οπότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχουν $\xi_1 \in (0,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,2)$, με

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{2-\xi}{\xi} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(\xi)}{2-\xi}=\frac{2-(2-\xi)}{2-\xi}=\frac{\xi}{2-\xi}.$$

Έτσι,
$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{2-\xi}{\xi}\frac{\xi}{2-\xi}=1.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha>0$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=0=f(\beta)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ με $x_1f'(x_1)=f(x_1)$ και ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $M(x_1,f(x_1))$ περνάει από την αρχή των αξόνων,

ii) Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη $g(x)=e^{\frac{x}{k}}f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ με $k\neq 0$ και υπάρχει $x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $kf'(x_2)+f(x_2)=0$,

β. Αν επιπλέον η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

ii) υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Λύση: α. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x)=\frac{f(x)}{x}$, που είναι

- συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\phi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
- $\phi(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0=\frac{f(\beta)}{\beta}=\phi(\beta)$.

Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη ϕ στο [α, β], γι΄ αυτό θα υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:
$$\phi'(x_1)=0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x_1)-f(x_1)}{x_1^2}=0 \Leftrightarrow x_1f'(x_1)=f(x_1),\ (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_1,f(x_1))$ είναι: $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ η οποία επαληθεύεται για y=x=0 λόγω της (1). Επομένως η εφαπτόμενη αυτή περνάει από την αρχή των αξόνων.

ii) Για τη g ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x)=\frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}f(x)+e^{\frac{x}{k}}f'(x)$
- $g(\alpha)=e^{\frac{\alpha}{k}}f(\alpha)=e^{\frac{\alpha}{k}}\cdot 0=0$ και $g(\beta)=e^{\frac{\beta}{k}}f(\beta)=e^{\frac{\beta}{k}}\cdot 0=0$ άρα $g(\alpha)=g(\beta)$.

Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο [α, β], οπότε θα υπάρχει $x_2\in(\alpha,\beta)$ με:
$$g'(x_2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{k}e^{\frac{x_2}{k}}f(x_2)+e^{\frac{x_2}{k}}f'(x_2)=0 \Leftrightarrow kf'(x_2)+f(x_2)=0$$

β. i) Αν δεν ίσχυε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)\geq 0$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στα [α, ξ] και [ξ, β] έχουμε:

- $f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}$ με $\alpha<\xi_1<\xi$,
- $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}=\frac{-f(\xi)}{\beta-\xi}$ με $\xi<\xi_2<\beta$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) και $\xi_1<\xi_2$, έχουμε: $f'(\xi_1)<f(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}<\frac{-f(\xi)}{\beta-\xi}$

Αν ήταν $f(\xi)=0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει 0 < 0, άτοπο.

- Αν ήταν $f(\xi)>0$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $\dfrac{1}{\xi-\alpha}<\dfrac{-1}{\beta-\xi} \Leftrightarrow \beta-\xi<-\xi+\alpha \Leftrightarrow \beta<\alpha$, άτοπο.

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

ii) Επειδή εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο [α, β], θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β), το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x\in(\alpha,x_0)$ είναι $f'(x)<f'(x_0)=0$.

Για $x\in(x_0,\beta)$ είναι $f'(x)>f'(x_0)=0$

Έτσι έχουμε τον διπλανό πίνακα.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

x	α		x_0		β
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	0
			Ο.Ε.		

Σχόλιο: Σε μια ενιαία παρουσίαση του ερωτήματος β) θα είχαμε: Η f είναι συνεχής στο [α, β] οπότε απ' το ΘΜΕΤ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σ' αυτό. Αλλά, $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε η μια ακρότατη τιμή της προκύπτει σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_o του [α, β] και απ' το Θ. Fermat έχουμε: $f'(x_o)=0$, το οποίο, λόγω της μονοτονίας της f' είναι μοναδικό. Εύκολα πλέον από τη μονοτονία της f' συμπεραίνουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x<x_o$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>x_o$, οπότε από τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ολικό ελάχιστο και η μέγιστη τιμή της προκύπτει όταν $x=\alpha$ ή $x=\beta$. Δεδομένου ότι $f(\alpha)=f(\beta)=0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ έχουμε $f(x)<0$

8. Όταν κοιτάζουμε μια φωτεινή πηγή της οποίας η φωτεινότητα $x(x>0)$ αυξάνεται, το μάτι μας αντιδρά μειώνοντας το εμβαδόν Ε της κόρης του, σύμφωνα με τον πειραματικό νόμο:

$E(x)=\dfrac{40+24x^{0,4}}{1+4x^{0,4}}$, όπου το Ε το μετράμε σε mm^2 και το x σε ανάλογες μονάδες φωτεινότητας.

α. Να αποδείξετε ότι το Ε μειώνεται καθώς το x αυξάνεται.

β. Να αποδείξετε ότι ενώ, το Ε μειώνεται συνεχώς καθώς το x αυξάνεται δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από ένα σταθερό αριθμό.

γ. Να εξετάσετε κατά πόσον ο ρυθμός μεταβολής του Ε αυξάνεται ή μειώνεται καθώς το x αυξάνεται.

δ. Να βρείτε τη μέγιστη ή και την ελάχιστη τιμή του Ε, αν υπάρχουν.

ε. Ποια είναι η γραφική παράσταση του Ε ως συνάρτηση του x;

Λύση: α. Για κάθε $x>0$, έχουμε $E(x)=8\dfrac{5+3x^{0,4}}{1+4x^{0,4}}$, έτσι

$$E'(x)=8\frac{(5+3x^{0,4})'(1+4x^{0,4})-(5+3x^{0,4})(1+4x^{0,4})'}{(1+4x^{0,4})^2}=\frac{-54,4x^{-0,6}}{(1+4x^{0,4})^2}<0$$

Επομένως η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γι΄ αυτό όσο αυξάνεται το x (η φωτεινότητα της πηγής) τόσο μειώνεται το $E(x)$ (το εμβαδόν της κόρης του ματιού).

β. Είναι

$$\lim_{x\to 0}E(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{40+24x^{0,4}}{1+4x^{0,4}}=\frac{40+24\cdot 0}{1+4\cdot 0}=40$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}E(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{40+24x^{0,4}}{1+4x^{0,4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{0,4}\left(\dfrac{40}{x^{0,4}}+24\right)}{x^{0,4}\left(\dfrac{1}{x^{0,4}}+4\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{40}{x^{0,4}}+24}{\dfrac{1}{x^{0,4}}+4}=\frac{0+24}{0+4}=\frac{24}{4}=6$$

Επειδή η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$, είναι $E\big((0,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}E(x),\lim\limits_{x\to 0}E(x)\right)=(6,40)$

Έτσι, $E(x)>6$ για κάθε $x>0$.

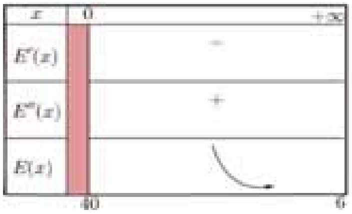
γ. Για κάθε $x>0$ είναι $E''(x)=-54,4\left(\dfrac{x^{-0,6}}{(1+4x^{0,4})^2}\right)'=54,4\dfrac{0,6x^{-1,6}+5,6x^{-1,2}}{(1+4x^{0,4})^3}>0.$

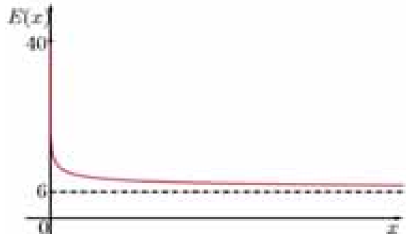
Άρα, η $E'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$, γι' αυτό ο ρυθμός μεταβολής της $E(x)$ αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται.

δ. Στο υποερώτημα **(β.)**, δείξαμε ότι $E(A)=(6,40)$, οπότε η $E(x)$ δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο.

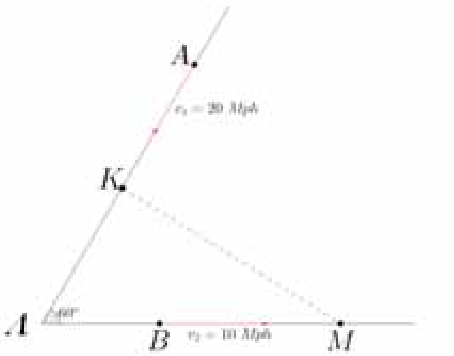
ε. ● Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)=6$, η ευθεία $y=6$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $E(x)$.

Από τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε τον πίνακα μεταβολής και τη γραφική παράσταση.





9. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ δύο πλοία Π_1 και Π_2 απέχουν από το λιμάνι Λ αποστάσεις 200 μίλια και 100 μίλια αντίστοιχα. Το Π_1 κατευθύνεται προς το λιμάνι με ταχύτητα $v_1=20$μίλια / ώρα, το Π_2 απομακρύνεται από το λιμάνι με ταχύτητα $v_2=10$μίλια / ώρα. Οι πορείες των πλοίων είναι ευθύγραμμες, όπως φαίνεται στο σχήμα και σχηματίζουν γωνία 60°.



α. **Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t\in[0,10]$, η απόσταση των πλοίων είναι: $d(t)=10\sqrt{7t^2-60t+300}$ μίλια.**

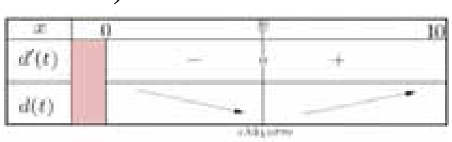
β. **Ποια χρονική στιγμή η απόσταση των πλοίων γίνεται ελάχιστη;**

γ. **Τη χρονική στιγμή $t_1=2h$, η απόσταση των πλοίων μειώνεται και με ποιο ρυθμό;**

δ. **Να σχεδιάσετε πρόχειρα την απόσταση των πλοίων ως συνάρτηση του χρόνου.**

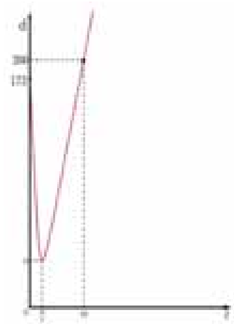
Λύση: α. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t\in[0,10]$ τα πλοία βρίσκονται στις θέσεις: Κ και Μ, αντίστοιχα. Είναι: $(K\Lambda)=200-20t, (M\Lambda)=100+10t$, οπότε από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε: $KM^2=K\Lambda^2+M\Lambda^2-2K\Lambda M\Lambda\sigma\upsilon\nu 60^\circ=$
$=(200-20t)^2+(100+10t)^2-(200-20t)(100+10t)=100(7t^2-60t+300)$

Άρα, $d(t)=10\sqrt{7t^2-60t+300},\ t\in[0,10]$.



β. $d'(t)=\dfrac{10(14t-60)}{2\sqrt{7t^2-60t+300}}$ και $d'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{30}{7}\approx 4{,}3h.$

Το πρόσημο της παραγώγου, η μονοτονία της συνάρτησης και το ακρότατο, φαίνονται στον διπλανό πίνακα.



γ. $d'(2)=-\dfrac{160}{\sqrt{208}}$. Η απόσταση των πλοίων τη χρονική στιγμή $t=2h$ ελαττώνεται με ρυθμό $\dfrac{160}{\sqrt{208}}\approx 11$μίλια / h.

δ. $d(0)=10\sqrt{300}=100\sqrt{3}\approx 173.\ \ d(10)=200.\ \ d\left(\dfrac{30}{7}\right)\approx 13.$

Παρατήρηση: Η γραφική παράσταση της d είναι τμήμα υπερβολής.

Βιβλιογραφία:

1. T. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, τόμος Ι, Ατλαντίς – Μ. Πεχλιβανίδης & Σια, Αθήνα.
2. Π. Βλάμος, Ανάλυση (3 τόμοι), «V», Αθήνα 1997.
3. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι: Συμμετρία, 1997.
4. Σ. Ντούγιας, Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι, Leader Book, Αθήνα 2003.
5. Μ. Τουμάσης, Γ. Τσαπακίδης, 200 Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου, Σαββάλας, Αθήνα, 2006.
6. Μ. Τουμάσης, Γ. Τσαπακίδης, Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας, Σαββάλας, Αθήνα, 2007.
7. Thomas, Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.
8. Γ. Τσαπακίδης Αναλύοντας την Ανάλυση, Εκδόσεις Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2017.

Μια γνωστή άσκηση από το σχολικό βιβλίο

Προεκτάσεις, συμπληρώσεις και παραλλαγές

Μάκης Χατζόπουλος και Χρήστος Μαρούγκας – 3ο Λύκειο Κηφισιάς

Άσκηση: Β6 [σελ. 152 σχολικό βιβλίο]

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2,\ \text{με}\ 0<\alpha<\beta<\gamma}$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Εισαγωγή: Αρχικά θα παρουσιάσουμε τη λύση που κάνουμε στους μαθητές μας, στη συνέχεια θα δώσουμε **εναλλακτικές προσεγγίσεις**. Επίσης, θα προσθέσουμε μερικά βοηθητικά ερωτήματα για να την κάνουμε προσιτή στους μαθητές. Τέλος, θα κλείσουμε με μερικές προεκτάσεις – άλυτες ασκήσεις που θα συμβάλλουν στην **καλύτερη κατανόηση** του θέματος. Ας ξεκινήσουμε από τη λύση της άσκησης:

Α. Ενδεικτική αναλυτική λύση (α΄ τρόπος)

Βήμα 1ο : Η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, παραγωγίσιμη στα ανοικτά διαστήματα (α,β) και (β,γ) με $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$, άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Βήμα 2ο : Η παράγωγος της f είναι:

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^2\\&\quad+2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)\\&=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&\quad\cdot\left[(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)\right]\\&=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&\quad\cdot\left[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right]\end{aligned}$$

Βήμα 3ο: Έχουμε,

$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&\quad\cdot\left[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right]=0\\&\Leftrightarrow x=\alpha\ \text{ή}\ x=\beta\ \text{ή}\ x=\gamma\\&\quad\text{ή}\ 3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\\&\Leftrightarrow x=\alpha\ \text{ή}\ x=\beta\ \text{ή}\ x=\gamma\ \text{ή}\ x=\xi_1\ \text{ή}\ x=\xi_2\end{aligned}$$

διότι τα ξ_1,ξ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και επειδή είναι διαφορετικά από τα α, β και γ θα είναι ρίζες της εξίσωσης

$$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\,.$$

Επίσης, $f'(x)>0\Leftrightarrow 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$$\left[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right]>0$$

Πίνακας προσήμων

x	$-\infty$		α		ξ_1		β		ξ_2		γ		$+\infty$
$2(x-\alpha)$		−	0	+		+		+		+		+	
$x-\beta$		−		−		−	0	+		+		+	
$x-\gamma$		−		−		−		−		−	0	+	
$x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Βήμα 4ο : Ο πίνακας μεταβολών για την f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$f'(x)$	−	+	−	+	−	+	
f	↘	↗	↘	↗	↘	↗	

άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma$ και τοπικά μέγιστα στα σημεία $x_4=\xi_1$ και $x_5=\xi_2$.

Σημείωση 1η: Εύκολα αποδεικνύεται ότι όλα τα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης f είναι και ολικά, διότι $f(x)\geq 0=f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ κάτι που μπορούμε να το σημειώσουμε από την αρχή της επίλυσής μας.

Επίσης ένας **διαφορετικός τρόπος** (β΄ τρόπος) προσέγγισης, που θυμίζει αρκετά την άσκηση 8 [σελ. 81 του σχολικού βιβλίου], είναι ο εξής: Έχουμε,

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$\left[(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)\right]$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+\\&+(x-\alpha)(x-\beta),\ x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Έχουμε ότι,

- η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ ως πολυωνυμική και
- $g(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)<0<g(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$
- $g(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)<0<g(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$ και $g(\beta)g(\gamma)<0$, επομένως υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιες ώστε $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$, όμως η εξίσωση $g(x)=0$ είναι δευτέρου βαθμού άρα οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ίδιος με τον Α΄ τρόπο επίλυσης.

Τέλος, ένας πιο γρήγορος και συνοπτικός τρόπος επίλυσης που αποδεικνύει όμως δύο τουλάχιστον τοπικά μέγιστα **(γ΄ τρόπος)** και δεν απαντάει ακριβώς στην άσκησή μας είναι ο εξής:

Αποδεικνύουμε με ανάλογο τρόπο ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικά μέγιστα στα σημεία $x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma$.

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, **άρα από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής** θα παρουσιάζει μια (τουλάχιστον) μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή στο καθένα διάστημα. Όμως ήδη η f παρουσιάζει στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ από μια θέση ελαχίστου, που είναι στα άκρα των διαστημάτων, άρα η θέση του μεγίστου θα βρίσκεται στα εσωτερικά σημεία των διαστημάτων αυτών. Δηλαδή υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\gamma,\delta)$ τέτοια ώστε

$$f(x)\le f(\xi_1) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta)$$

και $$f(x)\le f(\xi_2) \text{ για κάθε } x\in(\beta,\gamma).$$

Επομένως, τα σημεία ξ_1,ξ_2 είναι τοπικά μέγιστα της f (χωρίς να έχουμε αποδείξει ότι είναι και μοναδικά).

Σημείωση 2η: Με τον παραπάνω τρόπο θέλουμε να παρουσιάσουμε την εξής γενική πρόταση που απαντάει εν μέρει στην άσκηση του σχολικού βιβλίου: «Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία παρουσιάζει στα σημεία α και β τοπικό ελάχιστο, τότε η f θα παρουσιάζει μέγιστο σ' ένα τουλάχιστον σημείο του (α,β).» Με μια γνώση που θα σημειωθεί από τις επίσημες λύσεις του σχολικού βιβλίου μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι τα τοπικά μέγιστα είναι μοναδικά.

Σημείωση 3η: Η εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$$

αποδεικνύεται ότι έχει δύο άνισες ρίζες ξ_1 και ξ_2, χωρίς τη χρήση των θεωρημάτων της Ανάλυσης, ως εξής: $\Delta=4(\alpha+\beta+\gamma)^2-12(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=4\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right]$$
$$=4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha-3\alpha\beta-3\beta\gamma-3\gamma\alpha\right)$$
$$=4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)$$
$$=2\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)$$
$$=2\left[\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2\right)+\left(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2\right)\right]$$
$$=2\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]>0.$$

Για να είναι πλήρης η λύση πρέπει να αποδείξουμε ότι οι ρίζες ξ_1,ξ_2 είναι διαφορετικές από τους αριθμούς α, β και γ. Η απόδειξη δίνεται από μια πρόταση που χρησιμοποιεί στις λύσεις το σχολικό εγχειρίδιο.

Β. Η άσκηση του σχολικού βιβλίου με βοηθητικά ερωτήματα.

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 \text{ με } \alpha<\beta<\gamma.}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σε τρεις διαφορετικές θέσεις ολικό ελάχιστο το οποίο να υπολογίσετε.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πέντε κρίσιμα σημεία.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τέσσερα σημεία καμπής.

Γ. Γενίκευση άσκησης σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{2\nu+1})^2$$
$$\text{με } \alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots<\alpha_{2\nu+1}$$

και $\nu\in\mathbb{N}$ παρουσιάζει σε $2\nu+1$ διαφορετικά σημεία ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και σε 2ν διαφορετικά σημεία τοπικά μέγιστα.

Υπόδειξη:

Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$f(x)\ge 0=f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\ldots=f(\alpha_{2\nu+1})$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το 0, σε καθένα από τα $2\nu+1$ διαφορετικά σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{2\nu+1}$.

Επίσης, η συνάρτηση f ικανοποιεί το θεώρημα Rolle στα διαστήματα

$$[\alpha_1,\alpha_2],[\alpha_2,\alpha_3],\ldots,[\alpha_{2\nu},\alpha_{2\nu+1}]$$

άρα υπάρχουν

$\xi_1\in(\alpha_1,\alpha_2),\ \xi_2\in(\alpha_2,\alpha_3),\ \ldots,\ \xi_{2\nu}\in(\alpha_{2\nu},\alpha_{2\nu+1})$

τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\ldots=f'(\xi_{2\nu})=0$$

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση

$$\underbrace{2+2+\ldots+2}_{2\nu+1 \text{ προσθετέοι}}=2(2\nu+1)=4\nu+2 \text{ βαθμού,}$$

η παράγωγός της είναι πολυωνυμική συνάρτηση $4\nu+1$ βαθμού. Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν έχει άλλες, εκτός από τις

$$\alpha_1<\xi_1<\alpha_2<\xi_2<\alpha_3<\ldots.<\xi_{2\nu}<\alpha_{2\nu+1}$$

ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, η συνάρτηση f' γράφεται ως εξής:

$$f'(x)=(x-\alpha_1)(x-\xi_1)(x-\alpha_2)(x-\xi_2)(x-\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(x-\xi_{2\nu})(x-\alpha_{2\nu+1})$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	α_1		ξ_1		α_2		ξ_2		α_3		$\xi_{2\nu}$		$\alpha_{2\nu+1}$	$+\infty$
$x-\alpha_1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		....		$+$		$+$
$x-\xi_1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		....		$+$		$+$
$x-\alpha_2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		....		$+$		$+$
$x-\xi_2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		....		$+$		$+$
$x-\alpha_3$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	....		$+$		$+$
....	....		....		....		....		....		....		....		....
$x-\xi_{2\nu}$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		....	0	$+$		$+$
$x-\alpha_{2\nu+1}$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		....		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	....	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗		↘				↘		↗

Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικά μέγιστα στα σημεία $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{2\nu}$ και ολικά ελάχιστα, όπως είδαμε και παραπάνω, στα σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{2\nu+1}$

Σημείωση: Δείτε μια αναλυτική εξήγηση των προσήμων στον παραπάνω πίνακα:

- Τα μείον της πρώτης στήλης είναι σε πλήθος $2\nu+1$, άρα περιττό πλήθος, οπότε τα γινόμενά τους είναι μείον.
- Τα μείον της δεύτερης στήλης είναι σε πλήθος 2ν, άρα άρτιο πλήθος, οπότε τα γινόμενά του είναι +.
- Τα μείον της τρίτης στήλης είναι σε πλήθος $2\nu-1$, άρα περιττό πλήθος οπότε τα γινόμενά τους είναι μείον, κ.ο.κ.
- Τα μείον της προτελευταίας στήλης είναι ένα άρα το πρόσημο της f' είναι μείον.
- Και η τελευταία στήλη έχει μόνο +, άρα το πρόσημο της f' είναι +.

Η άσκηση μπορεί να προσεγγιστεί **εναλλακτικά** και με το εξής τρόπο:

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε $2\nu+1$ διαφορετικά σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{2\nu+1}$ διότι

$$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2\cdot...\cdot(x-\alpha_{2\nu+1})^2\geq 0=$$
$$=f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=...=f(\alpha_{2\nu+1})$$

Εφαρμόζοντας το **Θεώρημα Μέγιστης** και **Ελάχιστης Τιμής για τη f** στα διαστήματα

$$[\alpha_1,\alpha_2],[\alpha_2,\alpha_3],...,[\alpha_{2\nu},\alpha_{2\nu+1}]$$

βρίσκουμε από ένα (τουλάχιστον) τοπικό μέγιστο στο κάθε εσωτερικό διάστημα, άρα η f παρουσιάζει (τουλάχιστον) 2ν τοπικά μέγιστα.

Όμως η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $4\nu+1$ βαθμού , άρα δεν έχει άλλες, εκτός από τις $4\nu+1$ ρίζες

$$\alpha_1<\xi_1<\alpha_2<\xi_2<\alpha_3<....<\xi_{2\nu}<\alpha_{2\nu+1},$$

στο $\mathbb{R}$, οπότε τα σημεία των τοπικών μεγίστων είναι μοναδικά.

Δ. Άλυτες ασκήσεις [προεκτάσεις–παραλλαγές]

Για εξάσκηση, δείτε μερικές επιπλέον ασκήσεις που έχουν την ίδια φιλοσοφία με την άσκηση του σχολικού βιβλίου.

1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

παρουσιάζει σε τρία διαφορετικά σημεία ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και σε δύο διαφορετικά σημεία τοπικά μέγιστα.

2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x)=(x-\alpha)^{2\nu}(x-\beta)^{2\nu}(x-\gamma)^{2\nu}$ με $\alpha<\beta<\gamma$

και $\nu\in\mathbb{N}^*$, παρουσιάζει σε τρία διαφορετικά σημεία ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και σε δύο διαφορετικά σημεία τοπικά μέγιστα.

3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2\cdot...\cdot(x-2021)^2$$

παρουσιάζει σε 2021 διαφορετικά σημεία ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και σε 2020 διαφορετικά σημεία τοπικά μέγιστα.

4) α) Αν για μια πολυωνυμική συνάρτηση f με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του τρία, υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση $\pi(x)$ τέτοια, ώστε

$$f(x)=(x-\rho)^3\pi(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$f(\rho)=f'(\rho)=f''(\rho)=0.$$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)^3 \text{ με } \alpha<\beta$$

έχει ένα τοπικό ελάχιστο και τέσσερα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)^2 \text{ με } \alpha<\beta$$

έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και τρία σημεία καμπής.

Σημείωση: Η τετμημένη Μ του τοπικού μεγίστου της f χωρίζει το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε λόγο $\frac{3}{3+2}$, δηλαδή αν $A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$ και $M\left(\frac{2\alpha+3\beta}{5},0\right)$, τότε: $\frac{(AM)}{(AB)}=\frac{3}{5}$ και $\frac{(MB)}{(AB)}=\frac{2}{5}$.

5) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \text{ με } \alpha<\beta$$

παρουσιάζει σε δύο διαφορετικές θέσεις ολικό ελάχιστο, ένα τοπικό μέγιστο και δύο σημεία καμπής.

6) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=x^2(e^x-e)^2$$

παρουσιάζει σε δύο διαφορετικές θέσεις ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και ένα τοπικό μέγιστο.

7) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=x^2\left(e^{x^2}-e\right)^2$$

παρουσιάζει σε τρεις διαφορετικές θέσεις ολικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε και δύο τοπικά μέγιστα.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 354 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:

i. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$

ii. $f(0)=0,\ f(1)=1$

iii. $f'(0)=f'(1)=0$

α. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $|f''(\xi)|\geq 4$

Στην περίπτωση κίνησης, το παραπάνω ερώτημα «μεταφράζεται» ως εξής:

Αν ένα κινητό διατρέξει μοναδιαίο διάστημα σε μοναδιαίο χρόνο με αρχική και τελική ταχύτητα μηδέν, τότε σε κάποια στιγμή της κίνησής του έχει επιτάχυνση ή επιβράδυνση $\alpha\geq 4$

β. Έστω $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και μη σταθερή συνάρτηση με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$|f'(\xi)|\geq\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια

ΛΥΣΗ Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα

α. Έστω ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $|f''(x)|<4$. Τότε έχουμε $f''(x)+4>0$ και $f''(x)-4<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ απ' όπου προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $g_1(x)=f'(x)+4x$ και $g_2(x)=f'(x)-4x$ είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα στο $[0,1]$. Σε ότι αφορά στην πρώτη συνάρτηση έχουμε: $g_1(0)=0,\ g_1(1)=4$ οπότε $0<f'(x)+4x<4$, απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση $\varphi_1(x)=f(x)+2x^2-4x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$. Έτσι, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $\varphi_1(0)=0$ και η ελάχιστη είναι ίση με $\varphi_1(1)=-1$, οπότε:

$$-1<f(x)+2x^2-4x<0\Rightarrow -2x^2+4x-1<f(x)<-2x^2+4x$$

Η τελευταία με $x=\frac{1}{2}$ δίνει: $\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{2}$, (1)

Σε ότι αφορά στη δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$g_2(0)=0,\ g_2(1)=-4$$

οπότε $-4<f'(x)-4x<0$, απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση $\varphi_2(x)=f(x)-2x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$. Έτσι, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $\varphi_2(0)=0$ και η ελάχιστη είναι ίση με $\varphi_2(1)=-1$, οπότε:

$$-1<f(x)-2x^2<0\Rightarrow 2x^2-1<f(x)<2x^2$$

Η τελευταία με $x=\frac{1}{2}$ δίνει: $-\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$, (2)

Οι ανισότητες όμως (1) και (2) οδηγούν σε άτοπο, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $|f''(\xi)|\geq 4$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ που είναι αρχική της f και έχει τις ιδιότητες

$$h(\alpha)=0,\ h(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt,\ h'(\alpha)=f(\alpha)=0,$$

$$h'(\beta)=f(\beta)=0$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$|h''(\xi)|\geq\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}h(\beta)$$

Αν $h(\beta)\leq 0$, τότε είναι προφανής. Έστω $h(\beta)>0$ και ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$|h''(x)|<\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}h(\beta)$$

Αν θέσουμε $\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}h(\beta)=\kappa$ τότε έχουμε

$|h''(x)|<\kappa\Leftrightarrow -\kappa<h''(x)<\kappa$,για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Με διαδικασία ανάλογη εκείνης του ερωτήματος (α) βρίσκουμε ότι καθεμιά από τις οι συναρτήσεις

$$h(x)+\kappa\frac{(\beta-\alpha)^2}{2},\quad h(x)-\kappa\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, οπότε

- $h(\beta)<h(x)+\kappa\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\Rightarrow\kappa\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}-\kappa\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}<h(x)$

απ' όπου προκύπτει ότι $\frac{\kappa(\alpha-\beta)^2}{8}<h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, (3)

- $h(x)-\frac{\kappa(x-\alpha)^2}{4}<0\Rightarrow h(x)<\frac{\kappa(x-\alpha)^2}{4}$

απ' όπου προκύπτει ότι $h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{\kappa(\beta-\alpha)^2}{8}$, (4)

Οι (3) και (4) οδηγούν σε άτοπο, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $|h''(\xi)|\geq\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}h(\beta)$

Η h όμως είναι αρχική της f, οπότε η τελευταία ανισότητα γράφεται $|f'(\xi)|\geq\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$

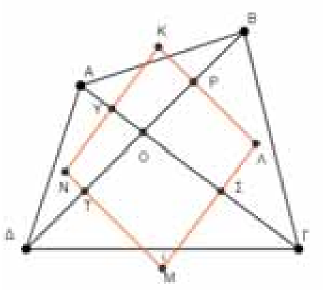
Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 355 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $ΚΛ\cdot ΒΔ = ΚΝ\cdot ΑΓ$

Τσιλιακός Λευτέρης - Χαλάνδρι

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης - Αγ. Παρασκευή



Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει άμεσα ότι οι ευθείες ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ και ΝΚ είναι μεσοκάθετες των τμημάτων ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ και ΟΑ και έστω Ρ, Σ, Τ και Υ τα αντίστοιχα μέσα των παραπάνω τμημάτων, από τα οποία διέρχονται αυτές.

Τότε, θα ισχύει $ΟΤ + ΟΡ = \frac{ΟΔ}{2} + \frac{ΟΒ}{2} \Rightarrow ΡΤ = \frac{ΒΔ}{2}$, (1)

και $ΟΣ + ΟΥ = \frac{ΟΓ}{2} + \frac{ΟΑ}{2} \Rightarrow ΣΥ = \frac{ΑΓ}{2}$, (2)

Οι ΚΝ και ΛΜ είναι παράλληλες μεταξύ τους ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΓ. Επίσης οι ΚΛ και ΝΜ είναι παράλληλες μεταξύ τους ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΒΔ. Συνεπώς, το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο, με ύψη τα ΡΤ και ΣΥ, οπότε $(ΚΛΜΝ) = ΚΛ\cdot ΡΤ = ΚΝ\cdot ΣΥ \overset{(1),\,(2)}{\Rightarrow}$

$$\overset{(1),\,(2)}{\Rightarrow} (ΚΛΜΝ) = \frac{ΚΛ\cdot ΒΔ}{2} = \frac{ΚΝ\cdot ΑΓ}{2} \Rightarrow (ΚΛΜΝ) = ΚΝ\cdot ΑΓ$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης ο συνάδελφος Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσσα.

Επισήμανση: Επισημαίνουμε ότι ο συνάδελφος Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσσα λόγω μη έγκαιρης εσωτερικής διαπεραίωσης της αλληλογραφίας, εξαιτίας της παρατεταμένης μη κανονικότητας, δεν αναφέρθηκε ως λύτης και στα προβλήματα 339, 352, 353.

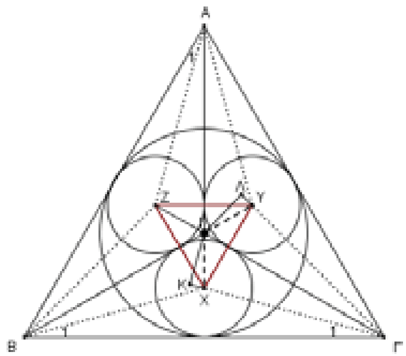
ΑΣΚΗΣΗ 356 (ΤΕΥΧΟΣ 116)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του. Αν Χ, Υ, Ζ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΒΙΓ, ΓΙΑ και ΑΙΒ αντίστοιχα και το τρίγωνο ΧΥΖ είναι ισόπλευρο, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι επίσης ισόπλευρο.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (από τον ίδιο)

Είναι φανερό ότι τα τμήματα ΑΖ, ΑΙ, ΑΥ χωρίζουν την γωνία Α σε 4 ίσες γωνίες καθεμιά από τις οποίες είναι ίση με $\hat{Α}_1$. Ομοίως συμβολίζουμε με $\hat{Β}_1$ και $\hat{Γ}_1$ καθεμιά από τις ίσες γωνίες που σχηματίζονται στις κορυφές Β και Γ του τριγώνου. Καθεμιά από αυτές τα γωνίες είναι μικρότερη από 45^o και το άθροισμά τους είναι $\hat{Α}_1 + \hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1 = \frac{180^o}{4}45^o$



Επιπλέον,

$$Χ\hat{Ι}Γ = Χ\hat{Ι}Β = \frac{Β\hat{Ι}Γ}{2} = \frac{180^o - 2(\hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1)}{2} = 90^o - (\hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1) = 45^o - \hat{Α}_1$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$Γ\hat{Ι}Υ = Α\hat{Ι}Υ = 45^o + Β_1 \text{ και } Α\hat{Ι}Ζ = Β\hat{Ι}Γ = 45^o + \hat{Γ}_1$$

οπότε $Χ\hat{Ι}Υ = Χ\hat{Ι}Γ + Γ\hat{Ι}Υ = 90^o + \hat{Β}_1 + \hat{Α}_1 = 135^o - \hat{Γ}_1$

και με τον ίδιο τρόπο

$$Υ\hat{Ι}Ζ = 135^o - \hat{Α}_1 \text{ και } Ζ\hat{Ι}Χ = 135^o - \hat{Β}_1$$

Έστω ΙΚ η κάθετη από το Ι στην ΓΧ. Έχουμε:

$ΙΚ = ΙΧ\cdot ημ(45 + Α_1 + Γ_1) = ΙΧ\cdot ημ(90 - Β_1) = ΙΧ\cdot συνΒ_1$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $ΙΛ = ΙΥ\cdot συνΑ_1$. Αλλά η ΙΓ είναι διχοτόμος της $Υ\hat{Γ}Χ$ οπότε $ΙΚ = ΙΛ$ δηλαδή

$$ΙΧσυνΒ_1 = ΙΥ\cdot συνΑ_1$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς θεωρούμε ότι εργαζόμαστε σε τρίγωνο στο οποίο ισχύει $ΙΧ = συνΑ_1$ οπότε $ΙΥ = συνΒ_1$ και $ΙΖ = συνΓ_1$.

Το τρίγωνο ΧΥΖ είναι ισόπλευρο, οπότε $ΖΧ = ΖΥ$.

Από το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα ΧΥΙ και ΥΖΙ έχουμε: $ΖΧ^2 = ΖΥ^2$

$$\Rightarrow ΙΖ^2 + ΙΧ^2 - 2ΙΖ\cdot ΙΧσυνΖ\hat{Ι}Χ = ΙΖ^2 + ΙΥ^2 - 2ΙΖ\cdot ΙΥσυνΥ\hat{Ι}Ζ$$

$$\Rightarrow ΙΧ^2 - ΙΥ^2 = 2\cdot ΙΖ(ΙΧσυνΖ\hat{Ι}Χ - ΙΥσυνΥ\hat{Ι}Ζ)$$

$$\Rightarrow συν^2Α_1 - συν^2\hat{Β}_1 = 2\cdot συνΓ_1(συνΑ_1συνΖ\hat{Ι}Χ - συνΒ_1συνΥ\hat{Ι}Ζ)$$

με $Ζ\hat{Ι}Χ = 135^o - \hat{Β}_1$ και $Υ\hat{Ι}Ζ = 135^o - \hat{Α}_1$

Μετασχηματίζουμε χωριστά καθένα από τα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας.

Το πρώτο μέλος γράφεται:

$$(συνΑ_1 + συνΒ_1)(συνΑ_1 - συνΒ_1)$$

$$= -4συν\frac{Α_1 + Β_1}{2}συν\frac{Α_1 - Β_1}{2}ημ\frac{Α_1 + Β_1}{2}ημ\frac{Α_1 - Β_1}{2}$$

$$=-ημ(A_1+B_1)ημ(A_1-B_1)=ημ(45^o-Γ_1)ημ(B_1-A_1)$$

Το δεύτερο μέλος γράφεται:

$$2συνΓ_1[συνA_1(-συν(45^o+B_1))-συνB_1(-συν(45^o+A_1))]$$

$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}συνΓ_1[συνA_1(ημB_1-συνB_1)-συνB_1(ημA_1-συνA_1)]$$

$$=\sqrt{2}συνΓ_1(συνA_1ημB_1-συνB_1ημA_1)$$

$$=\sqrt{2}συνΓ_1ημ(A_1-B_1)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$ημ(45^o-Γ_1)ημ(B_1-A_1)=\sqrt{2}συνΓ_1ημ(B_1-A_1)$$

$$\Rightarrow ημ(B_1-A_1)[ημ(45^o-Γ_1)-\sqrt{2}συνΓ_1]=0$$

Εύκολα όμως βρίσκουμε ότι $ημ(45^o-Γ_1)-\sqrt{2}συνΓ_1<0$ οπότε αναγκαστικά $ημ(B_1-A_1)=0$ με τις γωνίες να περιέχονται στο διάστημα $(0,\,45^o)$.

Άρα $\hat{B}_1=\hat{Γ}_1$, οπότε $\hat{B}=\hat{Γ}$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $\hat{A}=\hat{B}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 357 (ΤΕΥΧΟΣ 117)

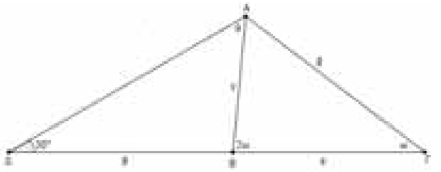
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{B}=2\hat{Γ}$. Στην προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $BΔ=AΓ$. Αν ισχύει $A\hat{Δ}B=30^o$, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι

1η ΛΥΣΗ Νερούτσος Κωνσταντίνος – Γλυφάδα.

Αν ονομάσουμε θ τη γωνία $B\hat{A}Δ$, τότε από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\frac{β}{ημθ}=\frac{γ}{ημ30^o}\Rightarrow 2ημθ=\frac{β}{γ},\ (1)$$



Από τον ίδιο νόμο στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{β}{ημ2ω}=\frac{γ}{ημω}\Rightarrow\frac{β}{γ}=\frac{ημ2ω}{ημω}\Rightarrow\frac{β}{γ}=2συνω,\ (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ημθ=συνω$, οπότε οι γωνίες θ, ω είναι συμπληρωματικές.

Επιπλέον,

$$2ω=θ+30^o\Rightarrow θ=2ω-30^o$$

οπότε έχουμε

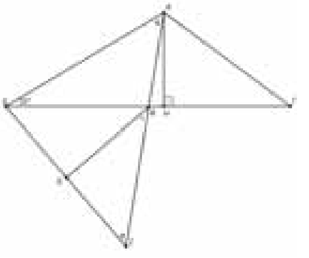
$$2ω-30^o+ω=90^o\Rightarrow 3ω=120^o\Rightarrow ω=40^o$$

Επομένως η γωνία Γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 40^o

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλης – Αγ. Παρασκευή, Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα και Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια και Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσσα. Ο συνάδελφος Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, εκτός από λύση όπως η προηγούμενη έστειλε και την παρακάτω Γεωμετρική λύση.

2η ΛΥΣΗ

Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα $BZ=AΓ$, οπότε το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. Στο τρίγωνο αυτό, η ΒΕ είναι και διάμεσος, δηλαδή $EZ=\frac{ΔZ}{2}$ και διχοτόμος οπότε $\hat{B}_1=\frac{Δ\hat{B}Z}{2}=\frac{A\hat{B}Γ}{2}=\frac{2\hat{Γ}}{2}=\hat{Γ}$



Αν ΑΗ είναι ύψος στο ΑΒΓ, τότε προφανώς $AH=\frac{AΔ}{2}$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΔ). Επιπλέον τα τρίγωνα ΗΑΓ και ΕΒΖ είναι ίσα, οπότε

$$AH=EZ\Rightarrow AH=\frac{ΔZ}{2}$$

Άρα, $AΔ=ΔZ$, οπότε $φ=90^o-\hat{Γ}$. Επίσης

$$\hat{B}=30^o+φ\Rightarrow φ=2\hat{Γ}-30^o$$

οπότε $2\hat{Γ}-30^o=90^o-\hat{Γ}\Rightarrow\hat{Γ}=40^o$

ΑΣΚΗΣΗ 358 (ΤΕΥΧΟΣ 117)

Έστω $f:[0,\,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=0$ και $f(1)=1$
- $\frac{1}{2}\le\frac{f(z)-f(y)}{f(y)-f(x)}\le 2$ για κάθε $x,\,y\in[0,\,1]$ με $0\le x\le y\le z\le 1$ και $z-y=y-x$

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{7}\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le\frac{4}{7}$

Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο

ΛΥΣΗ Ιωαννίδης Αντώνης - Λάρισα

Με $x=0,\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{2}{3}$ στη δοσμένη ισότητα παίρνουμε: $\frac{1}{2}\le\frac{f\left(\frac{2}{3}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)}{f\left(\frac{2}{3}\right)-f(0)}\le 2\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{f\left(\frac{2}{3}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)}{f\left(\frac{2}{3}\right)}\le 2$

η οποία, αν θέσουμε $f\left(\frac{1}{3}\right)=α,\ f\left(\frac{2}{3}\right)=β$ γράφεται

$$\frac{1}{2}\le\frac{β-α}{α}\le 2,\ (1)$$

Ομοίως, με $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3},\ z=1$ και τον ίδιο συμβολισμό, καταλήγουμε στην $\frac{1}{2}\le\frac{1-β}{β-α}\le 2,\ (2)$

Με πολλαπλασιασμό των (1), (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{4}\le\frac{1-\beta}{\alpha}\le 4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{1}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\le 4$$

Η (1) δίνει επίσης $\frac{1}{2}\le\frac{\beta}{\alpha}-1\le 2$ Με πρόσθεση των δυο τελευταίων ανισοτήτων έχουμε:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le\frac{1}{\alpha}-1\le 6\Rightarrow\frac{3}{4}\le\frac{1}{\alpha}-1\le 6\Rightarrow\frac{7}{4}\le\frac{1}{\alpha}\le 7$$

$\Rightarrow\frac{4}{7}\ge\alpha\ge\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{1}{7}\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le\frac{4}{7}$ που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα, Τσόπελας Ιωάννης – Αμαλιάδα και Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσσα.

ΑΣΚΗΣΗ 359 (ΤΕΥΧΟΣ 117)

Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο γραμμικές συναρτήσεις (συναρτήσεις οι οποίες είναι της μορφής $\alpha x+\beta$) οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες και έχουν τη ιδιότητα: ο αριθμός $f(x)$ είναι ακέραιος, αν και μόνο αν ο $g(x)$ είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ο αριθμός $f(x)-g(x)$ είναι ακέραιος.

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

Έστω $f(x)=\alpha x+\beta$, $g(x)=\alpha' x+\beta'$ οι δυο συναρτήσεις με $\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$, $\alpha'>0$

Επειδή $f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0\in\mathbb{Z}$, ο αριθμός $g\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ είναι ακέραιος , δηλαδή $\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha}\in\mathbb{Z}$, (1)

Ομοίως $f\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)=1\in\mathbb{Z}$, οπότε ο αριθμός $g\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$ είναι ακέραιος, δηλαδή $\left(\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\in\mathbb{Z}$, (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ο αριθμός

$$\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha}+\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha}=\frac{\alpha'}{\alpha}$$

είναι ακέραιος. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των συναρτήσεων f, g αποδεικνύουμε επίσης ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha}{\alpha'}$ είναι ακέραιος. Οι αριθμοί $\frac{\alpha'}{\alpha},\frac{\alpha}{\alpha'}$ είναι αντίστροφοι μεταξύ τους και θετικοί ακέραιοι, οπότε $\alpha=\alpha'$. Εύκολα πλέον από την (1) βρίσκουμε ότι $(\beta'-\beta)\in\mathbb{Z}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$f(x)-g(x)=\alpha x+\beta-(\alpha x+\beta')=\beta-\beta'=-(\beta'-\beta)$

δηλαδή ο αριθμός $f(x)-g(x)$ είναι ακέραιος.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια.

Προτεινόμενα Θέματα

371. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x, y, z, w, v ώστε να ισχύει $3x-5y+7z+11w=2v^5$

Τσιλιακός Ελευθέριος - Γαλάτσι

372. Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z καθένας από τους οποίους είναι μεγαλύτερος της μονάδας, ώστε να ισχύει

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο

373. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε να είναι: $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{AZ}{Z\Delta}=2$.

Τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ τέμνουν την διαγώνιο ΒΔ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$BK^2+\Delta\Lambda^2=K\Lambda^2$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

374. Στη λέξη «ΓΩΝΙΑ» διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Αν είναι γνωστό ότι οι γωνίες μετρούνται σε μοίρες και ισχύει

$\eta\mu(\Gamma\Omega NIA)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ να βρείτε την $\varepsilon\varphi(\Gamma\Gamma\Omega\Omega NNIIAA)$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

375. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=x^3-\eta\mu^2 x\cdot\varepsilon\varphi x,\ g(x)=2x^2-\eta\mu^2 x-x\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε το πρόσημο των τιμών τους.

Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια

376. Θεωρούμε ρόμβο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, διαγωνίους $A\Gamma=2\alpha$, $B\Delta=2\beta$ και έστω Σ σημείο στο εξωτερικό του που απέχει από το Ο απόσταση $\Sigma O=\gamma$. Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ φαίνονται από το Σ υπό γωνίες φ και ω αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$4\alpha^2\beta^2\gamma^2=\beta^2(\alpha^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\varphi+\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\omega$$

Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη

Σημείωμα σύνταξης

Στο τεύχος 117 αναφέραμε ότι σύμφωνα με τα γραφόμενα του κ. Καρτσακλή ο αριθμός $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{27\alpha\beta\gamma}$ παρεμβάλλεται ανάμεσα στους όρους της ανισότητας $\frac{(\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}\le\frac{\tau^2}{3\rho(4R+\rho)}$ Επί της προκύπτουσας αριστερής ανισότητας ζητήθηκαν από τον κ. Δεληστάθη πρόσθετες πληροφορίες. Η παραπάνω ανισότητα βασίζεται στη μονοτονία της ακολουθίας $\frac{A_n}{G_n}$ όπου A_n ο αριθμητικός και G_n ο γεωμετρικός μέσος n θετικών αριθμών. Αποδεικνύεται, δυστυχώς με όχι στοιχειώδεις μεθόδους, ότι η ακολουθία αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Η απόδειξη που έχουμε υπόψη μας χρησιμοποιεί προσεγγιστικές μεθόδους (τύπος Stirling κλπ). Σε ότι αφορά στο όριο της παραπάνω ακολουθίας ισχύει $\frac{A_n}{G_n}\to\frac{e}{2}$

Το Βήμα του Ευκλείδη

Παραγοντοποίηση και διοφαντικές εξισώσεις.

Γιώργος Τσαπακίδης – Μάριος Καμμένος *(μαθητής–**Αγρίνιο**)*

*Οι διοφαντικές εξισώσεις πήραν το όνομά τους από τον έλληνα μαθηματικό Διόφαντο, που έζησε στην **Αλεξάνδρεια** τον **3** ***ο*** ***αιώνα***. Ο Διόφαντος είναι γνωστός από το σύγγραμμά του "Αριθμητικά", στο οποίο διαπραγματεύεται προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις. Τα περισσότερα από τα προβλήματα των Αριθμητικών είναι απροσδιόριστα και συχνά έχουν άπειρες λύσεις. Από το γεγονός αυτό, κάθε εξίσωση με ακέραιους συντελεστές της οποίας αναζητούνται ακέραιες λύσεις ονομάζεται διοφαντική. Τα Αριθμητικά χωριζόταν σε 13 βιβλία (κεφάλαια) από τα οποία έχουν σωθεί έξι στα ελληνικά και τέσσερα στα αραβικά, που περιλαμβάνουν περίπου 300 προβλήματα.*

Στα Αριθμητικά ο Διόφαντος εισήγαγε ιδιαίτερο συμβολισμό για την περιγραφή των εξισώσεων, που λύνουν τα προτεινόμενα προβλήματα, πράγμα για το οποίο θεωρείται ο πατέρας της Άλγεβρας.

Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε **διοφαντικές εξισώσεις** που λύνονται με τα βοήθεια της **παραγοντοποίησης** και τη χρήση των προφανών προτάσεων:

- *Αν α, β, γ ακέραιοι και αβ = γ τότε α=δ_1 και β=δ_2 με δ_1, δ_2ακέραιους τέτοιους, ώστε $\delta_1\delta_2$ =γ.*
- *Αν α, β, οι θετικοί ακέραιοι, p πρώτος και αβ=p^n, τότε α=1 και β = p^n, ή α=p^nκαι β =1 ή α = p^κ και β= p^m με κ,m θετικούς ακέραιους τέτοιους, ώστε κ+m = n.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Να λυθεί στο Ζ η εξίσωση: x^2– 4y+2x–4y = 7.

Σκέψεις: Ύπαρξη τετραγώνων και διπλασίων γινομένων ⟶ τέλεια τετράγωνα.

Λύση: Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά: (x^2 +2x+1) – (4y^2+4y+1)=7

$(x+1)^2-(2y+1)^2$ =7 ή (x+2y+1)(x–2y)=7

Επειδή οι αριθμοί x+2y+2, x–2y είναι ακέραιοι και 7=1·7 = (–1)(–7),θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y = 1 \text{ και } x+2y+2 = 7 \text{ ή} \\ x-2y = -1 \text{ και } x+2y+2 = -7 \text{ ή} \\ x-2y = 7 \text{ και } x+2y+2 = 1 \text{ ή} \\ x-2y = -7 \text{ και } x+2y+2 = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \text{ και } y=1 \text{ ή} \\ x=-5 \text{ και } y=-2 \text{ ή} \\ x=3 \text{ και } y=-2 \text{ ή} \\ x=-5 \text{ και } y=1 \end{array}\right\}$$

Σχόλιο: Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς x (και ως προς y), οπότε για να είναι ο x ακέραιος, πρέπει η διακρίνουσα να είναι να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Έτσι έχουμε τη λύση: Η εξίσωση γράφεται x^2+2x–4y^2–4y–7=0 με διακρίνουσα Δ = 4–4(–4y^2–4y–7)= 4(1+4y^2+4y+7)=16(y^2+y+2), πρέπει να υπάρχει ακέραιος κ με y^2+ y +2 = κ^2 ⇔ y^2+y–κ^2+2=0 και για να είναι ο y ακέραιος πρέπει η διακρίνουσα της $\varDelta_1$=1–4(–κ^2+2) να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή να υπάρχει m ακέραιος τέτοιος ,ώστε:

$\varDelta_1$ =m^2 ⇔ 4κ^2–7=m^2 ⇔ (2κ+m)(2κ–m) = 7 ⇔

$$\left.\begin{array}{l} 2\kappa+m=1 \text{ και } 2\kappa-m = 7 \text{ ή} \\ 2\kappa+m=-1 \text{ και } 2\kappa-m = -7 \text{ ή} \\ 2\kappa+m=7 \text{ και } 2\kappa-m = 1 \text{ ή} \\ 2\kappa+m=-7 \text{ και } 2\kappa-m = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa=2 \text{ ή } \kappa = -2$$

Έτσι η y^2+y–κ^2+2 = 0 γίνεται: y^2+y–2=0⇔y=1 ή y=–2.

Για y=1 η δεδομένη εξίσωση γράφεται: x^2+2χ–15 = 0 ⇔x = –5 ή x = 3.

Για y=–2 η δεδομένη εξίσωση γίνεται: x^2+2x–15=0⇔x=–5 ή x=3.

Άρα (χ,y) ∊ {(3,1), (–5,1), (3,–2), (–5,–2)}.

Ας ονομάσουμε τη διαδικασία της πρώτης λύσης “**μέθοδο της παραγοντοποίησης**” και της δεύτερης λύσης “**μέθοδο της διακρίνουσας**”.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: Να λυθεί στο Z η εξίσωση $2y^2$–xy+3x=14.

Σκέψεις: Η εξίσωση δε μετασχηματίζεται στη μορφή $A \cdot B$=γ,όπου Α,Β πολυώνυμα των x,y με ακέραιους συντελεστές και γ ακέραιο αριθμό, έτσι δε μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της παραγοντοποίησης, αντ' αυτής μπορεί να εφαρμοστεί η "μέθοδος της μερικής παραγοντοποίησης", όπως φαίνεται στη παρακάτω λύση.

Λύση: Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά: $2y^2$+x(3–y)=14 ή x(y–3)= $2y^2$–14(1)

Αν y=3 η (1) γίνεται: y^2=17 ,που δεν έχει λύση στους ακέραιους αριθμούς, άρα y≠3,οπότε

$x = \frac{2y^2-14}{y-3} = \frac{2(y^2-9)+4}{y-3} = 2(y+3)+\frac{4}{y-3}$(2).

Για να είναι ο x ακέραιος πρέπει ο y–3 να είναι διαιρέτης του 4, επομένως :

- y–3 =1 ⇔y = 4 και x=18(από τη (2))
- y–3 =1 ⇔y = 2 και x=6
- y–3 =2 ⇔y = 5 και x=18
- y–3 =–2 ⇔y = 1 και x=6
- y–3 =4 ⇔y = 7 και x=21
- y–3 =–4 ⇔y = –1 και x=3.

ΣΧΟΛΙΑ: 1ο Η μέθοδος της μερικής παραγοντοποίησης εφαρμόζεται σε διοφαντικές εξισώσεις της μορφής: αy^2+βxy+γx=δ ή αx^2+βyx+γy=δ.
2ο Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς y και βεβαίως λύνεται με τη μέθοδο της διακρίνουσας. Δοκιμάστε το!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3: Να λυθεί στο Z η εξίσωση $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$=1.

Σκέψεις: *Είναι γνωστό ότι για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση πρέπει να απαλλαγούμε από τους παρονομαστές.*

Λύση: Πρέπει x≠0 και y≠0. Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά: 2y+x=xy, 2y+x–xy–2=–2, 2(y–1)–x(y–1) = –2,(y–1)(x–2)=2, άρα:

- x–2=1 και y–1=2 ⇔ x=3 και y=3
- x–2 =–1 και y–1=–2 ⇔ x=1 και y=–1
- x–2 = 2 και y–1 =1 ⇔ x=4 και y=2
- x–2=–2 και y–1 =–1 ⇔ x=y=0 απορρίπτεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: Να λυθεί στο Z η εξίσωση:$x^3+y^3+z^3$–3xyz=2003.

Σκέψεις: *Είναι προφανές ότι το Α΄ μέλος παραγοντοποιείται με τη βοήθεια της ταυτότητας του Euler και ο 2003 είναι πρώτος.*

Λύση: Η εξίσωση γράφεται: (x+y+z)($x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx)=2003(1).

Είναι $x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx=$\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geq 0$,

επομένως (1)⇔ x+y+z=1 και $x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx =2003 ή x+y+z=2003 και $x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx =1.

Αν ήταν x+y+z=1, τότε $(x+y+z)^2$=1⇔$x^2+y^2+z^2$+2(xy+yz+zx)=1(3). Με αφαίρεση κατά μέλη των (3) και $x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx=2003 παίρνουμε: 3(xy+yz+zx)=2002⇒3/2002, άτοπο, άρα είναι x+y+z=2003(4) και $x^2+y^2+z^2$–xy–yz–zx=1 (5).

(5)⇔ $\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=1 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$

Η τελευταία εξίσωση αληθεύει στο Z, όταν δύο από τα τετράγωνα είναι ίσα με το 1 και το τρίτο με το 0, έτσι θα έχουμε: $(x-y)^2=0$ και $(y-z)^2=(z-x)^2=1$ και τις κυκλικά συμμετρικές τους,

άρα x=y και $(y-z)^2=(z-y)^2=1$⇔x=y και y–z=1 ή x=y και y–z=–1.

- Αν y–z=1 ⇔ x=y=z+1, τότε η x+y+z=2003 γίνεται 1+z+1+z+z=2003 ⇔ 3z=2001 ⇔ z=667, άρα (x,y,z)=(668,668,667).
- Αν y–z=01 η x+y+z=2003 γίνεται 3z=2005⇒3/2005,αδύνατο.

Συμπέρασμα: (x,y,z) ∈ {(668,668,667),(668,667,668),(667,668,668)}.

Σχόλιο: *Στο πρόβλημα που εξετάσαμε είναι προφανής η αναγκαιότητα της χρησιμοποίησης της ταυτότητας του Euler, υπάρχουν όμως εξισώσεις στις οποίες η ταυτότητα το Euler δεν είναι εμφανής, όπως στο πρόβλημα που τέθηκε σε πανρωσιακή Ολυμπιάδα:*

Να λυθεί η εξίσωση x^3-y^3=xy+61 στο N.

Λύση: Η εξίσωση γράφεται: $27x^3-27y^3$ = 27xy+1647 ⇔ $(3x)^3+(-3y)^3+(-1)^3-3\cdot 3x(-3y)(-1)$= =1646 ⇔ (3x–3y–1)($9x^2+9y^2$+1+9xy+3x–3y) = 2.823 (1). Αλλά $9x^2+9y^2$+1–9xy–3x+3y=

$=\frac{1}{2}[(3x-3y)^2+(3y-1)^2+(1-3x)^2]\geq 0$ άρα και $3x-3y-1>0$, έτσι:

- $3x-3y-1=1 \Leftrightarrow 3(x-y)=2 \Rightarrow 3/2$ αδύνατο
- $3x-3y-1=823 \Leftrightarrow 3(x-y)=824 \Rightarrow 3/824$ αδύνατο
- $3x-3y-1=2 \Leftrightarrow x=1+y$, οπότε $9x^2+9y^2+1+9xy+3x-3y=823 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3xy+x-y=$ $=274 \Leftrightarrow 3(1+y)^2+3y^2+3(1+y)y+(1+y)-y=274 \Leftrightarrow 3+6y+3y^2+3y^2+3y+1+y-y-274=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9y^2+9y-270=0 \Leftrightarrow y^2+y-30=0 \Leftrightarrow y=5$ ή $y=-6$ απορρίπτεται και $x=1+y=6$. Συμπέρασμα $(x,y)=(6,5)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5: Να λυθεί στο Z η εξίσωση $1+x+x^2+x^3=2^y$.

Λύση:

- Αν ο y ήταν αρνητικός ακέραιος, τότε το πρώτο μέλος της εξίσωσης θα ήταν ακέραιος και το δεύτερο το κλάσμα $\frac{1}{2^{-y}}$ που δεν είναι ακέραιος, άτοπο, επομένως ο y είναι φυσικός αριθμός.
- Αν $y=0$ τότε η εξίσωση γράφεται:$1+x+x^2+x^3=1 \Leftrightarrow x(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+x+1=0$ αδύνατη, αφού $\Delta=-3<0$.
- Αν y θετικός ακέραιος, τότε η εξίσωση γράφεται: $(1+x)+x^2(1+x)=2^y \Leftrightarrow (1+x)(1+x^2)=2^y$ (1)
  Επειδή $1+x^2>0$ και $2^y>0$, από την (1) έχουμε $1+x>0$, άρα $x\geq 0$. Για $x=0$ είναι $y=0$, όπως είδαμε πιο πάνω, έτσι θεωρούμε ότι $x>0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=2^\kappa \text{ (2)και} \\ 1+x^2=2^p \text{(3)και} \\ \kappa+p=y \text{(4)και} \\ \kappa,p\geq 0 \end{cases}$$

Από τη (2) παίρνουμε $1+2x+x^2=2^{2\kappa}$(5).
Με αφαίρεση κατά μέλη των (5) και (3)
έχουμε: $2x=2^{2\kappa}-2^p=2^p(2^{2\kappa-p}-1)$(6)
(αφού $2^{2\kappa}=x^2+2x+1>x^2+1=2p$ έτσι $2\kappa-p>0$)

- Αν $p=0$, τότε $x=y=0$.
- Αν $p\geq 1$, τότε (6)$\Leftrightarrow x=2^{p-1}(2^{2\kappa-p}-1)$ (7).

Αν $p=1$,τότε (3)$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$, οπότε από τη (2) έχουμε $\kappa=1$ και $y=\kappa+p=1+1=2$.

Αν $p>1$,τότε από την (7) έχουμε ότι ο x είναι άρτιος, ενώ από τη (2) ότι ο x είναι περιττός, αντίφαση. Συμπέρασμα:$(x,y) \in\{(0,0),(1,2)\}$.

***Γενικά Σχόλια:* 1^o** *Οι διοφαντικές εξισώσεις είναι από τα “**αγαπημένα**” θέματα των **μαθηματικών διαγωνισμών**. Παραθέτουμε θέματα από διάφορους διαγωνισμούς της **Ε.Μ.Ε** και άλλων χωρών, των οποίων οι λύσεις στηρίζονται στις μεθόδους: της παραγοντοποίησης, της μερικής παραγοντοποίησης και της διακρίνουσας, που αναπτύξαμε στην εργασία αυτή.*

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\alpha\beta^2+2\alpha\beta+\alpha = 2\beta^2+4\beta+3$, *στο Z.*
2. $x^5y^2+100x^3 = 200$, *στο N*.*
3. $9(x^2+y^2)+10xy = 177+x^2y^2$,*στο N.*
4. $x^3-y^3+x^2y-xy^2 = 49(x-y)$ *με* $x>y$, *στο N*.*
5. $x^6+x^4-2x^3-2x^2y^2-2y^2+2y^4+2 = 0$, *στο Z.*
6. $p^m-n^3=8$, *με p πρώτος και m,n στο N.*
7. $xy+3x-5y+3 = 0$, *στο Z.*
8. $x^3y^2(2y-x) = x^2y^4-36$, *στο X.*
9. $x^4-6x^2+1 = 7\cdot 2^y$, *στο Z.*
10. $8y^3-4 = y(6x-y^2)$, *στο Z.*

2^o *Οι διοφαντικές εξισώσεις αποτέλεσαν και αποτελούν αντικείμενο προχωρημένης έρευνας, όπως οι εξισώσεις:*

α. $x^2+y^2=z^2$, *στο N* (Πυθαγόρειοι).*

β. $x^n+y^n=z^n$, $n>=3$ *θετικός ακέραιος και x,y,z ακέραιοι (Fermat).*

γ. $x^4+y^4=z^2$, *στο Z (Fermat).*

δ. $2^n-7=x^2$, *n θετικός ακέραιος, x ακέραιος (Ramanujan–Nagell).*

ε. $61x^2+1=y^2$, *στο N* (Brahmagupta).*

στ. $x^\alpha-y^b=1$, *στο N* και α,b>1 (Catalan).*

ζ. $x^n+y^m=z^r$ *στο Z* με n,m,r θετικοί ακέραιοι≥3 (Beal).*

η. $x^4+y^4+z^4+w^4=(x+y+z+w)^4$, *στο Z (Jacobi–Madden).*

θ. $x^2+y^2+z^2+w^2=n$,*στο Z με n δεδομένο φυσικό (Langrage).*

ι. $x^2-Dy^2=1$, *στο Z με D δεδομένο θετικό ακέραιο, που δε είναι τέλειο τετράγωνο.*

Βιβλιογραφία

1. *A. Adler, J.E. Coury, The Theory of Number, Jones and Bartelt publishers, USA 1995.*

2. *T. Andreescu, D.andrica, I. Cucurezeanu, An Introduction to Diophantine Equations, Birkhauser, USA, 2010.*

3. *Γ.Α Αντωνιάδης, Α. Κοντογεώργης, Θεωρία Αριθμών και Εφαρμογές, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών,Αθήνα,2015.*

4. *I.G Bashmakova, Diophantus and Diophantine Equations, MAA, USA, 1997.*

5. *Π. Βλάμος, Ε. Ράππος, Π. Ψαράκος, Θεωρία Αριθμών, ΕΜΕ, Αθήνα 2000.*

6. *J. Hunter, Αριθμοθεωρία, Μετάφραση Ν. Κριτικού, Σύλλογος προς διάδοση Ωφελίμων Βιβλίων, Αθήνα 1974.*

7. *Δ.Μ. Πουλάκης, Θεωρία Αριθμών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη,1997.*

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$

μελέτη – χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων αυτής στη λύση προβλημάτων

Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας

Το παρόν άρθρο αφιερώνεται στην μνήμη του **Λάμπρου Τσίκα**, ενός ανθρώπου με έντονη κοινωνική και εκπαιδευτική δραστηριότητα που έφυγε από κοντά μας στις 27/01/2021.Υπήρξε εραστής των Μαθηματικών και άριστος **δάσκαλος**. Ο τρόπος διδασκαλίας του και το πλούσιο συγγραφικό του έργο, επηρέασαν και ενέπνευσαν γενιές μαθητών του.

Η διάθεσή του **ήταν εφηβική**, όταν μιλούσε για Μαθηματικά. Το ενδιαφέρον του ήταν ιδιαίτερα έντονο για τα εκπαιδευτικά θέματα και δεν έκρυβε την αγωνία του για την πορεία της Μαθηματικής μας εκπαίδευσης.

Υπήρξε ένας εκ των πρωταγωνιστών για την δημιουργία του παραρτήματος της Ε.Μ.Ε Νομού Ηλείας. Διετέλεσε για δύο θητείες πρόεδρος του παραρτήματος του Νομού μας. Κατά τη διάρκεια της θητείας του, από το παράρτημά μας πραγματοποιήθηκε **πλήθος εκδηλώσεων** τόσο εκπαιδευτικού όσο και επιστημονικού χαρακτήρα με αξιόλογους ομιλητές συναδέλφους από τη Μέση και Ανώτατη Εκπαίδευση.

Έχοντας αντιληφθεί τη μεγάλη σημασία του διαγωνισμού **«Παιγνίδι και Μαθηματικά»** , πίεσε όλους τους τοπικούς αρμόδιους φορείς να αποδεχτούν και τελικά κατάφερε , ο διαγωνισμός αυτός, να τύχει ευρείας αποδοχής από το σύνολο της εκπαιδευτικής κοινότητας του Νομού μας.

Το ενδιαφέρον του για τα προβλήματα του Νομού μας ήταν μεγάλο. **Μαχητής** σε όλους τους τομείς της κοινωνικής ζωής με πλούσια δράση, κοινωνική ευαισθησία και προσφορά από τις θέσεις που κατά καιρούς είχε αναλάβει. Θεωρούμε ότι η απώλεια του έκανε φτωχότερο το Νομό μας και ιδιαίτερα την πόλη του Πύργου.

Δυστυχώς , λόγω πανδημίας δεν τον αποχαιρετίσαμε όπως του έπρεπε.

Ας είναι αυτές οι λίγες γραμμές ένα είδος αποχαιρετισμού, με την βεβαιότητα, ότι όλοι όσοι συνεργαστήκαμε μαζί του, υπήρξαμε μαθητές του, θα θυμόμαστε πάντα τον Μαθηματικό Λάμπρο, τον άνθρωπο **Λάμπρο Τσίκα**.

Για την μελέτη της παραπάνω συνάρτησης διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$(a>0, b>0), (a<0, b<0), (a>0, b<0)$$

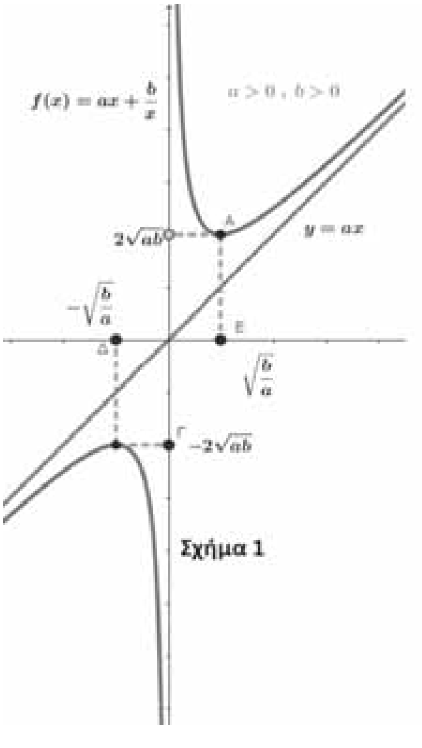
$$\text{και } (a<0, b>0)$$

και για κάθε μία από αυτές δίνουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα.

I) $a>0, b>0$

Η δοσμένη συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και είναι περιττή. Έχει δύο ασύμπτωτες $x=0$ και $y=ax$. Η περίπτωση των ασύμπτωτων για $a=b=1$ εξετάζεται ως εφαρμογή στο σχολικό βιβλίο στην σελίδα 163. Παρουσιάζει στο $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ τοπικό ελάχιστο, το $f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)=2\sqrt{ab}$, ενώ στο $x=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)=-2\sqrt{ab}$

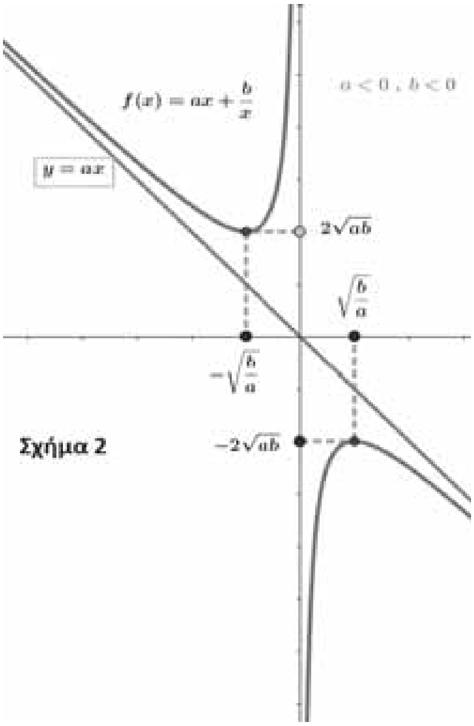
Η γραφική της παράσταση εμφανίζεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

II) $a<0, b<0$

Η μελέτη της συνάρτησης σε αυτή την περίπτωση μας οδηγεί στην επόμενη γραφική παράσταση (Σχήμα 2)



Σχόλια

I) Παρατηρούμε και στις δύο περιπτώσεις, δηλ. όταν είναι $ab > 0$, ότι έχουμε δύο ακρότατα στις θέσεις $x_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ και $x_2 = -\sqrt{\frac{b}{a}}$, οι δε τιμές των συναρτήσεων στις θέσεις τοπικού ελαχίστου και μεγίστου είναι ίσες με $2\sqrt{ab}$ και $-2\sqrt{ab}$ αντίστοιχα.

Εκτός αυτών το σύνολο τιμών των συναρτήσεων είναι το σύνολο $\left(-\infty, -2\sqrt{ab}\right] \cup \left[2\sqrt{ab}, +\infty\right)$

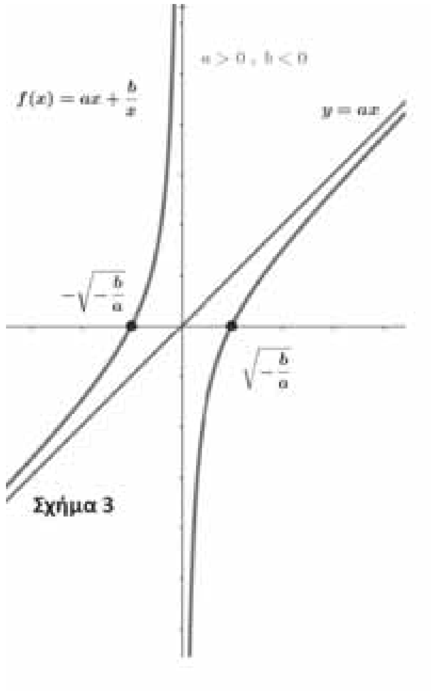
II) Τα όσα συνοπτικά παρουσιάστηκαν για την μελέτη της $f(x) = ax + \frac{b}{x}$,όταν $ab > 0$ μας επιτρέπουν με εύκολο τρόπο να αντιμετωπίσουμε το επόμενο πρόβλημα.

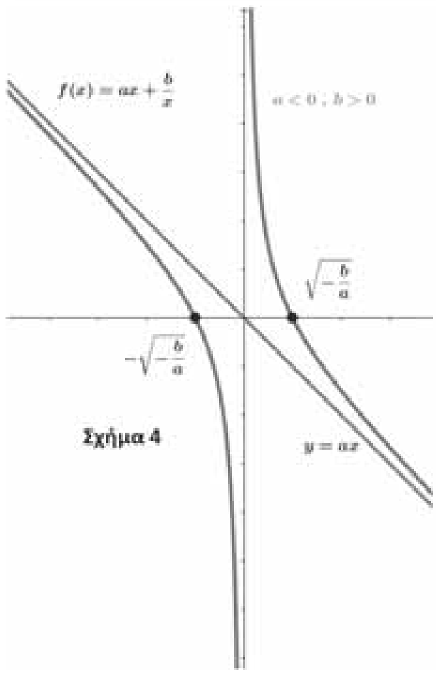
«Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x + \frac{1}{x} = a$ »

Σύντομη απάντηση σ' αυτό το πρόβλημα είναι

- Για $a \in (-2, 2)$, καμία ρίζα
- Για $a = 2$ ή $a = -2$, μία ρίζα
- Για $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, δύο ρίζες

Για τις περιπτώσεις $(a > 0\ , b < 0)$, $(a < 0\ , b > 0)$ δηλαδή όταν είναι $ab < 0$ έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των Σχημάτων (3) και (4)





Σχόλιο

Παρατηρούμε για τις συναρτήσεις αυτού του τύπου με $ab < 0$ ότι είναι γνησίως μονότονες σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, ενώ το σύνολο τιμών τους σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα είναι το $\mathbb{R}$.Στην συνέχεια δίνουμε μια σειρά προβλημάτων, που η λύση τους στηρίζεται στις ιδιότητες της συνάρτησης

$$f(x)=ax+\frac{b}{x}\ ,\ ab\neq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου a για τις οποίες η εξίσωση

$$\mathbf{x^4+(a+1)x^3+(2a+1)x^2-(a+1)x+1=0\,(1)}$$

έχει στο διάστημα $(-\infty,-1)$, τουλάχιστον δύο ρίζες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή το μηδέν δεν είναι ρίζα της εξίσωσης (1), διαιρούμε και τα δύο μέλη αυτής με x^2 , οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+(a+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)+(2a+1)=0\,(2)\ ,$$

η οποία είναι ισοδύναμη της (1).

Αν θέσουμε $y=x-\frac{1}{x}$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται

$$y^2+(a+1)y+2a+3=0\ (3)$$

Η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{1}{x}$ (με βάση τα προηγούμενα) είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, με σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα $(-\infty,0]$. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\infty,-1)$, αν και μόνο αν η εξίσωση

$$y^2+(a+1)y+2a+3=0$$

έχει δύο ρίζες $y_1,y_2\in(-\infty,0)$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $ax^2+bx+c=0,(a\neq 0)$, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, έχει δύο αρνητικές ρίζες αν και μόνο αν $\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{c}{a}>0\\ -\frac{b}{a}<0\end{cases}$.

Συνεπώς από την εξίσωση (3) έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}a+1>0\\ 2a+3>0\\ (a+1)^2-4(2a+3)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>-1\\ a<3-2\sqrt{5}\ \text{ή}\ a>3+2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow a>3+\sqrt{5}\ .$$

Άρα για $a>3+2\sqrt{5}$, η αρχική εξίσωση (1) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\infty,-1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου a, για καθεμία από τις οποίες η εξίσωση

$$\mathbf{x^4+2(a-1)x^3+4x^2+8(a-1)x+16=0}$$

έχει δύο τουλάχιστον άνισες αρνητικές ρίζες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με x^2 λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$x^2+\frac{16}{x^2}+2(a-1)x+8(a-1)\frac{1}{x}+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{16}{x^2}+2(a-1)\left(x+\frac{4}{x}\right)+4=0\ ,\ (1)$$

Θέτουμε $x+\frac{4}{x}=t$, οπότε $x^2+\frac{16}{x^2}=t^2-8$ και έτσι η (1) γίνεται $t^2+2(a-1)t-4=0\ ,\ (2)$.

Η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{4}{x}$, έχει σύνολο τιμών το

$$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$$

Από την εξίσωση $x+\frac{4}{x}=t\Leftrightarrow x^2-tx+4=0\ ,\ (3)$, συμπεραίνουμε ότι:

- Οι αριθμοί x , t είναι ομόσημοι.
- Όταν $t\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$, τότε η εξίσωση (3) έχει δύο ρίζες άνισες. (Αυτό αιτιολογείται είτε από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , είτε από το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης (3))
- Όταν $t=\pm 4$, τότε η εξίσωση (3) έχει μοναδική ρίζα.

Συνεπώς έχουμε:

- Όταν η εξίσωση (2) έχει μόνο θετικές ρίζες, τότε και $x>0$, επομένως η αρχική εξίσωση δεν θα έχει αρνητικές ρίζες.
- Όταν η εξίσωση (2) έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα που ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-4)$, τότε η αρχική εξίσωση θα έχει δύο τουλάχιστον αρνητικές ρίζες.

Επομένως μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το παράδειγμα ως εξής:
«Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου a, για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα που ανήκει στο $(-\infty,-4)$.»

Αν $g(t)=t^2+2(a-1)t-4$, τότε $g(0)=-4$, επομένως για κάθε τιμή της παραμέτρου a , το τριώνυμο $g(t)$ έχει ετερόσημες ρίζες. Συνεπώς η αρχική εξίσωση δεν έχει περισσότερες από δύο άνισες αρνητικές ρίζες.
Ακριβώς δύο αρνητικές άνισες ρίζες θα έχει σε εκείνη την περίπτωση που η αρνητική ρίζα του τριωνύμου $g(t)$ θα είναι μικρότερη του -4. Τούτο ισχύει αν και μόνο αν $g(-4)<0$ (*) δηλαδή $16-8(a-1)-4<0$ απ' όπου $a>\frac{5}{2}$.
((*) Ο αριθμός -4 να βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $g(t)$)

Άρα για $a>\frac{5}{2}$, η αρχική εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Για κάθε τιμή της παραμέτρου a, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$16x^4-32x^3+ax^2-8x+1=0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι ο μηδέν δεν είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως διαιρώντας τα μέλη της με x^2 καταλήγουμε στην

$\left(16x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(4x+\frac{1}{x}\right)+a=0 \quad (1)$ που είναι ισοδύναμη της αρχικής. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=4x+\frac{1}{x}$ είναι το σύνολο $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$. Θέτουμε $t=4x+\frac{1}{x}$.

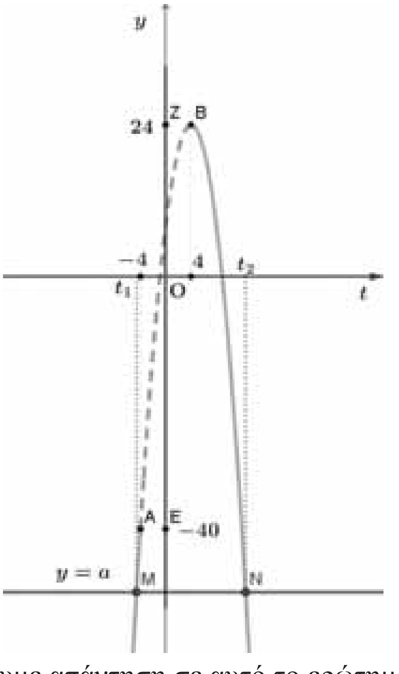
Τότε θα είναι $t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$ και λόγω της $16x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-8$, η (1) γίνεται

$$t^2-8t+a-8=0 \quad (2).$$

Από την σχέση $t=4x+\frac{1}{x}$ καταλήγουμε ισοδύναμα στην εξίσωση $4x^2-tx+1=0$ (3), η οποία ως προς x έχει πάντα λύση , λόγω του ότι

$$t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty).$$

Ειδικά για κάθε $t\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$, η εξίσωση (3) έχει δύο άνισες ρίζες, ενώ για $t=-4$ ή $t=4$, η (3) έχει μία ρίζα. Συνεπώς έχουμε το συμπέρασμα: Σε κάθε τιμή του $t\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ αντιστοιχούν **δύο** τιμές του x, ενώ για $t=-4$ ή $t=4$, αντιστοιχεί **μία** τιμή του x.
Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (2) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a, με $t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.



Θα δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(t)=-t^2+8t+8$, με $t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

Η εξίσωση (2) γράφεται $g(t)=a$.

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-4]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[4,+\infty)$, είναι δε

$g((-\infty,-4])=(-\infty,-40]$, $g([4,+\infty))=(-\infty,24]$.

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων tOy , έχουμε την γραφική παράσταση της g , όπως εμφανίζεται στο σχήμα.
Επομένως έχουμε:
Κάθε ευθεία $y=a$ με $a<-40$ τέμνει την γραφική

παράσταση της g σε δύο σημεία ορίζοντας ακριβώς δύο αριθμούς t_1 και t_2 τέτοιους ώστε π.χ. $t_1<-4$, $t_2>4$.

Οι δύο αυτές τιμές του t, λόγω των συμπερασμάτων από την εξίσωση (3) μας εξασφαλίζουν 4 ρίζες (ως προς x).

Έτσι η αρχική εξίσωση, για $a<-40$, έχει 4 ρίζες.

Με ανάλογους συλλογισμούς, καταλήγουμε στα επόμενα:

- Αν $a=-40$, τότε η εξίσωση (1) έχει 3 ρίζες.
- Αν $-40<a<24$, τότε η (1) έχει 2 ρίζες.
- Αν $a=24$, τότε η (1) έχει 1 ρίζα.
- Αν $a>24$, τότε η (1) δεν έχει ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^4-2x^3+11x^2-10x+26}{x^2-x+5}}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η συνάρτηση f γράφεται

$$f(x)=x^2-x+5+\frac{1}{x^2-x+5}.$$

Θέτουμε $t=x^2-x+5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\geq\frac{19}{4}$, (1).

Συνεπώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $t\geq\frac{19}{4}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t)=t+\frac{1}{t}$, $t\in\left[\frac{19}{4},+\infty\right)$. Είναι $g'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}$,επομένως για κάθε $t\geq1$ η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς στο διάστημα $\left[\frac{19}{4},+\infty\right)$, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g θα προκύπτει για $t=\frac{19}{4}$. Είναι $g\left(\frac{19}{4}\right)=\frac{377}{16}$. Η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^4-2x^3+11x^2-10x+26}{x^2-x+5}$$

είναι ίση με $\frac{377}{16}$ για $x=\frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{σφ^2 6x+ημ^2 6x+1=\sqrt{1+2συν4x+4ημ2x}}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η εξίσωση γράφεται

$$ημ^2 6x+\left(σφ^2 6x+1\right)=\sqrt{1+2\left(1-2ημ^2 2x\right)+4ημ2x}$$

ή $ημ^2 6x+\frac{1}{ημ^2 6x}=\sqrt{3+4ημ2x-4ημ^2 2x}$ ή

$$ημ^2 6x+\frac{1}{ημ^2 6x}=\sqrt{4-\left(2ημ2x-1\right)^2}.$$

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί x , που ικανοποιούν το σύστημα:

$\begin{cases}ημ6x\neq0\\ \left(2ημ2x-1\right)^2\leq4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ημ6x\neq0\\ ημ2x\geq-\frac{1}{2}\end{cases}$. Για αυτές τις τιμές του x , ισχύει η ανίσωση

$$0\leq4-\left(2ημ2x-1\right)^2\leq4.$$

Επομένως είναι $0\leq\sqrt{4-\left(2ημ2x-1\right)^2}\leq2$, με την ισότητα $\sqrt{4-\left(2ημ2x-1\right)^2}=2$ να ισχύει όταν $ημ2x=\frac{1}{2}$, δηλαδή για $x=(-1)^k\cdot\frac{π}{12}+\frac{kπ}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

. Επίσης για αυτά τα x ισχύει $ημ^2 6x+\frac{1}{ημ^2 6x}\geq2$ με την ισότητα όταν $ημ^2 6x=1$ δηλαδή για

$$x=\frac{π}{12}+\frac{νπ}{6} , ν\in\mathbb{Z}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ισότητα στην αρχική εξίσωση είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση που και τα δύο μέλη της είναι ίσα με 2. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των κοινών λύσεων από τα δύο προηγούμενα σύνολα λύσεων

$x=(-1)^k\cdot\frac{π}{12}+\frac{kπ}{2}$,$k\in\mathbb{Z}$ και $x=\frac{π}{12}+\frac{πν}{6}$,$ν\in\mathbb{Z}$

Από την εξίσωση

$$(-1)^k\cdot\frac{π}{12}+\frac{kπ}{2}=\frac{π}{12}+\frac{πν}{6}$$

λαμβάνουμε $2ν=6k-1+(-1)^k$. Για τις άρτιες τιμές του k , δηλαδή για $k=2m$, έχουμε $ν=6m$, ενώ για περιττές τιμές του k , δηλαδή για $k=2m+1$, έχουμε $ν=6m+2$.

- Για $k=2m$, οι παραπάνω τύποι γίνονται

$x=\frac{\pi}{12}+m\pi$, $x=\frac{\pi}{12}+m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$.

- Για $k=2m+1$, οι ίδιοι τύποι γίνονται $x=\frac{5\pi}{12}+m\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. Με αυτόν τον τρόπο διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbb{Z}$ περιέχεται στο σύνολο $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi\nu}{6}$,$\nu\in\mathbb{Z}$. Άρα λύση της αρχικής εξίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu^{2021}x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2021}x}=\sigma\upsilon\nu^{2021}x+\frac{1}{\eta\mu^{2021}x}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu^{2021}x-\frac{1}{\eta\mu^{2021}x}=\sigma\upsilon\nu^{2021}x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2021}x}\ (1).$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες $|\eta\mu x|=1$ δεν είναι λύσεις της εξίσωσης, επειδή όταν $|\eta\mu x|=1$, από την εξίσωση προκύπτει $|\sigma\upsilon\nu x|=1$, άτοπο. Ανάλογα , οι τιμές του x, για τις οποίες $|\sigma\upsilon\nu x|=1$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(t)=t^{2021}\ ,\ t\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$, η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της g είναι η ένωση των διαστημάτων $(-1,0)$ και $(0,1)$.Θεωρούμε στην συνέχεια την συνάρτηση

$f(u)=u-\frac{1}{u}$, $u\in(-1,0)\cup(0,1)$.

Η συνάρτηση f σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε $f((-1,0))=(0,+\infty)$ και $f((0,1))=(-\infty,0)$ δηλαδή στο διάστημα $(-1,0)$ η f λαμβάνει μόνο θετικές τιμές , ενώ στο διάστημα $(0,1)$ η f λαμβάνει μόνο αρνητικές τιμές.

Η αρχική εξίσωση (επομένως και η εξίσωση (1)), ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες $\eta\mu x\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$. Με βάση τα προηγούμενα, οι λύσεις της (1) θα αναζητηθούν σε εκείνες τις τιμές του x που είναι τέτοιες ώστε $\eta\mu x\in(-1,0)\cup(0,1)$ και $\sigma\upsilon\nu x\in(-1,0)\cup(0,1)$. Από τις παρατηρήσεις αυτές, συμπεραίνουμε ότι ορίζεται τόσο η σύνθεση $g(\eta\mu x)$, όσο και η σύνθεση $g(\sigma\upsilon\nu x)$, είναι δε για κάθε x με

$$|\eta\mu x|\neq 1 \text{ και } |\sigma\upsilon\nu x|\neq 1,$$

$$g(\eta\mu x)=\eta\mu^{2021}x\ ,\ g(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu^{2021}x.$$

Με ανάλογους συλλογισμούς διαπιστώνουμε ότι ορίζονται οι συνθέσεις

$$f(g(\sigma\upsilon\nu x))=\sigma\upsilon\nu^{2021}x-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2021}x}$$

και $f(g(\eta\mu x))=\eta\mu^{2021}x-\frac{1}{\eta\mu^{2021}x}$ και έτσι η εξίσωση (1) γράφεται $f(g(\eta\mu x))=f(g(\sigma\upsilon\nu x))$, (2) και επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι «1-1» , ως γνησίως μονότονες, ισοδύναμα από την (2) καταλήγουμε στην $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Άρα οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη των αριθμών (x,y) , που ικανοποιούν την εξίσωση

$$22-\sqrt{x+3}-\sqrt{y-5}=\frac{16}{\sqrt{x+3}}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η εξίσωση γράφεται

$\left(\sqrt{x+3}+\frac{16}{\sqrt{x+3}}\right)+\left(\sqrt{y-5}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}\right)=22$. Από την μελέτη της συνάρτησης

$f(x)=ax+\frac{b}{x}$,$a>0, b>0$ γνωρίζουμε ότι

$ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$ $(x>0)$ με την ισότητα να ισχύει στο σημείο x_0 τέτοιο ώστε $ax_0=\frac{b}{x_0}$. Έτσι έχουμε για κάθε $x>-3$ (αντίστοιχα για κάθε $y>5$)

$$\sqrt{x+3}+\frac{16}{\sqrt{x+3}}\geq 8\ ,\ \sqrt{y-5}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}\geq 14.$$

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη αυτών:

$$\left(\sqrt{x+3}+\frac{16}{\sqrt{x+3}}\right)+\left(\sqrt{y-5}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}\right)\geq 22.$$

Συνεπώς η εξίσωση

$$\left(\sqrt{x+3}+\frac{16}{\sqrt{x+3}}\right)+\left(\sqrt{y-5}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}\right)=22$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\frac{16}{\sqrt{x+3}}=8\\ \sqrt{y-5}+\frac{49}{\sqrt{y-5}}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+3}=\frac{16}{\sqrt{x+3}}\\ \sqrt{y-5}=\frac{49}{\sqrt{y-5}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=13\\ y=54\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου a, για τις οποίες η ανίσωση $\frac{\sqrt{5}x^8+3x^{-8}-5-a}{a-2\sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}+3}\leq 0$ δεν έχει λύση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{5}x^8+\frac{3}{x^8}-5\ ,\ x\neq 0\ \text{και}$$

$$g(x)=2\sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}-3\ ,\ x\geq 1$$

Έτσι η ανίσωση γράφεται $\frac{f(x)-a}{g(x)-a}\geq 0\ ,\ x\geq 1$

Αν θέσουμε $t=x^8\geq 1$, τότε η συνάρτηση f γράφεται $f(t)=\sqrt{5}t+\frac{3}{t}-5$ και επειδή $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}>1$, (από την μελέτη της συνάρτησης $y=ax+\frac{b}{x}$ $(a>0,b>0)$), προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $\left[2\sqrt{\sqrt{5}\cdot 3}-5,+\infty\right)=\left[2\sqrt[4]{45}-5,+\infty\right)$ με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f για $x=\sqrt[16]{\frac{3}{\sqrt{5}}}$. Είναι δηλαδή $f_{min}=2\sqrt[4]{45}-5$ για $x=\sqrt[16]{\frac{3}{\sqrt{5}}}$. Επίσης έχουμε $g(x)=2\sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}-3\leq 2-3=-1$, για κάθε $x\geq 1$. Άρα η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή ίση με -1 για $x=1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\geq 1$ είναι $g(x)\leq -1=2\cdot 2-5<2\cdot\sqrt[4]{45}-5\leq f(x)$, δηλαδή για κάθε $x\geq 1$ είναι $g(x)<f(x)$. Για $x\geq 1$, η ανίσωση $\frac{f(x)-a}{g(x)-a}\geq 0$ είναι ισοδύναμη με την **ένωση** δύο συστημάτων:

$$\Sigma_1:\begin{cases}f(x)-a\geq 0\\ g(x)-a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq a\\ g(x)>a\end{cases},$$

$$\Sigma_2:\begin{cases}f(x)-a\leq 0\\ g(x)-a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leq a\\ g(x)<a\end{cases}$$

Με δεδομένο ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x\geq 1$, βρίσκουμε ότι λύσεις του Σ_1 είναι εκείνα τα $x\geq 1$, για τα οποία $g(x)>a$, ενώ του Σ_2 λύσεις είναι εκείνα τα $x\geq 1$ για τα οποία $f(x)\leq a$. Έτσι καταλήγουμε ισοδύναμα στην ένωση των $g(x)>a$, $f(x)\leq a$, δηλαδή η ανίσωση $\frac{f(x)-a}{g(x)-a}\geq 0$ έχει λύσεις για εκείνα τα $x\geq 1$ που είναι τέτοια ώστε $g(x)>a$ ή $f(x)\leq a$.

Επομένως η ανίσωση $\frac{f(x)-a}{g(x)-a}\geq 0$ (και συνεπώς και η αρχική ανίσωση) δεν έχει λύση, αν και μόνο αν, $g(x)\leq a<f(x)$ για κάθε $x\geq 1$.

Συνεπώς θα είναι και $g_{max}(x)\leq a<f_{min}(x)$, δηλαδή $-1\leq a<2\cdot\sqrt[4]{45}-5$. Άρα οι τιμές του a, ώστε η αρχική ανίσωση να μην έχει λύση, είναι όλες οι τιμές του διαστήματος $\left[-1,2\cdot\sqrt[4]{45}-5\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Οι θετικοί αριθμοί a και b ικανοποιούν την ισότητα $ab\cdot(a+b+1)=25$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $(a+b)\cdot(b+1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $(a+b)\cdot(b+1)=a+b\cdot(a+b+1)$ (1). Από την ισότητα $ab(a+b+1)=25$, προκύπτει ότι

$$b(a+b+1)=\frac{25}{a}$$

και έτσι ,λόγω της (1) η παράσταση

$$(a+b)(b+1)=a+\frac{25}{a}.$$

Είναι $a>0$, οπότε $a+\frac{25}{a}\geq 10$, με την ισότητα να ισχύει για $a=5$. Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $(a+b)(b+1)$ είναι ίση με 10 και συμβαίνει για $a=5$ και $b=-3+\sqrt{14}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παραμέτρου a, ώστε η ανίσωση

$$a\sqrt{a}\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leq\sqrt[4]{a^3}\left|\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right|,$$ **να**

έχει μία τουλάχιστον λύση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $a\geq 0$. Για $a=0$, η ανίσωση ισχύει ως ισότητα. Έστω $a>0$, οπότε η ανίσωση γράφεται

$$a\cdot\left[\sqrt{a}(x-1)^2+\frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2}\right]\leq\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right| \quad (1).$$

Το ελάχιστο του αριστερού μέλους της ανίσωσης είναι ίσο με $2a$, ενώ το μέγιστο του δεξιού μέλους αυτής είναι ίσο με $\sqrt[4]{a^3}$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την μορφή της (1) έχουμε

$$2a\leq a\cdot\left[\sqrt{a}(x-1)^2+\frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2}\right]\leq$$

$$\leq\sqrt[4]{a^3}\left|\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right|\leq\sqrt[4]{a^3}.$$

Συνεπώς η ανίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση, όταν το ελάχιστο του αριστερού μέλους, δεν υπερβαίνει το μέγιστο του δεξιού μέλους, δηλαδή όταν

$$2a\leq\sqrt[4]{a^3}\Leftrightarrow 16a\leq 1\Leftrightarrow a\leq\frac{1}{16}.$$

Παρατηρούμε ότι για $a=\frac{1}{16}$ η ανίσωση γίνεται

$$\frac{1}{64}(x-1)^2+\frac{1}{4(x-1)^2}\leq\frac{1}{8}\left|\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right|$$

και έχει ως λύση (προφανή) την $x=-1$. Άρα η μέγιστη τιμή του a είναι ο αριθμός $\frac{1}{16}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του a, για την οποία η εξίσωση $2-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x=a(2\eta\mu x+1)$ έχει στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ μοναδική λύση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η εξίσωση γίνεται

$2-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x=a(2\eta\mu x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x-(2a+1)\cdot\eta\mu x+(1-a)=0$, (1).

Στην (1) θέτουμε $t=\eta\mu x$ και επειδή $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι $0<t<1$ και έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο εξής: « Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του a, για την οποία η εξίσωση $2t^2-(2a+1)t+(1-a)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$».

Έχουμε

$$2t^2-(2a+1)t+(1-a)=0\Leftrightarrow a=\frac{2t^2-t+1}{2t+1}=$$

$$=t-1+\frac{2}{2t+1}=\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{2}{2t+1}-\frac{3}{2}\geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}(2t+1)\frac{2}{2t+1}}-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow a\geq\frac{1}{2}.$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο a είναι ο αριθμός $\frac{1}{2}$.

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για $a=\frac{1}{2}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο συγκεκριμένο διάστημα. Πράγματι για $a=\frac{1}{2}$ η εξίσωση

$2t^2-(2a+1)t+(1-a)=0$

γίνεται $t^2-t+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$, οπότε από την αρχική προκύπτει ότι $\eta\mu x=\frac{1}{2}$, η οποία έχει μοναδική λύση στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τον αριθμό $\frac{\pi}{6}$.

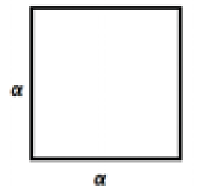
Από τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη στις σύγχρονες αντιλήψεις για τη μάθηση των Μαθηματικών

Αθανασοπούλου Μαρία, Βασιλειάδη Μαρκέλλα, Βλαχοπούλου Ιωάννα, Παπαθανασίου Αλέξανδρος, Φασούλα Ξανθή-Μαρία μαθητές του **14ου** Λυκείου **Λάρισας**

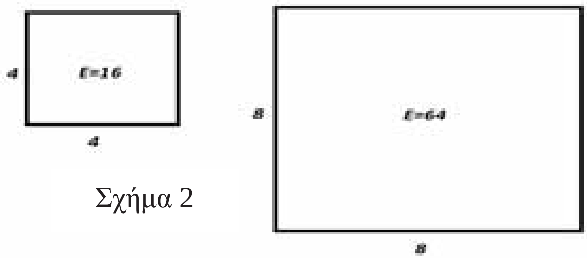
*Η ομάδα μας, που δημιουργήθηκε σε συνθήκες πανδημίας, ασχολήθηκε με μια διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία του **Πυθαγορείου Θεωρήματος**, την οποία αντλήσαμε μέσα από τις **διδαχές του Σωκράτη**, όπως διασώθηκαν από τους μαθητές του και κυρίως από **τον Πλάτωνα**. Είναι γνωστό ότι ο μεγάλος φιλόσοφος της αρχαιότητας, Σωκράτης, πίστευε βαθιά στην μέθοδο της μαιευτικής, στην ικανότητα δηλαδή να βγάλει ο δάσκαλος από τον μαθητή την καινούργια γνώση, με μια διαδικασία ανάλογη με αυτή που ακολουθούν οι μαιευτήρες για τον ερχομό ενός παιδιού στον κόσμο, γι' αυτό και ο όρος μαιευτική.*

Το πρόβλημα είναι διάσημο και πολύ γνωστό σε όλους

Έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά **α.** Τι πλευρά πρέπει να έχει ένα άλλο τετράγωνο, ώστε το εμβαδόν του να είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του αρχικού; Είναι απολύτως αναμενόμενο το απλοϊκό λάθος να ισχυριστεί κάποιος ότι αρκεί να πάρουμε ένα τετράγωνο με διπλάσια πλευρά από το αρχικό για να έχουμε διπλάσιο εμβαδόν. Προφανώς, αυτό δεν ισχύει διότι αν πάρουμε διπλάσια πλευρά το εμβαδόν τετραπλασιάζεται. Από καθαρά μαθηματική θεώρηση, το πρόβλημα, όμως ξέρουμε, είναι απλό. Στη Β' τάξη του Γυμνασίου διδαχθήκαμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Με χρήση λοιπόν του Πυθαγορείου Θεωρήματος βρίσκουμε εύκολα ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά α είναι $\alpha\sqrt{2}$, επομένως, αν κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με **πλευρά** τη **διαγώνιο του αρχικού** τότε θα έχουμε ένα τετράγωνο με εμβαδό διπλάσιο του αρχικού. Το στοίχημα του Σωκράτη ήταν να μπορέσει **να διδάξει** αυτή τη γνώση σε ένα άτομο, το οποίο δεν παρακολουθούσε συστηματικά μαθήματα. Έθεσε, αρχικά, ως προϋπόθεση το άτομο να γνωρίζει καλά την ελληνική γλώσσα και να διαθέτει στοιχειώδεις επικοινωνιακές δεξιότητες, ώστε να μπορεί ο δάσκαλος να αναπτύξει ένα συγκροτημένο διάλογο μαζί του. Για το σκοπό αυτό, επέλεξε τυχαία ένα δούλο από την αρχαία Αθήνα και έθεσε ένα **άτυπο στοίχημα** με τους σοφούς της εποχής, ότι είναι σε θέση με απλά βήματα κοινής λογικής να εκμαιεύσει από τον ελάχιστα μορφωμένο αυτόν άνθρωπο, μια βαθιά και ουσιαστική νέα γνώση χωρίς την αυστηρή χρήση θεωρημάτων, συμβόλων και άλλων μαθηματικών εργαλείων αλλά με μοναδικό όπλο την **αξιοποίηση του κοινού νου**. Ο διάλογος του Σωκράτη – δούλου, όπως έχει διασωθεί από τον Πλάτωνα στο έργο του **«Μένων»**, είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα μαιευτικής μεθόδου διδασκαλίας. Ο Σωκράτης με **συνεχείς ερωταπαντήσεις** καθοδηγεί το μαθητή του, ώστε να ανακαλύψει μόνος του τη γνώση. Αν αξιολογήσουμε το κείμενο θα διαπιστώσουμε ότι **η προσπάθεια του δασκάλου** εστιάζεται στα εξής βήματα:



Σχήμα 1

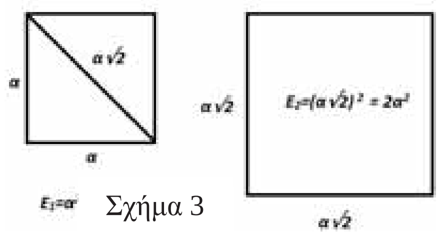


Σχήμα 2

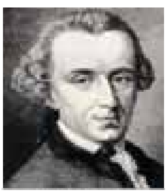
- Ανακάλυψη της βασικής ιδιότητας του τετραγώνου(σχήμα με 4 ίσες πλευρές).
- Τρόπος υπολογισμού του εμβαδού. Αυτό γίνεται με εμπειρικό τρόπο, χωρίς αυστηρούς φορμαλισμούς και χρήση τύπων.
- Απόρριψη με συνεχείς ερωταπαντήσεις του αναμενόμενου απλοϊκού λάθους (διπλάσια πλευρά).
- Εισαγωγή της διαγωνίου ως βασικό εργαλείο για την κατανόηση του προβλήματος (έμφαση στο γεγονός ότι η διαγώνιος είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζει το τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη και όχι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου).
- Απόρριψη άλλων επιφανειακών προσεγγίσεων και έμφαση στην ανακάλυψη του εμβαδού του τετραγώνου με πλευρά τη διαγώνιο.

Το παράδειγμα αυτό ενισχύει σοβαρά **σύγχρονες** και **καινοτόμες αντιλήψεις** για την διδασκαλία των Μαθηματικών, αντιλήψεις που μας οδηγούν στην χαρά της **ανακάλυψης** και της **ατομικής δημιουργίας**. Η μάθηση, όταν στηρίζεται στην αξιοποίηση της εμπειρίας και των προϋπαρχουσών γνώσεων, οικοδομείται και οδηγεί σε μια τεκμηριωμένη γνώση γιατί βασίζεται σε **βιωματικές** καταστάσεις από την καθημερινή ζωή. Για πολλά χρόνια, υπήρχε μια άτυπη σύγκρουση σε θέματα επιλογής μοντέλων διδασκαλίας, δηλαδή εργαλειακή ή σχεσιακή κατανόηση, όπως βρίσκουμε σχετικά ερωτήματα στο έργο του Skemp. Προσεγγίσεις βασιζόμενες στο **συμπεριφορισμό** [1] (**behavioral-μπιχεβιορισμό**), όπου απλά ο εκπαιδευτικός μεταδίδει με μετωπική διδασκαλία μια στείρα και αποστεωμένη γνώση στο μαθητή, χωρίς να την έχει εντάξει στο γνωστικό του υπόβαθρο, θεωρούνται ξεπερασμένες και μη αποδεκτές από παιδαγωγικής άποψης. Τέτοιες αντιλήψεις υποστηρίχθηκαν με πάθος από φιλοσόφους, παιδαγωγούς και μαθηματικούς και θεωρούνται τα βασικά συστατικά οικοδόμησης μιας **σύγχρονης μάθησης** αποτελώντας έναν ασφαλή οδηγό χάρτη για την κατάκτηση μιας νέας γνώσης. Ανάμεσα στους υποστηρικτές των Σωκρατικών μεθόδων, κυρίαρχη θέση κατέχουν ο **Immanuel Kant**, ο οποίος χαρακτηρίστηκε ως το αθάνατο κλέος της Γερμανίας και ως δεύτερος Σωκράτης, ο Gaston Bachelard με το περίφημο έργο του «La formation de l' ésprit scientifique» και ο Jean Piaget του οποίου το έργο καθοδηγεί μέχρι σήμερα τις πιο ισχυρές και επικρατούσες παιδαγωγικές αντιλήψεις. Η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να στηρίζεται σε τέτοιες σύγχρονες παιδαγωγικές απόψεις. Οι απόψεις αυτές αξιοποιούν την σωκρατική αντίληψη και το έργο των **κονστρουκτιβιστών** [2] και ταυτόχρονα δημιουργούν **ελκυστικά μοντέλα** από την καθημερινότητα και τις εμπειρίες μας, που μας προσφέρουν μία πιο ρεαλιστική και εντέλει πρακτική θεώρηση των μαθηματικών εννοιών.Για παράδειγμα, επειδή ως μαθητές της Α' Λυκείου, έχουμε δεχτεί τα σχετικά ερεθίσματα, πόσο ποιο ωφέλιμο θα ήταν να εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης μέσα από ένα παράδειγμα της καθημερινής ζωής, όπως οι μητέρες με τα παιδιά τους, δηλαδή σε κάθε παιδί αντιστοιχεί μια μόνο μαμά, όπως ακριβώς σε κάθε **x αντιστοιχεί** ένα **μόνο y**, αντί να χρησιμοποιήσουμε ένα στείρο διδακτικό μοντέλο με αυθαίρετη εισαγωγή μαθηματικών συμβόλων, σε πρώτο χρόνο μάθησης των εννοιών, πχ f(x), κενών στην αρχή ουσιαστικού περιεχομένου, για μας τους μαθητές, που θα πρέπει να ανακαλύπτουμε την καινούργια γνώση.

Σωκράτης



Σχήμα 3



Kant

Πιστεύουμε ότι τα Μαθηματικά παίζουν ουσιαστικό ρόλο στην καθημερινή μας ζωή, η σύνδεσή τους με επιστημονικούς χώρους, όπως η φιλοσοφία και η απόλυτη αναγκαιότητα ότι οι γνώσεις μας, να στηρίζονται σε προϋπάρχουσες γνωστικές εμπειρίες, πάνω στις οποίες οικοδομείται με ασφάλεια και με βιωματικό τρόπο η νέα θεώρηση των πραγμάτων.

Βιβλιογραφία: 1. «Πλάτωνος Μένων» Μετάφραση Έλλης Λαμπρίδη (Πάπυρος 1938)
2. Jean Piaget :The Child's Conception of the World (London: Routledge and Kegan Paul, 1928) [La Représentation du monde chez l'enfant (1926, orig. pub. as an article, 1925)
3. Richartd Skemp :Relational Understanding and Instrumental Understanding Mathematics Teaching, 77, 20–26, (1976)
4. Gaston Bachelard :La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective (1938)
5. Μπάμπης Τουμάσης : Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών(Εκδόσεις Gutenberg 2004)

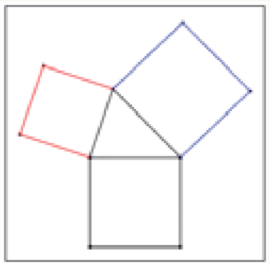
[1] **Συμπεριφορισμός (μπιχεβιορισμός):** Η συμπεριφορά και η μάθηση του ατόμου ελέγχεται και διαμορφώνεται από περιβαλλοντικούς παράγοντες. Ο συμπεριφορισμός κυριάρχησε στο μεγαλύτερο μέρος του, σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα όλων των προηγμένων χωρών του 20ου αιώνα. Σημαντικές μελέτες και έρευνες έχουν γίνει κυρίως από τους Watson, Skiner, Thorndike και Pavlov.

[2] **Κονστρουκτιβισμός (εποικοδομητισμός)**: Η μάθηση είναι μια ενεργή διαδικασία οικοδόμησης γνώσης. Οι πραγματικές εμπειρίες είναι σημαντικές στη μαθησιακή διαδικασία, που πρέπει να έχει ένας μαθητής, όταν αναζητά τη γνώση ή όταν λύνει ένα πρόβλημα μόνος του. Θα πρέπει να συνθέτει νέες ιδέες με βάση τις προηγούμενες γνώσεις και να μπορεί εύκολα να ταιριάζει την πληροφορία που θα προκύπτει και με τις καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Όλο αυτό προϋποθέτει, πρωτοβουλία, αυτονομία, αναζήτηση, αλληλοτροφοδότηση θεωρίας πράξης με τα νέα δεδομένα και κριτική σκέψη. Κύριοι εκφραστές αυτής της θεωρίας είναι οι Dewey, Piaget, Vygotsky και Bruner.

Ασκήσεις στον Ανεμόμυλο

Δημήτριος Νικολακόπουλος

προπτυχιακός τριτοετής φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Πατρών



Ανεμόμυλος είναι το υποκοριστικό του διπλανού σχεδίου, στο οποίο στηρίζεται το θεώρημα του **Vecten**. Παρουσιάζουμε παρακάτω το εν λόγω θεώρημα, καθώς και μια σειρά από προτεινόμενες ασκήσεις. Ο Vecten, ένας μάλλον άσημος γεωμέτρης, δημοσίευσε 22 άρθρα μέσα σε 14 χρόνια (1810-1824) στα ***Χρονικά*** του **Gergonne**. Το μόνο που γνωρίζουμε γι αυτόν είναι πως κατά τα χρόνια των δημοσιεύσεών του υπηρετούσε ως καθηγητής στο Λύκειο της πόλης **Nimes**.
Το θεώρημα του Vecten και έξι προτεινόμενες ασκήσεις - εφαρμογές του θεωρήματος πρωτοπαρουσιάστηκαν στο περιοδικό Ευκλείδης Β, τόμος 1 τεύχος 2, Δεκέμβριος-Ιανουάριος **1977**.

Ποιος ο λόγος να ασχοληθούμε με τον Vecten και τις ασκήσεις του; Ένας βασικός λόγος είναι ο πλούτος των ιδιοτήτων των σημείων που προκύπτουν από την επεξεργασία του θεωρήματος και αποτελούν ένα ικανοποιητικό πλαίσιο εξάσκησης για όσους θέλουν να συμμετάσχουν σε μαθηματικές ολυμπιάδες. Επιπλέον, ασκήσεις σαν κι αυτές, προτείνει για μελέτη το Πανεπιστήμιο του Cambridge στους καθηγητές και σπουδαστές του.

Για την ιστορία...

Ο ανεμόμυλος ήταν ήδη γνωστός από τον 3ο αιώνα π.Χ, από το έργο του Ευκλείδη και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Ας θυμηθούμε την απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος με τα τρία τετράγωνα γύρω από τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Επανεμφανίζεται τον 4ο αιώνα μ.Χ. από τον **Πάππο** τον Αλεξανδρινό και αφορά το τυχαίο τρίγωνο, κατόπιν τον 9ο αιώνα μ.Χ. από τον Θαμπίτ Ιμπν Κουρά, τον 13ο αιώνα μ.Χ. σε μια αραβική μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη, τον 15ο αιώνα μ.Χ. στο έργο του **Λεονάρντο ντα Βίντσι**, όπως αναφέρει ο Howard Eaves, τον 19ο αιώνα μ.Χ. από τον Vecten και τον 20ο αιώνα από τον **Victor Thébault**, στον οποίο οφείλεται και η ιστορική αυτή καταγραφή.

Στη διάρκεια των αιώνων πολλοί γεωμέτρες ενδιαφέρθηκαν για τον ανεμόμυλο, δίνοντάς του μάλιστα και άλλα ονόματα. Για παράδειγμα, οι έλληνες και οι ινδοί ονόμασαν το σχήμα "η καρέκλα της νύφης", άλλοι "η κουκούλα του Φραγκισκανού", άλλοι "η ουρά του παγωνιού" και οι ρώσοι "το παντελόνι του Πυθαγόρα". Σίγουρα η πιο επιτυχημένη ονομασία φαίνεται να είναι η επικρατούσα, "ανεμόμυλος".

Θεώρημα Vecten: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έξω απ' αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ. Τότε ισχύει:

1. **α)** Η διάμεσος ΑΜ του $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ είναι κάθετη στην ΕΘ και είναι $\text{ΑΜ} = \dfrac{\text{ΕΘ}}{2}$.

   β) Αντίστοιχα, η διάμεσος ΑΟ του $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΘ}}$ είναι κάθετη στην ΒΓ και $\text{ΑΟ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$.
2. Αν Σ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΕΑΘΣ τότε: τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΙ είναι ίσα και κάθετα αντίστοιχα με τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΣ και ΓΣ και τέμνονται σε σημείο $Η_1$ του ύψους ΑΚ.
3. Είναι ΒΘ⊥ΓΕ και ΒΘ=ΓΕ.
4. Αν $Τ_1$ το σημείο τομής των ΘΒ και ΓΕ, $Τ_2$ το σημείο τομής των ΑΗ και ΓΔ και $Τ_3$ το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΙ, τότε οι ευθείες $ΑΤ_1$, $ΒΤ_2$, $ΓΤ_3$ είναι αντίστοιχα κάθετες στις ΔΙ, ΕΖ, ΗΘ, οι οποίες περνάνε αντίστοιχα από τα $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$.
5. Αν $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$ είναι τα κέντρα των τετραγώνων ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ, ΑΒΔΕ τότε οι ευθείες $ΑΟ_1$, $ΒΟ_2$, $ΓΟ_3$ περνάνε από το ίδιο σημείο U (Σημείο Vecten του $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$), το οποίο είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $Ο_1Ο_2Ο_3$.
6. Αν Φ είναι το μέσον του ΔΙ, τότε το τρίγωνο ΒΦΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
7. Το τρίγωνο $Ο_2ΜΟ_3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
8. Οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων ΑΒΔΕ, ΑΓΙΘ και οι ευθείες ΒΘ, ΓΕ, ΔΙ, $ΑΟ_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο.
9. Οι ευθείες ΕΙ, ΔΘ, ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο $Η_2$.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ, που φτιάχνονται εξωτερικά αυτού. Να αποδείξετε ότι:

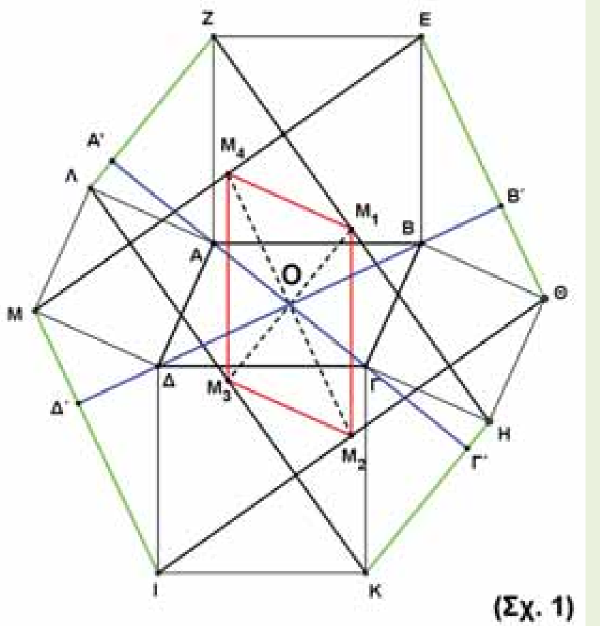
a. Τα μέσα $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3$, $Μ_4$ των ευθυγράμμων τμημάτων ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ, ΜΕ αντίστοιχα, είναι κορυφές παραλληλογράμμου, που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ, έχει το ίδιο κέντρο και πλευρές κάθετες με τις πλευρές του αντιστοίχου.

b. Οι προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των σημείων Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα πάνω στις ευθείες ΛΖ, ΕΘ, ΗΚ, ΙΜ, είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση

a. Στο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AB\Delta}}$ η ΑΟ είναι διάμεσος άρα ΟΑ⊥ΛΖ και ΑΓ=ΛΖ (1[o] θεώρημα Vecten).

Όμοια στο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Gamma B\Delta}}$ η ΓΟ είναι διάμεσος άρα ΟΓ⊥ΚΗ και ΑΓ=ΗΚ, δηλαδή ΛΖ=ΚΗ και ΛΖ//ΚΗ (κάθετες στη ΑΓ στα Α΄ και Γ΄ αντίστοιχα), οπότε το ΛΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή M_1M_3 ενώνει τα μέσα των ΗΖ και ΛΚ αντίστοιχα, θα είναι παράλληλη των ΛΖ, ΚΗ και θα διέρχεται από το μέσον της Α΄Γ΄ που είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



(Σχ. 1)

Όμοια για τα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta A\Gamma}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{BA\Gamma}}$ θα είναι ΔΒ κάθετη στις ΕΘ, ΙΜ στα σημεία Β΄ και Δ΄ αντίστοιχα και θα ισχύει ΕΘ=ΒΔ=ΜΙ. Άρα το ΕΘΙΜ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή M_2M_4 ενώνει τα μέσα των ΙΘ και ΕΜ αντίστοιχα, θα είναι παράλληλη των ΜΙ, ΕΘ και θα διέρχεται από το μέσον της Δ΄Β΄ που είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑ΄Ζ και ΓΓ΄Κ είναι ίσα (ΑΖ=ΓΚ και $\mathbf{A'\hat{Z}A = \Gamma'\hat{K}\Gamma}$, πλευρές παράλληλες) άρα Α΄Ζ=//ΚΓ΄, οπότε το Α΄ΖΓ΄Κ θα είναι παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιοι Α΄Γ΄ και ΖΚ διχοτομούνται, και επειδή το Ο είναι το μέσο της Α΄Γ΄ το Ο θα είναι και το κέντρο του παραλληλογράμμου ΛΖΗΚ (ΖΚ διαγώνιος του ΛΖΗΚ), άρα το Ο θα είναι και το μέσο των M_1M_3 και M_2M_4 . Δηλαδή θα είναι $OM_1=OM_3$ και $OM_4=OM_2$ οπότε το $M_1M_2M_3M_4$ είναι παραλληλόγραμμε που το κέντρου συμπίπτει με το κέντρο του ΑΒΓΔ.

Επίσης τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν ίσες διαγώνιες, ΑΓ=ΛΖ= M_1M_3 και ΒΔ=ΕΘ= M_2M_4.

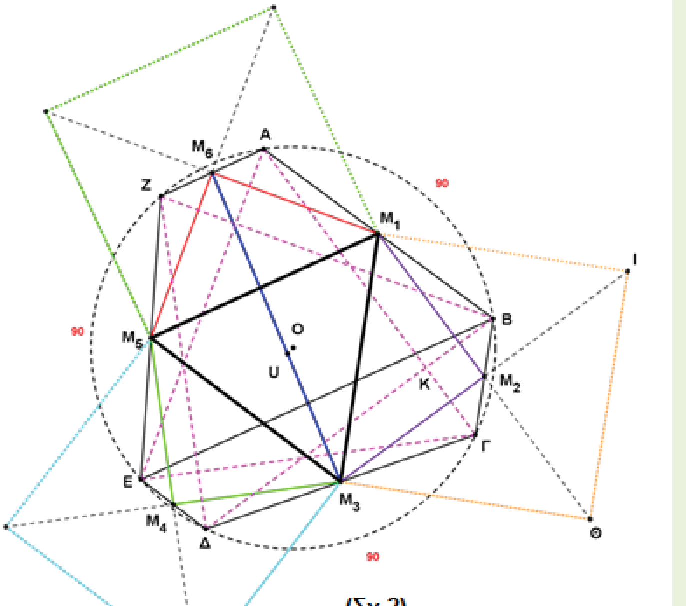
Είναι M_1M_3 ⊥Α΄Γ΄ και M_2M_4⊥Β΄Δ΄, άρα οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}M_1}$ και $\mathbf{A\hat{O}\Delta}$ θα είναι ίσες (αν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο αμβλείες) ή παραπληρωματικές αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Στο σχήμα 1 οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}M_1}$, $\mathbf{A\hat{O}\Delta}$ είναι οξείες οπότε τα τρίγωνα ΟΑΔ και OM_1M_4 θα είναι ίσα (δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία) άρα ΑΔ= M_1M_4, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα.

Οι γωνίες $\mathbf{M_4\hat{O}\Delta'}$, $\mathbf{A'\hat{O}M_1}$ είναι ορθές και τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ , $M_1M_2M_3M_4$ είναι ίσα, άρα το παραλληλόγραμμο $M_1M_2M_3M_4$ προκύπτει από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με στροφή γύρο από το κέντρο Ο κατά 90°, οπότε M_3M_4⊥ΑΒ και M_1M_2⊥ΑΔ.

b. Αρκεί οι Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄, που διέρχονται από το Ο, να διχοτομούνται. Είναι Α΄Ο=Α΄Α+ΑΟ=Α΄Α+ΟΓ, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι Α΄Α=ΓΓ'. Αυτό ισχύει από την ισότητα των τριγώνων ΑΑ΄Ζ, ΓΓ'Κ. Όμοια Δ΄Ο=ΟΒ΄, άρα το Α'Β'Γ'Δ' θα είναι παραλληλόγραμμο.

2. **Θεωρούμε περιφέρεια C(O,R) και τα μη διαδοχικά τόξα της ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ ίσα με 90° το καθένα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, περνάνε από το ίδιο σημείο U.**



(Σχ.2)

Λύση

Από την υπόθεση είναι: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZ}$ (Σχ. 2).

Είναι $\overset{\frown}{\mathbf{AB\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\overset{\frown}{\mathbf{B\Gamma\Delta}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} + \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$, άρα $\overset{\frown}{\mathbf{AB\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathbf{B\Gamma\Delta}}$, οπότε ΑΓ=ΒΔ (1). Όμοια ΒΔ=ΓΕ=ΔΖ=ΕΑ=ΖΒ.

Είναι $\mathbf{A\hat{K}B} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma\Delta}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{90^o}$ δηλαδή ΑΓ⊥ΒΔ (2). Όμοια ΓΕ⊥ΖΔ, ΑΕ⊥ΖΒ.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ η M_2M_3 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ άρα $\mathbf{M_2M_3} // = \dfrac{\mathbf{B\Delta}}{\mathbf{2}}$ (3).

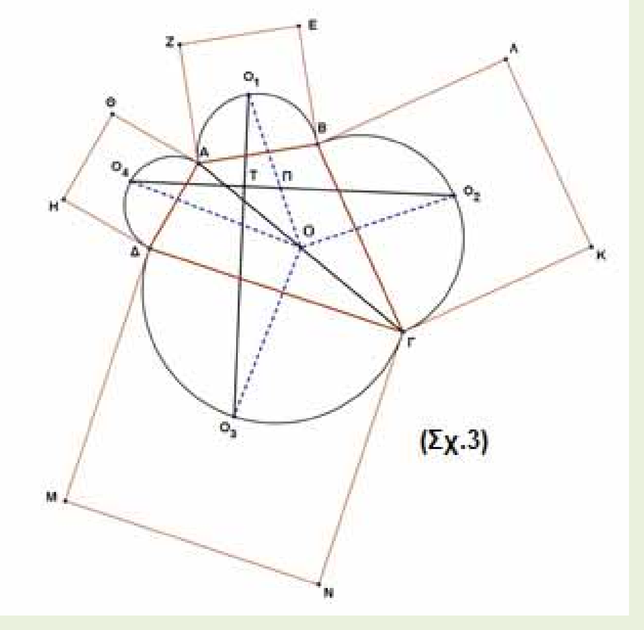
Όμοια στο τρίγωνο ΑΒΓ η M_1M_2 ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ άρα $\mathbf{M_1M_2} // = \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$ (4).

Επειδή ΑΓ=ΒΔ και ΑΓ⊥ΒΔ θα είναι και $M_1M_2= M_2M_3$ και $M_1M_2 \perp M_2M_3$, δηλαδή το τρίγωνο $M_1M_2M_3$ θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε το M_2 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_1M_3.

Όμοια το M_4 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_5M_3 και το M_6 θα είναι το κέντρο του τετραγώνου με πλευρά την M_1M_5.

Στο τρίγωνο $M_1M_3M_5$ τα M_2 , M_4 και M_6 είναι τα κέντρα των τετραγώνων με πλευρές τις M_1M_3, M_3M_5 και M_5M_1 αντίστοιχα του τριγώνου $M_1M_3M_5$, άρα οι M_3M_6, M_1M_4 και M_5M_2 συντρέχουν στο U, (5^o θεώρημα 5 Vecten).

3. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού ημιπεριφέρειες, με διαμέτρους τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Αν O_1, O_2, O_3, O_4 είναι τα μέσα αυτών των ημιπεριφερειών αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι $O_1O_3=O_2O_4$ και $O_1O_3 \perp O_2O_4$.



(Σχ.3)

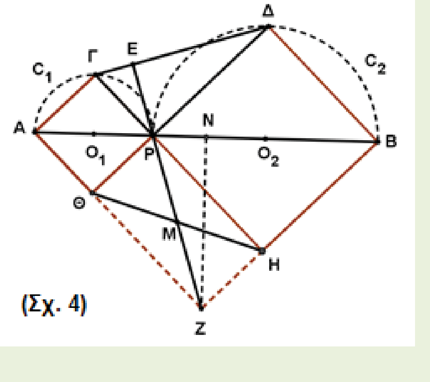
Λύση

Θεωρούμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΚΛ, ΓΔΜΝ και ΑΔΗΘ που έχουν κέντρα τα σημεία O_1, O_2, O_3, O_4 αντίστοιχα.

Έστω Ο το μέσον της ΑΓ, τότε στο τρίγωνο ΒΑΓ θα είναι $\mathbf{O_1\hat{O}O_2 = 90^o}$ και $OO_1=OO_2$ (1) (7^o θεώρημα Vecten). Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΔ θα είναι $\mathbf{O_4\hat{O}O_3 = 90^o}$ και $OO_4=OO_3$ (2). Τα τρίγωνα O_1OO_3, OO_2O_4 έχουν $OO_1=OO_2$ λόγω (1) $OO_3=OO_4$ λόγω (2) $\mathbf{O_1\hat{O}O_3 = O_4\hat{O}O_2}$ (καθεμία είναι $\mathbf{90^o + O_4\hat{O}O_1}$), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $O_1O_3=O_2O_4$ και $\mathbf{O\hat{O}_1O_3 = O_4\hat{O}_2O}$.

Τα τρίγωνα $ΤΠO_1$ και $ΟΠO_2$ έχουν δύο γωνίες ίσες, τις $\mathbf{O\hat{O}_1O_3, O_4\hat{O}_2O}$ και $\mathbf{O_1\hat{\Pi}T, O\hat{\Pi}O_2}$ ως κατά κορυφή, άρα θα είναι $\mathbf{O_1\hat{T}\Pi = \Pi\hat{O}O_2 = 90^o}$.

4. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και μεταβλητό σημείο Ρ πάνω σ' αυτό. Γράφουμε τις ημιπεριφέρειες C_1, C_2 με διαμέτρους αντίστοιχα τα τμήματα ΡΑ, ΡΒ έτσι, ώστε να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΑΒ οι ημιπεριφέρειες. Ονομάζουμε Γ και Δ τα μέσα των C_1 και C_2 αντίστοιχα και φέρνουμε την ΡΕ⊥ΓΔ. Να αποδειχτεί ότι η μεταβλητή ευθεία ΡΕ περνάει από σταθερό σημείο.



(Σχ. 4)

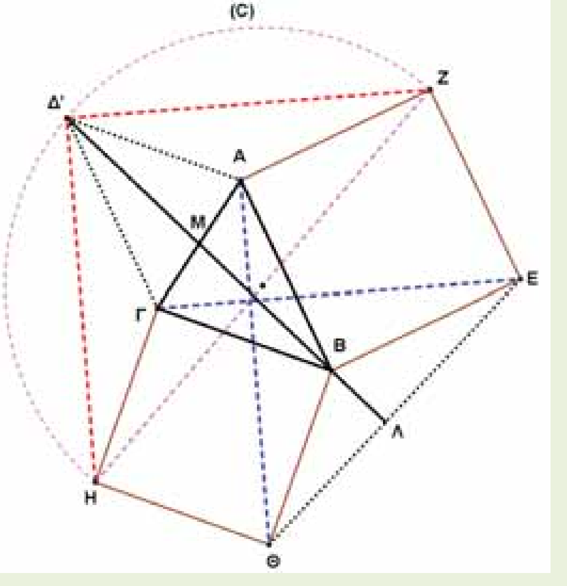
Λύση

Θεωρούμε το τρίγωνο ΡΓΔ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΓΡΘΑ, ΡΔΒΗ (Σχ. 4). Επειδή τα σημεία Γ, Δ είναι μέσα των ημιπεριφερειών C_1, C_2 τα τρίγωνα ΑΓΡ, ΡΔΒ θα είναι ορθογώνια και ισοσκελή οπότε

$\hat{ΑΡΓ} = \hat{ΒΡΔ} = 45^o$, άρα $\hat{ΓΡΔ} = \hat{ΘΡΗ} = 90^o$. Επειδή ΡΕ⊥ΓΔ, η ΡΕ θα διέρχεται από το μέσον της ΘΗ. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΡΗΖΘ το οποίο θα είναι ορθογώνιο, διότι έχει μία γωνία ορθή, άρα η ΡΜ θα διέρχεται από το Ζ. Θα αποδείξουμε ότι το Ζ είναι σταθερό σημείο.

Τα τρίγωνα ΑΡΘ, ΡΗΒ είναι ορθογώνια και ισοσκελή, άρα $\hat{ΡΑΘ} = \hat{ΡΒΗ} = 45^o$ οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ θα είναι και ισοσκελές. Έστω ΖΝ η απόσταση του Ζ από την ΑΒ, τότε η ΖΝ θα είναι μεσοκάθετος της ΑΒ και $ΖΝ = \frac{ΑΒ}{2}$ που είναι σταθερό (1^o θεώρημα Vecten).

5. **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΒΓΗΘ. Με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ γράφουμε την ημιπεριφέρεια (C) που βρίσκεται προς το μέρος της πλευράς ΑΓ. Αν Δ είναι το μέσον της ημιπεριφέρειας (C) να αποδειχτεί ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.**



Λύση

Έστω Μ το μέσον της ΑΓ τότε ΒΜ⊥ΘΕ και $ΒΜ = \frac{ΘΕ}{2}$ (1^o θεώρημα Vecten). Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ' και θα αποδείξουμε ότι το Δ ταυτίζεται με το Δ'.

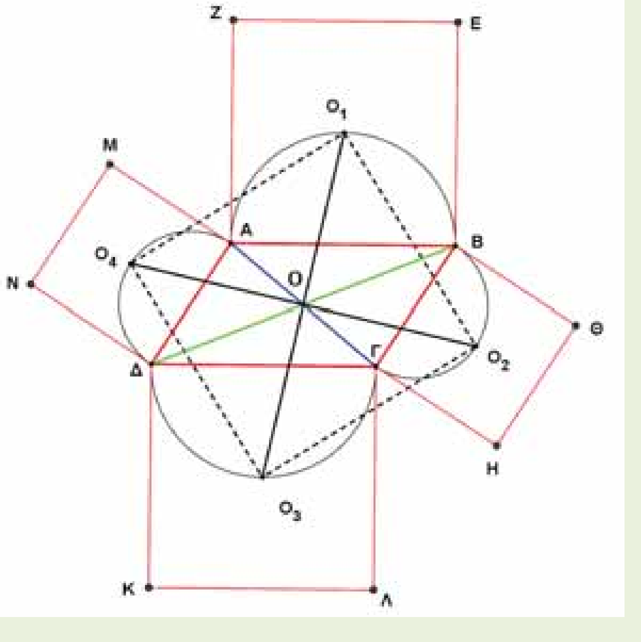
Είναι ΑΘ⊥ΓΕ και ΑΘ=ΓΕ (3^o θεώρημα Vecten).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι Δ' Η//=ΑΘ και Δ' Ζ//=ΓΕ.

Είναι Δ'Α//=ΓΒ//=ΗΘ, άρα Δ΄ΑΘΗ παραλληλόγραμμο, οπότε Δ΄Η//=ΑΘ. Όμοια Δ΄Ζ//=ΓΕ, οπότε Δ' Ζ//=ΓΕ, άρα Δ΄Η=Δ΄Ζ και Δ΄Η⊥Δ΄Ζ, δηλαδή $\hat{ΗΔ'Ζ} = 90^o$, οπότε το Δ' βρίσκεται στην ημιπεριφέρεια (C) και επειδή Δ΄Η=Δ΄Ζ το Δ΄ μέσο του (C), άρα το Δ ταυτίζεται με το Δ' .

6. **Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις ημιπεριφέρειες που φτιάχνονται εξωτερικά αυτού με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Αν $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$ και $Ο_4$ είναι τα μέσα αυτών των ημιπεριφερειών αυτών αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο $Ο_1Ο_2Ο_3Ο_4$ είναι τετράγωνο.**

Λύση



Τα μέσα $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$, $Ο_4$ των ημιπεριφερειών είναι κέντρα των τετραγώνων ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΚΛ και ΑΔΝΜ αντίστοιχα. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ο είναι το μέσον της ΑΓ, άρα (7^o θεώρημα Vecten) το τρίγωνο $Ο_1Ο_2$ Ο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $Ο_1\hat{Ο}Ο_2 = 90^o$ και $ΟΟ_1=ΟΟ_2$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ, επειδή το Ο είναι το μέσον της ΒΔ το τρίγωνο $Ο_2Ο_3Ο$ θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και θα έχουμε

$$Ο_2\hat{Ο}Ο_3 = 90^o \text{ και } ΟΟ_2=ΟΟ_3 \text{ (2).}$$

Όμοια $Ο_3\hat{Ο}Ο_4 = 90^o$ και $ΟΟ_3=ΟΟ_4$ και $Ο_4\hat{Ο}Ο_1 = 90^o$ και $ΟΟ_4=ΟΟ_1$ (3).

Από τις (1), (2), (3) στο τετράπλευρο $Ο_1Ο_2Ο_3Ο_4$ οι διαγώνιες διχοτομούνται κάθετα και είναι και ίσες, άρα είναι τετράγωνο.

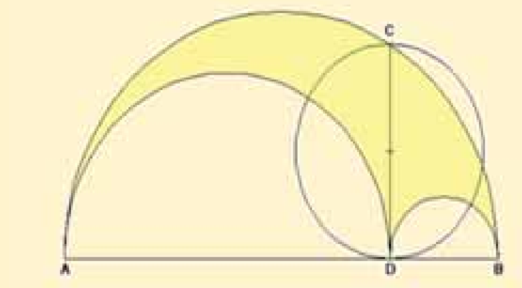
Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Δώστε μου ένα μέρος για να σταθώ
και θα μετακινήσω τη Γη **Αρχιμήδης**

Άρβυλος

Η **άρβυλος** ή **δρέπανος του Αρχιμήδη** είναι η επιφάνεια την οποία σχηματίζουν τρία ημικύκλια. Κατασκευάζεται από ένα ημικύκλιο με διάμετρο 1 που περιέχει άλλα δύο ημικύκλια με διαμέτρους r **και** (1 – r) αντίστοιχα πάνω στην ίδια διάμετρο. Ο Αρχιμήδης μελέτησε και περιέγραψε της ιδιότητες αυτής της επιφάνειας, η οποία μοιάζει με εργαλείο των υποδηματοποιών, και φέρει το όνομά του.

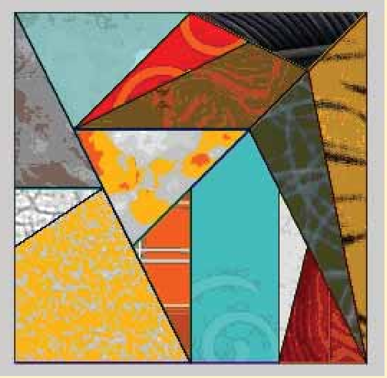


Άρβυλος του Αρχιμήδη

Το εργαλείο Άρβυλος

Puzzle **με το όνομα «Οστομάχιο»**

Το Puzzle «Οστομάχιο» με 14 κομμάτια δημιουργεί τετράγωνο με πάρα πολλούς τρόπους. Το «Οστομάχιο» είναι από το **Παλίμψηστο** του **Αρχιμήδη** το οποίο βρέθηκε το 1906 από τον Δανό καθηγητή Johan Ludvig Heiberg σε βιβλιοθήκη **μονής** στην Κωνσταντινούπολη. Το 1920 πουλήθηκε το Παλίμψηστο σε ιδιώτη και το 1998 σε δημοπρασία το πήρε ο οίκος Christie's και βρίσκεται στο Μουσείο Walters Art της Βαλτιμόρης.



Είναι περγαμηνή από δέρμα κατσίκας, γραμμένη τον 13ο μ.Χ. αιώνα, η οποία περιέχει 174 σελίδες με εκκλησιαστικά κείμενα. Τελικά βρέθηκε ότι η περγαμηνή είναι ένα παλίμψηστο, δηλαδή ήταν γραμμένο αρχικά το έργο του Αρχιμήδη και κάποιοι στο Μεσαίωνα το έξυσαν να φύγει η μελάνη και ξαναέγραψαν επάνω ψαλμούς. Οι πραγματείες του Αρχιμήδη που είναι γραμμένες και ξυσμένες, στις οποίες περιέχεται και το Puzzle «Οστομάχιο», διαβάστηκαν με υπεριώδεις ακτίνες και ακτίνες Χ.

Για την ζωή του Αρχιμήδη γνωρίζουμε λίγα πράγματα, έζησε τον 3ο π.Χ. αιώνα στις Συρακούσες, μάλλον σπούδασε στην Αλεξάνδρεια μαζί με τον Ερατοσθένη και τον Κόνωνα από τη Σάμο. Το 212 **π.Χ.** τον σκότωσε Ρωμαίος στρατιώτης. Το έργο του Αρχιμήδη είναι τεράστιο. Από τις εφευρέσεις του και τα μαθηματικά του κείμενα, μόνο ένα μέρος που το αναφέρουν τον 6**ο μ.Χ.** αιώνα ο **Ευτόκιος** και ο Ισίδωρος από την Μίλητο, μας είναι γνωστό. Το έργο του όμως, αυτό είχε μεγάλη επιρροή στους επιστήμονες κατά την αναγέννηση, αλλά και σήμερα, σε πολλούς τομείς της μαθηματικής επιστήμης.

Διεθνή Βραβεία Μαθηματικών 2021

Βραβείο Abel 2021

1952 Niels Henrik Abel

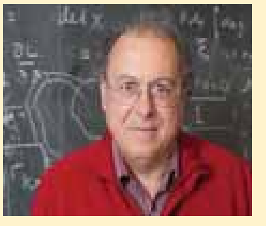
Το **βραβείο** Abel είναι διεθνές βραβείο και απονέμεται από τον βασιλιά της Νορβηγίας κάθε χρόνο σε έναν ή περισσότερους εξαίρετους μαθηματικούς. Φέρει το όνομα του Νορβηγού μαθηματικού **N**iels Abel (1802–1829), το δε όνομά του παραπέμπει και στο βιβλικό Άβελ, είναι ένα από τα μεγαλύτερα βραβεία για τους μαθηματικούς. Ο Abel ήταν σπουδαίος Νορβηγός μαθηματικός, παρά τον σύντομο βίο του (πέθανε 26 ετών από φυματίωση και σε κατάσταση φτώχειας).

Το πιο σπουδαίο **επίτευγμά** του είναι η πρώτη πλήρης απόδειξη στο **ανοιχτό πρόβλημα** της επίλυσης της **εξίσωσης** 5**ου βαθμού**, το οποίο δεν είχε επιλυθεί για 2,5 **αιώνες**. Ανακάλυψε τις Αβελιανές συναρτήσεις, που φέρουν το όνομά του και έδωσε **καινοτόμες ιδέες** στον τομέα των ελλειπτικών συναρτήσεων. Η συνεισφορά του σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών ήταν τόσο μεγάλη που φαίνεται στα λόγια του Γάλλου μαθηματικού Charles Hermite «O Abel άφησε στους μαθηματικούς **αρκετά**, ώστε να απασχοληθούν **τα επόμενα πεντακόσια χρόνια**». Η Νορβηγική Ακαδημία των Επιστημών και των Γραμμάτων, βραβεύει τον νικητή ή τους νικητές, που επιλέγει μια επιτροπή αποτελούμενη από 5 κορυφαίους μαθηματικούς. Για πρώτη φορά απονεμήθηκε βραβείο το 2003 με την συμπλήρωση των 200 χρόνων από την γέννηση του Abel. Το βραβείο το 2019 δόθηκε για πρώτη φορά σε γυναίκα, στην Αμερικανίδα Karen Uhlenbeck, για το θεμελιώδες έργο της στη γεωμετρική ανάλυση με το οποίο ανέτρεψε την αντίληψή μας για τις ελάχιστες επιφάνειες.

Το βραβείο το 2021 δόθηκε φέτος, σε δύο μαθηματικούς από το Ισραήλ, τον Laszlo Lovasz που γεννήθηκε το 1948 και είναι καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης, ο οποίος έχει επίσης κερδίσει και άλλα βραβεία (Gödel 2001, Kioto 2010) και στον Avi Wigderson που γεννήθηκε το 1956, ο οποίος είναι καθηγητής στο Ινστιτούτο για την προηγμένη Έρευνα, στο Πρίνστον των ΗΠΑ, με σημαντική συμβολή στην διεύρυνση και εμβάθυνση της θεωρίας της **πολυπλοκότητας** (Κρυπτογραφία του Διαδικτύου), που επίσης έχει κερδίσει και αυτός και άλλα βραβεία (Gödel 2009, Knuth 2019). Τώρα βραβεύονται για το έργο τους στη θεωρητική επιστήμη των υπολογιστών, και ακόμα για το έργο τους στα **διακριτά Μαθηματικά**, με τον σημαίνοντα ρόλο της μορφοποίησης τους, σε κεντρικούς τομείς των σύγχρονων Μαθηματικών.

Βραβείο Shaw Prize 2021

Το **βραβείο** Shaw είναι ένα ετήσιο βραβείο, που ξεκίνησε να δίνεται για πρώτη φορά από το Ίδρυμα Shaw Prize το 2004. Το ίδρυμα έγινε το 2002 στο Hong Kong από τον φιλάνθρωπο Run Run Shaw και βραβεύει άτομα που είναι ενεργά στους αντίστοιχους τομείς τους και έχουν πρόσφατα επιτεύγματα **στα Μαθηματικά**, την αστρονομία, την ιατρική και τις επιστήμες της ζωής. Γενικά για επιτεύγματα τα οποία έχουν εξαιρετική συνεισφορά στην ακαδημαϊκή και επιστημονική έρευνα ή τις εφαρμογές ή σε άλλους τομείς που προωθούν την κοινωνική πρόοδο, τη βελτίωση της ποιότητας ζωής και τον εμπλουτισμό του πνευματικού πολιτισμού της ανθρωπότητας.



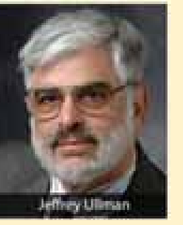
Δημήτρης Χριστοδούλου

Στο μετάλλιο αυτό υπάρχει και η κινεζική αναφορά του φιλόσοφου Xun Zi «Πιάστε το νόμο της φύσης και χρησιμοποιήστε τον». Θυμίζουμε ότι το 2011 το βραβείο είχε δοθεί στον Έλληνα μαθηματικό **Δημήτρη Χριστοδούλου**.

Για το 2021 το βραβείο Prize, θα δοθεί στο βρετανό μαθηματικό αυστριακής καταγωγής Martin Hairer – ερευνητή στο Imperial College του Λονδίνου. Το έργο του Hairer είναι στο πεδίο της **στοχαστικής ανάλυσης** και περιγράφει με Μαθηματικά, τυχαίες επιδράσεις σε φυσικά φαινόμενα. Από τα σημαντικότερα έργα του Hairer είναι η εργασία του στις «δομές κανονικότητας» στα Μαθηματικά που άφησε έκπληκτους πολλούς μαθηματικούς. Ο Martin Hairer το 2015 τιμήθηκε επίσης με την κορυφαία μαθηματική διάκριση, το μετάλλιο Fields (Fields Medal) που δίνεται κάθε 4 χρόνια από τη Διεθνή Μαθηματική Ένωση (IMU), όπου και συμμετέχουν βραβευμένοι μαθηματικοί.

Βραβείο Turing

Το βραβείο Turing είναι βραβείο για την επιστήμη της Πληροφορικής. Το βραβείο «Turing 2020», για την φετινή χρονιά, απονέμει η διεθνής Ένωση Υπολογιστικών Μηχανών, στους ομότιμους καθηγητές της Επιστήμης των Υπολογιστών, Jeffrey David Ullman από το Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ και στον συνεργάτη του Alfred Vaino Aho, από το Πανεπιστήμιο Κολούμπια. Οι δύο αυτοί επιστήμονες ανέπτυξαν, στη διάρκεια της πολυετούς καριέρας, τους πρωτοποριακούς αλγόριθμους και διάφορα άλλα εργαλεία, καθώς και εκπαιδευτικά βιβλία που έχουν χρησιμοποιηθεί από εκατομμύρια προγραμματιστές λογισμικού παγκοσμίως, όπως το «Ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση των Υπολογιστικών Αλγορίθμων» (1974). Τα προγράμματα που «τρέχουν» σήμερα σε κάθε μηχανή (υπολογιστή, κινητό τηλέφωνο, αυτοκίνητο, drones, κ.ά.), έχει γραφτεί σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού, η οποία στη συνέχεια «μεταφράζεται» σε χαμηλότερου επιπέδου κώδικα, που μπορεί να εκτελεστεί από το μηχάνημα. Η τεχνολογία αυτής της «μετάφρασης» ξεκίνησε από τους Aho και Ullman. Η αρχή έγινε με τη συνεργασία τους, στο Πανεπιστήμιο Πρίνστον, στα Εργαστήρια Bell το 1967-1969 συνεργασία που συνεχίστηκε για πολλά χρόνια. Η πρόεδρος της ACM, καθηγήτρια Gambriele Kotsich είπε: «Οι Aho και Ullman είναι **ηγέτες του προγραμματισμού** από το 1970 και με την εργασία τους αυτή, καθοδήγησαν πολλές γενιές προγραμματιστών». Το βραβείο Turing απονέμεται από το 1966 με χρηματοδοτική υποστήριξη από τη Google προς τιμή του Βρετανού μαθηματικού και πρωτοπόρου της Πληροφορικής Al. **M.** Turing (1912-1954) ο οποίος στο δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο κατάφερε «σπάσει» την μηχανή «αίνιγμα» και να αποκρυπτογραφήσει τα μηνύματα των Γερμανών. Θυμίζουμε ότι ο **Ιωσήφ Σηφάκης** Καθηγητής της επιστήμης της Πληροφορικής του Μετσόβιου Πολυτεχνείου, είχε πάρει βραβείο Turing το 2007 σε θέματα ελέγχου μοντέλων, μιας μεθόδου τυπικής επαλήθευσης λογισμικού υπολογιστών




Ιωσήφ Σηφάκης

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

- Ο Eüler τυφλώθηκε το 1735, γιατί κοιτούσε μια έκλειψη Ηλίου με γυμνούς οφθαλμούς.
- Οι γρίφοι και τα Μαθηματικά αινίγματα άρεσαν πολύ στον **Νεύτωνα**.
- Ο Milankovitch, Σέρβος καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Βελιγραδίου δημιούργησε το «Αναθεωρημένο Ιουλιανό Ημερολόγιο» για τις Ορθόδοξες Εκκλησίες που εφαρμόστηκε το 1923.

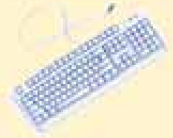
Τα διαστημόπλοια

Ο Elon Mask στέλνει αρκετά διαστημόπλοια στο διάστημα, για να δώσει σε όλη τη Γη **επικοινωνία**. Τα διαστημόπλοια αυτά που φεύγουν για το διάστημα, όταν εκτοξεύονται μετά την κατακόρυφη άνοδο και πριν μπουν σε τροχιά, κατευθύνονται βόρια, νότια, ανατολικά ή δυτικά;

Οι Ανεξεταστέοι

Από τους 120 μαθητές ενός σχολείου προήχθησαν τον Ιούνιο οι 70 και οι υπόλοιποι είναι ανεξεταστέοι για το Σεπτέμβριο. Η ανακοίνωση για τους ανεξεταστέους είχε: 36 στα Αρχαία Ελληνικά, 35 στην Πληροφορική, 40 στα Μαθηματικά και 42 στην Ιστορία. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει μείνει και στα τέσσερα μαθήματα;

Το πληκτρολόγιο



Γιατί τα πλήκτρα των γραμμάτων στα κινητά και στο πληκτρολόγιο του Η/Υ δεν είναι στην σειρά και είναι μπερδεμένα;

Μαμά και κόρη

Η μαμά κρατά την μικρή της κόρη από το χέρι και βαδίζουν στο πάρκο. Ξεκίνησαν τη βόλτα τους πατώντας ταυτόχρονα πρώτα το δεξί τους πόδι. Σε κάθε δύο βήματα της μαμάς η κόρη κάνει τρία. Πότε θα πατήσουν ταυτόχρονα το αριστερό τους πόδι;

Το δέντρο

Σε ένα ποτάμι με πλάτος 12 μέτρα και στο μέσο ακριβώς υπάρχει ένα δέντρο που η κορυφή του είναι δύο μέτρα έξω από το νερό. Αν το λυγίσουμε η κορυφή του αγγίζει την όχθη. Τι ύψος έχει το δέντρο;

Το βαρέλι

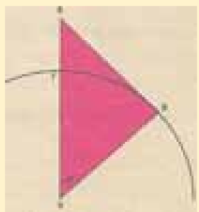
Έχετε ακούσει πολλές φορές ότι αυξήθηκε η τιμή στο βαρέλι πετρελαίου ή ότι η παραγωγή είναι τόσα βαρέλια. Πόσα λίτρα έχει το βαρέλι;

Ο Μαραθώνιος

Στο Μαραθώνιο όλοι εγκατέλειψαν εκτός από τρείς αθλητές. Κάποια στιγμή ο τρίτος προσπέρασε το δεύτερο. **α)** Τι σειρά έχει τώρα; **β)** έχει καλύτερη θέση από τον προ τελευταίο; **γ)** αν στην κορδέλα φτάσουν τελικά δυο αθλητές ποιος έχει καλύτερη θέση ο δεύτερος ή ο προ τελευταίος;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 119

Η Απλοποίηση: Η Ελισάβετ πήρε άριστα. Ήταν πολύ τυχερή.



Η Θέα: Αν φανταστείτε την ΑΟ που ενώνει τα μάτια σας σημείο Α με το κέντρο της Γης Ο και η οποία τέμνει την επιφάνεια της Γης στο σημείο Γ. Την ΑΒ εφαπτομένη από το Α στην επιφάνεια της Γης στο σημείο Β και την ακτίνα ΟΒ της Γης, έχετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΟ (Β=ορθή) με συνθ=$\frac{OB}{OA}$= $\frac{6370}{6370+0,002}$=0,9999 ή θ=0,051^o ή θ=0.0002 ακτίνια. Άρα το μήκος του τόξου ΓΒ που θα βλέπετε είναι 0.0002$*$ 6370=2 χιλιόμετρα.

Εννέα τετράγωνα: Ονομάστε τους αριθμούς x, x+1, … x+8 ή καλύτερα x ο 5^{ος} , x–1, x–2, x–3, x–4, και x ο 5^{ος}, x+1, x+2, x+3, x+4 οι άλλοι λύστε την εξίσωση και έχετε τους αριθμούς: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 .

Το αντιηλιακό: Αφού μπορείς να μείνεις 10 λεπτά χωρίς αντιηλιακό είναι ως να έχεις απορρόφηση $100-\frac{100}{10}=90\%$. Το αντηλιακό εμποδίζει την ακτινοβολία άρα μπορούμε να εκτεθούμε στον Ήλιο περισσότερο χρόνο. Επομένως με δείκτη 15 το ποσοστό απορρόφησης είναι 100 – $\frac{100}{15}$ =93,3% με δείκτη 30 είναι 100 – $\frac{100}{30}$ =96,7%. Δηλαδή 100–93,3=6,7 που 6,7x15=100 και 100–96,7=3,3 που 3,3x30=100

Το κλάσμα: Το $\frac{ΑΒΒΒ}{ΒΒΒΓ}$ θα είναι $\frac{2.x}{5.x}$. Άρα Γ=0 ή 5, Β= 2,4,6,8 και Α≤4 για να είναι 4ψήφιος ο Παρονομαστής. Αυτό συμβαίνει για x=1333.

Top thirty: Το τελευταίο τραγούδι του top thirty δεν μπορεί να ακούστηκε μόνο μία φορά, αφού το λιγότερο 1 φορά ακούστηκε κάθε ένα από τα υπόλοιπα τραγούδια που δεν μπήκαν στο top thirty (αυτά που δεν μπήκαν στο top thirty θα μπορούσαν να έχουν ίδιο αριθμό επαναλήψεων). Από αυτά που μπήκαν (έχοντας διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων) και αφού θέλουμε τον ***ελάχιστο χρόνο***, τότε υποθέτουμε ότι:

- Το 30^o μπήκε με 2 επαναλήψεις
- Το 29^o μπήκε με 3 επαναλήψεις
- Το 28^o μπήκε με 4 επαναλήψεις
- Το 27^o μπήκε με 5 επαναλήψεις

……………………………………………

- Το 2^o μπήκε με 30 επαναλήψεις
- Το 1^o μπήκε με 31 επαναλήψεις

Οι επαναλήψεις 2,3,4,5,…,30,31 είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=2$, $\omega=1$. Για το άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου ισχύει ο τύπος $S_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\cdot\nu$. Άρα: $S_{30}=\frac{\alpha_1+\alpha_{30}}{2}\cdot 30=\frac{2+31}{2}\cdot 30=33\cdot 15=495$ επαναλήψεις συνολικά $495\cdot 3=1485$ λεπτά, δηλαδή $1485:60=24,75$ ώρες(24ώρες και 45 λεπτά) ο ελάχιστος χρόνος που χρειάστηκε.

Η Σχολή των Αθηνών

Η περίφημη «ταπισερί» του 18ου αιώνα παραχωρήθηκε πρόσφατα, στη Βουλή των Ελλήνων, από τη Γαλλική Εθνοσυνέλευση, γι' αυτή τη **χρονιά** με αφορμή τα 200 **χρόνια** από την Ελληνική Επανάσταση του 1821, ένα έργο ωδή στην Ελληνική σκέψη που έθεσε τα θεμέλια της Δημοκρατίας. Το πολύτιμο αυτό αντικείμενο ανήκει στο Mobilier National, τη δημόσια εθνική συλλογή της Γαλλίας, η οποία αριθμεί 130.000 αντικείμενα. Η ταπισερί απεικονίζει μια πρωτότυπη νωπογραφία που φιλοτέχνησε ο Ραφαήλ το διάστημα 1509-11, όταν προσκλήθηκε στη Ρώμη από τον Πάπα Ιούλιο Β΄. Οι διαστάσεις τις είναι 4,5Χ8 m . Υφάνθηκε στον οίκο Γκομπλέν στο Παρίσι και είναι φτιαγμένη από μαλλί και μετάξι. Ολοκληρώθηκε μεταξύ 1779 **και** 1785 **λίγο πριν τη Γαλλική Επανάσταση**. Το σημαντικό αυτό έργο, μέρος μιας σειράς συνθέσεων του καλλιτέχνη, ήταν στην Αίθουσα της Υπογραφής (Stanza della Segnatura) στο Βατικανό, έναν χώρο που πιθανότατα είχε τη χρήση ιδιωτικής βιβλιοθήκης ή εκκλησιαστικού δικαστηρίου.

Σε μια εποχή που το αναγεννησιακό πνεύμα, ήταν κυρίαρχο ο Ραφαήλ έφτιαξε μια πολυπρόσωπη σύνθεση 58 μορφών, με πρωταγωνιστές μεγάλους φιλοσόφους και διανοητές της αρχαιότητας να κάθονται αντικριστά. Ο Αριστοτέλης και ο Πλάτων, φαίνεται να είναι τα κεντρικά πρόσωπα στο έργο και δίπλα τους οι άλλοι φιλόσοφοι προσπαθούν να καταλάβουν τις αρχέγονες αιτίες του κάθε προβλήματος που αντιμετώπιζαν και να θέλουν να δώσουν τις αντίστοιχες λύσεις στο έργο τους.

Κεντρικές μορφές, όπως αναφέραμε, είναι ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης. Ο μεν πρώτος, ο Πλάτων, δείχνει με το χέρι του τον ουρανό, ως τον κόσμο **των ιδεών**, ενώ ο δεύτερος, ο Αριστοτέλης τη γη, τον κόσμο **της εμπειρίας**. Γύρω τους, ο Ραφαήλ τοποθετεί άλλες μορφές, όπως ο Ζήνων, ο Επίκουρος, ο Αναξίμανδρος, ο Σωκράτης, ο Ηράκλειτος, η Υπατία, ο Παρμενίδης, ο Πλωτίνος, ο Διογένης, ο Πυθαγόρας, ο Πτολεμαίος κ.ά. Το έργο έχει περιλάβει ρωμαϊκά στοιχεία, αλλά έχει και έναν ημικυκλικό καθορισμό, έχοντας τον Αριστοτέλη στο κέντρο με τον Πλάτωνα και όλα τα άλλα πρόσωπα να περιφέρονται γύρω από αυτόν και να παραπέμπει, κάτι τέτοιο, στην Πυθαγόρεια Μονάδα.

Η σχολή των Αθηνών αποτελεί την τέλεια ενσάρκωση του κλασικού πνεύματος της ύστερης αναγέννησης και δείχνει ότι πρόκειται για μια περίοδο όπου μπορεί να συνυπάρξει αρμονικά η σύζευξη μεταξύ του χριστιανισμού και του αρχαίου κόσμου. Ο Ραφαήλ σημείωνε πάνω από την τοιχογραφία τις λέξεις Causarum Cognitio, δηλαδή, «προσπάθησε να γνωρίζεις τις αιτίες».

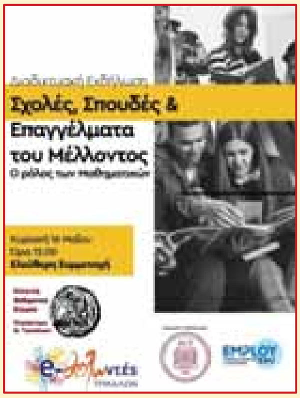
Στην Ελληνική πραγματικότητα αυτό έχει να κάνει με την αρχαιότητα, το διαφωτισμό και την αφύπνιση του Γένους.

Σημαντικές εκδηλώσεις

Η μαθηματική κοινότητα δραστηριοποιείται και παρά τις δυσκολίες των καιρών, δείχνει δρόμους και κινήσεις που βοηθάνε πολύ. Για το μήνα Μάιο και ενώ το περιοδικό ήταν προς την έκδοση, ξεχωρίσαμε τις παρακάτω δύο εκδηλώσεις.

Τα Μαθηματικά και η αγορά εργασίας

Το **Δίκτυο Εθελοντών Τρικάλων και η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία - Παράρτημα Τρικάλων** λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες των γονέων, των μαθητών και των εκπαιδευτικών διοργάνωσαν διαδικτυακό σεμινάριο **Επαγγελματικού Προσανατολισμού** σε συνεργασία με την Employ Edu Σύμβουλοι Εκπαίδευσης & Σταδιοδρομίας. Στο σεμινάριο αυτό, έγινε αναλυτική **ενημέρωση** για τα **Πανεπιστημιακά Τμήματα** και τις Πανελλαδικές Εξετάσεις αλλά και θα αναδειχθούν οι δυναμικοί κλάδοι εργασίας και η **νέα αγορά** εργασίας όπως θα εξελιχθεί στη μετά covid19 εποχή.



Τα Μαθηματικά και οι εξετάσεις

Λίγες ημέρες πριν τις πανελλαδικές εξετάσεις, τα **παραρτήματα** Έβρου, Καστοριάς και Φλώρινας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας πιστά στο ετήσιο ραντεβού μας με τους μαθητές της Γ' ΓΕΛ και τους συναδέλφους μαθηματικούς, διοργάνωσαν τον μήνα Μάιο διαδικτυακή εκδήλωση .