

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

ΓΕΓΟΝΟΤΑ

139

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

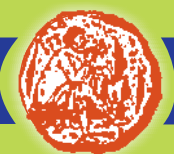
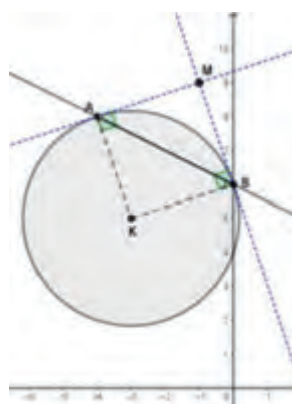
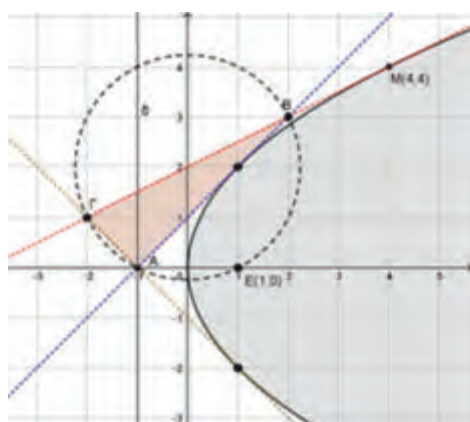
# Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2026 ευρώ 3,5

Πολλα

Θέματα "Ευκλείδης" 2026



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

#### Επίκαιρα Θέματα

Φυσική και Τεχνητή Νόηση .....	1
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες, .....	7
Homo Mathematicus, .....	25

#### Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Πρόοδοι - Συναρτήσεις .....	31
Γεωμετρία: Από το σχήμα στην Απόδειξη .....	37

#### Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση .....	45
Γεωμετρία: Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας .....	49
Αναλυτική Γεωμετρία: Ασκήσεις .....	53

#### Γ΄ Τάξη

Ανάλυση: Ασκήσεις .....	59
Η διαχείριση του χρόνου στα Μαθηματικά των Πανελλαδικών εξετάσεων .....	65

#### Γενικά Θέματα

Ο Ευκλείδης προτείνει... .....	69
Τα Μαθηματικά μας Διακεδάζουν .....	73
Το Βήμα του Ευκλείδη: Πως να το λύσω ή πως να το αποδείξω .....	75
Αφορμές και στιγμιότυπα .....	80

#### Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,  
μαθητές και συνάδελφοι,

με επιμονή, με καλή διάθεση  
με αισιοδοξία  
και με δημιουργική προσπάθεια

ας προσπαθήσουμε  
για το καλύτερο ...



Η επιτροπή σύνταξης  
του περιοδικού

Υ.Γ.: Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις περισσότερες. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά απρόοπτα, της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο δύσκολη ...  
Σας ευχαριστούμε για την κατανόηση και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:  
Α΄ Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],  
Β΄ Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουριδίας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],  
Γ΄ Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδιάς]

**Εξώφυλλο:** Εικαστική σύνθεση για  
τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

#### Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

<b>Θαλής:</b>	07 Νοεμβρίου	2025
<b>Ευκλείδης:</b>	17 Ιανουαρίου	2026
<b>Αρχιμήδης:</b>	28 Φεβρουαρίου	2026

$$2026 = [2000+20+2^2+2]=2 \cdot 1013$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής**  
βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

#### ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532  
Fax: 210 3641025

**Εκδότης**  
Φελλούρης Ανάργυρος  
**Διευθυντής:**  
Τυρλής Ιωάννης

**Επιμέλεια Έκδοσης:**  
Ζώτος Ευάγγελος

#### Υπεύθυνοι για το Δ.Σ

Αντωνόπουλος Νίκος  
Βακαλόπουλος Κώστας  
Τσιφάκης Χρήστος

#### Επιτροπή Έκδοσης

Αργυράκης Δημήτρης  
Βακαλόπουλος Κώστας  
Λουριδιάς Γιάννης  
Τσίτος Χρήστος  
Τσιφάκης Χρήστος  
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Αντωνόπουλος Νίκος  
Αργύρη Παναγιώτα  
Αργυράκης Δημήτρης  
Βακαλόπουλος Κώστας  
Βλάχος Σπύρος  
Γαμβρέλλης Αργύρης  
Γκουβιέρος Χρήστος  
Δρούτσας Παναγιώτης  
Ελθίνι Ναϊρούζ  
Ζέρβας Νίκος  
Ζώτος Ευάγγελος  
Κανάβης Χρήστος  
Καρκάνης Βασίλης  
Κατσούλης Γιώργος  
Καρδαμίτσης Σπύρος  
Κερασαρίδης Γιάννης  
Κονόμης Άρτι  
Κορρές Κωνσταντίνος

#### Συντακτική Επιτροπή

Κουτσούρης Λέων  
Κωστοπούλου Καλλιόπη  
Λαζαρίδης Χρήστος  
Λουμπαρδιά Αγγελική  
Λουριδιάς Γιάννης  
Λουριδιάς Σωτήρης  
Λυγάτσικας Ζήνων  
Μαλαφέκας Θανάσης  
Μανιατοπούλου Αμαλία  
Μαυρογιαννάκης Λεωνίδα  
Μήλιος Γιώργος  
Μπαλτασαβιάς Βενέδικτος  
Μπερσίμης Φραγκίσκος  
Μπρίνος Παναγιώτης  
Μπρούζος Στέλιος  
Μίκος Χρήστος  
Ντόρβας Νικόλαος  
Ντρίζος Δημήτριος

Παναζή Αφροδίτη  
Σίσκου Μαρία  
Σκοτίδας Σωτήριος  
Στεφανής Παναγιώτης  
Ταπεινός Νικόλαος  
Τζελέπης Αλκιβιάδης  
Τουρναβίτης Στέργιος  
Τσακρτζής Στέλιος  
Τσίτος Χρήστος  
Τσιφάκης Χρήστος  
Τσώπelas Ιωάννης  
Τσουλουχάς Χάρης  
Τυρλής Ιωάννης  
Χριστόπουλος Θανάσης  
Χριστόπουλος Παναγιώτης

#### Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054  
ISSN: 1105 - 8005

**Σχόλιο:** Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται  
και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένεδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β΄» Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 3000
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

**Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50**

# Φυσική και Τεχνητή Νόηση

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

*Είναι ο άνθρωπος το μόνο όν με νόηση;  
Τι συμβαίνει με τα άλλα όντα της Γης;*

## Βιολογική Βάση και Κυβερνητική

Από επιστημονικές μελέτες ξέρουμε ότι ο εγκέφαλος ενός ενήλικα ανθρώπου ζυγίζει περίπου ενάμισι κιλό. Είναι πολύπλοκος με δισεκατομμύρια νευρώνες δηλαδή κύτταρα που κάνουν τις βασικές λειτουργίες αλλά και πολύ περισσότερους, διαφορετικού είδους νευρώνες που συντηρούν την όλη κατασκευή του εγκεφάλου. Όλα αυτά έχουν τρισεκατομμύρια συνάψεις μεταξύ τους, έτσι ο εγκέφαλος είναι σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό πολύπλοκος από οποιοδήποτε σύγχρονο δημιούργημα. Η πολυπλοκότητα του εγκεφάλου οδήγησε τους επιστήμονες στη μελέτη συστημάτων αυτορρύθμισης. Έτσι γεννήθηκε η Κυβερνητική από τον Norbert Wiener. Ο Norbert Wiener ονόμασε **Κυβερνητική** τη μελέτη της επικοινωνίας, του ελέγχου και της στατιστικής μηχανικής είτε στη μηχανή είτε στα ζώα. Ο Wiener γεννήθηκε 1894, σπούδασε κοντά στους **Russel, Hilbert και Hardy**. Δημοσίευσε άρθρα φιλοσοφικού περιεχομένου, αρμονικής Ανάλυσης και Στατιστικής. Εργάστηκε για τη δημιουργία στρατιωτικών μηχανημάτων αλλά αρνήθηκε να πάρει μέρος στην κατασκευή υδρογονοβόμβας.



## Τι είναι η «νόηση»;

Η νόηση (από το ρήμα **νοώ = κατανοώ**) είναι η διαδικασία (το ότι σκεφτόμαστε/κατανοούμε). Περιλαμβάνει τις λειτουργίες που μας επιτρέπουν: να αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο, να επεξεργαζόμαστε **πληροφορίες**, να σχηματίζουμε έννοιες, να μαθαίνουμε, να κρίνουμε, να παίρνουμε αποφάσεις, να δημιουργούμε νέα νοήματα. Χαρακτηριστικά της ανθρώπινης νόησης είναι:

**Αφαιρετική σκέψη** – ικανότητα να συλλαμβάνουμε έννοιες πέρα από το άμεσο και συγκεκριμένο (π.χ. “δικαιοσύνη”, “ελευθερία”).

**Συμβολισμός και γλώσσα** – η χρήση της γλώσσας επιτρέπει να εκφράζουμε και να επεξεργαζόμαστε πολύπλοκες ιδέες.

**Αυτοσυνείδηση** – γνωρίζουμε ότι σκεφτόμαστε, μπορούμε να αναλογιστούμε τον εαυτό μας.

**Λογική και αιτιολόγηση** – δυνατότητα να βγάζουμε συμπεράσματα με βάση κανόνες και αποδείξεις.

**Δημιουργικότητα** – ικανότητα παραγωγής νέων ιδεών και συνδυασμών.

**Ηθική και αξιολόγηση** – σκέψη με βάση αξίες, σκοπούς και νόημα.

**Προοπτική σκέψη** – φανταζόμαστε το μέλλον, σχεδιάζουμε και προβλέπουμε.

**Η Νοημοσύνη** είναι η αποτελεσματικότητα (το πόσο γρήγορα/καλά επιλύουμε προβλήματα). Δηλαδή, η **νόηση** είναι η δραστηριότητα του νου, ενώ η **νοημοσύνη** είναι το επίπεδο ή η ποιότητα αυτής της δραστηριότητας.

**Παράδειγμα:** Όταν κατανοούμε ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι **νόηση**. Όταν κάνουμε κάτι πιο αποτελεσματικά από κάποιον άλλο δείχνουμε **νοημοσύνη**.

Συχνά μπερδεύουμε τη **νόηση**, τη **νοημοσύνη**, τη **σκέψη** και τη **συνείδηση**

**Σκέψη:** είναι η διαδικασία μέσα από την οποία εκφράζεται η νόηση. Οι λειτουργίες της είναι η αναλογική, η αφαιρετική, η δημιουργική και η κριτική σκέψη, π.χ. αναλογίζεσαι πώς να λύσεις ένα πρόβλημα ή πως σου φέρθηκε κάποιος.

**Συνείδηση:** είναι η επίγνωση του εαυτού και του κόσμου. Οι λειτουργίες της είναι η αυτογνωσία, η ηθική κρίση, η εμπειρία του «εγώ», παράδειγμα, συνειδητοποιείς ότι είσαι θυμωμένος και σκέφτεσαι γιατί.

## Φιλοσοφική Θεώρηση

### Αρχαία ελληνική φιλοσοφία

#### • Αριστοτέλης (384–322 π.Χ.)

Για τον Αριστοτέλη, η νόηση (νους) είναι η ανώτερη ψυχική δύναμη του ανθρώπου. Διακρίνει: τον παθητικό νου (**νους παθητικός**), που δέχεται τα νοητά, και τον ενεργητικό νου (**νους ποιητικός**), που τα επεξεργάζεται και δημιουργεί γνώση.

Η νόηση είναι **αφαιρετική**: αποσπά από τα αισθητά τις καθάρεις έννοιες (π.χ. «άνθρωπος», «δικαιοσύνη»). Η νοημοσύνη δεν είναι ξεχωριστή έννοια, είναι μέρος του νου, δηλαδή της δύναμης του να γνωρίζει, π.χ. ο νους βλέπει το «συγκεκριμένο δέντρο», αλλά κατανοεί την έννοια «δέντρο γενικά».

#### • Πλάτωνας (427–347 π.Χ.)

Για τον Πλάτωνα, η νόηση είναι η ανώτερη μορφή γνώσης, αντιστοιχεί στην κατανόηση των Ιδεών. Ο νους ανήκει στην **αθάνατη ψυχή**, και η αληθινή γνώση είναι **ανάμνηση** των Ιδεών, π.χ. όταν κατανοείς τι είναι «δικαιοσύνη», βλέπεις τις δίκαιες πράξεις και συμμετέχεις στην Ιδέα της Δικαιοσύνης.



**Νεότερη φιλοσοφία**

- **Καρτέσιος (1596–1650)**

Ο Καρτέσιος εισάγει τον δυισμό **νου–σώματος**, ο νους (σκέψη) και το σώμα (ύλη) είναι διαφορετικές ουσίες. Η **νόηση** ταυτίζεται με τη **σκέψη** Cogito ergo sum (σκέφτομαι, άρα υπάρχω). Η **συνείδηση** για τον Καρτέσιο είναι **βέβαιη γνώση του εαυτού**, η πιο ασφαλής αλήθεια. Η **νοημοσύνη** είναι η ορθή χρήση του λογικού νου, όχι των αισθήσεων. Η νόηση είναι το φως του νου, η συνείδηση είναι το φως του εαυτού.

**Φιλοσοφία και ψυχολογία**

- **Καντ (1724–1804)**

Κατά τον Καντ η **νόηση** (Verstand) οργανώνει τις εμπειρίες μέσω κατηγοριών (αιτία, χρόνος, ποσότητα κ.λπ.). Δεν γνωρίζουμε τα «πράγματα καθαυτά», αλλά μόνο **όπως τα μορφοποιεί ο νους**. Η **συνείδηση** είναι ενότητα της εμπειρίας, εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά η ιδέα της **αυτοσυνείδησης** ως θεμέλιο της γνώσης.

**Σύγχρονη ψυχολογία και γνωσιακή επιστήμη**

Η **νόηση** ορίζεται ως το σύνολο των **γνωστικών διεργασιών** (αντίληψη, μνήμη, μάθηση, σκέψη). Η **νοημοσύνη** μετριέται και περιγράφεται ως **ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, προσαρμογής και δημιουργικότητας**. Η **σκέψη** μελετάται ως διαδικασία συμβολικής αναπαράστασης ή επεξεργασίας πληροφοριών. Η **συνείδηση** αντιμετωπίζεται ως δύσκολο φαινόμενο (πώς προκύπτει η **υποκειμενική εμπειρία** από τη βιολογία του εγκεφάλου).

**Ενοποιημένη σύγχρονη θεώρηση**

Σήμερα μπορούμε να δούμε τις έννοιες ως εξής:

Έννοια	Ρόλος στον άνθρωπο	στην τεχνητή νοημοσύνη
<b>Νόηση</b>	Η λειτουργία της κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.	Επεξεργασία δεδομένων/κατανόηση συμφραζόμενων.
<b>Νοημοσύνη</b>	Η αποτελεσματικότητα της νόησης.	Απόδοση αλγορίθμων, μάθηση, προσαρμογή.
<b>Σκέψη</b>	Η διαδικασία που υλοποιεί τη νόηση.	Υπολογιστικά μοντέλα, reasoning.
<b>Συνείδηση</b>	Η επίγνωση του εαυτού και των πράξεων μας.	Δεν υπάρχει ακόμη ισοδύναμο.

**Νοημοσύνη, επικοινωνία, εφευρετικότητα των ζώων;**

Η νοημοσύνη των ζώων είναι θέμα με τεράστιο ενδιαφέρον στη βιολογία, την ψυχολογία και τη φιλοσοφία του νου. Νοημοσύνη στα ζώα δεν σημαίνει μόνο σκέψη όπως των ανθρώπων, αλλά **ικανότητες όπως: μάθηση και μνήμη, επίλυση προβλημάτων, εφευρετικότητα, επικοινωνία και χρήση εργαλείων, κοινωνική συνεργασία, αυτογνωσία και ενσυναίσθηση**. Η επικοινωνία στα ζώα περιλαμβάνει χειρονομίες, εκφράσεις, χρώματα, χορούς και συμβολική γλώσσα. Η εφευρετικότητα τους είναι η ικανότητα να βρίσκουν νέα μέσα για να πετύχουν έναν στόχο. Δείχνει αιτιολογική σκέψη (αν χρησιμοποιήσω αυτό, θα πετύχω εκείνο), κάτι που παλιά το θεωρούσαμε καθαρά ανθρώπινο. Η μελέτη γίνεται με νευρολογική παρατήρηση (π.χ. μέγεθος του εγκεφάλου σε σχέση με το σώμα), με πειράματα μάθησης και μνήμης, με δοκιμές καθρέφτη, με δοκιμές εργαλείων ή γρίφων.

Αυτά που διακρίνονται είναι:

**Κοράκια και παπαγάλοι:** είναι από τα πιο έξυπνα πτηνά, φτιάχνουν εργαλεία (π.χ. άγκιστρα από κλαδιά), μπορούν να σχεδιάζουν για το μέλλον, αποθηκεύουν τροφή ή κρατούν εργαλεία για επόμενη χρήση. Το πρωτοφανές για πτηνά είναι να χρησιμοποιούν δύο εργαλεία διαδοχικά για να καταφέρουν κάτι. Οι παπαγάλοι εκτός από φωνητική μίμηση, κατανοούν έννοιες αριθμών, χρωμάτων, μεγέθη και κατηγορίες. Ο διάσημος παπαγάλος Άλεξ (ράτσας African Grey) κατανοούσε πάνω από 100 λέξεις και απαντούσε λογικά σε ερωτήσεις όπως (ποιο είναι μεγαλύτερο; ή τι χρώμα έχει;).



**Πίθηκοι, χιμπατζήδες, ουρακοτάγκοι:** Χρησιμοποιούν και κατασκευάζουν εργαλεία, δείχνουν κοινωνική μάθηση, μαθαίνουν από άλλους όχι μόνο με δοκιμές. Μπορούν να επικοινωνούν με απλά σύμβολα ή γλώσσες νοημάτων. Ο Χιμπατζής έχει άνεση στη χρήση εργαλείων, κατασκευάζει δώρα για κυνήγι και σφουγγάρια από φύλλα για να πίνει νερό. Η «Κόκο» (θηλυκός γορίλας) χρησιμοποιούσε περισσότερες από 1.000 λέξεις νοηματικής.

**Δελφίνια:** Τα δελφίνια έχουν πολύπλοκη κοινωνική δομή με σφυρίγματα, ταυτοποιούν άτομα, αναγνωρίζουν τον εαυτό τους στον καθρέφτη (δείγμα **αυτοσυνείδησης**). Μπορούν να μιμηθούν ήχους άλλων δελφινιών και να



κατανοήσουν αφηρημένες έννοιες (π.χ. το ίδιο, το διαφορετικό).

**Τα Άλογα:** Τα άλογα είναι πολύ έξυπνα, έχουν επικοινωνία και κατανόηση σήματος, αντίληψη ανθρώπινων συναισθημάτων, συνεργασία, κοινωνική και συναισθηματική νοημοσύνη.

**Τα Χταπόδια:** Πολύ έξυπνα είναι και τα χταπόδια, επιλύουν λαβύρινθους, ξεβιδώνουν βάζα, μιμούνται άλλα είδη και φαίνεται να έχουν προσωπικότητες.

**Ελέφαντες:** Δείχνουν συμπόνια και τελετουργίες θρήνου για νεκρούς συντρόφους, αναγνωρίζουν τον εαυτό τους σε καθρέφτη, θυμούνται πρόσωπα και μέρη για δεκαετίες. Επικοινωνούν με ήχους χαμηλών συχνοτήτων σε



μεγάλες αποστάσεις, προειδοποιούν για κινδύνους. Χρησιμοποιούν κλαδιά για να διώχνουν μύγες, μετακινούν αντικείμενα για να φτάσουν στην τροφή.

**Σκύλοι και γάτες:** Οι σκύλοι έχουν εξελιχθεί να κατανοούν ανθρώπινες εκφράσεις και χειρονομίες, μπορούν να μάθουν να κατανοούν πολλές λέξεις. Οι γάτες έχουν πιο ανεξάρτητη νοημοσύνη, αλλά δείχνουν μάθηση, παρατήρηση και μνήμη. Επικοινωνούν με εκφράσεις, ήχους και στάση σώματος, κατανοούν ανθρώπινα βλέμματα και τόνους φωνής.

**Μέλισσες:** Επικοινωνούν συμβολικά αλλά χωρίς προσαρμογή (χορός τροφής)

### Φιλοσοφικές συνέπειες

Η κατανόηση της νοημοσύνης των ζώων αλλάζει τη βιοηθική (δικαιώματα, συνείδηση, κακομεταχείριση), τη φιλοσοφία του νου (πώς ορίζουμε τη συνείδηση), και την **αντίληψή μας για τη θέση του ανθρώπου στη φύση.**

### Οι αναζητήσεις για μηχανές με νόηση

Οι φιλοσοφικές αναζητήσεις του ανθρώπου για την εφεύρεση μηχανών που να εκτελούν λειτουργίες αυτόματα και με λογική σκέψη είναι πολύ παλιές.

Ο φιλόσοφος Thomas Hobbes το 1650 έλεγε ότι οι σκέψεις δεν εκφράζονται με λεκτικά ή γραπτά σύμβολα, αλλά με ειδικά εγκεφαλικά σύμβολα. Δηλαδή, το αν οι λέξεις έχουν σημασία εξαρτάται από το αν οι σκέψεις μας έχουν νόημα. Ο ήχος ή τα γράμματα «**άλογο**» σημαίνουν ένα συγκεκριμένο ζώο επειδή εμείς στη γλώσσα που μιλάμε εννοούμε αυτό το ζώο. Άρα ήταν απαραίτητο να γίνει γλώσσα προγραμματισμού και μηχανή με μεγάλη μνήμη. Με την κατασκευή του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή γεννήθηκε αμέσως το ερώτημα, αν μπορούσε να γίνει η μηχανή με νόηση. Ο John Haugeland το 1989 στο βιβλίο του ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ, από MIT Press, το οποίο κυκλοφόρησε και από τις εκδόσεις Καστανιώτη το 1992 γράφει: Η Τεχνητή Νοημοσύνη δεν είναι ούτε παράλογη ούτε αναπόφευκτη, βασίζεται σε μια ισχυρή ιδέα, η οποία πιθανόν είναι σωστή αλλά είναι εξίσου πιθανό να μην είναι.



Η έννοια της Τεχνητής Νοημοσύνης ήταν πάντα στην επιστημονική φαντασία, είχαμε τις μυθικές κατασκευές του **Ηφαίστου** και του Δρ. Φρανγκενστάιν, είχαμε τα **Ρομπότ** με καλώδια, μεταλλικούς ήχους και λαμπάκια που αναβόσβηναν, είχαμε τα αυτόματα του **Ήρωος** τον 1<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς ήταν ένας πολυτάλαντος επιστήμονας, μαθηματικός, μηχανικός και εφευρέτης που άφησε το στίγμα του στην ιστορία. Οι αυτόματα λειτουργούσες κατασκευές του, το σύστημα συναγερμού, ο ατμοστρόβιλος (αιολόσφαιρα), το ξυπητήρι, οι θύρες του ναού που ανοίγουν αυτόματα, κ.ά. (παρουσιάζονται στο μουσείο «Κοτσανά», στην Αθήνα και την Αρχαία Ολυμπία) ήταν κατασκευές προ-άγγελοι μιας αναζήτησης για τεχνητή νόηση. Οι ιδέες του για την ατμομηχανή και τα υδραυλικά συστήματα θεωρούνται πρόδρομοι της βιομηχανικής επανάστασης γιατί άνοιξαν τον δρόμο, με μεγάλη καθυστέρηση βέβαια, σε επιστήμονες, μηχανικούς και εφευρέτες και οδήγησαν την ανθρωπότητα σε πολλές άλλες τεχνολογικές κατασκευές.

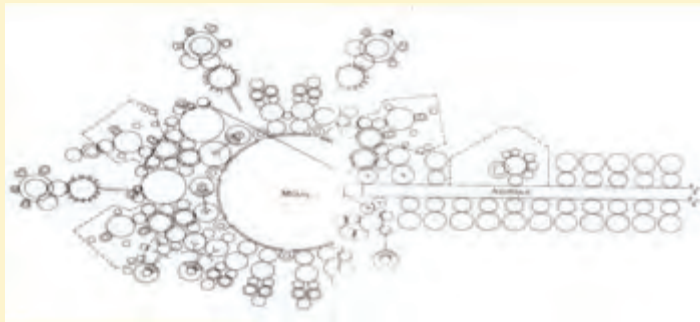
Ο Charles Babbage τον 19<sup>ο</sup> αιώνα είναι ο πρώτος επιστήμονας των υπολογιστών, κατασκεύασε τη Μηχανή των διαφορών και την Αναλυτική Μηχανή τις οποίες δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει. Αυτές οι μηχανές είναι η βάση του σημερινού Η/Υ. Βέβαια η εξέλιξη της τεχνολογίας δεν είναι γραμμική. Με την χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έγιναν τα διαστημικά ταξίδια, έγιναν κατασκευές άλλων σύγχρονων ηλεκτρονικών συσκευών και εφαρμογών που διευκολύνουν την ζωή μας. Μηχανές που μπορούν να κάνουν υπολογισμούς σε ελάχιστα δευτερόλεπτα, τους οποίους ο άνθρωπος για να κάνει θα χρειαζόταν όλη του τη ζωή. Υπήρξε μεγάλη εξέλιξη στην κατασκευή ενός Η/Υ. Οι πρώτοι Η/Υ πριν από 70 χρόνια ζύγιζαν περισσότερο από 30 τόνους. Ένας Διαφορικός Αναλυτής που κατασκευάστηκε στις ιδέες του Babbage τη δεκαετία το 1940 ζύγιζε 100 τόνους.

Σήμερα φτάσαμε να έχουμε Η/Υ λίγων μόλις γραμμαρίων. Ο τεράστιος όγκος των πληροφοριών απαιτούσε να γίνουν μεγάλες μονάδες καταγραφής και επεξεργασίας. Έγιναν Υπολογιστές όπως έλεγε ο von Neumann με μεγάλη μνήμη και προσπελάσιμες με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι μεγάλες αυτές μονάδες βρίσκονται μακριά από το χρήστη χάρις στο διαδίκτυο. Πολλά προβλήματα έπρεπε να επιλυθούν για να φτάσουμε σήμερα, μισό αιώνα μετά, οι μηχανές να σχεδιάζουν κατασκευές ή να κάνουν **3D εκτυπώσεις** και να μιλάμε για **Τεχνητή Νοημοσύνη**. **Μπορούν όμως οι μηχανές να έχουν «νόηση» και «νοημοσύνη;** Τα τελευταία 25 χρόνια με το διαδίκτυο και την επικοινωνία των ανθρώπων όλης της Γης, αποθηκεύτηκε τεράστιος όγκος δεδομένων(κείμενα, φωτογραφίες, επιστημονικά και άλλα θέματα), σε μεγάλα συστήματα ανά την Υφήλιο. Έτσι με την αρχιτεκτονική που έχουν οι σημερινοί υπολογιστές και τις άπειρες πληροφορίες(δεδομένα) που υπάρχουν, **μπορούν να έχουν νοημοσύνη.**

Το 1950 ο **Alan Turing** δημοσίευσε το άρθρο «Computing Machinery and Intelligence» (Υπολογιστικά Μηχανήματα και Νοημοσύνη), και εισήγαγε το **Test Turing** ως μέθοδο αξιολόγησης της μηχανικής νοημοσύνης. Τη δεκαετία του 1950, αναπτύχθηκαν τα πρώτα προγράμματα ΤΝ, όπως προγράμματα για **σκάκι, ντάμα**, καθώς και πρωτότυπα **Μηχανικής Μάθησης**.

Ο μαθηματικός **John Macarthy** (John McCarthy) το 1956 σε συνέδριο έδωσε τον όρο «**Τεχνητή Νοημοσύνη**» (Artificial Intelligence) και ασχολήθηκε με την αρχιτεκτονική δομή ενός νέου υπολογιστή που ονομάστηκε LISP, ο οποίος ήταν πιο ευέλικτος στην οργάνωση της μνήμης και τις δομές ελέγχου από αυτές του Turing και του Neumann. Ακολούθησε ο Newell με νέα αρχιτεκτονική και πιο ευέλικτα προγράμματα.

Ο προγραμματισμός των Η/Υ και οι γλώσσες προγραμματισμού ήταν επίσης ένα σημαντικό θέμα. Το ερώτημα ήταν **πως μπορεί να γίνει η υπολογιστική αρχιτεκτονική που έχει η νόσή μας.**



Αναλυτική μηχανή Babbage

**Λήψη αποφάσεων** ενός ανθρώπινου εμπειρογνώμονα π.χ. στην ιατρική διάγνωση. Αυτό ανανέωσε το ενδιαφέρον και τις επενδύσεις. Ακολούθησε η ανάπτυξη του αλγόριθμου **Backpropagation** που επέτρεψε την αποτελεσματικότερη εκπαίδευση των **Νευρωνικών δικτύων**. Το 1997 ο υπερυπολογιστής **Deep Blue** της IBM νίκησε τον παγκόσμιο πρωταθλητή Γκάρι Κασπάροφ στο σκάκι. Η αισιοδοξία για την ΤΝ κορυφώθηκε.

Ενισχύθηκε το ενδιαφέρον για τις τεχνικές **Μηχανικής Μάθησης** και την αξιοποίηση δεδομένων. Η τεράστια αύξηση των διαθέσιμων **δεδομένων** και η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος δημιούργησαν τις συνθήκες για την επανάσταση της **Βαθιάς Μάθησης**. Έτσι το 2022 γλωσσικά μοντέλα όπως το **ChatGPT** έδωσαν τεράστια ώθηση στην επεξεργασία φυσικής γλώσσας και την αλληλεπίδραση ανθρώπου - υπολογιστή, μετατρέποντας την ΤΝ από ένα τεχνικό κόλπο σε μια τεχνολογία που αλλάζει τα πάντα, με εφαρμογές στη βιομηχανία, στις επιστήμες, στην εκπαίδευση, στην καθημερινότητα της ζωής των ανθρώπων.

Οι προσπάθειες που γίνονται σήμερα για την κατασκευή και ανάπτυξη **κβαντικών υπολογιστών** (ο τομέας αυτός βρίσκεται σε φάση έντονης έρευνας και ανάπτυξης από μεγάλες εταιρείες την IBM, τη Google, τη Microsoft και ερευνητικά ιδρύματα), θα φέρουν μεγάλες και σημαντικές αλλαγές στην ανθρωπότητα.

**Ο Γαλιλαίος** έλεγε: η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του σύμπαντος που πάντα είναι ανοιχτό, αλλά για να το καταλάβουμε πρέπει πρώτα να μάθουμε τη γλώσσα και τους χαρακτήρες με τους οποίους έχει γραφεί. Είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών και οι χαρακτήρες είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα σχήματα.

**Η γλώσσα των Μαθηματικών**

Η αρχιτεκτονική των Η/Υ είναι τα Μαθηματικά. Πληροφορική και Τεχνητή Νοημοσύνη σημαίνει μαθηματικά. Το «μυαλό» της Τεχνητής Νοημοσύνης είναι η γραμμική άλγεβρα, η στατιστική, οι πιθανότητες, η αριθμητική ανάλυση, η θεωρία υπολογισμού, λογισμός και βελτιστοποίηση. Είναι οι πίνακες, τα διανύσματα, οι διανυσματικοί χώροι οι κατανομές, η μέση τιμή και διακύμανση, η κυρτότητα, τοπικά/καθολικά ελάχιστα, περιορισμένη βελτιστοποίηση. Τα Διακριτά Μαθηματικά και η Θεωρία Γραφημάτων χρησιμοποιούνται σε αλγορίθμους, σε δέντρα αποφάσεων, δικτυακές δομές (graph neural networks). Στατιστική & Πιθανότητες (καρδιά της Μηχανικής Μάθησης) χρειάζονται γιατί κάθε μοντέλο AI κάνει πιθανοτικές προβλέψεις. Η εκπαίδευση των μοντέλων είναι ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης.

Τα **νευρωνικά δίκτυα** είναι μια ακολουθία πράξεων με πίνακες. Κάθε επίπεδο του δικτύου είναι ουσιαστικά ένας πίνακας που πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα εισόδου. Ο αλγόριθμος **Backpropagation** που επέτρεψε την αποτελεσματικότερη εκπαίδευση των **Νευρωνικών δικτύων** γίνεται με παραγώγους, είναι εφαρμογή του αλυσιδωτού κανόνα. Η παράγωγος δείχνει πώς αλλάζει το σφάλμα και πώς πρέπει να τροποποιηθεί. Όλα τα μοντέλα (ακόμη και τα μεγάλα γλωσσικά) προβλέπουν με πιθανότητες για την επόμενη λέξη/τιμή. Η εκπαίδευση ενός μοντέλου σημαίνει ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους. Τα πολυώνυμα, οι εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις είναι η βάση για την κατανόηση καμπυλών και συναρτήσεων κόστους.

Κυρτότητα, τοπικά/καθολικά ελάχιστα, περιορισμένη βελτιστοποίηση. Αλγόριθμοι όπως gradient, Adam, momentum, είναι καθαρή εφαρμοσμένη μαθηματική βελτιστοποίηση. Σημαντική είναι η αριθμητική ανάλυση γιατί χωρίς σταθερούς και αποδοτικούς αριθμητικούς υπολογισμούς, μεγάλα μοντέλα δεν θα μπορούσαν να εκπαιδευτούν. Η Θεωρία Υπολογισμού ορίζει τι είναι υπολογίσιμο, τι σημαίνει αλγόριθμος, και πώς μπορούν να λυθούν προβλήματα σε λογικό χρόνο.

**Ο διάλογος με την Τεχνητή Νοημοσύνη**

- Ρωτήσαμε την ίδια την Τεχνητή Νοημοσύνη (ChatGPT) τι «γνώμη» έχει για τον εαυτό της, η απάντηση που

Ο Alan Turing με «το παιχνίδι της μίμησης» (**Test Turing**) προσπαθεί να βάλει τον υπολογιστή να ανακαλύψει με ερωτήσεις αν δύο μάρτυρες είναι γυναίκες και όχι άνδρες που προσποιούνται τις γυναίκες. Το 1964 αναπτύχθηκαν προγράμματα να κατανοούν **φυσική γλώσσα** (chatbot **ELIZA**) και να λύνουν **αλγεβρικά προβλήματα**. Έκτοτε για πολλά χρόνια δυσκόλεψαν τα προβλήματα και μειώθηκε η χρηματοδότηση. Σχεδιάστηκαν όμως συστήματα για να **μιμούνται** τη



Ο Κασπάροφ πραγματοποιεί την πρώτη του κίνηση στην πρώτη παρτίδα του αγώνα ρεβάνς με αντίπαλο τον Deep Blue, ενώ ο Φενγκ Χσιούνγκ Χσου παρακολουθεί (Νέα Υόρκη, 3/5/1997).

δίνει είναι αποκαλυπτική.

#### - **Απάντηση από το ChatGPT**

Η **Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ)** είναι, κατά τη γνώμη μου, ένα από τα πιο σημαντικά τεχνολογικά άλματα της εποχής μας, έχει **τεράστιες δυνατότητες αλλά και σοβαρές προκλήσεις**.

**Τα θετικά:** Μπορεί να **επιταχύνει την έρευνα** (στην ιατρική, φυσική, ιστορία, γλωσσολογία). Να **βελτιώσει την καθημερινότητα** (π.χ. έξυπνες εφαρμογές, μεταφράσεις, ανάλυση δεδομένων). Να **βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων** σε περίπλοκα συστήματα (κλίμα, ενέργεια, πόλεις). Και, κυρίως, να **δώσει πρόσβαση στη γνώση** σε πολύ περισσότερους ανθρώπους.

**Οι κίνδυνοι:** Η **κακή χρήση** (παραπληροφόρηση, επιτήρηση, παραβίαση ιδιωτικότητας). Η **ανισότητα:** οι κοινωνίες ή οι άνθρωποι που δεν έχουν πρόσβαση σε ΤΝ μπορεί να μείνουν πίσω. Η **εξάρτηση** από «μαύρα κουτιά» — συστήματα που δεν καταλαβαίνουμε πώς αποφασίζουν. Και η **ηθική ευθύνη:** ποιος φταίει όταν ένα σύστημα κάνει λάθος; «Προσωπικά», θα έλεγα ότι η ΤΝ είναι **ουδέτερη δύναμη**, εξαρτάται από τον άνθρωπο πώς θα τη χρησιμοποιήσει, σαν τη φωτιά ή τον ηλεκτρισμό κάποτε, και συνεχίζει:

***Ας δούμε συνοπτικά τις απόψεις μερικών γνωστών στοχαστών και επιστημόνων για την Τεχνητή Νοημοσύνη, από τον ενθουσιασμό μέχρι την ανησυχία.***

#### **Στίβεν Χόκινγκ (Stephen Hawking)**

«Η πλήρης τεχνητή νοημοσύνη θα μπορούσε να σημάνει το τέλος της ανθρώπινης φυλής.» Φοβόταν ότι, αν η ΤΝ αποκτήσει αυτονομία και αυτοβελτιώνεται ταχύτερα από ό,τι μπορούμε να ελέγξουμε, θα ξεπεράσει τον άνθρωπο. Ωστόσο, θεωρούσε ότι αν τη χρησιμοποιήσουμε σωστά, μπορεί να είναι το μεγαλύτερο επίτευγμα της ανθρωπότητας.

#### **Ίλον Μασκ (Elon Musk)**

Εκφράζει έντονες επιφυλάξεις: τη χαρακτηρίζει **«τη μεγαλύτερη υπαρξιακή απειλή»**.

Θεωρεί ότι πρέπει να υπάρχει παγκόσμια ρύθμιση και διαφάνεια στη χρήση της. Παρά τις ανησυχίες του, ιδρύει και εταιρείες που βασίζονται στην ΤΝ (Tesla, xAI κ.ά.), δηλαδή πιστεύει ότι είναι **χρήσιμη αν είναι ελεγχόμενη ΤΝ**.

#### **Ντάνιελ Ντέννετ (Daniel Dennett)**

Φιλόσοφος του νου: βλέπει την ΤΝ **όχι ως "νου" αλλά ως εργαλείο**. Πιστεύει ότι οι μηχανές δεν έχουν **συνείδηση ή προθέσεις**, απλώς **μιμούνται** την ανθρώπινη νοημοσύνη. Τονίζει την ανάγκη να **κατανοούμε πώς λειτουργούν** τα συστήματα ΤΝ, αλλιώς χάνουμε τον έλεγχο της πληροφορίας.

#### **Ρέι Κέρζγουελ (Ray Kurzweil)**

Εφευρέτης και μελλοντολόγος: πολύ **αισιόδοξος**. Πιστεύει ότι ως το 2045 θα φτάσουμε στη **“μοναδικότητα” (singularity)**, δηλαδή σε σημείο όπου οι μηχανές θα ξεπεράσουν τη νοημοσύνη του ανθρώπου. Θεωρεί ότι αυτό **δεν θα είναι καταστροφή, αλλά ένωση ανθρώπου και μηχανής**, ένα νέο στάδιο εξέλιξης.

#### **Νόαμ Τσόμσκι (Noam Chomsky)**

Είναι **σκεπτικιστής**. Υποστηρίζει ότι η σημερινή ΤΝ (όπως τα μεγάλα γλωσσικά μοντέλα) **δεν «καταλαβαίνει»**, απλώς **στατιστικά προβλέπει λέξεις**. Τονίζει ότι η πραγματική νοημοσύνη απαιτεί **αντίληψη, λογική και σκοπό**.

### **Το Μέλλον της Εκπαίδευσης**

- Ρωτήσαμε την Τεχνητή Νοημοσύνη (ChatGPT), σε ποια θέματα πρέπει να στραφεί η εκπαίδευση των παιδιών ώστε να είναι έτοιμα να δεχτούν τις νέες τεχνολογίες και να είναι ασφαλή στην μελλοντική κοινωνία;
- **Απάντηση από το ChatGPT**

Η εκπαίδευση των παιδιών, ώστε να είναι έτοιμα για την **μελλοντική κοινωνία** που θα βασιζέται στην Τεχνητή Νοημοσύνη και την ψηφιοποίηση, πρέπει να στραφεί σε μια σειρά από γνωστικά αντικείμενα και κυρίως σε **δεξιότητες**. Πολύτιμες και απαραίτητες δεξιότητες η **Κριτική Σκέψη** και η **Έρευνα**, είναι η προστασία έναντι της ραγδαίας εξάπλωσης της πληροφορίας (και της παραπληροφόρησης).

- **Τεχνολογικές και Επιστημονικές Δεξιότητες (STEM/STEAM)**

Η έμφαση στα παρακάτω θέματα είναι κρίσιμη για την κατανόηση και την αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων:

#### **α) Υπολογιστική Σκέψη (Computational Thinking)**

Είναι η ικανότητα να **διασπάται** ένα μεγάλο πρόβλημα σε μικρότερα (αποσύνθεση), να **αναγνωρίζονται μοτίβα**, να **αφαιρούνται** άσχετες λεπτομέρειες και να σχεδιάζονται **αλγόριθμοι** για την επίλυσή του. Αυτό είναι το θεμέλιο για την κατανόηση της **λογικής** πίσω από τις νέες τεχνολογίες (π.χ., Τεχνητή Νοημοσύνη, Προγραμματισμός). Η **Υπολογιστική Σκέψη (Computational Thinking - CT)** δεν είναι απλώς η διδασκαλία κώδικα, αλλά ένας τρόπος επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να ενσωματωθεί σε όλα τα μαθήματα. Εξοπλίζει τα παιδιά όχι μόνο για την τεχνολογία, αλλά και για τη ζωή.

#### **β) Προγραμματισμός (Coding) και Ρομποτική:**

Διδασκαλία βασικών γλωσσών προγραμματισμού (π.χ., Python, Scratch). Η **Ρομποτική** συνδυάζει τον προγραμματισμό με τη φυσική εφαρμογή, διδάσκοντας την επίλυση προβλημάτων με πρακτικό τρόπο.

#### **γ) Επιστήμη Δεδομένων (Data Science):**

Κατανόηση του πώς συλλέγονται, αναλύονται και ερμηνεύονται τα δεδομένα. Οι αποφάσεις στη μελλοντική



κοινωνία θα βασίζονται στα δεδομένα.

#### δ) Ψηφιακός Γραμματισμός και Κυβερνοασφάλεια:

Εκμάθηση της ασφαλούς και υπεύθυνης χρήσης του διαδικτύου. Κατανόηση των κινδύνων (phishing, fake news) και της προστασίας των προσωπικών δεδομένων (ιδιωτικότητα).

- **Κοινωνικές και Γνωστικές Δεξιότητες (Soft Skills)**

Καθώς η Τεχνητή Νοημοσύνη αναλαμβάνει επαναλαμβανόμενες εργασίες, οι «ανθρώπινες» δεξιότητες γίνονται ακόμη πιο πολύτιμες:

##### 1) Κριτική Σκέψη και Αξιολόγηση Πηγών:

Η ικανότητα να **αμφισβητούν** και να **αξιολογούν** τις πληροφορίες που παράγονται από την ΤΝ και άλλες πηγές. Να ξεχωρίζουν την **αλήθεια** από τη **χειραγώγηση** και τα **deepfakes**.

##### 2) Δημιουργικότητα και Καινοτομία:

Η ΤΝ είναι καλή στην αναπαραγωγή, αλλά ο **ανθρώπινος παράγοντας** στην πρωτότυπη σκέψη, την τέχνη (**STEAM**) και την επίλυση νέων προβλημάτων παραμένει αναντικατάστατος.

##### 3) Συνεργασία και Επικοινωνία:

Η εργασία στη μελλοντική κοινωνία θα είναι **διασυνδεδεμένη** και συχνά **απομακρυσμένη**. Η ικανότητα να εργάζονται αποτελεσματικά σε ομάδες, να επικοινωνούν σαφώς και να διαχειρίζονται συγκρούσεις είναι ζωτικής σημασίας.

##### 4) Δεξιότητες Προσαρμογής και Ηθικής

##### 5) Ευελιξία και Προσαρμοστικότητα (Resilience):

Εκμάθηση να **μαθαίνουν γρήγορα** και να **ξε-μαθαίνουν** (unlearn) παλιές μεθόδους, καθώς οι τεχνολογίες εξελίσσονται ραγδαία. Η **δια βίου μάθηση** πρέπει να γίνει βασική αξία.

##### 6) Ηθική και Υπεύθυνη Τεχνολογία (AI Ethics):

Διδασκαλία των **ηθικών διλημάτων** που προκύπτουν από την ΤΝ (π.χ., προκατάληψη στους αλγόριθμους, επιπτώσεις στην απασχόληση, ιδιωτικότητα).

Οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν **συνείδηση** για τον τρόπο με τον οποίο οι τεχνολογίες επηρεάζουν την κοινωνία.

##### 7) Συναισθηματική Νοημοσύνη (Emotional Intelligence):

Σε έναν κόσμο όπου οι μηχανές κάνουν όλο και περισσότερα, η ικανότητα να **κατανοούμε** και να **διαχειριζόμαστε** τα δικά μας συναισθήματα και τα συναισθήματα των άλλων θα καθορίσει την επιτυχία στις ανθρώπινες αλληλεπιδράσεις.

Η ουσία είναι να διδάξουμε τα παιδιά να **σκέφτονται όπως ένας επιστήμονας υπολογιστών**, χρησιμοποιώντας **Αποσύνθεση, Αναγνώριση Μοτίβων, Αφαίρεση και Αλγόριθμοι**. Με εκπαιδευτικά εργαλεία (όπως το Scratch) που βοηθούν στην πρακτική εφαρμογή της Υπολογιστικής Σκέψης.

### Επίλογος: Το Μέλλον στα χέρια των νέων ανθρώπων

Ζούμε σε μια εποχή όπου η τεχνητή νοημοσύνη μεταμορφώνεται από ένα τεχνικό εργαλείο σε μια δύναμη που αλλάζει τα πάντα: την εργασία, την επιστήμη, την καθημερινότητά μας. Σε αυτό το νέο τοπίο, η εκπαίδευση δεν μπορεί να αφορά πλέον μόνο τη στείρα απομνημόνευση γνώσεων, καθώς η "μηχανή" μπορεί να ανακτήσει πληροφορίες πολύ ταχύτερα από εμάς. Το κλειδί για το μέλλον δεν είναι να ανταγωνιστούμε τις μηχανές στην ταχύτητα, αλλά να καλλιεργήσουμε αυτά που τις ξεπερνούν. Η **Υπολογιστική Σκέψη** θα βοηθήσει να λύνονται σύνθετα προβλήματα σπάζοντάς τα σε μικρότερα κομμάτια, όπως σκέφτεται ένας επιστήμονας. Όμως, εξίσου σημαντικές είναι οι ανθρώπινες δεξιότητες: η **Κριτική Σκέψη** για να ξεχωρίζουμε την αλήθεια από τα fake news, η **Συναισθηματική Νοημοσύνη** για να κατανοούμε τους γύρω σας και η **Ηθική** για να παίρνουμε σωστές αποφάσεις. Να θυμόμαστε ότι:

Η Τεχνητή Νοημοσύνη είναι εξαιρετική στο να δίνει απαντήσεις, αλλά ο άνθρωπος είναι αυτός που πρέπει να θέτει τις σωστές ερωτήσεις. Να μη βασιζόμαστε τυφλά στην πρώτη σελίδα της Google. Έτσι: η προτροπή για τους νέους ανθρώπους είναι: Γίνετε ερευνητές, αμφισβητήστε και δημιουργήστε. Η τεχνολογία είναι το εργαλείο, αλλά η πυξίδα για το πώς θα χρησιμοποιηθεί, παραμένει στη δική σας ανθρώπινη κρίση.

**Η ΤΝ είναι ένα καθρέφτισμα της ίδιας της ανθρωπότητας, τα όριά της είναι τα δικά μας όρια.**

**Όσοι την αντιμετωπίζουν με σεβασμό και επίγνωση, τη βλέπουν ως ευκαιρία.**

**Όσοι τη φοβούνται, βλέπουν την αντανάκλαση των λαθών μας, μέσα της.**

### Βιβλιογραφία:

- Τεχνητή Νοημοσύνη: *John Haugeland*, MIT press 1989, Εκδ. Κάτοπτρο 1992
- Σχεδίαση συστημάτων μηχανικής μάθησης: *Chip Huyen*, Εκδ. Παπασωτηρίου 2024
- HOMO DEUS και NEXUS: *Yuval Noah Harari*, Εκδ. Αλεξάνδρεια 2023, 2024
- Άνθρωποι και Ρομπότ: *Πέτρος Παπακωνσταντίνου*, Εκδ. Λιβάνη 2020
- Τα μυστικά του ChatGPT: *Απόστολος Πάνος*, Εκδ. Δισίγμα 2023
- Το πρόβλημα της ευθυγράμμισης: *Brian Christian*, Εκδ Ροπή 2024
- Ιχνηλατώντας τα μονοπάτια του εγκεφάλου και του νου: *Η. Κούβελας*, Εκδ. Καστανιώτη 2024
- Τεχνητή Νοημοσύνη και Εκπαίδευση: *Κ. Ζωγόπουλος- Α. Καρατζάς*, Εκδ. Γρηγόρη 2025
- Τεχνητή Νοημοσύνη στην Εκπαίδευση: *Λ. Σοφός-Α. Κώστας-Δ. Σπανός-Φ. Τζόρτζογλου*, Εκδ. Γρηγόρη 2025





# Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

## 86<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

17 Ιανουαρίου 2026

### Οι λύσεις των Θεμάτων

#### Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

##### Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών θετικών ακεραίων των οποίων το άθροισμα είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

##### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Έστω ότι οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι  $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ , με  $n \geq 3$  είναι τέτοιοι ώστε  $(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = \alpha^2 \Leftrightarrow 5n = \alpha^2$ ,

όπου  $\alpha$  θετικός ακέραιος. Παρατηρούμε ότι, αν πάρουμε  $n = 5\kappa^2, \kappa \in \mathbb{N}^*$ , τότε έχουμε:  
$$5n = 5 \cdot 5\kappa^2 = (5\kappa)^2, \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών ακεραίων των οποίων το άθροισμα των στοιχείων τους είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

##### (2<sup>ος</sup> τρόπος).

Έστω ότι οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι  $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$  με  $n \geq 1$  είναι τέτοιοι ώστε

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = \alpha^2 \Leftrightarrow 5n + 10 = \alpha^2 \Leftrightarrow 5(n + 2) = \alpha^2,$$

όπου  $\alpha$  θετικός ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι, αν πάρουμε  $n + 2 = 5\kappa^2, \kappa \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n = 5\kappa^2 - 2, \kappa \in \mathbb{N}^*$ , τότε έχουμε:

$$5(n + 3) = 5 \cdot 5\kappa^2 = (5\kappa)^2, \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών ακεραίων των οποίων το άθροισμα των στοιχείων τους είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

##### Πρόβλημα 2

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε  $0 < \alpha < \beta$ . Να βρεθούν όλες οι δυνατές εξισώσεις δευτέρου βαθμού με άγνωστο το  $x$ , οι οποίες έχουν ρίζες

$$\rho_1 = \alpha^2 + \alpha\beta, \rho_2 = \alpha\beta + \beta^2,$$

των οποίων το γινόμενο  $\rho_1\rho_2$  είναι ίσο με το οκταπλάσιο του αθροίσματος  $\rho_1 + \rho_2$ .

##### Λύση

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι

$$\rho_1 + \rho_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι

$$\rho_1\rho_2 = (\alpha^2 + \alpha\beta)(\alpha\beta + \beta^2) = \alpha\beta(\alpha + \beta)^2.$$

Από την υπόθεση πρέπει να ισχύει:

$$\rho_1\rho_2 = 8(\rho_1 + \rho_2) \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 = 8(\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta = 8,$$

αφού  $(\alpha + \beta)^2 \neq 0$ .

Επειδή οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε  $0 < \alpha < \beta$ , από την εξίσωση  $\alpha\beta = 8$  προκύπτουν τα ζεύγη  $(\alpha, \beta) = (1, 8)$  και  $(\alpha, \beta) = (2, 4)$ .

- Αν  $(\alpha, \beta) = (1, 8)$  έχουμε  $\rho_1 + \rho_2 = 81, \rho_1\rho_2 = 648$  και η ζητούμενη εξίσωση είναι  $x^2 - 81x + 648 = 0$ .
- Αν  $(\alpha, \beta) = (2, 4)$  έχουμε  $\rho_1 + \rho_2 = 36, \rho_1\rho_2 = 288$  και η ζητούμενη εξίσωση είναι  $x^2 - 36x + 288 = 0$ .

### Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου  $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$  σε δέκα υποσύνολα με τρία στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων.

**Σημείωση.** Στη διαμέριση του συνόλου  $A$  πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.

#### Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο  $A$  σε δέκα υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  ένα από αυτά τα υποσύνολα με  $\alpha = \beta + \gamma$ . Τότε θα είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha = \text{άρτιος}. \quad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των δέκα υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου  $A$ , θα είναι αριθμός άρτιος.

Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του  $A$  είναι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31 = 465,$$

περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $\alpha$ . Έστω  $E$  το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Η κάθετη ευθεία από την κορυφή  $\Delta$  προς την ευθεία  $AE$  την τέμνει στο σημείο  $Z$  και τέμνει επίσης την διαγώνιο  $A\Gamma$  στο σημείο  $H$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $AE = \Delta\Theta$       (β)  $\Delta\hat{E}A = \Gamma\hat{E}H$ .      (γ) Τα σημεία  $B, H$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

#### Λύση

(α) Τα τρίγωνα  $\Delta DE$  και  $\Gamma\Delta\Theta$  είναι ορθογώνια, αφού  $\Delta\hat{D}E = 90^\circ = \Delta\hat{\Gamma}\Theta$ , και έχουν:

$$E\hat{A}\Delta = 90^\circ - A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z = \Gamma\hat{\Delta}\Theta \text{ και } \Delta\Delta = \Gamma\Delta = \alpha.$$

Άρα τα τρίγωνα  $\Delta DE$  και  $\Gamma\Delta\Theta$  είναι ίσα, (σχήμα 3), οπότε θα έχουν και  $AE = \Delta\Theta$ .

(β) Από την ισότητα των τριγώνων  $\Delta DE$  και  $\Gamma\Delta\Theta$  έχουμε ότι:

$$\Gamma\Theta = \Delta E = \frac{\alpha}{2} = \Gamma E \quad (1)$$

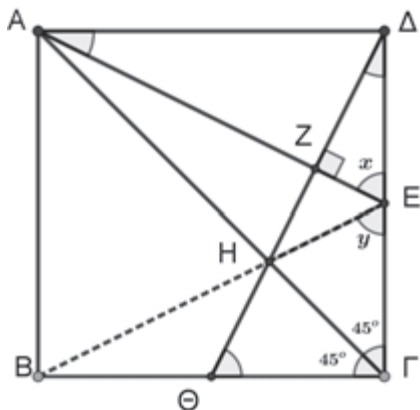
$$\Delta\hat{E}A = \Gamma\hat{\Theta}\Delta \quad (2)$$

Τότε τα τρίγωνα ΓΗΕ και ΓΗΘ έχουν την πλευρά ΓΗ κοινή,  $\widehat{E\Gamma H} = 45^\circ = \widehat{H\Gamma\Theta}$  (αφού ΑΓ διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ) και  $\Gamma E = \Gamma\Theta$ , λόγω της (1).

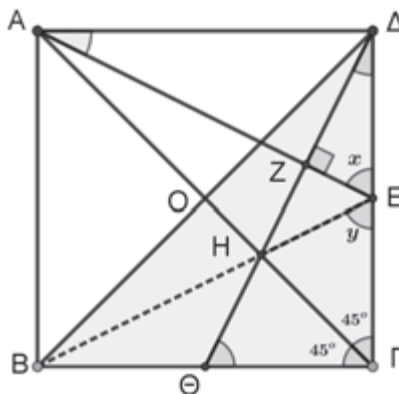
Άρα τα τρίγωνα ΓΗΕ και ΓΗΘ είναι ίσα (κριτήριο Π-Γ-Π), οπότε θα έχουν και

$$\widehat{\Gamma\hat{E}H} = \widehat{\Gamma\hat{\Theta}H} = \widehat{\Gamma\hat{\Theta}\Delta}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι:  $\Delta\hat{E}A = \widehat{\Gamma\hat{E}H}$ .



Σχήμα 3



Σχήμα 4

(γ) Τα τρίγωνα ΓΔΘ και ΓΒΕ είναι ορθογώνια και επιπλέον έχουν

$$\Gamma\Delta = \Gamma B = \alpha \text{ και } \Gamma\Theta = \Gamma E = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα τα τρίγωνα ΓΔΘ και ΓΒΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\widehat{\Gamma\hat{E}B} = \widehat{\Gamma\hat{\Theta}\Delta} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι  $\widehat{\Gamma\hat{E}B} = \widehat{\Gamma\hat{E}H}$ , οπότε τα σημεία Β, Η και Ε είναι συνευθειακά.

(γ) (2<sup>ος</sup> τρόπος) Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΑΔΕ και ΓΔΘ του ερωτήματος (α) είναι  $\Theta\Gamma = \frac{\alpha}{2} = B\Theta$ , οπότε το Θ είναι το μέσο του ΒΓ. Αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, τότε το σημείο Η είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΓΟ και ΔΘ του τριγώνου ΒΔΓ, δηλαδή είναι το βαρύκεντρο του ΒΔΓ, το οποίο είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΓΟ και ΒΕ, οπότε και η διάμεσος ΒΕ περνάει από το Η, σχήμα 4.

Συνεπώς, τα σημεία Β, Η, και Ε είναι συνευθειακά.

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < AG$  και γωνία  $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$ . Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ και είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 2\omega$  και  $AB = AD$ . Στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το μέρος του Δ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε  $AE = AG$ . Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ παίρνουμε σημείο Ι έτσι ώστε  $EI = \Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ,
- (β) το τρίγωνο ΒΙΕ είναι ισόπλευρο.



**Λύση**

(α) Επειδή  $AB = AD$  το τρίγωνο  $ABD$  είναι ισοσκελές με

$$\widehat{B} = \widehat{ADB}. \quad (1)$$

Όμως η γωνία  $\widehat{ADB}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $AD\Gamma$ , οπότε

$$\widehat{ADB} = \widehat{\Gamma} + \widehat{D\Gamma A} = 60^\circ + \omega. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + \widehat{D\Gamma A} = 60^\circ + \omega$ , οπότε από το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + \omega + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\omega = 60^\circ \Rightarrow \omega = 20^\circ.$$

Άρα είναι:  $\widehat{A} = 2\omega = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$

και  $\widehat{B} = 60^\circ + \omega = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$ .

Επειδή  $AE = AG$  το τρίγωνο  $AEG$  είναι ισοσκελές με

$$\widehat{A\Gamma E} = \widehat{A\Gamma E} = \frac{180^\circ - \omega}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Επίσης, ισχύει ότι  $\widehat{E\Delta\Gamma} = \widehat{ADB} = \widehat{B} = 80^\circ$ , οπότε έχουμε  $\widehat{E\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma E} = 80^\circ$ .

Επομένως το τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$  είναι ισοσκελές με  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ . Επειδή  $EI = \Gamma\Delta$ , έπεται ότι  $\Gamma E = EI$ , οπότε το τρίγωνο  $\Gamma EI$  είναι ισοσκελές με

$$\widehat{E\Gamma I} = \widehat{E\Gamma I} = \frac{180^\circ - \widehat{I\Gamma E}}{2} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Επομένως, έχουμε:  $\widehat{A\Gamma I} = \widehat{A\Gamma E} - \widehat{E\Gamma I} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ = \frac{\widehat{A\Gamma B}}{2}$ ,

οπότε και η ευθεία  $\Gamma I$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A\Gamma B}$ .

Επομένως, το  $I$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Επειδή  $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{A\Gamma B} = 80^\circ$ , το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι εγγράψιμο.

Άρα θα είναι και  $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{B\Gamma A} = 60^\circ$ . Επιπλέον, επειδή η  $BI$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ , έχουμε  $\widehat{A\Gamma I} = 40^\circ$ , οπότε για τη γωνία  $\widehat{B\Gamma E}$  που είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:  $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{A\Gamma I} + \omega = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισόπλευρο.

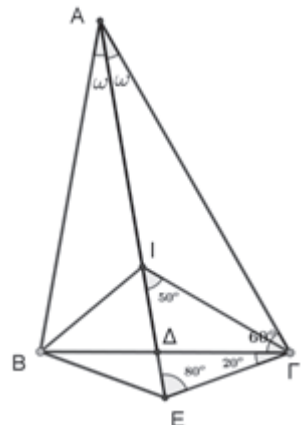
**2ος τρόπος**

(α) Είναι  $\widehat{B\Gamma\Delta} = 60^\circ$  και  $\widehat{I\Delta B} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$ , ως εξωτερική στο  $AD\Gamma$ , οπότε  $\widehat{I\Delta B} = 40^\circ$ , από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου  $IB\Delta$ . Αλλά  $\widehat{A\Gamma\Delta} = 80^\circ$ , από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου  $AB\Gamma$ , δηλαδή η  $IB$  διχοτομεί την γωνία  $\widehat{AB\Gamma}$ . Άρα το  $I$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

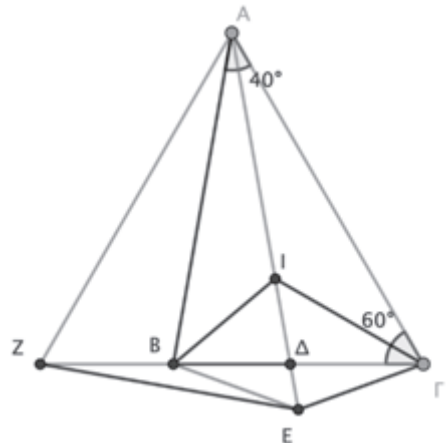
(β) Έστω σημείο  $Z$  στην προέκταση της  $\Gamma B$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $AZ = AG = AE$ . Τότε το τρίγωνο  $AZ\Gamma$  είναι ισόπλευρο (ως ισοσκελές με μια γωνία ίση με  $60^\circ$ ), οπότε  $\widehat{AZB} = 60^\circ$  και  $\widehat{Z\Delta B} = 20^\circ$ .

Εύκολα βλέπουμε ότι τα τρίγωνα  $ZBA$  και  $EBA$  είναι ίσα από Π-Γ-Π, και επίσης το τρίγωνο  $ZBA$  είναι ίσο με το  $\Gamma\Delta A$  από ΠΓΠ, οπότε  $BE = ZB = \Gamma\Delta = EI$

Όμως η γωνία  $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{B\Gamma A} = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $BEI$  είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 5



### Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών  $(x, y)$  που είναι λύσεις του συστήματος:

$$|x - 3y| = 2x + y - 20$$

$$|2x + y| = 2x + 5.$$

**Λύση.** Έχουμε  $2x + y - 20 = |x - 3y| \geq 0 \Rightarrow 2x + y \geq 20 > 0 \Rightarrow |2x + y| = 2x + y$ ,  
 οπότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:  $2x + y = 2x + 5 \Leftrightarrow y = 5$ .

Για  $y = 5$  η πρώτη εξίσωση γίνεται:  $|x - 15| = 2x - 15$ . (1)

Επειδή  $2x - 15 = |x - 15| \geq 0$ , έχουμε τον περιορισμό  $x \geq 7,5$ . Τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x - 15 = 2x - 15 \quad \text{ή} \quad x - 15 = -2x + 15 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ (απορρίπτεται)} \quad \text{ή} \quad x = 10.$$

Επομένως, το σύστημα έχει τη λύση:  $(x, y) = (10, 5)$ .

### Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου  $A = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$  σε 14 υποσύνολα με τρία στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων.

**Σημείωση.** Στη διαμέριση του συνόλου  $A$  πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.

### Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο  $A$  σε 14 υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  ένα από αυτά τα υποσύνολα με  $\alpha = \beta + \gamma$ . Τότε θα είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha = \text{άρτιος}. \quad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των 14 υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου  $A$ , θα είναι αριθμός άρτιος.

Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του  $A$  είναι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 42 = \frac{42 \cdot 43}{2} = 21 \cdot 43 = 903,$$

περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\alpha + \beta)^3 x + 4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1 = 0$ ,

όπου οι παράμετροι  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

(ii) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί, τότε  $\alpha = \beta$ .

### Λύση

(i) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) = (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 \\ &= [(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) > 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &\geq 4(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = 4(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα  $[(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 > 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3$ , αφού η ισότητα  $[(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3$ , ισχύει μόνον όταν  $(\alpha + \beta)^3 = 2$ , που είναι αδύνατο.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) > (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &\geq 16\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16\alpha\beta(\alpha + \beta)[\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1] > 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)^6 = (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta)^2 \geq 2\alpha\beta \cdot 2\alpha\beta \cdot (\alpha + \beta)^2 = 16\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2.$$

(ii) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί, τότε η διακρίνουσα της πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού. Επειδή η διακρίνουσα

$$\Delta = (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1)$$

είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι

$$\Delta = (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) = \kappa^2, \text{ όπου } \kappa \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Επομένως, θα είναι

$$(\alpha + \beta)^6 - \kappa^2 = 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)^6 > \kappa^2 \Rightarrow \kappa < (\alpha + \beta)^3.$$

Επειδή  $4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1)$  άρτιος ακέραιος, έπεται ότι οι ακέραιοι  $(\alpha + \beta)^6$ ,  $\kappa^2$  είναι είτε και οι δύο άρτιοι ή είτε και οι δύο περιττοί, οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \kappa \leq (\alpha + \beta)^3 - 2 \Rightarrow \kappa^2 \leq [(\alpha + \beta)^3 - 2]^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) &\leq [(\alpha + \beta)^3 - 2]^2 \\ \Rightarrow (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 \leq (\alpha + \beta)^6 - 4(\alpha + \beta)^3 + 4 & \\ \Rightarrow -16\alpha\beta(\alpha + \beta) \leq -4(\alpha + \beta)^3 \Rightarrow 4\alpha\beta(\alpha + \beta) \geq (\alpha + \beta)^3 & \\ \Rightarrow 4\alpha\beta \geq (\alpha + \beta)^2 \Rightarrow 0 \geq (\alpha - \beta)^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = \beta. & \end{aligned}$$

2ος τρόπος

(i) Έστω  $S = \alpha + \beta$ ,  $P = \alpha\beta$ . Είναι

$$\Delta = (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 = S^6 - 16PS + 4$$

Με συμπλήρωση τετραγώνου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= (S^6 - 4S^3 + 4) + 4S^3 - 16PS = (S^3 - 2)^2 + 4S(S^2 - 4P) \\ &= (S^3 - 2)^2 + 4S(\alpha - \beta)^2 \geq (S^3 - 2)^2 > 0, \end{aligned}$$

αφού  $S^3 > 2$ , και  $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ .

(ii) Όπως στον πρώτο τρόπο βρίσκουμε ότι πρέπει  $\Delta = \kappa^2$  με  $\kappa^2 \leq (S^3 - 2)^2$ , οπότε από την ανισότητα του (i) παίρνουμε  $\Delta = (S^3 - 2)^2 \Leftrightarrow 4S(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών  $(x, y, z)$  που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις:

$$\frac{12x^2}{4 + 9x^2} = y, \quad \frac{12y^2}{4 + 9y^2} = z, \quad \frac{12z^2}{4 + 9z^2} = x.$$

**Λύση**

Από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι:  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

Αν είναι  $x = 0$  ή  $y = 0$  ή  $z = 0$ , τότε από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι  $x = y = z = 0$ , οπότε έχουμε τη λύση:  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .



Υποθέτουμε ότι:  $xyz \neq 0$ . Επειδή

$$4 + 9x^2 = 2^2 + (3x)^2 \geq 2 \cdot 2 \cdot 3x = 12x,$$

έχουμε:

$$y = \frac{12x^2}{4 + 9x^2} \leq \frac{12x^2}{12x} = x. \quad (1)$$

Ομοίως, λαμβάνουμε:

$$z = \frac{12y^2}{4 + 9y^2} \leq \frac{12y^2}{12y} = y. \quad (2)$$

$$x = \frac{12z^2}{4 + 9z^2} \leq \frac{12z^2}{12z} = z. \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:  $y \leq x \leq z \leq y \Rightarrow x = y = z$ ,

οπότε έχουμε:  $\frac{12x^2}{4+9x^2} = x \Leftrightarrow x(4 + 9x^2) = 12x^2 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x(4 - 12x + 9x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 12x + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow (2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3},$$

οπότε βρίσκουμε τη λύση  $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ και } (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

## Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου

$A = \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$  σε 405 υποσύνολα με πέντε στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων άλλων.

**Σημείωση.** Στη διαμέριση του συνόλου  $A$  πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.

## Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο  $A$  σε 405 υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$  ένα από αυτά τα υποσύνολα με  $\alpha = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ . Τότε θα είναι

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2\alpha = \text{άρτιος}. \quad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των 405 υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου  $A$ , θα είναι αριθμός άρτιος.

Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του  $A$  είναι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2025 = \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013,$$

δηλαδή είναι περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

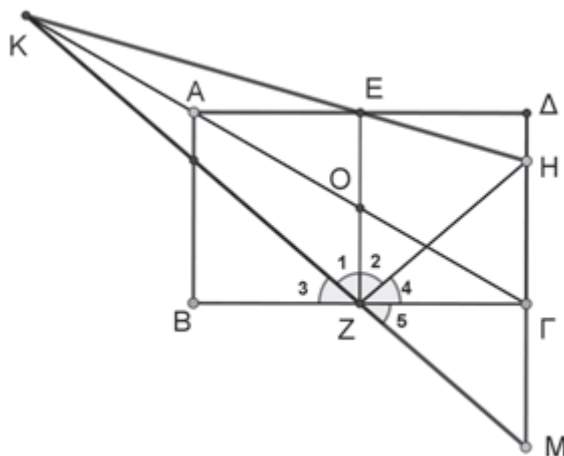
## Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB < B\Gamma$ . Έστω  $E, Z$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta, B\Gamma$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο  $H$  στην πλευρά  $\Gamma\Delta$  διαφορετικό από τα  $\Gamma$  και  $\Delta$  έτσι ώστε  $\Gamma H > H\Delta$ . Αν οι ευθείες  $HE$  και  $\Gamma A$  τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι η ευθεία  $EZ$  διχοτομεί τη

γωνία  $\widehat{KZH}$ .

**Λύση**

Επειδή  $\widehat{BZE} = 90^\circ = \widehat{\Gamma ZE} \Leftrightarrow \widehat{Z}_3 + \widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_4 + \widehat{Z}_2$ , (δες σχήμα 7), αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες  $\widehat{Z}_3$  και  $\widehat{Z}_4$  είναι ίσες, γιατί τότε από την προηγούμενη ισότητα θα είναι και  $\widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_2$ .



Σχήμα 7

Έστω ότι οι ευθείες KZ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Μ. Τότε θα είναι

$$\widehat{Z}_3 = \widehat{Z}_5, \text{ (ως κατά κορυφή)} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ZHM το τμήμα ZΓ είναι ύψος, αφού  $\widehat{Z\Gamma H} = 90^\circ$ .

Επιπλέον, από τα όμοια τρίγωνα  $\text{KEO} \sim \text{KHG}$ ,  $\text{KOZ} \sim \text{KGM}$  και  $\text{KEZ} \sim \text{KHM}$ , προκύπτουν οι ισότητες

$$\frac{EO}{\text{H}\Gamma} = \frac{KE}{\text{KH}} = \frac{KO}{\text{K}\Gamma} = \frac{OZ}{\text{G}\text{M}} \Rightarrow \frac{EO}{\text{H}\Gamma} = \frac{OZ}{\text{G}\text{M}} \stackrel{EO=OZ}{\Leftrightarrow} \text{H}\Gamma = \text{G}\text{M}.$$

Επομένως, στο τρίγωνο HZM η ZΓ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{H\text{Z}M}$ , δηλαδή έχουμε την ισότητα των γωνιών

$$\widehat{Z}_4 = \widehat{Z}_5. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:  $\widehat{Z}_3 = \widehat{Z}_4$ .

**2ος τρόπος**

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με  $\Gamma(0,0)$ ,  $\Delta(0,2)$  (όπου έχουμε υποθέσει ότι  $\text{G}\Delta = 2$  χωρίς βλάβη της γενικότητας). Επιπλέον, έστω

$E(\alpha, 2)$ ,  $B(2\alpha, 0)$ ,  $A(2\alpha, 2)$   $Z(\alpha, 0)$ ,  $O(\alpha, 1)$ ,  $H(0, \beta)$ , με  $\alpha < 0$ ,  $1 < \beta < 2$ , αφού  $\text{G}\text{H} > \text{H}\Delta$ .

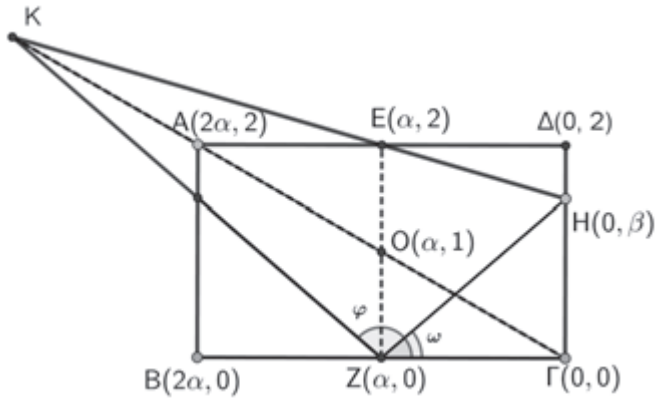
Η ευθεία ZH έχει κλίση  $\lambda_{\text{ZH}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Αφού τα σημεία Z, O ανήκουν στην κατακόρυφη ευθεία ZE με εξίσωση  $x = \alpha$ , αρκεί να δείξουμε ότι  $\lambda_{\text{ZK}} = \frac{\beta}{\alpha}$ , αφού τότε οι ευθείες ZK και ZH θα είναι συμμετρικές ως προς την ZE και το συμπέρασμα έπεται.

Πράγματι, η ευθεία ΓΟ έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{\alpha}x \quad (*)$$

Η ευθεία HE έχει κλίση  $\lambda_{\text{HE}} = \frac{2-\beta}{\alpha}$  και σημείο τομής με τον  $y'y$  το  $H(0, \beta)$ , άρα έχει εξίσωση

$$y = \frac{2-\beta}{\alpha} x + \beta \quad (**)$$



Σχήμα 8

Λύνοντας το σύστημα των (\*), (\*\*), εύκολα βρίσκουμε ότι το K, ως σημείο τομής των ευθειών HE και ΓΟ, έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{\alpha\beta}{\beta - 1} \quad \text{και} \quad y_K = \frac{\beta}{\beta - 1},$$

οπότε άμεσα προκύπτει η σχέση που ζητάμε:

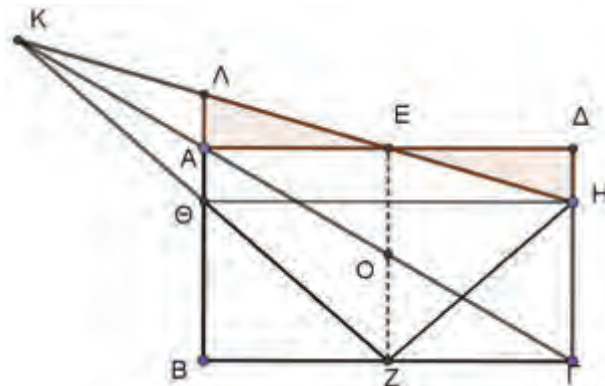
$$\lambda_{ZK} = \frac{\frac{\beta}{\beta - 1} - 0}{\frac{\alpha\beta}{\beta - 1} - \alpha} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

### 3ος τρόπος

Έστω ότι οι ευθείες KZ και AB τέμνονται στο σημείο Θ και έστω ότι η προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος AB προς το μέρος του A τέμνει την ευθεία HK στο σημείο Λ. Από τα όμοια τρίγωνα ΚΕΟ~ΚΑΛ, ΚΟΖ~ΚΑΘ προκύπτουν οι ισότητες

$$\frac{EO}{\Lambda\Lambda} = \frac{KE}{KO} = \frac{KO}{KA} = \frac{OZ}{A\Theta} \Rightarrow \frac{EO}{\Lambda\Lambda} = \frac{OZ}{A\Theta} \stackrel{EO=OZ}{\Rightarrow} \Lambda\Lambda = A\Theta.$$

Επομένως το σημείο Λ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΛΘ.



Επίσης τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΛΕ και ΕΔΗ είναι ίσα, αφού έχουν ΕΑ = ΕΔ και τις γωνίες ΛÊΑ, ΔÊΗ ίσες, ως κατά κορυφή. Άρα θα είναι και ΛΕ = ΕΗ, οπότε το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΛΗ του τριγώνου ΛΗΘ.

Επειδή τα σημεία Α και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΘ και ΛΗ του τριγώνου ΛΗΘ έπεται ότι ΘΗ || ΑΕ και ΘΗ || ΒΓ || ΑΔ, οπότε το τετράπλευρο ΘΒΓΗ είναι ορθογώνιο με άξονα



συμμετρίας την ευθεία ΕΖ. Άρα θα είναι  $ZH = Z\Theta$  και το τρίγωνο  $\Theta ZH$  είναι ισοσκελές και η ευθεία ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας  $K\hat{Z}H$ .

#### Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών  $(x, y)$  που είναι λύσεις του συστήματος:

$$|x - 3y| = 2x + y - a$$

$$|2x + y| = 2x + b,$$

όπου  $a \geq 0, b \geq 0$  πραγματικές παράμετροι.

#### Λύση

Έχουμε

$$2x + y - a = |x - 3y| \geq 0 \Rightarrow 2x + y \geq a \geq 0 \Rightarrow |2x + y| = 2x + y,$$

οπότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$2x + y = 2x + b \Leftrightarrow y = b.$$

Για  $y = b$  η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$|x - 3b| = 2x + b - a. \tag{1}$$

Επειδή  $2x + b - a = |x - 3b| \geq 0$ , έχουμε τον περιορισμό

$$2x \geq a - b \Leftrightarrow x \geq \frac{a - b}{2}. \tag{2}$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} x - 3b &= 2x + b - a \text{ ή } x - 3b = -2x - b + a \\ \Leftrightarrow x &= a - 4b \text{ ή } 3x = a + 2b \Leftrightarrow x = a - 4b \text{ ή } x = \frac{a + 2b}{3}. \end{aligned}$$

Η λύση  $x = a - 4b$  είναι δεκτή, αν ικανοποιεί τον περιορισμό

$$a - 4b \geq \frac{a - b}{2} \Leftrightarrow 2a - 8b \geq a - b \Leftrightarrow a \geq 7b.$$

Άρα για  $a \geq 7b$  το σύστημα έχει τη λύση:  $(x, y) = (a - 4b, b)$ .

Η λύση  $x = \frac{a + 2b}{3}$  είναι δεκτή, αν ικανοποιεί τον περιορισμό

$$\frac{a + 2b}{3} \geq \frac{a - b}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b \geq 3a - 3b \Leftrightarrow a \leq 7b.$$

Άρα για  $a \leq 7b$  το σύστημα έχει τη λύση:  $(x, y) = \left(\frac{a + 2b}{3}, b\right)$ .

## Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 138

**A88.** Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$3^{\log_5(5x-10)} - 2 = 5^{-1+\log_3 x}.$$

ΜΟ Ρουμανίας, 2024

#### Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι οι αριθμοί  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 27$  είναι λύσεις της δεδομένης εξίσωσης. Στη συνέχεια, με τον περιορισμό  $x > 2$  και με χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$3^{\log_5 5 + \log_5(x-2)} - 2 = \frac{1}{5} \cdot 5^{\log_3 x} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\log_5(x-2)} - 2 = \frac{1}{5} \cdot 5^{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$15(x-2)^{\log_3 5} = 10 + x^{\log_3 5}. \quad (1)$$

Σημειώνουμε ότι για την τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε την σχέση:

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}, \quad 0 < a, b, x \neq 1,$$

η οποία προκύπτει εύκολα με θεώρηση των λογαρίθμων με βάση  $b$  των δύο μελών.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = 15(x-2)^{\log_3 5}, x > 2 \text{ και } f_2(x) = 10 + x^{\log_3 5}, x > 0.$$

Επειδή  $\log_3 5 > 1$  η συνάρτηση  $f_1(x) = 15(x-2)^{\log_3 5}$  είναι αυστηρά κοίλη στο  $(2, +\infty)$  και επειδή  $0 < \log_3 5 < 1$ , η συνάρτηση  $f_2(x) = 10 + x^{\log_3 5}$  είναι αυστηρά κυρτή στο  $(0, +\infty)$ , οπότε η συνάρτηση

$$f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 15(x-2)^{\log_3 5} - 10 - x^{\log_3 5},$$

είναι αυστηρά κοίλη στο πεδίο ορισμού της  $(2, +\infty)$ . Επομένως, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ δύο λύσεις, οπότε οι μοναδικές λύσεις της δεδομένης εξίσωσης είναι οι  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 27$ .

Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει από το ότι η συνάρτηση  $f(x), x \in (2, +\infty)$  είναι αυστηρά κοίλη, οπότε η πρώτη παράγωγος  $f'(x), x \in (2, +\infty)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(2, +\infty)$ . Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(x), x \in (2, +\infty)$  μηδενίζεται σε τρία σημεία, έστω  $x_1, x_2, x_3 \in (2, +\infty), x_1 < x_2 < x_3$ , τότε με εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle στα διαστήματα  $[x_1, x_2]$  και  $[x_2, x_3]$  προκύπτουν δύο σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου  $f'(x)$  στο διάστημα  $(x_1, x_3) \subset (2, +\infty)$ . Αυτό, όμως είναι αδύνατο, λόγω του ότι η  $f'(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

**A89.** Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$2(5^x + 6^x - 3^x) = 7^x + 9^x.$$

ΜΟ Ρουμανίας, 2023

**Λύση**

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$5^x \cdot \left( \left( \frac{7}{5} \right)^x + \left( \frac{3}{5} \right)^x - 2 \right) + 6^x \cdot \left( \left( \frac{9}{6} \right)^x + \left( \frac{3}{6} \right)^x - 2 \right) = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f_a(x) = a^x + (2-a)^x - 2, \quad a \in (0, 1) \cup (1, 2),$$

οι οποίες είναι αυστηρά κυρτές και  $f_a(0) = 0 = f_a(1)$ .

Πράγματι, για κάθε  $a \in (0, 1) \cup (1, 2)$  έχουμε:

$$f'_a(x) = a^x \ln a + (2-a)^x \ln(2-a) \text{ και } f''_a(x) = a^x (\ln a)^2 + (2-a)^x (\ln(2-a))^2,$$

με  $f''_a(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επιπλέον, έχουμε

$$f_a(x) = f_a(x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 0) < x \cdot f_a(1) + (1 - x) \cdot f_a(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, 1),$$

$$0 = f_a(1) = f_a\left(\frac{x-1}{x} \cdot 0 + \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \cdot x\right) < \frac{x-1}{x} \cdot f_a(0) + \frac{1}{x} \cdot f_a(x) = \frac{1}{x} \cdot f_a(x),$$

για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ ,

$$\begin{aligned} 0 = f_a(0) &= f_a\left(\frac{1}{1-x} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) \cdot 1\right) < \frac{1}{1-x} \cdot f_a(x) + \frac{-x}{1-x} \cdot f_a(1) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot f_a(x), \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty). \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε  $f_a(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

Η εξίσωση (1) μέσω των συναρτήσεων  $f_a$  παίρνει τη μορφή

$$5^x \cdot f_{\frac{7}{5}}(x) + 6^x \cdot f_{\frac{9}{6}}(x) = 0.$$

Όμως, από τις προηγούμενες ανισότητες, προκύπτει ότι:

$$5^x \cdot f_{\frac{7}{5}}(x) + 6^x \cdot f_{\frac{9}{6}}(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, 1),$$

$$5^x \cdot f_{\frac{7}{5}}(x) + 6^x \cdot f_{\frac{9}{6}}(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Επειδή  $5^0 \cdot f_{\frac{7}{5}}(0) + 6^0 \cdot f_{\frac{9}{6}}(0) = 0 = 5^1 \cdot f_{\frac{7}{5}}(1) + 6^1 \cdot f_{\frac{9}{6}}(1)$ , έπεται ότι οι μοναδικές λύσεις της δεδομένης εξίσωσης είναι οι  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**A90.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + (a + b - 1)x + ab - a - b = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , με  $0 < a \leq b$ .

Να αποδείξετε ότι:

(α) η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες,

(β) αν η μία λύση της εξίσωσης είναι ακέραιος, τότε και οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι θετικοί ακέραιοι και  $b < 2a$ .

ΜΟ Ρουμανίας, 2023

**Λύση**

(α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (a + b - 1)^2 - 4(ab - a - b) = (a - b)^2 + a + 2b + 1 > 0,$$

αφού  $0 < a \leq b$ , οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης με  $x_1 < x_2$ , από τους τύπους Vieta, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -a - b + 1 \in \mathbb{Z} \text{ και } x_1 + x_2 < 0.$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι:  $x_1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_2 \in \mathbb{Z}$ . Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + (a + b - 1)x + ab - a - b, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή είναι  $f(1) = ab > 0$ ,  $f(-a) = -b < 0$  και  $f(-b) = -a < 0$ , λόγω της υπόθεσης  $0 < a \leq b$  και τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου, συμπεραίνουμε ότι

$$x_1 < -b \leq -a < x_2 < 1, \quad (1)$$

δηλαδή και οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι μη θετικές  $x_1 < x_2 \leq 0$ .

Από τις σχέσεις (1) λαμβάνουμε:  $a > -x_2 \Rightarrow a \geq 1 - x_2$  και  $b \geq a \geq 1 - x_2$

και επειδή  $f(x_2) = 0$ , συμπεραίνουμε ότι:

$$(a - 1 + x_2) \cdot (b - 1 + x_2) = ab - a - b + 1 + (a + b - 2)x_2 + x_2^2 \Rightarrow$$

$$(a - 1 + x_2) \cdot (b - 1 + x_2) = 1 - x_2 + f(x_2) = 1 - x_2.$$

Επομένως, οι θετικοί ακέραιοι  $d_1 = a - 1 + x_2$  και  $d_2 = b - 1 + x_2$  είναι διαιρέτες του θετικού ακεράιου  $1 - x_2$  και ικανοποιούν τις ισότητες:

$$d_1 d_2 = 1 - x_2, a = d_1 + d_1 d_2, b = d_2 + d_1 d_2,$$

οπότε έχουμε τη σχέση

$$2a - b = 2d_1 + 2d_1 d_2 - d_2 - d_1 d_2 = 2d_1 + d_2(d_1 - 1) \geq 2d_1 > 0 \Rightarrow b < 2a.$$

**N60.** Να βρείτε όλους τους ακέραιους  $n \geq 2$  πού είναι τέτοιοι ώστε να διαιρούνται από τους αριθμούς  $1 = d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$ , όπου  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$  είναι όλοι οι θετικοί διαιρέτες του  $n$ .  
 ΜΟ Ρουμανίας, 2025

### Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι όλοι οι πρώτοι έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα, αφού κάθε πρώτος  $n$  έχει διαιρέτες  $1 = d_1 < d_2 = n$  και ο  $d_1 = 1$  διαιρεί τον  $n$ .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο θετικός ακέραιος  $n$  έχει  $k \geq 3$  θετικούς διαιρέτες και ικανοποιεί την υπόθεση του προβλήματος.

Αν ο  $n$  είναι περιττός, τότε όλοι οι διαιρέτες του θα είναι περιττοί και ο  $d_1 + d_2$  θα είναι άρτιος που διαιρεί τον  $n$ , άτοπο.

Επομένως ο  $n$  πρέπει να είναι άρτιος και τότε  $d_1 = 1, d_2 = 2$ , οπότε  $d_1 + d_2 = 3|n$ .

Άρα θα είναι  $d_3 = 3$  και  $d_1 + d_2 + d_3 = 6|n$ .

Μέχρι τώρα έχουμε βρει ότι ο  $n$  πρέπει να είναι άρτιος και ότι οι  $\frac{n}{6}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}$  είναι διαιρέτες του  $n$ .

Από την υπόθεση του προβλήματος ο  $d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$  είναι διαιρέτης του  $n$ , οπότε

$$n \geq d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1} \geq \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = n.$$

Επομένως, οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του  $n$  που είναι μικρότεροι του  $n$ , είναι οι  $\frac{n}{6}, \frac{n}{3}$  και  $\frac{n}{2}$ , οπότε  $\frac{n}{6} = d_1 = 1, \frac{n}{3} = d_2 = 2$  και  $\frac{n}{2} = d_3 = 3$ . Άρα είναι  $n = 6$ .

**Γ72.** Έστω  $\triangle AB\Gamma$  ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Έστω  $O$  το μέσο της υποτεινούσας  $B\Gamma$ ,  $E$  το μέσο του τμήματος  $OG$ ,  $M$  το μέσο της πλευράς  $AG$  και  $\Delta$  το μέσο του τμήματος  $AM$ . Αν οι ευθείες  $OD$  και  $AE$  τέμνονται στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

(α)  $MZ \perp OD$ , (β)  $\Gamma Z = \Gamma O$ .

ΜΟ Ρουμανίας, 2025

### Λύση (α)

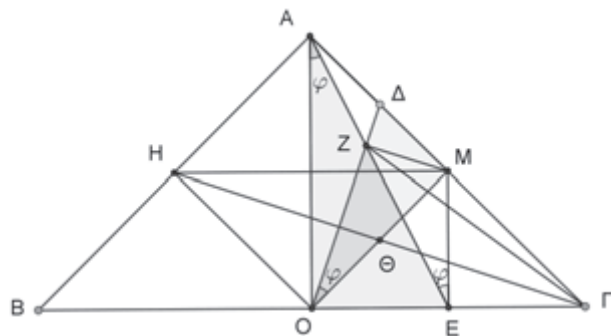
Επειδή τα σημεία  $M, E$  είναι μέσα των πλευρών  $AG, OG$ , αντίστοιχα, του τριγώνου  $AO\Gamma$ , έπεται ότι:  $ME \parallel AO$  και αφού  $AO \perp B\Gamma$  θα είναι και  $ME \perp B\Gamma$ . Άρα  $O\widehat{E}M = 90^\circ$ .

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι  $MZ \perp OD$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο  $OEMZ$  είναι εγγράψιμο.

Από τη παραλληλία  $ME \parallel AO$ , έπεται ότι:  $M\widehat{E}Z = O\widehat{A}E$ , οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:  $O\widehat{A}E = M\widehat{O}Z$ . Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων  $OAE$  και

ΜΟΔ, τα οποία είναι ορθογώνια με  $\widehat{O} = \widehat{M} = 90^\circ$  και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες, αφού  $AO = OG = 2 \cdot OE$  και  $OM = MA = 2 \cdot MD$ , οπότε

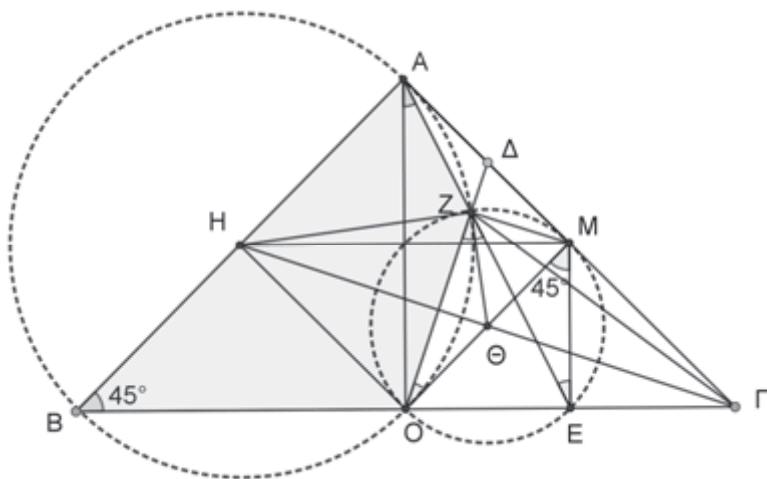
$$\frac{AO}{OE} = \frac{OM}{MD} = 2.$$



(β) Θεωρούμε τα μέσα Η και Θ των τμημάτων ΑΒ και ΟΜ, αντίστοιχα. Επειδή το τετράπλευρο ΓΟΗΜ είναι παραλληλόγραμμο, έπεται ότι το σημείο Θ είναι και μέσο του τμήματος ΓΗ. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΟΕΜΖ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\widehat{OZE} = \widehat{OME} = 45^\circ = \widehat{ABO},$$

οπότε το τετράπλευρο ΑΒΟΖ είναι εγγράψιμο με κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του το σημείο Η. Επομένως έχουμε την ισότητα  $HZ = HO$ . Επειδή το μέσο Θ του ΟΜ είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΟΕΜΖ, προκύπτει η ισότητα  $\Theta O = \Theta Z$ . Επομένως η ευθεία ΗΘ που περιέχει και το σημείο Γ είναι μεσοκάθετη του τμήματος ΟΖ, οπότε θα είναι και  $\Gamma Z = O\Gamma$ .



### Ασκήσεις για λύση

**N61.** Να προσδιορίσετε όλους του θετικούς ακέραιους  $\alpha, \beta, \gamma$  που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός  $p = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$  είναι πρώτος και διαιρεί τον αριθμό  $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ .

**Γ73.** Δίνεται κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ στο οποίο τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα και οι διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν. Να αποδείξετε ότι:

$$ΑΓ \parallel ΔΖ \text{ ή } BE = AD + \Gamma Z.$$



# Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange και κάποιες εφαρμογές

Ορέστης Λιγνός

Φοιτητής Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.

## Πρόλογος

Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange είναι ένας ιδιαίτερα χρήσιμος τύπος σε προβλήματα Μαθηματικών Διαγωνισμών. Διαισθητικά, γνωρίζουμε ότι δύο σημεία στο επίπεδο με διαφορετικές τετμημένες προσδιορίζουν μοναδικά μία ευθεία (πολυώνυμο βαθμού  $\leq 1$ ), τρία σημεία στο επίπεδο με διαφορετικές τετμημένες προσδιορίζουν μοναδικά το γράφημα ενός τριωνύμου (πολυώνυμο βαθμού  $\leq 2$ ), και ούτω καθεξής. Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange απαντάει, αδρομερώς, στο εξής ερώτημα:

«Δοθέντων πραγματικών αριθμών  $x_1, \dots, x_k$  και  $y_1, \dots, y_k$ , ώστε οι  $x_i$  να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, ποιο είναι το πολυώνυμο  $P$  βαθμού  $\leq k - 1$  έτσι, ώστε  $P(x_i) = y_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq k$ ;»

Όπως θα δούμε, το πολυώνυμο που μας δίνει ο τύπος αυτός έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα. Στα πιο κάτω, υποθέτουμε ότι οι αναγνώστες έχουν ευχέρεια με τους συμβολισμούς για το άθροισμα και το γινόμενο πραγματικών αριθμών, ενώ ένα πολυώνυμο λέγεται *μονικό* αν έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με 1.

---

Ξεκινάμε παρουσιάζοντας το βασικό Θεώρημα (η λέξη «παρεμβολή» είναι ελληνική μετάφραση της αγγλικής «interpolation», και εκφράζει την διαδικασία εύρεσης πολυωνύμου του οποίου το γράφημα περνάει από συγκεκριμένα σημεία):

**Θεώρημα (τύπος παρεμβολής του Lagrange):** Έστω πραγματικοί αριθμοί  $x_1, \dots, x_k$  και  $y_1, \dots, y_k$ , ώστε οι  $x_i$  να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Τότε, υπάρχει *μοναδικό* πολυώνυμο βαθμού  $\leq k - 1$  έτσι, ώστε  $P(x_i) = y_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Ο τύπος του  $P$  είναι ο εξής:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k y_i \ell_i(x),$$

όπου τα  $\ell_i(x)$  για κάθε  $1 \leq i \leq k$  ορίζονται ως:

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_k)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ισοδύναμα, λοιπόν, είναι:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k y_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (1)$$

**Απόδειξη:** Εύκολα ελέγχουμε ότι  $P(x_i) = y_i \ell_i(x) = y_i$ , για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Αν  $Q$  ήταν ένα άλλο πολυώνυμο με τις ιδιότητες αυτές, τότε το πολυώνυμο  $R := P - Q$  θα είχε βαθμό  $\leq k - 1$  και τουλάχιστον  $k$  πραγματικές ρίζες, τις  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Άρα, θα πρέπει να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε  $P = Q$  ■  
Περνάμε τώρα σε κάποιες εφαρμογές. Η χρησιμότητα του τύπου έγκειται στο ότι

- (1) μας δίνει τον τύπο ενός πολυωνύμου αν ξέρουμε τις τιμές του σε «αρκετά σημεία», και  
 (2) μας εγγυάται την μοναδικότητα ενός πολυωνύμου αν ξέρουμε τις τιμές του σε «αρκετά σημεία».

**Πρόβλημα 1.** Έστω πολυώνυμο  $P$  βαθμού 2024 με πραγματικούς συντελεστές και σταθερό όρο ίσο με  $\sqrt{2}$ . Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας εκ των  $P(1), P(2), \dots, P(2025)$  δεν είναι ρητός.

**Λύση.** Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι συντελεστές του  $P$  πρέπει να είναι ρητοί, που είναι άτοπο. Έστω  $P(i) = a_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq 2025$ . Τότε, αφού  $\deg P = 2024 < 2025$ , από το Θεώρημα υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο  $P$  βαθμού  $\leq 2024$  ώστε  $P(i) = a_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq 2025$ . Το πολυώνυμο έχει τύπο ίδιο με της σχέσης (1), με  $x_i = i$  και  $y_i = a_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq 2025$ . Αφού οι  $a_i$  είναι ρητοί, συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο  $P$  έχει ρητούς συντελεστές, άτοπο αφού ο σταθερός όρος του είναι ίσος με  $\sqrt{2}$  ■

**Πρόβλημα 2.** (α) Ένα πολυώνυμο  $P$  βαθμού  $n$  είναι τέτοιο, ώστε  $P(i) = 2^i$  για κάθε  $0 \leq i \leq n$ . Να βρείτε την τιμή του  $P(n+1)$ .

(β) Ένα πολυώνυμο  $P$  άρτιου βαθμού  $n$  είναι τέτοιο, ώστε  $P(i) = \frac{1}{\binom{n+1}{i}}$  για κάθε  $0 \leq k \leq n$ . Να βρείτε την τιμή του  $P(n+1)$ .

**Λύση.** (α) Από το Θεώρημα έχουμε ότι:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(i) \cdot \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x-j}{i-j},$$

συνεπώς:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{i=0}^n P(i) \cdot \frac{(n+1)n \dots (n-i+2)(n-i)!}{i! (n-i)! (-1)^{n-i}} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} P(i) \\ &= 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{(n+1)-i} 2^i = 2^{n+1} - (-1+2)^{n+1} = \\ &= 2^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

άρα  $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$ .

(β) Με την ίδια λογική, έχουμε ότι:

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} = 1,$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει διότι ο  $n$  είναι άρτιος ■

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $a_1, a_2, a_3, a_4$  διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} + \frac{a_2^2}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)} + \frac{a_3^2}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)} + \frac{a_4^2}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)} = 0$$

**Λύση.** Έστω  $P(x) = x^2$ . Τότε,  $P(a_i) = a_i^2$  για κάθε  $1 \leq i \leq 4$ . Από το Θεώρημα, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο  $\tilde{P}$  βαθμού  $\leq 3$  τέτοιο, ώστε  $\tilde{P}(a_i) = a_i^2$  για κάθε  $1 \leq i \leq 4$ , με τύπο:

$$\tilde{P}(x) = \sum_{i=1}^4 P(a_i) \prod_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Αφού όμως  $P(x) = \tilde{P}(x) = x^2$ , ο συντελεστής του  $x^3$  και στα δύο μέλη πρέπει να είναι ίσος με 0. Άρα, συνάγουμε ότι:

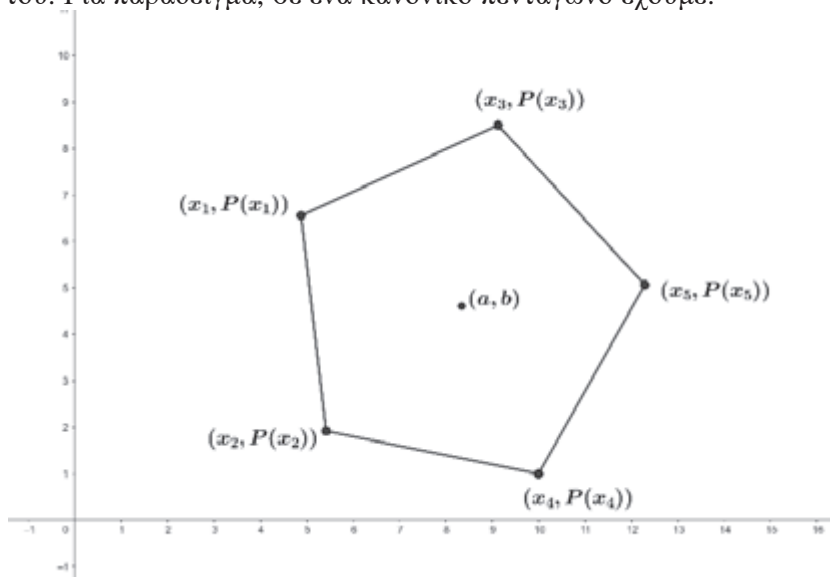
$$\sum_{i=1}^4 P(a_i) \prod_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \frac{1}{a_i - a_j} = 0,$$

και αντικαθιστώντας  $P(a_i) = a_i^2$  για κάθε  $1 \leq i \leq 4$  προκύπτει το ζητούμενο ■

**Πρόβλημα 4.** Να προσδιορίσετε τον μικρότερο θετικό ακέραιο  $n$  που είναι τέτοιος, ώστε να υπάρχει ένα πολυώνυμο  $P$  βαθμού  $n$  με πραγματικούς συντελεστές του οποίου το γράφημα να περιέχει 2025 διαφορετικά σημεία που είναι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με 2025 πλευρές.

**Λύση.** Η απάντηση είναι  $n_{\min} = 2024$ . Για  $n = 2024$  γνωρίζουμε ότι τέτοιο πολυώνυμο υπάρχει, λόγω του Θεωρήματος. Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε ένα τυχόν κανονικό πολύγωνο με 2025 πλευρές στο επίπεδο, και να κατασκευάσουμε το πολυώνυμο βαθμού  $\leq 2024$  που μας δίνει το Θεώρημα.

Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  που ικανοποιεί τις συνθήκες το προβλήματος πρέπει  $n \geq 2024$ . Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{2025}$  οι τετμημένες των κορυφών του πολυγώνου σε αύξουσα σειρά, και  $(a, b)$  το κέντρο του. Για παράδειγμα, σε ένα κανονικό πεντάγωνο έχουμε:



Εύκολα παρατηρούμε ότι για κάθε  $1 \leq i \leq 2024$  ισχύει ότι  $(P(x_i) - b)(P(x_{i+1}) - b) < 0$ , συνεπώς από το Θεώρημα Bolzano στα 2024 διαστήματα  $[x_i, x_{i+1}]$ , το πολυώνυμο  $P$  έχει τουλάχιστον 2024 ρίζες. Άρα, αφού το πολυώνυμο δεν μπορεί να είναι το μηδενικό, πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 2024, άρα  $n \geq 2024$ , όπως θέλαμε ■

**Πρόβλημα 5.** Έστω ένα μονικό πολυώνυμο  $P$  βαθμού  $n$  με πραγματικούς συντελεστές, και ακέραιοι  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει κάποιος μη αρνητικός ακέραιος  $i$  τέτοιος, ώστε:  $|P(x_i)| \geq \frac{n!}{2^n}$ .

**Λύση.** Από το Θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i) \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του  $P$  ισούται με 1, άρα εξισώνοντας τους συντελεστές αυτούς συνάγουμε ότι:

$$1 = \sum_{i=0}^n \frac{P(x_i)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}.$$

Υποθέτοντας ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, έστω ότι  $|P(x_i)| < \frac{n!}{2^n}$  για κάθε  $0 \leq i \leq n$ . Παρατηρούμε ότι:

$$\prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} |x_i - x_j| = |(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)| \geq$$

$$\geq k \cdot (k-1) \dots 1 \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = k!(n-k)!,$$

καθώς οι ακέραιοι  $x_i$  είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$1 \leq \sum_{i=0}^n \frac{P(x_i)}{k!(n-k)!} < \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} = 1,$$

άτοπο. Χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και τα πιο πάνω συμπεράσματά μας ■

**Πρόβλημα 6.** Να αποδείξετε ότι κάθε μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$  με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως ο μέσος όρος δύο μονικών πολυωνύμων βαθμού  $n$  με  $n$  πραγματικές ρίζες το κάθε ένα από αυτά.

**Λύση.** Έστω  $P$  το μονικό πολυώνυμο. Αναζητούμε μονικά πολυώνυμα  $Q$  και  $R$  τέτοια με  $n$  πραγματικές ρίζες το καθένα τέτοια, ώστε  $Q + R = 2P$ . Θα αποδείξουμε το εξής χρήσιμο Λήμμα:

**Λήμμα.** Αν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  και  $b_1, b_2, \dots, b_n$  είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε οι  $a_i$  να είναι μεταξύ τους διαφορετικοί, τότε υπάρχει μοναδικό μονικό πολυώνυμο  $Q$  με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό  $n$  τέτοιο, ώστε  $Q(a_i) = b_i$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ .

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο  $R$  με βαθμό  $\leq n-1$  τέτοιο, ώστε  $R(a_i) = b_i - a_i^n$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ . Άρα, θέτοντας  $Q(x) = x^n + R(x)$ , το πολυώνυμο  $Q$  είναι μονικό και βαθμού  $n$ , ενώ τετριμμένα:

$$Q(a_i) = a_i^n + R(a_i) = b_i,$$

για κάθε  $1 \leq i \leq n$  ■

Με βάση το Λήμμα, η ιδέα είναι να επιλέξουμε κάποιους πραγματικούς αριθμούς  $q_1, q_2, \dots, q_n$  και  $r_1, r_2, \dots, r_n$  που θα είναι οι τιμές των πολυωνύμων  $Q$  και  $R$  στα σημεία  $1, 2, \dots, n$ . Προφανώς, πρέπει να ισχύει ότι  $q_i + r_i = 2P(i)$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ .

Μετά, από το Λήμμα μπορούμε να βρούμε μονικά πολυώνυμα  $Q$  και  $R$  βαθμού  $n$  τέτοια, ώστε  $Q(i) = q_i$  και  $R(i) = r_i$  για κάθε  $i$ . Αφού το πολυώνυμο  $Q + R - 2P$ , που είναι βαθμού  $\leq n-1$  (αφού τα πολυώνυμα  $P, Q, R$  είναι μονικά) έχει τουλάχιστον  $n$  ρίζες, τις  $1, 2, \dots, n$ , είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $Q + R = 2P$ . Μένει να εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι τα πολυώνυμα που κατασκευάσαμε έχουν ακριβώς  $n$  πραγματικές ρίζες το καθένα.

Θα επιλέξουμε τα  $q_i$  και τα  $r_i$  έτσι, ώστε να έχουν εναλλάξ διαφορετικά πρόσημα. Αυτό θα δώσει το ζητούμενο, καθώς τότε από το Θεώρημα Bolzano τα πολυώνυμα  $Q$  και  $R$  θα έχουν τουλάχιστον  $n-1$  πραγματικές ρίζες το κάθε ένα, και άρα το πολύ μία μιγαδική ρίζα το κάθε ένα. Αφού οι μιγαδικές ρίζες αναγκαστικά εμφανίζονται σε ζεύγη, το ζητούμενο έπεται.

Μένει μόνο να λάβουμε υπόψη και τη συνθήκη  $q_i + r_i = 2P(i)$  για κάθε  $1 \leq i \leq n$ . Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε:

$$M := 2 \max_{1 \leq i \leq n} |f(i)| + 2025,$$

και επιλέγουμε τα  $q_i, r_i$  έτσι ώστε να ισχύει η πιο πάνω σχέση και  $q_i < -M$  και  $r_i > M$  αν ο  $i$  περιττός, και  $q_i > M$  και  $r_i < -M$  αν ο  $i$  είναι άρτιος. Αυτή η κατασκευή προφανώς ικανοποιεί το επιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου, και είναι δυνατή λόγω του ορισμού του  $M$ , όπως θέλαμε ■

### Βιβλιογραφία

- [1] Titu Andreescu και Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*, XYZ Press, 3rd edition.
- [2] Kin Y. Li, *Lagrange Interpolation Formula*, *Mathematical Excalibur* Volume 15, Number 2.
- [3] Razvan Gelca και Titu Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, 1st edition.



# HOMO MATHEMATICUS

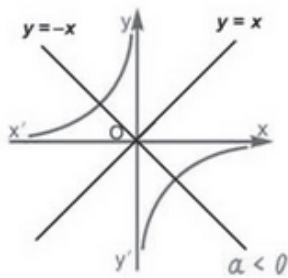
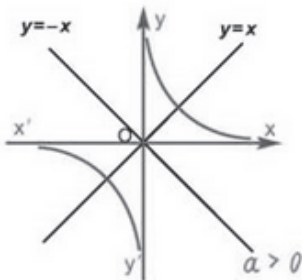
Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: Κερασσάριδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος

## 1ο θέμα: η "ομορφιά"

### Η ομορφιά των Μαθηματικών

Το καλλιτεχνικό και το μαθηματικό μυαλό δεν απέχουν τελικά και τόσο πολύ μεταξύ τους.



«Κάποιοι άνθρωποι θα μισήσουν αυτά που λέω», λέει μιλώντας στον ιστότοπο BigThink ο μαθηματικός **Marcus du Sautoy**, «επειδή όλα αυτά έχουν να κάνουν με το "ξετύλιγμα", το άνοιγμα του ουράνιου τόξου. Κάποιοι άνθρωποι θέλουν να διατηρήσουν τη μαγεία και δεν θέλουν να ξέρουν

γιατί κάτι λειτουργεί. Αυτό δεν πειράζει. Αλλά στην πραγματικότητα, για μένα, ξέρετε, το ουράνιο τόξο γίνεται πολύ πιο ενδιαφέρον **όταν καταλαβαίνεις τι συμβαίνει** στο φως που κάνει το ουράνιο τόξο να φαίνεται έτσι».

Ο Du Sautoy μιλάει για τον «φορμαλισμό» στη φιλοσοφία της τέχνης: την ιδέα δηλαδή ότι μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί κάτι είναι όμορφο επισημαίνοντας τα τυπικά μέρη που το συνθέτουν.

Ο φορμαλισμός υποστηρίζει ότι μπορούμε να εξηγήσουμε τις αισθητικές κρίσεις με μη αισθητικούς όρους. Ίσως βρίσκουμε ένα τραγούδι όμορφο λόγω των τριτογενών αρμονιών του ή μας αρέσει μια συγκεκριμένη φωτογραφία επειδή οι γωνιακές γραμμές συγκλίνουν σε ένα σημείο. Ο φορμαλισμός «ξετυλίγει το ουράνιο τόξο» λέγοντάς σας ακριβώς γιατί βρίσκετε κάτι όμορφο.

Δεν είναι όλοι φορμαλιστές. Ορισμένοι αισθητικοί δεν πιστεύουν ότι μπορείς να «αναγάγεις» και να «τεμαχίσεις» την τέχνη στα σύνθετα μέρη της. Πιστεύουν ότι η ομορφιά είναι ομορφιά αποκλειστικά και μόνο επειδή είναι απαράβατα υποκειμενική - ένα ευχάριστο συναίσθημα που κινείται στα όρια ανάμεσα στο συναίσθημα και τον μυστικισμό. Ο Du Sautoy δεν είναι ένας από αυτούς τους ανθρώπους.

### Η ομορφιά έχει σχέση με τα Μαθηματικά

Ο Du Sautoy πιστεύει ότι η ομορφιά έχει σχέση με τα Μαθηματικά.

«Τα Μαθηματικά - ως αντικείμενο μελέτης - έχουν μια ιστορία και μια εξέλιξη», λέει. «Και οι μαθηματικοί παίζουν ρόλο σε αυτό. Αλλά κατά βάθος είμαι πολύ πλατωνιστής. Πιστεύω ότι υπάρχουν αυτές οι δομές στη φύση που δεν χρειάζονται σώνει και ντε... μια στιγμή δημιουργίας. Και έτσι, πιστεύω ότι το Σύμπαν μας γύρω μας είναι ένα φυσικό κομμάτι των Μαθηματικών. Και γι' αυτό

βλέπουμε τόσες πολλές από τις δομές που αναγνωρίζουμε, να αναβλύζουν κάτω από τον φυσικό κόσμο», σημειώνει ο μαθηματικός και προσθέτει:

«Και πώς προέκυψαν τα Μαθηματικά, άλλωστε; Προέκυψαν από την προσπάθεια των ανθρώπων να κατανοήσουν τον φυσικό κόσμο γύρω μας. Έτσι, είναι αναπόφευκτο ότι αν υπάρχουν δομές στη φύση, αυτές θα είναι οι πρώτες δομές που θα ανακαλύψουμε, ως μαθηματικοί και ως άνθρωποι.



## Οι δομές παντού γύρω μας

Ο Du Sautoy υποστηρίζει ότι το Σύμπαν αποτελείται από δομές - και τα μαθηματικά είναι η γλώσσα που έχουμε αναπτύξει για να εξηγήσουμε και να αναπαραστήσουμε αυτές τις δομές. Αυτό ισχύει για κάθε γωνιά του Σύμπαντος και ισχύει στην καθημερινή ζωή. Υπάρχει στη φύση. Ο Du Sautoy δίνει μερικά παραδείγματα:

«Τα κοτόπουλα κινούνται πάντα σε συγκεκριμένους αριθμούς και σε σχήματα. Τα

μικρότερα στα αριστερά, τα μεγαλύτερα στα δεξιά. Τα τζιτζίκια κρύβονται υπόγεια για 17 χρόνια, χωρίς να κάνουν απολύτως τίποτα. Πώς μετράνε αυτά τα τζιτζίκια 17 χρόνια;» Και η συμμετρία, εξηγεί, «είναι συχνά ένα σήμα στον φυσικό κόσμο, ότι κάτι πρέπει να προσέξουμε, επειδή η συμμετρία πολύ συχνά είναι ένδειξη ενός ζώου».

## Τα Μαθηματικά της ομορφιάς

Ο φορμαλισμός του Du Sautoy αποτελεί πρόεκταση του πλατωνισμού του: Αν όλα όσα βιώνουμε είναι «ένα φυσικό κομμάτι των μαθηματικών», τότε η τέχνη δεν θα είναι διαφορετική. Ιδού τρία παραδείγματα από το επερχόμενο βιβλίο του, «Blueprints: How Mathematics Shapes Creativity» [Πώς τα Μαθηματικά διαμορφώνουν την δημιουργικότητα].



Η χρυσή αναλογία: «Ο Μότσαρτ, για παράδειγμα, χρησιμοποίησε την ιδέα της χρυσής τομής στον "Μαγικό αυλό". Ο Ντεμπισί και ο Μπέλα Μπάρτοκ αγάπησαν επίσης πολύ την ιδέα. Ο Λε Κορμπυζιέ χρησιμοποιεί τους αριθμούς Φιμπονάτσι ως ένα είδος σχεδιαγράμματος για την οικοδόμηση κτιρίων».

Τα φράκταλ του Πόλοκ: «Ο Τζάκσον Πόλοκ είναι διάσημος για την πολύ αφηρημένη εξπρεσιονιστική τέχνη - πετάει χρώματα γύρω γύρω. Και πολλοί άνθρωποι λένε, "Λοιπόν, ο καθένας θα μπορούσε να το κάνει αυτό". Αποδεικνύεται όμως ότι δεν μπορεί να το κάνει ο καθένας, επειδή κάνει κάτι πολύ ιδιαίτερο στο στυλ ζωγραφικής του, το οποίο είναι ότι στην πραγματικότητα δημιουργεί με το σώμα του και το πινέλο ένα χαοτικό σύστημα. Και η γεωμετρία του χάους είναι αυτό που ονομάζεται «φράκταλ». Έτσι, στην πραγματικότητα, αυτό που φτιάχνει είναι πολλή γεωμετρία φράκταλ, και ένα φράκταλ έχει αυτή τη θαυμάσια ιδιότητα ότι δεν θα απλοποιηθεί ποτέ. Αλλά στην πραγματικότητα είναι ένα από τα όμορφα πράγματα για τον Πόλοκ ότι όταν στέκεσαι μπροστά του, χάνεις την αίσθηση της κλίμακας. Καθώς περπατάς προς το μέρος του, δεν είσαι σίγουρος πόσο κοντά είσαι», λέει ο μαθηματικός.

## Ο... αριθμολάγνος λογοτέχνης.

«Ο Σαίξπηρ έχει εμμονή με τους αριθμούς. Νομίζεις ότι είναι λογοτέχνης, αλλά στην πραγματικότητα ήταν και μεγάλος αριθμολάτρης. Ο αριθμός είναι πραγματικά σημαντικός για να υποδηλώνει κάτι σημαντικό στην ποίησή του».

Για τον du Sautoy, τα Μαθηματικά είναι το αόρατο νήμα που συνδέει την τέχνη, τη φύση και το σύμπαν. Αν κοιτάξουμε αρκετά προσεκτικά, μπορούμε να δούμε πόσο πολύ τα Μαθηματικά ξετυλίζουν το ουράνιο τόξο για να αποκαλύψουν βαθύτερα μοτίβα από κάτω

### 2ο θέμα:

### Απάντηση στη "σπαζοκεφαλιά"

Η απάντηση στην "σπαζοκεφαλιά", του προηγούμενου τεύχους, με τίτλο: "για να περνάτε ευχάριστα την ώρα σας".

Σας δίνουμε την μεθόδευση:

α) μετασχηματίζουμε τον δοσμένο αριθμό σε δύναμη με βάση το 10 και εκθέτη τον ακέραιο που δείχνει το πλήθος των "μηδενικών" του δοσμένου αριθμού.

- β) την βάση "10", την μετασχηματίζουμε σε γινόμενο δύο παραγόντων, δηλ.  $2 \cdot 5$   
 γ) ακολουθούμε τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων  
 δ) τέλος, αρκεί, να...είμαστε καλοί στον πολλαπλασιασμό ακέραιων αριθμών, όπως παρακάτω:

- για τον πρώτο αριθμό θα έχουμε:

$$1.000.000.000 = 10^9 = (2 \cdot 5)^9 = 2^9 \cdot 5^9 = (512) \cdot (1953125)$$

- για τον δεύτερο αριθμό θα έχουμε:

$$1.000.000.000.000.000.000 = 10^{18} = (2 \cdot 5)^{18} = 2^{18} \cdot 5^{18} = (262144) \cdot (3814697265625)$$

### 3ο θέμα:

#### Κάθε ανακάτεμα τράπουλας είναι μοναδικό;

Αν ανακατέψατε κάποτε μια τράπουλα, είναι πρακτικά βέβαιο ότι σχηματίσατε μια μοναδική αλληλουχία χαρτιών, ότι είσατε δηλαδή ο μόνος άνθρωπος που διάταξε τα χαρτιά με αυτήν τη σειρά! Αν και αυτός ο ισχυρισμός μοιάζει εξωφρενικά απίθανος, είναι μια καλή επίδειξη του πώς οι μεγάλοι αριθμοί υπεισέρχονται σε καθημερινές καταστάσεις, με απρόσμενες συνέπειες.

Τα μαθηματικά του ανακατέματος των χαρτιών είναι εύκολο να εξηγηθούν. Για να υπολογιστούν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί 52 χαρτιών, πρέπει να γίνουν όλες οι διατάξεις, δηλαδή καθένα από τα 52 χαρτιά να μπει πρώτο, οπότε υπάρχουν 51 πιθανότητες για το χαρτί που θα μπει δεύτερο. Το επόμενο χαρτί έχει 50 επιλογές σχετικά με το ποιο θα το ακολουθήσει, κ.ο.κ. Έτσι, μια τράπουλα μπορεί να διαταχθεί με  $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 52!$  τρόπους (το θαυμαστικό είναι το σύμβολο του παραγοντικού του αριθμού, δηλαδή του γινομένου όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον αριθμό).

Αν κάποιος κάνει τις σχετικές πράξεις, θα βρει έναν αριθμό με 67 μηδενικά! Αυτό σημαίνει ότι οι τρόποι διάταξης των χαρτιών μιας τράπουλας είναι πάνω από ένα τετράκις εκατομμύριο φορές όσα είναι τα άτομα που απαρτίζουν τη Γη! Ωστόσο, η πιθανότητα ένας άλλος άνθρωπος να ανακατέψει την τράπουλα με το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα δεν είναι  $1/52!$ . Αυτός ο αριθμός απλώς δείχνει πόσο πιθανή είναι η κάθε συγκεκριμένη διάταξη των χαρτιών.

Πόσο πιθανό είναι δύο άνθρωποι να ανακατέψουν την τράπουλα καταλήγοντας στην ίδια ακριβώς διάταξη των χαρτιών; Ένας τρόπος για να υπολογιστεί αυτό είναι να υπολογιστεί η πιθανότητα του αντιθέτου και μετά αυτή να αφαιρεθεί από το 1. Αυτό σημαίνει ότι πρώτα εξετάζει κανείς πόσο πιθανό είναι όλοι οι άνθρωποι στον κόσμο να δημιουργήσουν μια εντελώς νέα διάταξη ανακατεύοντας. Ο πρώτος άνθρωπος θα είχε πιθανότητα 1, ο δεύτερος πιθανότητα  $(52! - 1) / 52!$ , ο τρίτος  $(52! - 2) / 52!$  κ.ο.κ. Το άθροισμα αυτών των πιθανοτήτων πρέπει να αφαιρεθεί από το 1.

Αν υπάρχουν 8 δισεκατομμύρια άνθρωποι στη Γη, η πιθανότητα είναι  $1 - (52! - 1) / 52! \cdot (52! - 2) / 52! \cdot (52! - 3) / 52! \cdot \dots \cdot (52! - 8.000.000.001) / 52!$ . Το πρόβλημα είναι ότι οι αριθμομηχανές, ακόμα και πακέτα μαθηματικών για ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δεν μπορούν να υπολογίσουν το  $52!$ . Εφαρμόζοντας μια μαθηματική προσέγγιση του γινομένου αυτού, προκύπτει ότι η πιθανότητα είναι μικρότερη από  $8 \cdot 10^{-49}$ . Δηλαδή είναι μικρότερη από έναν δεκαδικό αριθμό που έχει 46 μηδενικά μετά την υποδιαστολή!

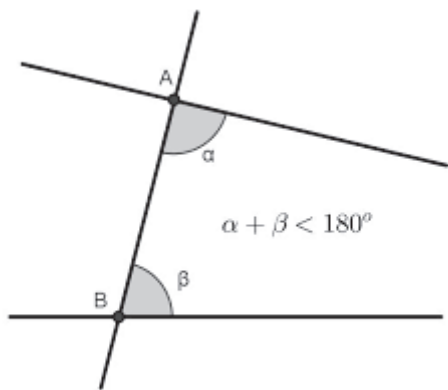


Βεβαίως, ένας άνθρωπος μπορεί να έχει ανακατέψει την τράπουλα πολλές φορές στη ζωή του. Αν υποθέσουμε ότι κάθε άνθρωπος την έχει ανακατέψει 100 φορές, τότε η πιθανότητα να βγει η ίδια διάταξη είναι μικρότερη από  $8 \cdot 10^{-43}$ , δηλαδή το πράγμα δεν αλλάζει και πολύ. Το ίδιο συμβαίνει και αν συνυπολογίσουμε κάθε άνθρωπο που έχει ζήσει ποτέ πάνω στη Γη (παρότι το είδος μας, δεν παίζει χαρτιά, παρά μόνο για πολύ μικρό τμήμα της διαδρομής του στον πλανήτη), δηλαδή κατά μία εκτίμηση για 117 δισεκατομμύρια ανθρώπους. Ακόμα και τότε, η πιθανότητα παραμένει μικρότερη από  $1,7 \cdot 10^{-40}$ . Με άλλα λόγια, είναι εξαιρετικά απίθανο σε ολόκληρη την Ιστορία της ανθρωπότητας δύο άνθρωποι να ανακάτεψαν (καλά) μια τράπουλα και το ανακάτεμα να οδήγησε στην ίδια διάταξη των 52 χαρτιών.

4ο Θέμα:

Το 5<sup>ο</sup> αίτημα για τις παράλληλες και οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες

Οι μαθηματικοί δοκίμαζαν πάντα κάποιο αίσημα μη ικανοποίησης, σχετικά με το αίτημα των παραλλήλων. Είχαν την εντύπωση ότι θα μπορούσαν να το αποδείξουν, να το βγάλουν από άλλα αιτήματα και αξιώματα. Αρχίζοντας από την βαθειά αρχαιότητα κι ως το τέλος του 18<sup>ου</sup> αιώνα πολλοί γεωμέτρεις δοκίμασαν να αποδείξουν το αίτημα αυτό σαν θεώρημα.



Ωστόσο όλες οι αποδείξεις του 5<sup>ου</sup> αιτήματος που διατυπώθηκαν, είτε περιείχαν άμεσο λάθος, είτε βασίζονταν σε νέα πρόταση, που δεν υπήρχε στα αξιώματα και τα αιτήματα του Ευκλείδη. Κάνοντας πιο λεπτομερειακή ανάλυση, έβλεπαν ότι η νέα αυτή πρόταση ήταν ισοδύναμη με το αίτημα της παραλληλίας, δηλ. από την πρόταση μπορούσε να βγει το αίτημα κι αντίστροφα από το 5<sup>ο</sup> αίτημα μπορούσε να βγει η νέα αυτή πρόταση. Στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα το ζήτημα για το 5<sup>ο</sup> αίτημα φαινόταν απελπιστικά μπερδεμένο. Αλλά κατά την τρίτη δεκαετία του του 19ου αιώνα βρέθηκε τελείως αναπάντεχα η λύση γι' αυτό το αιώνιο ζήτημα. Η λύση οφείλεται στην εντελώς νέα άποψη για την γεωμετρία, που διατύπωσαν, ανεξάρτητα ο ένας με τον άλλον, τρεις μεγάλοι γεωμέτρεις: ο Ν. Ι. Λομπατσέφσκυ, ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους, κι ο Ιβάν Μπολιάϊ.

Η πρώτη δημοσίευση της λύσης του ζητήματος έγινε με το προτεινόμενο έργο του Λομπατσέφσκυ στα 1829-1830 (ο Λομπατσέφσκυ παρουσίασε την εργασία του αυτή το 1826 στο πανεπιστήμιο του Καζάν) και λίγο αργότερα, στα 1832, δημοσιεύτηκε αυτή η μελέτη του Μπολιάϊ. Ο Γκάους δεν δημοσίευσε τα τολμηρά συμπεράσματά του, στα οποία είχε καταλήξει.

Η νέα ιδέα στην οποία στηρίχθηκε η λύση ήταν η εξής: η γεωμετρία του Ευκλείδη δεν είναι η μοναδική σωστή γεωμετρία. Είναι δυνατό να κατασκευαστούν κι άλλα συστήματα γεωμετρίας, τόσο αρμονικά και καθόλου αντιφατικά, όσο κι η

ευκλείδεια γεωμετρία. Πρέπει να σημειώσουμε ακόμα, ότι ο Λομπατσέφσκυ κι ο Γκάους, πίστευαν απόλυτα ότι η νέα γεωμετρία θα χρησιμοποιηθεί στην περιγραφή και μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων του χώρου μας.

Μια τέτοια άποψη ερχόταν σε αντίθεση με την παράδοση που επικρατεί εδώ και 2.000 χρόνια, όπου έχει αποκρυσταλλωθεί η πεποίθηση ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη είναι τόσο φυσική όση κι η εναλλαγή της ημέρας με την νύχτα κι ότι μόνο αυτή περιγράφει τις σχέσεις του χώρου μεταξύ των πραγματικών σωμάτων.

Πώς όμως ήταν δυνατό να δημιουργηθούν τα νέα γεωμετρικά συστήματα; Τον 17<sup>ου</sup> αιώνα οι γεωμέτρεις επινόησαν νέο τρόπο απόδειξης του 5<sup>ου</sup> αιτήματος. Έκαναν την υπόθεση ότι το 5<sup>ο</sup> αίτημα δεν είναι ορθό και προσπάθησαν να καταλήξουν στην αντίφαση, όπως γίνεται στις αποδείξεις με την «εις άτοπο απαγωγή». Πραγματικά, αφού το 5<sup>ο</sup> αίτημα μπορεί να εξαχθεί από άλλα αιτήματα και αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, αφού δηλ. είναι θεώρημα, τότε η υπόθεση δεν είναι ορθό, θα πρέπει να μας οδηγήσει σε αντίφαση. Ωστόσο, όσο κι αν προσπάθησαν οι γεωμέτρεις να καταλήξουν σε αντίφαση, δεν τα κατάφεραν. Εύρισκαν όλο και καινούργια αποτελέσματα. Μερικά απ' αυτά φαινόταν παράδοξα, όπως π.χ. το άθροισμα των γωνιών τριγώνου σε διαφορετικά τρίγωνα διαφέρει, αλλά σε όλες τις περιπτώσεις είναι μικρότερο των 2 ορθών γωνιών ή η γραμμή που όλα τα σημεία της απέχουν ίσα από μια ευθεία (ισαπέχουσα) δεν είναι κι η ίδια ευθεία ή δεν υπάρχουν όμοια τρίγωνα και γενικά όμοια σχήματα. Κι όμως κανένα από τα συμπεράσματα αυτά δεν ερχόταν σε αντίφαση με τα άλλα συμπεράσματα και αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας.



Ο Λομπατσέφσκυ, ο Γκάους κι ο Μπολιάϊ κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι αντίφαση δεν θα βρεθεί, γιατί το 5<sup>ο</sup> αίτημα δεν είναι θεώρημα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Τότε, όμως, τί ήταν τα



προηγούμενα συμπεράσματα, που είχαν καταλήξει οι γεωμέτρεις; στις προσπάθειές τους;

Ήταν θεωρήματα νέας γεωμετρίας! Έτσι, για να διαμορφωθεί νέα γεωμετρία έπρεπε να αντικατασταθεί το 5<sup>ο</sup> αίτημα με άλλο και να συναχθούν τα δυνατά συμπεράσματα από το νέο σύστημα αιτημάτων και αξιωμάτων. Αυτά ακριβώς και θα ήταν τα θεωρήματα και της νέας γεωμετρίας.

Στο 5<sup>ο</sup> αίτημα του Ευκλείδη δίνουν συχνά την εξής μορφή: από ένα σημείο που βρίσκεται έξω από μια ευθεία, στο επίπεδο, που ορίζεται απ' αυτό το σημείο κι απ' αυτή την ευθεία μπορεί να περάσει μόνο μια ευθεία, που δεν τέμνει τη δοσμένη ευθεία.

Αν το αίτημα αυτό δεν ευσταθεί, τούτο σημαίνει:

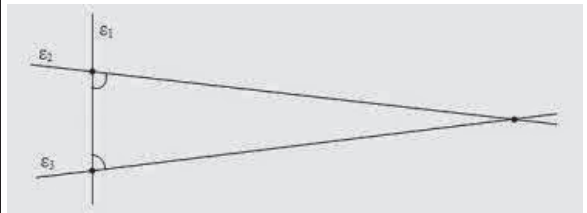
1) ή ότι μπορούν να περάσουν, το λιγότερο δύο ευθείες που δεν τέμνουν την δοσμένη ή

2) ότι τέτοιες ευθείες δεν υπάρχουν καθόλου (δηλ. δεν υπάρχουν καθόλου παράλληλες ευθείες).

Η δεύτερη από τις δυο αυτές προτάσεις έρχεται εύκολα σε αντίθεση με άλλα αξιώματα και αιτήματα του Ευκλείδη. Την πρώτη όμως ο Λομπατσέφσκυ, τη διάλεξε για αίτημα της παραλληλίας. Διαμόρφωσε το νέο σύστημα γεωμετρίας που τώρα λέγεται γεωμετρία του Λομπατσέφσκυ. Ταυτόχρονα ο Λομπατσέφσκυ μας έδειξε ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη μπορεί να προκύψει από την νέα αυτή γεωμετρία.

Οι μελέτες του Λομπατσέφσκυ άνοιξαν νέα εποχή στην ιστορία της γεωμετρίας. Ενώ πριν

φαίνονταν ότι στην ιστορία είχαν διατυπωθεί βασικά τα πάντα από τον Ευκλείδη, μετά τη δημιουργία της μη ευκλείδειας γεωμετρίας ανοίγονταν απέραντοι ορίζοντες για νέες γεωμετρικές έρευνες.



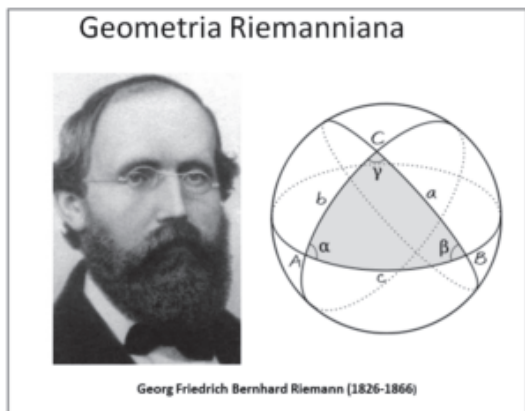
Κατά την έβδομη δεκαετία του 19ου αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Μπέρναρντ Ρίμαν πρότεινε νέα μέθοδο διαμόρφωσης για όλες τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες, στις οποίες μπορούν να μετρηθούν μήκη, εμβαδά, γωνίες, όγκοι (πρόκειται για τις λεγόμενες **μετρικές** γεωμετρίες). Και μάλιστα δεν περιορίστηκε στην περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου, αλλά διατύπωσε γεωμετρίες χώρων για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ειδικότερα ανέπτυξε την ιδέα μιας γεωμετρίας, όπου δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Για τη διατύπωση μιας τέτοιας γεωμετρίας, αναγκάστηκε φυσικά να εγκαταλείψει μερικά άλλα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας.

## 5ο θέμα:

## γεωμετρία του Ρίμαν

Η γεωμετρία αυτή λέγεται **γεωμετρία του Ρίμαν** (με την στενή έννοια της λέξης σε διάκριση από τις **γενικές γεωμετρίες του Ρίμαν**). Στη γεωμετρία του Ρίμαν, όπως και στη γεωμετρία του Λομπατσέφσκυ δεν υπάρχουν όμοια σχήματα, το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων είναι πάντοτε μεγαλύτερο των 2 ορθών γωνιών ενώ το μήκος των ευθειών είναι περιορισμένο.



Έχουν προταθεί κι άλλες μέθοδοι με τις οποίες μπορούν να διατυπωθούν νέες γεωμετρίες.

Μαζί, όμως, με τις νέες γεωμετρίες ανέκυψαν κι άλλα προβλήματα: Η γεωμετρία του Λομπατσέφσκυ διαφέρει από την ευκλείδεια στο αίτημα της παραλληλίας. Τί θα γίνει όμως αν αντικατασταθούν κι άλλα αιτήματα; Σε κάθε τέτοια αντικατάσταση θα δημιουργούνται πάντα νέα συστήματα γεωμετρίας; Σε ποιες περιπτώσεις θα είναι αντιφατικά τα νέα συστήματα, δηλ. τότε δεν θα μπορούμε να αποδείξουμε κάποιο θεώρημα, αποδείχνοντας ταυτόχρονα, ότι το θεώρημα αυτό δεν είναι ορθό;

Για να απαντήσουν στα παραπάνω ερωτήματα οι επιστήμονες, στράφηκαν πριν απ' όλα στη μελέτη της γεωμετρίας του Ευκλείδη, με σκοπό να βρουν όλα τα αξιώματα που χρειάζονταν για τη δημιουργία της, και ύστερα πια να μελετήσουν τις σχέσεις ανάμεσα σ' αυτά τα αξιώματα, να δουν τι θα γίνει αν πετάξουν ένα ή περισσότερα αξιώματα και τα αντικαταστήσουν με άλλα. Πολλοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν στο τέλος του 19ου αιώνα μ' αυτό το πρόβλημα, αλλά ο πρώτος που κατόρθωσε να το λύσει ήταν ο Γερμανός μαθηματικός Ντάβιντ

Χίλμπερτ το 1899. Στο βιβλίο του «Οι βάσεις της γεωμετρίας» μελέτησε το πρώτο πλήρες σύστημα των αξιωμάτων της γεωμετρίας του Ευκλείδη και ερεύνησε τα προβλήματα που αναφέραμε παραπάνω. Η κατεύθυνση αυτή των ερευνών συντέλεσε στην ανάπτυξη της σύγχρονης αξιωματικής μεθόδου, που η αξία της είναι ανεκτίμητη.

Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες άνοιξαν μια νέα εποχή όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στη Φυσική. Όπως είχαν προβλέψει οι δημιουργοί τους, οι γεωμετρίες αυτές έγιναν ο αναντικατάστατος

**6ο θέμα.**

**Τι είναι η Γεωμετρία;**

Η Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες των επιπέδων σχημάτων (με δύο διαστάσεις), καθώς και των σωμάτων του χώρου. Ωστόσο στη Γεωμετρία, δεν εξετάζονται όλες οι ιδιότητες των σχημάτων ή των σωμάτων. Δεν χρειάζεται να πούμε π.χ. ότι το χρώμα ή το βάρος ενός σώματος δεν ενδιαφέρει τον γεωμέτρη, αφού οι γεωμετρικές ιδιότητες του κύβου παραμένουν οι ίδιες, ανεξάρτητα από το αν ο κύβος είναι μεταλλικός ή κατασκευασμένος από κόκκινο κοντραπλακέ. (Σημειώνουμε ότι οι φυσικές ιδιότητες των δύο αυτών κύβων παρουσιάζουν πολλές διαφορές). Τον γεωμέτρη δεν τον ενδιαφέρει ούτε και η απόσταση ανάμεσα στην κορυφή του γραμμένου στον πίνακα τριγώνου ως την άκρη του πίνακα από το δεύτερο τρίγωνο. Ωστόσο όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες των δύο αυτών τριγώνων, δηλ. τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών, τα μεγέθη των γωνιών, τα ύψη, οι διάμεσοι, τα εμβαδά, οι ακτίνες των έγκυκλων<sup>1</sup> και των παράκυκλων<sup>2</sup>, ή η απόσταση του κέντρου του περίκυκλου<sup>3</sup> από το βαρύκεντρο θα είναι οι ίδιες. Πώς όμως θα χαρακτηριστεί αυτός ο κύκλος ιδιοτήτων των σχημάτων και των σωμάτων που ενδιαφέρει τον γεωμέτρη;

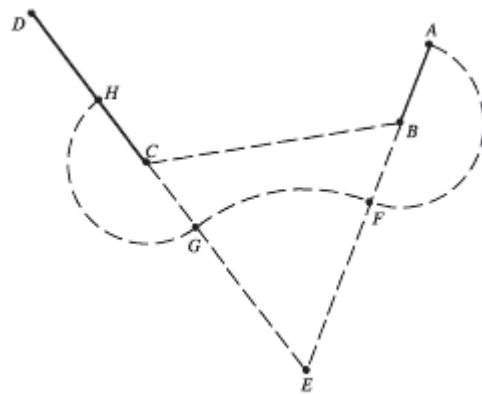
Όλες οι ιδιότητες των σωμάτων που εξετάζονται στη Γεωμετρία, ορίζονται πλήρως από το σχήμα και τις διαστάσεις του σώματος και δεν εξαρτώνται καθόλου από τη θέση του. Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι δύο ίσα σχήματα ή δύο ίσα σώματα έχουν τις ίδιες ακριβώς γεωμετρικές ιδιότητες. Γι' αυτό ο γεωμέτρης δεν έχει καμιά απολύτως βάση για να ξεχωρίσει με οποιοδήποτε τρόπο τα σχήματα ή τα σώματα αυτά. Το παραπάνω γεγονός εννοείται κι από την ίδια την ονομασία "ίσα σώματα". Ας δούμε τώρα ποια σχήματα ή σώματα θεωρούνται ίσα στη Γεωμετρία.

**Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται ίσα** (ή ανάλογα) στην περίπτωση που, όταν το ένα τοποθετηθεί πάνω στο άλλο, συμπίπτουν όλα τα σημεία τους, με άλλα λόγια όταν **υπάρχει κίνηση που μπορούμε να**

μαθηματικός μηχανισμός για πολλούς πολύ σπουδαιούς κλάδους της σύγχρονης Φυσικής και ιδιαίτερα για τη θεωρία της σχετικότητας.

Όπως είδαμε λοιπόν η εμφάνιση της Γεωμετρίας σαν επιστήμης δεν είχε καθόλου τελειώσει με τη δημιουργία του συστήματος της ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό ήταν όνο η αρχή, ενώ η λαμπρή συνέχισή της πραγματοποιήθηκε τον δέκατο ένατο αιώνα. Σήμερα η γεωμετρία είναι μια μεγάλη, πλατιά διακλαδισμένη επιστήμη. Που συνδέεται στενά με όλους τους κλάδους των Μαθηματικών.

**κάνουμε, ώστε το σχήμα Σ να συμπίσει με το σχήμα Σ'.** Έτσι ο ίδιος ο ορισμός της ιδιότητας των σχημάτων (ή των σωμάτων) συνδέεται με την έννοια της **κίνησης**. Ξέροντας τον ορισμό της ισότητας των σχημάτων, μπορούμε να πούμε ότι τα σχήματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο με κίνηση, θεωρούνται γεωμετρικά τα ίδια (τα αυτά), που δεν διαφέρουν μεταξύ τους. Όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες του ενός από τα σχήματα αυτά συμπίπτουν με τις γεωμετρικές ιδιότητες του άλλου σχήματος. Η τελευταία παρατήρηση μπορεί να θεωρηθεί ως προκαταρκτικός ορισμός για εκείνες τις ιδιότητες των σχημάτων και σωμάτων που εξετάζει η Γεωμετρία. **Ωστε η Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες των σχημάτων και των σωμάτων που διατηρούνται στην κίνηση.**



- Με τον όρο **σχήμα** στη Γεωμετρία εννοούμε ένα σύνολο σημείων του.
- Η έννοια της **κίνησης** σχήματος, πραγματοποιείται:
  - α. με την παράλληλη μεταφορά του σχήματος, κατά ορισμένο διάνυσμα,
  - β. με περιστροφή γύρω από σημείο Ο, κατά ορισμένη γωνία ω,
  - γ. με συμμετρία ως προς ορισμένη ευθεία (ε)

<sup>1</sup>εγγεγραμμένων (εγγραμμένων) κύκλων

<sup>2</sup>παρεγγεγραμμένων (παρεγγραμμένων) κύκλων

<sup>3</sup>περιγεγραμμένος (περιγραμμένος) κύκλος



Σύμφωνα με τους Dieudonné και Ponte, η έννοια της συνάρτησης εμφανίστηκε τον 17ο αιώνα, ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της αναλυτικής γεωμετρίας και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Ο όρος «συνάρτηση» εισήχθη από τον Gottfried Leibniz, σε μία δημοσίευσή του το 1673, για να περιγράψει μια ποσότητα που σχετιζόταν με μια καμπύλη, όπως η κλίση μιας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Από το 1718, θεωρήθηκε ως συνάρτηση οποιαδήποτε έκφραση, που αποτελείται από μια μεταβλητή και κάποιες «σταθερές». Ο Alexis Claude Clairaut (περίπου το 1734) και ο Leonhard Euler εισήγαγαν το γνωστό συμβολισμό  $f(x)$  για τη συνάρτηση.

Η συνάρτηση κατέληξε στη σημερινή της μορφή, μετά από μακροχρόνια πορεία που διέγραψε από τις αδήριτες πρακτικές και συγκεκριμένες ανάγκες που παρουσιάστηκαν για την ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  το συμβολίζουμε με  $D_f$  (domain of the function  $f$ ).

Η ακολουθία είναι μια ειδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{N}^*$  ( $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ ).

### Θέμα 1°

Θεωρούμε τις αριθμητικές προόδους

$(\alpha_v): 4, 7, 10, 13, \dots$  και  $(\beta_v): 5, 10, 15, 20, \dots$  και

τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2x - |x - 1|}$ .

**α. i.** Να βρείτε εκείνους τους όρους  $\alpha_p, \beta_p$  των αριθμητικών προόδων που το άθροισμα τους είναι τετράγωνο θετικού ακεραίου.

**ii.** Να δείξετε ότι η ακολουθία  $\gamma_v = \beta_v - \alpha_v$  είναι αριθμητική πρόοδος.

**β. i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**ii.** Να δείξετε ότι ορίζεται η ακολουθία  $u_v =$

$f(\gamma_v)$  και ισχύει  $\frac{1}{u_{v+1} - u_v} > \sqrt[4]{v(v+1)}$ , όπου

$(\gamma_v)$  η ακολουθία του α ii ερωτήματος.

**Λύση:** **α. i.** Η διαφορά της αριθμητικής πρόοδος  $(\alpha_v)$  είναι  $\omega_1 = 3$  και της  $(\beta_v)$  είναι  $\omega_2 = 5$ .

Έχουμε  $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega_1 = 4 + 3(v-1) \Leftrightarrow$

$\alpha_v = 3v + 1$  και  $\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega_2 =$

$5 + 5(v-1) \Leftrightarrow \beta_v = 5v$ .

Θέλουμε  $\alpha_p + \beta_p = \kappa^2 \Leftrightarrow 8p + 1 = \kappa^2$  (1), όπου  $\kappa$

θετικός ακέραιος και λόγω της (1) είναι  $\kappa \neq 1$

Ο  $8p + 1$  είναι περιττός θετικός. Για να ισχύει η (1)

πρέπει ο  $\kappa$  να είναι περιττός, δηλαδή  $\kappa = 2\lambda + 1$ ,

$\lambda \in \mathbb{N}^*$ . Έτσι από την (1) παίρνουμε

$8p + 1 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 \Leftrightarrow 2p = \lambda(\lambda + 1)$  (2).

Η παράσταση  $\lambda(\lambda + 1)$  είναι άρτιος αριθμός οπότε

$$(2) \Leftrightarrow p = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα  $\alpha_p = 3 \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} + 1$  και  $\beta_p = 5 \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}$  με  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ .

**ii.** Είναι  $\gamma_v = 2v - 1$ . Έχουμε  $\gamma_{v+1} - \gamma_v = 2 \Leftrightarrow$

$\gamma_{v+1} = \gamma_v + 2$ . Άρα η ακολουθία  $(\gamma_v)$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2.

**β. i.** Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  πρέπει και αρκεί  $2x - |x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq |x - 1|$  (3).

• Αν  $x \leq 1$ , τότε (3)  $\Leftrightarrow 2x \geq -x + 1 \Leftrightarrow$

$$3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}. \text{ Άρα } \frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

• Αν  $x > 1$ , τότε (3)  $\Leftrightarrow 2x \geq x - 1 \Leftrightarrow x \geq -1$ . Άρα  $x > 1$ . Συνεπώς το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι

$$D_f = \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right).$$

**ii.** Για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$  είναι  $\gamma_v \geq 1 \Rightarrow \gamma_v \in D_f$ . Άρα ορίζεται η ακολουθία  $u_v = f(\gamma_v) =$

$$\sqrt{2\gamma_v - |\gamma_v - 1|} = \sqrt{\gamma_v + 1} \Leftrightarrow u_v = \sqrt{2v}$$

$$\frac{1}{u_{v+1} - u_v} = \frac{1}{\sqrt{2(v+1)} - \sqrt{2v}} =$$

$$\frac{\sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v}}{(\sqrt{2(v+1)} - \sqrt{2v})(\sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v})} =$$

$$\frac{\sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v}}{2} \quad (4).$$

Για τους διαφορετικούς θετικού αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\alpha + \beta > 2\sqrt{\alpha\beta}$ . Πράγματι :

$$\alpha + \beta > 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v} &> 2\sqrt{\sqrt{2(v+1)} \cdot \sqrt{2v}} \Leftrightarrow \\ \sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v} &> 2\sqrt{2\sqrt{v(v+1)}} = \\ 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{v(v+1)}}. \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \sqrt{\sqrt{v(v+1)}} = \left\{ [v(v+1)]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$[v(v+1)]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{v(v+1)}, \text{ οπότε}$$

$$\sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v} > 2\sqrt{2}\sqrt[4]{v(v+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2(v+1)} + \sqrt{2v}}{2} > \sqrt{2}\sqrt[4]{v(v+1)}. \text{ Έτσι από την (4)}$$

$$\text{παίρνουμε } \frac{1}{u_{v+1} - u_v} > \sqrt{2}\sqrt[4]{v(v+1)}.$$

### Θέμα 2ο

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$  με  $(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \neq 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta - \gamma}x^2 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma}x + \frac{\gamma^2}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)}, x \in \mathbb{R}$$

**α. Να δείξετε ότι:**

**i.** Η γραφική παράσταση της  $f$  δεν διέρχεται από το σημείο  $A(1,0)$ .

**ii.** Αν οι αριθμοί  $\beta - \gamma, \gamma, \alpha - \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και  $\alpha\beta > 0$ , τότε το σημείο  $B(1, f(1))$  βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

**β.** Δεχόμαστε ότι ισχύει:  $\alpha(\alpha - \gamma) < 0$ .

**Να δείξετε ότι:**

**i.** Το τριώνυμο  $f(x)$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Έστω  $\rho_1, \rho_2$  οι ρίζες του  $f(x)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ .

**ii.** Είναι  $\rho_1 < 0 < \rho_2$ .

**iii.** Αν  $\rho_2 = \gamma^2$ , είναι  $\gamma \neq \pm 1$  και  $\alpha^2\gamma^2 + \beta^2 = \alpha\gamma^3 + \beta\gamma - 1$ .

**Λύση: α. i.** Υποθέτουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1,0)$

$$\text{, τότε: } f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta - \gamma} + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \frac{\gamma^2}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} =$$

$$0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - \gamma) + \beta(\beta - \gamma) + \gamma^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \alpha\gamma + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha\gamma + 2\beta^2 - 2\beta\gamma + 2\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 + (\beta - \gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta = 0 \\ \text{και} \\ \alpha - \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Άτοπο. Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  δεν μπορεί να διέρχεται από το σημείο  $A(1,0)$ .

**ii.** Έχουμε  $\gamma^2 = (\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \Leftrightarrow$

$$\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma = 0 \quad (1). \quad f(1) = \frac{\alpha}{\beta - \gamma} + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + 1 =$$

$$\frac{\alpha(\alpha - \gamma) + \beta(\beta - \gamma) + (\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} =$$

$$\frac{\alpha^2 - \alpha\gamma + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta}{\gamma^2} =$$

$$\frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta}{\gamma^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2 + \alpha\beta}{\gamma^2} > 0.$$

Άρα το σημείο  $B(1, f(1))$  βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

**β. i.** Η διακρίνουσα του  $f(x)$  είναι

$$\Delta = \left( \frac{\beta}{\alpha - \gamma} \right)^2 - \frac{4\alpha\gamma^2}{(\beta - \gamma)^2(\alpha - \gamma)} =.$$

$$\Delta = \left( \frac{\beta}{\alpha - \gamma} \right)^2 - 4 \left( \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - \gamma}.$$

Έχουμε  $\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} < 0$ , οπότε  $\Delta > 0$  που σημαίνει ότι το

$f(x)$  έχει πραγματικές και άνισες ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$ .

ii. Έχουμε  $\rho_1 \rho_2 = \frac{\frac{\gamma^2}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}}{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}} = \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha-\gamma)} < 0$ .

Άρα οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  είναι ετερόσημες, δηλαδή  $\rho_1 < 0 < \rho_2$ .

iii. Λόγω του ερωτήματος α i το 1 δεν είναι ρίζα του  $f(x)$ , οπότε  $\rho_2 \neq 1 \Leftrightarrow \gamma^2 \neq 1 \Leftrightarrow \gamma \neq \pm 1$ .

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha-\gamma)} \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha-\gamma)}$$

$$\text{Έχουμε } \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\frac{\beta}{\alpha-\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}} = -\frac{\beta(\beta-\gamma)}{\alpha(\alpha-\gamma)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha(\alpha-\gamma)} + \gamma^2 = -\frac{\beta(\beta-\gamma)}{\alpha(\alpha-\gamma)} \Leftrightarrow 1 + \gamma^2 \alpha(\alpha-\gamma) = -\beta(\beta-\gamma) \Leftrightarrow \beta(\beta-\gamma) + \gamma^2 \alpha(\alpha-\gamma) = -1 \Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 = \alpha \gamma^3 + \beta \gamma - 1.$$

**Θέμα 3ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να γράψετε τον τύπο της  $f$  χωρίς ριζικό στον παρονομαστή και να δείξετε ότι:

$$f(x) < \frac{x+5}{2}, \text{ για κάθε } x \text{ από το πεδίο ορισμού της } f.$$

- iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\Sigma(x) = (f(x)-1)^2 + (f(x+1)-1)^2 + (f(x+3)-1)^2 + \dots + (f(x+100)-1)^2$ .

- iv. Να παραστήσετε γραφικά την παράσταση  $\frac{1}{101} \Sigma(x) - 48$ , όπου  $\Sigma(x)$  το άθροισμα του ερωτήματος iii.

**Λύση:** i. Για το πεδίο ορισμού  $D_f$  της συνάρτησης  $f$  πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \text{και} \\ \sqrt{x+1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Άρα  $D_f = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

- ii. Για κάθε  $x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ,

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 1.$$

Για κάθε  $x \in D_f$ ,  $f(x) < \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x+1} < \frac{x+5}{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \frac{x+3}{2} \quad (1). \text{ Για κάθε}$$

$x \in D_f$  είναι  $x+3 > 0$ , οπότε

$$(1) \Leftrightarrow x+1 < \frac{(x+3)^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$(x+1)^2 + 4 > 0$  που ισχύει.

- iii.  $\Sigma(x) = (x+1) + (x+2) + \dots + (x+101) =$

$101x + (1+2+\dots+101)$ . Θέτουμε

$A = 1+2+\dots+101$ . Το  $A$  είναι το άθροισμα των 101 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με  $a_1 = 1$

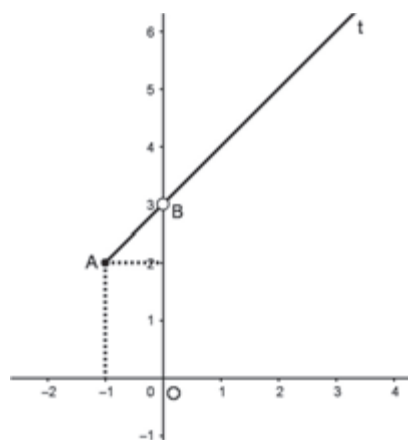
και  $\omega = 1$ . Άρα  $A = \frac{101 \cdot 102}{2} = 101 \cdot 51$ .

Έτσι έχουμε  $\Sigma(x) = 101x + 101 \cdot 51 = 101(x+51)$

με  $x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

- iv.  $\frac{1}{101} \Sigma(x) - 48 = x + 3$ .

Θέτουμε  $y = x + 3$  (2) με  $x \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , Η (2) στο σύνολο  $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$  εκφράζει την ημιευθεία  $At$  με  $A(-1, 2)$ , εκτός του σημείου  $B(0, 3)$  και δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άρα η παράσταση  $\frac{1}{101}\Sigma(x)-48$  παριστάνεται γραφικά από την ημιευθεία Ατ από την οποία εξαιρείται το σημείο Β(0,3).

**Θέμα 4ο**

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{|x-1|-2}{|x|+1}$  και

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - x.$$

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

ii. Δείξτε ότι  $f(x) < 1$  για κάθε  $x$  από το πεδίο ορισμού της  $f$ .

iii. Για ποιες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  το σημείο

$A(a+1, f(a+1))$  ανήκει στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

Από τις τιμές αυτές του  $a$ , να βρείτε εκείνη που η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία  $y = 1$

είναι  $d = \frac{1}{3}$ .

iv. Όταν το σημείο  $A(a+1, f(a+1))$  βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, δείξτε ότι το σημείο  $B(a+1, g(a+1))$  βρίσκεται στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

**Λύση:** i. • Για το πεδίο ορισμού της  $f$ : Πρέπει και αρκεί  $|x|+1 \neq 0$ , που ισχύει αφού  $|x|+1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι  $D_f = \mathbb{R}$ .

• Για το πεδίο ορισμού της  $g$ : Πρέπει και αρκεί  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ . Οι ρίζες του τριωνύμου είναι  $-1, 3$ . Ο παρακάτω πίνακας είναι ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου  $x^2 - 2x - 3$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Άρα  $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ , οπότε το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι

$$D_g = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).$$

ii. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x-1| = |x+(-1)| \leq$

$$|x|+|-1| \Leftrightarrow |x-1| \leq |x|+1 \Leftrightarrow |x-1|-2 \leq |x|-1,$$

$$f(x) \leq \frac{|x|-1}{|x|+1} = \frac{(|x|+1)-2}{|x|+1} = 1 - \frac{2}{|x|+1} < 1 \Rightarrow f(x) < 1.$$

iii.  $f(a+1) = \frac{|a|-2}{|a+1|+1}$ . Δεδομένου ότι

$|a+1|+1 > 0$ , για να είναι το σημείο Α στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο πρέπει:

$$\begin{cases} a+1 > 0 \\ \text{και} \\ f(a+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > -1 \\ \text{και} \\ |a|-2 > 0 \Leftrightarrow |a| > 2 \Leftrightarrow a < -2 \text{ ή } a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2.$$

Για  $a > 2$ ,  $f(a+1) = \frac{a-2}{a+2} = \frac{(a+2)-4}{a+2} =$

$$1 - \frac{4}{a+2}. \text{ Άρα } d = \frac{4}{a+2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{a+2} \Leftrightarrow$$

$$a+2 = 12 \Leftrightarrow a = 10.$$

iv. Ο τύπος της  $g$  γράφεται

$$g(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)} - x$$

Το σημείο Α βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο όταν  $a > 2 \Leftrightarrow a+1 > 3$ .

Άρα  $g(a+1) = \sqrt{(a+2)(a-2)} - (a+1)$ .

Όταν  $a > 2$ , το σημείο Β βρίσκεται στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο όταν  $g(a+1) < 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(a+2)(a-2)} < a+1 \Leftrightarrow a^2 - 4 < (a+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 4 < a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a > -\frac{5}{2} \text{ που ισχύει, αφού } a > 2.$$

Άρα όταν το σημείο Α βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο το σημείο Β βρίσκεται στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

**Θέμα 5ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} |a+1|x^4 - x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2a-1)x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}. \text{ με}$$

$$f(1) = f(2) + 1 \text{ και η ευθεία } \varepsilon: y = -x + 5.$$

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας  $\varepsilon$  με την  $C_f$ .

ii. Έστω η ευθεία  $\varepsilon_1: y = -3x + 3$ . Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon, \varepsilon_1$  τέμνονται και το σημείο τομής τους είναι σημείο της  $C_f$

**Λύση:** i.  $f(1) = |a+1|+1, f(2) = 2a-1$ .

$$f(1) = f(2) + 1 \Leftrightarrow |a+1| = 2a-1 \quad (1).$$

Για να συνεχίσουμε για τη λύση της (1) πρέπει

$$2\alpha - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}, \text{ τότε}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = -2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ \alpha + 1 = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} 3x^4 - x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

• Αν  $x \leq 1, f(x) = y \Leftrightarrow 3x^4 - x + 2 = -x + 5 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• Αν  $x > 1, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 + x - 2 = -x + 5 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 8x - 28 = 0$ . Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι  $\Delta = 400$ , οπότε  $x = \frac{-8 \pm 20}{6} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = \frac{-14}{3} \text{ απορρίπτεται, αφού } x > 1 \end{cases}$$

Άρα η ευθεία  $\varepsilon$  έχει με την  $C_f$  τρία κοινά σημεία τα  $A(-1,6), B(1,4)$  και  $\Gamma(2,3)$ .

ii. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών  $\varepsilon, \varepsilon_1$  είναι  $\lambda_\varepsilon = -1$  και  $\lambda_{\varepsilon_1} = -3$ . Αφού  $\lambda_\varepsilon \neq \lambda_{\varepsilon_1}$  οι ευθείες τέμνονται. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής  $K$  των ευθειών προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 5 \\ -x + 5 = -3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Άρα } K(-1,6).$$

Το σημείο  $K$  ταυτίζεται με το σημείο  $A$  που είναι κοινό σημείο της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$  (ερώτημα i). Συνεπώς  $K \in C_f$ .

**Θέμα 6ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1}$  με

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ .

a. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της  $f$ .

ii. Τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$ .

b. Δεχόμαστε ότι  $\kappa \neq \alpha$ . Θεωρούμε την γεωμετρική πρόοδο  $(u_n)$  με  $u_1 = \alpha - \kappa$  και λόγο  $\lambda = \sqrt[3]{2}$ . Αν το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της γεωμετρικής πρόοδου είναι  $S_6 = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ , και οι  $-\alpha, 2, \beta$  είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής πρόοδου, να βρείτε το κοινό σημείο της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$ , όταν το συμμετρικό του σημείου ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι σημείο ευθείας  $\varepsilon_1: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .

**Λύση:** a. i. Για το πεδίο ορισμού της  $f$  πρέπει και αρκεί  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ . Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

ii. Οι τετμημένες των κοινών σημείων της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$ , αν υπάρχουν, είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = \kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{x + 1} = \kappa \Leftrightarrow$

$$\alpha x + \beta = \kappa x + \kappa \Leftrightarrow (\alpha - \kappa)x = \kappa - \beta \quad (1).$$

• Αν  $\alpha \neq \kappa$ , η (1) έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\kappa - \beta}{\alpha - \kappa}. \text{ Θέλουμε } \frac{\kappa - \beta}{\alpha - \kappa} \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa - \beta}{\alpha - \kappa} \neq -1 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta, \text{ που ισχύει. Άρα σε αυτή την}$$

περίπτωση η  $C_f$  με τη  $\varepsilon$  έχει ένα κοινό σημείο το

$$M\left(\frac{\kappa - \beta}{\alpha - \kappa}, \kappa\right).$$

• Αν  $\alpha = \kappa$  και

—  $\kappa \neq \beta$ , τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε η  $C_f$  με την  $\varepsilon$  δεν έχουν κοινά σημεία.

—  $\kappa = \beta$ , τότε θα είναι  $\alpha = \beta$ . Αδύνατο, Άρα η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

$$b. \text{ Έχουμε } S_6 = \alpha_1 \frac{\lambda^6 - 1}{\lambda - 1} = (\alpha - \kappa) \frac{(\sqrt[3]{2})^6 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} =$$

$$(\alpha - \kappa) \frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1} \Leftrightarrow (\alpha - \kappa) \frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$3(\alpha - \kappa) = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1) \Leftrightarrow$$

$$3(\alpha - \kappa) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 \Leftrightarrow 3\alpha - 3\kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{3} + \alpha$$



Η τετμημένη του κοινού σημείου της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$  σύμφωνα με το ερώτημα α ii είναι

$$x_0 = \frac{\kappa - \beta}{\alpha - \kappa} = \frac{-\frac{1}{3} + \alpha - \beta}{\alpha + \frac{1}{3} - \alpha} = 3(\alpha - \beta) - 1 \quad (2). \text{ Αφού}$$

οι αριθμοί  $-\alpha, 2, \beta$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει  $2 \cdot 2 = -\alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = -4$   
 Άρα από την (2) παίρνουμε  $x_0 = -13$ . Συνεπώς το κοινό σημείο  $M$  της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon$  είναι  $M\left(-13, -\frac{1}{3} + \alpha\right)$ . Το συμμετρικό σημείο του  $M$  ως

προς τον άξονα  $x'x$  είναι το σημείο  $N\left(-13, \frac{1}{3} - \alpha\right)$ .

$$N \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \alpha = -\frac{13}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{13}{3}. \text{ Άρα } M(-13, 4).$$

**Θέμα 8ο**

Έστω η ευθεία  $\varepsilon: y = 2x - 1$  και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{25(x^2 - 4)}}{|x - 1| - 1} + \kappa x + 3. \text{ Η ευθεία } \varepsilon \text{ και η}$$

γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχουν κοινό σημείο το  $A$  που έχει τετμημένη  $x_0 = 3$ .

α. Να βρείτε:

i. Την τιμή του  $\kappa$ .

ii. Τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon_1: y = -x + 3$ .

β. Έστω  $B$  κοινό σημείο της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon_1$  του ερωτήματος α ii. Αν  $\Gamma, \Delta$  οι προβολές των σημείων  $B$  και  $A$  αντίστοιχα στον άξονα  $x'x$  και  $E$  το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$  τότε:

i. Δείξτε ότι  $AG \perp BD$ .

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABGE$ .

**Λύση:** Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ . Πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \text{και} \\ |x - 1| - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \\ \text{και} \\ |x - 1| \neq 1 \Leftrightarrow x - 1 \neq -1 \text{ και } x - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \\ \text{και} \\ x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty).$$

Άρα  $D_f = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$ .

α. i. Για  $x = 3$  από την εξίσωση της  $\varepsilon$  βρίσκουμε  $y = 5$ . Άρα  $A(3, 5)$ .  $A \in C_f \Leftrightarrow f(3) = 5 \Leftrightarrow 5 + 3\kappa + 3 = 5 \Leftrightarrow \kappa = -1$ .

ii. Όταν  $\kappa = -1$  ο τύπος της  $f$  είναι

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{25(x^2 - 4)}}{|x - 1| - 1} - x + 3.$$

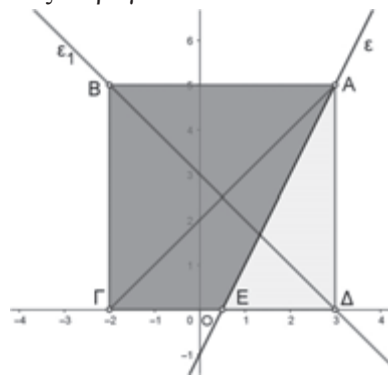
Οι τετμημένες των κοινών σημείων της  $C_f$  με την ευθεία  $\varepsilon_1$  προκύπτουν από τη λύση στο  $D_f$  της εξίσωσης

$$f(x) = -x + 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{25(x^2 - 4)}}{|x - 1| - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = -2$  ή  $x = 2$  η οποία απορρίπτεται λόγω του  $D_f$ . Άρα η  $C_f$  και η ευθεία  $\varepsilon_1$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το  $B(-2, 5)$ .

β. i. Προφανώς η  $\varepsilon_1$  διέρχεται από το σημείο  $\Delta(3, 0)$  και  $AB // = \Delta\Gamma = A\Delta = 5$ .

Άρα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο, οπότε  $AG \perp BD$  ως διαγώνιες τετραγώνου.



ii. Για  $y = 0$  από την εξίσωση της  $\varepsilon$  παίρνουμε  $x = \frac{1}{2}$ . Άρα  $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . Το τετράπλευρο  $ABGE$  είναι τραπέζιο.

$$\text{Έχουμε } (AB) = 5, (EG) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB) + (EG)}{2} (B\Gamma) = \frac{75}{4} \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Η Ευκλείδεια γεωμετρία περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τον χώρο σε τοπική κλίμακα, όμως σε μεγάλες αποστάσεις, όπου η **καμπυλότητα** του χώρου δεν είναι αμελητέα, δεν επαρκεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται η **χρήση μη ευκλείδειων γεωμετριών**, όπως η γεωμετρία **Riemann**, οι οποίες επιτρέπουν τη μελέτη καμπύλων χώρων και έχουν σημαντικές εφαρμογές στη σύγχρονη φυσική.

**Θέμα 1ο**

Θεωρούμε τρίγωνο  $ABQ$  με  $AB < AQ$ .

α. Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $AQ$  και  $E$  σημείο του τμήματος  $A\Delta$  τέτοιο ώστε  $AE = \frac{AB}{2}$ . Να αποδείξετε ότι η κάθετος από το σημείο  $E$  στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$  διέρχεται από το μέσον της πλευράς  $BQ$ .

β. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και παίρνουμε σημεία  $K, \Lambda$  των πλευρών του  $B\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $C_1 : (K, K\Gamma)$  και  $C_2 : (\Lambda, \Lambda A)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $M$ .

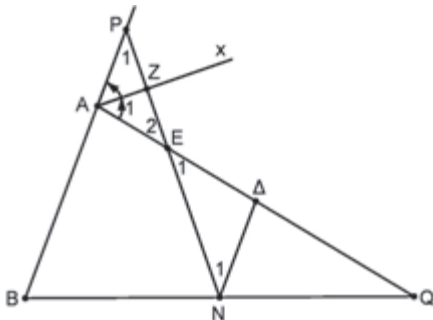
β. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και παίρνουμε σημεία  $K, \Lambda$  των πλευρών του  $B\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $C_1 : (K, K\Gamma)$  και  $C_2 : (\Lambda, \Lambda A)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $M$ .

i. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{AM}\Gamma$ .

ii. Αν η  $\Delta M$  είναι κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων  $C_1, C_2$  και  $AB = \frac{\Lambda K}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta AM$  είναι ισόπλευρο.

**Λύση**

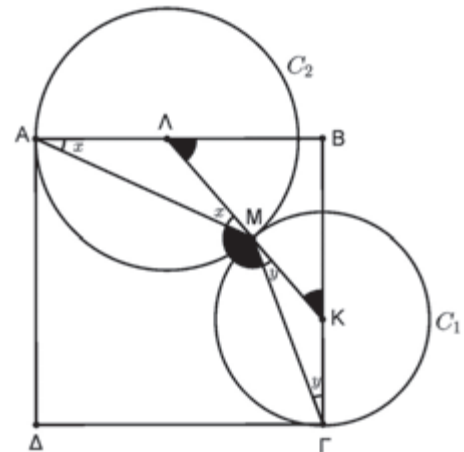
α.



Έστω  $Ax$  η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας  $\hat{A}_{εξ}$ ,  $N$  το μέσο της πλευράς  $BQ$  και  $Z, P$  τα σημεία τομής της  $NE$  με την  $Ax$  και την πλευρά  $BA$  αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι  $NZ \perp Ax$ . Αφού το  $\Delta N$  ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου  $ABQ$ , είναι  $\Delta N \parallel \frac{AB}{2}$ . Λόγω της

υπόθεσης προκύπτει  $\Delta N = \Delta E$ . Συνεπώς το τρίγωνο  $\Delta EN$  είναι ισοσκελές με  $\hat{N}_1 = \hat{E}_1$ .  $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$  ως κατακορυφήν και  $\hat{N}_1 = \hat{P}_1$  ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta N, AB$  που τέμνονται από την  $PN$ . Άρα  $\hat{P}_1 = \hat{E}_2$ . Έτσι το τρίγωνο  $APN$  είναι ισοσκελές με κορυφή  $A$  και αφού η  $AZ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}_{εξ}$ , θα έχουμε  $AZ \perp PE$ . Συνεπώς η κάθετη από το  $E$  στην  $Ax$  διέρχεται από το μέσον της πλευράς  $BQ$ .

β. i.

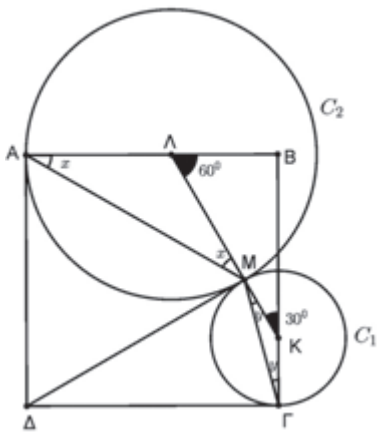


Οι κύκλοι  $C_1, C_2$  εφάπτονται των πλευρών του τετραγώνου στα σημεία  $\Gamma, A$  αντίστοιχα. Η διάκεντρος των δύο κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής  $M$ . Η γωνία  $\hat{B\Lambda K}$  είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου  $\Lambda AM$ , οπότε  $\hat{B\Lambda K} = 2x$ . Όμοια η γωνία  $\hat{\Lambda KB}$  είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου  $KMG$ , οπότε  $\hat{\Lambda KB} = 2y$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BK\Lambda$  έχουμε  $\hat{B\Lambda K} + \hat{\Lambda KB} = 2x + 2y \Leftrightarrow 2x + 2y = 90^\circ \Leftrightarrow x + y = 45^\circ$ . Άρα έχουμε  $\hat{AM}\Gamma = 180^\circ -$

$$(x + y) = 180^\circ - 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{AM\Gamma} = 135^\circ .$$

ii. Αφού το τρίγωνο ΒΚΛ είναι ορθογώνιο με υπο-  
 τείνουσα την ΚΛ και  $\Delta B = \frac{K\Lambda}{2} \Leftrightarrow \widehat{B\hat{K}\Lambda} =$   
 $30^\circ$ , τότε θα έχουμε  $\widehat{K\Lambda B} = 60^\circ$ , οπότε  $y = 15^\circ$  και  
 $x = 30^\circ$ .



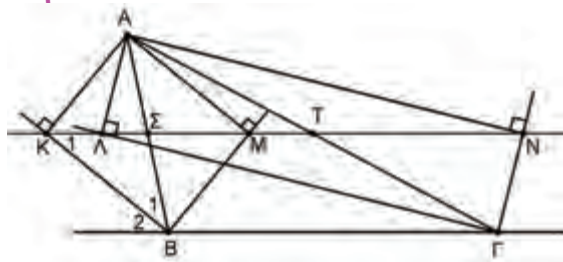
Είναι  $\Delta A = \Delta M$  ως εφαπτόμενα τμήματα από ση-  
 μείο εκτός του κύκλου  $C_2$  και  $\Delta M \perp K\Lambda$ . Συνεπώς  
 το τρίγωνο  $\Delta AM$  είναι ισοσκελές με  
 $\widehat{\Delta M A} = 90^\circ - x = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $\Delta AM$  είναι  
 ισόπλευρο.

**Θέμα 2°**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέ-  
 ρουμε καθέτους στις εσωτερικές και εξωτερικές  
 διχοτόμους των γωνιών  $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$  του τριγώνου. Να  
 αποδείξετε ότι:

- i. Οι προβολές του σημείου Α στις διχοτόμους (ε-  
 σωτερικές και εξωτερικές) των γωνιών  $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$  εί-  
 ναι συνευθειακά σημεία.
- ii. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τις  
 προβολές του Α στις διχοτόμους των γωνιών  
 $\widehat{B_{εξ}}, \widehat{\Gamma_{εξ}}$  έχει μήκος ίσο με την ημιπερίμετρο  $\tau$  του  
 τριγώνου ΑΒΓ.

**Λύση**



Έστω Κ, Λ, Μ, Ν οι προβολές του Α στις διχοτό-  
 μους των γωνιών  $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$  όπως φαίνονται στο παρα-  
 πάνω σχήμα.

i. Τα τετράπλευρα ΑΚΒΜ και ΑΝΓΛ είναι ορθογώ-  
 νια με κέντρα Σ, Τ αντίστοιχα. Αφού σε κάθε ορθο-  
 γώνιο οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται  
 το τρίγωνο ΣΚΒ είναι ισοσκελές με  
 $\widehat{K_1} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow KM // B\Gamma \Rightarrow \Sigma M // B\Gamma$ . Το σημείο Σ  
 είναι μέσο του ΑΒ, οπότε το ΣΜ, άρα και το ΚΜ  
 διέρχεται από το μέσο Τ της πλευράς ΑΓ. Όμοια  
 $\Lambda N // B\Gamma$ . Οι ευθείες ΚΜ, ΛΝ έχουν το σημείο Τ  
 κοινό και είναι παράλληλες στην ΒΓ. Από το αίτημα  
 της παραλληλίας προκύπτει ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ,  
 Ν είναι συνευθειακά.

- ii. Έχουμε:  $KM = AB \Leftrightarrow K\Sigma = \frac{AB}{2}$ , και  $\Lambda N =$   
 $A\Gamma \Leftrightarrow T\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ . Επίσης το ΣΤ ενώνει τα μέσα δύο  
 πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι  $\Sigma T = \frac{B\Gamma}{2}$ .  
 Άρα  $KN = K\Sigma + \Sigma T + T\Lambda = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \tau$ .

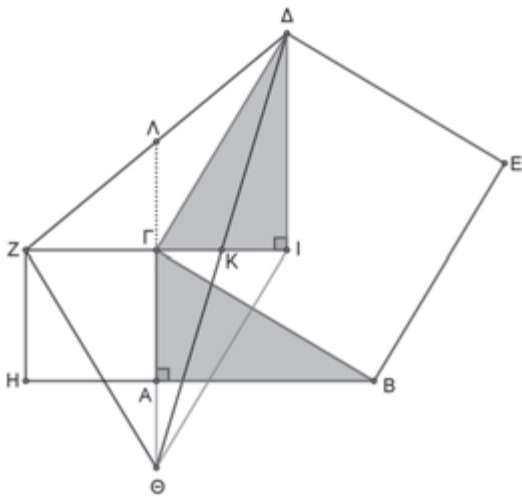
**Θέμα 3ο**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με  $\widehat{A} = 90^\circ$  και  
 $A\Gamma < AB$ . Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΖΗ,  
 ΒΓΛΕ εκτός του τριγώνου. Η ΑΓ τέμνει την ΔΖ  
 στο σημείο Λ. Στην προέκταση της ΓΑ παίρ-  
 νουμε σημείο Θ έτσι ώστε  $\Gamma\Theta = AB$ . Να αποδεί-  
 ξετε ότι:

- i. Το Γ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΖΘ.
- ii.  $\Gamma\Lambda = \frac{1}{2} AB$ .
- iii.  $\Delta\Gamma = \Theta Z$  και η ΔΓ διέρχεται από το μέσον του  
 ΖΘ.

**Λύση**

i. Φέρουμε τη  $\Delta I \perp Z\Gamma$ . Είναι  $\widehat{\Delta\Gamma I} = 90^\circ - \widehat{\Gamma B}$   
 και  $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma B}$ . Άρα  $\widehat{\Delta\Gamma I} = \widehat{\Gamma}$ . Τα ορθογώνια  
 τρίγωνα ΑΒΓ και ΙΔΓ είναι ίσα αφού έχουν  
 $\Delta\Gamma = B\Gamma$  ως πλευρές τετραγώνου και  $\widehat{\Delta\Gamma I} = \widehat{\Gamma}$ .



Συνεπώς  $\Gamma\Gamma = \Delta\Gamma = \Gamma\text{Z}$  και  $\Delta\text{I} = \text{AB} = \Gamma\Theta$ . Επίσης έχουμε  $\Gamma\text{A} \perp \text{AB}$  και  $\Delta\text{I} \perp \text{AB}$ , αφού  $\text{ZI} \parallel \text{AB}$ . Συνεπώς  $\Gamma\Theta \parallel \Delta\text{I}$ , οπότε το τετράπλευρο  $\Delta\Gamma\Theta\text{I}$  είναι παραλληλόγραμμο και επομένως το σημείο τομής  $\text{K}$  των διαγωνίων του είναι μέσο του  $\Delta\Theta$ . Έτσι η  $\text{ZK}$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $\Delta\text{Z}\Theta$ .

Η  $\Theta\Gamma$  τέμνει το  $\Delta\text{Z}$  στο σημείο  $\Lambda$ . Αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\text{I}\Delta\text{Z}$  το  $\Gamma$  είναι μέσο του  $\text{ZI}$  και  $\Gamma\Lambda \parallel \Delta\text{I}$ , προκύπτει ότι το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $\Delta\text{Z}$  και επομένως η  $\Theta\Lambda$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $\Delta\text{Z}\Theta$ . Συνεπώς το  $\Gamma$  είναι σημείο τομής δύο διαμέσων του τριγώνου  $\Delta\text{Z}\Theta$ , οπότε είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

ii. Από την ιδιότητα του βαρύκεντρον έχουμε

$$\begin{cases} \Gamma\Lambda = \frac{1}{3}\Theta\Lambda \\ \Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Theta\Lambda \end{cases} \Rightarrow \Theta\Gamma = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow \text{AB} = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\Lambda = \frac{1}{2}\text{AB}.$$

iii. Το  $\Theta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $\text{ZI}$ , οπότε  $\Theta\text{I} = \Theta\text{Z}$ . Από το παραλληλόγραμμο  $\Gamma\Delta\text{I}\Theta$  έχουμε  $\Theta\text{I} = \Gamma\Delta$ . Άρα  $\Gamma\Delta = \Theta\text{Z}$ .

Επειδή το  $\Gamma$  είναι βαρύκεντρο του τριγώνου  $\Delta\text{Z}\Theta$  το  $\Delta\Gamma$  θα βρίσκεται πάνω στην τρίτη διάμεσο του τριγώνου. Άρα η προέκταση του  $\Delta\Gamma$  θα διέρχεται από το μέσον του  $\text{Z}\Theta$ .

**Θέμα 4ο**

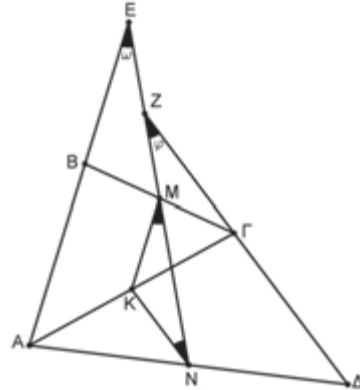
**Θεωρούμε τυχαίο κυρτό τετράπλευρο  $\text{AB}\Gamma\Delta$  με  $\text{AB} = \Gamma\Delta$ . Έστω  $\text{M}$ ,  $\text{N}$  τα μέσα των πλευρών του  $\text{B}\Gamma$  και  $\text{A}\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

i. Η ευθεία  $\text{MN}$  σχηματίζει με τις πλευρές  $\text{AB}$ ,  $\Delta\Gamma$  ίσες γωνίες.

ii. Η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ίσες πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλη στη  $\text{MN}$ .

**Λύση**

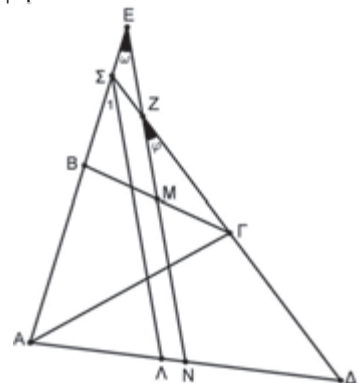
i. Η  $\text{MN}$  τέμνει την  $\text{AB}$  στο σημείο  $\text{E}$  και την  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $\text{Z}$ , σχηματίζει δε με τη  $\text{AB}$  γωνία  $\omega$  και με την  $\Delta\Gamma$  γωνία  $\varphi$ . Έστω  $\text{K}$  το μέσον του  $\text{A}\Gamma$ .



Στο τρίγωνο  $\text{AB}\Gamma$  το  $\text{MK}$  ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε  $\text{MK} \parallel \frac{\text{AB}}{2} \Rightarrow \hat{\text{KMN}} = \omega$  ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων  $\text{MK}$ ,  $\text{EA}$  που τέμνονται από την  $\text{EN}$ .

Στο τρίγωνο  $\text{A}\Gamma\Delta$  το  $\text{KN}$  ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του. Έτσι είναι  $\text{KN} \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow \hat{\text{KNM}} = \varphi$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\text{KN}$ ,  $\text{Z}\Delta$  που τέμνονται από  $\text{ZN}$ . Επειδή  $\text{AB} = \Gamma\Delta$  από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι  $\text{KM} = \text{KN}$ , δηλαδή το τρίγωνο  $\text{KMN}$  είναι ισοσκελές με  $\hat{\text{KMN}} = \hat{\text{KNM}} \Leftrightarrow \omega = \varphi$ .

ii. Έστω  $\Sigma$  το σημείο τομής των  $\text{AB}$ ,  $\Delta\Gamma$  και  $\Sigma\Lambda$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\text{A}}\Sigma\Delta$ . Έχουμε  $\hat{\text{E}}\Sigma\text{Z} = \varphi$  ως κατακορυφήν.



Η γωνία  $\hat{B}\Sigma\Gamma$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $\Sigma EZ$ ,  
 , οπότε  $\hat{B}\Sigma\Gamma = \omega + \varphi \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow}$   
 $2\hat{\Sigma}_1 = 2\omega \Leftrightarrow \hat{\Sigma}_1 = \omega \Rightarrow \Sigma\Lambda // EN \Rightarrow \Sigma\Lambda // MN$ .

**Θέμα 5ο**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ορθόκентρο το σημείο  $H$  και περίκентρο το σημείο  $O$ . Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .

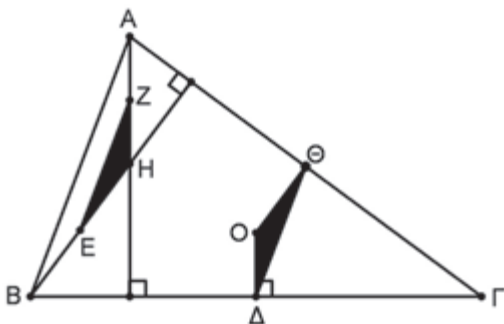
Να αποδείξετε ότι:

i.  $OA = \frac{1}{2}AH$ .

ii. Αν το σημείο  $K$  είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε το  $K$  είναι εσωτερικό σημείο του  $HO$  και ισχύει  $HK=2KO$ .

**Λύση**

i. Έστω  $E, Z, \Theta$  τα μέσα των  $HB, HA$  και  $AG$  αντίστοιχα. Αφού το  $O$  είναι περίκентρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , θα είναι  $OD \perp B\Gamma$  και  $O\Theta \perp AG$ . Τα τμήματα  $EZ, \Delta\Theta$  ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών των τριγώνων  $HAB, AB\Gamma$  αντίστοιχα. Συνεπώς έχουμε  $EZ // \frac{AB}{2}$  και  $\Delta\Theta // \frac{AB}{2}$ . Άρα είναι  $EZ // \Delta\Theta$ . Επίσης  $OD // ZH$  ως κάθετα στην  $B\Gamma$ . Όμοια  $O\Theta // EH$  ως κάθετα στην  $AG$ .

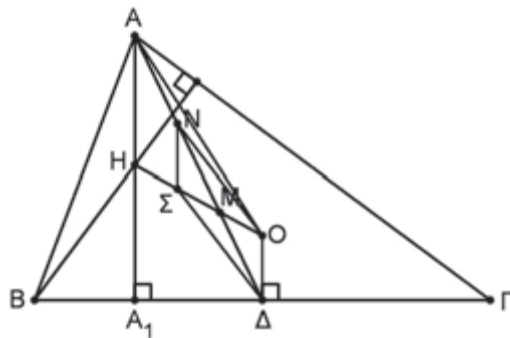


Τα τρίγωνα  $HEZ, O\Theta\Delta$  είναι ίσα γιατί έχουν  $\Delta\Theta = EZ$  και οι γωνίες που πρόσκεινται στις  $\Delta\Theta, EZ$  είναι μια προς μία ίσες ως οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές.

Άρα  $OD = HZ \Leftrightarrow OD = \frac{1}{2}AH$ .

ii. Η διάμεσος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει το τμήμα  $HO$  στο σημείο  $M$ . Το  $M$  είναι εσωτερικό

σημείο του  $HO$  αφού το  $A\Delta$  είναι διαγώνιος του τραπέζιου  $AO\Delta A_1$ .



Έστω  $N, \Sigma$  τα μέσα των τμημάτων  $AM, HM$  αντίστοιχα. Στο τρίγωνο  $MAH$  το  $N\Sigma$  ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε

$N\Sigma // \frac{AH}{2} \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} N\Sigma // OD$ . Αυτό σημαίνει ότι

το τετράπλευρο  $N\Sigma\Delta O$  είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο  $M$ . Έτσι έχουμε  $M\Delta = MN = NA$ , δηλαδή  $AM = \frac{2}{3}A\Delta$  που σημαίνει ότι το  $M$  είναι κέντρο βάρους του τριγώνου  $AB\Gamma$  και επομένως το  $M$  ταυτίζεται με το  $K$ . Επιπλέον έχουμε  $OM = M\Sigma = SH$  δηλαδή  $OK = KS = SH$ , οπότε είναι  $HK = 2KO$ .

**Σημείωση:** Η ευθεία  $OH$  ονομάζεται ευθεία Euler του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**Θέμα 6ο:**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψη  $BA, \Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $H$ , έτσι ώστε  $HE = HA$ .

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β. Έστω  $Z$  το μέσο του  $BH$ ,  $\Theta$  το μέσο του  $\Gamma H$  και το  $K$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

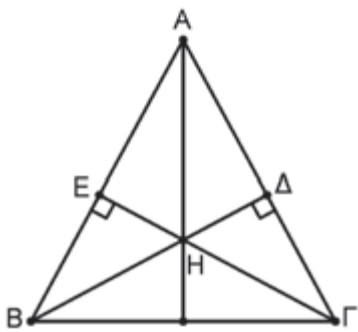
i. Το τετράπλευρο  $HZK\Theta$  είναι ρόμβος.

ii. Αν  $\hat{E}\Gamma A = 30^\circ$ , τότε  $ZK \perp K\Delta$ .

**Λύση**

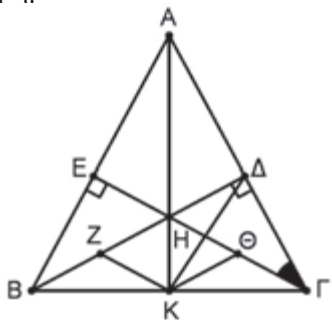
α. Το σημείο  $H$  είναι ορθόκентρο του τριγώνου  $AB\Gamma$  και σύμφωνα με την υπόθεση ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{A}$ . Άρα το  $H$  είναι σημείο και της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{A}$ .





Συνεπώς το τρίτο ύψος του τριγώνου από την κορυφή A είναι και διχοτόμος, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $AB=AC$ .

**β. i.** Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με κορυφή A, το ύψος από την κορυφή A του τριγώνου είναι και διάμεσός του. Το AK είναι μεσοκάθετος της πλευράς BG, οπότε  $HB=HG$ . Άρα  $HZ = HQ$  ως μισά ίσων τμημάτων.



Στο τρίγωνο BHΓ το ZK ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε  $ZK \parallel \frac{HG}{2} \Leftrightarrow ZK \parallel HΘ \Rightarrow$  το τετράπλευρο HZKΘ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον  $HZ = HQ$ . Άρα το τετράπλευρο HZKΘ είναι ρόμβος.

**ii.** Αν  $\hat{E}GA = 30^\circ$ , τότε είναι  $\hat{A} = 60^\circ$  <sup>AK διχοτόμος</sup>  $\Rightarrow \hat{\Delta}AH = 30^\circ \Leftrightarrow H\Delta = \frac{AH}{2}$ .

Αφού  $\hat{A} = 60^\circ$  και το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, θα είναι ισόπλευρο, οπότε το H πέρα από ορθόκεντρο είναι και κέντρο βάρους του τριγώνου. Άρα  $KH = \frac{1}{2}AH \Leftrightarrow KH = H\Delta$  και  $H\Delta = \frac{1}{2}HB = HZ$ .

Στο τρίγωνο KΔZ το KH είναι διάμεσος και επειδή  $KH = H\Delta = \frac{Z\Delta}{2}$  το τρίγωνο KZΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα το ZΔ, δηλαδή  $ZK \perp K\Delta$

**Θέμα 7ο**

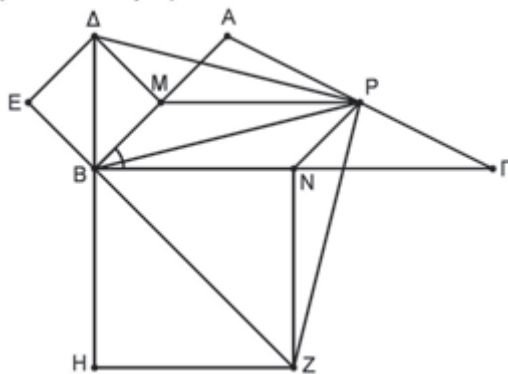
Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{B} = 45^\circ$  και τα μέσα M,N και P των πλευρών AB,BΓ και AΓ αντίστοιχα. Έξω από το τρίγωνο κατασκευάζουμε τα τετράγωνα BMΔE και BNZH.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα σημεία Δ,B,Z ανήκουν σε κύκλο που έχει κέντρο το σημείο P.
- ii. Αν το σημείο Λ είναι το μέσο του τμήματος ΔZ, τότε το τρίγωνο ΛPE είναι ισοσκελές.

**Λύση**

i. Αρκεί να δείξουμε ότι:  $P\Delta = PB = PZ$ .

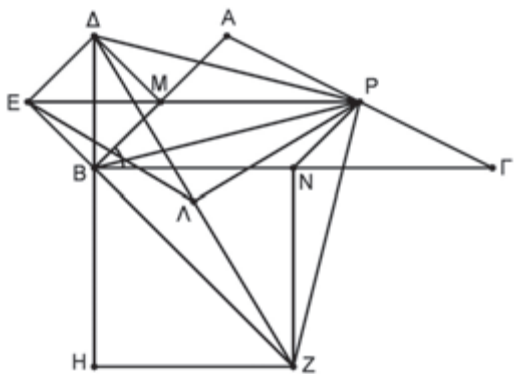


Το MP ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, οπότε είναι  $MP \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow$

$MP \parallel BN \Rightarrow$  το τετράπλευρο MPNB είναι παραλληλόγραμμο. Άρα  $\hat{A}MP = \hat{B} = 45^\circ$  και  $\hat{P}N\Gamma = \hat{B} = 45^\circ$  (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Έτσι έχουμε  $\hat{\Delta}MP = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ,  $\hat{B}MP = 135^\circ$  και  $\hat{P}N\Gamma = \hat{P}N\Gamma = 135^\circ$ .

Τα τρίγωνα MΔP και MBP είναι ίσα γιατί έχουν την MP κοινή πλευρά,  $\hat{\Delta}MP = \hat{B}MP = 135^\circ$  και  $M\Delta = MB$  ως πλευρές τετραγώνου (κριτήριο Π-Γ-Π). Άρα  $P\Delta = PB$ . Όμοια από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα NPZ, NPB είναι ίσα, οπότε  $PB = PZ$ . Έτσι έχουμε  $P\Delta = PB = PZ$ .

ii. Από την ισότητα των τριγώνων MΔP, MBP και NPZ, NPB από το ερώτημα i έχουμε  $\hat{\Delta}PM = \hat{MPB}$  και  $\hat{BPN} = \hat{PNZ}$ . Επίσης  $\hat{MPN} = \hat{B}$  ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου MPNB.  $\hat{\Delta}PZ = \hat{\Delta}PB + \hat{BPZ} = 2\hat{MPB} + 2\hat{BPN} = 2\hat{MPN} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Delta}PZ = 90^\circ$ .



Άρα το τρίγωνο ΡΔΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα το ΔΖ Άρα  $AP = \frac{\Delta Z}{2}$  (1). Ε-

πειδή  $\hat{E}BM + \hat{B} + \hat{Z}BN = 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ , τα σημεία E, B, Z είναι συνευθειακό. Έτσι το τρίγωνο EDZ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα το ΔΖ, οπότε  $LE = \frac{\Delta Z}{2}$  (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$AP = LE$ , δηλαδή το τρίγωνο LPE είναι ισοσκελές.

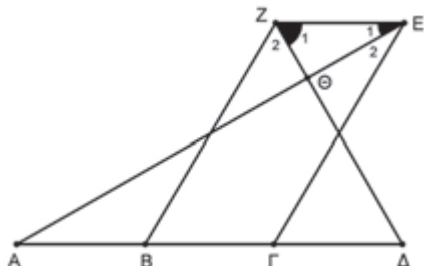
**Θέμα 8ο**

**Θεωρούμε τα συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ έτσι ώστε  $AB = BΓ = ΓΔ$ . Στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΑΔ φέρουμε  $BZ // ΓE$  με  $BZ = ΓE = 2BΓ$ . Έστω Θ το σημείο τομής των ΑE, ΖΔ. Να αποδείξετε ότι:**

- i.  $AE \perp \Delta Z$ .
- ii. Αν T είναι το σημείο τομής των ΑE, ΒZ, Κ το σημείο τομής των ΔT, ΓE και Λ το σημείο τομής των ΔT, ΖΓ, τότε είναι  $\Theta K = \frac{3}{4} \Delta \Lambda$ .

**Λύση**

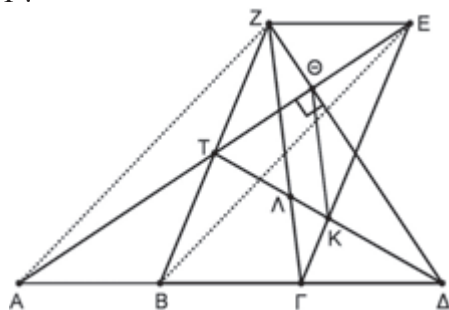
i. Αφού  $BZ // ΓE$  το τετράπλευρο BZEG είναι παραλληλόγραμμο.  $ΓE = 2BΓ \Leftrightarrow ΓE = ΓA$ .



Άρα το τρίγωνο ΓΕΑ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ, οπότε  $\hat{E}_2 = \hat{A}$ . Επίσης έχουμε  $\hat{E}_1 = \hat{A}$  ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖE, ΑΔ που τέμνονται από την ΑE.

Συνεπώς  $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow EA$  διχοτόμος της γωνίας  $\hat{Z}EΓ$ . Όμοια εργαζόμενοι έχουμε ότι και η ΖΔ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{E}ZB$ . Από το παραλληλόγραμμο BZEG έχουμε  $\hat{ΓE}Z + \hat{BZE} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E}_1 + 2\hat{Z}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{Z}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E}\Theta Z = 90^\circ \Leftrightarrow AE \perp \Delta Z$ .

ii. Έχουμε  $ZE // BΓ \Leftrightarrow ZE // AB \Rightarrow$  το ZEBΑ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το T είναι μέσο του ΒZ. Στο τρίγωνο TΒΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και ΓΚ // ΒT. Αυτό σημαίνει ότι το Κ είναι μέσο του ΔT.



Συνεπώς στο ορθογώνιο τρίγωνο ΘTΔ το ΘK είναι διάμεσος, οπότε  $\Theta K = \frac{\Delta T}{2}$ , οπότε  $\Delta T = 2\Theta K$ .

Το σημείο Λ είναι η τομή δύο διαμέσων του τριγώνου ΖBΔ, επομένως είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα  $\Delta \Lambda = \frac{2}{3} \Delta T \Leftrightarrow \Delta \Lambda = \frac{4}{3} \Theta K \Leftrightarrow \Theta K = \frac{3}{4} \Delta \Lambda$ .

**Θέμα 9ο**

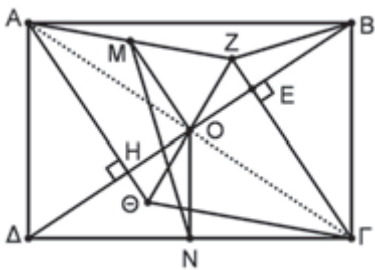
**Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το σημείο Γ φέρουμε  $ΓE \perp ΒΔ$ , όπου E σημείο του ΒΔ. Η προέκταση του ΓE τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}B\Delta$  στο σημείο Ζ. Έστω Μ είναι το μέσο του ΑΖ, Ο το μέσο του ΒΔ και Ν το μέσο του ΔΓ.**

**Να αποδείξετε ότι:**

- i. Το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ισοσκελές.
- ii.  $BZ \perp MN$ .
- iii. Αν η ΝΜ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Σ, η ΒΖ τέμνει την προέκταση του ΝΟ στο σημείο Λ και το ΝΜ στο σημείο T, τότε  $\Sigma \Lambda \perp BΝ$ .

**Λύση**

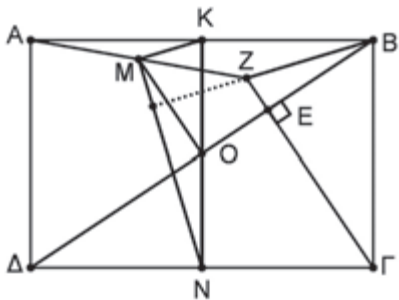
i. Φέρουμε ΑΗ  $\perp$  ΔΒ και η προέκταση του ΑΗ τέμνει την προέκταση του ΖΟ στο σημείο Θ.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΑΔ, ΕΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν  $AD = BG$  και  $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{G}$  ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ. Συνεπώς  $\Delta H = EB$  και αφού το Ο είναι μέσ του ΒΔ, θα έχουμε  $OH = OE$ . Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΟΘ και ΕΖΟ είναι ίσα, αφού έχουν  $OH = OE$  και  $\hat{H}\hat{O}\hat{\Theta} = \hat{E}\hat{O}\hat{Z}$  ως κατακορυφήν. Άρα  $O\Theta = OZ$ . Στο τρίγωνο ΖΑΘ το τμήμα ΟΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε  $OM = \frac{A\Theta}{2}$  (1). Στο τρίγωνο ΓΒΔ το ΟΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε  $ON = \frac{B\Gamma}{2}$  (2). Το τετράπλευρο ΑΖΓΘ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιές του ΑΓ, ΘΖ διχοτομούνται. Άρα  $\Theta A = \Gamma Z$  (3).

Θέτουμε  $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = 2\theta$  και έχουμε  $\hat{Z}\hat{B}\hat{G} = 90^\circ - \theta = \hat{\Gamma}\hat{Z}\hat{B} \Rightarrow$  το τρίγωνο ΓΒΖ είναι ισοσκελές με  $GB = \Gamma Z$  (4). Λόγω των (1),(2),(3), (4) προκύπτει  $OM = ON$ , δηλαδή το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ισοσκελές.

ii. Η προέκταση του ΝΟ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Κ. Προφανώς το τετράπλευρο ΒΓΝΚ είναι ορθογώνιο.

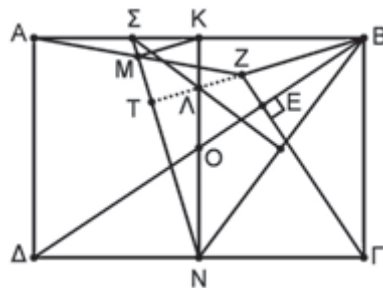


Το Κ είναι μέσο του ΑΒ και  $ON = OK$  από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΝΟΔ και ΚΟΒ. Επειδή  $MO = ON = \frac{KN}{2} \Leftrightarrow$

$\hat{K}\hat{M}\hat{N} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp MN$  (5). Στο τρίγωνο ΑΖΒ το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του οπότε

$KM // BZ$  (6). Από τις (5),(6) προκύπτει ότι  $BZ \perp MN$ .

iii. Από το ερώτημα ii έχουμε  $BT \perp NS$ . Επίσης είναι  $NK \perp AB$ .



Άρα στο τρίγωνο ΒΣΝ το σημείο Λ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το ΣΛ βρίσκεται πάνω στο τρίτο ύψος του τριγώνου ΒΣΝ. Συνεπώς  $SL \perp BN$ .

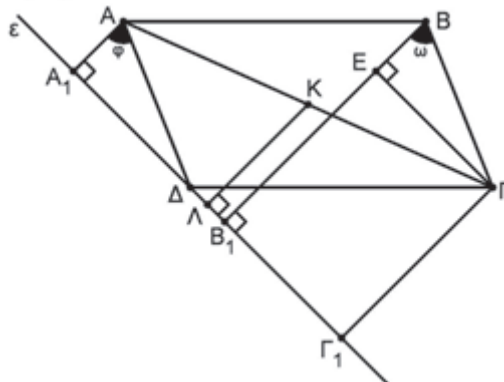
**Θέμα 10ο**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή Δ, δεν είναι παράλληλη στην ΑΓ και δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο. Έστω Κ το μέσο του ΑΓ και Α<sub>1</sub>, Β<sub>1</sub>, Γ<sub>1</sub>, Λ οι προβολές των Α, Β, Γ και Κ αντίστοιχα στην ε. Να αποδείξετε ότι:

- i.  $BB_1 = AA_1 + \Gamma\Gamma_1$ .
- ii. Το τρίγωνο ΚΒΒ<sub>1</sub> είναι ισοσκελές.

**Λύση**

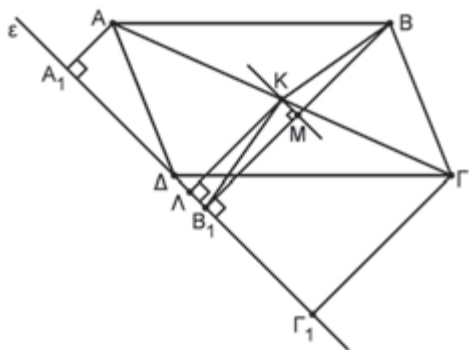
i. Φέρουμε  $\Gamma E \perp BB_1$ . Από στο τετράπλευρο ΑΒΒ<sub>1</sub>Α<sub>1</sub> έχουμε  $\hat{B}\hat{A}\hat{A}_1 + 180^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{B}_1 = 360^\circ \Leftrightarrow \phi + \hat{A} + 180 + \hat{B} - \omega = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \phi - \omega = 0 \Leftrightarrow \phi = \omega$  (Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι  $\omega = \phi$  ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες).



Τα ορθογώνια τρίγωνα

$AA_1, EB_1$  είναι ίσα αφού έχουν  $AD = B_1E$  ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και  $\varphi = \omega$ . Άρα  $AA_1 = BE$ . Το τετράπλευρο  $E\Gamma_1B_1$  είναι ορθογώνιο, οπότε  $EB_1 = \Gamma\Gamma_1$ . Έτσι έχουμε  $BB_1 = BE + EB_1 \Leftrightarrow BB_1 = AA_1 + \Gamma\Gamma_1$ .

ii. Το  $KL$  είναι διάμεσος του τραπέζιου  $AA_1\Gamma_1\Gamma$ , οπότε  $KL = \frac{AA_1 + \Gamma\Gamma_1}{2} \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} KL = \frac{BB_1}{2}$ .



Φέρουμε  $KM \perp BB_1$ . Το τετράπλευρο  $KMB_1\Lambda$  είναι ορθογώνιο. Άρα  $MB_1 = KL = \frac{BB_1}{2}$ , δηλαδή το  $M$  είναι μέσον του  $BB_1$ . Άρα το  $KM$  βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του  $BB_1$ . Συνεπώς  $KB = KB_1$ , που σημαίνει ότι το τρίγωνο  $KBB_1$  είναι ισοσκελές.

### Θέμα 11ο

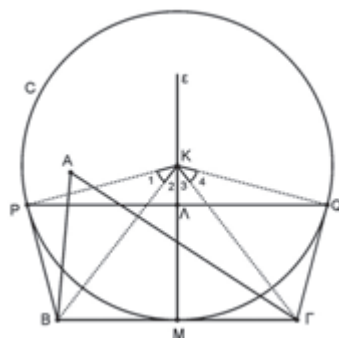
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η μεσοκάθετος  $\epsilon$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Θεωρούμε κύκλο  $C$  με κέντρο  $K$  ένα σημείο της μεσοκάθετου  $\epsilon$  και ακτίνα  $\rho = (KM)$ . Από τις κορυφές  $B, \Gamma$  του τριγώνου φέρουμε στον κύκλο  $C$  τα εφαπτόμενα τμήματα  $BP, \Gamma Q$  με τα σημεία  $P, K, Q$  να μην είναι συνευθειακά.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο  $PQ\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- ii. Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου  $PQ\Gamma B$  τέμνονται πάνω στη μεσοκάθετο ευθεία  $\epsilon$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

### Λύση

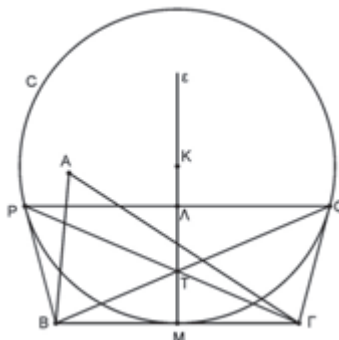
i. Ο κύκλος  $C$  εφάπτεται στη  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Έστω  $\Lambda$  το σημείο τομής των τμημάτων  $KM, PQ$ . Η ευθεία  $BK$  είναι διακεντρική ευθεία του σημείου  $B$ , οπότε διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{PKM}$  δηλαδή  $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ .



Όμοια η ευθεία  $\Gamma K$  είναι διακεντρική του σημείου  $\Gamma$ , οπότε  $\widehat{K}_3 = \widehat{K}_4$ . Όμως το τρίγωνο  $KB\Gamma$  είναι ισοσκελές με κορυφή  $K$  αφού το  $K$  είναι σημείο της μεσοκάθετου της πλευράς  $B\Gamma$ . Έτσι η  $KM$  είναι διχοτόμος του τριγώνου  $KB\Gamma$ , οπότε  $\widehat{K}_2 = \widehat{K}_3$ . Συνεπώς  $\widehat{PK\Lambda} = 2\widehat{K}_2 = 2\widehat{K}_3 = \widehat{QK\Lambda}$ . Άρα το  $KL$

είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{PKQ}$  και αφού  $KP = KQ$  το τρίγωνο  $KPQ$  είναι ισοσκελές με κορυφή  $K$ . Συνεπώς  $KL \perp PQ$ . Επομένως τα τμήματα  $PQ, B\Gamma$  είναι κάθετα στο  $KM$ , οπότε  $PQ \parallel B\Gamma$ . Επίσης τα τμήματα  $BP, \Gamma Q$  δεν είναι παράλληλα. Άρα το τετράπλευρο  $PQ\Gamma B$  είναι τραπέζιο. Έχουμε  $BP = BM$  και  $\Gamma Q = \Gamma M$  ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου  $C$  που άγονται από τις κορυφές  $B, \Gamma$  και αφού  $BM = \Gamma M$  είναι  $BP = \Gamma Q$ . Επομένως το τετράπλευρο  $PQ\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ii. Αφού το τετράπλευρο  $PQ\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε  $P\Gamma = QB$ . Έστω  $T$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $P\Gamma, QB$  του τραπέζιου  $PQ\Gamma B$ . Τα τρίγωνα  $B\Gamma T, Q\Gamma T$  έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.



Από την ισότητα των τριγώνων αυτών είναι  $\widehat{P\Gamma B} = \widehat{Q\Gamma T}$ , οπότε το τρίγωνο  $T\Gamma B$  είναι ισοσκελές με  $TB = T\Gamma$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $T$  είναι σημείο της μεσοκάθετου ευθείας  $\epsilon$  του  $B\Gamma$ .

# Τάξη: Β'

## Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση

Τσακιρτζής Στυλιανός

### Άσκηση 1

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln x \cdot \ln y = 6 \end{cases}$$

### Λύση

Πρέπει και αρκεί  $x > 0$  και  $y > 0$ .

Οι αριθμοί  $\ln x$  και  $\ln y$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:  $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$  (1)

Άρα  $\omega_1 = 3$  ή  $\omega_2 = 2$ .

Για  $\omega = 3$  έχουμε  $\ln x = 3$  οπότε  $x = e^3$  και  $\ln y = 2$  οπότε  $y = e^2$

Για  $\omega = 2$  έχουμε  $\ln x = 2$  οπότε  $x = e^2$  και  $\ln y = 3$  οπότε  $y = e^3$

Δηλαδή οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$(x, y) = \{(e^3, e^2), (e^2, e^3)\}.$$

### Άσκηση 2

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases}$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ \log 5^x + \log 2^y = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ \log(5^x \cdot 2^y) = \log 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ 5^x \cdot 2^y = 20 \end{cases}$$

Θέτουμε:  $5^x = \alpha > 0$  και  $2^y = \beta > 0$  και λύνουμε το

σύστημα:  $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = 20 \end{cases}$  από το οποίο προκύπτει:

$\beta = 4$  και  $\alpha = 6$

Η λύση  $\beta = -5$  απορρίπτεται, αφού πρέπει  $\beta > 0$ .

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} 5^x = 6 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

### Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση:  $x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1 + \log x^2}$ .

### Λύση

Πρέπει και αρκεί  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  έχουμε:

$$x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1 + \log x^2} \Leftrightarrow \log x^{\frac{\log x + 8}{3}} = \log 10^{1 + \log x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log x + 8}{3} \cdot \log x = (1 + \log x^2) \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x + 8 \log x = 3 \log 10 (1 + 2 \log x) \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x + 8 \log x = 3 + 6 \log x \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x + 2 \log x - 3 = 0,$$

θέτουμε  $y = \log x$  και λύνουμε την:

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Άρα  $y_1 = 1$  ή  $y_2 = -3$ .

Οπότε:  $\log x = 1$  ή  $\log x = -3$

Συνεπώς:  $x = 10$  ή  $x = 10^{-3}$

### Άσκηση 4

Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{1 + \log x}{3 - \log x} \geq 1$

### Λύση

Πρέπει και αρκεί  $x > 0$  και  $3 - \log x \neq 0$ , δηλαδή  $x > 0$  και  $x \neq 1000$

Για κάθε  $x \in (0, 1000) \cup (1000, +\infty)$ , έχουμε:

$$\frac{1 + \log x}{3 - \log x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \log x}{3 - \log x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \log x - (3 - \log x)}{3 - \log x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \log x - 2}{3 - \log x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 \cdot \log x - 2) \cdot (3 - \log x) \geq 0$$

Θέτουμε  $\log x = \omega$  και λύνουμε την ανίσωση

$(2\omega - 2) \cdot (3 - \omega) \geq 0$  με  $\omega \neq 3$  που έχει λύσεις  $1 \leq \omega < 3$ .

Έτσι έχουμε:

$$1 \leq \log x < 3 \Leftrightarrow \log 10 \leq \log x < \log 1000 \Leftrightarrow$$

$$10 \leq x < 1000$$

ή σε μορφή διαστήματος:  $x \in [10, 1000)$ .



### Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση:  $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$ .

#### Λύση

$$3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot (2^2)^x - 5 \cdot (2 \cdot 3)^x + 2 \cdot (3^2)^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \quad :3^{2x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0.$$

Θέτουμε  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega > 0$  και λύνουμε την εξίσωση:

$$3 \cdot \omega^2 - 5 \cdot \omega + 2 = 0. \text{ Άρα } \omega = 1 \text{ ή } \omega = \frac{2}{3}.$$

Αν  $\omega = 1$  τότε  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$  δηλαδή  $x = 0$

Αν  $\omega = \frac{2}{3}$  τότε  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$  δηλαδή  $x = 1$

### Άσκηση 6

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$\log(4^x + 2) = x \cdot \log 2 + \log(2^x + 1) + \log 3.$$

#### Λύση

Πρέπει και αρκεί:  $4^x + 2 > 0$  και  $2^x + 1 > 0$  που ισχύουν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε έχουμε:

$$\log(4^x + 2) = x \cdot \log 2 + \log(2^x + 1) + \log 3 \Leftrightarrow$$

$$\log(4^x + 2) = \log 2^x + \log(2^x + 1) + \log 3 \Leftrightarrow$$

$$\log(4^x + 2) = \log[3 \cdot 2^x \cdot (2^x + 1)] \Leftrightarrow$$

$$4^x + 2 = 3 \cdot 2^x \cdot (2^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^2 + 2 = 3 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Θέτουμε  $2^x = \omega > 0$  και λύνουμε την εξίσωση:

$$2 \cdot \omega^2 + 3 \cdot \omega - 2 = 0. \text{ Άρα } \omega = \frac{1}{2} \text{ ή } \omega_2 = -2 < 0$$

(που απορρίπτεται)

Για  $\omega_1 = \frac{1}{2}$  έχουμε:  $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

### Άσκηση 7

Να λυθεί η εξίσωση:  $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} - 8 = 0$ .

#### Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} - 8 = 0 \text{ και αν θέσουμε } \omega = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$$

με  $\omega > 0$ , τότε  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \omega^2$  και η αρχική εξίσωση

ανάγεται στην εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\omega^2 - 7 \cdot \omega - 8 = 0. \text{ Άρα } \omega = 8 \text{ ή } \omega = -1 < 0$$

Για  $\omega = 8$ , έχουμε  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} = 8 \Leftrightarrow (2^{-2})^{\frac{x}{2}} = 8 \Leftrightarrow$

$$2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3.$$

### Άσκηση 8

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 4 \cdot e^x + 3) \text{ και}$$

$$g(x) = \ln(e^x - 3) + \ln 2$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους

ii) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = g(x)$ .

#### Λύση

i) Για την  $f$  έχουμε:

Πρέπει και αρκεί:  $e^{2x} - 4 \cdot e^x + 3 > 0$ . Θέτουμε  $y = e^x$  και λύνουμε την:  $y^2 - 4 \cdot y + 3 > 0$ . Όμως  $y^2 - 4 \cdot y + 3 > 0 \Leftrightarrow (y-1) \cdot (y-3) > 0 \Leftrightarrow y < 1$  ή  $y > 3$

- $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$  ή

- $e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 3} \Leftrightarrow x > \ln 3$ .

Άρα  $A_f = (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$ .

Για την  $g$  έχουμε:

Πρέπει και αρκεί:  $e^x - 3 > 0$ . Όμως

$$e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 3} \Leftrightarrow x > \ln 3.$$

Άρα  $A_g = (\ln 3, +\infty)$

ii) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης  $f(x) = g(x)$

είναι  $A_f \cap A_g = (\ln 3, +\infty)$ . Οπότε για κάθε

$x \in (\ln 3, +\infty)$  έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} - 4 \cdot e^x + 3) = \ln(e^x - 3) + \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} - 4 \cdot e^x + 3) = \ln[2 \cdot (e^x - 3)] \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 4 \cdot e^x + 3 = 2 \cdot (e^x - 3) \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 6 \cdot e^x + 9 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln 3.$$

Η λύση  $x = \ln 3$  απορρίπτεται αφού με βάση τους περιορισμούς πρέπει  $x \in (\ln 3, +\infty)$ .

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.

**Άσκηση 9**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(2\eta\mu x - 1) + \ln(2\eta\mu x + 1)$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$

ii) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = \ln(2\sigma\upsilon\nu^2 x)$

**Λύση**

i) Για να ορίζεται η  $f$  πρέπει και αρκεί:

$$2 \cdot \eta\mu x - 1 > 0 \text{ και } 2 \cdot \eta\mu x + 1 > 0 \text{ δηλαδή } \eta\mu x > \frac{1}{2}$$

στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , άρα  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ .

ii) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης

$$f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x) \text{ είναι το: } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Οπότε για κάθε  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$  έχουμε:

$$\ln[(2 \cdot \eta\mu x - 1) \cdot (2 \cdot \eta\mu x + 1)] = \ln(2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \stackrel{\ln x: 1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$(2 \cdot \eta\mu x - 1) \cdot (2 \cdot \eta\mu x + 1) = (2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \eta\mu^2 x - 1 = 2 \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \eta\mu^2 x - 1 = 2 - 2 \cdot \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot \eta\mu^2 x = 3 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η λύση  $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$  (απορρίπτεται) οπότε

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ στο σύνολο } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

η οποία έχει λύσεις:  $x = \frac{\pi}{4}$  ή  $x = \frac{3\pi}{4}$

**Άσκηση 10**

Να λυθεί η εξίσωση:  $\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3$

**Λύση**

Για το σύνολο ορισμού της εξίσωσης, πρέπει και αρκεί  $17x^2 - 6x + 8 > 0$  και  $0 < x + 2 \neq 1$ . Όμως  $17x^2 - 6x + 8 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ  $0 < x + 2 \neq 1$  σημαίνει  $x > -2$  και  $x \neq -1$ .

Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι:

$$(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Για κάθε  $x \in (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$  έχουμε:

$$\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^3 = 17x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 17x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 11x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (x^2 - 11x + 18) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 9.$$

Όλες οι λύσεις ανήκουν στο σύνολο  $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$  συνεπώς το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι:  $\{0, 2, 9\}$

**Άσκηση 11**

Να λυθεί στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  η εξίσωση:

$$4^{\eta\mu^2 x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 5$$

**Λύση**

$$4^{\eta\mu^2 x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 5 \Leftrightarrow 4^{\eta\mu^2 x} + 4^{1-\eta\mu^2 x} = 5 \Leftrightarrow$$

$$4^{\eta\mu^2 x} + \frac{4}{4^{\eta\mu^2 x}} = 5 \quad (1). \text{ Θέτουμε: } y = 4^{\eta\mu^2 x}. \text{ Όμως}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \eta\mu^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 4^0 \leq 4^{\eta\mu^2 x} \leq 4 \Leftrightarrow$

$1 \leq y \leq 4$ . Οπότε λύνουμε την εξίσωση  $y + \frac{4}{y} = 5$

δηλαδή την  $y^2 - 5y + 4 = 0$ . Άρα  $y = 1$  ή  $y = 4$  οι οποίες είναι δεκτές.

Για  $y = 1$  έχουμε:

$$4^{\eta\mu^2 x} = 1 \Leftrightarrow 4^{\eta\mu^2 x} = 4^0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0.$$

Στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  είναι:  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ .

Για  $y = 4$  έχουμε:

$$4^{\eta\mu^2 x} = 4 \Leftrightarrow 4^{\eta\mu^2 x} = 4^1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm 1.$$

Στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  είναι:

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$$

Τελικά το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι:

$$\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}.$$

**Άσκηση 12**

i) Να βρεθεί το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2 \cdot \ln(\sqrt{2x}) \text{ και } g(x) = \ln(1-x).$$

ii) Να βρεθούν τα διαστήματα του  $x$ , στα οποία η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση  $C_g$  της  $g$ .

**Λύση**

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = 2 \cdot \ln(\sqrt{2 \cdot x})$  είναι  $A_f = (0, +\infty)$  αφού πρέπει και αρκεί  $\sqrt{2 \cdot x} > 0$  δηλαδή  $x > 0$ .

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln(1-x)$  είναι  $A_g = (-\infty, 1)$  αφού πρέπει και αρκεί  $1-x > 0$  δηλαδή  $x < 1$ .

Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = g(x)$  με σύνολο ορισμού το σύνολο:  $A_f \cap A_g = (0, 1)$ .

Για κάθε  $x \in (0, 1)$ , έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(\sqrt{2 \cdot x}) = \ln(1-x) \Leftrightarrow 2 \cdot \ln\left((2 \cdot x)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(2 \cdot x) = \ln(1-x) \Leftrightarrow 2 \cdot x = 1-x \Leftrightarrow 3 \cdot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Η λύση που βρήκαμε  $x = \frac{1}{3} \in (0, 1)$ , άρα είναι δεκτή.

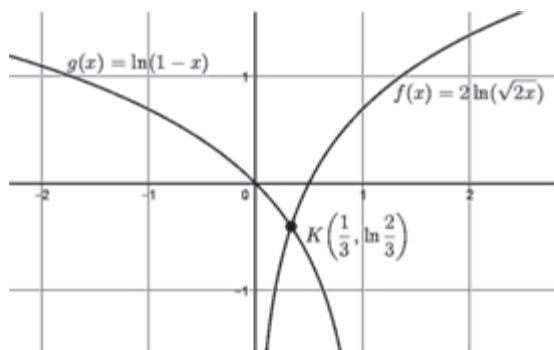
Για  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ , δηλαδή θα είναι το σημείο  $K\left(\frac{1}{3}, \ln\frac{2}{3}\right)$ .

Όλα τα παραπάνω, πεδία ορισμού των συναρτήσεων καθώς και το μοναδικό σημείο τομής τους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

ii) Για κάθε  $x \in (0, 1)$ , έχουμε:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(\sqrt{2 \cdot x}) > \ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(2x) > \ln(1-x) \Leftrightarrow 2x > 1-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Άρα για  $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$  η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $C_g$ .



**Άσκηση 13**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log|\log(x-2)|$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.  
β) Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τον άξονα  $x'$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

δ) Βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $x$ , για τις οποίες  $f(x) < 0$ .

**Λύση**

α) Πρέπει και αρκεί  $x-2 > 0$  και  $\log(x-2) > 0$  δηλαδή  $x > 2$  και  $x-2 > 1$  που σημαίνει  $x > 3$ . Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$A_f = (3, +\infty).$$

β) Για κάθε  $x \in (3, +\infty)$ , έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log|\log(x-2)| = 0 \Leftrightarrow |\log(x-2)| = 1 \Leftrightarrow \log(x-2) = 1 \text{ ή } \log(x-2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$x-2 = 10 \text{ ή } x-2 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 12 \text{ ή } x = \frac{21}{10}$$

Η λύση  $x = \frac{21}{10} \notin (3, +\infty)$  οπότε απορρίπτεται, άρα τελικά η  $C_f$  τέμνει τον  $x'$  σε ένα μόνο σημείο το  $A(12, 0)$ .

γ) Για κάθε  $x \in (3, +\infty)$ , έχουμε:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \log|\log(x-2)| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|\log(x-2)| = 100 \Leftrightarrow$$

$$\log(x-2) = 100 \text{ ή } \log(x-2) = -100 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{10^{100}} + 2 < 3 \text{ ή } x = 10^{100} + 2 > 3.$$

Άρα λύση το  $x = 10^{100} + 2$ .

$$\delta) f(x) < 0 \Leftrightarrow \log|\log(x-2)| < 0 \Leftrightarrow |\log(x-2)| < 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 < \log(x-2) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x-2 < 10 \Leftrightarrow \frac{21}{10} < x < 12$$

Αφού έχουμε  $x > 3$ , τελικά προκύπτει ότι

$$3 < x < 12.$$

Άρα οι ακέραιες τιμές που παίρνει το  $x$  είναι οι:

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

# Τάξη: Β'

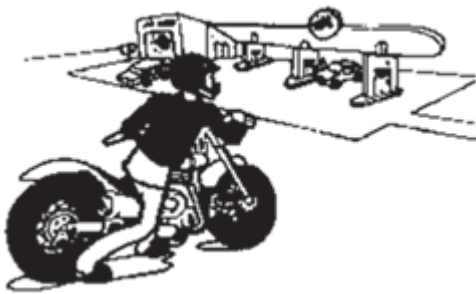
## Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Χρήστος Π. Τσιφάκης

### Άσκηση 1

Μία μοτοσυκλέτα ξεμένει από βενζίνη 1Km μακριά από ένα βενζινάδικο. Ο οδηγός αναγκάζεται να την σπρώξει, ώστε να φτάσει μέχρι την αντλία βενζίνης η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του βενζινάδικου 50m μακριά από τον δρόμο. Αν η διάμετρος της ρόδας της μηχανής είναι 78 cm, πόσες στροφές θα κάνει η ρόδα της μηχανής μέχρι να φτάσει στην αντλία;

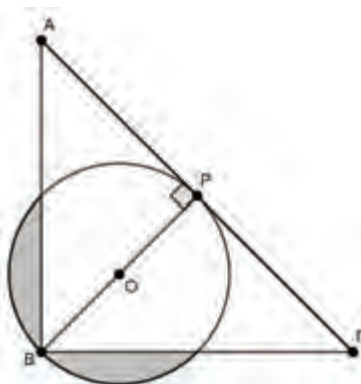
#### Λύση



Η απόσταση μέχρι την αντλία είναι 1050 m. Η περίμετρος  $L$  της ρόδας είναι  $L = 2 \cdot \pi \cdot \rho = 2 \cdot \pi \cdot 0,39 = 0,78 \cdot \pi$  m. Άρα η ρόδα θα κάνει  $\frac{1050 \text{ m}}{0,78 \cdot \pi \text{ m}} = \frac{1346,15}{\pi} \approx 429$  στροφές.

### Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με  $\hat{B} = 90^\circ$ . Με διάμετρο το ύψος BP φέρνουμε κύκλο.

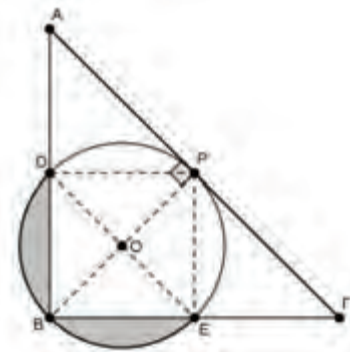


Εάν η υποτείνουσα  $AG = 8$  m να βρείτε συναρτήσει του  $\pi$  το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου.

### Λύση

Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ύψος BP είναι και διάμεσος, άρα

$$BP = \frac{AG}{2} = 4.$$



Έστω ότι ο κύκλος διαμέτρου BP τέμνει τις AB, BΓ στα σημεία D, E αντίστοιχα. Φέρνουμε τις χορδές DP και PE οπότε το τετράπλευρο BDPE είναι τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι το γραμμοσκιασμένο τμήμα ισούται με το μισό του εμβαδού που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον κύκλο το τετράγωνο.

$$\text{Άρα } E = \frac{\pi \cdot 2^2 - (BDPE)}{2} = \frac{4\pi - 8}{2} = 2\pi - 4.$$

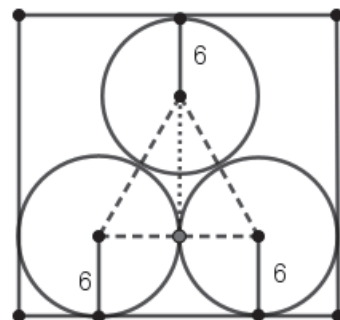
Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους εύρεσης του εμβαδού;

### Άσκηση 3

Τρία σιντριβάνια που πετούν νερό σε κύκλο ακτίνας 6, τοποθετούνται έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και τα τρία μαζί είναι εγγεγραμμένα σε μία πλατεία σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου που σχηματίζουν τα κέντρα των σιντριβανιών και
- Το εμβαδόν της περιοχής της πλατείας που δεν ποτίζεται.

#### Λύση



α) Το τρίγωνο που σχηματίζουν τα κέντρα των κύκλων είναι ισόπλευρο πλευράς  $\alpha = 6 + 6 = 12 \text{ m}$ .

Το ύψος του είναι  $υ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ m}$ .

β) Το μήκος του παραλληλογράμμου της πλατείας είναι 24 m και το πλάτος του  $\pi = 6 + 6 + 6\sqrt{6} = 6(2 + \sqrt{6}) \text{ m}$ .

Άρα η περιοχή της πλατείας που δεν ποτίζεται είναι

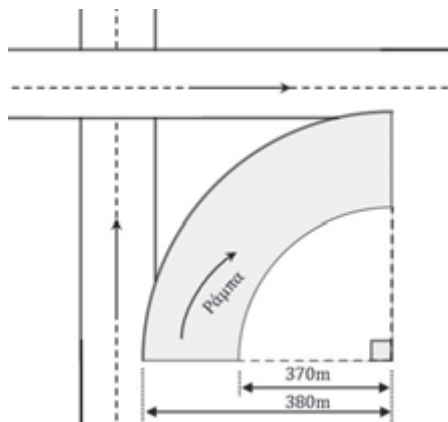
$$E = 24 \cdot 6(2 + \sqrt{6}) - 3 \cdot 36\pi = 36[4(2 + \sqrt{6}) - 3\pi] \text{ m}^2$$

**Άσκηση 4**

Στην Εθνική οδό Θεσσαλονίκης - Αθήνας στο ύψος της Εγνατίας ερχόμενοι από Βέροια, οι μηχανικοί της περιφέρειας, πρέπει να κατασκευάσουν μία ράμπα σχήματος τεταρτοκυκλίου, που να συνδέει την έξοδο της Εγνατίας και την είσοδο στην Εθνική προς Αθήνα. Εάν ο εσωτερικός κύκλος έχει ακτίνα  $\rho_1 = 370 \text{ m}$  και ο εξωτερικός  $\rho_2 = 380 \text{ m}$  τότε:

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδό της ράμπας
- β) Αν μπουν κιγκλιδώματα προστασίας στη ράμπα με κόστος 5 ευρώ το μέτρο, να βρεθεί το μήκος των κιγκλιδωμάτων προστασίας και το κόστος τους.

**Λύση**



α) Το εμβαδόν της ράμπας είναι η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο τεταρτοκύκλια, άρα

$$E = \frac{\pi \cdot \rho_2^2}{4} - \frac{\pi \cdot \rho_1^2}{4} = \frac{\pi}{4}(380^2 - 370^2) = \frac{\pi}{4} \cdot 10 \cdot (380 + 370) = \frac{10\pi}{4} \cdot 750 = 1875\pi \text{ m}^2.$$

β) Τα κιγκλιδώματα προστασίας έχουν μήκος

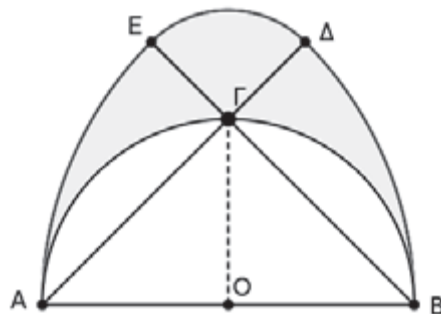
$$L = \frac{\pi\rho_2}{2} + \frac{\pi\rho_1}{2} = \frac{\pi}{2}(370 + 380) = 375\pi \text{ m}.$$

Το συνολικό κόστος θα είναι  $K = 375 \cdot 5\pi = 1875\pi$  ευρώ.

**Άσκηση 5**

Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και ακτίνας  $\rho = 1 \text{ m}$ . Με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AB$  φέρνουμε τόξο που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ , όμοια με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $BA$  φέρνουμε τόξο που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να υπολογίσετε το εμβαδό της περιοχής  $AE\Delta B\Gamma$  (γραμμοσκιασμένη περιοχή εξωτερικά του ημικυκλίου).

**Λύση**



Η περιοχή  $AE\Delta B\Gamma$  αποτελείται από δύο ίσα κυκλικά τμήματα  $45^\circ$  ακτίνας  $\rho = AB = 2$  και ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας  $\Gamma E = BE - B\Gamma = 2 - \sqrt{2}$ .

Το κυκλικό τμήμα κέντρου  $A$  και ακτίνας  $AB$  έχει εμβαδό  $E_1 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^2$ .

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι  $E_T = \frac{\pi \cdot (2 - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi(6 - 2\sqrt{2})}{4} = \frac{\pi(3 - \sqrt{2})}{2}$ . Άρα

$$(AE\Delta B\Gamma) = 2E_1 - \frac{\pi\rho^2}{2} + E_T = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(3 - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}(2 - \sqrt{2}) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \text{ m}^2$$

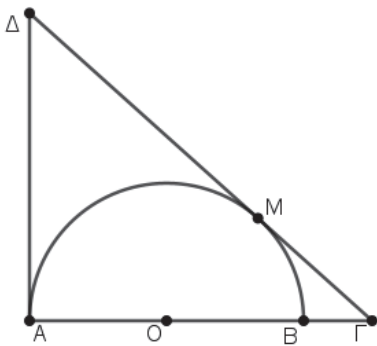
**Άσκηση 6**

Δίνεται ημικύκλιο  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  και παίρνουμε τμήμα  $B\Gamma = \frac{R}{2}$ . Φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  του ημικυκλίου.

Να υπολογίσετε συναρτήσεις του  $R$

- α) Το μήκος του  $M\Gamma$
- β) Το μήκος του  $\Gamma\Delta$
- γ) Το εμβαδόν της περιοχής  $A\Delta\Gamma B M A$  εκτός ημικυκλίου.

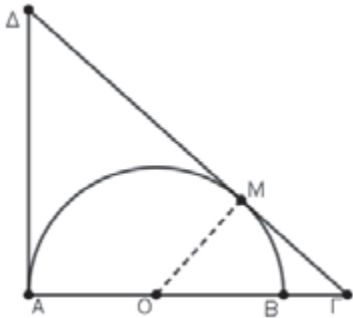




**Λύση**

α) Φέρνουμε την  $OM \perp \Gamma\Delta$ , οπότε από Π.Θ.

$$\text{έχουμε } M\Gamma = \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 - R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$



β) Αν  $M\Delta = x$  τότε και  $A\Delta = x$  οπότε από Π.Θ. έχουμε:  $\Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$$\left(x + \frac{R\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{5R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{5}$$

$$\text{Άρα } \Gamma\Delta = \frac{R\sqrt{5}}{2} + R\sqrt{5} = \frac{3R\sqrt{5}}{2}.$$

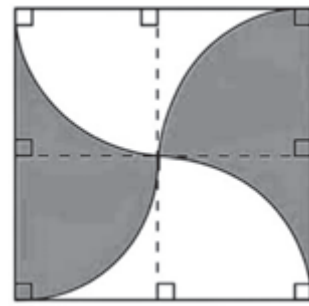
$$\begin{aligned} \gamma) (A\Delta\Gamma BMA) &= (A\Delta\Gamma) - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R\sqrt{5} \cdot \frac{5R}{2}}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \\ &= \frac{5\sqrt{5}R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(5\sqrt{5} - 2\pi). \end{aligned}$$

**Άσκηση 7**

Τετράγωνο οικόπεδο πλευράς 24 m χωρίζεται σε 4 ίσα μέρη. Στην κίτρινη περιοχή φυτεύουμε σιτάρι και το υπόλοιπο στρώνετε με τετράγωνες πλάκες πλευράς 10 cm η μία.

α) Να βρείτε τον λόγο των δύο περιοχών

β) Εάν το κόστος των πλακών είναι 10 ευρώ / 1 m<sup>2</sup> να βρείτε το συνολικό κόστος του πλακόστρωτου και πόσες πλάκες θα χρειαστούν.



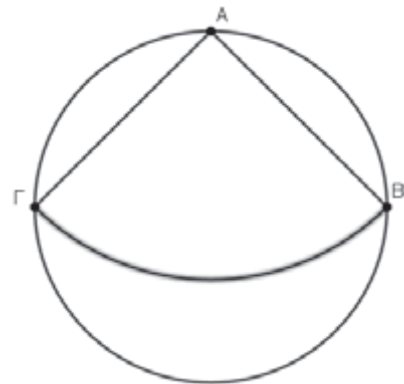
**Λύση:**

α) Παρατηρούμε ότι οι δύο περιοχές είναι ισοδύναμες (αποτελούν το μισό τετράγωνο) με  $\frac{24^2}{2} = 288 \text{ m}^2$ , άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με 1.

β) Το  $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$ , άρα χρειάζονται 100 πλάκες για το  $1 \text{ m}^2$  δηλαδή 2880 ευρώ και 28800 πλάκες.

**Άσκηση 8**

Τέσσερις φίλοι πηγαίνουν σε μια πιτσαρία και μοιράζονται μία κυκλική πίτσα ακτίνας 20 cm σε ίσα κομμάτια. Ο σερβιτόρος φέρνει το κάθε κομμάτι της πίτσας σε κυκλικό πιάτο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να βρείτε το λόγο των εμβαδών  $\frac{(\text{πίτσα})}{(\text{πιάτο})}$

**Λύση:**

Η πίτσα μοιράζεται ισόποσα στους 4 φίλους, άρα ο καθένας θα πάρει το  $\frac{1}{4}$ , δηλαδή το κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο με ακτίνα 20 cm και θα έχει εμβαδό  $\frac{\pi R^2}{4} = 100\pi \text{ cm}^2$ .

Αφού η γωνία  $A = 90^\circ$ , η ΒΓ είναι διάμετρος του κυκλικού πιάτου, άρα θα έχει μήκος

$B\Gamma = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{2 \cdot 400} = 20\sqrt{2}$  cm και  
 ακτίνα  $R = 10\sqrt{2}$  cm. Έτσι το εμβαδόν του  
 πιάτου είναι  $E = \pi R^2 = \pi(10\sqrt{2})^2 = 200\pi$  cm<sup>2</sup>.

Άρα ο λόγος των εμβαδών είναι:

$$\frac{(\text{πίτσα})}{(\text{πιάτο})} = \frac{100\pi}{200\pi} = \frac{1}{2}.$$

**Άσκηση 9**

Τρεις κύκλοι  $(O_1, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$  και  $(O_3, R_3)$ ,  
 εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία A, B  
 και C.

Αν  $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$  και  $R_3 = 2 - \sqrt{2}$ :

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$  είναι  
 ορθογώνιο.

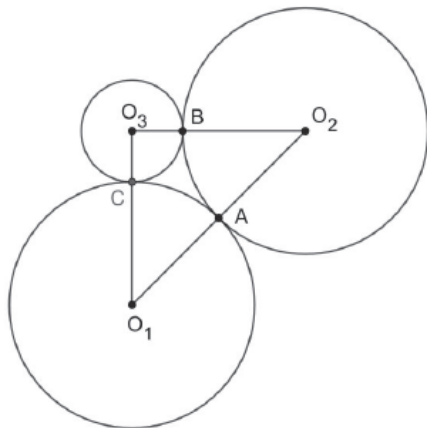
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό  
 του καμπυλόγραμμου τριγώνου ABC.

**Λύση**

α) Οι πλευρές του τριγώνου  $O_1O_2O_3$  είναι

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2},$$

$$O_1O_3 = O_2O_3 = R_1 + R_3 = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 2$$



$$(O_1O_3)^2 + (O_2O_3)^2 = 4 + 4 = 8 = (O_1O_2)^2.$$

Άρα το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$  είναι ορθογώνιο και  
 ισοσκελές με  $\hat{O}_3 = 90^\circ$ .

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου  
 βρίσκεται αν από το εμβαδόν του ορθογωνίου  
 τριγώνου αφαιρέσουμε τους δύο ίσους  
 κυκλικούς τομείς των  $45^\circ$  με ακτίνα  
 $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$  και έναν κυκλικό τομέα των  $90^\circ$  με  
 ακτίνα  $R_3 = 2 - \sqrt{2}$  και η περιμέτρος του  
 αντίστοιχα από τα μήκη των αντίστοιχων  
 τόξων.

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Περ} &= \ell_{\widehat{AC}} + \ell_{\widehat{AB}} + \ell_{\widehat{BC}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 45^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi(2 - \sqrt{2})}{2} = \\ &= \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi(2 - \sqrt{2})}{2} = \pi \text{ και το εμβαδόν} \end{aligned}$$

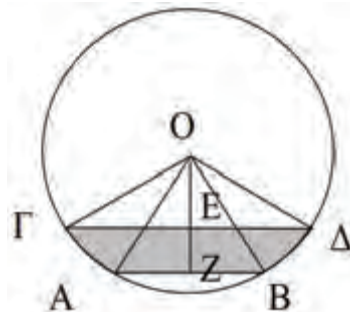
$$E = \frac{(O_1O_3) \cdot (O_1O_2)}{2} - \left( \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} + \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{2} - \left( \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} + \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^2}{4} \right) = 2 - \pi(2 - \sqrt{2})$$

**Άσκηση 10**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και δύο χορδές του  
 $AB / \Gamma\Delta$  στο ίδιο ελάχιστον τόξο με  $AB = \lambda_6$  και  
 $\Gamma\Delta = \lambda_3$ .

Να βρεθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου  
 τραπεζίου  $AB\Delta\Gamma$ .



**Λύση**

Έχουμε ότι:

$$\hat{\Gamma O \Delta} = 120^\circ, \hat{A O B} = 60^\circ, \text{όπότε}$$

$$\hat{\Gamma O A} = \hat{B O \Delta} = 30^\circ, AB = \lambda_6 = R, \Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$$

$$\text{και } OE = \alpha_3 = \frac{R}{2}, OZ = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου  
 προκύπτει αν από το κυκλικό τμήμα  $\Gamma\Delta$   
 αφαιρέσουμε το κυκλικό τμήμα  $AB$ , δηλαδή

$$E = \left( \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \left( \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) =$$

$$= \left( \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \left( \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) =$$

$$= R^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{R^2 \pi}{6}$$

# Τάξη: Β'

## Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

### Άσκηση 1

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$  και

$$C_2 : (x-6)^2 + (y-6)^2 = 36.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται.

β) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτεται στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στους κύκλους  $C_1$  και  $C_2$  και στον άξονα  $x'x$ .

### Λύση

α) Ο κύκλος  $C_1$  έχει κέντρο  $K_1(2,2)$  και ακτίνα  $\rho_1 = \sqrt{4} = 2$  ενώ ο κύκλος  $C_2$  έχει κέντρο  $K_2(6,6)$  και ακτίνα  $\rho_2 = \sqrt{36} = 6$ . Είναι

$$\delta = (K_1K_2) = \sqrt{(6-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

και  $\rho_1 + \rho_2 = 8$ ,  $\rho_2 - \rho_1 = 4$ , επομένως

$$\rho_2 - \rho_1 < \delta < \rho_1 + \rho_2, \text{ άρα οι κύκλοι τέμνονται.}$$

β) Είναι  $\rho_1 = |x_{K_1}| = |y_{K_1}| = 2$  και

$\rho_2 = |x_{K_2}| = |y_{K_2}| = 6$ , άρα καθένας από τους κύκλους  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτεται στους άξονες.

γ) Αν  $\Lambda(\alpha, \beta)$  είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου  $C$ , τότε αφού ο  $C$  εφάπτεται στον  $x'x$ , η ακτίνα του  $\rho$  είναι ίση με  $|\beta|$ . Επειδή οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  είναι στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο και εφάπτονται στον  $x'x$  σε διαφορετικά σημεία, για το ζητούμενο κύκλο  $C$  θα ισχύει  $y_\Lambda = \beta > 0$  άρα  $\rho = \beta$ .

Ο  $C$  εφάπτεται εξωτερικά στον  $C_1$  άρα ισχύει

$$(K_1\Lambda) = 2 + \beta \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha-2)^2 + (\beta-2)^2} = 2 + \beta \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-2)^2 + (\beta-2)^2 = (2+\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha - 8\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 4}{8} \quad (1)$$

Ο  $C$  εφάπτεται εξωτερικά στον  $C_2$  άρα ισχύει

$$(K_2\Lambda) = 6 + \beta \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha-6)^2 + (\beta-6)^2} = 6 + \beta \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-6)^2 + (\beta-6)^2 = (6+\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 12\alpha - 24\beta + 36 = 0 \quad (2)$$

η οποία λόγω της (1) γίνεται

$$\alpha^2 - 12\alpha - 24 \cdot \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 4}{8} + 36 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2\sqrt{3} \text{ ή } \alpha = -2\sqrt{3}$$

Για  $\alpha = 2\sqrt{3}$  από την (1) έχουμε:

$$\beta = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{8} = 2 - \sqrt{3}.$$

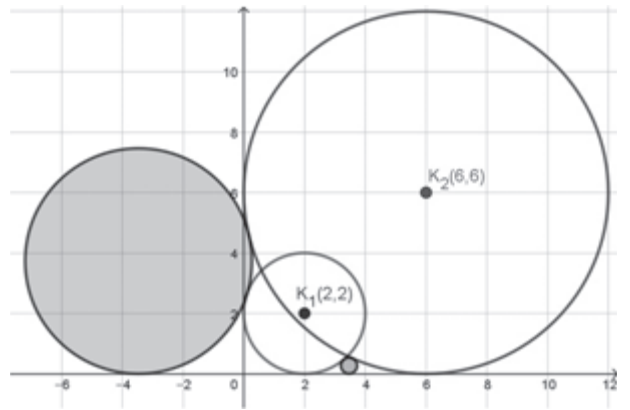
Για  $\alpha = -2\sqrt{3}$  από την (1) έχουμε:

$$\beta = \frac{16 + 8\sqrt{3}}{8} = 2 + \sqrt{3}.$$

Προκύπτουν λοιπόν δυο κύκλοι με εξισώσεις

$$C : (x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 2 + \sqrt{3})^2 = (2 - \sqrt{3})^2 \text{ και}$$

$$C' : (x + 2\sqrt{3})^2 + (y - 2 - \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^2.$$



### Άσκηση 2

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και το σημείο  $A(-1,0)$ .

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\epsilon_1, \epsilon_2$  της παραβολής που διέρχονται από το  $A$ .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon_3$  της παραβολής στο σημείο της  $M(4,4)$ .

Θεωρούμε επιπλέον το τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $y_B > y_\Gamma$ ) που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των εφαπτομένων  $\epsilon_1, \epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ .

γ) Να βρείτε τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$ .

δ) Να δείξετε ότι το ορθόκέντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$  βρίσκεται στη διευθετούσα της παραβολής.

ε) Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος  $C$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  διέρχεται από την εστία  $E$  της παραβολής.

### Λύση

α) Είναι  $\rho = 2$  και η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της  $(x_1, y_1)$  είναι η  $yy_1 = 2(x + x_1)$  (1). Αφού η εφαπτομένη

διέρχεται από το Α για  $x = -1$  και  $y = 0$  στην (1) έχουμε  $0 = 2(-1 + x_1) \Leftrightarrow x_1 = 1$ .

Το σημείο  $(x_1, y_1)$  ανήκει στην παραβολή άρα  $y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 2$  ή  $y_1 = -2$ .

Για  $x_1 = 1, y_1 = 2$  προκύπτει η εφαπτομένη με εξίσωση  $\epsilon_1: y = x + 1$  και για  $x_1 = 1, y_1 = -2$  προκύπτει η εφαπτομένη με εξίσωση  $\epsilon_2: y = -x - 1$ .

β) Για  $x_1 = 4, y_1 = 4$  στην  $yy_1 = 2(x + x_1)$  προκύπτει η εφαπτομένη  $\epsilon_3: y = \frac{1}{2}x + 2$ .

γ) Οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  προφανώς τέμνονται στο Α. Από την επίλυση του συστήματος των ευθειών  $\epsilon_1, \epsilon_3$  έχουμε:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ και}$$

από την επίλυση του συστήματος των ευθειών  $\epsilon_2, \epsilon_3$  έχουμε

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Έτσι προκύπτουν τα σημεία  $B(2,3)$  και  $\Gamma(-2,1)$ .

δ) Η διευθετούσα έχει εξίσωση  $x = -\frac{\rho}{2} \Leftrightarrow x = -1$ .

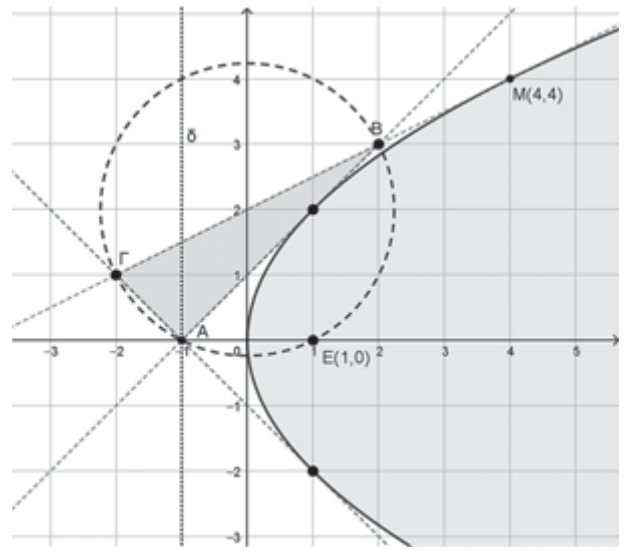
Σχετικά με τις ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  παρατηρούμε ότι  $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = 1 \cdot (-1) = -1$ , άρα  $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$  οπότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο Α, συνεπώς το σημείο  $A(-1,0)$  είναι το ορθόκентρο το οποίο ανήκει στην διευθετούσα.

ε) Αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο Α ο περιγεγραμμένος κύκλος C έχει διάμετρο την πλευρά ΒΓ. Το κέντρο Κ του C είναι το μέσο του ΒΓ, άρα  $K\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$  ή  $K(0,2)$  και η ακτίνα

$\rho = (KB) = \sqrt{(0-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$ . Επομένως ο C έχει εξίσωση  $x^2 + (y-2)^2 = 5$ .

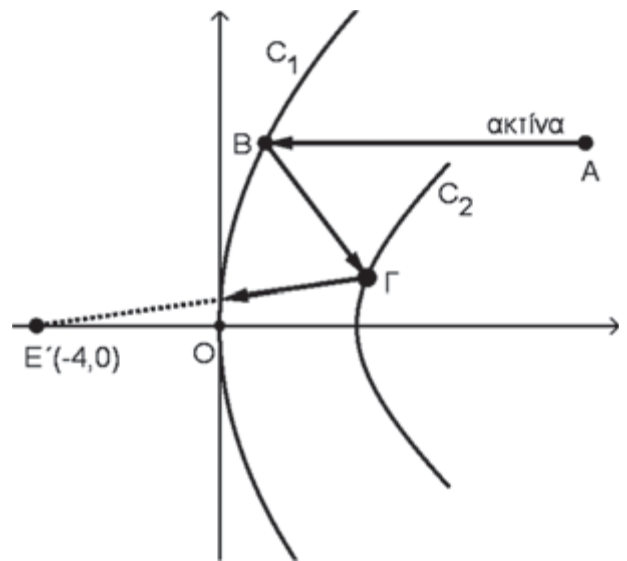
Η εστία E της παραβολής είναι  $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$  ή

$E(1,0)$  και για  $x = 1, y = 0$  στην εξίσωση του C έχουμε  $1^2 + (0-2)^2 = 5$  που ισχύει, άρα η εστία είναι σημείο του κύκλου C.



### Άσκηση 3

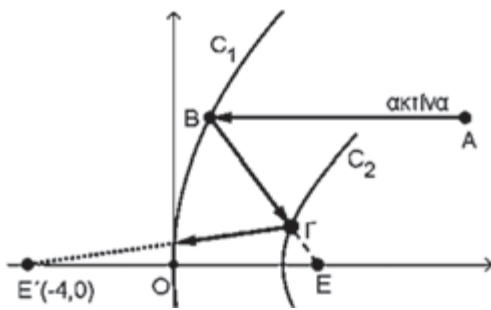
Μια ακτίνα ξεκινάει από το σημείο Α και κινείται παράλληλα με τον άξονα  $x'x$ . Η ακτίνα ανακλάται στην παραβολή  $C_1: y^2 = 16x$  στο σημείο Β και ύστερα ανακλάται σε τμήμα της υπερβολής  $C_2: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$  στο σημείο Γ, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Να εξηγήσετε γιατί το σημείο  $E'(-4,0)$  ανήκει στην τροχιά της ακτίνας.



### Λύση

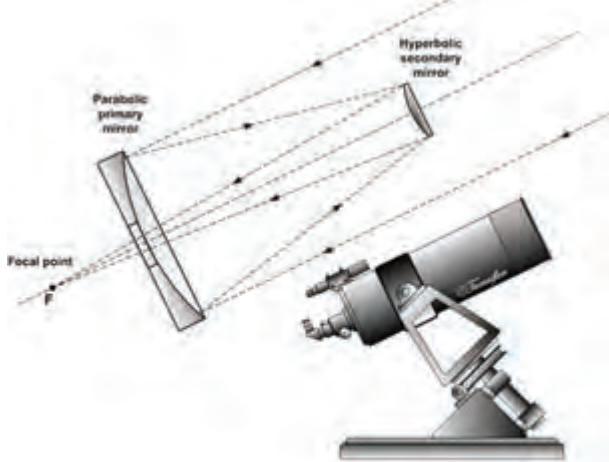
Η παραβολή  $C_1$  έχει  $\rho = 8$  και εστία  $E(4,0)$ .

Η υπερβολή  $C_2$  έχει  $\alpha^2 = 9, \beta^2 = 7$  και  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{16} = 4$  άρα εστίες τα σημεία  $E(4,0)$  και  $E'(-4,0)$ . Συνεπώς η παραβολή και η υπερβολή έχουν κοινή εστία, την E.



Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής η ακτίνα από το B θα κινηθεί προς το E και έπειτα λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της υπερβολής από το σημείο Γ θα κινηθεί προς το E'. Στη διαδικασία αυτή βασίζεται η λειτουργία ορισμένων τηλεσκοπίων όπως θα παρατηρήσετε στο παρακάτω σχήμα.

Ανακλαστικό τηλεσκόπιο Cassegrain - πορείες ακτίνων.



By Szócs Tamás Tamastlex - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=129301399>

**Άσκηση 4**

Δίνεται έλλειψη C με εξίσωση  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta$ .

Η έλλειψη είναι εγγεγραμμένη σε ορθογώνιο το οποίο έχει εμβαδό 48 τ.μ. και το άθροισμα των μηκών του μεγάλου και του μικρού άξονα είναι ίσο με 14 μονάδες.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης η οποία σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x'x και επιπλέον σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού  $8\sqrt{3}$  τ.μ..

**Λύση**

α) Η έλλειψη είναι εγγεγραμμένη στο ορθογώνιο που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των ευθειών  $x = \alpha, x = -\alpha, y = \beta, y = -\beta$  δηλαδή από τα σημεία K(α,β), Λ(α,-β), Μ(-α,-β), Ν(-α,β).

Άρα το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 2α και 2β οπότε  $(2\alpha) \cdot (2\beta) = 48 \Leftrightarrow 4\alpha\beta = 48 \Leftrightarrow \alpha\beta = 12$ .

Επίσης έχουμε  $(AA') + (BB') = 14 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 14 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7$ .

Οι αριθμοί α,β θα είναι λύσεις της εξίσωσης  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$  δηλαδή

$$\alpha = 4 \text{ και } \beta = 3 \text{ άρα } C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της  $(x_1, y_1)$  είναι η (ε):  $\frac{xx_1}{16} + \frac{yy_1}{9} = 1$ .

Η κλίση της (ε) είναι  $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{\frac{x_1}{16}}{\frac{y_1}{9}} = -\frac{9x_1}{16y_1}$  και

σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x'x, αν και μόνο αν,  $\lambda < 0 \Leftrightarrow -\frac{9x_1}{16y_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} > 0 \Leftrightarrow x_1 y_1 > 0$ .

Για  $x = 0$  στην (ε) έχουμε  $y = \frac{9}{y_1}$ , άρα η (ε)

τέμνει τον y'y στο  $B\left(0, \frac{9}{y_1}\right)$ .

Για  $y = 0$  στην (ε) έχουμε  $x = \frac{16}{x_1}$ , άρα η (ε)

τέμνει τον x'x στο  $\Gamma\left(\frac{16}{x_1}, 0\right)$ .

Το τρίγωνο ΟΒΓ έχει εμβαδό ίσο με

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OB) \cdot (OG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{|y_1|} \cdot \frac{16}{|x_1|} = \frac{72}{|x_1 y_1|} \stackrel{x_1 y_1 > 0}{=} \frac{72}{x_1 y_1}$$

και είναι

$$E = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow 8\sqrt{3} = \frac{72}{x_1 y_1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{\sqrt{3}x_1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3\sqrt{3}}{x_1}$$

Το σημείο  $(x_1, y_1)$  ανήκει στη έλλειψη άρα

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{16} + \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{x_1}\right)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1^4 - 16x_1^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16k + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = 4 \text{ ή } k = 12 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \text{ ή } x_1^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 2 \text{ ή } x_1 = -2 \text{ ή } x_1 = 2\sqrt{3} \text{ ή } x_1 = -2\sqrt{3}$$

Αν  $x_1 = 2$  τότε  $y_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  και η (ε) γίνεται

$$(ε): \frac{x}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{6} = 1.$$



Αν  $x_1 = -2$  τότε  $y_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$  και η (ε) γίνεται:

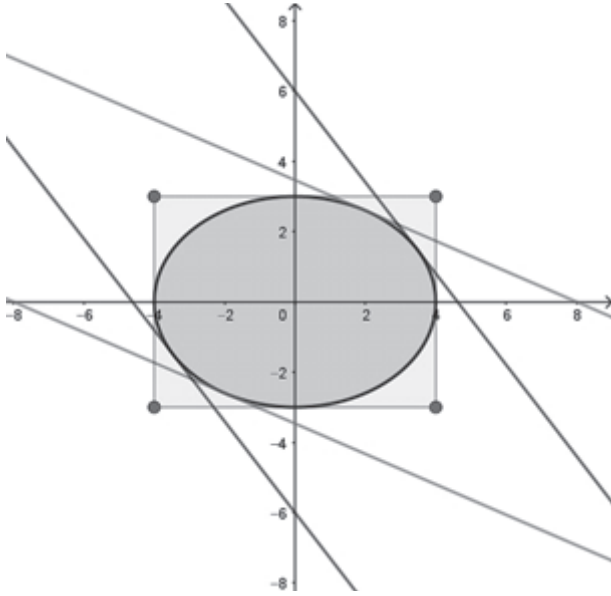
$$(\varepsilon): \frac{x}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{6} = -1.$$

Αν  $x_1 = 2\sqrt{3}$  τότε  $y_1 = \frac{3}{2}$  και η (ε) γίνεται:

$$(\varepsilon): \frac{x\sqrt{3}}{8} + \frac{y}{6} = 1.$$

Αν  $x_1 = -2\sqrt{3}$  τότε  $y_1 = -\frac{3}{2}$  και η (ε) γίνεται:

$$(\varepsilon): \frac{x\sqrt{3}}{8} + \frac{y}{6} = -1.$$



### Άσκηση 5

Για τα σημεία  $M(x,y)$  του επιπέδου ισχύει

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32} - \sqrt{x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32} \right| = 8.$$

α) Να δείξετε ότι το  $M$  ανήκει σε ισοσκελή υπερβολή.

β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, με εστίες στον  $y'y$ , η οποία διέρχεται από τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής του (α) και έχει εκκεντρότητα ίση με  $\frac{4}{5}$ .

### Λύση

α) Αν είναι:

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32} - \sqrt{x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32} \right| = 8 \Leftrightarrow$$

$$\left| \sqrt{x^2 + (y - 4\sqrt{2})^2} - \sqrt{x^2 + (y + 4\sqrt{2})^2} \right| = 8 \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε τα σημεία  $E(0, 4\sqrt{2})$  και

$E'(0, -4\sqrt{2})$  τότε η (1) γίνεται ισοδύναμα:

$|ME - ME'| = 8$ , άρα το  $M$  ανήκει σε υπερβολή με  $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$  και εστίες τις  $E$  και  $E'$ , οπότε  $c = 4\sqrt{2}$ . Επιπλέον  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{32 - 16} = 4$  άρα  $a = b$ , συνεπώς η υπερβολή είναι ισοσκελής.  
β) Η ζητούμενη έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής  $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \alpha > \beta$  (2).

Το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής έχει κορυφές  $A(4, 4), B(4, -4), \Gamma(-4, -4)$  και  $\Delta(-4, 4)$ . Άρα οι συντεταγμένες καθενός εκ των σημείων  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  ικανοποιούν την (2)

$$\text{επομένως έχουμε: } \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = 1 \quad (3).$$

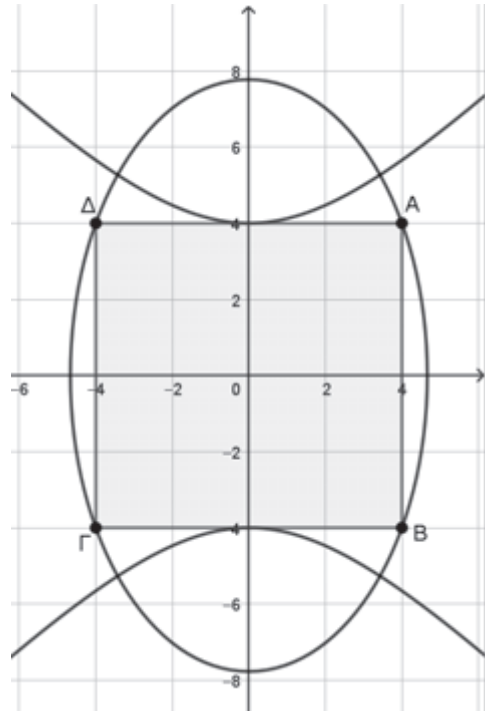
Επίσης είναι

$$\varepsilon = \frac{y}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{16}{25} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{9\alpha^2}{25}$$

και η (3) γίνεται

$$\frac{16 \cdot 25}{9\alpha^2} + \frac{16}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{544}{9} \quad \text{και} \quad \beta^2 = \frac{9\alpha^2}{25} = \frac{544}{25}$$

$$\text{Άρα } C: \frac{25x^2}{544} + \frac{9y^2}{544} = 1$$



### Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + \lambda x - 2y + 1 - 2\lambda = 0 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1).$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και έπειτα να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου.

β) Να βρεθεί η γραμμή που διαγράφει το κέντρο του κύκλου για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , οι κύκλοι που παριστάνει η (1), εφάπτονται στην ευθεία  $(\varepsilon): x-2y-3=0$ .

**Λύση**

α) Είναι  $A = \lambda, B = -2$  και  $\Gamma = 1 - 2\lambda$ .

Η (1) παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (-2)^2 - 4(1 - 2\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < -8 \text{ ή } \lambda > 0.$$

Είναι  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ , άρα  $K\left(-\frac{\lambda}{2}, 1\right)$

και  $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{2}$ .

β) Ένα σημείο  $(x, y)$  ανήκει στη γραμμή που διαγράφει το Κ αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = 1 \\ \lambda < -8 \text{ ή } \lambda > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ y = 1 \\ \lambda < -8 \text{ ή } \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x < 0 \text{ ή } x > 4 \end{cases}$$

Άρα το Κ ανήκει στη γραμμή  $y = 1$ , με  $x < 0$  ή στη γραμμή  $y = 1$ , με  $x > 4$ .

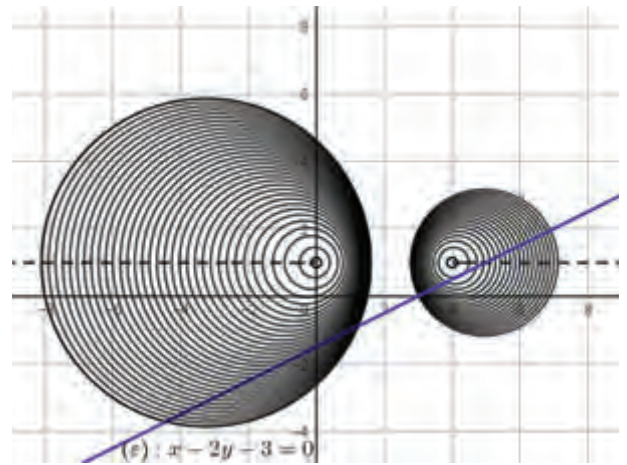
γ) Η ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται σε κύκλο που ορίζεται από την (1) αν και μόνο αν

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{\lambda}{2} - 2 - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\lambda}{2} + 5\right| = \frac{\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{2} \Leftrightarrow (\lambda + 10)^2 = 5(\lambda^2 + 8\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 5\lambda^2 + 40\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 20\lambda - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 5\lambda - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5 + 5\sqrt{5}}{2} \text{ ή } \lambda = \frac{-5 - 5\sqrt{5}}{2}, \text{ οι οποίες είναι δεκτές αφού ανήκουν στο σύνολο } (-\infty, -8) \cup (0, +\infty).$$



**Άσκηση 7**

Δίνεται ο κύκλος  $C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$  και το σημείο  $M(-1, 9)$ .

α) Να δείξετε ότι το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C.

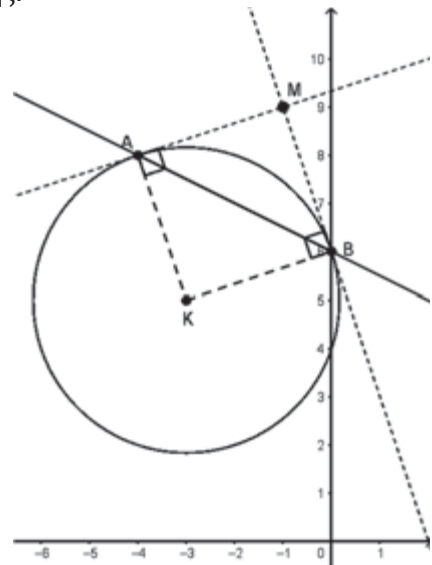
β) Από το Μ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB προς τον κύκλο. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB.

**Λύση**

α) Ο κύκλος έχει κέντρο  $K(-3, 5)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{10}$ .

Είναι  $(KM) = \sqrt{(-1+3)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{20} > \rho$ , άρα το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

β) Έστω  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  τα σημεία επαφής.



Είναι  $\overline{MA} \perp \overline{KA} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{KA} = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 + 1, y_1 - 9) \cdot (x_1 + 3, y_1 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1) \cdot (x_1 + 3) + (y_1 - 9) \cdot (y_1 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 - 14y_1 + 48 = 0 \quad (1).$$

Το σημείο  $A(x_1, y_1)$  ανήκει στον κύκλο άρα

$$(x_1 + 3)^2 + (y_1 - 5)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + y_1^2 = -6x_1 + 10y_1 - 24 \quad (2).$$

Από την (1), λόγω της (2), προκύπτει

$$-6x_1 + 10y_1 - 24 + 4x_1 - 14y_1 + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 - 4y_1 + 24 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2y_1 = 12 \quad (3).$$

Είναι  $\overline{MB} \perp \overline{KB} \Leftrightarrow \overline{MB} \cdot \overline{KB} = 0$  και εφαρμόζοντας

την ίδια διαδικασία για το σημείο  $B(x_2, y_2)$

καταλήγουμε στην εξίσωση  $x_2 + 2y_2 = 12$  (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και

$B(x_2, y_2)$  ικανοποιούν την εξίσωση

(ε):  $x + 2y = 12$  και εφόσον δυο διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία, η (ε) είναι η ζητούμενη εξίσωση της χορδής AB.

### Άσκηση 8

**A)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$  παριστάνει κύκλο. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

**B)** Δείξτε ότι η ευθεία (ε):  $24x - 10y - \frac{57}{4} = 0$

είναι τέμνουσα του κύκλου C.

**Γ)** Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 + \lambda \left( 24x - 10y - \frac{57}{4} \right) = 0, \quad (1)$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από δυο σταθερά σημεία για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

A) Είναι  $A = -2, B = 0$  και  $\Gamma = -4$  οπότε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 16 = 20 > 0$  επομένως η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Το κέντρο είναι το

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  άρα  $K(1, 0)$  και η ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

B) Η απόσταση της ευθείας (ε) από το κέντρο K του κύκλου είναι ίση με

$$d(K, \varepsilon) = \frac{\left| 24 \cdot 1 - 7 \cdot 0 - \frac{57}{4} \right|}{\sqrt{24^2 + (-10)^2}} = \frac{\left| \frac{39}{4} \right|}{\sqrt{676}} = \frac{39}{4 \cdot 26} < 2 < \sqrt{5}$$

δηλαδή  $d(K, \varepsilon) < \sqrt{5} = \rho$ , άρα η (ε) τέμνει τον C σε δυο σημεία έστω  $M(x_1, y_1)$  και  $N(x_2, y_2)$ .

$$\Gamma) \quad x^2 + y^2 - 2x - 4 + \lambda \left( 24x - 10y - \frac{57}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + (-2 + 24\lambda)x + (-10\lambda)y - 4 - \frac{57}{4} \cdot \lambda = 0$$

$$\text{Είναι } A = -2 + 24\lambda, B = -10\lambda \text{ και } \Gamma = -4 - \frac{57}{4}\lambda$$

οπότε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (24\lambda - 2)^2 + (-10\lambda)^2 - 4 \left( -4 - \frac{57}{4}\lambda \right)$$

$$= 576\lambda^2 - 96\lambda + 4 + 100\lambda^2 + 16 + 57\lambda$$

$$= \underbrace{576\lambda^2}_{\geq 0} + \underbrace{100\lambda^2 - 39\lambda + 20}_{> 0} > 0 \quad \text{αφού το}$$

τριώνυμο  $100\lambda^2 - 39\lambda + 20$  έχει:

$$\Delta = (-39)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 20 = 1521 - 8000 < 0$$

Άρα  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , οπότε η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Από το (B) ερώτημα έχουμε ότι το  $M(x_1, y_1)$  είναι κοινό σημείο του κύκλου C και της ευθείας (ε) άρα ισχύει:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4 = 0 \quad \text{και} \quad 24x_1 - 10y_1 - \frac{57}{4} = 0$$

επομένως

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4 + \lambda \left( 24x_1 - 10y_1 - \frac{57}{4} \right) = 0$$

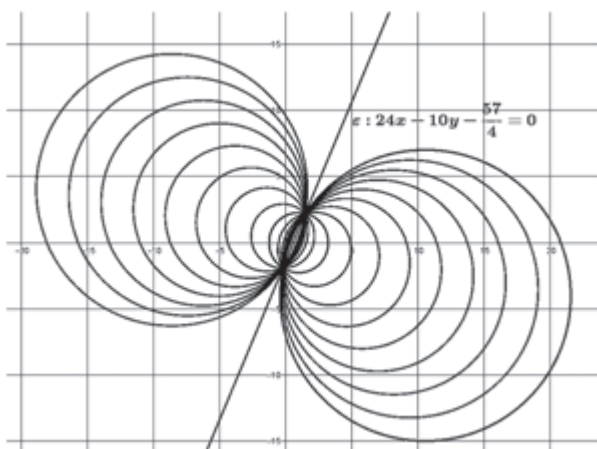
δηλαδή κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) διέρχεται από το  $M(x_1, y_1)$ .

Όμοια για το κοινό σημείο  $N(x_2, y_2)$  των C και (ε) θα ισχύει:

$$x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 - 4 + \lambda \left( 24x_2 - 10y_2 - \frac{57}{4} \right) = 0$$

Επομένως κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) διέρχεται από τα σημεία M και N.

**Σχόλιο:** Η (ε) είναι η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται η κοινή χορδή των κύκλων της (1).



**ΘΕΜΑ 1: Α.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g'$  για τις οποίες ισχύουν:  $f(x) - g'(x) = 6x - 6$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

και ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο διαδοχικές ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < 0$  και  $x_2 > 1$ . Επίσης η  $g$  στρέφει τα κοίλα κάτω και ισχύει η σχέση:  $g(1) = g(0) + 2026$ .

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$$g''(x) + 6 = 0 \text{ στο διάστημα } (x_1, x_2).$$

2. Να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει ένα τοπικό μέγιστο στο  $\mathbb{R}$ , για τιμή του  $X$  που βρίσκεται στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ .

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε να ισχύει:  $f(\xi) = 6\xi + 2020$ .

4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει:  $g(x_1) + g(x_2) < 2g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ .

**Β.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύουν:

- Η  $f$  είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 4]$  με  $f(1) = 1$  και  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [0, 4]$ .

- Η  $g$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $g(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και ισχύει  $\int_{9-f(4)}^{f(2)+f(3)} g(x) dx = 0$ .

(α) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(2, 4)$ .

ii. Να αποδείξετε ότι από την αρχή των αξόνων άγεται μοναδική εφαπτομένη της  $C_f$ .

(β) Αν Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{h^2 + h}{h + 3} \right) \cdot \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] = \frac{16}{13}, \text{ με}$$

$f(0) \geq 0$ , τότε να δείξετε ότι: i.  $f'(1) = \frac{16}{13}$

ii.  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{5}{13}$ .    iii.  $\int_1^2 xf'(x-1) dx < \frac{24}{13}$

**Λύση Α. 1.** Έχουμε:  $f(x) - g'(x) = 6x - 6, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) + 6 = g'(x) + 6x, x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την  $h(x) = g'(x) + 6x$  με

$$h(x_1) = g'(x_1) + 6x_1 = f(x_1) + 6 \stackrel{f(x_1)=0}{=} 6 \text{ και}$$

$$h(x_2) = g'(x_2) + 6x_2 = f(x_2) + 6 \stackrel{f(x_2)=0}{=} 6.$$

Από θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$ , με  $h'(\xi) = 0 \Rightarrow g''(\xi) + 6 = 0$ .

2. Έχουμε  $g'(x) = f(x) - 6x + 6$ .

$g'(x_1) = f(x_1) - 6x_1 + 6 = -6x_1 + 6 = 6(1 - x_1) > 0$ , αφού  $x_1 < 0$ ,  $g'(x_2) = f(x_2) - 6x_2 + 6 = -6x_2 + 6 = 6(1 - x_2) < 0$ ,

αφού  $x_2 > 1$ . Από Θ Bolzano στο  $[x_1, x_2]$  υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , με  $g(x_0) = 0$ .

Έχουμε ότι η  $g$  στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε η  $g'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(x_1, x_2)$  και έτσι έχουμε:

Αν  $x_1 < x < x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) = 0$  και

αν  $x_2 > x > x_0 \Rightarrow g'(x) < g'(x_0) = 0$ ,

άρα έχουμε τον πίνακα πρόσημων.

$x$	$x_1$	$x_0$	$x_2$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	↘	

Οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο το  $g(x_0)$ .

3. Η  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ στο  $[0, 1]$  με  $g'(x) = f(x) - 6x + 6$ , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$ , με

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 2026 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) - 6\xi + 6 = 2026 \Leftrightarrow f(\xi) = 6\xi + 2020.$$

4. Έχουμε:  $g(x_1) + g(x_2) < 2g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Leftrightarrow$

$g(x_2) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1)$ . Εφαρμόζου.

με Θ.Μ.Τ στα  $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right], \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ , άρα υπάρ-

χουν  $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ , με

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x_2) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2 - x_1 + x_2}{2}} = 2 \cdot \frac{g(x_2) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1)}{\frac{x_1 + x_2 - x_1}{2}} = 2 \cdot \frac{g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1)}{x_2 - x_1},$$

τότε η σχέση  $g(x_2) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(\xi_2) < g'(\xi_1) \stackrel{g \text{ κοίλη}}{\Leftrightarrow} \xi_2 > \xi_1$ , που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική.

**B. (α) i.** Θέτουμε  $h(x) = f(x) - x$ , που είναι συνεχής στο  $[2, 4]$ .

Έχουμε όμως  $g(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και

$$\int_{9-f(4)}^{f(2)+f(3)} g(x) dx = 0, \text{ τότε } f(2) + f(3) = 9 - f(4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(2) - 2) + (f(3) - 3) + (f(4) - 4) = 0. \text{ Ο-}$$

πότε πρέπει αναγκαστικά να ισχύουν:

$(f(2) - 2)$  και  $(f(3) - 3)$  ετερόσημοι ή

$(f(2) - 2)$  και  $(f(4) - 4)$  ετερόσημοι ή

$(f(3) - 3)$  και  $(f(4) - 4)$  ετερόσημοι.

Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις Θ Bolzano

στα  $[2, 3] \subseteq [2, 4]$  ή  $[3, 4] \subseteq [2, 4]$ , άρα υπάρ-

χει τελικά ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (2, 4)$ , με

$$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

**ii.** Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(x_1, f(x_1))$

$$\text{είναι } \psi - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή αξόνων, τότε για  $x = \psi = 0$ , έχουμε

$$f'(x_1) \cdot x_1 - f(x_1) = 0. \text{ Θεωρούμε την}$$

$$\varphi(x) = f(x) \cdot x, \text{ με } \varphi'(x) = f'(x) \cdot x + f(x),$$

$$\text{άρα } \varphi'(x_1) = f'(x_1) \cdot x_1 + f(x_1) = 0. \text{ Θα}$$

δείξουμε ότι το  $M(x_1, f(x_1))$  είναι μοναδικό,

αρκεί να δείξουμε ότι η  $\varphi'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$

είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι

$$\varphi''(x) = f''(x) \cdot x + f'(x) - f'(x) = f''(x) \cdot x > 0,$$

για κάθε  $x \in (0, 4]$  και αφού η

$\varphi'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$  είναι συνεχής στο

$[0, 4]$  η  $\varphi'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$  είναι γνησίως

αύξουσα, άρα η  $\varphi'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$  έχει

μοναδική ρίζα την  $x_1$ , δηλαδή το σημείο

$M(x_1, f(x_1))$  είναι μοναδικό.

**(β)** Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{h^2 + h}{h + 3} \right) \cdot \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] = \frac{16}{13}, \text{ με } f(0) \geq 0,$$

$$\text{τότε: } f'(1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} \stackrel{u = \frac{1}{h}}{=} \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1}{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ h \cdot \left( f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right) \right].$$

$$\text{Όμως } \lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{h^2 + h}{h + 3} \right) \cdot \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{h^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right)}{h \left(1 + \frac{3}{h}\right)} \right) \cdot \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{h \left(1 + \frac{1}{h}\right)}{1 + \frac{3}{h}} \right) \cdot \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right] \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{h}\right)}{1 + \frac{3}{h}} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ h \cdot \left( f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right) \right] \right] =$$

$$= \frac{1+0}{1+0} \cdot \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ h \cdot \left( f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right) \right] =$$

$$= 1 \cdot \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ h \cdot \left( f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 1 \right) \right] = f'(1) = \frac{16}{13}.$$

**ii.** Έχουμε  $f(1) = 1, f'(1) = \frac{16}{13}$ , τότε η



εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(1, f(1)) = M(1, 1)$   
 είναι  $\varepsilon: \psi - 1 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon: \psi = \frac{16}{13}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \varepsilon: \psi = \frac{16}{13}x - \frac{3}{13}$ . Όμως η συνάρτηση  $f$  είναι  
 κυρτή, άρα η  $C_f$  είναι από πάνω από την εφα-  
 πτομένη, άρα  $f(x) \geq \frac{16}{13}x - \frac{3}{13}$ , τότε  
 $\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 x \frac{16}{13} dx - \int_0^1 \frac{3}{13} dx$ . (Αφού δεν ι-  
 σχύει το ίσο για κάθε  $x \in [0, 1]$ ). Άρα  
 $\int_0^1 f(x) dx > \frac{16}{13} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \frac{3}{13}(1 - 0) = \frac{16}{13} \left( \frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$ .  
**iii.**  $\int_1^2 xf'(x - 1) dx \stackrel{u=x-1}{=} \int_0^1 (u + 1)f'(u) du =$   
 $= [(u + 1)f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du =$   
 $2 - f(0) - \int_0^1 f(x) dx < 2 - f(0) - \frac{5}{13} < 2 - \frac{5}{13} = \frac{21}{13} < \frac{24}{13}$ ,  
 (γιατί  $-\int_0^1 f(x) dx < -\frac{5}{13}$  και  $f(0) \geq 0$ ).

**ΘΕΜΑ 2: Α.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ι-  
 σχύουν:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(2) > 1$  και

$$f' \left( \frac{f(x)}{2} \right) = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο  
 ώστε  $f''(x_0) > 0$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f'$  είναι γνησίως  
 αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  
 $g(x) = f'(x) + 2x$ .

**i.** Να μελετηθεί η  $g$  ως προς τη μονοτο-  
 νία.

**ii.** Να δείξετε ότι  $f'(x) = 2x$ , για κάθε  
 $x \in \mathbb{R}$  και να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**B** Να αποδειχθεί ότι:  $2 - \frac{2}{e} \leq \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \leq e - 1$ .

**Λύση: Δ1.** Η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προ-  
 ύποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο  $[0, 1]$ , άρα υπάρχει ένα  $\xi \in (0, 1)$  με

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Η συνάρτηση  $f'$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις  
 του Θ.Μ.Τ στο  $[\xi, 2]$ , άρα υπάρχει ένα  $x_0 \in (\xi, 2)$  με

$$f''(x_0) = \frac{f'(2) - f'(\xi)}{2 - \xi} = \frac{f'(2) - 1}{2 - \xi} > 0,$$

αφού  $f'(2) > 1$ ,  $2 > \xi$ .

**Δ2.** Έχουμε  $f' \left( \frac{f(x)}{2} \right) = 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

τότε:  $\left( f' \left( \frac{f(x)}{2} \right) \right)' = (2x)'$ , για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'' \left( \frac{f(x)}{2} \right) \cdot \left( \frac{f'(x)}{2} \right)' = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'' \left( \frac{f(x)}{2} \right) \cdot f''(x) = 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε  $u = \frac{f(x)}{2}$ , άρα  $f'(x) = 2u$ , τότε η

$$f'' \left( \frac{f(x)}{2} \right) \cdot f''(x) = 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ γίνεται}$$

$f''(u) \cdot (2u)' = 4 \Leftrightarrow f''(u) \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow f''(u) = 2$  για  
 $u = x$  έχουμε  $f''(x) = 2 > 0$ , τότε η  $f'$  γνησίως  
 αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ3. i.**  $g'(x) = f''(x) + 2 = 2 + 2 = 4 > 0$ . Άρα η  $g$   
 είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**ii.**  $f'(x) = 2 \Leftrightarrow f''(x) = (2x)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x + c_1 \Leftrightarrow$

$$f'(x) = (x^2 + c_1x)' \Leftrightarrow f(x) = x^2 + c_1x + c_2,$$

$x \in \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$ , τότε ισχύει:

$$f(x) = x^2 + c_1x, \text{ με } f(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ άρα}$$

$$f'(x) = 2x \text{ και } f(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**B.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Η  
 συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού  $A = (0, +\infty)$   
 και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\downarrow$	$\searrow$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ .  
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ .  
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$ .  
 Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, e]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$  και έχει μέγιστο το  $f(e) = \frac{1}{e}$ .

Στο διάστημα  $[e, e^2]$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε  $x \in [e, e^2]$  ισχύει:  $f(e^2) \leq f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$ , άρα

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{e^2} dx \leq \int_e^{e^2} f(x) dx \leq \int_e^{e^2} \frac{1}{e} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{e^2} (e^2 - e) \leq \int_e^{e^2} f(x) dx \leq \frac{1}{e} (e^2 - e) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2e^2 - 2e}{e^2} \leq \int_e^{e^2} f(x) dx \leq \frac{1}{e} e(e - 1) \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{2}{e} \leq \int_e^{e^2} f(x) dx \leq e - 1.$$

**ΘΕΜΑ 3:** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \cdot \ln f(x) + 2x \cdot f'(x) = 0$ ,
- για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , (1)
- $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  (2) και
- $f(1) = e$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (3)

**Α1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**Α2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

**Α3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι:  $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} \geq 3 - x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

(εφαπτόμενη στο  $A(1, f(1))$ ).

**Α4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx.$$

**Α5.** Να αποδείξετε ότι:  $e + \sqrt[3]{e} > 2 \cdot \sqrt[5]{e}$ .

**Λύση**

**Α1.** Έχουμε από την (1)

$$f(x) \cdot \ln f(x) + 2x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) > 0}{2x} \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x} \ln f(x) + \left(\ln f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{2} \ln x\right)'}{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln x\right)' \ln f(x) \cdot e^{\frac{1}{2} \ln x} + e^{\frac{1}{2} \ln x} \left(\ln f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\frac{1}{2} \ln x} \ln f(x)\right]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\sqrt{x} \cdot \ln f(x)\right]' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln f(x) = c.$$

Για  $x=1$  έχουμε  $1 \cdot \ln f(1) = c \Leftrightarrow \ln e = c \Leftrightarrow c=1$ .

$$\text{Άρα } \sqrt{x} \cdot \ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \in (0, +\infty).$$

$$\mathbf{A2.} \quad f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(-\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < 0, x \in (0, +\infty),$$

άρα η συνάρτηση  $f$  γνησίως φθίνουσα, οπότε και 1-1, άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε

$$\psi = f(x) \Leftrightarrow \psi = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \ln \psi = \ln e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \ln \psi = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\ln \psi} \Leftrightarrow x = \frac{1}{(\ln \psi)^2} = \frac{1}{\ln^2 \psi},$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}, x \in (1, +\infty), \text{ εφόσον το πεδίο ο-$$

ρισμού της αντίστροφης είναι (λόγω συνέχειας της  $f$  και γνησίως φθίνουσας)

$$A' = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = (1, +\infty).$$

$$\mathbf{A3.} \quad f'(x) = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < 0,$$

$x \in (0, +\infty)$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' = -\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)' e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)'$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' =$$

$$\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{5}{2}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) =$$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{3}{4x^2\sqrt{x}} + \frac{4x}{4x^2\sqrt{x}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{3+4x}{4x^2\sqrt{x}} > 0,$$

$x \in (0, +\infty)$ , άρα η  $f$  κυρτή. Θα δείξουμε

$$2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x \Leftrightarrow 2\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e} \geq 3-x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq \frac{e(3-x)}{2}.$$

Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι:

$$\varepsilon: \psi - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon: \psi - e = -\frac{e}{2}(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: \psi = -\frac{e}{2}(x-1) - e \Leftrightarrow \varepsilon: \psi = -\frac{e}{2}x + \frac{e}{2} - e = -\frac{e(3-x)}{2}$$

Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή, τότε η γραφική της είναι από πάνω από κάθε εφαπτομένη της,

$$\text{άρα } f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq \frac{e(3-x)}{2}, x \in (0, +\infty).$$

**Δ4** Είναι  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ , οπότε

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx =$$

$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln x}\right) dx.$$

Θέτουμε:  $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u, dx = e^u du$

Για  $x = e \Rightarrow u = 1$  και για  $x = e^2 \Rightarrow u = 2$ , τότε

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3}\right) e^u du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} e^u - \frac{2}{u^3} e^u\right) du =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} (e^u)' + \left(\frac{1}{u^2}\right)' e^u\right) du \stackrel{\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}}{=} \int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} e^u\right)' du =$$

$$= \left[\frac{1}{u^2} e^u\right]_1^2 = \frac{e^2 - 4e}{4}.$$

**Δ5.** Θα δείξουμε ότι:

$$e + \sqrt[5]{e} > 2 \cdot \sqrt[5]{e} \Leftrightarrow \sqrt[5]{e} - \sqrt[5]{e} > \sqrt[5]{e} - e.$$

Έχουμε  $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Αν  $f(x) = e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ , άρα

$$f(x) = \sqrt[5]{x} = e^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x = 25$$

$$f(x) = \sqrt[7]{x} = e^{\frac{1}{7}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x = 49$$

Από Θ.Μ.Τ στα  $[1, 25]$ ,  $[25, 49]$  υπάρχουν

$\xi_1 \in (1, 25)$ ,  $\xi_2 \in (25, 49)$  με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{49 - 25} = \frac{\sqrt[7]{e} - \sqrt[5]{e}}{24},$$

αρκεί να δείξω  $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2$ , που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική.

#### ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = e$  και

$$f(-1) = \frac{1}{e}, \text{ για την οποία ισχύει: } f'(x) = \frac{x-2}{x} \cdot f(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Δ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

**Δ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Δ4.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = a$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $a \in \mathbb{R}$ .

**Δ5.** Να υπολογίσετε το  $I = \int_1^2 \ln f(x) dx$ .

#### Λύση

**Δ1.** Δίνεται ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x-2}{x} \cdot f(x) \quad (1). \text{ Πολλαπλασιάζουμε}$$

την (1) κατά μέλη με  $x^2$ , οπότε για κάθε

$x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:  $x^2 \cdot f'(x) = x(x-2) \cdot f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) = x^2 \cdot f(x) - 2x \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) = x^2 \cdot f(x) \Leftrightarrow [x^2 \cdot f(x)]' = x^2 \cdot f(x) \quad (2).$$

• Αν  $x \in (-\infty, 0)$ , τότε από την (2) έχουμε:

$$x^2 \cdot f(x) = c_1 \cdot e^x \quad (3). \text{ Από την (3) για } x = -1$$

$$\text{έχουμε } 1 \cdot f(-1) = c_1 \cdot e^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{e} = c_1 \cdot \frac{1}{e} \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Άρα  $x^2 \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ , αν  $x \in (-\infty, 0)$ .

• Αν  $x \in (0, +\infty)$ , τότε από την (2) έχουμε:  
 $x^2 \cdot f(x) = c_2 \cdot e^x$  (4). Από την (4) για  
 $x = 1$  έχουμε  $1 \cdot f(1) = c_2 \cdot e \Leftrightarrow e = c_2 \cdot e \Leftrightarrow c_2 = 1$ .

Άρα  $x^2 \cdot f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ , αν  $x \in (0, +\infty)$ .

Τελικά έχουμε ότι:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Δ.2.** Είναι:  $f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ ,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)e^x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = \left( \frac{(x-2)e^x}{x^3} \right)' = \frac{[(x-2)e^x]'x^3 - 3x^2(x-2)e^x}{x^6} =$$

$$\frac{[e^x + (x-2)e^x]x - 3(x-2)e^x}{x^4} = \dots = \frac{(x^2 - 4x + 6)e^x}{x^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 4x + 6)e^x}{x^4} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = 0,$$

αδύνατη αφού  $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$ . Έχουμε τον επόμενο πίνακα στον οποίο φαίνεται η μονοτονία, ακρότατα και την κυρτότητα. Έχει τ.ε

$f(2) = \frac{e^2}{4}$ . Η  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f''(x)$	+	+	ο	+
$f(x)$	↘		↗	↗

**Δ.3.** Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Αν  $A_1 = (-\infty, 0)$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο

$A_1$ , τότε:  $f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (0, +\infty)$ .

Αν  $A_2 = (0, 2]$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο

$A_2$ , τότε:  $f(A_2) = \left[ f(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left[ \frac{e^2}{4}, +\infty \right)$ .

Αν  $A_3 = (2, +\infty)$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο

$$A_3, \text{ τότε: } f(A_3) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left( \frac{e^2}{4}, +\infty \right).$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι  $A = \mathbb{R}$  με  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , οπότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:  $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = (0, +\infty)$ .

**Δ.4.** Από τα προηγούμενα έχουμε ότι:

- Αν  $a \in (-\infty, 0]$ , η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα,
- Αν  $a \in \left( 0, \frac{e^2}{4} \right)$ , η εξίσωση έχει μία ρίζα στο διάστημα  $A_1 = (-\infty, 0)$ ,
- Αν  $a = \frac{e^2}{4}$ , η εξίσωση έχει δύο ρίζες. Μία ρίζα στο  $A_1 = (-\infty, 0)$  και μία ρίζα την  $x = 2$ ,
- Αν  $a \in \left( \frac{e^2}{4}, +\infty \right)$ , η εξίσωση έχει τρεις ρίζες. Μία ρίζα σε καθένα από τα  $A_1 = (-\infty, 0)$ ,  $A_2 = (0, 2]$  και  $A_3 = (2, +\infty)$ .

**Δ.5.** Δίνεται ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x-2}{x} \cdot f(x) \quad \text{και βρήκαμε ότι}$$

$$f(x) > 0, \quad \text{οπότε } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-2}{x}. \quad \text{Τότε:}$$

$$I = \int_1^2 \ln f(x) dx = \int_1^2 (x)' \cdot \ln f(x) dx =$$

$$= [x \cdot \ln f(x)]_1^2 - \int_1^2 x \cdot [\ln f(x)]' dx =$$

$$\left[ 2 \cdot \ln f(2) - 1 \cdot \ln f(1) \right] - \int_1^2 x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$$

$$\left[ 2 \cdot \ln \frac{e^2}{4} - \ln e \right] - \int_1^2 x \cdot \frac{x-2}{x} dx =$$

$$\left[ 2 \cdot \ln \frac{e^2}{4} - \ln e \right] - \int_1^2 x \cdot \frac{x-2}{x} dx =$$

$$= \left[ 2(\ln e^2 - \ln 4) - 1 \right] - \int_1^2 (x-2) dx = \dots$$

$$\dots = \frac{7}{2} - 4 \ln 2.$$

# Η διαχείριση του χρόνου στα Μαθηματικά των πανελλαδικών εξετάσεων.

Κυριαζής Χρήστος – Πρωτοπαπάς Ελευθέριος – Σαμπάνη Μαρία

## Περίληψη.

Είναι γεγονός ότι η **επιτυχία** σε κάθε εξεταστική διαδικασία είναι αποτέλεσμα όχι μόνο των γνώσεων, αλλά και άλλων παραγόντων. Μια σωστή στρατηγική προσέγγιση, αλλά και η αποτελεσματική διαχείριση του χρόνου, ειδικότερα στο πλαίσιο των πανελλαδικών εξετάσεων, αποτελούν καίρια ζητούμενα για την επίτευξη υψηλών επιδόσεων. Η παρούσα εργασία εξετάζει τη σημασία της ορθής διαχείρισης του χρόνου από τους μαθητές και αναλύει τρόπους με τους οποίους μπορούν οι ίδιοι να προσεγγίσουν ορθά τα θέματα των εξετάσεων. Με τη βοήθεια αντίστοιχων θεμάτων αναδεικνύονται στρατηγικές λύσεων που οδηγούν σε οικονομία του χρόνου, κυρίως με υποστήριξη θεωρημάτων και προτάσεων που περιλαμβάνονται στις επίσημες οδηγίες διδασκαλίας του ΙΕΠ. Τέλος, τονίζεται η αξία της **προσεκτικής ανάγνωσης των εκφωνήσεων** των θεμάτων και της ορθής επιλογής μεθοδολογίας ώστε ο μαθητής να διασφαλίσει επαρκή χρόνο τόσο για την επίλυση των θεμάτων, όσο και για τον έλεγχο των απαντήσεών του.

## Εισαγωγή.

Οι πανελλαδικές εξετάσεις αποτελούν τον πλέον απαιτητικό και καθοριστικό θεσμό του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και ένα **ορόσημο** στη ζωή των μαθητών για τη μελλοντική τους πορεία. Τα Μαθηματικά ως βασικό μάθημα προσανατολισμού για την εισαγωγή σε πολλές σχολές, διακρίνονται όχι μόνο για τη θεωρητική και πρακτική του δυσκολία, αλλά και για τις αυξημένες απαιτήσεις διαχείρισης χρόνου.

Τα θέματα των Μαθηματικών στις πανελλαδικές εξετάσεις απαιτούν γνώσεις, **ταχύτητα** και αποδοτική στρατηγική. Είναι αναμφίβολο ότι οι μαθητές καλούνται να λύσουν δύσκολα προβλήματα μέσα σε περιορισμένο χρονικό πλαίσιο, γεγονός που ούτως ή άλλως είναι αγχωτικό και πολλές φορές τους οδηγεί σε σπατάλη χρόνου ή ακόμη και σε ελλιπή αντιμετώπιση θεμάτων. Η επιλογή κατάλληλης προσέγγισης επίλυσης μιας άσκησης, η επιλογή των κατάλληλων προτάσεων για την επίλυσή της, αλλά και η ευελιξία στην εφαρμογή εναλλακτικής αντιμετώπισης, αποτελούν καίρια στοιχεία που καθορίζουν την **απόδοση**, άρα και την επιτυχία του μαθητή.

Πολλοί μαθητές ωστόσο, χάνουν πολύτιμο χρόνο σε επίλυση θεμάτων ή επιμέρους ερωτημάτων, με χρονοβόρες μεθόδους και συχνά χάνουν την ψυχραιμία τους. Ορισμένες φορές υπάρχουν συγκεκριμένα αποδεικτικά μονοπάτια που μας οδηγούν πιο σύντομα στο **επιθυμητό αποτέλεσμα** με τη χρήση απλούστερων και ταχύτερων τεχνικών.

## Σχετικά με τις επίσημες οδηγίες διδασκαλίας του ΙΕΠ.

### Γνωστές ανισοισότητες.

Τα τελευταία χρόνια σύμφωνα με τις επίσημες οδηγίες του ΙΕΠ οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν ορισμένες προτάσεις χωρίς απόδειξη. Μια τέτοια είναι η ανισοισότητα:  $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

αλλά και η ισοδυναμία:  $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

Στο Γ1 θέμα των εξετάσεων του 2016 οι μαθητές έπρεπε να λύσουν την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ .

Αν ένας μαθητής χρησιμοποιούσε την παραπάνω τότε το ερώτημα έχει πολύ γρήγορη λύση, αφού

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = u + 1 \\ u = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Αντιθέτως, αν κάποιος μαθητής δεν τη λάμβανε υπόψη του, θα: έθετε συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in D_f = \mathbb{R}$ , έβρισκε την παράγωγο  $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1), x \in D_f = \mathbb{R}$ , έλυne την εξίσωση  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , έλυne την

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ , αφού  $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 1$ , απαντούσε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0]$  και ισχύει ότι  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , οπότε παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο για  $x = 0$ , το  $f(0) = 0$ , άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική λύση  $x = 0$ .

Στο σημείο αυτό θα θυμίσουμε ότι τα τελευταία χρόνια οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν χωρίς απόδειξη την  **$\ln x \leq x - 1, x > 0$**

αλλά και την  $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$

### Γρήγορη εύρεση συνόλου τιμών.

Στις οδηγίες διδασκαλίας δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $(\sigma_1, \sigma_2)$  με τα  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και ισχύουν  $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$  (ή αντίθετα), τότε το

σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι όλο το  $\mathbb{R}$ ».

Η χρήση αυτής της πρότασης οδηγεί σε μια ταχύτατη διαδικασία υπολογισμού του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης που ικανοποιεί τα δεδομένα αυτά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln x + x - 1, x > 0$ . Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως άθροισμα των συνεχών



συναρτήσεων  $\ln x$  (λογαριθμική) και  $x-1$  (πολυωνυμική), όπου  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,

άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

**Γρήγορη εύρεση ορίου χωρίς τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής.**

Στις οδηγίες διδασκαλίας δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού ορίου με τη χρήση μιας μονής ανισοϊσοτικής σχέσης που ικανοποιεί μια συνάρτηση, σύμφωνα με την πρόταση:

«Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Αν  $f(x) \leq g(x)$  για  $x$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ». Για παράδειγμα ας υποθέσουμε

πως για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , ισχύει  $f(x) > \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , άρα

και  $f(x) \geq \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Επειδή

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , θα ισχύει και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . Επίσης

στις οδηγίες δίνεται και η εξής πρόταση: «Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Αν  $f(x) \geq g(x)$  για  $x$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ », η

οποία απαντά πιο άμεσα και γρήγορα σε αντίστοιχα φύσεως ερωτήματα. Ένα παράδειγμα

είναι το ερώτημα **Δ2** των πανελλαδικών εξετάσεων **2020**, όπου για τη συνάρτηση  $f$  με

$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1, x \in \mathbb{R}$  ζητούνταν ο

υπολογισμός του ορίου

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right]$ , όπου το  $x_0$  είναι

η θέση του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης  $f$  που

είχε ζητηθεί να προσδιοριστεί στο ερώτημα **Δ1**.

Με τη βοήθεια της προαναφερθείσας πρότασης,

καθώς και με τις εξής παρατηρήσεις:

- $\eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \geq -1$ , για κάθε  $x \neq x_0$ ,
- $f(x) - f(x_0) > 0$ , για κάθε  $x \neq x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ ,

ο μαθητής εύκολα απαντούσε πως το ζητούμενο όριο ισούται με  $+\infty$ .

**Απόδειξη ολοκληρωτικής ανισότητας με χρήση γνωστών ανισοϊσοτήτων.**

Στις εξετάσεις του **Ιουνίου 2025** ζητήθηκε να αποδειχθεί πως το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $F$  με  $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$ , τις ευθείες

$x=1$ ,  $x=e$  και τον άξονα  $x'$ , ικανοποιεί τη σχέση  $E > 2e - 3$ .

Η απάντηση δίνεται από τη βασική σχέση  $e^x \geq x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , σε συνδυασμό με τον

μετασχηματισμό  $x^{\ln x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, x > 0$  **οπότε**

**$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$** , και τις προτάσεις ολοκλήρωσης

ανισώσεων που υπάρχουν στις οδηγίες διδασκαλίας του **ΙΕΠ** για το μάθημα, σύμφωνα με τις οποίες ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει χωρίς απόδειξη την πρόταση:

«Έστω  $f$  και  $g$  δύο συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

- Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε θα

$$\text{ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

- Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και επιπλέον υπάρχει  $\xi$  στο  $[\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) \neq g(\xi)$  (δηλαδή οι συναρτήσεις δεν είναι

$$\text{ίσες), τότε θα ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \text{ »}.$$

**Σχετικά με το σχολικό βιβλίο.**

**Υπαρξη αντίστροφης συνάρτησης.**

Στο **B2** θέμα των εξετάσεων του **2017** οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν ότι η συνάρτηση  $h$  με

$$h(x) = \ln \frac{x}{1-x}$$
 αντιστρέφεται. Δύο είναι οι βασικοί

τρόποι προσέγγισης: η μονοτονία της  $h$  ή η χρήση

της πρότασης: « $H$  είναι 1-1 αν για  $x_1, x_2 \in D_h$

ισχύει:  $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ».

Με τον δεύτερο τρόπο ο μαθητής θα έπρεπε να γράψει: Έστω  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , οπότε:

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1 x_2 = x_2 - x_1 x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η  $h$  είναι 1-1. Με τον πρώτο τρόπο το

πιθανότερο είναι να έγραφε ότι η  $h$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $D_h = (0, 1)$  ως σύνθεση των

παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $\ln x$  (λογαριθμική)

και  $\frac{x}{1-x}$  (ρητή) με  $h'(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{x}{1-x} \right)' =$

$$\frac{1-x}{x} \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{x} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0,$$

άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $D_h = (0, 1)$  και

αντιστρέφεται.

Συνεπώς, έχοντας υπόψη μας αφενός μεν τον χρόνο, αφετέρου δε την αποφυγή αριθμητικού λάθους εξυπηρετεί η πρώτη προσέγγιση.

**Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης.**

Στο **Δ** θέμα του **2017** δίνονταν μια δίτυπη

συνάρτηση  $f$ , όπου ο ένας κλάδος ήταν  $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ ,  $x \in [-1, 0)$  και στο **A2** έπρεπε να βρεθεί η μονοτονία της  $f$ , και κατά συνέπεια η παράγωγος της  $f$ . Εδώ υπήρχε η απαίτηση να γραφεί ο κλάδος της  $f$  ως  $f(x) = (x^4)^{\frac{1}{3}}$ ,  $x \in [-1, 0)$  ή  $f(x) = (-x)^{\frac{4}{3}}$ ,  $x \in [-1, 0)$ , οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^4)^{-\frac{2}{3}} 4x^3, x \in [-1, 0) \text{ ή}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-1), x \in [-1, 0),$$

αντίστοιχα, όπου  $f'(x) < 0$ ,  $x \in [-1, 0)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 0)$ . Θεωρούμε τον πρώτο τρόπο γραφής ως πιο ασφαλή ως προς την αποφυγή μαθηματικού λάθους. Όμως η χρήση του ορισμού θα έδινε πιο γρήγορα και ασφαλή συμπεράσματα. Θεωρώντας  $x_1, x_2 \in [-1, 0)$  με

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow$$

$$(-x_1)^4 > (-x_2)^4 \Rightarrow x_1^4 > x_2^4 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^4} > \sqrt[3]{x_2^4},$$

προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 0)$ .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σταθούμε και στο Γ θέμα των επαναληπτικών εξετάσεων του **2016**, όπου οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Σε τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις περιττού βαθμού, το λεπτό σημείο που πρέπει οι μαθητές να δικαιολογήσουν είναι το γεγονός ότι η παράγωγος έχει σημείο μηδενισμού. Το πρόβλημα αυτό μπορεί εύκολα να υπερκεραστεί, αν απλά χρησιμοποιήσουν τον ορισμό.

### Ακρότατα πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού.

Στο Γ θέμα του **2018** οι μαθητές έπρεπε να ελαχιστοποιήσουν μια πολυωνυμική συνάρτηση 2ου

$$\text{βαθμού } E \text{ με τύπο } E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8).$$

Ο «εύκολος» τρόπος για τους μαθητές είναι να βρουν την παράγωγο της πολυωνυμικής συνάρτησης που είναι  $E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi}$ ,  $x \in (0, 8)$ ,

$$\text{να λύσουν τις } E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4},$$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 8 > x > \frac{32}{\pi+4}$ , οπότε λόγω της συνέχειας της  $E$  στο  $(0, 8)$ , να συμπεράνουν ότι

είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ , γνησίως

αύξουσα στο  $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$  και παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο για  $x = \frac{32}{\pi+4}$ . Όμως, αν χρησιμοποιούσαν

τη θεωρία των τριωνύμων εύκολα θα έβρισκαν ότι αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός,  $\frac{\pi+4}{16\pi} > 0$ , η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό

$$\text{ελάχιστο για } x = -\frac{-64}{2(\pi+4)} = \frac{32}{\pi+4}. \text{ Παρόμοιο}$$

ερώτημα τέθηκε στο **B** θέμα των επαναληπτικών εξετάσεων του **2017**.

### Υπαρξη μοναδικής ρίζας εξίσωσης.

Στο **B2** θέμα του **2019** οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  με  $f(x) = e^{-x} + 2$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ , η οποία βρίσκεται στο  $(2, 3)$ . Το γεγονός ότι δίνεται συγκεκριμένο διάστημα ωθεί τους μαθητές να σκεφτούν θεώρημα Bolzano, θέτοντας συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = e^{-x} + 2 - x$ ,  $x \in [2, 3]$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  ως άθροισμα των συνεχών  $2 - x$  (πολυωνυμική) και  $e^{-x}$  (εκθετική) με  $g(2)g(3) = e^{-2}(e^{-3} - 1) < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $g(x) = 0$  στο  $(2, 3)$ . Για να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα, οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τον ορισμό της μονοτονίας στο  $\mathbb{R}$  ή με έναν απλό έλεγχο του προσήμου της παραγώγου της συνάρτησης  $g$ . Αν το πράξουν, θα καταλήξουν πως η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Παρόμοιες επιλογές είχαν οι μαθητές που αντιμετώπισαν το **Γ3i** του **2019**, το **B2** του **2025**, το **A5** των επαναληπτικών εξετάσεων του **2017**.

### Έλεγχος συνέχειας

#### (ή παραγωγισιμότητας) σε σημείο.

Στο **Γ1** θέμα του **2025** ζητήθηκε να αποδείξουν οι μαθητές πως η  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$  είναι

συνεχής στο μηδέν, αλλά όχι παραγωγίσιμη σε αυτό. Μεγάλος αριθμός γραπτών εξέτασε τη συνέχεια, αλλά και την παραγωγισιμότητα, σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με άμεση συνέπεια να χάνεται άσκοπα πολύτιμος χρόνος. Μια προσεκτικότερη ανάγνωση των ερωτημάτων και κατά συνέπεια η κατανόησή τους, εξοικονομεί περισσότερο χρόνο.

### Εύρεση ασύμπτωτων ευθειών γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Όταν ψάχνουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης  $f$  και έχουμε βρει ότι το ένα από τα δύο πλευρικά όρια στο  $x_0$  ίσο με  $-\infty$  ή  $+\infty$ , τότε καλυπτόμαστε από τον ορισμό για να γράψουμε ότι η

ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και δε χρειάζεται να υπολογίσουμε και το δεύτερο πλευρικό όριο στο  $x_0$ . Χρειάζεται να βρούμε και το δεύτερο πλευρικό όριο, μόνο αν θέλουμε να έχουμε μια εποπτεία για την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Παρόμοιο ερώτημα είναι το **B3** του **2018**.

Επίσης, έχει παρατηρηθεί πως οι μαθητές στις απαντήσεις τους ψάχνουν ξεχωριστά στο  $-\infty$  ή  $+\infty$  για οριζόντιες ασύμπτωτες κι αφού τις βρουν ψάχνουν και για πλάγιες! Πολλές φορές αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα απαράμιλλο μπέρδεμα και τελικά λανθασμένες απαντήσεις. Στην ουσία οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν πως αν μια συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  (είτε στο  $+\infty$ ), τότε αποκλείεται να έχει και πλάγια (μη οριζόντια) στο  $-\infty$  (είτε στο  $+\infty$ ).

Παραδείγματα τέτοιων ερωτημάτων είναι τα θέματα: B3 του 2016, B3 του 2021, Γ2 του 2025 και από τις επαναληπτικές τα: B4 του 2018, B2 του 2019, B3 του 2021, B3 του 2023.

### Είναι η συνάρτηση 1-1;

Για να μελετήσει ένας μαθητής αν μια συνάρτηση είναι 1-1 έχει τρεις βασικές επιλογές: τον ορισμό, την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του ορισμού και την εύρεση της μονοτονίας της στο πεδίο ορισμού της. Πως θα μπορούσε να αποδείξει πως μια συνάρτηση δεν είναι 1-1; Ο απλούστερος και ταχύτερος τρόπος είναι η χρήση ενός αντιπαραδείγματος.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , μπορούμε να παρατηρήσουμε πως  $f(1) = f(2) = 1$ , οπότε εμφανώς δείξαμε πως υπάρχει ένα ζεύγος αριθμών στο πεδίο ορισμού της  $f$  που δεν ικανοποιεί τον ορισμό, άρα η  $f$  δεν είναι 1-1.

### Εύρεση συνόλου τιμών παραγωγίσιμης συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα.

Στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 146 [Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016] παρουσιάζεται μια τεχνική σύμφωνα με την οποία βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$  σε κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  (ή παραγωγίσιμης στο εσωτερικό διαστήματος  $(\alpha, \beta)$  και συνεχούς στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ) με μόνα εφόδια τις τιμές της στα άκρα και τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της στο διάστημα αυτό. Το κλειδί εδώ είναι το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής. Η μεγαλύτερη από όλες τις προαναφερθείσες τιμές θα είναι το μέγιστο της  $f$ , ενώ η μικρότερη το ελάχιστο της  $f$ . Άρα έχουμε βρει το σύνολο τιμών της με πολύ λίγα εφόδια.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, 4] \end{cases}$  για την οποία θέλουμε να βρούμε το σύνολο τιμών της. Η γνωστή μεθοδολογία προστάζει μονοτονία σε κάθε

διάστημα, εύρεση επιμέρους συνόλων τιμών και τελικά την ένωση τους.

Σύμφωνα με την πρακτική που αναπτύσσει το σχολικό βιβλίο αρκεί να εξετάσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο διάστημα  $[-2, 4]$ , να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (δηλαδή τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $[-2, 4]$  στα οποία η πρώτη παράγωγος είτε δεν υπάρχει είτε μηδενίζεται), καθώς και τις τιμές στα άκρα (όλα αυτά τα εφόδια μπορεί και να έχουν προκύψει από πρότερα ερωτήματα σε μια άσκηση). Στο παράδειγμά μας έχουμε κρίσιμα σημεία τα  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ , οπότε  $f(-2) = 4$ ,  $f(4) = \frac{1}{4}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης ελάχιστης τιμής το μέγιστο είναι το 4, ενώ το ελάχιστο είναι το 0 και επομένως το σύνολο τιμών της συγκεκριμένης συνάρτησης είναι το  $[0, 4]$ .

### Συμπεράσματα.

Η αποτελεσματική αξιοποίηση του χρόνου συνιστά έναν κρίσιμο παράγοντα για την επίτευξη βέλτιστων ακαδημαϊκών επιδόσεων από τους μαθητές. Στην εργασία αυτή κυρίως μέσα από δοσμένα θέματα πανελλαδικών εξετάσεων παρουσιάσαμε μερικές αποδεικτικές διαδρομές που υπερτερούν χρονικά έναντι άλλων. Ο μαθητής που θα αναγνωρίσει και στη συνέχεια θα εφαρμόσει αυτές τις διαδρομές θα έχει ένα συγκριτικό πλεονέκτημα. Αυτό βέβαια κρύβει και μια δεξιότητα του μαθητή, η οποία μπορεί να καλλιεργηθεί από τους διδάσκοντες. Επιπλέον θεωρήσαμε σωστό να αναδείξουμε τη σημαντικότητα της παρουσίας των οδηγιών διδασκαλίας στους μαθητές αφού δίνουν περισσότερες προοπτικές στην ενασχόληση με τις ασκήσεις. Τέλος, θα θέλαμε να καταθέσουμε μια πρόταση προς τους μαθητές όσον αφορά τη διαχείριση του χρόνου σε σχέση με τα θέματα.

Ένας μαθητής θα ήταν καλό να αφιερώσει συνολικά 20 λεπτά στο Α θέμα, 40 λεπτά στο Β θέμα και από 50 λεπτά στο Γ και στο Δ θέμα, ώστε να έχει και 20 λεπτά περίπου για να κάνει έναν τελικό έλεγχο, τυχόν διορθώσεις και συμπληρώσεις. Το τελικό 20λεπτο είναι ικανός χρόνος για να διατεθεί από τον μαθητή με τον τρόπο που θα επιλέξει. Με αυτό το πλάνο ο μαθητής θα έχει ασχοληθεί με όλα τα θέματα και θα έχει δυνατότητα να πάρει μονάδες από όλα.

### Ενδεικτική βιβλιογραφία.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών προσανατολισμού Γ' Λυκείου από το ΙΕΠ. (2024). <https://tinyurl.com/yrsww4k57>.



# Ο Ευκλείδης

προτείνει ...

«Η καρδιά των Μαθηματικών είναι τα προβλήματα και οι λύσεις και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ - ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

## ΑΣΚΗΣΗ 453 (ΤΕΥΧΟΣ 137)

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}} = 4x$$

Γιάνναρος Διονύσης - Πύργος

## ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης - Χολαργός)

Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{(x^2 - 4x)^2 + 1}} = 4x - x^2,$$

οπότε  $4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$ .

Αν θέσουμε  $4x - x^2 = u$  και  $1 + \sqrt{u^2 + 1} = t$ , τότε προφανώς  $t > 2$  και επιπλέον:

$$\sqrt{u^2 + 1} = t - 1 \Leftrightarrow u^2 = (t - 1)^2 - 1 \stackrel{u > 0}{\Leftrightarrow} u = \sqrt{t^2 - 2t} \quad (1)$$

Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{3\sqrt{3}}{t} = \sqrt{t^2 - 2t} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} = t\sqrt{t^2 - 2t} \\ \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 27 = 0$$

και με τη βοήθεια του σχήματος Horner παίρνουμε:  $(t - 3) \cdot (t^3 + t^2 + 3t + 9) = 0$ .

Όμως  $t > 2$ , άρα  $t = 3$  και από την (1) προκύπτει  $u = \sqrt{3}$ .

Με  $u = \sqrt{3}$  έχουμε:

$$4x - x^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0,$$

και οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\sqrt{3}}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - \sqrt{3}}$$

που περιέχονται στο διάστημα  $(0, 4)$ .

**Λύση** έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι **Λαγογιάννης Βασίλειος** - Ν. Ηράκλειο, **Δεληστάθης Γιώργος** - Κάτω Πατήσια, **Κτενιαδάκης Μιχαήλ** - Ηράκλειο Κρήτης, **Χασάπης Γεώργιος** - Ρόδος, **Καραβότας Δημήτριος** - Κάτω Αχαΐα και **Μηνάς Στασίνος** - Αθήνα.

## ΑΣΚΗΣΗ 454 (ΤΕΥΧΟΣ 137)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\beta + \gamma}\right)^3 + \left(\frac{\gamma}{\gamma + \alpha}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

Καμπούκος Κυριάκος - Αθήνα

## ΛΥΣΗ (Τζαφέρης Σωτήρης - Πετρούπολη)

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta}\right)^3 + \left(\frac{2\beta}{\beta + \gamma}\right)^3 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \alpha}\right)^3 \geq 3$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Αν θέσουμε

$$x = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}, y = \frac{2\beta}{\beta + \gamma}, z = \frac{2\gamma}{\gamma + \alpha}$$

αρκεί να δείξουμε

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \quad \text{ή} \quad 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 \geq 6, \quad (1)$$

Βασιζόμαστε στο ότι η συνάρτηση

$$f(t) = vt^{v+1} - (v+1)t^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

έχει ελάχιστο στο  $(0, +\infty)$  το  $f(1) = -1$  (για να ελαττώσουμε τον βαθμό).

Πραγματικά είναι

$$f'(t) = v(v+1)t^v - v(v+1)t^{v-1} = v(v+1)t^{v-1}(t-1)$$

οπότε  $f > (0, 1]$  και  $f < [1, +\infty)$ .

Ειδικά για  $v = 2$  έχουμε

$$f(x) \geq -1 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 \geq -1 \Rightarrow 2x^3 \geq 3x^2 - 1$$

οπότε για την απόδειξη της (1) αρκεί να δείξουμε ότι  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3 \geq 6$  ή  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\beta + \gamma}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \alpha}\right)^2 \geq 3 \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\beta + \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma + \alpha}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha^2(\alpha + \gamma)^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2} + \frac{\beta^2(\beta + \alpha)^2}{(\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2} + \frac{\gamma^2(\gamma + \beta)^2}{(\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2} \geq \frac{3}{4}$$

(Στο κλάσμα με αριθμητή  $\alpha$  δημιουργούμε παρο-



νομαστή  $(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$  κτλ). Σύμφωνα με την ανισότητα Swartz για τις τριάδες

$$(\alpha(\alpha + \gamma), \beta(\beta + \alpha), \gamma(\gamma + \beta)) \text{ και}$$

$$((\alpha + \beta)(\alpha + \gamma), (\beta + \gamma)(\beta + \alpha), (\gamma + \alpha)(\gamma + \beta))$$

στο πρώτο μέλος A της ζητούμενης, έχουμε:

$$A \geq \frac{[\alpha(\alpha + \gamma) + \beta(\beta + \alpha) + \gamma(\gamma + \beta)]^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2}$$

οπότε αρκεί

$$[\alpha(\alpha + \gamma) + \beta(\beta + \alpha) + \gamma(\gamma + \beta)]^2$$

$$\geq \frac{3}{4} [(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2]$$

$$\text{ή } 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2$$

$$\geq 3 [(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2]$$

$$\text{ή } (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha)^2$$

$$\geq 3 [(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2]$$

$$\text{ή } [(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2]^2$$

$$\geq 3 [(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2(\beta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2(\gamma + \beta)^2]$$

που ισχύει, αφού από την γνωστή ανισότητα

$$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 \geq \kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa$$

συνεπάγεται

$$(\kappa + \lambda + \mu)^2 \geq (\kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa)$$

για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\kappa, \lambda, \mu$ .

**Λύση** έστειλαν επίσης οι **Ιωαννίδης Αντώνης** - Χολαργός, **Λαγογιάννης Βασίλειος** - Ν. Ηράκλειο **Χασάπης Γεώργιος** - Ρόδος και **Γιάνναρος Διονύσης** - Πύργος.

### Σχόλια

Το παραπάνω πρόβλημα έχει τεθεί πριν **20 περίπου χρόνια** σε διαγωνισμό στο **Βιετνάμ**. Από τις λύσεις που λάβαμε:

• Ο συνάδελφος **Χασάπης** χρησιμοποιεί το λήμμα:

Αν για τους θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει  $\alpha\beta\gamma = 1$ , τότε

$$\frac{1}{(1+\alpha)^3} + \frac{1}{(1+\beta)^3} + \frac{1}{(1+\gamma)^3} + \frac{5}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \geq 1$$

το οποίο αποδεικνύει με κατάλληλη αντικατάσταση και τη βοήθεια συμμετρικών πολυωνύμων.

Κατόπιν αποδεικνύει ότι η αποδεικτέα ανάγεται στην απόδειξη για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς  $a, b, c$  με  $abc = 1$  της ανισότητας

$$1 - \frac{5}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{8}$$

που προκύπτει άμεσα από την προφανή  $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$

• Στη λύση του συνάδελφου **Λαγογιάννη** χρησιμοποιείται η αντικατάσταση

$$x = \frac{\beta}{\alpha}, y = \frac{\gamma}{\beta}$$

και το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^3 + \left(\frac{xy}{1+xy}\right)^3, x, y > 0$$

Η ελάχιστη τιμή προκύπτει όταν  $x = y = 1$  και είναι ίση με  $\frac{3}{8}$ .

• Τέλος, ο συνάδελφος **Γιάνναρος** χρησιμοποιεί τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$  και αποδεικνύει ότι

$$f(x^2) = \frac{1}{(1+x^2)^3} \geq \frac{3}{8(x^6 + x^3 + 1)}$$

που έχει τεθεί σε διαγωνισμό στην **Ρουμανία** και προκύπτει από την προφανή

$$(x-1)^2(5x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 10x + 5)$$

Στη συνέχεια με τη βοήθεια της βοηθητικής πρότασης

« Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  θετικοί με  $\alpha\beta\gamma = 1$  τότε υπάρχουν

$$x, y, z > 0 \text{ ώστε } \alpha = \frac{yz}{x^2}, \beta = \frac{zx}{y^2}, \gamma = \frac{xy}{z^2} \text{ »}$$

και τη βοήθεια της ανισότητας Swartz καταλήγει ότι αρκεί η απόδειξη μιας προφανούς ανισότητας της μορφής

$$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 \geq \kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa$$

### ΑΣΚΗΣΗ 455 (ΤΕΥΧΟΣ 137)

Αν  $\alpha > 1$  να λύσετε την εξίσωση

$$\log_{\alpha+1}(\alpha^x + 2\alpha + 1) = \log_{\alpha}[(\alpha + 1)^x - 2\alpha - 1]$$

**Καρτσακλής Δημήτριος** - Αργίριο



**ΛΥΣΗ** (Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο)

Για τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύουν  $\alpha^x + 2\alpha + 1 > 0$  και  $(\alpha + 1)^x - 2\alpha - 1 > 0$

θέτουμε

$$y = \log_{\alpha+1}(\alpha^x + 2\alpha + 1) = \log_{\alpha}[(\alpha + 1)^x - 2\alpha - 1]$$

οπότε έχουμε:

$$\alpha^x + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^y \text{ και } (\alpha + 1)^x - 2\alpha - 1 = \alpha^y$$

απ' όπου, με πρόσθεση παίρνουμε

$$(\alpha + 1)^x + \alpha^x = (\alpha + 1)^y + \alpha^y, \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (\alpha + 1)^x + \alpha^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία με  $\alpha > 1$  είναι γνησίως αύξουσα οπότε από την (1) προκύπτει ότι  $x = y$ . Με  $x = y$  παίρνουμε

$$(\alpha + 1)^x - \alpha^x - 2\alpha - 1 = 0$$

που έχει προφανή ρίζα τον αριθμό 2. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.

Από την  $(\alpha + 1)^x - \alpha^x = 2\alpha + 1$  προκύπτει ότι

$$(\alpha + 1)^x > \alpha^x \Rightarrow (1 + \alpha^{-1})^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (\alpha + 1)^x - \alpha^x - 2\alpha - 1, \quad x > 0$$

για την οποία ισχύει

$$g'(x) = (\alpha + 1)^x \ln(\alpha + 1) - \alpha^x \ln \alpha > 0$$

αφού  $(\alpha + 1)^x > \alpha^x$  και  $\ln(\alpha + 1) > \ln \alpha > 0$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα οπότε ο αριθμός 2, που ικανοποιεί τους αρχικούς περιορισμούς, είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

**Λύση** έστειλαν επίσης οι **Ιωαννίδης Αντώνης** - Χολαργός, **Δεληστάθης Γιώργος** - Κάτω Πατήσια και **Χασάπης Γεώργιος** - Ρόδος

**ΑΣΚΗΣΗ 456 (ΤΕΥΧΟΣ 137)**

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα εσωτερικά σημεία  $\Delta, E, Z$  στις πλευρές  $B\Gamma, \Gamma A, AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{AEZ} + \sqrt{BZ\Delta} + \sqrt{GE\Delta} \leq \frac{3}{2} \sqrt{AB\Gamma}$$

**Αποστολόπουλος Γεώργιος** - Μεσολόγγι

**ΛΥΣΗ** (Χασάπης Γιώργος - Ρόδος)

Θέτουμε

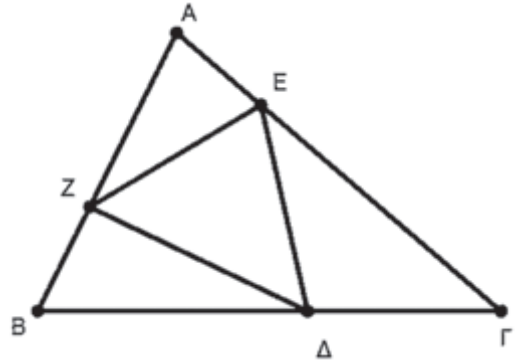
$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{p}{1-p}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{q}{1-q} \text{ και } \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{r}{1-r}$$

όπου  $p, q, r \in (0, 1)$ .

Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Gamma$  έχουν κοινή γωνία την  $A$ , άρα

$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{AZ}{AB} \cdot \frac{AE}{AG} = q(1-p)$$

όπως προκύπτει από τις δυο πρώτες ισότητες με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών.



Παρόμοια, βρίσκουμε ότι

$$\frac{(BZ\Delta)}{(AB\Gamma)} = r(1-q) \text{ και } \frac{(\Gamma E\Delta)}{(AB\Gamma)} = p(1-r).$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & 2\frac{\sqrt{(AEZ)}}{\sqrt{(AB\Gamma)}} + 2\frac{\sqrt{(BZ\Delta)}}{\sqrt{(AB\Gamma)}} + 2\frac{\sqrt{(\Gamma E\Delta)}}{\sqrt{(AB\Gamma)}} \\ &= 2\sqrt{q(1-p)} + 2\sqrt{r(1-q)} + 2\sqrt{p(1-r)} \end{aligned}$$

και από την AM-GM

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{q(1-p)} + 2\sqrt{r(1-q)} + 2\sqrt{p(1-r)} \\ & \leq q + 1 - p + r + 1 - q + p + 1 - r = 3 \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $q = 1 - p$  και  $r = 1 - q$  και  $p = 1 - r$  απ' όπου προκύπτει ότι

$$p = q = r = \frac{1}{2}$$

Επομένως η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $\Delta$  μέσο της  $B\Gamma$  και  $E$  μέσο της  $AG$  και  $Z$  μέσο της  $AB$ .

**Λύση** έστειλαν επίσης οι **Ιωαννίδης Αντώνης** - Χολαργός, **Δεληστάθης Γιώργος** - Κάτω Πατήσια και **Χασάπης Γεώργιος** - Ρόδος, **Λαγογιάννης Βασίλειος** - Ν. Ηράκλειο και **Τσιώλης Γεώργιος** - Τρίπολη.

**Λίγα λόγια για την άσκηση 450**

Σχετικά με την **Άσκηση 450** που είχε προτείνει ο εκλεκτός συνεργάτης της στήλης **Βασίλης Λαγογιάννης**, επανήλθε επισημαίνοντας ότι με τη λύση που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο τεύχος δεν προσδιοριζόταν η ζητούμενη ελάχιστη τιμή.

Συγκεκριμένα αναφέρει ότι το πρόβλημα που υπάρχει στη λύση που έδωσε ο συνάδελφος και παρουσιάσαμε στο περιοδικό είναι το εξής:

«Η διαπίστωση ότι ισχύει η ανισότητα  $E \geq \sqrt{10}$  είναι ορθή. Απαγορεύεται όμως ο πολλαπλασιασμός της παραπάνω ανισότητας με την μεταβλητή  $\alpha$  (πλευρά ΒΓ) διότι το εμβαδό  $E$  είναι εξαρτημένο από το  $\alpha$ . Η ορθή απόδειξη είναι αρκετά πιο σύνθετη».

Για το λόγο αυτό παραθέτει εκτενή τεκμηρίωση χρησιμοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία και προτείνει μια λύση την οποία σκιαγραφούμε παρακάτω.

**Σκιαγράφηση της λύσης της άσκησης 450**

Από την πολλαπλή ισότητα

$$2(AB\Gamma) = v_\alpha \alpha = v_\beta \beta = v_\gamma \gamma$$

και τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει ότι

$$\frac{1}{(AB\Gamma)^2} = -\frac{1}{v_\alpha^4} + 2\left(\frac{1}{v_\beta^2} + \frac{1}{v_\gamma^2}\right)\frac{1}{v_\alpha^2} - \left(\frac{1}{v_\beta^2} + \frac{1}{v_\gamma^2}\right)^2$$

και από τον τύπο  $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4(AB\Gamma)}$ , ότι

$$R = \frac{8(AB\Gamma)^2}{v_\alpha v_\beta v_\gamma} \cdot \frac{1}{4(AB\Gamma)} \Rightarrow \frac{1}{(AB\Gamma)^2} = \frac{2}{R v_\alpha v_\beta v_\gamma}$$

Από τις παραπάνω ισότητες με αντικατάσταση  $v_\beta = \sqrt{5}$ ,  $v_\gamma = 2\sqrt{2}$  και μετά από πράξεις καταλήγουμε στην

$$R = f(v_\alpha) = \frac{1600}{\sqrt{10}} \cdot \frac{v_\alpha^3}{-9v_\alpha^4 + 1040v_\alpha^2 - 1600}$$

Με τη βοήθεια του διαφορικού λογισμού βρίσκουμε ότι η συνάρτηση είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right]$
- Γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{2\sqrt{10}}{3}, +\infty\right)$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή της προκύπτει όταν

$$v_\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{ και είναι ίση με } f\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right) = \dots = \frac{5}{3}$$

**Παρατήρηση:**

Με δεδομένα τα μεγέθη  $v_\beta$ ,  $v_\gamma$  και  $R$ , προκειμένου να κατασκευασθεί το τρίγωνο, απαιτείται η επίλυση, με άγνωστο το  $v_\alpha$ , τεταρτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης παρόμοιας με την παράσταση που συναντάμε παραπάνω στον ορισμό της συνάρτησης. Σε περίπτωση που για δεδομένα  $v_\beta$ ,  $v_\gamma$  δοθεί για το  $R$  τιμή μικρότερη της  $R_{\min}$ , η οποία κατά περίπτωση υπολογίζεται σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, η τεταρτοβάθμια θα έχει δύο ρίζες αρνητικές και δύο μιγαδικές, οπότε το τρίγωνο δεν κατασκευάζεται.

**Προτεινόμενα Θέματα**

**461.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $P$  στο εσωτερικό του. Οι ευθείες  $AP$ ,  $BP$ ,  $\Gamma P$  τέμνουν τις πλευρές  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ ,  $AB$  στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  αντίστοιχα. Αν τα τρίγωνα  $APZ$ ,  $BPA$  και  $\Gamma PE$  έχουν ίσα εμβαδά, να αποδείξετε ότι το  $P$  είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.

**Καρτσακλής Δημήτριος** – Αγρίνιο

**462.** Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + \sqrt{x^8 + 1}}}} = x^{15}$$

**Γιάνναρος Διονύσης** – Πύργος.

**463.** Έστω  $(O_1, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$  με  $R_1 > R_2$  δυο τεμνόμενοι κύκλοι και  $\theta$  η γωνία τους. Να αποδείξετε ότι το κοινό μέρος των δυο κύκλων έχει εμβαδόν

$$E = (R_1^2 - R_2^2) \text{τοξεφ} \frac{R_2 \eta \mu \theta}{R_1 + R_2 \text{συν}\theta} + \theta R_2^2 - R_1 R_2 \eta \mu \theta$$

Υπενθυμίζουμε ότι ως γωνία μεταξύ δύο τεμνόμενων κύκλων ορίζεται η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των κύκλων σε οποιοδήποτε από τα δύο κοινά σημεία τομής τους.

**Τσιώλης Γεώργιος** – Τρίπολη

**464.** Θεωρούμε την ακολουθία  $(\alpha_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  με:

$$\alpha_1 = 2 \text{ και } \alpha_{n+1} = \alpha_n^2 - \alpha_n + 1$$

Να αποδείξετε ότι ανά δυο οι όροι της είναι σχετικά πρώτοι. **Αντωνόπουλος Νίκος** – Ίλιον



# Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

## Οι Γρίφοι

Γρίφος είναι ένα πνευματικό παιχνίδι, ένα πρόβλημα, συχνά σε μορφή αινίγματος, που απαιτεί αντισυμβατική σκέψη, λογική, υπολογισμό ή σπαζοκεφαλιά για να λυθεί. Είναι ένα δυσνόητο ζήτημα που περιγράφεται με εικόνες, σχήματα ή αριθμούς, ενώ μεταφορικά αναφέρεται σε οτιδήποτε είναι περίπλοκο, ακατανόητο, παράξενο και δύσκολο να ερμηνευτεί. Το άλυτο πολλές φορές.

Ο πρώτος υπολογιστής, το πρώτο γρανάζι, το πρώτο ρολόι

### Ο μεγάλος γρίφος

Τον Νοέμβρη του 1900 σφουγγαράδες από τη Σύμη, νότια της Πελοποννήσου στη θάλασσα των Αντικυθήρων, σε ναυάγιο του 1<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ. ανακάλυψαν σε βάθος 60 μέτρα, διάφορα αγάλματα και αντικείμενα. Μεταξύ αυτών και ένα **σκουριασμένο παλιοσίδηρο**. Ευτύχημα ήταν ότι ο Διευθυντής του Αρχαιολογικού Μουσείου Β. Στάης, που παρέλαβε αυτό το σκουριασμένο παλιοσίδηρο, διέκρινε κάποιο γρανάζι και κατάλαβε πως ήταν κάτι σημαντικό. Διαφυλάχτηκε και μελετήθηκε 60 χρόνια μετά με **ακτίνες Χ, για να λυθεί ο Γρίφος και να αποκαλυφθεί η πιο σημαντική κατασκευή της ανθρωπότητας που έγινε πριν από 2200 χρόνια.**



Όσο δύσκολο ήταν να γίνει ημερολόγιο τόσο δύσκολο ήταν να γίνει και το ρολόι. Το ρολόι ήταν ένα ακριβές εργαλείο για την πλοήγηση. Τα πρώτα μη ηλιακά ρολόγια έγιναν το 13<sup>ο</sup> αιώνα και τα φορητά το 15<sup>ο</sup> αιώνα. Όταν έγιναν τα πρώτα φορητά ωρολόγια στη Γερμανία και την Ελβετία με γρανάζια από χαλκό και ελατήρια, πιστεύαμε ότι ήταν αυτοί οι πρώτοι που ανακάλυψαν τα γρανάζια και τις υπολογιστικές μηχανές. Μέχρι τον 20<sup>ο</sup> αιώνα αυτό πιστεύαμε. Παρ' όλα αυτά ο **Ήρωνας** ανέφερε ότι το πρώτο γνωστό οδοντωτό ρολόι εφευρέθηκε τον **3ο αιώνα** προ Χριστού από τον μεγάλο μαθηματικό, φυσικό και μηχανικό **Αρχιμήδη**.

### Μηχανισμός των Αντικυθήρων

Αυτό το παλιοσίδηρο ήταν ο αρχαιότερος πολύπλοκος μηχανισμός, πλανητικής λειτουργίας, ο πρώτος γνωστός αναλογικός υπολογιστής της ανθρωπότητας, ο **Μηχανισμός των Αντικυθήρων**. Είχε κατασκευαστεί το 2<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα κατά την Ελληνιστική περίοδο. Πολλά πανεπιστήμια και



πολλοί επιστήμονες μελετητές, με ειδικές μηχανές και ακτίνες, έναν αιώνα τώρα μελετούν και θα συνεχίσουν (στο αρχαιολογικό μας Μουσείο για να μη μετακινηθεί) να μελετούν αυτό κορυφαίο κατασκεύασμα της αρχαιότητας

που αποτελείται από 82 περίπου ορειχάλκινα γρανάζια, αντιπροσωπεύοντας υψηλή τεχνολογία. Έχει βρεθεί ότι έκανε ακριβή υπολογισμό της θέσης του Ηλίου, της Σελήνης, των πλανητών, υπολόγιζε τις φάσεις της Σελήνης, προέβλεπε ηλιακές και σεληνιακές εκλείψεις, προσδιόριζε τις ημερομηνίες τέλεσης των αρχαίων αγώνων (Ολυμπιακοί, Ίσθμια, Πύθεια κλπ). Στις εξωτερικές πλάκες και στο εσωτερικό του έφερε αστρονομικές, γεωγραφικές και τεχνολογικές επιγραφές. Τα τελευταία



χρόνια ένας σπουδαίος καθηγητής, ένας φωτισμένος άνθρωπος, ο **Κώστας Κοτσανάς**, κατασκεύασε αυτές τις μηχανές, που περιγράφονται ότι είχαν οι αρχαίοι Έλληνες και τις έκανε γνωστές σε όλο τον κόσμο, εκθέτοντας μηχανές του Ήρωνα, του Κτησίβιου, κ.ά. σε όλες τις Ηπείρους της Γης. Την έκθεση αυτή πρέπει να δουν όλα τα παιδιά, όλοι οι μαθητές. Είναι στο κέντρο της Αθήνας, είναι στην Αρχαία Ολυμπία, αλλά και η μετακινούμενη που πηγαίνει σε κάθε πόλη της χώρας. Στη Σύμη στις 17 και 18 **Ιανουαρίου 2026**, έγινε **Διεθνές Συνέδριο για τον Μηχανισμό των Αντικυθήρων**. Ο κύριος **Κ. Κοτσανάς** και ο γιός του **Παναγιώτης** συμμετείχαν στο Διεθνές Συνέδριο με θέμα: **«Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων, ο Ίππαρχος ο Ρόδιος και οι Συμιακοί Ήρωες του Βυθού»**. Εκεί ανέδειξαν το επιστημονικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον που γέννησε ένα από τα σημαντικότερα τεχνολογικά

επιτεύγματα της ανθρωπότητας, υπογραμμίζοντας τον ρόλο της μουσειακής αφήγησης ως γέφυρας μεταξύ επιστήμης και κοινωνίας.



Συγκινητική στιγμή της διοργάνωσης αποτέλεσε η τελετή αποκαλυπτηρίων του μπρούτζινου αγάλματος του ηρωικού Δύτη-Καπετάνιου **Δημητρίου Κοντού**. Το άγαλμα αποτυπώνει το διαχρονικό πνεύμα της ναυτοσύνης των Ελλήνων, της τόλμης και της συλλογικής προσφοράς των Συμιακών δυτών. Της διαχρονικής τους θυσίας προς τον ελληνικό και παγκόσμιο πολιτισμό. Πίσω από κάθε μεγάλη επιστημονική ανακάλυψη βρίσκονται **άνθρωποι που τόλμησαν**. (Στην επιχείρηση για να ανασύρουν τα αντικείμενα του ναυαγίου, ένας **δύτης έχασε τη ζωή του** και δυο ακόμα έμειναν παράλυτοι από **τη νόσο των δυτών**). Η ενημέρωσή, μας έγινε από την καθηγήτρια κα Πούλιου Χριστίνα, που παρακολούθησε το συνέδριο, την οποία και ευχαριστούμε.

## Οι δικοί μας γρίφοι

### Ο παράξενος αριθμός

Ο καθηγητής έγραψε στον πίνακα τον αριθμό 142857 και είπε στους μαθητές να βρουν με ποιον αριθμό πρέπει να τον πολλαπλασιάσουν ώστε το γινόμενο να είναι 857142. Εσείς μπορείτε;

### Οι ρίζες και τα τετράγωνα

Υπολογίστε τις ρίζες  $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1}$ ,  $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1}$ , ...,  $\sqrt{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 1}$  ....

Τι παρατηρείτε;

### Οι Φράουλες

Σε μια συγκομιδή φράουλας ξεχάστηκαν μερικά κιβώτια με 100 κιλά στον ήλιο. Οι φράουλες είχαν περιεκτικότητα σε νερό 98% και τώρα έγινε 96%. Πόσα κιλά ζυγίζουν;



### Το ψωμί

Ο αρτοποιός για να παρασκευάσει το ψωμί προσθέτει στο αλεύρι νερό και δημιουργεί τη ζύμη. Η ζύμη έχει περιεκτικότητα 40% σε νερό. Όταν ψηθεί η περιεκτικότητα γίνεται 30%. Ο αρτοποιός κάθε μέρα πουλάει 100 κιλά ψωμί. Πόσα χρήματα κερδίζει αν ένα κιλό ψωμί κοστίζει 2€ και ένα κιλό αλεύρι 1,5€;

### Μαντέψτε αριθμούς

A) Λέτε στο φύλο σας να σκεφτεί ένα μονοψήφιο, ύστερα εσείς αποκαλύψτε τον.

Ζητήστε να τον πολλαπλασιάσει με τον αριθμό 5291 και το αποτέλεσμα με το αριθμό 21, έτσι θα δει έκπληκτος τον αριθμό που σκέφτηκε 6 φορές.

B) Ζητήστε τώρα να σκεφτεί ένα διψήφιο και να τον πολλαπλασιάσει με τον αριθμό 481 και το αποτέλεσμα με το αριθμό 21, έτσι θα δει έκπληκτος τον αριθμό που σκέφτηκε 3 φορές.

Γ) Ζητήστε τώρα να σκεφτεί ένα 3ψήφιο και να τον πολλαπλασιάσει με τον αριθμό 77 και το αποτέλεσμα με το αριθμό 13, έτσι θα δει έκπληκτος τον αριθμό που σκέφτηκε 2 φορές.



## Απαντήσεις στους γρίφους τεύχους 138

### Τέλειο τετράγωνο

Είναι:  $v(v+1)(v+2)(v+3)+1 = (v^2 + 3v+1)^2$ .

### Κύβοι και τετράγωνο

$(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3) = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$

### Ο Γλάρος και τα πλοία

Τα πλοία συναντήθηκαν σε 3 ώρες. Ο Γλάρος επομένως πετούσε για 3 ώρες με 40 μίλια την ώρα, άρα πέταξε συνολικά 120 μίλια.

### Η διαδρομή στο παιχνίδι

Θα τελειώσουν ταυτόχρονα. Κάθε μαθητής θα κάνει:

$$2x(70+140+210+280+350+420+490+560) = 2x2520 \text{ εκατοστά ή } 50,40 \text{ μέτρα ο καθένας.}$$

### Ο Ανθοπώλης

Τα τριαντάφυλλα είναι  $68=4 \cdot 17$ , τα γαρύφαλλα  $56=4 \cdot 14$  και οι βιολέτες  $60=4 \cdot 15$ . Άρα θα βάλει 4 λουλούδια από κάθε είδος και θα φτιάξει 14 ανθοδέσμες θα περισσέψουν 12 γαρύφαλλα και 4 βιολέτες.

### Το σιντριβάνι

Αφού το σιντριβάνι και ο κήπος είναι ομόκεντροι κύκλοι έχουμε:

$$E_{\text{ανθοκητίου}} = \pi R^2_{\kappa} - \pi R^2_{\sigma} = \pi(R^2_{\text{κήπου}} - R^2_{\text{σιντριβανιού}}) = \pi(10/2)^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ τ.μ.}$$



# Το Βήμα του Ευκλείδη

## Πώς να το λύσω ή πώς να το αποδείξω;

Γιάννης Νικολόπουλος

**Σ**την καθημερινή ζωή, στα Μαθηματικά, στη Φυσική κ.τ.λ., υπάρχουν προβλήματα-θέματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε. Ωστόσο είναι διαφορετικό να λύσω ένα πρόβλημα, όπως να υπολογισθεί ο όγκος ενός στερεού, από την απόδειξη ενός θεωρήματος. Ας ξεκινήσουμε από τη συγγραφή του **Polya**<sup>1</sup> (Ούγγρος Μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στη Μαθηματική Επιστήμη) όπου



Polya (1887 - 1985)

στο βιβλίο του: Πώς να το λύσω; Μάς δείχνει δρόμους, κατευθύνσεις για να χειρισθούμε μαθηματικά προβλήματα. Διαχωρίζει τα προβλήματα-θέματα σε «εύρεσης» και «απόδειξης», στην πρώτη κατηγορία καταχωρούνται τα προβλήματα υπολογισμού που ταιριάζουν περισσότερο με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, ενώ στα προβλήματα «απόδειξης» ανήκουν τα προβλήματα που χρήζουν θεμελιωμένη απόδειξη και ταιριάζουν με τα θεωρητικά μαθηματικά (Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών). Αφού λοιπόν μελετήσουμε και κατανοήσουμε πλήρως το πρόβλημα θα πρέπει να το κατατάξουμε στα «εύρεσης» ή «απόδειξης», ωστόσο πρέπει να γνωρίζουμε ότι η πρώτη κατηγορία περιέχει δεδομένα και ζητούμενα, ενώ βέβαια η συνθήκη που τα συνδέει συνήθως είναι ο **τύπος** που θα χρειασθεί να μας δώσει τη λύση, καθώς στη δεύτερη κατηγορία αντίστοιχα έχουμε την υπόθεση και το συμπέρασμα.

### Όταν υπάρχει πρόβλημα τι κάνω;

Η επίλυση προβλήματος, ως μια μέθοδος για την κατανόηση των Μαθηματικών, στηρίζεται στη βάση: «Υπάρχει πρόβλημα, άρα αναζητούμε τη λύση του». Εφόσον προκύψει το πρόβλημα αρχίζουν οι σκέψεις, όπως με τι μοιάζει; Αν έχουμε αντιμετωπίσει αντίστοιχο; Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας ακολουθούμε την παρακάτω λογική σειρά.

Πώς το σκέφτηκες; Στη διαπραγμάτευση αυτή και στην προσπάθεια να απαντηθεί το ερώτημα που προηγήθηκε, θα καταθέσουμε στην πράξη την κινητικότητα του μαθηματικού Νου κατά την Αναλυτική διαδικασία, όταν είμαστε απέναντι από ένα Πρόβλημα Γεωμετρίας, με στόχο την επίλυση του ή όταν ξεκινάμε τη διαδικασία κατασκευής ενός Γεωμετρικού προβλήματος. Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος αποτελείται από τα στάδια: Ανάλυση (ή Σκέψη), Σύνθεση (ή Κατασκευή), Απόδειξη με Διερεύνηση (ή Επαλήθευση). Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι μία από τις βασικές επιδιώξεις για να επιλύσουμε ένα σύνθετο πρόβλημα είναι να το διαμερίσουμε σε απλούστερα<sup>2</sup>. Σημειώνουμε ότι, η διαδικασία διάσπασης ενός σύνθετου προβλήματος σε μικρότερα και διαχειρίσιμα μέρη, αποτελεί Ανάλυση του προβλήματος.

Η επίλυση προβλήματος παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον στην εκπαιδευτική κοινότητα και αντιμετωπίζεται από τη μια ως δεξιότητα των μαθητών και από την άλλη ως διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, όλοι καταλήγουν ότι διδάσκεται με κατάλληλο τρόπο και επιφέρει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση εφόσον βοηθά στην κατανόηση των εννοιών. Βέβαια τα προβλήματα διαφέρουν, εφόσον άλλα είναι τα προβλήματα της καθημερινότητας και άλλα τα καθαρά μαθηματικά προβλήματα.

### Τα Είδη των μαθηματικών προβλημάτων

Τα μαθηματικά προβλήματα είναι τα **Ανοικτά**, τα **Κλειστά** όπως επίσης και τα Αντίστροφα.

Ένα κλειστό πρόβλημα έχει πολύ ξεκάθαρους στόχους και δεν επιτρέπει την ανάπτυξη «αποκλίνουσας» σκέψης. Ένα πρόβλημα είναι «κλειστό» αν η κατάσταση εκκίνησης, η τελική του κατάσταση και ο στόχος του



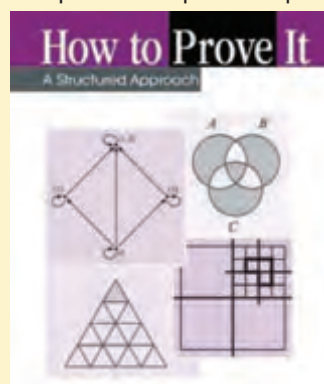
εξηγούνται με σαφήνεια. Εάν η κατάσταση εκκίνησης ή/και η κατάσταση στόχου είναι ανοικτές, δηλαδή δεν είναι κλειστές, έχουμε ένα ανοικτό πρόβλημα.

Επομένως, ένα πρόβλημα είναι «**ανοικτό**», εάν δεν υπάρχει σαφήνεια είτε με την εισαγωγή του, είτε με τους στόχους του και βέβαια ανοικτό σε αποκλίνουσες σκέψεις. Στα ανοικτά προβλήματα χρειάζεται ο λύτης/μαθητής να τα συμπληρώσει με εικασίες και δεδομένα.

**Για παράδειγμα, έχουμε δύο πόλεις που απέχουν η Α από το λιμάνι 60 km και η Β 80 km. Πόσο απέχουν μεταξύ τους οι δύο πόλεις;** Εν προκειμένω πρέπει ο μαθητής να εικάσει αν οι δύο πόλεις είναι στην ίδια ευθεία με το λιμάνι, όπου αν ξεκινήσει κάποιος από την Β πόλη και καθ' οδόν προς το λιμάνι συναντήσει την Α πόλη τότε απέχουν 20 km. Ωστόσο αν είναι αντικρουστά, δηλαδή ξεκινήσεις από την Α περάσεις το λιμάνι και συναντήσεις την Β τότε η απόσταση είναι 140 km. Επιπλέον μπορεί να σκεφτεί ότι σχηματίζουν περίπου ορθή γωνία όπου στην κορυφή της γωνίας είναι το λιμάνι και αυτή η εικασία μπορεί να προκύψει εφόσον ο μαθητής αναλογισθεί ότι οι αποστάσεις δεν είναι τυχαίες εφόσον οι κάθετες πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου «**ταιριάζουν**»:  $60^2 + 80^2 = x^2$  άρα  $3600 + 6400 = x^2$  άρα  $10000 = x^2$  και  $x = 100\text{km}$ . Όπως είδαμε σε τούτο το πρόβλημα μπορεί να έχουμε τουλάχιστον τρεις λύσεις ανάλογα με τις σκέψεις-εικασίες που θα πραγματοποιήσει ο μαθητής για να συμπληρώσει το ανοικτό πρόβλημα.

Είναι αναγκαίο να τονίσουμε τον ρόλο των **εικασιών** στη διαδικασία υπολογισμού και κυρίως στην διαδικασία απόδειξης, δηλαδή να διατυπωθούν εικασίες, έτσι ώστε να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις. Εφόσον, σε κάποιες μάλιστα περιπτώσεις η λογική απόρριψη κάποιων λαθεμένων εικασιών ενδεχομένως να ανοίγει πύλες εισόδου σε σωστές σκέψεις.

Ας δούμε και τι ακριβώς είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα; Σε αυστηρά μαθηματικό επίπεδο, αντίστροφο πρόβλημα είναι αυτό που μας δίνονται μερικά πρότυπα και οι αντίστοιχες εικόνες τους μέσω μιας άγνωστης απεικόνισης και μας ζητείται να βρούμε τον τύπο αυτής της απεικόνισης. Τα αντίστροφα προβλήματα είναι δύσκολα να επιλυθούν και πάσχουν από έλλειψη μοναδικότητας, δηλαδή μοιάζουν με τα ανοικτά προβλήματα. Τα σχετικά ευκολότερα και καλά τοποθετημένα προβλήματα είναι τα ευθέα προβλήματα όπου γνωρίζουμε τα πρότυπα και την απεικόνιση-συνάρτηση και αναζητούμε τα αποτελέσματα.



Ο Keller είχε δηλώσει ότι: «κάθε πρόβλημα έχει δύο μορφές, μια εύκολη και μια δύσκολη, η εύκολη λέγεται το ευθύ πρόβλημα και η δύσκολη το αντίστροφο πρόβλημα»<sup>3</sup>.

## Επίλυση Προβλήματος

Τα βασικά χαρακτηριστικά που αποδόθηκαν στην έκφραση «επίλυση προβλήματος» είναι ο **σκοπός**, η **διαδικασία** και η **δεξιότητα** (Branca, 1980), όπου βασικός σκοπός και πραγματικός λόγος που διδάσκονται τα Μαθηματικά είναι η ανάπτυξη της δεξιότητας για την επίλυση προβλημάτων της ζωής.

Σύμφωνα με το μοντέλο του Dewey (1980 & 2016), χωρίς να είναι το μοναδικό, προτείνονται τα παρακάτω βήματα:

1. Εντοπισμός του προβλήματος,
2. Καθορισμός της δυσκολίας του,
3. Διαμόρφωση πιθανών λύσεων και
4. Έλεγχος της καταλληλότητας μέσω πειραματισμών που οδηγούν στην αποδοχή ή στην απόρριψη της λύσης.

Θα προσθέταμε ένα επιπλέον βήμα μετά τον εντοπισμό του προβλήματος, αναγκαία η ένταξη του προβλήματος σε μια γενικότερη κατηγορία. Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία αν το πρόβλημα εντοπίζεται στην ισότητα τριγώνων ή πρόκειται για γεωμετρικό τόπο; Έχει μεγάλη σημασία να εντοπίζεται η θεματική περιοχή που εντάσσεται το πρόβλημα γιατί οδηγεί εύκολα στις ευρετικές.

Ο πυρήνας του μαθηματικού έργου είναι η επίλυση προβλημάτων τα οποία είναι ανοικτά για τη μαθηματική επιστήμη. Στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας, η επίλυση προβλήματος συνιστά μια μαθησιακή προοπτική την οποία επέβαλε η ανάγκη της "ενεργού" μάθησης των Μαθηματικών και της παραλληλίας της με τον τρόπο που δομείται αυτό καθ' αυτό το μαθηματικό έργο. Ο Polya ήταν

ο πρώτος που διατύπωσε γενικές στρατηγικές (τις Ευρητικές) για την επίλυση προβλημάτων, ενώ άλλοι ερευνητές αναλύουν έκτοτε όλες εκείνες τις ιδιαίτερες διεργασίες του ανθρώπινου νου όταν επιλύει προβλήματα στα μαθηματικά ώστε, με βάση την ανάλυση αυτή, να διαμορφωθούν προσεγγίσεις διδακτικής παρέμβασης. Η **Ευρητική** φιλοδοξεί να βοηθήσει τον οποιονδήποτε που καταγίνεται με τα Μαθηματικά· όχι τόσο να επεκτείνει τις γνώσεις του (από την άποψη των περιεχομένων) όσο κυρίως να θεμελιώσει μέσα του μια θετική στάση αντιμετώπισής τους. Δηλαδή, σκοπός μας δεν είναι να δείξουμε στους αναγνώστες τι είναι Μαθηματικά αλλά μάλλον να κάνουν και οι ίδιοι Μαθηματικά, λύνοντας προβλήματα<sup>4</sup>.

### Τι είναι και πού στοχεύουν οι ευρητικές;

Όπως αναφέρεται παραπάνω, «ευρητική» είναι η τέχνη της επινόησης και εν προκειμένω να επινοήσουμε τον τρόπο-μέθοδο να λύσουμε το πρόβλημα. Ο σκοπός της αξιοποίησης της ευρητικής είναι η μελέτη μεθόδων και κανόνων της ανακάλυψης και της επινόησης. Ίχνη μιας τέτοιας μελέτης παρουσιάζεται στον Πάππο. Συγκεκριμένα, στο Lakatos (1976), αναφέρεται: «Το ότι οι εικασίες προηγούνται των αποδείξεων, στην ευρητική διαδοχή ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους μαθηματικούς. Αυτό ήταν επακόλουθο της ευρητικής προτεραιότητας της ανάλυσης σε σχέση με τη σύνθεση»<sup>5</sup>.

Ο Πάππος χρησιμοποιεί ένα ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta = 13$  μονάδες και τη μία βάση  $AD = 6$  και τη  $B\Gamma = 16$  μονάδες και αναζητεί το εμβαδόν του τραapeζίου.

Στο στάδιο της ανάλυσης:

- 1) Μετασχηματίζει (μέσω βοηθητικών κατασκευών) το αρχικό σχήμα σε ισοδύναμο (π.χ. το τραπέζιο σε ορθογώνιο).
- 2) Για το μετασχηματισμό αυτό χρησιμοποιεί τα δοθέντα, δηλαδή τα μήκη των πλευρών του τραapeζίου.

3) Καταλήγει δε στον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού μέσω του εμβαδού του ισοδύναμου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Αυτή είναι μια ευρητική που «ψάχνει» για κάποια επινόηση, για κάποιο μετασχηματισμό όπου από τραπέζιο οδηγείται σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Φέρω  $AE \parallel \Gamma\Delta$  [A] βοηθητική κατασκευή] και φέρνω  $AZ \perp B\Gamma$  [B] βοηθητική κατασκευή]

Το συμπέρασμα: Το  $AE\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

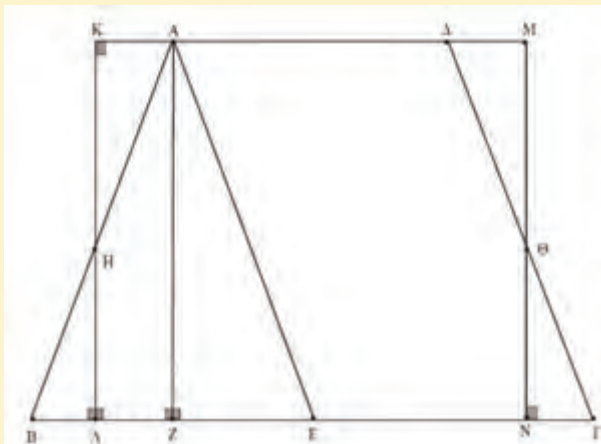
α)  $AD = E\Gamma = 6$ ,  $\Gamma\Delta = AE = 13$ , άρα β)  $BE = 10$

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AKH$  και  $HBL$  είναι ίσα γιατί:  $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$  κατακορυφήν γωνίες και  $KH = HL$ , αντίστοιχα και τα τρίγωνα:  $\Delta M\Theta$  και  $\Theta N\Gamma$ .

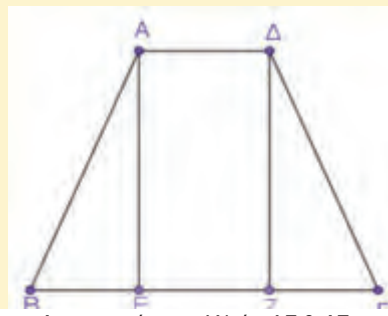
Παρατηρούμε ότι κατά τη φάση της ανάλυσης εφαρμόζουμε επιπλέον και υπολογιστικές διαδικασίες όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Ακολουθεί μια άλλη απόδειξη που δε στηρίζεται στην επινόηση της μετατροπής του τραapeζίου σε ορθογώνιο αλλά αρκετά απλά φέρνουμε τα ύψη από τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$ , υπολογίζουμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα το ύψος  $AE$  και το αντίστοιχο ύψος  $\Delta Z$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABE$  εφαρμόζουμε το Π.Θ.:  $AB^2 = AE^2 + BE^2$  και βρίσκουμε ότι  $AE = 12$ . Άρα το κάθε τρίγωνο έχει εμβαδόν  $5 \cdot \frac{12}{2} = 30$  οπότε τα δύο τρίγωνα



Μετασχηματισμός από Τραπεζίο σε Ορθογώνιο



Δημιουργία των Υψών  $AE$  &  $\Delta Z$ , ως βοηθητικά ευθύγραμμα τμήματα.

$30+30=60$ . Το ορθογώνιο ΑΕΖΔ έχει εμβαδόν  $6 \cdot 12=72$ , άρα σύνολο  $60+72=132$ . Εδώ δεν μπορούμε να αναφέρουμε τη λογική της ευρετικής μεθόδου, διότι δεν μετασχηματίσαμε το δεδομένο σχήμα, απλά χρησιμοποιήσαμε τα ύψη ως βοηθητικά ευθύγραμμα τμήματα. Βέβαια εδώ στην ουσία χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο υπολογισμού τραπεζίου:  $\frac{B+\beta}{2} \cdot u$  αλλά τότε αυτά ήταν άγνωστα και αναγκαστικά έπρεπε ο Πάππος να χρησιμοποιήσει ευρετικές.

## Λύνοντας Πρόβλημα Ρυθμού Μεταβολής

Εδώ και χρόνια ζούμε την εποχή των «Συμβολιστικών Μαθηματικών». Για να κατανοηθεί ένα πρόβλημα είναι αναγκαίο να μπορεί ο λύτης να το μεταφράσει από τη μαθηματική διατύπωση. Πώς; Με τη βοήθεια της Μαθηματικής Λογικής, των λογικών συνδέσμων, των ποσοδεικτών, της εναλλαγής των ποσοδεικτών κατά την άρνηση, των κατηγορημάτων, των μεθόδων απόδειξης κ.λ.π.<sup>6</sup>

Ας ξεκινήσουμε από το πρόβλημα Ρυθμού Μεταβολής όπως το αναφέρει ο Ρολγα: Υπάρχει ένας κώνος, στη μορφή όπως οι κατωτέρω, και γεμίζει με νερό με ρυθμό  $r$ , εννοούμε ότι η αύξηση του όγκου γίνεται με τον εν λόγω ρυθμό. Οπότε μόλις ακούσει ο μαθητής τη λέξη «ρυθμός» αμέσως πρέπει να πάει το μυαλό του σε υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής. Εδώ έχουμε υπολογιστικό πρόβλημα και βρίσκεται στην περιοχή της παραγώγου, εφόσον με την παράγωγο υπολογίζεται η μεταβολή που ζητάμε. Μάλιστα, πρέπει η παράγωγος να είναι θετική, εφόσον έχουμε αύξηση του όγκου του νερού. Έτσι, οφείλει να σκεφτεί ο μαθητής για να λύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Εμείς θα αναφερθούμε σε ένα λίγο διαφορετικό πρόβλημα όπου δεν αυξάνει αλλά μειώνεται το νερό στο κώνο όπως φαίνεται στο τελευταίο σχήμα.

Ενώ λοιπόν στην πρώτη περίπτωση (αύξηση) το  $\frac{dV}{dt} = r > 0$  στη δεύτερη περίπτωση (μείωση)

$\frac{dV}{dt} = r < 0$ . Τώρα στη συνέχεια πως θα λειτουργήσουμε, πως θα προχωρήσουμε σε σχέση με τις

αντιλήψεις και σκέψεις για τον υπολογισμό του προβλήματος.

**1<sup>η</sup> κίνηση:** Ποιο είναι το ζητούμενο; Ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η επιφάνεια του νερού ή το ύψος της στάθμης.

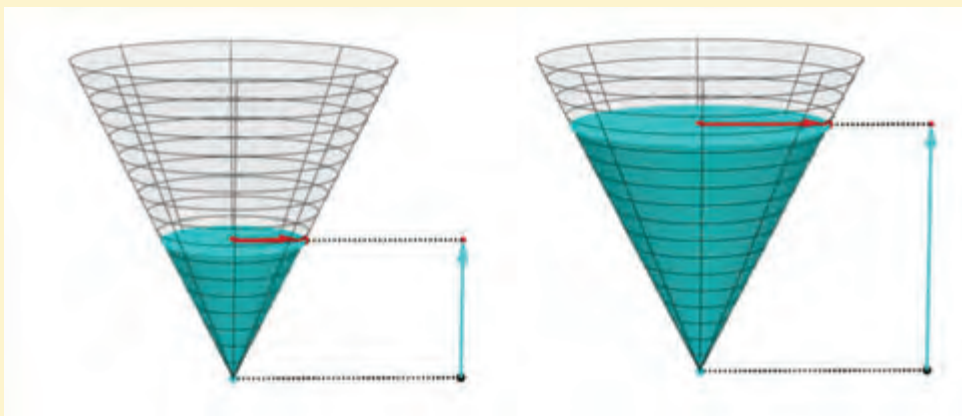
**2<sup>η</sup> κίνηση:** Μπορούμε να το εκφράσουμε πιο μαθηματικά; Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού. Ωστόσο ο μαθητής γνωρίζει ή πρέπει να γνωρίζει ότι όταν αναφερόμαστε στο ρυθμό μεταβολής στην ουσία αναφερόμαστε στην παράγωγο.

**3<sup>η</sup> κίνηση:** Η παράγωγος είναι το διαφορικό  $\frac{dV}{dt}$ . 4<sup>η</sup> σκέψη-κίνηση, με τι σχετίζεται το  $dt$ , φυσικά με

τη μεταβολή του χρόνου. Είναι λογικό, παρατηρώντας τους δύο παρακάτω κώνους να βλέπουμε την αύξηση του νερού, εδώ με τη βοήθεια της τεχνολογίας (GeoGebra) έχουμε μια ωραία οπτικοποιημένη εμφάνιση του προβλήματος, συγκαταλέγεται αυτή η οπτικοποίηση στις ευρετικές. Αυτή είναι μια γενική και ολοκληρωμένη συνόψιση γύρω από το τις ευρετικές σε σχέση με το Ρυθμό Μεταβολής.

Να ένα συγκεκριμένο πρόβλημα για λύση: **Από Κωνικό Χωνί τρέχει νερό με ρυθμό  $2\text{cm}^3/\text{sec}$ . Η ακτίνα του κώνου είναι  $9\text{ cm}$  και το ύψος του  $15\text{ cm}$ . Με τι ρυθμό κατεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που το ύψος του είναι  $6\text{ cm}$ ;**

Πριν από όλα, αφού γίνει ανάγνωση και κατανόηση του προβλήματος να γίνει η κατάταξη, εδώ έχουμε πρόβλημα «εύρεσης» δηλαδή υπολογισμού. Όπως ήδη ειπώθηκε, έχουμε ρυθμό μεταβολής άρα  $r = 2\text{cm}^3/\text{sec}$  και μια διαφοροποίηση από τα προηγούμενα παραδείγματα, εφόσον τώρα πρέπει να βρεθεί η μεταβολή (μείωση) του όγκου στη μεταβολή του χρόνου, άρα η παράγωγος θα είναι αρνητική.



Με λίγο νερό στον 1<sup>ο</sup> κώνο και στη συνέχεια με αρκετό νερό στον 2<sup>ο</sup> κώνο, άρα έχουμε αύξηση ( $r > 0$ )

**Λύση:**  $V'(t)$  ή  $\frac{dV}{dt} = -2 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ . Επίσης  $h(t_0) = 6 \text{ cm}$ . Τι ζητάμε; το  $h'(t_0)$ ; Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ

είναι όμοια (ορθογώνια και η γωνία Ο κοινή). Άρα  $\frac{OA}{OG} = \frac{AB}{GD} = \frac{OB}{OD}$  και από την 1<sup>η</sup> ισότητα έχουμε

$$\frac{h(t)}{15} = \frac{R(t)}{9} \text{ οπότε } R(t) = \frac{9}{15}h(t) \text{ δηλαδή } R(t) = \frac{3}{5}h(t).$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον τύπο του όγκου του κώνου:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ που στην προκειμένη περίπτωση γίνεται:}$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2(t) \cdot h(t). \text{ Άρα } V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{25}h^2(t) \cdot h(t) \text{ με}$$

αντικατάσταση της ακτίνας  $R(t)$ . Κατόπιν με πράξεις βρίσκουμε

$$V(t) = \frac{3}{25}\pi \cdot h^3(t). \text{ Έτσι } V'(t) = \frac{9}{25}\pi \cdot h^2(t) \cdot h'(t). \text{ Και τη χρονική}$$

$$\text{στιγμή } t_0 \text{ έχουμε: } V'(t_0) = \frac{9}{25}\pi \cdot h^2(t_0) \cdot h'(t_0) \text{ και με}$$

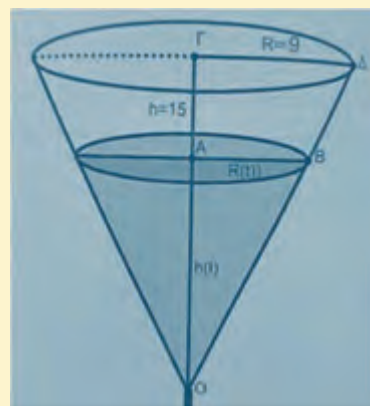
$$\text{αντικατάσταση προκύπτει: } -2 = \frac{9\pi}{25} \cdot 36h^2(t_0). \text{ Άρα } h'(t_0) = -\frac{25 \text{ cm}}{162 \text{ sec}}.$$

Εν προκειμένω, με την οπτικοποίηση κατανοούμε τον αρνητικό ρυθμό μεταβολής και τη χρήση των ομοίων τριγώνων, βασικά στοιχεία για τη λύση του προβλήματος.

Έτσι, δημιουργούμε τις προϋποθέσεις, για την ακρίβεια διδάσκουμε, προκυμμένου να μάθει ο μαθητής πώς να υπολογίζει, πώς να αποδεικνύει και γενικότερα πώς να σκέφτεται. Πολλοί ρωτούν: μα τι μας χρειάζονται στη ζωή τα τόσα Μαθηματικά που μας διδάσκουν στο σχολείο; Το βασικό που οφείλει να φέρει σε πέρας η Μαθηματική Εκπαίδευση είναι η διδασκαλία και η ανάπτυξη της σκέψης, που πρέπει να έχει ένας μαθητής, ώστε να αντιμετωπίζει τα προβλήματα.

### Αναφορές - παραπομπές από το κείμενο:

1. **Polya, G.** (1998). Πώς να το λύσω; Αθήνα: Εκδόσεις Ινστιτούτο Βιβλίου Καρδαμίτσα.
2. **Λουρίδας, Σ.** (2024). Πως το σκέφτηκες; Η Μαθηματική Αναλυτική Σκέψη ως την στιγμή της δημιουργίας κατάλληλης μεθόδου επίλυσης ή κατασκευής Γεωμετρικού Προβλήματος. Εισήγηση στο 39<sup>ο</sup> Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
3. **Δάσιος, Γ.** (2024). Χθες-Σήμερα-Αύριο. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Ευκλείδης Β' τεύχος 134.
4. **Ρουσόπουλος, Γ.** (2023). Ευρετική. Μεθοδολογία Επίλυσης Μαθηματικών Προβλημάτων. Αθήνα: Ελληνικές Εκδόσεις.
5. **Ανδριανός, Η.** (2003). ΑΝΑΛΥΣΗ-ΣΥΝΘΕΣΗ. Διπλωματική Εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών.
6. **Λουρίδας, Σ. & Τσιφάκης, Χ.** (2019). Διαφορικό και Ρυθμός Μεταβολής, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Ευκλείδης Β' τεύχος 114.



Μείωση του όγκου του νερού





# αφορμές ... και ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΑ



## Λύθηκε το κβαντικό αίνιγμα δεκαετιών

Τα ηλεκτρόνια στο γραφένιο αφηφούν τους νόμους της Φυσικής. Τα ηλεκτρόνια στο γραφένιο μπορούν



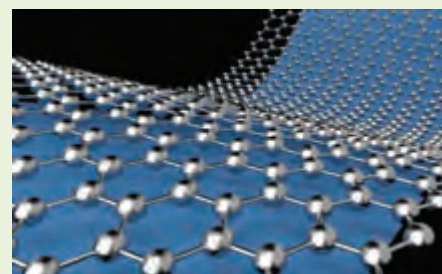
να συμπεριφερθούν σαν ένα **τέλειο υγρό**, αφηφώντας τους γνωστούς νόμους της Φυσικής. Αυτή η ανακάλυψη προωθεί τόσο την κατανόηση της βασικής επιστήμης, όσο και τις μελλοντικές εφαρμογές στις **κβαντικές τεχνολογίες**. Για δεκαετίες, η **κβαντική** Φυσική έχει καταπιαστεί με ένα θεμελιώδες ερώτημα: Μπορούν τα ηλεκτρόνια να κινούνται σαν ένα άψογο, χωρίς καμία αντίσταση **υγρό**, που διέπεται από μια καθολική κβαντική σταθερά; Η ανίχνευση αυτής της ασυνήθιστης κατάστασης, έχει αποδειχθεί σχεδόν αδύνατη στα περισσότερα υλικά από τη στιγμή που τα ελαττώματα σε ατομικό επίπεδο, οι προσμίξεις και οι

δομικές ανωμαλίες διαταράσσουν το φαινόμενο.

Μια ομάδα ερευνητών από το Τμήμα Φυσικής του Indian Institute of Science (IISc), σε συνεργασία με επιστήμονες από το National Institute for Materials Science της Ιαπωνίας, κατάφερε να εντοπίσει για πρώτη φορά αυτό το σπάνιο ηλεκτρονικό «υγρό» στο γραφένιο – ένα υλικό που αποτελείται από ένα μόνο στρώμα ατόμων άνθρακα. «Είναι καταπληκτικό πως, μπορούν να γίνουν ακόμα τόσα πολλά, σε ένα μόνο στρώμα γραφενίου, ακόμη και 20 χρόνια μετά την ανακάλυψή του», σημειώνει ο Arindam Ghosh, καθηγητής στο τμήμα Φυσικής, IISc, και ένας από τους συγγραφείς που συνυπογράφουν τη μελέτη.



Οι ερευνητές δημιούργησαν εξαιρετικά καθαρά δείγματα γραφενίου και παρακολούθησαν τόσο την ηλεκτρική όσο και τη θερμική αγωγιμότητα. Προς έκπληξή τους, παρατήρησαν ότι οι δύο αυτές ιδιότητες κινούνταν σε αντίθετες κατευθύνσεις: όταν αυξανόταν η ηλεκτρική αγωγιμότητα, η θερμική αγωγιμότητα μειωνόταν, και το αντίστροφο. Το απροσδόκητο αυτό αποτέλεσμα, αποκάλυψε μια εντυπωσιακή απόκλιση από τον νόμο Wiedemann-Franz, έναν γνωστό κανόνα στη Φυσική των μετάλλων, σύμφωνα με τον οποίο, οι δύο αγωγιμότητες πρέπει να είναι άμεσα αναλογικές.



Στα δείγματα γραφενίου τους, η ομάδα του IISc παρατήρησε ότι ο νόμος αυτός δεν ίσχυε σχεδόν καθόλου σε χαμηλές θερμοκρασίες. Η απόκλιση ήταν τεράστια – πάνω από 200 φορές – δείχνοντας ότι οι μηχανισμοί αγωγής ηλεκτρικού ρεύματος και θερμότητας λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

Αυτή η αποσύνδεση, όμως, δεν είναι τυχαίο γεγονός – αποδείχθηκε ότι τόσο η αγωγιμότητα του φορτίου όσο και η αγωγιμότητα της θερμότητας σε αυτή την περίπτωση βασίζονται σε μια καθολική σταθερά, ανεξάρτητη από το υλικό, η οποία ισούται με την

κβάντωση της αγωγιμότητας, μια θεμελιώδης τιμή που σχετίζεται με την κίνηση των ηλεκτρονίων. Τα ευρήματα, καθιερώνουν το γραφένιο ως την ιδανική, χαμηλού κόστους πλατφόρμα, για την εξερεύνηση εννοιών από τη φυσική υψηλών ενεργειών και την αστροφυσική, όπως είναι η θερμοδυναμική των **μαύρων τρυπών** και η κλιμάκωση της **εντροπίας** εμπλοκής, σε συνθήκες εργαστηρίου. Επίσης από τεχνολογική σκοπιά, η παρουσία του ρευστού Dirac στο γραφένιο, προσφέρει σημαντικές δυνατότητες για χρήση σε κβαντικούς αισθητήρες, ικανούς να ενισχύσουν πολύ ασθενή ηλεκτρικά σήματα και να ανιχνεύσουν εξαιρετικά αδύναμα μαγνητικά πεδία. [πηγή: NEA, Επιστήμη και Τεχνολογία]



# 8<sup>ος</sup> διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2026

## Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων

Στις **7 Μαρτίου 2026** θα γίνει ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.



Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ, είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα**, μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις **δυνατότητες να σκέπτεται** ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος θα πραγματοποιηθεί **ηλεκτρονικά εξ' αποστάσεως** και φέτος, **δεν ελέγχει άμεσα** ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να **σκέφτεται με τα εφόδια** που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη **σκέψη**. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα **επίλυσης** προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα.

Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί **εργαλείο βελτίωσης** των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η **μη απογοήτευση** των μαθητών, που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η ύπαρξη **πρόκλησης** για μαθητές με **υψηλούς** στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδετικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**.



## Διεθνείς Ολυμπιάδες Μαθηματικών



**2027**, στην **Κροατία** (Sibenik). Η **egmo** είναι ειδική Ολυμπιάδα Μαθηματικών που γίνεται για κορίτσια, όπως επίσης έχουν δικαίωμα συμμετοχής και στην διεθνή διοργάνωση της IMO, που φέτος θα γίνει στην Κίνα.

**Η 15<sup>η</sup> egmo 2026:** Θα γίνει φέτος από 9–15 Απριλίου 2026 στη **Γαλλία** (Bordeaux), με 250 συμμετέχοντες από 600 χώρες. Η επόμενη διοργάνωση της egmo θα γίνει το



**Η 67<sup>η</sup> IMO 2026.** Θα γίνει τον **Ιούλιο του 2026** στην **Κίνα** (Shanghai) με 110 περίπου συμμετέχουσες χώρες. (Imo 2026.cn)

**Η 43<sup>η</sup> BMO 2026** Βαλκανιάδα Μαθηματικών, που φέτος θα γίνει **3-8 Μαΐου 2026** στην **Ελλάδα** (Θεσσαλονίκη)

**Η 30<sup>η</sup> jBMO** Βαλκανιάδα Μαθηματικών, για μαθητές και μαθήτριες μέχρι **15 χρονών**, που φέτος θα γίνει τον **Ιούνιο του 2026** στην **Ρουμανία**.

# Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 20€

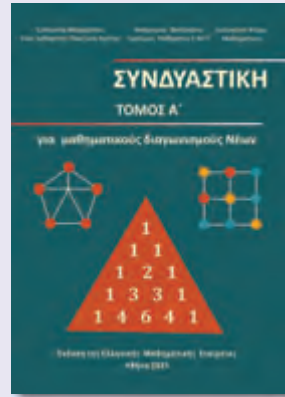
Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο

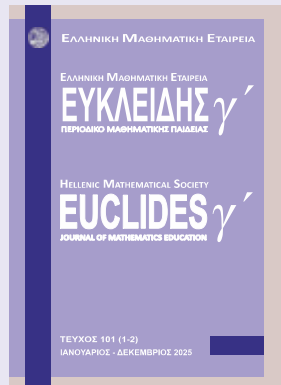


Τιμή βιβλίου: 15€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα  
 τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025  
 www.hms.gr e-mail: info@hms.gr