Το πηλίκο δύο αριθμών ονομάζεται **λόγος** αυτών των αριθμών. Η ισότητα λόγων ονομάζεται **αναλογία**. Κάθε σχέση αναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$. Οι όροι α, β ονομάζονται **ομόλογοι** ή **αντίστοιχοι**. Το ίδιο και οι όροι γ, δ. Οι όροι α, δ ονομάζονται **άκροι** όροι, ενώ τα β, γ **μέσοι** όροι. Ο τέταρτος όρος δ ονομάζεται και τέταρτη ανάλογος των α, β και γ.

Ιδιότητες αναλογιών.

- $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{a}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$,
- $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{a\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$,
- $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{a\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\ldots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\ldots+\kappa}{\beta+\delta+\ldots+\lambda}$

Πολλά σχέδια δεν χωρούν στο χαρτί στο φυσικό τους μέγεθος διότι είναι πολύ μεγάλα (χάρτες) ή πάρα πολύ μικρά για να τα μελετήσουμε ή να δώσουμε οδηγίες για την κατασκευή τους. Για τους λόγους αυτούς, όταν τα σχεδιάζουμε, μικραίνουμε ή μεγαλώνουμε τις πραγματικές τους διαστάσεις, δηλαδή σχεδιάζουμε υπό κλίμακα. Στην υπό κλίμακα σχεδίαση υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο σχεδιασμένο μήκος ενός αντικειμένου και στο πραγματικό. Σε κάθε σχέδιο αναγράφεται η κλίμακα σχεδίασης σε εμφανή θέση πχ. 1:10, 1:20, 1:50, 1:100. Όταν γράφουμε 1:50 σημαίνει ότι τα μήκη στο σχέδιο είναι 50 φορές μικρότερα από ότι είναι στην πραγματικότητα. Όλα τα μήκη και οι επιφάνειες του σχεδίου παρουσιάζονται μικρότερα, ίσα ή μεγαλύτερα από τα πραγματικά. Όμως οι γωνίες παραμένουν αναλλοίωτες.

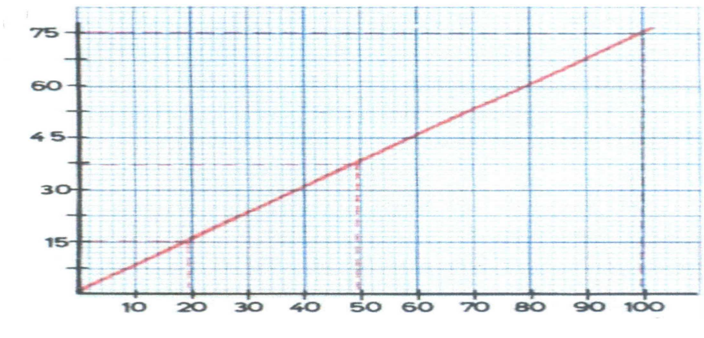
Παράδειγμα 1. Μία απόσταση, σε χάρτη με κλίμακα 1:10.000.000 μετρήθηκε και ήταν 5 cm. Για τον πραγματικό κόσμο που μας περιβάλλει αντιστοιχεί σε απόσταση 50.000.000 cm=500 Km. Από την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει ότι:

Το 1 cm του χάρτη αντιστοιχεί σε 10.000.000 πραγματικά cm
Τα 5 cm του χάρτη αντιστοιχεί σε x; πραγματικά cm

Είναι $x=10.000.000\frac{5}{1}=50.000.000\ cm=500\ km$

Δύο ποσά ονομάζονται **ανάλογα**, αν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Δύο ποσά x,y είναι ανάλογα όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο $\frac{y}{x}=a$. Το πηλίκο a ονομάζεται **συντελεστής αναλογίας**.

Σχήμα 1. α=0,75



Αν $a=1$ τότε η ημιευθεία που παριστάνει την αναλογία ξεκινά από το σημείο $O(0,0)$ δηλαδή την αρχή του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων και διχοτομεί τη γωνία $\sphericalangle xOy$.

Όταν το ποσό y είναι ποσοστό του ποσού x, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση $y=\frac{a}{100}x$ και είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας $\frac{a}{100}$ ή $a\%$. Η σχέση $y=ax$ εκφράζει μία αλληλεπίδραση των ποσών x, y. Δηλαδή ο διπλασιασμός (ή τριπλασιασμός κοκ) του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό (ή τριπλασιασμό κοκ) του άλλου ποσού. Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών $(x,\ y)$ δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο $O(0,0)$ δηλαδή την αρχή του ορθοκανονικού συστήματος των αξόνων.

Παράδειγμα 2. Ένα κομμάτι σιδερένιας ράβδου μήκους 5 m έχει βάρος 8 Kg. Ένα κομμάτι της ίδιας σιδερένιας ράβδου διπλάσιου μήκους ζυγίζει 16 Kg.

Πράγματι Τα 5 m ζυγίζουν 8 Kg.

Τα 10 m ζυγίζουν x; Kg. Όπου $x=8\frac{10}{5}=16$ Kg.

Παράδειγμα 3. Σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R=10\ cm$ 10 cm να βρείτε το τόξο που αντιστοιχεί σε γωνία 90^0. Είναι γνωστό ότι το μήκος Γ της περιφέρειας κύκλου είναι $\Gamma=2\pi R=2\cdot 3{,}14\cdot 10=62{,}8\ cm$.

Σε τόξο 360^0 αντιστοιχεί μήκος 62,8 cm

Σε τόξο 90^0 αντιστοιχεί μήκος x; cm όπου $x=62{,}8\frac{360^0}{90^0}=62{,}8\frac{1}{4}=15{,}7\ cm$

Παράδειγμα 4. Αν για κοστολογημένη εργασία αξίας 1.000 € η φορολογία είναι 300 €, πόσος φόρος αντιστοιχεί σε συμφωνημένη εργασία 3.500 €;

Στα 1.000 € φορολογείσαι 300 €.

Στα 3.500 € φορολογείσαι x; € όπου $x=300\frac{3.500}{1.000}=30\cdot 35=1.050$ €.

Παράδειγμα 5. Κατά την κατασκευή μεταλλικών βιδών από μεταλλικές ράβδους η φύρα είναι 8%. Αν οι ράβδοι ζυγίζουν 200 Kg, πόσο θα είναι το βάρος των βιδών;

Στα 100 Kg η φύρα είναι 8 Kg.

Στα 200 Kg η φύρα είναι 16 Kg. Άρα, οι βίδες που θα παραχθούν ζυγίζουν 200 –16=184 Kg.

Παράδειγμα 6. Όταν ένας άξονας μπει σε τόρνο, χάνει 5% από το βάρος του. Αν ο τορναρισμένος άξονας ζυγίζει 40 Kg, πόσο ζύγιζε ατορνάριστος;

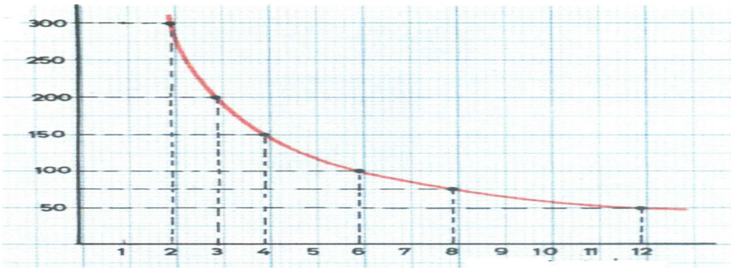
Από τα 100 Kg ατορνάριστου προκύπτουν 95 Kg τορναρισμένου.

Από τα x; Kg ατορνάριστου προκύπτουν 40 Kg τορναρισμένου.

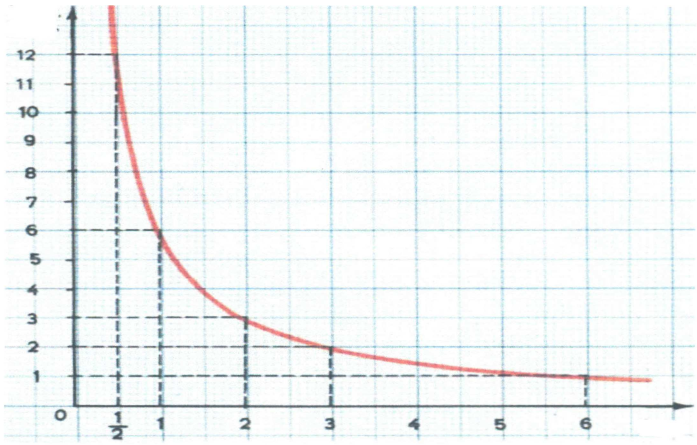
Είναι $x=100\frac{40}{95}=42{,}1$ Kg

Δύο μεγέθη είναι **αντιστρόφως ανάλογα** όταν η μεταβολή τους είναι τέτοια ώστε: αν το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό, το άλλο να διαιρείται με τον ίδιο αριθμό. Όταν δύο ποσά x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό: $x\cdot y=a$, $a\neq 0$. Αν $a=1$ τότε τα x, y είναι αντίστροφοι αριθμοί. Τα σημεία που παριστάνουν τα ζεύγη $(x,\ y)$ ανήκουν σε μία καμπύλη γραμμή που ονομάζεται **υπερβολή**. Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox, Oy διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν λαμβάνουν ποτέ την τιμή μηδέν.

Σχήμα 2 α. Υπερβολή.



Σχήμα 2β. Υπερβολή.



Παράδειγμα 7. Οκτώ ναυτικοί βάφουν ένα πλοίο σε 40 ημέρες. Οι διπλάσιοι ναυτικοί θα χρειασθούν το μισό χρόνο προκειμένου να το βάψουν.

Πράγματι 8 ναυτικοί θέλουν 40 ημέρες

Οι 16 ναυτικοί θέλουν x; ημέρες όπου $x = 40\dfrac{8}{16} = 20$